La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum. Étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires pour l'étude du champ additif à l'école primaire.

Danielly Regina Kaspary dos Anjos

UFMS
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

UGA Université Grenoble Alpes

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE GRENOBLE ALPES

préparée dans le cadre d'une cotutelle *entre la Communauté Université Grenoble Alpes* et Université Fédérale du Mato Grosso do Sul

Spécialité : **Mathématiques et Informatique – Didactique des Mathématiques** pour Communauté Université Grenoble Alpes

Arrêté ministériel : le 6 janvier 2005 – 25 mai 2016

Spécialité : **Éducation Mathématique** pour Université Fédérale du Mato Grosso do Sul

Présentée par

Danielly Regina KASPARY dos Anjos

Thèse dirigée par **Hamid CHAACHOUA** et **Marilena BITTAR**

préparée au sein de **Laboratoire d'Informatique de Grenoble – LIG**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et Tecnologie de l'Informationt, Informatique**
et de **Programa de Pós-graduação em Educação Matemática - PPGEdumat**

La noosphère, un lieu de tension pour le curriculum.

Étude didactique de la mise en place d'un système d'évaluation de manuels scolaires pour l'étude du champ additif à l'école primaire.

Thèse soutenue publiquement le **28 septembre 2020**,
devant le jury composé de :

Espagne, Berta BARQUERO
Professeure Associée, Université de Barcelone, Examinatrice
Brésil, José Luiz Magalhaes DE FREITAS
Professeur, Université Fédéral du Mato Grosso do Sul, Examinateur
France, Floriane WOZNIAK
Professeure des Universités, Université Toulouse-Jean-Jaures, Présidente
Brésil, Paula Moreira Baltar BELLEMAIN
Professeure, Université Fédérale du Pernambuco, Rapportrice
Espagne, Marianna BOSCH
Professure, Université Raymon-Lulle, Rapportrice
France, Annie BESSOT
Maitre de Conférence, Université Grenoble Alpes, Invitée
France, Hamid CHAACHOUA
Professeure des Universités, Université Grenoble Alpes, Directeur
Brésil, Marilena BITTAR
Professeure, Université Fédéral du Mato Grosso do Sul, Directrice

TESE

para obter o título de

DOUTORADO PELA UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL

Preparado em regime de cotutela entre a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul e a Comunidade Universidade Grenoble Alpes

Especialidade: **Matemática e Informática – Didática da Matemática** para a Comunidade Universidade Grenoble Alpes

Especialidade : **Educação Matemática** para a Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

Apresentado por

Danielly Regina KASPARY dos Anjos

Tese orientada por **Marilena BITTAR** e **Hamid CHAACHOUA**

Preparada no **Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PPGEdumat**
e no **Laboratório de Informática de Grenoble – LIG**, na **Escola Doutoral Matemática, Ciências e Tecnologia da Informação, Informática**.

A noosfera, um lugar de tensão para o currículo.

Estudo didático da implementação de um sistema de avaliação de livros didáticos para o estudo do campo aditivo nos anos iniciais.

Tese defendida publicamente em **28 de setembro de 2020**,
para a banca composta por :

Espanha, Berta BARQUERO
Universidade de Barcelona
Brasil, José Luiz Magalhaes DE FREITAS
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
França, Floriane WOZNIAK
Universidade Toulouse-Jean-Jaures
Brasil, Paula Moreira Baltar BELLEMAIN
Universidade Federal de Pernambuco
Espanha, Marianna BOSCH
Universidade Raymon-Lulle
França, Annie BESSOT
Universidade Grenoble Alpes
Brasil, Marilena BITTAR
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Orientadora
França, Hamid CHAACHOUA
Universidade Grenoble Alpes, Orientador

Résumé

Au sein des sociétés contemporaines, nous remarquons l'existence d'une entité qui s'occupe à penser et à définir les choix curriculaires sur lesquels les systèmes officiels d'enseignement sont soumis. Cette entité est ce que nous appelons noosphère dans la théorie anthropologique du didactique (TAD). La noosphère est un lieu de tension pour le curriculum ; son rôle est de juger ce qu'est, devrait ou pourrait être objet d'étude dans la société où elle opère. Les formes d'étude sont aussi susceptibles à ses jugements. Soutenus par le cadre de la TAD, nous proposons que toute noosphère relative à une société se laisse dévoiler par la prise en compte des institutions qui la constituent. Ces institutions ont leurs propres modes de fonctionnement et participent chacune à sa façon des décisions curriculaires. L'organisation d'une noosphère présuppose néanmoins des hiérarchisations de pouvoirs, puis des assujettissements entre les institutions. À cet égard, nous assumons comme hypothèse de travail que la propension aux changements curriculaires peut être éclairée par l'analyse des assujettissements des institutions composant la noosphère. Notre étude est illustrée par le contexte de la société brésilienne, centrée dans la période 1994 - 2016. Comme dans beaucoup de sociétés, les manuels sont un important véhicule du curriculum au Brésil. Compte tenu de cela, depuis le milieu des années 1990 a été établi une relation d'assujettissement entre une institution de l'État qui veille sur la qualité des manuels, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, et une institution de caractère privé composée par les maisons d'édition, I_{M}. Le fait est que le début de cette période est marqué par le réveil de la noosphère de cette société, après un intervalle où cette noosphère était quasiment inactive en fonction du contexte historico-politique. C'est pour cela que l'héritage du mouvement des mathématiques modernes était toujours présent dans les manuels de cette époque. $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ arrive dans ce scénario avec la mission de surveiller la production de manuels pour les mettre en conformité à un projet curriculaire national. Nous étudions l'effet des évaluations sur les manuels au fil du temps, avec un parage sur la discipline de Mathématiques à l'école primaire, en particulier sur les opérations d'addition et de soustraction. Pour mener cette étude, nous analysons les discours de cette institution évaluatrice et nous les confrontons avec les manuels produits par le marché privé. Plusieurs concepts interviennent comme outils pour interpréter et modéliser l'activité mathématique projetée par la noosphère : praxéologie, ostensifs, générateur de types de tâches, variables, portée de technique et autres. Nous proposons dans notre travail des réflexions théoriques et méthodologiques en ce qui concerne ces concepts. Notre analyse est faite en cinq études de cas, où nous repérons des changements dans les manuels, mais également identifions beaucoup de résistances de I_{M} aux demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. La question est que d'autres institutions poussent ou freinent les évolutions curriculaires. Après tout, il est nécessaire d'assumer les impuissances de la noosphère face aux contraintes de la réalité du fonctionnement des systèmes didactiques.

Mots-clés : Manuels scolaires. PNLD. Noosphère. Assujettissement. Champ additif. Praxéologie. T4tel. Variables. Curriculum.

Resumo

Nas sociedades contemporâneas, existe uma entidade que se responsabiliza pelas reflexões e tomadas de decisões a respeito das escolhas curriculares, escolhas essas as quais os sistemas de ensino oficiais estão sujeitos. Essa entidade é o que chamamos de noosfera na teoria antropológica da didática (TAD). A noosfera é um local de tensão para o currículo ; seu papel é de julgar o que é, deveria ou poderia ser objeto de estudo na sociedade onde ela atua. As formas de estudo também são suscetíveis a seus julgamentos. No âmbito do quadro teórico da TAD, propomos que a noosfera de qualquer sociedade pode ser melhor compreendida levando em consideração as instituições que a constituem. Essas instituições têm seus próprios modos de funcionamento e cada uma participa à sua maneira das decisões curriculares. A organização de uma noosfera, no entanto, pressupõe hierarquias de poder e, então, assujeitamentos entre as instituições. Nesse sentido, assumimos como hipótese de trabalho que a propensão a mudanças curriculares pode encontrar explicações na análise dos assujeitamentos das instituições. Nosso estudo é ilustrado pelo contexto da sociedade brasileira, centrado no período de 1994 a 2016. Como em muitas sociedades, os livros didáticos são um importante veículo do currículo brasileiro. Em vista disso, desde meados da década de 1990, foi estabelecida uma relação de assujeitamento entre uma instituição do Estado que supervisiona a qualidade dos livros didáticos ($\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$) e o mercado editorial (I_{M}) : um instrumento de regulação e avaliação dos livros didáticos brasileiros. O fato é que o início desse período é marcado pelo despertar da noosfera dessa sociedade, após um intervalo em que ela se mostrava quase inativa em virtude do contexto político-histórico. É por essa razão que alguns legados do Movimento da Matemática Moderna ainda estavam presentes nos livros didáticos da época. $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ chega a esse cenário com a missão de monitorar a produção de livros didáticos para adequá-los a um projeto de currículo nacional. Nesse contexto, estudamos o efeito das avaliações dos livros didáticos ao longo do tempo, com um recorte na disciplina de matemática dos anos iniciais, em particular sobre o conteúdo das operações de adição e subtração. Para a realização deste estudo, analisamos os discursos desta instituição avaliadora e os confrontamos com os livros produzidos pelo mercado privado. Diversos conceitos são utilizados como ferramentas para interpretar e modelar a atividade matemática projetada por essa noosfera : praxeologia, ostensivos, gerador de tipos de tarefas, variáveis, escopo de uma técnica e outros. Em nosso trabalho, desenvolvemos reflexões teóricas e metodológicas sobre esses conceitos. Nossa análise é feita em cinco estudos de caso, onde identificamos mudanças nos livros didáticos, mas também identificamos muita resistência da parte de I_{M} às solicitações de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Notamos, nesse sentido, que outras tantas instituições pulsam ou atrasam a evolução do currículo. Afinal, é necessário assumir a impotência da noosfera diante das restrições próprias da realidade do funcionamento dos sistemas de didáticos.

Palavras-chave : Livros didáticos. PNLD. Noosfera. Assujeitamento. Campo aditivo. Praxeologia. T4tel. Variáveis. Currículo.

Abstract

Within contemporary societies, we notice the existence of an entity that is concerned with thinking and defining the curricular choices on which official education systems are subject. This entity is what we call a noosphere in the Anthropological Theory of the Didactics (ATD). The noosphere is a place of tension for the curriculum ; its role is to judge what is, should, or could be the object of study in the society in which it operates. The forms of study are also susceptible to his judgments. Supported by the framework of the ATD, we propose that any noosphere relating to a society can be revealed by considering the institutions that constitute it. These institutions have their modes of operation and each participates in their way in curricular decisions. The organization of a noosphere nevertheless presupposes hierarchies of powers, then subjugations between institutions. In this regard, we assume as a working hypothesis that the propensity for curricular changes can be informed by the analysis of the subjugations of the institutions making up the noosphere. Our study is illustrated by the context of Brazilian society, centered in the period 1994 - 2016. As in many societies, textbooks are an important vehicle of the curriculum in Brazil. Given this, since the mid-1990s a subjugation relationship has been established between a state institution that watches over the quality of textbooks, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, and a private institution composed by publishing houses, I_{M}. The fact is that the beginning of this period is marked by the awakening of the noosphere of this society, after an interval where this noosphere was almost inactive due to the historical-political context. Therefore, the legacy of the modern mathematics movement was still present in the textbooks of that time. $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ arrives in this scenario with the mission of monitoring the production of textbooks to bring them into conformity with a national curriculum project. We study the effect of assessments on textbooks over time, with a focus on the subject of Mathematics in elementary school, especially on addition and subtraction operations. To carry out this study, we analyze the speeches of this evaluating institution and compare them with the textbooks produced by the private market. Several concepts intervene as tools to interpret and model the mathematical activity projected by the noosphere : praxeology, ostensives, generator of types of tasks, variables, scope of technique, and others. In our work, we offer theoretical and methodological reflections regarding these concepts. Our analysis is done in five case studies, where we spot changes in the textbooks, but also identify a lot of resistance from I_{M} to $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$'s requests. The question is that other institutions are pushing or slowing down curriculum changes. After all, it is necessary to accept the powerlessness of the noosphere in the face of the constraints of the reality of the functioning of didactic systems.

Keywords : Textbooks. PNLD. Noosphere. Subjection. Additive field. Praxeology. T4tel. Variables. Curriculum.

João Paulo avait certainement moins que 5 ans quand il m'a expliqué avec beaucoup d'enthousiasme que les étoiles filantes, ces jolies traces de lumière sur le ciel, ce sont des météorites qui traversent l'atmosphère terrestre. Après sa découverte, les étoiles filantes sont devenues, incontestablement, beaucoup plus charmantes à son regard. Et à mon regard aussi.

Aux étoiles filantes de João Paulo
qui sont plus belles
parce que la science peut les expliquer

Remerciements

Je commence mes remerciements par les deux principaux responsables de ma formation doctorale.

Marilena, en effet notre histoire est beaucoup plus longue que ce doctorat. Merci de m'avoir accompagné ces 10 ans. Merci pour les chemins que tu m'as montrés et pour m'avoir fait croire que je pouvais les suivre. Merci de me faire confiance, d'avoir entendu avec énormément de respect mes questions naïves du début de notre relation. Merci pour tout ce que j'ai appris avec toi. Tu as joué un rôle fondamental dans le parcours de mes études.

Hamid, quel beau cadeau ce fut te rencontrer. Pendant la thèse j'ai vécu des moments scientifiques extraordinaires qui ont dépassé toutes les attentes que je pouvais imaginer pour ce doctorat - je te les dois. Merci pour ton esprit enthousiaste qui transforme toute discussion en un moment grandissant - et de prendre mes désaccords avec tellement de respect. Merci pour ton soutien incommensurable face à toutes les adversités que nous avons eues pour rendre cette thèse possible. Merci surtout pour ton encouragement constant. Merci de croire en moi.

Je remercie aussi chaleureusement Annie pour toute sa générosité. Annie, merci de me faire apprendre à chaque rencontre, de m'avoir aidé en France, pour ta contribution inestimable pour le texte de cette thèse et pour ta militance en didactique qui m'inspire tellement. Merci pour ta précieuse amitié.

J'ai un jury qui me rend très honorée. Paula et Marianna, j'ai une grande admiration scientifique de vos travaux. Un immense merci d'avoir accepté la mission d'être rapportrices de la thèse. Merci pour les rapports soigneusement réalisés, qui révèlent un regard attentif sur le travail. Berta, merci pour les échanges et pour les contributions que tu as apportées à la thèse ; te rencontrer durant ce parcours a été un vrai plaisir. Professor Zé, également au cours des 10 dernières années, j'ai eu le plaisir d'apprendre de toi sur les mathématiques, sur les sciences et aussi, et beaucoup, sur les valeurs humaines. J'ai beaucoup d'admiration pour toi. Merci. Enfin, mon jury de rêve est complété par la présence de Floriane. Floriane, un grand merci pour les échanges que nous avons eu l'occasion d'avoir dans les congrès, y inclut celui où j'ai fait ma première présentation en français. Merci d'avoir accepté d'être présidente du jury.

Je remercie également Yves Chevallard pour les riches moments de discussions et pour ceux aimablement consacrés à mes questions.

Je tiens à remercier tous les collègues de la Didactique avec lesquels j'ai eu le plaisir d'échanger et d'apprendre.

Un grand merci à l'équipe MeTAH pour m'avoir si bien accueilli à Grenoble. Et affectueusement merci à quatre personnes spéciales que j'ai eu la chance de rencontrer dans ce labo : Hang, Paula, Rosa et Véronique.

Merci aussi au groupe DDMat et mes collègues brésiliens de doctorat. Merci à Deise.

Merci à mes chers ami(e)s qui rendent ma vie plus heureuse et plus belle.

Merci à ma famille, qui est l'*institution* la plus importante de ma vie.

Merci à Vinícius. Merci pour ton soutien qui me rend forte et confiante. Merci d'ignorer complètement la distance de l'océan Atlantique et de me faire croire que le monde n'est pas si grand. Merci d'être toujours à mes côtés.

Cette thèse est aussi dédiée à ma maman, d'où vient mon courage à affronter les difficultés avec sagesse et avec qui j'ai appris à reconnaître et à être responsable des avantages que la vie nous offre. Maman, merci.

Merci à Donizete, mon beau-père, qui m'a montré que les principaux éléments qui caractérisent l'*institution* « famille » sont l'amour et l'entraide inconditionnelle.

Merci à Capes pour la bourse brésilienne, au LIG et à l'équipe MeTAH pour toute l'aide financière apportée et à l'équipe du CRM (Centre de Recerca Matemàtica) de Barcelone pour le financement de deux mois d'étude intensive.

Table des matières

Préface

Les motivations

Curriculum, mot francisé de compréhension diverse, est dans le paysage de plusieurs recherches qui s'intéressent à la diffusion et non-diffusion des objets en société. Beaucoup de ces recherches centrent leurs attentions sur les institutions scolaires, parce que même en tenant compte des métamorphoses d'adaptation, une partie du curriculum qui y existe, a été pensé pour y exister.

> Quand elle [la skholè] devient aussi affaire d'État, quand l'État décrète la skholè obligatoire, une normalisation s'opère : en une École tenue pour adéquatement différenciée - en primaire et secondaire, etc. - afin d'intégrer l'essentiel des pratiques scolaires existantes, se mettent en place des curriculums nationaux, répertoires d'œuvres à étudier et de formes d'étude légitimes. L'École devient ainsi le principal opérateur d'entrée dans la société : les jeunes générations viennent y apprendre la société, en apprenant certaines des œuvres qui la composent. (Chevallard, 1998c, p. 01)

Parmi les recherches relatives aux institutions scolaires, il y a celles qui assument un curriculum établi, dans un moment donné, pour interroger les conditions et les contraintes afin de le faire bien fonctionner. Les pratiques des enseignants et l'apprentissage des élèves ont souvent une place spéciale dans ces études. Le curriculum est constamment considéré dans ces cas-là comme une sorte de donnée pour la recherche. Il existe par contre d'autres types d'étude, qui prennent le curriculum non comme *état*, mais comme *objet* d'étude. Notre thèse s'inscrit dans ce deuxième cas.

Ce que nous remarquons est que le curriculum, celui pensé pour vivre dans les écoles, change avec le temps. Il change parce qu'*ils* décident que le concept « ♣ » n'est plus nécessaire, parce qu'*ils* ont découvert que la théorie « ♠ » a été invalidée, ou parce qu'*ils* ont perçu les échecs d'enseigner dans une perspective « ♦ ». Et, parce que les besoins de la société changent. Bien qu'il y ait des tendances mondiales sur « ♣, ♠, ♦, ...», chaque société construit et développe son propre curriculum à sa manière.

À cet égard, les questions qu'on se pose sont : qui sont ces « ils » qui décident le curriculum auquel les systèmes scolaires sont soumis ? Comment le conçoivent - ils ? Ces questions, prises peut-être dans un premier moment comme enfantines ou politiquement décourageantes, alimentent notre curiosité de recherche.

Nous considérons ici le curriculum scolaire comme une norme qui engage l'école dans un grand projet de la société où elle opère. Pour cela, aucun curriculum n'est virge des valeurs et la discipline des mathématiques, comme toutes les autres, est un dispositif de diffusion d'une culture.

Selon Neyret (1995), les manuels didactiques ont été largement utilisés par les chercheurs comme moyen de fournir des indications précieuses sur la transposition didactique de certains savoirs. Notre recherche s'inscrit aussi parmi les travaux qui utilisent les manuels comme observable permettant de caractériser des choix curriculaires.

Le contexte

En considérant qu'un curriculum est un produit d'une société, nous cadrons l'étude de notre thèse dans le contexte spécifique de la société brésilienne.

Les manuels au Brésil sont la principale ressource pour l'enseignant, ce qui motive des projets de recherches autour de ces matériaux (Bittar, 2017). Les conditions et contraintes de viabilité des manuels dans ce pays donnent à ce contexte un caractère singulier. En 1929, l'État a mis en place le Programme National du Manuel Didactique - PNLD, une institution officielle et spécifique pour légiférer les politiques liées à cette ressource. En 1994, a eu lieu la première évaluation des manuels utilisés par les écoles publiques du pays. Cette évaluation a révélé une situation alarmante et a montré le besoin de changements de ces manuels. Ainsi, la qualité des manuels scolaires est devenue un point de débat politique. Depuis lors, les manuels produits par le marché privé sont soumis à des évaluations périodiques commanditées par l'État.

Pour étudier les changements et non-changements des manuels au fil du temps en fonction des évaluations, nous utilisons et développons des notions théoriques et moyens méthodologiques propres de la théorie anthropologique du didactique, TAD (Chevallard, 1998b). Nous décidons aussi de nous centrer sur les opérations d'addition et de soustraction à l'école primaire.

Le manuscrit

Notre travail de thèse a été construit sous un régime de cotutelle, Brésil - France. La langue accordée pour l'écriture de ce manuscrit est le français, complété par un résumé substantiel rédigé en portugais.

La thèse est organisée en quatre chapitres. Dans le premier, nous introduisons une réflexion théorique sur la constitution et les changements curriculaires à partir des notions de la TAD. Il s'agit là d'une manière de partager nos lunettes avec le lecteur avant de présenter le contexte et la problématique de recherche, qui font aussi partie de ce chapitre.

Il existe de concepts qui nous aident à réfléchir et à questionner le réel ; il y en a d'autres qui nous aident également à modéliser et à travailler sur le réel. Le deuxième chapitre vise à présenter des concepts théoriques qui participent activement comme outils méthodologiques pour caractériser et étudier les (non-)changements curriculaires. Une vision globale de la méthodologie est définie à la fin de ce chapitre.

Le troisième chapitre est dédié à la présentation d'un *modèle praxéologique de référence* relatif aux opérations d'addition et soustraction. Ce modèle sert *d'unité d'analyse* pour notre étude et est construit à partir des concepts énoncés dans le chapitre précédent.

Les analyses sont alors développées dans le quatrième chapitre. Les analyses sont composées de cinq études de cas assez différentes : elles permettent d'attraper différents phénomènes autour des changements et non-changements curriculaires observés dans les manuels.

Enfin le texte se termine avec les conclusions et les perspectives générales de ce travail.

Chapitre 1

L'assujettissement est dans la genèse des choses

« Au sein d'une société donnée, au sein d'une institution donnée de cette société, il y a un contrôle actif, plus ou moins étroit, plus ou moins vigilant, des manières de penser, de dire, de prononcer, d'agir, qui suppose du didactique. Ce contrôle social n'est que partiellement interdicteur ; il est essentiellement prescripteur - il nous dit que penser et comment faire ; ou plutôt, pour proscrire, il prescrit. »

(Chevallard, 2010, p. 10)

...

Objectifs du chapitre : Introduction et développement des concepts théoriques pour soutenir la problématisation centrale de la thèse. Présentation du contexte de recherche. Formalisation de la problématique.

...

Introduction

La science est où nous pouvons être à l'aise pour douter. En didactique, ce sont les phénomènes autour de la diffusion et non-diffusion des objets qui alimentent notre esprit méfiant, en visant d'entretenir un rapport moins naïf et mieux armé à leur étude (Chevallard, 2003).

Ces phénomènes proviennent des systèmes de natures diverses. Ils se passent lors d'un dîner de famille ou d'une réunion de travail. Les didacticiens, cependant, se concentrent souvent sur les systèmes scolaires et ce n'est pas un hasard. Ce bornage a une raison d'être malgré ses pertes : la responsabilité donnée aux systèmes officiels d'enseignement pour la diffusion de *certains objets* offre un terrain fertile pour la recherche en didactique, parce que c'est là que vit un curriculum qui, produit par la transposition didactique (Chevallard, 1985), a été délibérément conçu pour être diffusé.

Pour étudier ces phénomènes, nous nous plaçons dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique - TAD. La problématique de cette recherche et le cadre théorique se développent mutuellement ; c'est ce qui structure notre texte en trois moments. Le premier est dédié à la présentation et au développement des éléments théoriques importants pour notre travail. Ensuite, nous exposons le contexte sur lequel notre analyse sera basée, pour alors arriver au troisième moment de la formalisation de la problématique de la thèse.

1.1 Premiers Concepts Et Modelisations

Un cadre théorique apporte au discours tout un vocabulaire propre. Les idées et concepts sont matérialisés en mots et en expressions qui se naturalisent dans la parole de ceux qui les utilisent couramment. Il ne s'agit pas seulement d'une question d'habitude, mais de penser ce qui est pensé grâce à un lexique.

À cet égard, nous avons décidé de signer quelques contrats de vocabulaire à travers la présentation de certains concepts de la TAD. Cette présentation n'est en aucun cas exhaustive. En même temps, nous proposons aussi des articulations entre ces concepts, qui nous offrent une manière de percevoir des questions inhérentes à la constitution et au changement curriculaire dans une société.

1.1.1 Objet, institution, rapport institutionnel et curriculum

En TAD, un *objet* est tout ce qu'il existe pour quelqu'un (Chevallard, 2003). L'intérêt de ce concept si large est d'interroger où les objets existent, pour qui et à quelles conditions. Ces questionnements nous amènent tout de suite à la notion d'*institution*.

> Une institution I est un dispositif social « total », qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des « micro-institutions »), mais qui permet - et impose - à ses sujets [...] la mise en jeu de manières de faire et de penser propres. (Chevallard, 2003, p. 82)

Les objets sont des construits institutionnels. L'idée est simple, mais cruciale : l'objet « fonction du premier degré » existe dans l'institution « collège » et existe aussi dans l'institution « école d'ingénierie », mais pas de la même façon. Et, ce même objet n'a pas les conditions pour vivre à « l'école primaire » et normalement n'a pas d'intérêt dans l'institution « église ».

Ces manières de faire et de penser dans une institution « I », sur un objet donné « o », constituent ce qu'on appelle *rapport institutionnel,* noté dans notre travail R(I, o) [1]. En 1989, Chevallard a interrogé la généralité de cette notion.

> Le rapport institutionnel $\mathrm{R_I(O^S)}$ est ce qui apparait quand on observe le destin de $\mathrm{O^S}$ dans l'institution I vue comme une totalité (comme un système) : on dira qu'il s'agit du rapport *systémique* à l'objet $\mathrm{O^S}$. Mais ce rapport systémique, qui enregistre « ce qui se fait avec $\mathrm{O^S}$ » dans I, soit ce que l'*on* fait avec $\mathrm{O^S}$ dans I, n'enregistre pas encore qui est ce « on », c'est-à-dire n'enregistre pas encore *qui fait quoi* - ou du moins qui est censé faire quoi - à propos de $\mathrm{O^S}$. (Chevallard, 1989a, p. 213)

Comme réponse à cela, l'auteur a introduit la notion de *position* des sujets dans une institution - à l'époque (1989) notée « $\mathrm{R_{I,p}(O^S)}$ » et plus récemment par « $\mathrm{R_I(p, o)}$ » (Chevallard, 2003, 2017).

En reprenant notre exemple, le rapport à l'objet « fonction du premier degré » dans l'institution

1. D'autres notations peuvent apparaitre au long du texte en fonction des dates des références, ce qui montre en quelque sorte le développement théorique de la TAD.

« collège » n'est pas le même, ou ne devrait pas l'être, pour celui qui occupe la position « enseignant » et pour ceux qui occupent la position « élève ». Dans cette perspective, nous disons que :

> Étant donné un objet o, une institution I, et une position p dans I, on appelle rapport institutionnel à o en position p, et on note $R_I(p, o)$, le rapport à l'objet o qui devrait être, idéalement, celui des sujets de I en position p. (Chevallard, 2003, p. 83).

Sur la base de ces concepts, nous considérons la notion de curriculum dans la TAD de la façon suivante :

> Pour parler alors de curriculum, on doit maintenant supposer une institution de formation, I, qui réalise ce curriculum. En notant *e* la position du « formé » dans I, on nomme curriculum (ou cours d'études) une suite de couples, $C_I = (o_p, R_I(e\,;o_p))_{p \in P}$, où $R_I(e\,;o_p)$ est le rapport institutionnel à o_p pour les sujets de I en position e. Suivre le curriculum C_I, et donc étudier dans I les objets o_p, impose à x de se soumettre aux rapports institutionnels $R_I(e\,;o_p)$, assujettissement qui tend en principe à conformer ses rapports personnels $R(x\,;o_p)$ aux rapports institutionnels $R_I(e\,;o_p)$. (Chevallard, 1997, p. 80).

Le curriculum d'une institution d'enseignement est donc celui auquel le sujet en tant qu'élève/étudiant est soumis. Il s'agit non seulement d'un ensemble d'objets d'étude, mais également d'un ensemble limité de rapports à cet objet. L'idée de parcours est également importante dans cette définition, parce qu'elle apporte à la notion de curriculum les aspects didactique et temporel, qui provoquent et prévoient tout au long de la scolarité des changements de rapports. Cet objet qu'on appelle par curriculum désigne quelque chose de bien plus large qu'une liste de contenus.

Un choix de notre travail :

Sans négliger le caractère hétérogène des rapports des sujets en position p de I, on prendra souvent le risque de parler de façon généraliste de R(I, o), sans considérer nécessairement sur ce plan les positions de I. *Le rapport institutionnel a,* comme indiqué par Chevallard (1989a), pour objectif de représenter ce que l'institution manifeste comme discours/opinion *systémique* sur « o ». Celui-ci « “ énonce ” en gros ce qui se fait, dans I, “ avec ” O, comment O y est mis en jeu, ou encore, en termes plus imagés, ce qui est le “ destin ” de O dans I. » (Chevallard, 1989a, p. 213).

Un univers vaste de questions découle de cette théorisation présentée si hâtivement : quels objets « o » sont *autorisés* à exister dans les institutions d'enseignement ? Quelles sont leurs raisons d'être ? Quels objets y sont *interdits* et pourquoi ? Quels rapports institutionnels sont établis avec les objets qui peuvent y vivre, R (I_e, o) ? Et . . . Qui décide de tout cela ?!

1.1.2 La noosphère, les rapports noosphèriens et le curriculum prescrit

> Toute une activité ordinaire s'y déploie, en dehors même des périodes de crise (où elle s'accentue), sous forme de doctrines proposées, défendues et discutées, de production

> et de débats d'idées - sur ce qui pourrait être changé et sur ce qu'il convient de faire. Bref, on est ici dans la sphère où l'on pense - selon des modalités parfois fort différentes - le fonctionnement didactique. Pour cela, j'ai avancé pour elle le nom parodique de noosphère. (Chevallard, 1982, p. 181)

Toute institution se construit à partir d'une interaction suffisamment active et souvent involontaire avec d'autres institutions. Cette interaction prend la forme, dans certains cas, de vigilance sur ce qui se passe dans d'autres institutions. C'est le cas de ce que Chevallard (1985) appelle par *noosphère* : l'entité qui décide et légitime les objets d'étude et les rapports à ces objets dans les institutions d'enseignement.

> Pour cet aréopage j'ai proposé, avec un humour un peu insaisissable peut-être, le nom de noosphère - la sphère des gens qui pensent, la sphère de ceux qui réfléchissent sur l'enseignement, dans quelque registre que ce soit. (Chevallard, 1986, p. 42)

Nous reproduisons ici deux schémas qui nous aident à comprendre le rôle de la noosphère sur le curriculum. Le premier est celui présenté en 1982 :

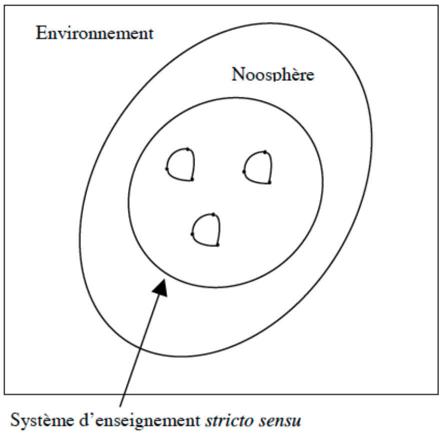


Figure 1.1 – Noosphère, le système stricto sensu et l'environnement (Chevallard, 1982, p. 184)

Au centre de ce schéma se trouvent les triades « l'enseignant, l'élève et le savoir enseigné ». La noosphère est cette partie qui *protège* - pour être un peu ironique - le système d'enseignement stricto sensu du reste. Un genre de filtre de la société.

> Pourquoi donc y a-t-il des flux de savoir, de l'environnement vers le système d'enseignement, par le truchement de la noosphère ? Le problème premier qui doit être résolu pour que le système d'enseignement existe, c'est-à-dire pour que l'enseignement soit possible, est celui de la compatibilité du système avec son environnement. Cette compatibilité doit être réalisée sur des plans multiples et distincts (bien que solidaires). (Chevallard, 1982, p. 09)

Un autre schéma est celui du processus bien diffusé de la transposition didactique : savoir savant → savoir à enseigner → savoir enseigné → savoir appris. Nous plaçons la noosphère dans la deuxième étape de la transposition (Bosch et Gáscon, 2005) [2] :

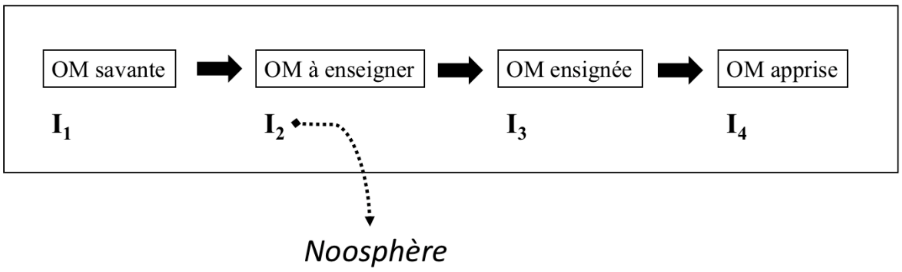


Figure 1.2 – Noosphère et la transposition didactique

La noosphère est donc cette instance qui envisage un bon fonctionnement des systèmes didactiques en prenant en compte à la fois les questions dérivées de la société et les savoirs savants (ou les savoirs de référence).

Dans notre travail nous proposons de considérer la noosphère comme un aggloméré d'institutions.

> Par *noosphère* - la sphère « où l'on pense » -, on désigne l'ensemble des institutions qui entourent l'École sans en faire partie *stricto sensu* et qui se vouent à « réfléchir » sur l'École, à critiquer, suggérer, impulser, entraver les changements qui l'affectent ou pourraient l'affecter. (Wozniak, 2005, p. 145)

Ces institutions peuvent avoir notamment plusieurs statuts : officiel, scientifique, informel, transitoire, clandestin... Certaines institutions sont visibles, d'autres agissent dans la noosphère sans qu'on les identifie vraiment.

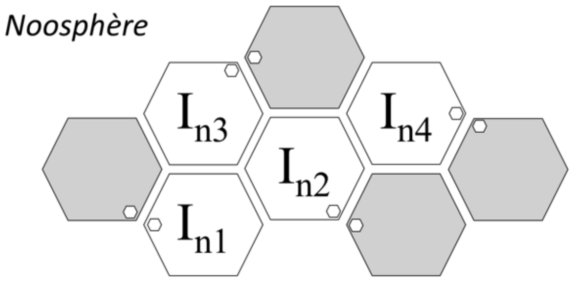


Figure 1.3 – Noosphère comme un ensemble d'institutions

Nous les représentons séparément pour mettre en évidence leurs identités, bien que pouvons avoir une représentation avec des chevauchements pour mettre en évidence les intersections des personnes qui appartiennent à plusieurs institutions.

2. « Dans ce schéma, I1 est l'institution productrice du savoir mathématique, I2 la noosphère, I3 l'institution scolaire et I4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique » (Bosch et Gáscon, 2005, p. 116). De plus, « OM » signifie organisation mathématique, qui sera développée plus tard, dans le chapitre 2, avec la notion de praxéologie. Pour le moment, on dira qu'une OM est un ensemble d'objets mathématiques.

Chacune de ces institutions a le pouvoir ou l'intention de dire ce qui *est bon ou pas* d'être enseigné et appris à l'école : c'est une caractéristique fondamentale des institutions noosphériennes. La façon d'enseigner est également soumise à leurs jugements. De cela, nous décrivons les rapports (systémiques) des institutions noosphériennes de la façon suivante :

> Dans une institution d'enseignement $\mathrm{I_e}$, pour tout objet $\mathrm{o_c}$, il existe ou il peut venir à exister un rapport institutionnel $\mathrm{R(I_e, o_c)}$. Pour exprimer le rapport d'une institution noosphérienne $\mathrm{I_n}$ à propos de $\mathrm{R(I_e, o_c)}$, nous le modélisons comme $\mathrm{R(I_n, R(I_e, o_c))}$.

Considérer un rapport comme un objet lui-même a été déjà exploité dans d'autres contextes. Par exemple, en 2007, Chevallard a parlé de « *rapports aux rapports* » pour faire référence à un sujet qui occupe une position d'évaluateur, comme un professeur qui évalue le rapport de son élève. En 2011, ce même auteur a présenté une modélisation similaire pour décrire le rapport de x à son propre rapport, formalisé par $\mathrm{R}\ (x\,;\ \mathrm{R}\ (x\,;\ \mathrm{o}))$. La modélisation présentée dans notre travail suit cette même logique, mais se place au niveau des institutions et, spécialement, de celles qui ont des « rapports aux *rapports des institutions d'enseignement* ».

Remarquons que le curriculum prescrit par la noosphère n'est pas forcément celui noté auparavant, $\mathrm{C_I = (o_p, R_I(e\,;o_p))_{p\,\in\,P}}$, où $\mathrm{R_I(e, o_p)} \neq \varnothing$. D'abord parce qu'il existe des *choses* en $\mathrm{C_I}$ qui échappent de la portée des objets traités par la noosphère. Et, d'autre part, parce que la noosphère s'intéresse aussi à des objets qui n'existent pas en I, $\mathrm{R_I(e, o_p)} = \varnothing$, mais qui peuvent venir à exister à partir d'une intervention dans le système didactique. C'est la noosphère alors qui détermine et envisage des configurations de ce que nous désignons couramment par le terme de *curriculum prescrit.*

> Le curriculum, état du système d'enseignement à un moment donné, n'est pas défini entièrement par les programmes officiels. Ceux-ci fixent un cadre directeur qui s'impose comme un système de contraintes explicites au processus de transpositions didactique, mais qui ne saurait le déterminer exactement. (Chevallard, 1989b, p. 49)

1.1.3 Toute institution de la noosphère est une instance qui juge

Dans les développements théoriques récents de la TAD (Chevallard, 2017, 2018, 2019) [3], nous avons vu apparaître un nouvel objet conceptuel, celui de *jugement.*

3. Présenté par Chevallard en 2017 à Toulouse, en 2018 à Autrans (environs de Grenoble, France) au CITAD6 et à Barcelone, en 2019, dans le cours « Advances in the Anthropological Theory of the Didactic and their Consequences in Curricula and in Teacher Education ».

> Quand nous disons - comme l'avons fait ci-dessus - que « l'on a $R_I(p, o) \neq \varnothing$ », qui est-ce *on* qui *a* ? La réponse classique dans le cadre d'un exposé à prétention scientifique est que ce « on » est l'auteur qui parle ou qui écrit en tant qu'il est chercheur [...]. L'instance $\hat{w}$ pourra être *n'importe quelle instance*, en particulier n'importe quel chercheur , ou n'importe quel professeur y, ou n'importe quel observateur z. Au lieu de « on a $R_I(p, o) \neq \varnothing$ », nous considérons l'énonce « Selon $\hat{w}$, $R_I(p, o) \neq \varnothing$ », ce qu'on écrira aussi en écriture symbolique comme ceci $\hat{w} \vdash R_I(p, o) \neq \varnothing$. Pour que ce dernier énoncé soit vrai, il faudra bien sûr que l'on ait $R(\hat{w}, R_I(p, o)) \neq \varnothing$, c'est-à-dire que le rapport de $\hat{w}$ au rapport $R_I(p, o)$ ne soit pas lui-même vide : il faudra donc que le rapport $R_I(p, o)$ soit connu de l'instance $\hat{w}$. (Chevallard, 2017, p. 05)

Pour « $\hat{w} \vdash R_I(p, o) \neq \varnothing$ », nous disons que « $\hat{w}$ *juge* que $R_I(p, o) \neq \varnothing$ », ou encore que « $\hat{w}$ *juge* que p ne connaît pas o dans I ».

Le jugement d'une instance à un rapport n'est évidemment pas limité à la binarité d'être vide ou non-vide, comme peut suggérer l'illustration que nous venons de montrer. Le jugement peut se faire par une infinité de qualitatifs. A ce propos, Artaud (2019) [4] considère aussi que le résultat de ce jugement peut être ce qui $\hat{w}$ pense que le $R_I(p, o)$ *devrait* être.

Pour prendre en compte la diversité de jugements - sur l'état actuel des choses, sur ce qui devrait être, sur ce qui ne devrait pas être et sur ce qui pourrait être - nous dirons que « $\hat{w} \vdash R_I(p, o) =$ ¿ » et nous chercherons à identifier le jugement « ¿ ».

$$\forall\ I_n \in N,\ I_n \vdash R(I_e,\ o_c) = ¿$$

où « ¿ » peut être du type descriptif, prescriptif, proscriptif et/ou suggestif.

Notons que pour que I_n juge « ¿ » à propos de $R(I_e, o_c)$, nous avons notamment $R(I_n, R(I_e, o_c)) \neq \emptyset$.

La question est que, comme nous l'avons défini précédemment, nous concevons la noosphère comme un aggloméré d'institutions. Il ne serait pas étrange alors que ces institutions jugent différemment les rapports des institutions d'enseignement, $R(I_e, o_c)$. De façon résumée nous décrivons le désordre dans la noosphère de la façon suivante :

> Soit I_{n1} et I_{n2} deux institutions de la noosphère.
>
> $I_{n1} \vdash R(I_e, o_c) = \alpha$
>
> $I_{n2} \vdash R(I_e, o_c) = \beta$
>
> Si $\alpha \neq \beta$, alors $R(I_{n1}, R(I_e, o_c)) \ncong R(I_{n2}, R(I_e, o_c))$.

Si les rapports de la noosphère ne sont pas toujours en conformité, une question se pose : comment sont définis les objets à être enseignés, c'est-à-dire le curriculum prescrit, face aux différents jugements des institutions de la noosphère ?

4. Présenté à Autrans dans la 20e école d'été de didactique des mathématiques.

1.1.4 L'assujettissement institutionnel et entre institutions, une manière de prendre en compte le pouvoir

> Il faudrait ainsi rendre justice de la complexité des positions différentielles des divers agents dans leur intervention au sein de la noosphère - où les compétences sont finement délimitées, les registres assignés, les responsabilités départagées, les pouvoirs circonscrits. (Chevallard, 1982, p. 09)

Dès qu'une institution s'intègre à la noosphère d'une société, elle cherche à influencer la vie des objets des institutions d'enseignements, ce qui peut se passer selon plusieurs degrés d'intensité. L'église catholique, par exemple, dans plusieurs moments de son histoire a cherché à faire partie de la noosphère de plusieurs sociétés et dans la plupart d'entre elles nous avons vu son pouvoir changer dans le temps.

Ces différents statuts des institutions provoquent et imposent une certaine hiérarchie entre elles. Pour rendre compte de cela, et spécialement du pouvoir qu'une institution exerce sur une autre, nous développerons la notion d'assujettissement entre institutions.

En TAD, l'assujettissement [5] est présenté comme la quête de la conformité de deux rapports : le rapport personnel d'un individu x à un objet o, $R(x, o)$, et le rapport institutionnel de ce qui est attendu d'un sujet de I en une certaine position à l'objet o, $RI(p, o)$. L'assujettissement d'un individu à une institution est représenté par la conformité de $R(x, o)$ $RI(p, o)$.

En adaptant cette idée, nous dirons qu'une institution I_j est assujettie à une autre institution I_k lorsque le rapport de la première à un objet donné « o » est suffisamment en conformité, non par hasard, mais par influence directe, au rapport de la deuxième à ce même objet « o ».

$$R(I_j, o) \cong R(I_k, o)$$

Une fois que ce phénomène se passe entre deux institutions de la noosphère, I_{n1} et I_{n2}, nous avons :

$$R(I_{n2}, o) \cong R(I_{n1}, o), \text{ où } o = R(I_e, o_c)$$

Une relation hiérarchique peut alors s'établir entre les institutions de la noosphère.

5. Le mot assujettissement n'existe que comme un verbe (assujettir) dans la langue portugaise - en considérant seulement les mots qui conservent la même racine sans compter les synonymes, bien entendu. Cependant, on trouve des groupes de recherches - comme ceux qui utilisent l'approche foucaldienne - qui se sont rendus au charme du néologisme et utilisent le mot en portugais assujeitamento. Pour eux, ce mot existe bien que le correcteur orthographique de l'ordinateur le souligner toujours en rouge. Son utilisation revient à considérer l'existence d'un phénomène. On propose aux lusophones le même.

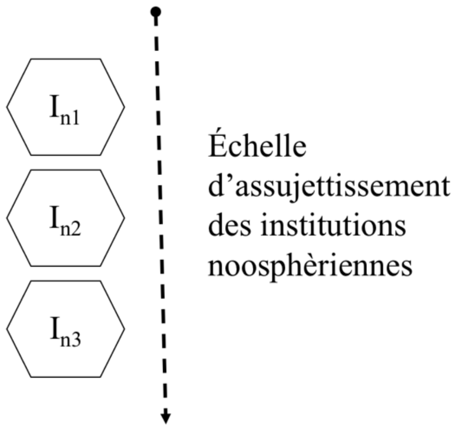


Figure 1.4 – Échelle d'assujettissement des institutions noosphèriennes

Cette échelle n'est pas atemporelle. C'est-à-dire que l'ordre de pouvoir de ces institutions peut changer au fil du temps, comme le cas de l'église catholique mentionné avant ou même pour d'autres exemples dans des espaces de temps plus courts.

Ce qui peut aussi bouleverser cette hiérarchie est l'objet en discussion. Pour certains objets, il est accordé que, par exemple, I_{n2} peut avoir plus de légitimité à juger ce qui devrait se passer en I_e que I_{n1}.

L'assujettissement de I_{n2} à I_{n1} peut se produire suite à un *geste*[6] de I_{n1}, qui cherche à modifier le rapport de I_{n2}. Ce geste peut être prescripteur, autoritaire, formateur...

L'existence de rapports différents et la résistance aux changements des rapports mettent en évidence la liberté des institutions. Une institution peut donc être *une mauvaise institution* vis-à-vis d'une autre si l'assujettissement ne se produit pas de façon satisfaisante.

Lorsque les rapports noosphèriens ne sont pas en accord malgré les gestes d'assujettissement, le curriculum prescrit sur un certain objet donné ressemblera plus au rapport de l'institution ayant le plus de pouvoir.

1.1.5 Un exemple pour contextualiser les réflexions théoriques

Proposons ici une illustration de la présentation théorique présentée jusqu'à présent. Considérons les éléments suivants :

— Société : Brésilienne

— Moment d'analyse : fin 2018 et début 2019

6. « On pourrait parler aussi d'action ou encore d'intervention possiblement didactique. Le mot de geste est pris ici en un sens large, inspiré du latin gestus , et apparenté au verbe gérer et au substantif gestion. » (Chevallard, 2018, p. 06)

— Discipline : Histoire

— Objet : Dictature militaire brésilienne (1964 -1985)

— Institutions noosphériennes : I_{ME} - Ministère de l'Éducation et I_{H} - Historiens

Suite au résultat de l'élection présidentielle de 2018, qui a attribué à Jair Bolsonaro quatre ans de mandat au plus haut poste de la république brésilienne, une discussion sur la version de l'histoire du Brésil des années 1964 à 1985 s'est ouverte. En effet, ce sujet fait l'objet de controverses dans les débats politiques et a été évoqué lors de la campagne électorale.

Actuellement, une recherche rapide concernant la période 1964 -1985 sur internet (Wikipédia, par exemple), nous conduit sur l'histoire d'une dictature. Or, pour certains, comme nous allons le montrer, ce qu'il y a eu lieu dans ce pays ne peut pas être caractérisé comme tel.

L'historien Carlos Finco, un expert de cette période, anticipe les arguments contre un possible changement de la version partagée de nos jours :

> Dans une interview avec BBC News Brazil, l'historien affirme que les discours qui cherchent à nier la dictature sont l'expression d'une « ignorance historique ». Pour lui, le gouvernement du président élu Jair Bolsonaro (PSL), qui défend la dictature, pourra être marqué par des tentatives de réécriture de l'histoire de la période, des initiatives qui pourraient « fonctionner », mais ne prévaudront pas. (Carneiro, 2018, traduction propre) [7]

L'existence de la dictature est une opinion consensuelle pour la plupart des historiens et est approuvée par la Commission Nationale de la Vérité [8], organisme du gouvernement qui enquête sur les graves violations des droits humains pratiqués par l'état brésilien. Pour la question des vraies essayes d'une réécriture de l'histoire, Finco dit :

> Il n'y a pas la moindre possibilité que cela se produise. Mais oui, je crois qu'il y aura de nombreuses tentatives en considérant le profil du nouveau ministre de l'Éducation (Ricardo Vélez Rodríguez) et des autres candidats (pour ce poste dans le futur gouvernement). Bien sûr, il y aura des tentatives pour dire que 1964 n'était pas un coup d'État ni une dictature [...]. Mais cela ne prévaudra pas, c'est un non-sens. Ces initiatives vont se concrétiser et elles vont demander beaucoup de travail. Mais la réalité prévaudra. (Carneiro, 2018, traduction propre) [9]

L'historien ne se trompait pas à propos de l'intention de l'actuel gouvernement de changer la version de cette histoire. Le 3 avril 2019, le ministre de l'Éducation a manifesté dans les médias cette

7. « Em entrevista à BBC News Brasil, o historiador afirma que discursos que buscam negar a ditadura são expressão de uma "ignorância histórica". Para ele, o governo do presidente eleito Jair Bolsonaro (PSL), que defende a ditadura, poderá ser marcado por tentativas de reescrever a História sobre o período, iniciativas que poderão "dar trabalho", mas não irão prevalecer." » (Carneiro, 2018)

8. Pour savoir plus : http ://cnv.memoriasreveladas.gov.br

9. « Não há a menor possibilidade de isso acontecer. Mas sim, acredito que vá haver muitas tentativas. Até pelo perfil do novo ministro da Educação (Ricardo Vélez Rodríguez) e de outros nomes indicados (para o futuro governo). É claro que vai haver tentativas de dizer que 1964 não foi um golpe, que não houve ditadura, em torno de projetos como o Escola Sem Partido. Mas isso não vai prevalecer, é um disparate. Essas iniciativas vão ocorrer, e vão dar muito trabalho. Mas a realidade prevalece. » (Carneiro, 2018)

intention.

> Dans un entretien accordée au journal Valor, mercredi (3), le ministre de l'Éducation, Ricardo Vélez Rodríguez, a déclaré qu' « il y aura des changements progressifs » dans les manuels scolaires afin que « les enfants puissent avoir une véritable idée de la réalité » de ce qui a été son histoire. Il évoquait la manière dont le coup d'État militaire de 1964 et la dictature sont décrits dans les écoles. Vélez n'est pas d'accord avec deux prémisses : pour lui, il n'y a pas eu de coup d'État le 31 mars de cette année et le régime qui a succédé n'était pas une dictature. « C'était un régime de force démocratique, parce que c'était nécessaire à ce moment-là », a-t-il déclaré. « Il y aura des changements progressifs [dans les manuels scolaires] jusqu'à ce qu'une version de l'histoire plus grande soit sauvée », a-t-il déclaré. « Le rôle du Ministère de l'Éducation est d'assurer la distribution régulière des manuels et de les préparer de manière à ce que les enfants puissent avoir une idée réelle de l'histoire de leur vie. » (Murakawa et Araújo, 2019, traduction propre) [10]

Notons qu'un affrontement a été clairement établi entre I_{ME} et I_H. Les rapports de ces institutions ne sont pas conformes sur l'objet « dictature militaire brésilienne (1964 -1985) ». I_{ME} juge nécessaire un changement de comment on rencontre cet objet dans l'école, à tel point qu'on doit le nommer autrement. Pour I_H, la présentation faite dans les écoles est cohérente à l'histoire vécue.

Nous ne serons pas intéressés ici à la suite de cet affrontement institutionnel, mais cette petite illustration permet de faire l'hypothèse que le curriculum (dans un premier temps le prescrit, mais aussi matérialisé dans le système d'enseignement stricto sensu) est bien quelque chose d'instable, sensible aux changements. Les divergences des jugements et des rapports noosphériens sont au cœur de cette trame. Le phénomène d'assujettissement à la recherche d'un degré de conformité convenable entre les institutions, qui peut être poussé par des gestes divers, nous amène à un moment donné à une configuration plus stable, qui peut en tout temps être contesté à nouveau.

10. « Em entrevista ao Valor, nesta quarta-feira (3), o ministro da Educação, Ricardo Vélez Rodríguez, disse que "haverá mudanças progressivas" nos livros didáticos para que "as crianças possam ter a ideia verídica, real", do que foi a sua história. Referia-se à maneira como o golpe militar de 1964 e a ditadura são retratados, hoje, nas escolas. Vélez discorda dessas duas premissas : para ele, não houve golpe em 31 de março daquele ano nem o regime que o sucedeu foi uma ditadura. "Foi um regime democrático de força, porque era necessário nesse momento", afirmou. "Haverá mudanças progressivas [nos livros didáticos] na medida em que seja resgatada uma versão da história mais ampla", afirmou. "O papel do MEC é garantir a regular distribuição do livro didático e preparar o livro didático de forma tal que as crianças possam ter a ideia verídica, real, do que foi a sua história." » (Murakawa et Araújo, 2019)

1.2 Le Contexte De La Recherche

Dans la suite nous présenterons le contexte de la recherche et nous définirons les institutions cibles de nos analyses, ce qui nous permettra de faire progresser la problématique de la thèse.

1.2.1 Les (et nos) niveaux de codétermination

L'étude de la diffusion et de la non-diffusion d'un objet nous amène à des questions de nature écologique et économique : dans quelles *conditions* l'objet « o » habite ou pourrait habiter l'institution « I » ? Quelles sont les *contraintes* auxquelles l'objet « o » est soumis en « I » ?

> L'expression « conditions et contraintes » peut être regardée comme formellement redondante : les deux termes désignent ici, simplement, des propriétés d'une certaine situation. Mais elle nous rappellera que, à côté des conditions (« bonnes » ou « mauvaises »), que l'on regarde comme susceptibles d'être modifiées, ou, du moins, auxquelles on peut tenter d'échapper (si elles sont jugées « mauvaises », défavorables) ou, au contraire, auxquelles on peut vouloir se soumettre (si elles sont jugées « bonnes », favorables), il en est qu'on regardera, provisoirement au moins, et peut-être à tort, comme non modifiables : c'est à elles que l'on donnera plus spécifiquement le nom de contraintes - que ces contraintes apparaissent favorables ou défavorables. (Chevallard, 2007, p. 07)

L'échelle des niveaux de codétermination didactique, partiellement illustrée ci-dessous, permet d'éclairer et de donner des pistes sur les origines des conditions et contraintes agissant sur la vie d'un objet au sein d'une institution d'enseignement.

Civilisation
↓↑
Société
↓↑
École
↓↑
Pédagogie
↓↑
Discipline

Figure 1.5 – Niveaux supérieurs de codétermination (Chevallard, 2009, p. 12)

> Chaque niveau de cette échelle est le lieu d'origine de certaines conditions qui apparaissent souvent comme des contraintes aux autres niveaux. Ainsi existe-t-il des conditions de civilisation, qui prévalent donc dans tout un ensemble de sociétés et que, en un temps donné, d'aucuns peuvent certes analyser, voire contester, mais non modifier. La double flèche (↑↓) doit être lue dans cette perspective : la création (ou la modification) d'une condition en un niveau donné - par exemple au niveau scolaire

> - peut changer la donne aux niveaux inférieurs - ici, par exemple, au niveau pédagogique - mais aussi aux niveaux supérieurs - au niveau « sociétal » et même au niveau « civilisationnel ». (Chevallard, 2009, pp. 12-13)

Dans notre travail, on s'intéressera au cas spécifique de la *société brésilienne*, au niveau de *l'école primaire* et à la discipline des *Mathématiques*. Chacune de ces « instanciations » apporte des conditions et des contraintes qui gouvernent la vie des objets qui existent dans les systèmes didactiques dans le contexte de l'école primaire de la société brésilienne, et qui existeraient probablement autrement dans d'autres contextes.

En considérant que la noosphère est aussi un *lieu d'origine de certaines conditions qui apparaissent souvent comme des contraintes aux institutions d'enseignement*, mais qui est aussi ce lieu flou, une « zone composite, un *écotone*, pour employer le mot des écologues, où, certes, *un peu de tout peut " venir "* [...] » (Chevallard, 2002, p. 48), nous dirons que la noosphère est influencée et influence chaque niveau de co-détermination. Ce jeu d'influence résulte du changement des rapports dans et hors la noosphère au fil du temps.

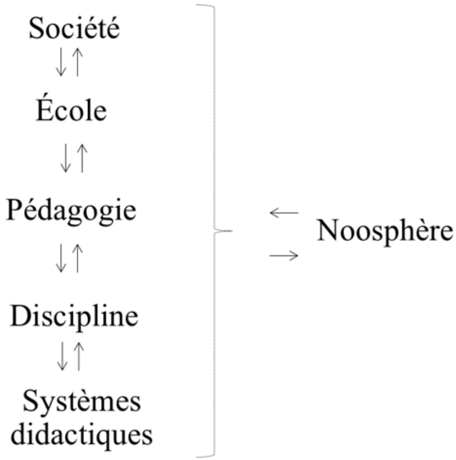


Figure 1.6 – Noosphère et les niveaux de codétermination

1.2.2 Les institutions de notre étude

Dans le contexte de cette thèse, la noosphère se fait au sein d'un univers politique, économique et culturel propre qui définit, au-delà des limites territoriales, ce qu'on appelle la « société brésilienne ». Par la suite, nous montrerons les particularités de ce contexte qui le rend en quelque sorte unique.

Pour étudier le curriculum de mathématiques produit par cette noosphère nous utilisons, comme le suggère Bosch et Gáscon (2005), une base empirique reposant sur des documents officiels et des manuels. Nous définirons à partir de cette base les institutions cibles de notre étude.

...

Commentaires : 1) Nous prévenons le lecteur que nous n'irons pas très loin dans le chaos des enjeux politiques et économiques qui est en arrière-plan du contexte analysé. Les études citées ici et tant d'autres peuvent en dire bien plus à ce sujet. 2) Cette thèse n'est pas une défense des différentes formes de contrôle du curriculum par l'État. Elle est plutôt une reconnaissance, et pourquoi pas une alerte, de la responsabilité de ces formes de contrôle et aussi du rôle et de l'influence de la Didactique sur la noosphère.

...

La première institution noosphérienne que nous considérons dans notre travail est *la Maison d'édition de manuels*, désignée par $\mathrm{I_M}$. L'article « la » doit être employé ici dans sa forme indéfinie, comme quand nous disons « l'école » et « l'église », par exemple.

Cette institution est formée par quelques maisons d'édition, qui sont des instances de $\mathrm{I_M}$, qui produisent une gamme diversifiée de manuels. Cet aspect pluriel n'est pas oublié dans notre travail. Cependant, nous remarquons qu'il existe un noyau commun à la plupart de ces matériaux, surtout quand nous regardons ceux produits dans une même période. Cette constante nous intéresse et nous désignerons ce phénomène par le terme de *vulgate,* terme emprunté de Chervel (1990). Une *vulgate*, selon cet auteur, est tout ce qui est possible de percevoir comme une homogénéité de concepts enseignés, de terminologies utilisées, de la manière dont l'étude est organisée, et des types d'exemples et d'exercices proposés qui diffèrent peu d'une œuvre à l'autre.

Dans $\mathrm{I_M}$, nous pouvons identifier diverses positions : d'auteur, de rédacteur, d'illustrateur... Santos (2019), dans sa thèse de doctorat, a fait le choix méthodologique de faire des entretiens avec des sujets qui occupent ces positions. La suite, nous utiliserons certains de ces entretiens pour illustrer notre présentation. Or, notre analyse sera fondée sur les productions finales des sujets de $\mathrm{I_M}$, les manuels. Nous traiterons $\mathrm{I_M}$ alors comme une *boîte noire* : nous ne la visitons pas, nous n'avons pas de contact avec ses sujets et nous ne nous soucions pas de ses modes de fonctionnement interne ; nous analysons ses rapports institutionnels à partir de ce que cette institution rend public dans ses produits.

Nous soulignons que le manuel a quelque chose de spécial pour l'étude de la noosphère. Premièrement parce qu'il peut être vu comme un résultat des interprétations des auteurs des programmes et de *ce que disent* les autres institutions noosphériennes (Chaachoua et Comiti, 2010). Deuxièmement, parce qu'il propose une organisation mathématique et didactique *inerte*, qui attend sa mise en œuvre dans une classe d'une école. Bien qu'il existe des espaces de liberté dans les manuels permettant des « marges de manœuvre possibles pour l'enseignant » (Tempier, 2010, p. 77), ces organisations ont été conçues pour être enseignées et apprises.

> Depuis la théorisation proposée par Chevallard (1985 et 1992) sur la transposition didactique, les livres scolaires sont habituellement considérées comme des produits

> de certaines institutions transpositives. Celles-ci peuvent être des personnes particulières qui deviendront des auteurs, des commissions ou groupes de personnes chargée des rédiger tel ou tel document. L'étude des livres va donc fournir des indications précieuses sur la transposition didactique de certains savoirs et ils ont été largement utilisés par les chercheurs ces dernières années. (Neyret, 1995, p. 56)

C'est alors un matériel conçu par des sujets de la noosphère pour être présent dans les institutions d'enseignement, ajusté par le processus de la transposition.

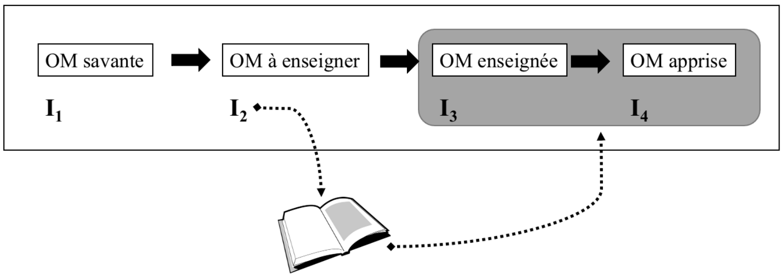


Figure 1.7 – Manuel scolaire et la transposition didactique

Ce n'est pas un hasard alors que le manuel intéresse différents domaines de recherche et est visé par des politiques publiques. L'histoire récente de l'éducation brésilienne est justement un cas qui se fusionne beaucoup aux politiques publiques de manuels scolaires. En 1929, l'État a mis en place un organisme spécifique chargé de légiférer ces matériaux. En 1938, il a été établi une première politique de législation et de contrôle de production et de circulation des manuels dans le pays. Et, en 1985, il est né le Programme National du Manuel Didactique - I_{PNLD} : ce sera la deuxième institution cible de notre travail.

I_{PNLD} apparaît dans la période de re-démocratisation du pays, après 21 ans de régime militaire. À ce moment-là, le ministère de l'éducation « tout en blâmant la désorganisation des programmes, ainsi que la " mauvaise formation " des enseignants pour les maux de l'éducation, " vend " le manuel comme un guide stratégique pour remédier à ces problèmes » (Santos, 2019, p. 85, traduction propre) [11].

En 1993, I_{PNLD} décide alors de réaliser une évaluation des manuels les plus utilisés au Brésil et le résultat sort 1994. Cette évaluation révèle une situation inquiétante, que le ministre brésilien de l'Éducation de l'époque commente par écrit comme suit :

> En considérant la finalité de la « Fondation d'aide aux étudiants - FAE » qui est d'offrir aux élèves de la 1ère à la 4ème année de l'école primaire un manuel plus « intelligent », plus « compétent », j'ai été conduit à la création d'un Groupe de Travail, par le décret 1.130, du 05 Août 1993, afin d'analyser la qualité du contenu et des aspects pédagogiques et méthodologiques des manuels destinés aux premières années

11. « [...] ao mesmo tempo que responsabiliza a desorganização curricular, bem como a "má-formação" do professor pelas mazelas da educação, "vende" o livro didático como um guia bem elaborado que poderá sanar tais problemas. » (Santos, 2019, p. 85)

> de l’école primaire, habituellement adoptées pour le portugais, les mathématiques, les sciences sociales et les sciences. [...]
>
> Le résultat final des activités du Groupe est ici présenté dans cette publication. C’est une œuvre aux importantes conséquences pour subventionner les systèmes d’éducation et leurs enseignants, avec des critères initiaux pour la vérification critique des manuels à choisir, ainsi que le montage de leur propre processus d’évaluation ; pour encourager les autres formes d’analyse ; pour donner aux auteur et aux maisons d’édition les moyens pour d’autres chemins ; pour réaliser l’idéal toujours défendu par la direction actuelle du Ministère de l’Éducation [...]
>
> L’éducation pour tous, avec de la qualité, exige des enseignants bien préparés. Mais la performance de qualité des enseignants exige un manuel « intelligent » pour leurs élèves.
>
> L’expérience d’une décennie de PNLD sera marquée par la systématisation du processus d’évaluation de ces manuels. Un exploit. Un grand exploit. (Brasil, 1994, p. 11, traduction propre) [12]

Cette déclaration est présente dans la lettre d’ouverture du document de la première évaluation. Ce texte officiel est l’un des plus emblématiques de cette recherche. D’abord, parce qu’il marque le début du processus d’évaluation des manuels scolaires au Brésil et le plus excitant, parce qu’il est audacieusement transparent dans la présentation des résultats. La prudence diplomatique, qui habituellement marque la façon par laquelle l’État se manifeste, est oubliée en faveur d’une présentation honnête de la stupéfaction ressentie par les évaluateurs sur ce qu’ils ont trouvé dans les manuels. Les quelques conclusions générales ci-après montrent que le résultat de l’évaluation étaient vraiment préoccupant :

> Même en tenant compte qu’il n’y a pas un manuel parfait, et qu’un enseignant bien préparé est en mesure de remédier aux lacunes du texte, celui-ci est un script, un soutien, même s’il ne remplacera jamais l’intérêt, l’engagement et la compétence de l’enseignant ; l’équipe responsable de l’évaluation a été surpris par la faible qualité des œuvres, par la répétition des mêmes erreurs dans presque toutes les collections de manuels, par l’indifférence pour les illustrations mal faites ou floues, par la langue négligente ou erronée, et par le mépris pour l’intelligence de l’enfant à qui ils proposent des pseudo-motivations ridicules ou sans signification. (Brasil, 1994, p. 61, traduction propre) [13]

12. « Eis que o propósito da Fundação de Assistência ao Estudante - FAE de assegurar a oferta aos alunos da 1ª à 4ª Série do ensino fundamental de um livro mais “inteligente” , mais “competente” , conduziu-me à instituição de um Grupo de Trabalho, pela Portaria 1.130, de 05 de agosto de 1993, com a finalidade de analisar a qualidade dos conteúdos programáticos e os aspectos pedagógico-metodológicos de livros adequados às séries iniciais do ensino fundamental, usualmente adotados em Português, Matemática, Estudos Sociais e Ciências.O resultado final das atividades do Grupo é, agora, apresentado nesta publicação. E um trabalho de importantes conseqüências por subsidiar os sistemas de ensino e seus professores, com critérios iniciais para a verificação crítica dos livros a serem escolhidos, bem como a montagem do seu próprio processo de avaliação ; por incentivar outras formas de análise ; por apontar caminhos aos autores e ao sector editorial ; por concretizar o ideal sempre defendido pela atual gestão do MEC [...]Educação para todo, com qualidade, exige professores bem preparados. Desempenho de qualidade dos professores exige livro-texto “inteligente” para seus alunos. A experiência de uma década do PNLD ficará marcada pela sistematização do processo de avaliação do livro didático. E um feito. Um grande feito. » (Brasil, 1994, p. 11)

13. « Mesmo levando em conta que não há livro didático perfeito, e que um professor bem preparado tem condições de suprir as deficiências do texto, o qual é um roteiro, um apoio, mas que nunca substituirá o interesse, empenho e competência do professor, a equipe responsável pela análise

Ce qui rend aussi ce document très important est que nous avons l'évaluation des manuels non recommandés par l'État, ce qui n'a plus jamais eu lieu par la suite.

Selon l'institution I_{PNLD}, les manuels étaient dans un état de retard aggravé, comme si ces matériaux étaient compatibles à une « noosphère du passé ».

> L'œuvre suit les paramètres formels des publications des années 60, influencée par le Mouvement de Mathématiques Moderne. (Brasil, 1994, p. 174, traduction propre) [14]

> Les auteurs ne sont pas conscients de ce qui a été fait de nouveau dans la dernière décennie. (Brasil, 1994, p. 199, traduction propre) [15]

> L'éducation mathématique a évolué au Brésil et dans le monde au cours de la dernière décennie. Il est étrange que, en plus de ne pas utiliser les résultats de ces recherches dans le manuel, les auteurs ne la connaissent apparemment pas, en raison de l'absence d'une production pertinente dans la bibliographie du manuel destiné à l'enseignant. (Brasil, 1994, p. 202, traduction propre) [16]

> [. . .] le processus d'enseignement-apprentissage a une caractéristique typique des années 60, déjà abandonnée, après de nombreux débats, autour du monde. (Brasil, 1994, pp. 173, traduction propre) [17]

Ces critiques ont été souvent soutenues par ce que cette institution comprend des discours scientifiques de la « noosphère du présent ».

Selon Carvalho (2018) [18], I_{PNLD} a évalué à ce moment-là un total de 54 manuels et seulement 13% satisfaisaient aux critères établis. L'auteur montre aussi la tension provoquée par cette évaluation :

> Les médias ont passé une journée sur le terrain et ont abondamment cité le rapport. Les éditeurs ont protesté avec force. Un haut responsable du Ministère de L'Éducation a déclaré que le rapport était très pessimiste, comme toutes les études universitaires, et qu'il valait mieux avoir un mauvais manuel que pas de manuel du tout. Il ne s'est pas arrêté aux mots et a arrêté la distribution de ce rapport. Il semblait que l'affaire était close, que les choses allaient continuer comme d'habitude. Beaucoup ont été surpris que le gouvernement ait décidé d'instituer des évaluations obligatoires par PNLD à

---

surpreendeu-se com a baixa qualidade dos textos, com a repetição dos mesmos erros em quase todas as coleções, com o descaso mostrado em ilustrações mal feitas ou borradas, linguagem descuidada ou errada, e desrespeito com a inteligência da criança, quando lhe apresentam pseudo-motivações ridículas ou sem sentido. » (Brasil, 1994, p. 61)

14. « A obra segue os parâmetros formais das publicações da década de 60, influenciadas pelo Movimento da Matemática Moderna [...] » (Brasil, 1994, p. 174)

15. « As autoras desconhecem o que se fez de novo na área na última década. » (Brasil, 1994, p. 199)

16. « A educação matemática muito tem evoluído no Brasil e no mundo na última década. Estranhamos que, além de não utilizar os resultados dessas pesquisas na obra, os autores aparentemente a desconheçam, tendo em vista a ausência desta produção de tanta relevância na bibliografia do professor. » (Brasil, 1994, p. 202)

17. « [. . .] [o] processo ensino-aprendizagem [tem] uma feição típica da década de 60, já abandonada, depois de muitos debates, em todo o mundo. » (Brasil, 1994, p. 173)

18. Carvalho, aussi identifié plus tard par le nom Pitombeira, a été le responsable du domaine des Mathématiques dans cette première évaluation et a participé aussi des autres évaluations jusqu'au PNLD 2018, réalisé en 2017.

> partir de l'année scolaire 1997. (Carvalho, 2018, p. 775, traduction propre) [19]

La qualité des manuels scolaires est devenue un point de débat politique. Depuis 1996-1997 les manuels brésiliens sont alors soumis à des évaluations périodiques dont les critères changent légèrement dans le temps et, depuis 1998, seulement ceux qui ont été approuvés par ce système peuvent être achetés par les écoles publiques du pays. Il s'agit d'un geste fort d'assujettissement pour que les rapports entre les deux institutions I_M et I_{PNLD} soient suffisamment en conformité.

Carvalho (2018) explique pourquoi de l'État a persisté dans l'évaluation des manuels scolaires malgré les critiques :

> Il y avait plusieurs raisons à cela, outre la justification de la qualité des manuels. À l'époque, le Brésil avait négocié des prêts importants pour des programmes éducatifs avec des agences internationales telles que la Banque Mondiale. Cette institution a souligné l'importance de bons manuels scolaires pour compenser les enseignants mal formés, soulignant que dans de nombreux pays, ces manuels imposent en réalité un programme d'études (Torres 2000, p. 135). La Banque Mondiale a également recommandé que la production de manuels scolaires soit confiée à des maisons d'édition privées et que le gouvernement publie des guides (catalogués avec commentaires) pour aider les enseignants à choisir leurs manuels scolaires. En outre, plusieurs organisations internationales ont commencé à insister sur la responsabilité et l'évaluation des programmes ; en outre, les évaluations génèreraient une couverture médiatique très positive pour le gouvernement, en raison des critiques généralisées sur la qualité des manuels. (Carvalho, 2018, p. 775, traduction propre) [20]

La résistance de I_M par rapport à ce nouveau dispositif d'évaluation a persisté encore pendant un moment. Par exemple, en 1996, on peut lire des articles dans l'un des journaux les plus célèbres du Brésil [21] avec les titres « Des maisons d'édition de manuels vont au tribunal » [22], « Les critères sont subjectifs » [23] et « L'évaluation divise l'opinion chez les éducateurs » [24]. Les maisons d'édition remettent en cause la rigidité et la subjectivité de l'évaluation, mais le Ministre de l'Éducation de

19. « The media had a field day and quoted extensively from the report. Publishers protested forcefully. A high MEC official said that the report was very pessimistic, like all academic studies, and it was better to have a bad book than no book at all. He did not stop at words and halted distribution of the report. It seemed that the case was closed, that things would go on as always. It came as a surprise to many that the government decided to institute assessments as a mandatory part of PNLD, starting with the 1997 school year. » (Carvalho, 2018, p. 775)
20. « There were several reasons for doing so, besides justified concern about the quality of textbooks. At the time, Brazil negotiated substantial loans for educational programs with international agencies, such as the World Bank. This institution stressed the importance of good textbooks to compensate for poorly trained teachers, mentioning that in many countries these books impose de facto curricula and are very cheap (Torres 2000, p. 135). The bank also recommended that textbook production be left to privately owned publishing houses and that the government should publish guides (catalogues with comments) to help teachers in selecting their textbooks. Besides, several international organizations had begun to insist on accountability and program evaluation ; also, the assessments would generate very positive media coverage for the government, because of widespread criticism of textbooks quality. » (Carvalho, 2018, p. 775)
21. Journal "Folha de São Paulo" . Reportages publiés en 21 mai de 1996.
22. Original : Editoras de livro didático vão à justiça. (Falcão, 1996)
23. Original : Critérios são subjetivos. (Falcão, 1996)
24. Original : Avaliação divide educadores. (Gaspar, 1996)

l'époque, en revanche, est incisif et répond dans un de ces articles en disant : « Notre objectif est d'améliorer la qualité du manuel. Après tout, le gouvernement a le droit d'acheter le manuel qu'il souhaite. »[25].

Le problème est que dans les évaluations suivantes, les résultats ne sont pas encore prometteurs. Par exemple, en 1997, plus que 50% des manuels sont exclus ou considérés comme non-recommandés par I_{PNLD}.

	Results of the mathematics assessment for PNLD 1997	
	Number of books	(%)
Recommended (REC)	25	27.5
Recommended with restrictions (RR)	16	17.6
Not recommended (NR)	37	40.7
Excluded (EXC)	13	14.3
Totals	91	100

(MEC/FNDE 2000, results organized by the author)

Figure 1.8 – Résultats de l'évaluation de 1997 (Carvalho, 2018)

Il est important de savoir que, en 1996, environ 61% de la production nationale de livres publiés au Brésil est dediée aux manuels scolaires (Choppin, 2004) ; en 2018 ces œuvres représentent encore environ 50% de la production des maisons d'édition (Carvalho, 2018). Il est bien aussi de souligner que le budget alloué à la distribution des manuels est le plus important de tous les programmes du Ministère de l'Éducation (Carvalho, 2018). Évidemment, I_{PNLD} est devenu une institution à respecter par I_{M} et le marché est un facteur décisif pour pousser aux changements des manuels.

Or, ce qu'est un *bon manuel* est controversé et un point de désaccord entre les institutions de la noosphère. Santos (2019), à partir d'un entretien avec deux célèbres auteurs de manuels brésiliens, Iezzi et Immenes, met bien en évidence cet aspect.

> Iezzi (2016) : Dans cette évaluation de 1997, dans laquelle les auteurs mathématiques les plus renommés (pour ne pas dire les meilleurs) avaient leurs manuels exclus, et l'œuvre la plus louée et la plus « étoilée » (car il y avait des étoiles [utilisées pour qualifier les manuels]) était celle du professeur Imenes, bon gars, bon professeur (...) un travail plus engagé dans l'éducation mathématique, elle a reçu un nombre maximal d'étoiles et ses manuels ont été offerts au marché. A cette époque, c'était la collection de manuels la plus adoptée. Si je ne me trompe pas, quelque chose comme 4 millions de manuels [parmi les 7 millions vendu à l'occasion]. Cependant, dans la prochaine édition du programme, le manuel d'Imenes a presque disparu, ce que nous avons interprété comme le fait que le manuel le mieux noté et le plus étoilé [par I_{PNLD}] n'était pas celui que les enseignants ont trouvé bon. (Santos, 2019, p. 91, traduction propre)[26]

25. Original : « Nosso objetivo é melhorar a qualidade do material didático. Afinal, o governo tem o direito de comprar o livro didático que quiser. »(Falcão, 1996)

26. « Nessa avaliação de 97, em que os autores de Matemática mais adotados (não quer dizer

> Imenes (2016) : « [...] 7 millions de manuels [vendus] ont chuté, chuté, chuté ... aujourd'hui, nous ne faisons plus partie de PNLD. Depuis le programme de l'année dernière [2017], nous ne participons plus au PNLD, car nos manuels ne se vendent pas. » (Santos, 2019, p. 136, traduction propre) [27]

La question est : un manuel est un *bon manuel* pour *qui* ?

I_{PNLD} et les enseignants - lesquels nous noterons ici comme les sujets de l'institution I_{ENS} - n'ont pas nécessairement les mêmes rapports à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques. I_M alors se trouve face au défi d'être en conformité à la fois avec I_{PNLD} et avec I_{ENS}, un double assujettissement.

$$R\ (I_M, o) \cong R\ (I_{PNLD}, o)$$

et

$$R\ (I_M, o) \cong R\ (I_{ENS}, o)$$

I_M cherche alors un degré de conformité suffisant pour avoir des manuels approuvés - une condition nécessaire pour être dans ce marché rentable. Mais, pour avoir un vrai succès, I_M doit chercher aussi à écouter les voix des enseignants.

> Imenes (2016) : [pointant une tasse sur la table, l'auteur déclare] : Celui qui a fabriqué cette tasse est une industrie ! Le propriétaire de cette industrie ne veut pas produire des tasses belles, laides ou durables, il veut faire des tasses qui se vendent ; si l'acheteur veut de belles tasses, il tient compte du goût de l'acheteur. Le capitalisme est comme ça, et le capitalisme qui produit le manuel n'est pas différent. La maison d'édition est une entreprise, pense-t-elle à l'éducation des Brésiliens ? Je ne dirai pas qu'elle n'y pense pas, mais d'abord, il y a autre chose [...] le profit. Et ce n'est pas parce que l'homme d'affaires est un bâtard, c'est parce que s'il ne se comporte pas comme ça, son entreprise ferme [...]. Et ceux qui s'attendent au contraire croient au Père Noël ou sont stupides. Il n'y a pas d'autre moyen. (Santos, 2019, pp. 135, traduction propre) [28]

> Iezzi (2016) : La pression exercée sur les auteurs les plus en vue est terrible. [...] Si votre manuel a été approuvé [par PNLD] et adopté [par les enseignants], l'éditeur

os melhores) tiveram obras excluádas, e a obra mais elogiada, mais "estrelada" (porque haviam as estrelas) foi a obra do professor Imenes, que á um grande cara, grande professor, (...) uma obra de forma mais engajada na Educação Matemática, ela recebeu námero máximo de estrelas e as obras foram oferecidas ao mercado. Nessa ocasião foi a obra mais adotada. Se eu não me engano, algo como 4 milhães de livros4. Porám, na edição seguinte do programa, o livro do Imenes quase desapareceu na escolha, o que foi por nás interpretado como fato de que o livro melhor avaliado, mais estrelado, não era o livro que os professores achavam bom para o mercado. » (Santos, 2019, p. 91)

27. « (...) de 7 milhães de livros [vendidos] foi caindo, caindo, caindo... hoje nás estamos fora do PNLD. Já desde o programa do ano passado [2017], a gente não participa mais do PNLD, porque não vende. » (Santos, 2019, p. 136)

28. Imenes (2016) : « [Apontando para uma xácara em cima da mesa o autor afirma] : Quem fabricou essa xácara foi uma indástria ! O dono desta indástria não quer trabalhar [com] xácaras bonitas, feias ou duradouras, ele quer fabricar xácaras que vendam ; se o comprador quer xácaras bonitas, ele faz o gosto do comprador. O capitalismo á assim, e o capitalismo que produz o livro não á diferente. Editora á uma empresa, ela pensa na educação dos brasileiros ? Não vou dizer que não pense, mas, em primeiro lugar, está outra coisa (...) o lucro. E não á porque o empresário á um safado, á porque se ele não age assim a empresa dele fecha (...). E quem espera ao contrário disso ou acredita em Papai Noel ou á bobo. Não tem como. » (Santos, 2019, p. 135)

> vous incite à le peaufiner afin que, lors de la prochaine [évaluation], vous continuiez à l'adopter. Si le manuel a été refusé, vous avez, comme nous l'avons eu, un conflit avec l'éditeur, car il souhaite que vous corrigiez les erreurs pour une nouvelle évaluation (...). C'est donc un enfer pour l'auteur de mathématiques de refaire le manuel tous les trois ans. (Santos, 2019, p. 135, traduction propre) [29]

Imenes a révélé à Santos (2019) qu'au moment où les maisons d'édition montraient leurs manuels aux enseignants, ils disaient : « [...] ne m'apporte pas des manuels [bien] recommandés. C'est ce qui va me donner du travail ! C'est ce que je ne sais pas ! Ce n'est pas comme ça que j'ai appris les maths ! » (Santos, 2019, p. 161, traduction propre) [30]. Or, comme nous l'avons vu, l'auteur a été puni par le marché pour ne pas s'être assujetti aux rapports des enseignants.

Santos (2019) a également effectué des entretiens avec des éditeurs de manuels, qui ont utilisé les pseudonymes « Pedro » et « Diana ». Nous proposons ici deux témoignages qui peuvent permettre de comprendre, encore que superficiellement, les enjeux du travail de la maison d'édition face à l'assujettissement de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

> Pedro (2016) : Les manuels d'aujourd'hui sont bien meilleurs que ceux d'avant. Ce qui est peut-être arrivé, c'est que beaucoup de manuels sont peut-être plus pasteurisés parce que nous avons la formule. Quelle est la formule d'approbation ? Vous devez avoir ceci, ceci et cela ! C'est ce que le Ministère veut. C'est ce que le Brésil souhaite pour ses Brésiliens. Il existe donc une formule [dans l'annonce du PNLD], indépendamment de ce que nous voulons ou pas, elle est là ! (Santos, 2019, p. 139, traduction propre) [31]

> Diana (2016) : [le manuel] traditionnel est en quelque sorte masqué ! (...) Pour le laisser-passer du PNLD, parce que nous savons qu'ils n'aiment pas les manuels très traditionnels, alors nous les maquillons en quelque sorte en ajoutant des sections, en mettant d'autres choses. (Santos, 2019, p. 139, traduction propre) [32]

I_{M} a dû s'adapter à ce nouveau dispositif en modifiant les manuels. Comme résultat, nous voyons que le nombre de manuels non-approuvés a diminué significativement déjà dans la première décennie d'évaluation (Brasil, 2006).

Nous soulignons un autre fait particulièrement important pour l'analyse de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$: la permanence

29. Iezzi (2016) : « Existe uma pressão terrável sobre os autores mais em evidência. (...) se o seu livro foi aprovado e adotado [pelo PNLD], a editora te pressiona a você aperfeiçoar o livro para que, na práxima [avaliação], mantenha a adoção. Se o livro foi recusado, aá você tem, como tivemos, ná, um conflito com a editora porque ela quer que você corrija os erros que tinha para uma nova competição (...), então á um inferno para o autor de Matemática ter que refazer o livro a cada três anos. » (Santos, 2019, p. 135)
30. « (...) não me traz livros bem recomendado. á o que vai me dar trabalho ! á aquilo que eu não conheço ! Não foi assim que eu aprendi Matemática ! » (Santos, 2019, p. 161)
31. « Os livros de hoje são muito melhores do que os livros de ontem. O que pode ter ocorrido á que muito texto pode estar mais pasteurizado, porque você tem a fármula. Qual á a fármula de aprovação ? Você tem que ter isso, isso e isso ! á isso que o MEC quer. á isso que o Brasil quer para os seus brasileirinhos, então tem uma fármula lá [no edital do PNLD], querendo ou não, tem lá ! » (Santos, 2019, p. 139)
32. « [O livro] tradicional fica meio que mascarado ná ! (...) para esse tradicional passar no PNLD, porque o que a gente sabe á que não se gosta muito de livro muito tradicional, então a gente dá meio que uma maquiada, fazendo essas seçães, colocando [outras] coisas. » (Santos, 2019, p. 139)

durant une longue période d'un même groupe de responsables pour les évaluations en Mathématiques, facteur favorable à la compréhension de la cohérence des rapports à cette institution.

> Au fil des ans, lentement, une méthodologie pour évaluer des manuels de mathématiques a été développée. Cela a aidé parce que, du PNLD 2002 au PNLD 2018, les évaluations des mathématiques ont été effectuées par la même institution, UFPE (Université Fédéral de Pernambuco), avec essentiellement le même groupe de coordination ; cette continuité a permis le développement mentionné ci-dessus. (Carvalho, 2018, p. 776, traduction propre) [33]

Or, de la même façon que nous décidons de traiter $\mathrm{I_M}$ comme une boîte noire, nous le ferons pour $\mathrm{I_{PNLD}}$. Les rapports institutionnels sont alors repérés dans notre travail à partir des documents officiels produits par $\mathrm{I_{PNLD}}$. Autrement dit, nous ne nous intéresserons pas ici au fonctionnement des évaluations ou aux sujets qui les réalisent. Cela peut être repéré dans Carvalho (2018), Santos (2019), Zúñinga (2007) et certainement bien d'autres travaux.

C'est donc dans ce contexte que les manuels ont été produits au Brésil au cours des 20 dernières années et c'est sur l'analyse de ces deux institutions, $\mathrm{I_M}$ et $\mathrm{I_{PNLD}}$, que notre travail de recherche sera basé. Dans le Chapitre 2 on présenterons de façon plus détaillée le corpus des manuels utilisés dans l'analyse, aussi bien que les documents utilisés de $\mathrm{I_{PNLD}}$.

Nous proposons par la suite un exemple qui illustre le phénomène d'assujettissement de $\mathrm{I_M}$ à $\mathrm{I_{PNLD}}$.

1.2.3 Un exemple pour questionner

Considérons pour une petite réflexion les éléments suivants :

— Société : Brésilienne

— Moment d'analyse : 1994 - 2019

— Discipline : Mathématiques

— Objet : Préjugé

— Institutions noosphériennes : $\mathrm{I_M}$ et $\mathrm{I_{PNLD}}$

En 1994, l'évaluation a détecté différentes formes de manifestation de préjugés de race et de sexe dans les manuels. Certains extraits du document d'évaluation de $\mathrm{I_{PNLD}}$ explicitent ce constat :

> Certains textes de manuels induisent des attitudes préjudiciables envers les races ou les sexes, réservant aux nègres des activités moins « nobles », montrant dans les

33. « Through the years, slowly, a methodology for assessing mathematics textbooks was developed. This was helped because, from PNLD 2002 through PNLD 2018, the mathematics assessments were carried out by the same institution, UFPE (Universidade Federal de Pernambuco), with basically the same coordinating group ; this continuity allowed the above mentioned development. » (Carvalho, 2018, p. 776)

> illustrations presque exclusivement des enfants blonds et bien habillés. (Brasil, 1994, p. 63, traduction propre) [34]

> Le manuel encourage les préjugés raciaux et sociaux : les quelques noirs ou mulâtres représentés dans le texte apparaissent dans des professions moins valorisées comme maçon et cuisinier. (Brasil, 1994, p. 183, traduction propre) [35]

> La figure de la femme apparaît toujours liée aux activités domestiques comme la confection de gâteaux, de bonbons, de limonades ; placer des fleurs dans un vase ; boutons de séparation (couturière) ; donner une bouteille à un bélier ; laver les vêtements dans le réservoir. La femme ne travaille pas en dehors de la maison. Les professions de vendeur, de maçon, de peintre, de boulanger sont illustrées par la figure de l'homme. Cela renforce les préjugés sociaux concernant la profession des femmes. (Brasil, 1994, p. 202, traduction propre) [36]

Depuis lors, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ a décrété comme l'un des critères d'exclusion des manuels toute expression de préjugé renvoyant à l'origine, à la race, à la couleur, au sexe. . . . Nous nous demandons : cette décision est-elle l'indice d'une recherche d'ajustement aux principes et idéaux de la société actuelle ? Ou, souhaite-elle changer la société en changeant I_{M} ?

(Humanité $\leftrightarrow$) Société $\leftrightarrow$ Noosphère

> [...] l'image de la société présentée par les manuels correspond à une reconstruction qui obéit à des motivations différentes, selon le temps et le lieu, et a comme caractéristique commune de présenter la société de la même manière que ceux qui, au sens large, le manuel voudrait qu'il soit, que ce soit vraiment ; les auteurs de manuels ne sont pas de simples spectateurs de leur temps : ils revendiquent un autre statut, celui d'agent. Le manuel n'est pas un simple miroir : il modifie la réalité pour éduquer les nouvelles générations, fournissant une image déformée, schématisée, souvent favorablement modélisée : les actions contraires à la morale sont presque toujours punies exemplairement ; les conflits sociaux, les actes criminels ou la violence quotidienne sont systématiquement réduits au silence. (Choppin, 2004, p. 557, traduction propre) [37].

34. « Alguns dos textos induzem atitudes preconceituosas em relação a raças ou sexos, reservando para os negros atividades menos "nobres", mostrando nas ilustrações quase que exclusivamente crianças louras, bem vestidas. » (Brasil, 1994, p. 63)

35. « O livro incentiva preconceitos raciais e sociais : os poucos negros ou mulatos retratados no texto representam profissões menos valorizadas como pedreiro e cozinheira. » (Brasil, 1994, p. 183)

36. « A figura da mulher aparece sempre ligada às atividades domésticas como fazendo bolos, doces, limonadas ; colocando flores num vaso ; separando botões (costureira) ; dando mamadeira a um carneiro ; lavando roupa no tanque. A mulher não trabalha fora de casa. As profissões como vendedor, pedreiro, pintor, padeiro são ilustradas com a figura do homem. Isto vem reforçar preconceitos sociais referentes à profissão da mulher. » (Brasil, 1994, p. 202, traduction propre)

37. [...] a imagem da sociedade apresentada pelos livros didáticos corresponde a uma reconstrução que obedece a motivações diversas, segundo época e local, e possui como característica comum apresentar a sociedade mais do modo como aqueles que, em seu sentido amplo, conceberam o livro didático gostariam de que ela fosse, do que como ela realmente é ; os autores de livros didáticos não são simples espectadores de seu tempo : eles reivindicam um outro status, o de agente. O livro didático, não é um simples espelho : ele modifica a realidade para educar novas gerações, fornecendo uma imagem deformada, esquematizada, modelada, frequentemente de forma favorável : as ações contrárias à moral são quase sempre punidas exemplarmente ; os conflitos sociais, os atos delituosos ou a violência cotidiana são sistematicamente silenciados. (Choppin, 2004, p. 557)

Comme réponse à cette demande, dans les manuels plus récents il n'est pas difficile de trouver des images qui mettent e évidence la pluralité de la société.

Figure 1.9 – Pluralité de la société dans les manuels (Dante, 2011a, p. 43, v.1)

> Une amélioration considérable de la qualité des manuels scolaires due à la pression de l'évaluation est la suivante : jusqu'au milieu des années 1970, les manuels de mathématiques décrivaient une vision très stéréotypée de la famille et de la société. Le père était le fournisseur de la famille ; la mère s'est occupée des enfants et de la maison ; les grands-parents ont souri avec bienveillance aux petits-enfants blonds qui jouaient avec bonheur dans un jardin bien entretenu. La cuisinière familiale était généralement une femme afro-brésilienne grosse et heureuse. La vie à la campagne était idyllique, avec des enfants jouant avec des moutons, ramassant des fleurs et regardant les oiseaux, tandis que père et mère peinaient avec joie dans les champs ou prenaient soin de vaches, moutons et poulets. En fait, plus de la moitié des ménages brésiliens ne sont pas conformes au modèle familial traditionnel et les Blancs représentent moins de 50% de la population. Les Indiens et les Orientaux étaient très rarement montrés, généralement dans des situations très stéréotypées. Maintenant, les manuels sont très prudents et on ne peut pas trouver de telles distorsions. (Carvalho, 2018, p. 782, traduction propre) [38]

Par contre, Souza et Silva (2018) montrent que les manuels brésiliens génèrent toujours un discours normatif et binaire entre « filles » et « garçons ». Pedro, celui qui travaille dans une maison d'édition, montre bien les enjeux qui existent toujours sur ce point.

> La question du genre est l'une des plus compliquées [...] il faut y aller doucement,

38. « A considerable improvement in textbook quality that happened because of assessment pressure is the following : Until the middle 1970s, mathematics textbooks depicted a very stereotyped vision of family and society. The father was the family provider ; the mother cared for the children and the home ; grandparents smiled benevolently at blond grandchildren who played happily in a well-kept garden. The family cook was usually a fat and happy African-Brazilian woman. Country life was idyllically shown, with children playing with sheep, collecting flowers, and looking at birds, while father and mother joyfully toiled the fields or cared for cows, sheep and chickens. In fact, more than half of Brazilian households do not conform to the traditional Family model, and whites are less than 50% of the population. Indians and Orientals were very seldom shown, usually in highly stereotyped situations. Now, books are very careful, and one cannot find distortions such as these. » (Carvalho, 2018, p. 782)

> car ce manuel peut passer pour le PNLD et être salué par les scientifiques, mais ... . L'hésitation qui se dégage du discours de Pedro est explicite lors de l'entretien et résulte de la crainte que ce thème ne soit pas soutenu par la société et principalement par les enseignants [...] (Santos, 2019, p. 195, traduction propre) [39]

Iezzi, un auteur de manuel, admet que les auteurs ont également des préjugés. I_M, assujettie à I_{PNLD}, doit alors faire preuve de vigilance à cela, comme l'indique Fabiana qui travaille également dans une maison d'édition :

> Fabiana (2018) : Comme les [noms des auteurs], ils ne voulaient pas que je mette dans le manuel des illustrations de personnes handicapées ou de personnes noires. Je ne pouvais pas avoir ça dans leur manuel. Il y a eu une conversation avec eux, car cela générait des préjugés et autres. Il y a donc un des personnages en fauteuil roulant, un autre noir, mais ils n'accepteraient pas [...]. Un travail a donc été fait avec l'auteur pour qu'il accepte que son manuel devrait l'avoir. Parce qu'ils sont si élitistes ! Ils voulaient juste des trucs de riches dans leurs manuels, vous comprenez ? Tout le monde blanc avec des yeux bleus et riche, très riche [. . .] (Santos, 2019, p. 194, traduction propre) [40]

Cet objet, « préjugé », assez large et aussi complexe, n'est pas notre objet d'analyse dans la thèse. L'intention de le mettre ici est de provoquer. Provoquer un regard méfiant sur ce que nous continuerons à montrer dans notre travail, avec le but aussi de toujours nous rappeler que

> La noosphère joue un rôle essentiel dans l'articulation entre école et société. Positivement, c'est à elle qu'il échoit de négocier avec la société, s'agissant des demandes que celle-ci adresse à l'école. C'est elle qui transmuera ces demandes en des conditions que l'école pourra satisfaire - notamment en négociant la transformation de demandes d'un type très général, idéologiques par exemple, en demandes exprimées en termes de contenus d'enseignement, en négociant du même pas la reconnaissance de leur équivalence (l'exemple de la réforme des mathématiques modernes est, à cet égard, tout à fait typique de l'exercice de cette capacité).
>
> Pour cette raison même, la noosphère est une partie socialement très exposée aux pressions, aux idéologies, aux valeurs que la société produit incessamment. La négociation qu'elle doit mener ne peut jamais s'égaler à une action de barrage total, qui éloignerait toute demande jugée insupportable pour le système d'enseignement. Dans le flux des demandes, elle opère une sélection, tente d'en écarter certaines, et en reprend d'autres à son compte - avec cette finalité générale de tirer parti de ce « choix des armes » pour assurer mieux encore la compatibilité de l'école avec un univers sociétal changeant, aux exigences renouvelées. (Chevallard, 1987, p. 133)

Inspirés par ce qui dit Chervel (1990), les changements dans les manuels ne symbolisent pas

39. « A questão de gênero á uma questão das mais complicadas, (...) a gente tem que ir com calma porque esse livro pode passar no PNLD e ser elogiado pelo acadêmico, mas..." . A hesitação que emerge na fala de Pedro á explácita no decorrer da entrevista, e á fruto do receio de que essa temática não tenha respaldo por parte da sociedade e, principalmente, pelo professorado [...] » (Santos, 2019, p. 195)

40. « Tipo, os [nome dos autores], eles não queriam que colocasse no livro ilustração de pessoas deficientes e nem de negros. Não podia ter isso no livro deles. Aí foi feita uma conversa com eles, porque isso gerava preconceito e tal. Então tem um dos personagens que é cadeirante, tem outro que é negro, mas eles não aceitavam (...). Então, foi feito um trabalho com o autor, para ele aceitar que no livro dele tinha que ter isso. Porque eles são muito elitizados ! Eles queriam só coisa de ricos nos livros deles, entendeu ? Todo mundo branquinho de olho azul e rico, muito rico [...] . » (Santos, 2019, p. 194)

une évolution au sens le plus romantique du terme, mais ils révèlent le changement de finalité de l'enseignement et de l'apprentissage des différents objets. Et ce n'est pas parce que l'humanité de la fin du vingtième siècle a finalement atteint le domaine de la science, la disparition des « idéologies » et la « transparence des choses » (203) [41]. En plus, une noosphère en avance sur son temps est sans doute freinée par une société conservatrice, et vice-versa.

41. "e não porque a humanidade do fim do século XX chegou enfim ao reino da ciência, à desaparição das "ideologias" , e à transparência das coisas" (Chervel, 1990, p. 203)

1.3 La Problematique De La Thèse

Suite à la théorisation développée auparavant, nous assumons l'hypothèse de travail suivante : *la propension aux changements curriculaires peut être éclairée par l'analyse des assujettissements des institutions composant la noosphère.*

> Un changement curriculaire peut affecter l'une ou l'autre des composantes du curriculum. Un tel changement, en outre, peut être spontané, et se produire presque à l'insu des acteurs et des décideurs, ou provoqué, et résulter alors d'une délibération des plus officielles. (Chevallard, 1997, p. 83)

Dans toute société, de façon plus remarquable dans les sociétés démocratiques, la noosphère se développe grâce aux assujettissements entre les différentes institutions qui la compose. Le contexte particulier que nous étudions, celui du Brésil, illustre cet assujettissement non spontané à partir de la création d'une institution qui délibérément a pour objectif la mise en œuvre de changements curriculaires à partir des changements dans les manuels. Cela s'appuie sur la prémisse que les manuels sont, en général, un porte-parole important de la noosphère dans les systèmes didactiques.

Pour cela, nous considérons la maison d'édition et le PNLD comme les deux institutions noosphériennes cibles de notre étude. La quête d'une conformité convenable des rapports de ces deux institutions dessine des conditions et des contraintes qui peuvent potentiellement influencer la vie des objets qui vivent en I_3 et I_4 (selon le schéma transpositif présent dans Bosch et Gáscon (2005).

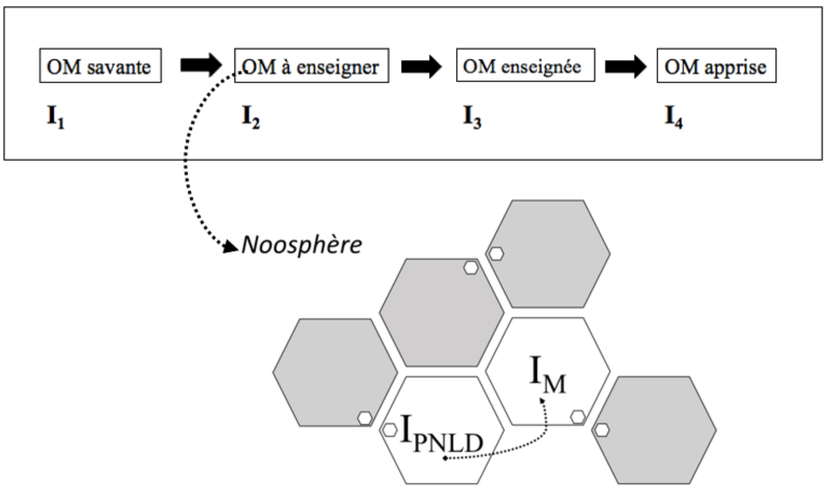


Figure 1.10 – Les institutions cibles d'analyse

À souligner que bien d'autres institutions font partie de ce jeu, comme l'institution des enseignants ou la communauté scientifique de l'éducation mathématique,que nous ne regarderons pas.

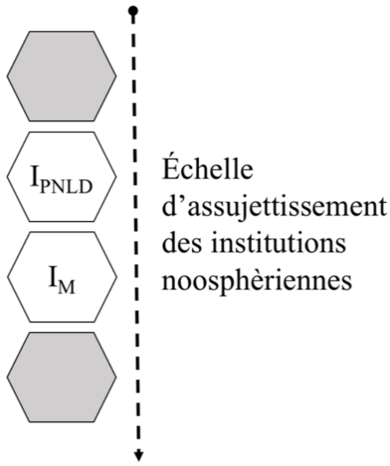


Figure 1.11 – Échelle d'assujettissement des institutions cibles de notre analyse

La question est que ces deux institutions noosphériennes expriment chacune à sa manière *les rapports* - qu'elles pensent être appropriées - d'un élève ou d'un enseignant aux objets du savoir à enseigner et à être appris. I_M met en place dans les manuels un ensemble d'*activités mathématiques inertes*, qui peuvent être mises en œuvre dans une classe d'une école. Elles ont été faites et pensées dans ce but par les sujets de la maison d'édition. Et c'est à partir de ces activités que nous pourrons interpréter et inférer les rapports noosphériens de cette institution. I_{PNLD}, à son tour, exprime ses rapports à travers les résultats des évaluations et les recommandations sur les objets qui, selon cette institution, devraient être retrouvés, ou pas, dans les manuels. Il s'agit d'un moyen indirect d'exprimer son rapport sur ce qui devrait, ou pas, exister dans une classe d'une école.

I_{PNLD} est alors une institution particulière, car au-delà du jugement produit par toute institution noosphérienne sur les institutions d'enseignements, I_{PNLD} a le droit et le devoir de juger aussi une autre institution I_M de la noosphère - c'est même sa raison d'être noosphèrienne.

$$I_{PNLD} \vdash R(I_M, o_c) = ¿$$

Ce jugement entraîne des changements dans I_M. La non-approbation des manuels, comme nous l'avons vu, est le geste prescripteur et punitif face aux jugements qui révèlent une forte non-conformité entre ces deux institutions.

I_{PNLD} est alors une *instance d'évaluation*, qui émet des jugements sur le degré de conformité de $R(I_M\ , o_c)$ à son propre rapport. Ce jugement indique des pistes d'un univers possible d'activités mathématiques considérées comme appropriées et plus précisément sur celles vues comme inadéquats selon cette institution.

...

Commentaire :

En TAD, toute activité humaine, soit-elle mathématique ou non, est modélisable par quatre éléments : type de tâches, techniques, technologies et théorie. Ce modèle a été baptisé *praxéologie*.

> Dans le mot de praxéologie, il y a praxis et il y a logos. Le choix du mot s'explique aisément : il rappelle qu'une pratique humaine, au sein d'une institution donnée, n'est jamais pratique nue, et qu'elle va toujours accompagnée d'un discours plus ou moins développé, d'un logos qui la justifie, la commente, et tente d'en rendre raison. (Chevallard, 1998b, p. 91)

La notion de praxéologie deviendra un objet d'étude dans le chapitre 2. Pour cette raison, ici, nous n'irons pas plus loin dans sa description.

...

C'est-à-dire que dans les discours produits par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, nous retrouvons un univers assez large de praxéologies *possibles* et *impossibles*. La nature de cette institution nous amène, donc, à la problématique suivante :

> [...] la problématique possibiliste, dans laquelle on cherche à identifier les entités praxéologiques telles que $\Re(\mathrm{K}_0, \mathrm{C}_0, \wp, \mathrm{U}_0)$, où K_0, C_0 et U_0 sont fixés et qui s'expriment « en mots » ainsi : « Étant donné un certain ensemble de conditions C_0 et un certain ensemble de contraintes K_0 auxquelles telle instance U_0 est soumise, quelles entités praxéologiques est-il possible que cette instance U_0 rencontre ? » Cette question doit être complétée par celle-ci, qui définit la problématique *contraire*, qu'on peut appeler *impossibiliste* : « Étant donné un certain ensemble de conditions C_0 et un certain ensemble de contraintes K_0 auxquelles telle instance U_0 est soumise, quelles entités praxéologiques est-il vraisemblable que cette instance U_0 ne rencontre pas ? » L'expression symbolique associée est non-$\Re(\mathrm{K}_0, \mathrm{C}_0, \wp, \mathrm{U}_0)$. L'identification des entités praxéologiques telles que $\Re(\mathrm{K}_0, \mathrm{C}_0, \wp, \mathrm{U}_0)$ et celles qui vérifient non-$\Re(\mathrm{K}_0, \mathrm{C}_0, \wp, \mathrm{U}_0)$ permet la reconnaissance de *l'offre praxéologique* adressée à U_0 sous les contraintes K_0 et dans les conditions C_0. (Chevallard, 2011, p. 05)

En quasi paraphrasant l'auteur, nous posons les questions suivantes : étant donné un certain ensemble de conditions $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$ (d'origine $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$) et un certain ensemble de contraintes $\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$ (d'origine $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$) auxquelles l'institution I_{M} est soumise, quelles entités praxéologiques est-il possible que l'institution I_{M} conçoive ? Ou encore, quelles entités praxéologiques est-il vraisemblable que I_{M} ne produise pas ?

$$\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp, \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$

$$\text{non-}\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp, \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$

Un manuel est approuvé par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ lorsque au moins une partie importante de $(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}})$ est prise en compte par I_{M}. Le cas contraire définit les manuels qui ne sont pas approuvés, les *mauvais* manuels pour $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Remarquons, cependant, que l'entité praxéologique n'est toujours pas instanciée. Elle devrait émerger justement de l'interprétation et l'assujettissement de I_{M} à $(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}})$ et à d'autres (K, C) divers.

> Savoir ce qu'une instance sait et ce qu'elle ignore est évidemment crucial dans toute entreprise de diffusion praxéologique. Mais ce qui est plus important encore dans cette perspective, c'est l'analyse des conditions et des contraintes pour lesquelles cette instance sait ou ignore ; de là le caractère fondamental des problématiques possibiliste et impossibiliste. (Chevallard, 2011, p. 05)

Pragmatiquement, notre travail sera organisé sur deux axes. D'une part, à partir des productions de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ nous chercherons à identifier les conditions et contraintes prescrites pour la vie d'un ensemble - limité, mais non unitaire - de praxéologies. D'autre part, nous disposons dans les manuels des données pour décrire les praxéologies produites par I_{M}. Sur ces praxéologies nous posons les questions : « Est-ce que l'ensemble de conditions et contraintes ($\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$) a été suivi ? Quel est le degré de conformité entre ces institutions ? ». Nous pouvons également nous aventurer, comme le propose Chevallard (2011), à chercher quelles sont les praxéologies qui n'y sont pas.

> La didactique est la science de la diffusion et de la non-diffusion des entités praxéologiques, de la rencontre et de l'évitement des praxéologies... On peut parler ici de problématique de base positive et de problématique de base négative. On peut et on doit développer une didactique négative des mathématiques et des sciences, qui montrent comment les institutions organisent l'évitement des praxéologies de type mathématique ou scientifique [...] (Chevallard, 2011, p. 05)

Pour conclure, c'est bien de dire qu'avant même la démocratisation de l'école, où les manuels servaient aussi comme une forme de contrôle de l'éducation, les œuvres didactiques brésiliennes participaient à d'importants changements éducatifs dans le pays en tant qu'instrument de mise en œuvre des politiques éducatives (Pimentel et Vilela, 2011). Plus récemment, Zúñinga (2007) considère que les évaluations de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ visent à améliorer le « manuel réel » en fonction de ce que les évaluateurs supposent être un « manuel idéal », basé sur des théories et des méthodologies d'enseignement récentes. L'étude de ces changements est au cœur de notre travail. De cela, nous pouvons dire que notre objectif de recherche est d'étudier les effets de ce système d'évaluation sur les manuels. Il s'agit, à partir d'un point de vue didactique, d'étudier les enjeux d'assujettissements qui circulent à l'intérieur de la noosphère.

Dans le prochain chapitre nous proposerons des outils pour étudier cette problématique.

Chapitre 2

Méthode et outils de mesure

« Sur ce problème des mesures, en apparence si pauvre, on peut aussi saisir le divorce entre la pensée du réaliste et la pensée du savant. Le réaliste prend tout de suite l'objet particulier dans le creux de la main. C'est parce qu'il le possède qu'il le décrit et le mesure. Il en épuise la mesure jusqu'à la dernière décimale, comme un notaire compte une fortune jusqu'au dernier centime. Au contraire, de cet objet primitivement mal défini, le savant *s'approche*. Et d'abord il *s'apprête* à le mesurer. Il discute les conditions de son étude ; il détermine la sensibilité et la portée de ses instruments. Finalement, c'est *sa méthode de mesure* plutôt que l'objet de *sa mesure* que le savant décrit. L'objet mesuré n'est guère plus qu'un degré particulier de l'approximation de la méthode de mesure. Le savant croit au *réalisme* de la mesure plus qu'à la *réalité* de l'objet. L'objet peut alors changer de nature quand on change le degré d'approximation. Prétendre épuiser d'un seul coup la détermination quantitative, c'est laisser échapper les *relations* de l'objet. (Bachelard, 2004, pp. 253-254) »

(Bachelard, 2004, pp. 253-254)

...

Objectifs du chapitre : Établir des choix de recherche. Présenter des concepts théoriques qui interviendront comme outils d'analyse. Élaborer un plan général de la méthodologie.

...

Introduction

> Un jour, l'un des villageois a pensé à un objet auquel personne n'avait jamais pensé. [...] Objet étrange : beaucoup de trous noués par des ficelles. Les trous devaient laisser passer ce qu'on ne voulait pas obtenir : l'eau. Les cordes étaient nécessaires pour obtenir ce qu'on voulait attraper : le poisson. Il a tissé un filet. [...]
> D'autres étaient heureux et ont essayé d'apprendre l'art de faire des filets. Les types de filets les plus variés ont été inventés. [...] Chaque filet prenait un type de poisson différent. [...]
> Les pêcheurs-fabricants de filets se sont organisés en une confrérie. Pour appartenir à la confrérie, il fallait que le postulant sache tisser des filets et qu'il présente, comme preuve de sa compétence, un poisson attrapé avec les filets qu'il a tissé lui-même. (Alves, 1999, pp. 83-84, traduction propre) [1]

Tout modèle de description de données porté par le chercheur est une espèce de *filet*, un outil qui lui permet d'attraper et de chercher consciemment des observables et d'en ignorer arbitrairement bien d'autres. Dans ce chapitre, nous présenterons des concepts de la théorie anthropologique du didactique qui nous serviront de matière-première pour notre filet. Ce *filet* est aussi formé des choix faits par le chercheur. C'est ce que nous allons développer ci-après.

Le contexte d'étude, présenté comme l'instanciation de certains niveaux de codétermination, est un premier choix. Rappelons le.

Société	*Société Brésilienne*
↓↑	↓↑
École	*École primaire*
↓↑	↓↑
Pédagogie	*Pédagogie*
↓↑	↓↑
Discipline	*Les Mathématiques*

Figure 2.1 – Niveaux de codétermination de notre étude

Notre travail se centrera principalement sur des niveaux inférieurs à la discipline dans l'échelle de codétermination. Ce second choix résulte d'une question de coût méthodologique, mais aussi (et surtout) du fait que ce sont dans ces autres niveaux que nous pouvons repérer des traces plus précises du curriculum prescrit. À cette fin, examinons comment Chevallard (2002) définit les quatre niveaux inférieurs à la discipline et ce qu'il en dit :

1. « Até que um dos aldeões pensou um objeto jamais pensado. [...] Objeto estranho : uma porção de buracos amarrados por barbantes. Os buracos eram para deixar passar o que não se desejava pegar : a água. Os barbantes eram necessários para se pagar o que se deseja pegar : os peixes. Ele teceu uma rede.[...] Outros ficaram alegres e trataram de aprender a arte de fazer redes. Os tipos mais variados de redes foram inventados. [...] Cada rede pegava um tipo diferente de peixe. [...] Os pescadores-fabricantes de redes se organizaram numa confraria. Para pertencer à confraria, era necessário que o postulante soubesse tecer redes e que apresentasse, como prova de sua competência, um peixe pescado com as redes que ele mesmo tecera. » (Alves, 1999, pp. 83-84)

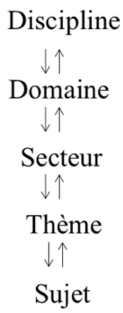


Figure 2.2 – Les niveaux inférieurs de codétermination (Chevallard, 2002)

> La reconnaissance de la hiérarchie de niveaux ainsi ébauchée, qui va des sujets d'études à la discipline en passant par thèmes, secteurs et domaines, a pour principal mérite de permettre un premier tri dans les paquets de contraintes présidant à l'étude scolaire, en évitant un déséquilibre trop flagrant entre ce qui, de ces contraintes, sera pris en compte et ce qui sera laissé pour compte. Le réalisme de cette échelle de niveaux n'est, à cet égard, pas douteux. (Chevallard, 2002, p. 42)

À l'école primaire au Brésil, nous identifions quatre domaines, intitulés par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ comme : « Nombres et Opérations », « Géométrie », « Grandeurs et Mesures » et « Traitement de l'information ». Dans notre thèse nous avons choisi de nous intéresser au domaine « Nombres et Opérations » (troisième choix).

Aux niveaux inférieurs au domaine « Nombres et Opérations », un quatrième choix est de prendre comme objet d'étude de notre recherche le secteur « Champ additif », relatif aux praxéologies (que nous définirons plus loin) qui évoquent les idées inhérentes aux opérations d'addition et de soustraction des nombres.

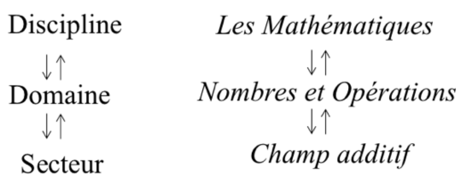


Figure 2.3 – Discipline, Domaine et Secteur

Les deux derniers choix se justifient strictement par le parcours personnel du chercheur. Dans Kaspary (2014) [2], nous avons réalisé une étude des manuels brésiliens sur le champ additif, qui incontestablement a une place importante à l'école primaire. Cette étude a permis de faire émerger, à l'état embryonnaire, certaines questions concernant l'influence et sur l'assujettissement d'autres institutions sur le contenu des manuels.

2. Mémoire de master encadré par Marilena Bittar.

Pour étudier les rapports noosphériens au secteur du champ additif, mais aussi pour prendre en compte les niveaux « thème » et « sujet », nous ferons appel à plusieurs outils d'analyse de la théorie anthropologique du didactique, que nous présentons par la suite. Nous commencerons par introduire la notion de praxéologie, puis celle d'ostensif et certains éléments du cadre T4Tel [3]. Enfin nous conclurons ce chapitre par une description de notre corpus d'analyse et une esquisse de notre méthodologie.

3. T4Tel : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning.

2.1 Le Modèle Praxéologique

> Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie. Avant même d'examiner ce qu'est une praxéologie, on doit donc noter que l'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie nullement l'activité mathématique parmi les activités humaines : c'est autrement que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité. (Chevallard, 1998b, p. 91)

Formé de quatre éléments - [T, τ, θ, Θ], type de tâches, technique, technologie et théorie - le modèle praxéologique est devenu un symbole représentatif de la théorie anthropologique du didactique et assez diffusé dans la communauté scientifique en didactique.

La caractérisation de l'activité humaine par le modèle praxéologique est tout d'abord fonctionnelle (Bosch et Chevallard, 1999). Elle nous sert à décrire la mathématique à enseigner présente dans les manuels, ainsi à repérer leurs changements au fil du temps. Elle sera également un moyen d'interroger et d'interpréter les demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ sur le champ additif.

2.1.1 La notion de types de tâches : un outil pour le chercheur et un geste didactique dans des institutions d'enseignement

Une activité humaine, dans la théorie anthropologique du didactique, se traduit en premier lieu par une *tâche* à accomplir.

> [...] la notion de tâche employée ici est à l'évidence plus large que celle du français courant [4] : se gratter la joue, marcher du divan jusqu'au buffet, et même sourire à quelqu'un, sont ainsi des tâches. Il s'agit là d'une mise en pratique particulièrement simple du « principe anthropologique » [...] (Chevallard, 1998b, p.92)

La tâche est cette dimension de l'activité humaine qui existe au sein d'une institution. C'est sur les tâches que le chercheur s'appuie pour modéliser le premier élément praxéologique, désigné par types de tâches.

> À la racine de la notion de praxéologie se trouve les notions solidaires de tâche, t, et de type de tâches, T. Quand une tâche t relève d'un type de tâches T, on écrira parfois : t $\in$ T. Dans la plupart des cas, une tâche (et le type de tâches parent) s'exprime par un verbe : balayer la pièce, développer l'expression littérale donnée, diviser un entier par un autre, saluer un voisin, lire un mode d'emploi, monter l'escalier, intégrer la fonction x xlnx entre x = 1 et x = 2, etc. [...]
> Enfin, tâches, types de tâches, genres de tâches ne sont pas des donnés de la nature : ce sont des « artefacts », des « œuvres », des construits institutionnels, dont la reconstruction en telle institution, par exemple en telle classe, est un problème à part entière, qui est l'objet même de la didactique. (Chevallard, 1998b, p. 92)

4. Et également celle du portugais courant (note de l'auteur de la thèse).

Un type de tâches est alors ce tiroir où le chercheur met les tâches qu'il identifie et veut représenter comme ressemblantes. Cette modélisation, bien entendu, cherche à représenter ce qui se passe, ou qui pourrait se passer, au sein d'une institution.

Les types de tâches modélisés par le chercheur révèlent alors beaucoup sur la dimension didactique des institutions d'enseignement : la manière dont les tâches sont organisées est un des premiers gestes didactiques des institutions qui produisent des façons d'étudier.

Ceci est notable dès un niveau plus haut de découpage de l'échelle de codétermination, celui de la discipline, découpage établie depuis longtemps dans les institutions d'enseignement et qui de ce fait risque d'être transparent. Chaque discipline scolaire s'organise autour des types de tâches spécifiques qui sont, souvent et à tort, considérés comme séparés d'autres types de tâches d'autres disciplines scolaires. Ce geste didactique de découpage est réappliqué à l'intérieur de chacune d'elles, comme le découpage classique des Mathématiques par « Arithmétique », « Géométrie », « Algèbre », « Statistique », ... Toute cette organisation n'est pas arbitraire et est un objet d'étude pour la recherche en didactique du point de vue de la TAD.

Au-delà de ce découpage historique, les tâches sont organisées aussi en groupes selon d'autres raisons dans des institutions d'enseignement. Citons deux critères remarquables de regroupement : le niveau de difficulté des tâches (supposé par l'institution) et les techniques qui accomplissent les tâches (reconnues par l'institution). Dans ce sens, l'analyse des types de tâches et la prise en compte du temps institutionnel, en particulier du moment où un type de tâches apparaît dans l'institution, nous aident à comprendre en partie la chronogenèse de l'étude d'un objet donné.

Du côté du chercheur, ce travail de modélisation n'est pas toujours simple. Chaachoua (2018) nous invite à réfléchir sur ce point : « En effet, ce qu'observe un chercheur dans une institution donnée ce sont des tâches : comment peut-il définir un type de tâches ? Ou encore, comment rattacher et organiser les tâches autour d'un même type de tâches ? » (p. 07). Kaspary (2014), par exemple, au cours de l'analyse des tâches du champ additif d'un manuel brésilien de l'école primaire, a rencontré les tâches suivantes :

a. *Calculer* $3 + 5$

b. *Calculer* $53 + 2$

c. *Calculer* $53 + 76$

d. *Calculer* $40 + 20$

Toutes ces tâches ont été modélisées dans son analyse par le type de tâches T : « Calculer x + y, où x et y sont des nombres entiers ». Cette modélisation apparaît dans un premier temps comme cohérente avec la notion de type de tâche, à savoir : « a », « b », « c » et « d » appartiennent à « T ». Dans un deuxième temps, cette modélisation par T a masqué certaines particularités de ces tâches au sein de l'institutions analysée : Calculer « 3+5 » et « 40+20 » ont été considérées comme *similaires* dans la modélisation. Or, est-ce bien cela qui se passe au niveau de l'école primaire ?

Ce que nous voulons mettre en avant par cet exemple est que le niveau de granularité pris en compte par le chercheur est, inévitablement, un facteur à considérer dans le processus de modélisation praxéologique et tout spécialement pour la modélisation des types de tâches en jeu. Ce niveau peut être flottant dans l'activité du chercheur en fonction de ce qu'il regarde dans les observables. Dans cette perspective, le chercheur peut jouer avec des modélisations de types de tâches des plus génériques aux plus spécifiques pour faire apparaître des phénomènes didactiques.

C'est le moment pour nous de préciser le niveau le plus générique de granularité de types de tâches examiné dans nos analyses :

> $T^{+/-}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs

Nous montrerons comment, à partir de la notion de variable, nous prendrons en compte des types de tâches plus spécifiques, des sous-types de tâches de $T^{+/-}$. Nous allons reprendre ces réflexions dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

Nous verrons dans notre étude que la noosphère porte un intérêt à ce découpage, parce que, comme nous l'avons dit, la manière dont les institutions d'enseignement organisent les tâches affecte nettement l'activité d'étude d'un objet à apprendre.

2.1.2 Technique : une notion dialectique avec la notion de type de tâches

À côté de la notion de type de tâches se trouve la notion de technique.

> [...] on ne considérera d'abord, dans cette leçon, que la statique des praxéologies, en ignorant donc provisoirement la question de leur dynamique, et en particulier de leur genèse. Soit donc T un type de tâches donné. Une praxéologie relative à T précise (en principe) une manière d'accomplir, de réaliser les tâches $t \in T$: à une telle manière de faire, τ , on donne ici le nom de technique (du grec tekhnê, savoir-faire). (Chevallard, 1998b, p. 92)

Brièvement, une technique est donc une (des) façon(s) d'accomplir un type de tâches T, ou au moins une partie de T.

Parmi les techniques possibles, souvent l'une d'entre elles est élue institutionnellement comme la préférée, et est parfois perçue comme l'unique possible.

> Enfin, en une institution I donnée, à propos d'un type de tâches T donné, il existe en général une seule technique, ou du moins un petit nombre de techniques institutionnellement reconnues, à l'exclusion des techniques alternatives possibles - qui peuvent exister effectivement, mais alors en d'autres institutions. Une telle exclusion est corrélative, chez les acteurs de I, d'une illusion de « naturalité » des techniques institutionnelles dans I - faire ainsi, c'est naturel... -, par contraste avec l'ensemble des techniques alternatives possibles, que les sujets de I ignoreront, ou, s'ils y sont confrontés, qu'ils regarderont spontanément comme artificielles, et (donc) « contestables », « inacceptables », etc. À cet égard, on observe assez fréquemment, chez les sujets de I, de véritables passions institutionnelles pour les techniques naturalisées dans l'institution. (Chevallard, 1998b, p. 93)

Si l'on accepte cette hypothèse écologique d'un favoritisme institutionnel des techniques, on peut dire que les types de tâches sont des conditions pour qu'il y ait le besoin et l'opportunité de donner vie aux techniques, et également les types de tâches peuvent être des contraintes pour la non-rencontre avec d'autres techniques. Dans ce sens, différencier « $40 + 20$ » et « $3 + 2$ » par deux types de tâches devient pertinent si l'institution reconnaît deux techniques différentes pour les accomplir. Cet aspect jouera un rôle décisif dans notre analyse.

Si, par contre, deux techniques existent au sein d'une institution, l'une d'elles peut être mieux adaptée, plus fiable que l'autre, sur un certain domaine précis. « À cet égard, une technique peut être supérieure à une autre, sinon sur T tout entier, du moins sur une certaine partie de T » (Chevallard, 1998b, p. 92). Cet aspect peut influencer, évidemment, la préférence institutionnelle d'une technique, ou pousser à une évolution praxéologique vers une autre technique plus efficace. La puissance (ou l'impuissance) des techniques peut être estimée en fonction de plusieurs critères, comme celui du coût de sa mise en œuvre (pas toujours facile à mesurer [5]). Nous reviendrons également sur la portée des techniques dans le paragraphe 3 de ce chapitre.

La noosphère, comme entité qui s'occupe du bon fonctionnement des systèmes didactiques, porte un regard particulier sur les techniques mises en place dans les institutions d'enseignement. Dans notre analyse nous nous intéresserons à celles du champ additif qui permettent d'accomplir les tâches de $T^{+/-}$.

2.1.3 Le bloc du savoir : technologie et théorie

Les types de tâches et les techniques composent ce qu'on appelle le bloc du *savoir-faire*. Pour que ce bloc existe au sein d'une institution, il est nécessaire qu'il en existe un autre, celui du *savoir*.

Le savoir est cette chose inhérente à toute activité humaine, qui permet en particulier de justifier, de croire, d'expliquer, de créer et de mettre en œuvre les techniques.

Ce bloc du savoir en TAD est identifié par le couple technologie et théorie, $[\tau\ ,\ \Theta]$ (Chevallard,

5. Déjà en 1982, Brousseau a présenté des calculs sur le coût de mise en œuvre des techniques mathématiques, basés sur une analyse robuste.

1998b).

Une technologie n'est rien d'autre qu'un discours rationnel sur la technique. La rationalité embrasse dans cette théorisation, sans ostracisme, toute pensée humaine. L'action d'écarter certains savoirs ou de porter une valeur sur la rationalité des discours relève, en effet, des institutions.

Une technologie est alors, comme les autres éléments praxéologiques, un objet d'une institution. Pour cette raison, une technique donnée peut avoir des discours technologiques différents en fonction d'où et pour qui elle existe. En découle qu'un discours peut être plus crédible qu'un autre selon les sujets et les institutions qui les jugent.

> Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître... peu rationnelle depuis telle autre institution. (Chevallard, 1998b, p. 93)

Les technologies, à leur tour, sont aussi justifiées et produites dans un univers d'autres discours plus étendus, qu'on appelle théorie.

> Bien entendu, on peut imaginer que cette régression justificative se poursuive à l'infini - qu'il y ait une théorie de la théorie, etc. En fait, la description à trois niveaux présentée ici (technique/technologie/théorie) suffit, en général, à rendre compte de l'activité à analyser. La théorie, terre d'élection des truismes, tautologies et autres évidences, est même souvent évanouissant : la justification d'une technologie donnée est, en bien des institutions, traitée par simple renvoi à une autre institution, réelle ou supposée, censée détenir une telle justification. C'est là le sens du classique « On démontre en mathématiques... » du professeur de physique, ou encore du « On a vu en géométrie... » du professeur de mathématiques d'autrefois. (Chevallard, 1998b, p. 94)

Dans notre travail, ce sont les savoirs liés au champ additif à l'école primaire qui nous intéresse, qui sont, ainsi comme tous les autres éléments praxéologiques, soumis au regard de la noosphère.

2.1.4 Reprise des niveaux de codétermination avec la notion de praxéologie

Le modèle praxéologique que nous venons de présenter est un moyen de décrire les niveaux inférieurs de codétermination. Au niveau le plus bas, du sujet, se trouvent les praxéologies ponctuelles, formées par un type de tâches, une technique, une technologie et une théorie. Ces praxéologies sont amalgamées en praxéologies locales, régionales et globales, selon le schéma ci-dessous :

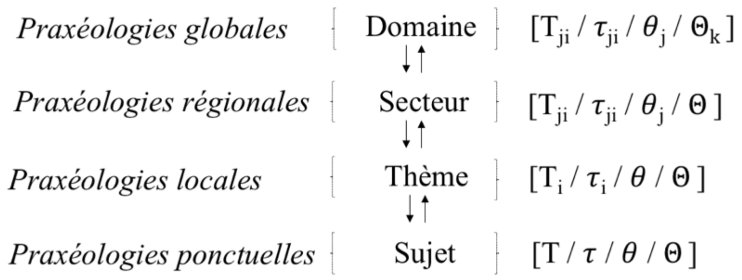


Figure 2.4 – Échelle de codétermination et les praxéologies

L'échelle de codétermination de notre étude est alors définie de la façon suivante :

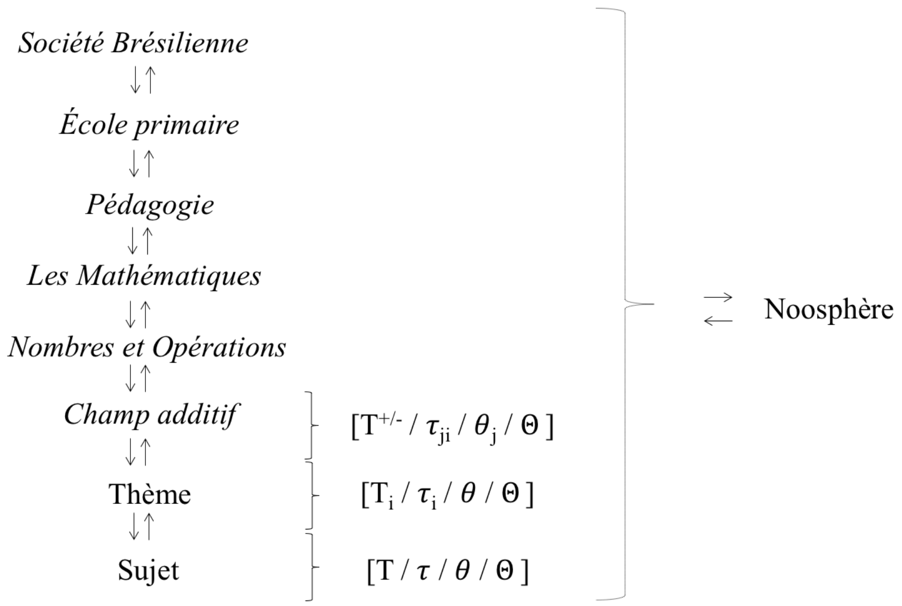


Figure 2.5 – Les niveaux de codétermination de notre étude

Dans notre étude nous nous centrerons sur les types de tâches T qui sont des sous-types de tâches de $T^{+/-}$ « $T \subseteq T^{+/-}$ », aux techniques qui permettent d'accomplir ces types de tâches, à leurs technologies et à la théorie reconnue sous le nom de « système de numération décimale ».

La noosphère, comprise comme lieu d'origine des conditions qui apparaissent souvent comme des contraintes aux systèmes d'enseignement, a le droit, le pouvoir et l'intention de veiller sur les praxéologies rencontrées à la fin du processus de la transposition didactique. Pour cette raison, la noosphère s'occupe aussi des niveaux supérieurs qui impactent la vie de ces praxéologies, en étant vigilant sur les échanges entre les niveaux de codétermination, « ↓↑ »

2.2 Les Ostensifs, Matériel Empirique Du Chercheur

Une certaine notion « ♣ » flotte dans l'atmosphère des théories en didactique des mathématiques. L'article « une » est ici employée par le manque linguistique d'un article encore plus indéfini : « ♣ » est « $♣^{\partial}$ » dans la théorie « ∂ » et est « $♣^{ß}$ » dans la théorie « ß ».

La notion « ♣ » dont nous parlons ici est celle reconnue sous le nom de « Représentation sémiotique » dans la Théorie des Représentations Sémiotiques (Duval, 1993) ou désignée comme « R : ensemble de représentations symboliques » dans la Théorie des Champs Conceptuels (Vergnaud, 1990). Dans la Théorie Anthropologique du Didactique, où nous choisissons de nous placer, nous l'appelons « Ostensif » (Chevallard, 1994). Nous notons que la prise en compte de « ♣ » par les didacticiens en mathématiques est en rupture avec l'appréciation absolue des objets abstraits.

En 1987, Chevallard écrit un texte intitulé « Quelques représentations touchant le concept de représentation », qui explicite bien l'esprit de ce que nous venons de dire. Un peu plus tard, en 1994, l'auteur définit ce qu'il baptise par « ostensif » et c'est sur cette notion que nous allons continuer notre discussion.

2.2.1 Les ostensifs et la notion de praxéologie

Le mot « ostensif » apparaît, en 1994, à partir d'une réflexion sur la technique :

> Les développements précédents conduisent à poser la question suivante : de quoi est faite une technique donnée ? De quels « ingrédients » se compose-t-elle ? Et encore : en quoi consiste la « mise en œuvre » d'une technique ?
> L'observation de l'activité humaine amène à répondre en établissant une distinction fondamentale entre deux types d'objets : les objets ostensifs, d'une part, les objets non ostensifs, d'autre part. (Chevallard, 1994, p. 194)

Chevallard (1994) présente la définition d'*ostensif* comme un manifeste matériel et manipulable. La matérialisation et la manipulation sont entendues au sens large. Les gestes, les mots, les dessins, les chiffres[...] sont des ostensifs. Et ce n'est qu'à partir d'eux qu'on conçoit, on développe et on exprime ce qui est dans le champ des idées, appelé *non-ostensif.* « À cela s'oppose une vision matérialiste qui rappelle que l'activité mathématique est, comme toute activité humaine, une activité matérielle, et que les non-ostensifs ne sauraient exister sans les ostensifs, non plus d'ailleurs que ceux-ci sans ceux-là. » (Chevallard, 1994, p. 196)

S'il est vrai que les ostensifs apparaissent dans un premier temps pour répondre à la question de la nature des techniques - dont nous continuerons plus tard la discussion - cela ne veut pas dire qu'ils se restreignent à cet élément praxéologique.

> Les ostensifs constituent la partie perceptible de l'activité, c'est-à-dire, ce qui, dans la réalisation de la tâche, se donne à voir, aussi bien à l'observateur qu'aux acteurs eux-mêmes. Dans l'analyse du travail mathématique, les éléments ostensifs font partie du réel empirique, accessible aux sens, par contraste, la présence de tel ou tel non-ostensif dans une pratique déterminée ne peut être qu'induite ou supposée à partir des manipulations d'ostensifs institutionnellement associées. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 88)

Les ostensifs sont alors le matériel empirique sur lequel le chercheur s'appuie pour décrire les éléments praxéologiques. Prenons, à titre d'illustration, la notion de types de tâches et le rôle des ostensifs [6] :

t_1 : calculer « $25 + x = 40$ »

t_2 : calculer « $25 + n = 40$ »

t_3 : calculer « $25 + \heartsuit = 40$ »

Les tâches t_1, t_2 et t_3 sont-elles d'un même type de tâches ?

La réponse se trouve notamment dans les rapports établis avec « x », « n » et « $\heartsuit$ », qui dépendra de l'institution où ces tâches sont/seront rencontrées. À l'école primaire, par exemple, le rapport aux ostensifs « x » et « a » est normalement limité à la notion d'une lettre de l'alphabet, de sorte que l'existence de t_1 et t_2 sera normalement évitée. Le « $\heartsuit$ », par contre, ne vit que grâce à une *resignification* qui lui est attribuée et qui permet à t_3 d'y exister. L'ostensif « $\heartsuit$ », dans ce sens, abandonne pour un petit moment son statut de symbole de *l'amour* pour devenir *celui de la valeur inconnue.* Or, nous pourrions imaginer une institution où la distinction de ces trois ostensifs n'a pas vraiment raison d'être et pour cela ces tâches sont considérées toutes d'un même type. Ou encore, nous pourrions penser à une institution où ces trois tâches existent, mais où l'usage de « x », « n » et « $\heartsuit$ » influence le choix de la technique, ce qui nous amène à les différencier en types de tâches distincts à un certain niveau de granularité d'analyse.

Dans le bloc du savoir, les ostensifs se font également présents. Le *théorème pythagorique*, en tant que technologie, n'existe qu'à travers son expression algébrique, sa description en langage naturel, les triangles rectangles [...], qui à leur tour sont, chacun, un amalgame d'ostensifs et de non-ostensifs.

> C'est en effet au niveau technologique que nous pouvons être tentés de situer les concepts et notions permettant de comprendre et de contrôler l'activité mathématique. Or tout discours technologique se réalise concrètement par la manipulation d'objets *ostensifs,* en particulier discursifs et écrits, qui permettent de matérialiser les explications et justifications nécessaires au développement de la tâche ; et il en est de même, bien sûr, du niveau théorique. Comme nous l'avons dit plus haut, *la co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs* est un postulat général qui affecte *tous les niveaux de l'activité.* (Bosch et Chevallard, 1999, p. 90)

Pour cela, nous considérons que les ostensifs sont les *ingrédients premiers* de l'activité humaine (Bosch et Chevallard, 1999). En conséquence, les ostensifs sont, pour le chercheur, les observables de

6. Pour ceux qui veulent approfondir le rôle des ostensifs au niveau de la tâche, lire Jolivet (2018).

son étude. C'est-à-dire que c'est à partir d'eux que l'activité peut être décrite et à partir d'eux que nous pouvons supposer quels non-ostensifs y sont évoqués.

Ce que nous venons de dire est résumé par le petit jeu axiomatique ci-dessous :

Axiome 1 : L'activité humaine peut être décrite à partir du quadruplé [T, τ, θ, Θ].

Axiome 2 : L'activité humaine se fait par la co-activation d'ostensifs et de non-ostensifs.

Corolaire : Les ostensifs et non-ostensifs sont des ingrédients du quadruplé [T, τ, θ, Θ].

Par déduction, l'exercice de description des éléments praxéologiques peut être fait, en partie, par l'identification des ostensifs mobilisés dans l'activité humaine.

2.2.2 Valences sémiotique et instrumentale des ostensifs et évolution praxéologique

Les praxéologies portent les marques du temps institutionnel : elles changent avec les besoins et les développements de l'institution, ce qui provoque même la disparition de certaines. Ces changements sont ce qu'on appelle *évolution praxéologique*.

Les ostensifs aident à raconter et mieux comprendre l'histoire de l'évolution praxéologique, comme illustré par Kaspary et Bittar (2018) dans le cas du champ additif à l'école primaire. De façon générale et résumée, toute évolution de l'activité se traduit par une réduction ostensive, selon un principe d'économie.

> On peut montrer plus généralement, que la « microgenèse » individuelle d'une technique pour résoudre un type de problèmes donné suppose, dans un premier temps, une prolifération ostensive importante : la technique se construit sur une base d'objets empruntés à des univers divers de l'activité humaine et en recourant à de nombreux points d'appui ostensifs - discursifs, gestuels, graphiques, écrits. Mais l'évolution de l'activité - qui aboutira, le cas échéant, à une technique stabilisée - conduit ensuite à une réduction ostensive de plus en plus évidente, la mise en œuvre de la technique tendant à mettre au rebut tout l'échafaudage ostensif qui en avait permis la construction. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 98)

Prenons un exemple simple de cet aspect. L'élève au début de l'école primaire utilise les doigts ou des jetons pour calculer « 7 + 4 ». Dans un premier temps il représente les deux collections d'objets puis dénombre la collection réunion, « 1, 2, 3... , 11 ». Là, il est prévu une multiplicité d'ostensifs qui aide la mise en œuvre de la technique. Dans un deuxième temps, l'environnement technologique évolue ce qui permet d'avoir une technique moins couteuse : dénombrer à partir du 7 comme suit « 7, 8, ... , 11 », mais toujours guidé par une activation assez importante d'ostensifs. Avec le temps, accomplir « 7 + 4 » exigera de moins en moins d'ostensifs pour ce calcul.

L'évolution praxéologique est aussi liée à deux propriétés des ostensifs, nommées *valence instrumentale et valence sémiotique* :

> Un objet ostensif apparaît comme possédant deux valences : une valence instrumentale, d'une part, une valence sémiotique, d'autre part, ces deux valences apparaissant, au sein d'une technique donnée, associées comme le recto et le verso d'une feuille. a) Dire qu'un ostensif a une valence instrumentale signifie qu'il permet d'agir, de travailler. [...] b) Dire qu'un ostensif a une valence sémiotique signifie qu'il permet de voir, d'apprécier de manière sensible, le travail fait, le travail en train de se faire, et d'envisager le travail à faire - et cela aussi bien pour le sujet que pour l'observateur. (Chevallard, 1994, pp. 196-197)

Notons que pour accomplir la tâche « $74 + 42$ » la technique de dénombrement à partir de l'un des nombres n'est pas adaptée au sens où le risque d'erreur devient important. Cela est dû aux valences des ostensifs mobilisés. Pour cela, nous disons que la portée d'une technique est intrinsèquement liée aux valences des ostensifs mobilisés.

Le langage algébrique, par exemple, a eu son succès historique grâce à sa puissance instrumentale et sémiotique, donnant vie à plusieurs techniques pour accomplir des tâches qui étaient auparavant difficiles par le langage naturel. C'est aussi un bon exemple du fait qu'en mathématiques les évolutions praxéologiques témoignent de cette volonté de réduction ostensive.

2.2.3 Quelques commentaires sur les ostensifs et le curriculum

Quelques tendances curriculaires apparues dans le monde portent des traces relatives aux ostensifs. Voici deux exemples : l'usage d'un symbolisme robuste dans l'emblématique réforme des mathématiques modernes et l'importance toujours d'actualité attribuée aux matériaux concrets pour l'apprentissage des jeunes enfants.

En regardant des documents officiels de certaines sociétés - de la France et du Brésil, par exemple - plusieurs passages illustrent le regard attentif que la noosphère pose sur les ostensifs, normalement référencés par le mot « représentation » :

> Ces représentations évoluent à partir de formes pictographiques (dessins détaillés ne correspondant pas toujours à la situation) à des représentations symboliques se rapprochant de plus en plus des représentations mathématiques. Cette évolution dépend du travail de l'enseignant pour attirer l'attention sur les représentations, pour montrer leurs différences, les avantages de certaines, etc. (Brasil, 1997, p. 41, traduction propre) [7]

> Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets

7. « Essas representações evoluem de formas pictóricas (desenhos com detalhes nem sempre relevantes para a situação) para representações simbólicas, aproximando-se cada vez mais das representações matemáticas. Essa evolução depende de um trabalho do professor no sentido de chamar a atenção para as representações, mostrar suas diferenças, as vantagens de algumas, etc. » (Brasil, 1997, p. 41)

> ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. (Ministère de l'éducation français, 2016)

Cela nous montre que les ostensifs sont des objets d'intérêt pour ceux qui discutent l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques : les ostensifs mobilisés pour faire vivre les praxéologies mathématiques sont eux-mêmes objets de discussion de la noosphère.

La notion d'ostensif est alors à la fois un outil et un objet dans notre étude : un outil parce que les ostensifs sont notre matériel empirique ; et un objet parce que la noosphère les prend en compte pour juger ce qui se passe ou devrait se passer dans les institutions d'enseignement.

Nous continuerons, dans le chapitre 3, la discussion sur les ostensifs en considérant spécialement ceux utilisés dans l'étude du champ additif.

2.3 T4tel

Des discussions sur l'usage et l'opérationnalisation du modèle praxéologique ont poussé l'élaboration du T4tel [8], développé au sein de l'équipe MeTAH [9]. Dans un premier moment, il a été conçu pour répondre à des besoins de modélisation des connaissances et des savoirs dans l'environnement informatique. Cependant, comme l'a remarqué Chaachoua (2018), ce cadre « trouve aussi son intérêt et sa pertinence dans des recherches en didactique hors champ des EIAH » (p. 05), comme c'est le cas de cette thèse.

Par la suite, nous présenterons des éléments de T4tel qui sont importants pour notre analyse.

2.3.1 La notion de variable pour décrire les types de tâches

Chaachoua et Bessot (2016) proposent d'incorporer au modèle praxéologique la notion de variable, déjà prise en compte par Brousseau (1981) au sein de la Théorie des Situations Didactiques.

> L'introduction des variables a clairement pour objectif de structurer un ensemble de situations spécifiques d'une connaissance [...]. De ce point de vue, un ensemble de situations spécifiques d'une connaissance ou d'un savoir sera caractérisé par un ensemble restreint de variables pertinentes.
> La notion de variable apparait avant tout comme un outil méthodologique dans un processus de modélisation [...]. (Chaachoua et Bessot, 2016, p. 02)

De façon résumée, Chaachoua (2018) souligne trois fonctions pour les variables dans l'étude praxéologique : 1) Générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable ; 2) Caractériser les portées des techniques ; et 3) Décrire les praxéologies personnelles. Dans notre thèse, ce sont les deux premières fonctions qui nous intéressent.

Cette incorporation théorique de considérer les variables dans l'analyse praxéologique a donné lieu à la notion de « générateur de types de tâches - GT », un objet de nature différente de celle des éléments du quadruplet [T, τ, θ, Θ].

GT : [Verbe, Complément, Système de variables]

Un générateur de types de tâches, comme son nom le suggère, est un fabricateur de types de tâches. Formé par un type de tâches T (Verbe + Complément) et un ensemble de variables et leurs valeurs (Système de variables), il permet de concevoir un univers de types de tâches plus précis que T,

8. T4Tel : T4 renvoie au quadruplet praxéologique (Type de tâches, Technique, Technologie, Théorie) et TEL pour Technology Enhanced Learning.vair

9. MeTAH - Modèles et Technologies pour l'Apprentissage Humain. L'équipe MeTAH est une équipe rassemblant informaticiens et didacticiens autour de la question de la conception, du développement et des usages des Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain (EIAH). C'est une équipe lié au laboratoire LIG - Laboratoire d'Informatique de Grenoble. http ://www.liglab.fr/fr/la-recherche/axes-et-equipes-de-recherche/metah

celui qui a été pris au départ. Chaque type de tâches généré par un GT provient d'une instanciation des variables en jeu. Nous dirons que ces types de tâches sont des sous-types de tâches de T.

Soient

$$T^{x.y} : [\text{Verbe}(x), \text{Complément}(y)]$$
$$GT^{x.y} : [\text{Verbe}(x), \text{Complément}(y), Va, Vb, Vc]$$

Et les valeurs des variables suivantes :

$$Va = \{ a_1, a_2, a_3\}$$
$$Vb = \{ b_1, b_2\}$$
$$Vc = \{ c_1, c_2\}$$

Alors, $T^{x.y.z}$ est un sous-type de tâches de $T^{x.y}$, $T^{x.y.z} \subset T^{x.y}$:

$$T^{x.y.z} : [\text{Verbe}(x), \text{Complément}(y), Va = a_1, Vb = b_2 \text{ et } Vc = c_2]$$

Un exemple :

Soit T_{eq} : « Résoudre une équation algébrique » (nous voyons bien le verbe plus le complément)

Un générateur possible pourrait être GT_{eq} : [Résoudre une équation, V1 : Degré ; V2 : Nature des coefficients], tel que V1 peut prendre les valeurs { 1, 2, 3, 4... } et V2 les valeurs { entiers, rationnels, réelles} . Dans ce cas-là, « Résoudre une équation du second degré avec des coefficients rationnels » est un sous-type de tâches de T_{eq}. Pour ceux intéressés par cet exemple, nous les invitons à regarder Chaachoua et Bessot (2016).

Il est important de dire que certaines instanciations peuvent ne pas avoir du sens, soit d'un point de vue épistémologique, soit institutionnel ou didactique. Et ce sont ces trois aspects que l'on considère, en tant que chercheur, dans l'élaboration du système de variables.

Dans le cas de l'exemple de la résolution d'une équation algébrique, l'absence de techniques pour résoudre des équations d'un degré quelconque au niveau de l'école, par exemple, réduit significativement l'ensemble des valeurs possibles. Cela nous aide à réfléchir sur ce qui existe, mais aussi sur ce qui n'existe pas au sein d'une institution. Pour cela, nous disons que le système de variables nous permet de prendre en compte les aspects écologiques, les conditions, les contraintes et les raisons d'être des types de tâches.

Dans cet exemple, nous voyons aussi que la nature des ostensifs par lesquels les tâches existent apparaît intrinsèquement intégrée dans le type de tâches du départ T_{eq} « Résoudre une équation algébrique ». Or, nous pouvons avoir la situation où l'on ne sait pas très bien *de quoi sont faites* les tâches. Dans ce cas-là, en reprenant une discussion faite précédemment, nous pouvons affirmer que les ostensifs mobilisés au niveau des types de tâches constituent une variable incontournable pour la modélisation de l'activité.

Dans notre thèse nous élaborons un générateur de types de tâches à partir de $T^{+/-}$, avec un système de variable, S.V., à définir dans le chapitre 3 :

$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, S.V.]

La notion de générateur de types de tâches est une réponse au problème évoqué au début de ce chapitre sur les différents niveaux de granularité de l'analyse. Dans notre travail, le niveau générique le plus haut où nous nous plaçons est celui déterminé par $T^{+/-}$. Pour prendre en compte des types de tâches plus spécifiques, $T \subset T^{+/-}$, nous jouerons sur les valeurs des variables déterminées par l'analyse.

Grâce à cette structuration des types de tâches, nous faisons l'hypothèse que certains changements praxéologiques peuvent être provoqués, observés et décrits, par un changement concernant le système de variables : l'introduction d'une nouvelle valeur d'une variable ou sa disparition fait émerger ou disparaître une (ou plusieurs) praxéologie(s) comme résultat de l'adaptation écologique.

Soulignons que le changement praxéologique peut être vu selon deux dimensions. La première est celle de l'évolution praxéologique motivée par le temps institutionnel. Les valeurs de variables changent, dans ce cas-là, avec l'histoire des praxéologies. La deuxième dimension est d'une autre nature et provient dans un premier moment d'une intervention extérieur de l'institution. C'est le cas, par exemple, quand la noosphère décrète d'intégrer *certaines choses* dans les institutions d'enseignement et que nous pouvons interpréter cette intégration comme une modification des systèmes de variables de types de tâches.

Cela étant dit, les variables et leurs valeurs nous permettront de modéliser les changements au niveau de types de tâches rencontrés dans les manuels au cours du temps et seront aussi un moyen de comprendre certaines critiques et demandes de I_{PNLD}. Nous avancerons plus sur cette discussion au moment des analyses.

Dans la suite nous proposons une reprise sous forme de réflexions à propos de la notion de technique, pour présenter comment cet élément est modélisé dans T4tel.

2.3.2 Les techniques comme un ensemble de types de tâches

> De quoi sont faits les ingrédients qui composent une technique [...] ? Comment, en quels termes, pouvons-nous décrire la mise en œuvre d'une technique ? Selon quels

> critères et à quels indices pourrons-nous constater cette mise en œuvre dans une situation particulière ? Comment distinguer une technique d'une autre ? Y aurait-il des invariants qui seraient, en quelque sorte, transinstitutionnels ? (Bosch et Chevallard, 1999, p. 85).

Les questions autour de la *matière première* des techniques et leur description apparaissent dans l'histoire du développement de la TAD. Sur ce problème, en 1998, Chevallard a suggéré la prise en compte de deux éléments :

> Comment décrire une technique , c'est-à-dire une manière d'accomplir les tâches d'un certain type T ? D'une façon très générale, on peut dire que la mise en œuvre, par une personne x, d'une technique revient à accomplir certains *gestes* dans le cadre de certains *dispositifs*. Si les dispositifs prévus manquent, ou si x ne sait pas accomplir les gestes requis, la technique ne peut pas fonctionner : les deux « composantes » - dispositifs et gestes - sont également nécessaires. (Chevallard, 1998a, p. 01)

Les dispositifs - tels que papier-crayon, calculatrice, logiciel, matériel concret... - imposent et offrent des conditions pour que certains *gestes* soient réalisables. Dans ce sens, les dispositifs et gestes apparaissent alors comme un moyen possible de description de la technique. Cela a été repris dans d'autres moments, comme en (Chevallard, 2009).

Ces mêmes questionnements sur la nature des techniques ont participé fortement des réflexions et des développements du cadre T4tel, où s'envisageait l'opérationnalisation des éléments praxéologiques. Sur ce point, Chaachoua (2018) écrit :

> Si ce problème n'est pas posé explicitement dans les différents travaux qui font usage de l'analyse praxéologique, ces travaux en proposent des descriptions. Certains les décrivent sous forme d'actions plus ou moins structurées, d'autres les décrivent par des sous-tâches. Par exemple, Cirade & Matheron (1998) décrivent la technique utilisée pour le type de tâches T (Résoudre une équation du premier degré), par des sous-tâches : développer une expression algébrique, effectuer les produits, transposer les termes, réduire chacun des membres, résoudre une équation de la forme $ax = b$. Puis, les auteurs ajoutent que ce découpage est arbitraire, et qu'il s'agit d'un modèle dont l'objectif est de mettre en évidence l'organisation mathématique et de l'évaluer. L'intérêt de ce découpage est qu'il renvoie à des taches reconnues institutionnellement et, pour chacune d'elles, il existe une praxéologie mathématique qui a été mise en place avant. D'ailleurs, les manuels adoptent ce mode de description des techniques. Nous voyons un intérêt dans ce découpage : il permet de mieux situer les difficultés des élèves dans la mise en œuvre d'une technique au niveau des sous-tâches qui composent la technique. Ce découpage a été aussi adopté par Castela (2008) où elle étudie comment une tâche peut intervenir dans la technique d'une autre tâche. Elle étudie la technique d'une tâche sous forme d'un enchainement d'organisations mathématiques ponctuelles (Castela, 2008, p.129). (p. 13)

Chaachoua (2018) propose alors que la description des techniques soit faite à partir des types de tâches ; une réponse conceptuelle et méthodologique au problème de la description des techniques.

$$\tau : \{ \mathrm{T_a}, \mathrm{T_b}, \mathrm{T_c}, \mathrm{T_d} ... \mathrm{T_n} \}$$

Nous pouvons dire qu'une fois fixé les dispositifs, les gestes de la mise en œuvre d'une technique consistent à l'accomplissement d'un ensemble de types de tâches.

Un premier avantage de cette modélisation est de pouvoir mettre en évidence le caractère « outil » et le caractère « objet » des types de tâches institutionnels.

Exemple : $\mathrm{T}_{\text{Dénom.}}$ « Dénombrer une collection d'objets » est un type de tâches présent à deux moments différents dans l'institution « école primaire » : d'abord comme un type de tâches prescrit par l'enseignant (objet) et plus tard comme ingrédient important de certaines techniques (outil) pour accomplir des tâches d'addition.

Cette dynamique entre les praxéologies, parfois difficile à exprimer, est mise en évidence par cette modélisation. Cette description permet de montrer, par conséquent, certaines conditions écologiques pour qu'une technique τ existe. Par exemple, si dans une institution un type de tâches intervenant dans une technique est toujours problématique, sa mise en œuvre peut potentiellement échouer. Cela explique, en partie, l'ordre d'apparition des praxéologies, c'est-à-dire, de mieux comprendre la chronologie institutionnelle de l'activité d'étude.

Un autre aspect intéressant souligné par Chaachoua (2018) est qu'il y a des types de tâches qui ne vont exister que pour répondre à la genèse d'une technique donnée. Par exemple, « Disposer verticalement deux nombres, de telle sorte que leurs ordres correspondants soient positionnés dans les mêmes colonnes » est un type de tâches nécessaire et généralement restreinte aux techniques des algorithmes posés de l'addition et soustraction. Pour prendre en compte cet aspect, l'auteur distingue deux sortes de types de tâches :

> - d'une part, les types de tâches qui n'existent qu'à travers la mise en œuvre des techniques de certains autres types de tâches, appelés *types de tâches intrinsèques* ;
> - d'autre part, les types de tâches qui peuvent être prescrits institutionnellement aux élèves, qualifiés de *types de tâches extrinsèques*. (Chaachoua, 2018, p. 13)

L'intérêt de cette distinction est aussi de permettre de comprendre certaines raisons d'être institutionnelles des types de tâches et de rendre visible certains types de tâches qui risquent d'être masqués dans l'analyse.

2.3.3 Les portées des techniques comme moyen de comprendre les dynamiques praxéologiques

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas : comme on l'a suggéré, les institutions sont parcourues par toute une *dynamique* praxéologique [...]. (Chevallard, 1998b, p. 96)

Le curriculum prescrit, parfois confondu et caché par une liste d'objets à enseigner, prévoit néanmoins l'existence des dynamiques entre les objets. Ces dynamiques commandent des parcours d'étude possibles et nous les appréhendons lors de l'analyse des évolutions praxéologiques.

Nous avons montré qu'une dynamique possible entre les praxéologies peut être attrapée par le changement de statut « objet - outil » des types de tâches. Comme l'ont proposé Kaspary, Chaachoua, et Bessot (2020), un autre genre de dynamique praxéologique se trouve dans les portées de techniques. Prenons ce que dit Chevallard (1998) sur cette notion :

> Tout d'abord, une technique τ - une « manière de faire » - ne réussit que sur une partie $\mathrm{P}(\tau)$ des tâches du type T auquel elle est relative, partie qu'on nomme la portée de la technique : elle tend à échouer sur $\mathrm{T} \backslash \mathrm{P}(\tau)$, de sorte qu'on peut dire que « l'on ne sait pas, en général, accomplir les tâches du type T. » (Chevallard, 1998b, p. 92)

Dans le cadre du T4tel, il est proposé la distinction de quatre portées - théorique, pragmatique, institutionnelle et personnelle. Nous nous concentrerons dans notre travail sur les trois premières.

Définitions. Portées théorique, pragmatique et institutionnelle

— La portée théorique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique permet d'accomplir une tâche quelconque de cet ensemble en dehors de toute considération des conditions de son exécution. C'est-à-dire qu'on examine cette technique d'un point de vue épistémologique sans prendre en compte le cognitif et donc la maîtrise de sa réalisation par un sujet. Elle sera notée $\mathrm{P}_{\mathrm{Th}}(\tau)$.

— La portée pragmatique d'une technique est l'ensemble des tâches où la technique est fiable dans le sens où elle permet d'accomplir ces tâches avec peu de risque d'échec et à un coût raisonnable. La technique tend à réussir sur cette portée et tend à échouer en dehors. Elle sera notée $\mathrm{P}(\tau)$.

— La portée institutionnelle d'une technique relative à un type de tâches T est l'ensemble des tâches où cette technique est attendue par une institution. Cette portée est une conséquence des conditions et des contraintes de la vie de τ dans une institution. Elle sera notée $\mathrm{P}_{\mathrm{I}}(\tau)$.

Nous avons - sans qu'on le montre ici - que $\mathrm{P}_{\mathrm{Th}}(\tau) \subset \mathrm{P}(\tau)$ et, en général, $\mathrm{P}(\tau) \subseteq \mathrm{P}_{\mathrm{I}}(\tau)$.

Les portées pragmatique et théorique participeront de notre analyse à partir d'un regard plutôt épistémologique sur les techniques, comme un moyen d'interroger la portée institutionnelle. L'étude des choix d'une institution concernant les portées nous permettra d'apporter d'autres aspects sur les parcours d'étude.

Ci-après, nous listons quelques dynamiques possibles au sein d'une institution relatives à la notion de portée d'une technique.

Une première dynamique est le cas simple de l'élargissement de la portée d'une technique au fil du temps (∂t_1, ∂t_2 et ∂t_3) :

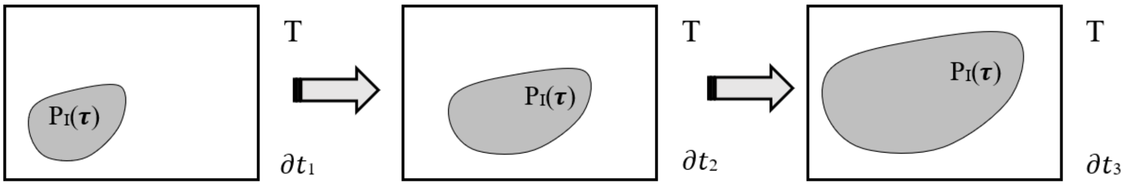


Figure 2.6 – Élargissement de la portée d'une technique au fil du temps

Nous pouvons identifier cette dynamique à partir de l'intégration, dans le temps, des valeurs de variables. À propos de cela, un exemple très remarquable dans les institutions d'enseignement concerne les valeurs des nombres mobilisés. Dans un premier moment, toute technique mathématique est, généralement, employée sur des nombres entiers positifs à un chiffre et, petit à petit, la portée de la technique est étendue aux nombres entiers à deux chiffres, aux nombres décimaux, ... Cette dynamique dérive des choix didactiques pour le bon fonctionnement de l'activité de l'étude.

Dans le cas où il existe deux techniques ou plus pour accomplir les tâches de T, d'autres dynamiques sont possibles si leurs portées ont une intersection, $P(\tau_i) \cap P(\tau_j) \neq \varnothing$, c'est-à-dire si sur un ensemble de tâches nous pouvons utiliser soit une technique, soit une autre.

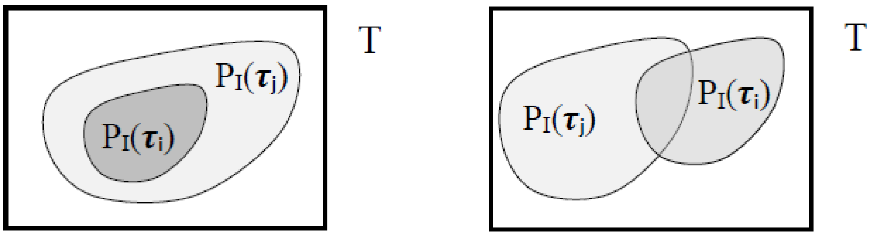


Figure 2.7 – Concurrence entre deux techniques

Nous disons que sur ce domaine commun les techniques τ_i et τ_j sont en concurrence (Kaspary, Chaachoua, et Bessot, 2020).

C'est sur ces domaines de concurrence que certaines dynamiques émergent. Ces dynamiques peuvent découler dans des différentes configurations praxéologiques.

Pour illustrer et mieux comprendre ce que nous voulons dire, nous proposons de prendre une institution fictive I_{im} où il existe deux techniques imaginaires, τ_a et τ_b, pour accomplir des tâches de T. Nous considérons aussi que τ_a apparaît dans I_{im} avant τ_b et qu'au moment où τ_b apparaît nous avons $P_I(\tau_a) \cap P_I(\tau_b) \neq \varnothing$.

Quelques scénarios possibles :

- $\mathrm{P_I}(\tau_b) \subset \mathrm{P_I}(\tau_a)$. La genèse de la nouvelle technique s'effectue à l'intérieur de la portée d'une technique existante.

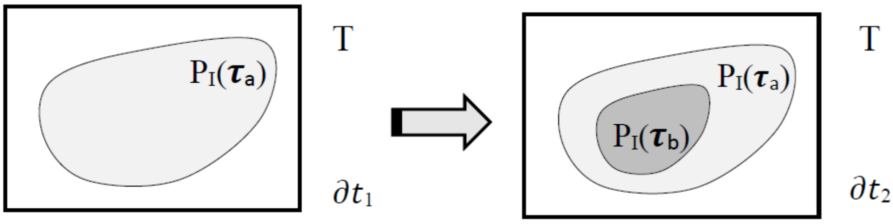


Figure 2.8 – Scénario I

Configurations possibles pour l'avenir des techniques et de leurs portées :

- ○ Le domaine de concurrence sera préservé et les techniques vont coexister ;
- ○ τ_b est considérée plus efficace que τ_a, alors $\mathrm{P_I}(\tau_a)$ sera réduite et $\mathrm{P_I}(\tau_b)$ aura une autonomie sur le domaine de concurrence ;
- ○ τ_b ne résiste pas à la puissance de τ_a et disparaîtra dans le temps.

- $\mathrm{P_I}(\tau_a) \subset \mathrm{P_I}(\tau_b)$. Une nouvelle technique de portée plus large apparaît.

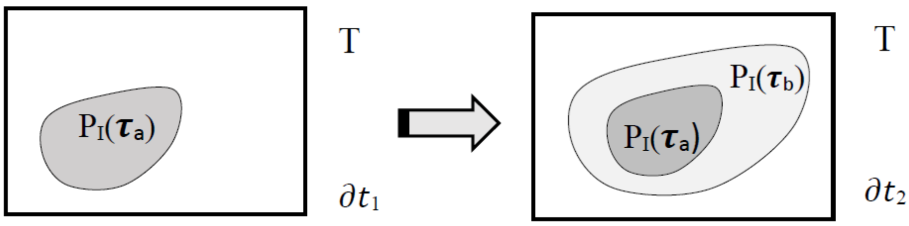


Figure 2.9 – Scénario II

Configurations possibles pour l'avenir des techniques et de leurs portées :

- ○ Le domaine de concurrence sera préservé et les techniques vont coexister ;
- ○ τ_b est considérée plus efficace que τ_a et alors τ_a disparaîtra ;
- ○ τ_a gardera sa portée et son autonomie sur $\mathrm{P_I}(\tau_a)$, ce qui réduira dans le temps $\mathrm{P_I}(\tau_b)$.

- $\mathrm{P_I}(\tau_a) \not\subset \mathrm{P_I}(\tau_b)$ et $\mathrm{P_I}(\tau_b) \not\subset \mathrm{P_I}(\tau_a)$.

  Configurations possibles pour l'avenir des techniques et de leurs portées :

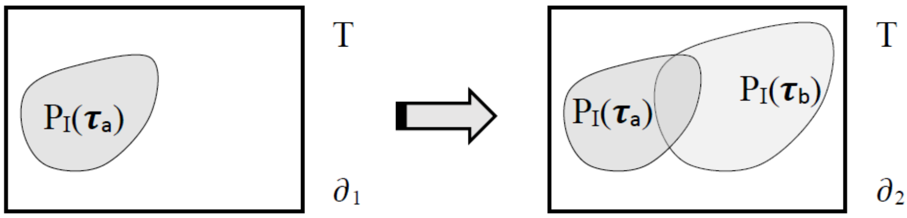


Figure 2.10 – Scénario III

- Le domaine de concurrence sera préservé et les techniques vont coexister ;
- $P_I(\tau_a)$ sera réduite ;
- $P_I(\tau_b)$ sera réduite.

En prenant le temps institutionnel comme un attribut dans l'étude des portées des techniques, chacune d'elles apparaît dans l'institution dans un certain ordre, qui est rarement arbitraire - ordre que la noosphère (et la didactique) peut questionner. Dans ce parcours, les intersections des portées peuvent être vues comme des praxéologies didactiques potentielles. Et c'est aussi dans ce sens que nous pouvons les étudier afin de comprendre comment les institutions prennent bénéfice (ou pas) de la concurrence des techniques.

Nous avons déjà parlé du favoritisme institutionnel vis-à-vis des techniques dans ce chapitre. Ce phénomène écologique et économique pèse sur la maintien du domaine de concurrence prévu dans les trois cas où les techniques continuent à coexister. Cela nous amène notamment à une réflexion que nous présentons brièvement ici.

Quelles sont les raisons pour lesquelles une technique est choisie institutionnellement comme étant *la bonne* technique au détriment d'autres ? Une réponse peut concerner, par exemple le coût de leurs mises en œuvre ; ou encore, l'intérêt particulier de l'environnement technologique que l'une d'elles apporte à l'étude - dans Kaspary, Chaachoua, et Bessot (2020) nous donnons un exemple de cette nature. Mais une autre réponse peut être liée au confort des *techniques de portée territorialement vaste*. L'effet d'un tel choix peut conduire, par exemple, à l'accomplissement de la tâche « Résoudre $(x+1).(x+2)=0$ » par la technique du discriminant. Face à cela, nous avançons que les organisations didactiques établies dans les domaines de concurrences par les institutions impactent fortement l'avenir des praxéologies.

Soulignons aussi que les portées des techniques ne sont rien d'autre que des sous-types de tâches. Elles peuvent alors être identifiées par l'instanciation des valeurs de variables d'un générateur de types de tâches. C'est ce que nous allons proposer et utiliser dans notre analyse.

Finalement, les notions des portées et les autres concepts que nous avons présentés dans ce chapitre nous servent de *filet* - au sens métaphorique de notre petite histoire du départ. Ces concepts sont pour nous donc une première grille pour interroger, comprendre et décrire l'activité mathématique proposée dans les manuels, et aussi une manière d'interpréter les demandes, conditions et contraintes dérivées de I_{PNLD}.

2.4 Choix Methodologiques

En sachant qu'aucune description ne peut être vraiment fidèle au chaos du processus analytique, nous chercherons à repérer dans les prochains paragraphes les principaux choix et délimitations de notre méthodologie.

2.4.1 Vision globale de la méthodologie

Rappelons que dans notre étude l'accès aux rapports des institutions à $T^{+/-}$ s'effectue à partir de leurs produits finaux : les manuels de I_M et les documents officiels d'évaluation de I_{PNLD}. Ces données, concernant chaque institution, sont de natures différentes et c'est là où se situe notre défi méthodologique : confronter deux institutions qui ne s'expriment pas de la même façon.

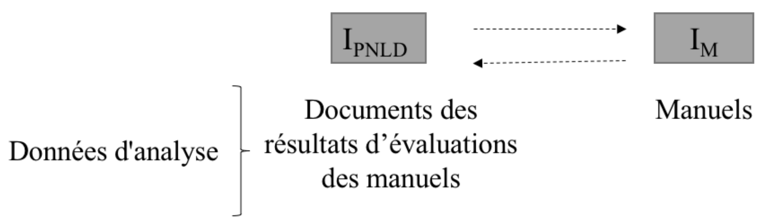


Figure 2.11 – Données d'analyse

Comme nous l'avons déjà précisé, nous centrerons notre analyse sur ce que ces deux institutions envisagent pour l'étude du champ additif. Pour interpréter et comparer leurs rapports, nous nous appuyons sur un modèle praxéologique de référence de cet objet mathématique.

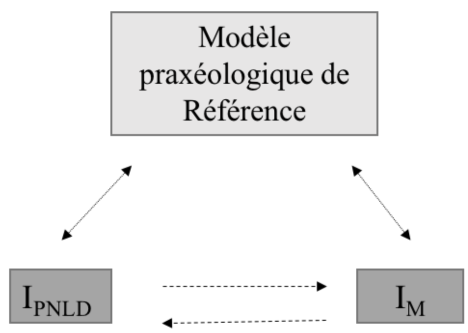


Figure 2.12 – Méthodologie en trois pôles

Un aspect important à être considéré dans notre étude est la notion du temps, qui intervient selon deux dimensions dans notre analyse. Nous l'avons déjà évoqué, mais une reprise est nécessaire.

D'abord, il y a la dimension du temps institutionnel durant lequel les praxéologies changent lors de l'activité d'étude. Dans notre cas, le temps institutionnel est celui de l'étude du champ additif à l'école primaire, où l'émergence des dynamiques praxéologiques, par exemple, permettent de raconter l'histoire du parcours de l'institution.

En parallèle une autre dimension temporelle prend place, celle relative à la période de notre analyse, établie entre 1994 - 2016. Apparaissent durant cette période des changements praxéologiques d'une origine différente de ceux provoqués par l'activité d'étude. Dans ce cas-là, des praxéologies changent comme réponse à des changements curriculaires eux-mêmes motivés par les enjeux de la noosphère.

Or, cette deuxième manière d'envisager le temps ne peut se comprendre sans par l'analyse de la première et vice-versa.

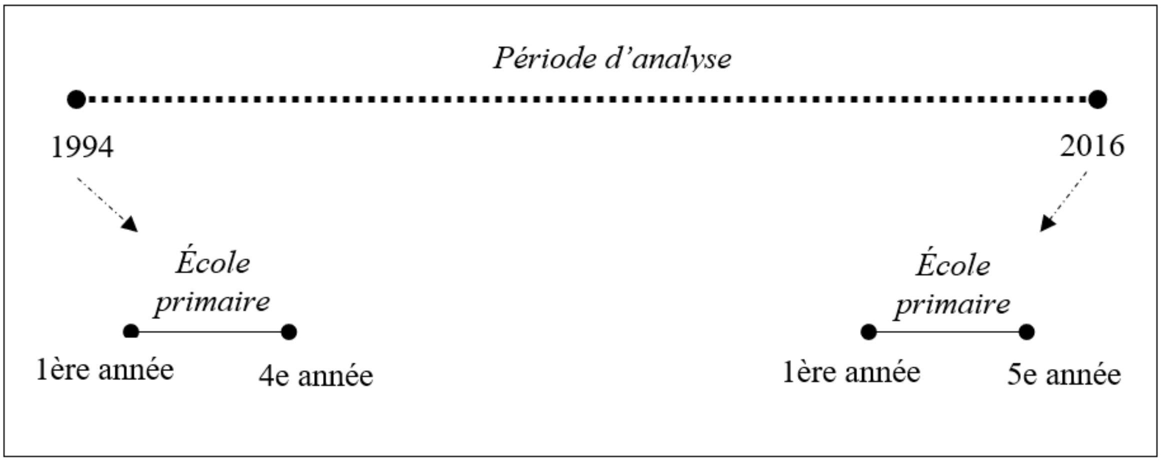


Figure 2.13 – Dimension temporelle

Tout au long de cette période, nous chercherons à comprendre l'assujettissement d'une institution à l'autre à partir des praxéologies possibles (et les non-souhaitables) $\varphi(\wp)_t$ émanant de I_{PNLD} et les praxéologies effectivement produites par I_M, $(\wp_i)_t$ - l'indice « t » désigne un moment de la période 1994 - 2016. L'étude du changement et de la résistance au changement de ces praxéologies est la principale ressource de notre analyse.

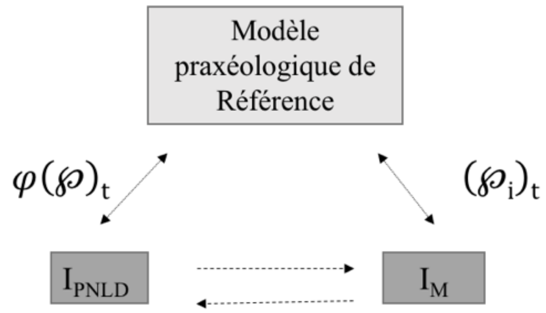


Figure 2.14 – Les praxéologies possibles et les praxéologies instanciées

Cela étant dit, une manière de mener cette recherche pourrait être, par exemple, d'identifier ces praxéologies $\varphi(\wp)_t$ et $(\wp_i)_t$, puis de les croiser. Ce choix, néanmoins, apporterait un coût important en ce qui concerne le traitement des données. Un autre facteur défavorable à ce choix est que réaliser toute une modélisation praxéologique des différents moments de la période 1994 - 2016 apparaît comme inutile pour discuter de l'assujettissement entre ces institutions. A ce propos, nous rappelons que nous ne visons pas la description de l'état curriculaire des objets à enseigner : nous cherchons à étudier les effets de l'assujettissement de deux institutions au sein d'une même noosphère. C'est pourquoi notre travail se concentre sur les praxéologies soumises à une déstabilisation.

Pour attraper ces praxéologies candidates à un changement possible, nous proposons tout d'abord un premier regard sur l'institution I_{PNLD}, cette institution ayant pour mission *de faire changer* l'état actuel des choses. Pour cela, munis de notre modèle de référence, nous procèderons à l'analyse des documents d'évaluation en cherchant des traces des jugements sur I_M. Ce premier travail commence par une analyse du premier document publié en 1994.

$$\begin{array}{l} I_{PNLD} \vdash R(I_M, O_{c.a}) = ¿ \\ \text{En 1994} \end{array} \begin{cases} ¿ : \text{descriptif sur l'état actuel} \\ ¿ : \text{prescriptif, ce qui devrait être} \\ ¿ : \text{proscriptif, ce qui ne doit pas être} \\ ¿ : \text{suggestif, ce qui pourrait être} \end{cases}$$

Nous produirons alors une interprétation de ces jugements liés à l'objet « $O_{c.a.}$: champ additif » à travers les éléments théoriques mobilisés dans notre modèle praxéologique de référence : le quadruplé praxéologique, les variables, les ostensifs et les portées des techniques. Puis, nous reformulerons ces jugements à propos des nouvelles conditions et contraintes relatives à la vie des praxéologies du champ additif.

L'analyse peut continuer par deux chemins possibles : avec les autres documents de I_{PNLD}, ou avec les manuels de I_M. Nous verrons que cela dépendra de ce que nous observons dans l'évaluation de 1994. Une dynamique entre l'analysé de l'*évaluation* et l'analyse de l'*évalué* sera toujours prévue.

Nous précisons ici que la méthodologie d'analyse des manuels sera à définir en fonction des observables construits par l'analyse des documents d'évaluation. Néanmoins, nous présentons ci-après quelques aspects généraux concernant cette étape de notre étude.

Un aspect commun de l'analyse des manuels consiste à prendre une décision sur le corpus soumis à l'étude : cette décision dépendre de que nous cherchons à mettre à l'épreuve. Nous signalons que ce choix sera aussi influencé par le fait que ces analyses auront toujours une dimension comparative entre les manuels des différentes époques. C'est la comparaison des manuels au fil du temps qui va permettre de repérer des changements praxéologiques qui témoignent de l'intention d'être en conformité avec $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, ou encore de repérer de non-changements praxéologiques qui manifestent la résistance et la liberté de I_{M}.

Pour le bloc du savoir-faire, nous anticipons aussi que les variables seront une entrée importante pour regarder les manuels. Le changement du système de variable, avec l'intégration ou la disparition de valeurs, nous aidera à montrer les effets d'assujettissement de I_{M} à $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Dans sa globalité, le principe méthodologique peut être décrit alors par le schéma ci-dessous.

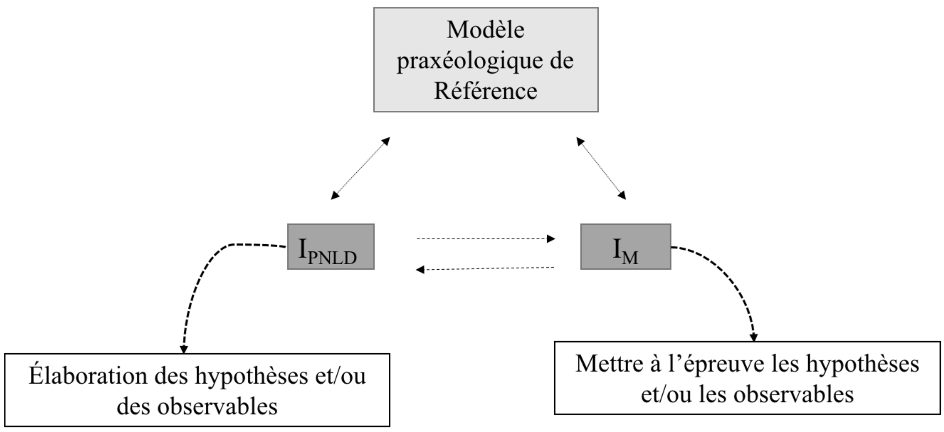


Figure 2.15 – La dialectique des trois pôles méthodologiques

L'analyse se fait alors par des allers-retours constants entre le modèle praxéologique de référence, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et I_{M}. C'est dans cet esprit que, par exemple, l'analyse des manuels peut potentiellement enrichir notre modèle praxéologique de référence et, également, donner des pistes sur comment interpréter les demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Dans les paragraphes suivants nous allons apporter quelques précisions d'ordre méthodologique sur chacun de ces trois pôles.

2.4.2 La construction d'une organisation praxéologique de référence

Quelles sont les variables qui caractérisent les types de tâches ? Comment établissons-nous leurs valeurs ? Quelles sont les techniques possibles pour les accomplir ? Quelles sont leurs portées ? Comment pouvons-nous interpréter les possibles domaines de concurrence entre ces techniques ? Quel environnement technologico-théorique donne des conditions pour que ces techniques existent ? ...

Afin de répondre à ces questions et àbien d'autres en s'*émancipant* - comme le dit Gascón (2014) - des institutions et de leurs modèles dominants, nous construisons un modèle praxéologique de référence - ou organisation mathématique de référence.

> L'OM de référence est celle que considère le chercheur pour son analyse. [...] L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniement. (Bosch et Gáscon, 2005, p. 117)

Ce modèle est *l'unité d'analyse* du chercheur, au sens de Bosch et Gáscon (2005) . Il est construit à l'aide des termes primitifs de la théorie. Dans le cadre de cette thèse, les notions de praxéologies, ostensifs, générateur de types de tâches, système de variables et portées des techniques sont les principaux outils pour sa description.

Le modèle praxéologique de référence nous aide, alors, à nous rapprocher dans un univers de praxéologies possibles, suffisamment non soumis aux vices institutionnels et plus imprégné par une problématique écologique.

> D'une manière générale, la problématique écologique - « Pourquoi ceci ? », « Pourquoi pas cela ? », etc. - conduit à questionner le réel observable pour se déprendre de l'évidence du fait établi, vécu comme naturel. L'illusion de « naturalité » de l'ordre institutionnel est, dans le registre de l'action, la racine de beaucoup de conservatismes et le fourrier de beaucoup d'impuissances : si les choses sont comme elles sont parce qu'elles se conforment à un ordre naturel, toute modification que l'on voudrait leur imprimer apparait comme une subversion de cet ordre du monde, ce qui justifie aussi bien le conformisme du quotidien qui est le lot de la plupart que la religion de l'exceptionnel dont quelques-uns se font les grands prêtres. (Chevallard, 1998b, p. 119)

Précisons pourtant que lorsque nous parlons de l'émancipation institutionnelle, il est important de dire que cela ne signifie pas la disparition complète de l'institution dans la construction du modèle. L'émancipation est comprise par le droit de quitter ce qui est déjà proposé institutionnellement pour donner lieu au *possible*. Dans ce sens, il est vrai que si l'on ignore que l'activité mathématique que nous interrogeons dans notre thèse est celle qui sera transposée sur le terrain d'une classe de l'école primaire, avec ses propres sujets, notre modèle ne serait pas effectivement utile. La *bonne distance* du chercheur avec l'institution cible est un problème et une réponse méthodologique aux analyses des phénomènes didactiques.

Dans cet esprit, nous partageons le point de vue de Tempier (2010, p. 78) : « Cette organisation mathématique de référence permet en quelque sorte de regarder les programmes et manuels à partir d'un promontoire d'observation donc de prendre un certain recul sur cette organisation mathématique à enseigner. ».

La construction de ce modèle dérive d'une vivante dynamique au cours de plusieurs moments de la recherche : faite *a priori* à partir de ce que la littérature peut nous raconter, mais nourrie également par les retours des analyses du contingent.

Dans notre cas, au niveau du type de tâches $T^{+/-}$, un travail important concerne le choix du système de variables, S.V., qui permettra de caractériser les principaux ingrédients des sous-types de tâches à partir du générateur $GT^{+/-}$.

> $GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs ; S.V.]

Les autres éléments praxéologiques et les notions déjà explicitées ici seront aussi mobilisés pour la construction de ce modèle. Sa présentation se fera dans le chapitre 3.

2.4.3 Les documents d'évaluation

Au cours de la période de 1994 à 2016, I_{PNLD} a réalisé neuf évaluations au niveau de l'école primaire. Chaque évaluation a donné lieu à un document contenant des résultats des œuvres approuvées[10]. Ce document est un ouvrage qui s'adresse plutôt à l'enseignant afin de lui fournir un résumé critique des manuels disponibles pour l'adhésion des écoles publiques du pays.

La structure de ce document a été modifiée au fil des ans. Toutefois reste invariante l'organisation suivante : une présentation globale des manuels approuvés, une synthèse de l'évaluation de chaque collection de manuels[11] où sont mis en évidence leurs aspects négatifs et positifs, ainsi qu'une description des contenus traités. Des discussions et analyses sur les méthodologies adoptées, la place de l'interdisciplinarité, le langage employé et le livre du maître sont aussi des aspects évoqués dans ce document. Depuis 2004, nous trouvons aussi une session appelée « en classe » qui vise à orienter l'enseignant vers un « bon » usage de la collection de manuels, en contournant leurs défauts et en valorisant leurs qualités. Nous avons également la présentation des critères et les principes d'évaluation utilisés.

10. Nous verrons plus tard qu'exceptionnellement en 1994 nous avons les résultats de tous les manuels évalués, y compris ceux qui ont été non-approuvés.

11. L'expression « collection de manuel » signifie un ensemble de manuels produits par les mêmes auteurs et destiné à un cycle scolaire où chaque manuel correspond à une année de l'école. Au Brésil, depuis un moment les écoles ont la culture d'adopter une unique collection pour un même cycle.

Soulignons la richesse de ces documents, spécialement par le caractère des jugements rendus : ils sont généralement explicites et claires. À ce propos, le texte a des marqueurs linguistiques forts qui aident à inférer les rapports noosphèriens de cette institution. Voici quelques exemples d'extraits de ces documents où nous soulignons les passages qui nous indiquent nettement le jugement de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$:

> Les activités de calcul mental et d'estimation sont très présentes, ce qui est positif dans le manuel. (Brasil, 2006, p. 65, traduction propre) [12]

> Plusieurs activités partent de données extraites de situations sociales. Cependant, la relation entre les mathématiques et les contextes n'est pas suffisamment exploitée. (Brasil, 2006, p. 71, traduction propre) [13]

> Dans le domaine des grandeurs et des mesures, on va au-delà des attentes en élaborant correctement les premières idées de vitesse. En revanche, dans le traitement de l'information, la collecte et l'organisation des données sont peu valorisées. (Brasil, 2006, p. 89, traduction propre) [14]

> Certains aspects négatifs font référence aux insuffisances des illustrations présentes dans l'étude de la symétrie, de la perception de l'espace et de la vision supérieure, en particulier dans le manuel de la 5e année. (Brasil, 2006, p. 282, traduction propre) [15]

A partir de ce type de déclarations nous pouvons déduire sous quelles conditions et contraintes les objets du « champ additif » sont/devraient/devront/pourraient être rencontrés dans I_{M}, selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. La construction des praxéologies à partir de ces conditions et contraintes est une affaire de I_{M}.

« Étant donné un certain ensemble de conditions $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$ (d'origine $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$) et un certain ensemble de contraintes $\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$(d'origine $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$) auxquelles l'institution I_{M} est soumise, quelles entités praxéologiques est-il possible que l'institution I_{M} conçoive ? Ou encore, quelles entités praxéologiques est-il vraisemblable que I_{M} ne produise pas ? »

$$\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp , \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$

$$\text{non-}\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp , \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$ [16]

Nous constatons que $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ a comme intention d'agir sur les modèles dominants des manuels. C'est-à-dire, d'interférer sur la stabilité praxéologique, cela est fait en changeant les conditions et

12. « São muito presentes as atividades de cálculo mental e de estimativa, o que é positivo na obra. » (Brasil, 2006, p. 65)
13. « Várias atividades partem de dados extraídos de situações sociais. No entanto, a relação entre a Matemática e os contextos envolvidos não é adequadamente aproveitada. » (Brasil, 2006, p. 71)
14. « No campo de grandezas e medidas, vai-se além do esperado ao se trabalhar, de forma apropriada, as primeiras idéias de velocidade. Por outro lado, no tratamento da informação, a coleta e a organização de dados são pouco valorizadas. » (Brasil, 2006, p. 89)
15. « Alguns aspectos negativos referem-se às inadequações em ilustrações presentes no estudo de simetria, em percepção de espaço e em vista superior, especialmente no livro do 5º ano. » (Brasil, 2006, p. 282)
16. Modélisation proposée dans le chapitre 1.

contraintes en jeu.

Comme nous l'avons dit, ces documents nous permettent aussi d'inférer l'impact des évaluations sur les manuels. Nous présentons ici un exemple pour illustrer le changement des discours de $\mathrm{I_{PNLD}}$ au fil du temps en raison des changements trouvés dans les manuels. Nous pouvons remarquer que les critiques sont généralement des jugements descriptifs basés sur ce que $\mathrm{I_{PNLD}}$ considère comme idéal pour l'enseignement des mathématiques.

Tableau 2.1 – Exemple de jugements

$\mathrm{I_{PNLD}} \vdash \mathrm{R}(\mathrm{I_M}, \mathrm{o_g})$ =¿ ; où $\mathrm{o_g}$ désigne le domaine de la géométrie		
1994	2004	2016
La géométrie a longtemps été négligée dans l'enseignement ; les textes la présentent souvent dans des chapitres ultérieurs, complètement séparés du reste du contenu. [. . .] La géométrie devrait être enseignée tout au long du texte, intégrée à l'arithmétique. En outre, dans la partie de la géométrie rarement sont utilisés toutes les possibilités des sujets, en se limitant à une présentation, sans aucune motivation, de définitions de formes géométriques, de formules de calcul de surfaces, de volumes et de certaines relations métriques, réduisant la géométrie à l'utilisation d'une nomenclature formelle et d'une utilisation mécanique de certaines formules. Le potentiel esthétique et ludique existant dans les transformations du plan, du carrelage, des symétries, etc., n'est jamais utilisé. (Brasil, 1994, p. 58, traduction propre) [17]	En géométrie, l'accent est mis sur l'identification et la nomenclature des figures planes et spatiales, au détriment des manipulations expérimentales et des activités de construction. Les meilleures œuvres ont cependant déjà des activités de localisation spatiale et de représentation plane des figures spatiales ; - l'articulation et l'intégration entre les grands blocs de mathématiques scolaires - nombres et opérations, géométrie, grandeurs et mesures et traitement de l'information - sont encore parfois peu présentes ; (Brasil, 2002, p. 33, traduction propre) [18]	À juste titre, la tradition consistant à traiter dans les dernières pages le contenu de la géométrie, des grandeurs et des mesures est en train de changer. On peut noter la préoccupation de la répartition des différents domaines dans chaque manuel [. . .] (Brasil, 2015, p. 28, traduction propre) [19]

17. « A Geometria tem sido muito descurada no ensino ; os textos, muitas vezes, apresentam-na nos últimos capítulos, completamente separada do restante do conteúdo. [. . .]A Geometria deveria ser ensinada ao longo de todo o texto, integrada com a Aritmética. Além disso, raramente os textos usam, na parte de Geometria, todas as possibilidades do assunto : limitam-se a apresentar, sem nenhuma motivação, definições de formas geométricas, fórmulas para o cálculo de áreas e volumes e algumas relações métricas, reduzindo a Geometria ao emprego de uma nomenclatura formal e da utilização mecânica de algumas fórmulas. O potencial estético e lúdico existente nas transformações do plano, nos ladrilhamentos, nas simetrias, etc. nunca é utilizado. » (Brasil, 1994, p. 58)

18. « - em geometria, nota-se ênfase na identificação e nomenclatura das figuras planas e espaciais, em detrimento de atividades experimentais de manipulação e construção. As melhores obras, no entanto, já apresentam atividades de localização espacial e de representação plana de figuras espaciais ;- a articulação e integração entre os grandes blocos da Matemática escolar - números e operações, geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação - é ainda por vezes pouco presente ; » (Brasil, 2002, p. 33)

19. « Acertadamente, está sendo mudada a tradição de tratar nas últimas páginas os conteúdos de geometria ou de grandezas e medidas. Já se nota preocupação em distribuir os vários campos ao longo

Considérons le passage « La géométrie devrait être enseignée tout au long du texte, intégrée à l'arithmétique. » de 1994 : il indique un jugement prescriptif. Il devient alors pour nous un observable à regarder au fil du temps. Nous voyons, dans ce sens, que le discours de I_{PNLD} change progressivement à mesure que le degré de conformité augmente entre cette institution et I_M. Cela nous permet de supposer que l'assujettissement a provoqué des effets.

Cependant, d'autres passages peuvent mettre en évidence des résistances de la part de I_M. Par exemple, en regardant les évaluations de chaque collection de manuels de 2016 nous constatons que les critiques sur la valorisation des nomenclatures restent toujours présentes.

Dans la suite, nous entrons plus en détails dans les neuf documents qui composent le corpus de notre analyse concernant l'institution I_{PNLD}.

2.4.3.1 Le corpus de I_{PNLD}

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 1, l'évaluation de I_{PNLD} a eu lieu pour la première fois en 1994. Le résultat de l'évaluation des œuvres les plus utilisées à l'époque au Brésil a été publié dans un document officiel intitulé « Définition des critères d'évaluation des manuels ». Les résultats des manuels non approuvés y sont présentés, aussi bien que la description des principaux problèmes trouvés. Il s'agit d'un document précieux pour nous, car il marque la fin d'une *certaine liberté* des entreprises privées sur la production des manuels destinés aux écoles publiques de ce pays.

Cette forme de contrôle de l'État a montré sa légitimité face aux graves problèmes identifiés dans les manuels. Pour cela, un processus périodique a été mis en place : depuis lors, les maisons d'édition doivent soumettre leurs manuels à l'évaluation et depuis 1998 seulement ceux qui sont approuvés peuvent être achetés et distribués par le gouvernement dans les écoles publiques du Brésil. Les résultats des manuels approuvés sont toujours présentés dans des documents officiels. Ce processus est fait toujours par cycles, en fonction du niveau scolaire.

Tableau 2.2 – Système scolaire brésilien

Système scolaire brésilien												
Cycles	École primaire					Collège				Lycée		
Age	6 - 7	7 - 8	8 - 9	9 - 10	10 - 11	10 - 11	11 - 12	12 - 13	13 - 14	14 - 15	16 - 17	17 - 18
Année scolaire	1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	1e	2e	3e

Ces documents sont le porte-parole de I_{PNLD} et ils composent notre corpus concernant cette

de cada livro [. . .]. » (Brasil, 2015, p. 28) institution. Comme nous nous intéressons au niveau de l'école primaire, nous ne regarderons que les évaluations destinées aux manuels de ce niveau scolaire. Ci-après un tableau présentant ces documents avec quelques commentaires montrant l'évolution des évaluations :

Tableau 2.3 – Description des documents d'évaluation des manuels

Corpus de la thèse par rapport à I_{PNLD}		
L'année de référence de l'évaluation	L'année de publication du document d'évaluation	Commentaires
PNLD 1994	1994	La première évaluation mise en place par l'État. Seize collections de manuels ont été évaluées. Parmi elles, seulement deux ont été classifiées comme « recommandées » et une a reçu l'évaluation « recommandée avec restrictions », toutes les autres ont été considérées comme « non-recommandées ». Un résultat alarmant.
PNLD 1996	1996	Document intitulé : « Manuels recommandés ». L'État ne présente plus le résultat des manuels non-recommandés. Deux critères sont utilisés pour l'exclusion des collections de la liste de manuels recommandés : les erreurs conceptuelles graves et toute forme d'expression de préjugés d'origine, de race, de couleur, d'âge, de sexe et aussi d'autres formes de discrimination sociale qui sont en désaccord avec la constitution brésilienne. Les manuels ont été évalués par année scolaire. Il n'y a pas encore une restriction sur l'évaluation et les manuels pouvant être achetés par les écoles.
PNLD 1998	1998	Le nom du document change en « Guide des manuels ». Trois catégories sont proposées pour classifier les manuels approuvés : recommandé avec distinction (trois étoiles), recommandé (deux étoiles), recommandé avec des mises en garde (une étoile). Les manuels non-recommandés par l'État ne peuvent plus être achetés par les écoles publiques.
PNLD 2000/2001	2000	Sur ce document il est présenté les statistiques des deux dernières éditions d'évaluations, où nous voyons une réduction significative des manuels non-recommandés : de 60,30 % pour 44,91 %. Ce qui montre que : « Il est possible de noter un mouvement d'auteurs et de rédacteurs que sont intéressés à la correction, à la mise à jour, à la refonte des productions problématiques et à la création de nouveaux manuels plus appropriés au travail de l'enseignant. » (Brasil, 2000, p. 13, traduction propre) [20] Trois critères d'exclusion sont utilisés : concepts et informations erronées, inadéquation méthodologique d'enseignement et préjudice à la construction de la citoyenneté - ce dernier fait référence aux préjugés et discriminations, mais aussi à l'endoctrinement religieux qui enlève le caractère laïc de l'éducation publique. C'est la première fois qu'on présente la fiche d'évaluation détaillée utilisée par les évaluateurs des manuels de mathématiques. Quatre pages et environ 86 critères composent cette fiche.

20. « É possível perceber que houve movimentação de autores e editores que se preocuparam em corrigir, atualizar, refazer as produções problemáticas e criar novos livros mais adequados ao trabalho do professor. » (Brasil, 2000, p. 13)

PNLD 2004	2002	Les manuels qui ont été exclus dans l'édition précédente pourront être inscrit à nouveau dans l'évaluation une fois que les maisons d'édition montrent la correction de leurs problèmes. Les étoiles ne sont plus utilisées pour classifier les manuels approuvés. Selon ce document, l'utilisation de ce langage iconographique s'est avérée être un indicateur pour le choix plus déterminant que la lecture et l'analyse de l'évaluation, ce qui a été évidemment perçu comme négatif. La quantité des collections approuvées est remarquable : 31 collections destinées à la discipline de mathématiques.
PNLD 2007	2006	Les trois critères d'exclusions sont maintenus depuis l'évaluation de 2000. La diminution du pourcentage de collections non approuvées reste remarquable, ce qui met en évidence la force de l'assujettissement des évaluations sur les manuels. À savoir, en 1997, 46 % des œuvres évaluées ont été exclus et en 2007 ce nombre est tombé à 17 %.
PNLD 2010	2009	Après une réforme de l'éducation brésilienne, la durée de l'école primaire passe à 5 années, divisée en deux cycles : 1ère et 2ème années destinées à l'alphabétisation et 3ème, 4ème et 5ème années destinées aux mathématiques des premières années. Les manuels ont dû s'adapter à ce changement. « En 2010, une loi a donné aux éditeurs le droit de contester les résultats des évaluations et leur a permis de corriger les petites erreurs commises dans les manuels évalués afin d'éviter leur exclusion. » (Carvalho, 2018, p. 776, traduction propre) [21]
PNLD 2013	2012	Les deux cycles de l'école primaire changent : l'alphabétisation mathématique est considérée dans les trois premières années. La fiche d'évaluation continue à être modifiée ponctuellement.
PNLD 2016	2015	Le document présente une vaste liste d'aspects qui ont été améliorés dans les manuels, mais il montre aussi ceux qui représentent toujours un problème.

Nous avons décidé de limiter notre étude jusqu'à l'évaluation de 2016. Nous justifions cela en raison de fortes intentions des changements curriculaires qui ont lieu, de façon plus accentuée, après 2015. En 2017, le ministère de l'éducation a homologué la « base nationale curriculaire commune » au Brésil, objet des discussions controversées au sein de la noosphère. La prise en compte de ce nouveau document officiel par I_{PNLD} et par I_{M} nécessiterait toute une autre recherche.

Nous soulignons que les documents officiels de l'état brésilien sont référencés comme : (Brasil, année, p. xx). Les documents d'évaluation de I_{PNLD} suivront aussi ce format de référence dans notre travail, en respectent l'année de publication de chaque document. Le lecteur remarquera alors que l'année de référence d'évaluation de I_{PNLD} n'est pas toujours compatible à l'année de publication du document de cette évaluation. Le fait est que l'année de référence d'évaluation symbolise le début d'un cycle dans lequel les manuels approuvés seront disponibles dans le marché national. Exemple : les manuels approuvés dans l'évaluation de 2007, publiés dans le document de 2006, serviront pour les années scolaires de 2007, 2008 et 2009 ; en 2010 un nouveau cycle commence, avec la publication du

21. « In 2010, a law10 gave publishers the right to question the assessments results and allowed them to correct small mistakes in assessed books, to avoid their exclusion. » (Carvalho, 2018, p. 776)

document dans l'année précédente, en 2009.

2.4.4 Analyse des manuels

Munis alors des hypothèses et observables suite à l'analyse des documents de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, nous chercherons de les mettre à l'épreuve dans les manuels. Ces derniers fournissent des activités mathématiques qui révèlent les choix de I_{M} par rapport au possible déterminé par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Les manuels, dans le cadre de notre analyse, ne sont pas considérés dans le but de présenter l'état du curriculum à un instant « t ». Ils sont nos outils pour étudier l'impact de l'assujettissement de I_{M} aux demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Pour cela, notre objectif n'est pas de décrire les praxéologies proposées par I_{M} dans leur intégralité, mais d'identifier les traces des changements praxéologiques ou des résistances aux changements face aux demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Il est important de dire que les manuels analysés sont vus comme produits des instances de I_{M}, ce qui explique que certains manuels sont *bons* et d'autres des *mauvais* manuels vis-à-vis $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Dans la suite, nous présentons le corpus de manuels de notre analyse.

2.4.4.1 Le corpus de manuels

Sauf dans le cas de la première évaluation de 1994, les documents d'évaluation de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ ne donnent que la liste de manuels approuvés par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Les *mauvais manuels* sont restés dans l'anonymat après cette première évaluation.

Pour la constitution de notre corpus, nous avons eu une difficulté considérable, non attendue au début de la recherche, de trouver les manuels les plus anciens. Un temps significatif a été dédié à la recherche de ces manuels. Les libraires spécialisés en livres d'occasion, physique et virtuel, ont été les cibles de notre recherche, mais nous n'avons pas eu beaucoup de succès. Certaines librairies scolaires, publics et de l'université ont fait également partie de notre chasse au trésor, ainsi que la prise de contact avec certains sujets de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Ce travail nous a permis de recueillir un corpus de manuels modeste pour notre étude, qui a été enrichi à l'aide d'un projet de recherche sur la mémoire de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, organisée par une université brésilienne (UFRN) [22].

Comme déjà dit auparavant, dans l'évaluation de 1994 seulement trois collections ont été recommandées par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ (l'une d'elles avec restrictions). Deux de ces collections ont continué à apparaitre dans des évaluations postérieures, mais une seule continue à exister jusqu'à aujourd'hui, après plus de 20 années d'évaluation. Cette collection, nommée « A conquista da Matemática » [23], est devenue une collection d'intérêt pour notre étude. Elle apparait dans les listes de manuels approuvés par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ de

22. Nous remercions les auteurs de cette initiative tellement importante pour la mémoire de l'histoire de l'éducation brésilienne qui peut, d'une façon importante, être racontée par les manuels.
23. Traduction propre : La conquête des mathématiques.

façon discontinue. Dans le tableau suivant, nous présentons les années durant lesquelles cette collection a été approuvée. Heureusement, nous disposons de toutes les éditions de cette collection pour l'analyse.

Tableau 2.4 – La collection de manuels « A conquista da Matemática »

« A Conquista da Matemática »								
1994	1996-1997	1998	2000-2001	2004	2007	2010	2013	2016
1e, 3e et 4e années recommandées avec restriction ; 2e année non-recommandée	1e, 2e, 3e et 4e	1e, 2e, 3e et 4e	-	-	1e, 2e, 3e, 4e et 5e	-	1e, 2e, 3e, 4e et 5e	1e, 2e, 3e, 4e et 5e

Notre corpus comprend d'autres collections de manuels, listées à la fin de la thèse. Les précisions sur le « pourquoi » nous utilisons tel ou tel manuel seront données lors de la présentation des analyses.

Conclusion

Revenons à l'hypothèse de travail de la thèse :

> *La propension aux changements curriculaires peut être éclairée par l'analyse des assujettissements des institutions composant la noosphère.*

Tout au long de ce chapitre notre intention était de présenter la matière première de notre *filet*, c'est-à-dire, nos *invariants méthodologiques*. C'est à partir d'eux que notre hypothèse de thèse sera traitée.

Comme c'est le but de chaque *filet*, il permettra de déterminer nos observables, en laissant échapper ce que nous n'analyserons pas - soit parce que nous n'avons pas d'intérêt à le considérer, soit parce que notre filet n'est pas capable de l'attraper.

Les premiers éléments de ce filet sont relatifs aux choix qui caractérisent les données empiriques : la société brésilienne, l'école primaire, les mathématiques, le champ additif, le type de tâches $\mathrm{T}^{+/-}$ et les institutions $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et I_{M}.

Ce filet est aussi formé par toutes les notions théoriques que nous l'avons présenté de la TAD. C'est à partir de ces notions que nous apercevons le curriculum, puis les changements curriculaires. Cela veut dire que le curriculum, défini dans le chapitre 1, se laisse décrire par des praxéologies, en y incluant aussi les ostensifs, les variables et les portées des techniques.

Ce sont alors les concepts théoriques que nous avons présentés dans ce chapitre qui nous permettront de *travailler*, de décrire les jugements et d'analyser l'assujettissement entre les deux institutions cibles de notre recherche. Cela sera fait en ayant dans nos mains un modèle de référence du champ additif que nous présentons dans le prochain chapitre.

Avec ce premier filet, le travail d'analyse sera conduit, comme nous l'avons déjà énoncé, à partir de l'élaboration des hypothèses et des observables. Puis, l'analyse des manuels nous amènera à prendre d'autres décisions méthodologiques, dont explicitation sera faite lors des analyses, dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Notre Modèle Praxéologique de Référence

« Toute discipline expérimentale considère, de manière plus ou moins explicite, une unité d'analyse qui est, à la fois, la construction théorique de base et le domaine élémentaire pour l'analyse des données empiriques. En tant que construction théorique fondamentale, l'unité d'analyse (sa structure et sa dynamique) doit pouvoir se décrire clairement en utilisant les termes primitifs de la théorie. En tant que domaine élémentaire de la contingence, elle doit fournir un ensemble d'indicateur empirique. L'unité d'analyse choisie viendra occuper, donc, une place centrale et privilégiée dans le rapport entre la théorie et les données empiriques et constitue ainsi l'un des traits essentiels pour caractériser la discipline en question. »

(Bosch et Gáscon, 2005, p. 115)

...

Objectifs du chapitre : Élaboration d'un système de variables. Identification des techniques. Étayer une première réflexion sur les portées des techniques du champ additif. Présenter les principaux éléments du bloc du savoir.

...

Introduction

Au Brésil, il existe un algorithme de la soustraction et j'aurais pu jurer qu'il était un objet d'étude dans toutes les écoles du monde. Sa naturalisation, pour moi, ne me permettait pas de penser différemment.

Hier, j'ai appris que les français ont un autre algorithme, si commun pour eux comme le mien est pour moi. Et, en tant qu'enseignante de mathématiques, je ne le connaissais pas. Pour renforcer mon enthousiasme à cette découverte, aujourd'hui une collègue vietnamienne m'a dit, avec surprise, qu'elle n'avait jamais vu dans sa vie l'algorithme que j'utilise, qui est devenu pour elle, pendant notre incroyable discussion, comme « la méthode des brésiliens ».

Écrit en France, à Grenoble, 15 mars 2018

...

La tentative de reconnaître ce qui peut exister, sous un ensemble de conditions acceptables, nous permet de questionner ce qui se fait dans une institution et ce qui ne s'y fait pas, mais qui pourrait être fait. Il s'agit de confronter le réel stable au contingent, et dans ce sens « la problématique écologique apparaît ainsi comme le fondement d'un *art du possible* » (Chevallard, 1998b, p. 28).

L'émancipation des modèles dominants est au cœur de cette discussion et l'élaboration d'un modèle de référence est un outil méthodologique pour cela.

> Étant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un modèle épistémologique de référence sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations ou praxéologies mathématiques. (Bolea et al., 2005, p. 154)

Ce modèle, dans le cadre de notre thèse, est construit à partir des différentes notions présentées dans le chapitre précédent. Son état final est, comme nous l'avons déjà dit, marqué par plusieurs allers-retours avec les analyses. C'est-à-dire que son élaboration *commence* au début de l'étape méthodologique et *continue* durant toutes les autres étapes de la recherche. Dans ce sens, nous ne devrions pas alors nous laisser berner par la linéarité suggérée par l'ordre des chapitres. Le modèle praxéologique vient avant la présentation des analyses, mais cela doit être considéré comme lié à une contrainte textuelle et non comme un choix qui révèle vraiment l'essence du travail méthodologique.

Pour la construction de ce modèle, la littérature est l'une des sources principales à considérer. Dans notre cas, nous avons la chance de compter sur un univers suffisamment riche de recherches sur le champ additif. A savoir la remarquable diffusion des études réalisées dans le cadre de la Théorie des Champs Conceptuels.

L'importance des études de Gérard Vergnaud (1990) et de ses successeurs est aussi flagrante au niveau des discussions curriculaires. Selon Magina et al. (2001), il est possible de trouver des indices convaincants de cette influence dans l'élaboration des « Paramètres curriculaires nationaux - PCN (1997) », l'un des documents officiels le plus popularisés dans le système éducatif brésilien.

Outre les œuvres de Vergnaud, trois recherches ont été sélectionnées pour nous aider à la construction de notre modèle praxéologique de référence :

— Kaspary (2014) présente une analyse praxéologique du champ additif relative à la collection de manuels la plus utilisée au Brésil à l'école primaire dans la période 2013 - 2015. Une modélisation des types de tâches *a priori* à partir des situations classifiées par Vergnaud (1990) soutient cette analyse. Les ostensifs sont pris en compte dans la description des techniques. De plus différentes recherches sur le sujet concernant le contexte brésilien sont référencées.

— Maréchal (2010) présente un modèle praxéologique de référence de l'opération d'addition qui va nourrir le nôtre. L'auteure propose une typologie des tâches en s'appuyant sur Vergnaud (1981) et enrichie par la notion d'objet ostensif (Bosch et Chevallard, 1999). Certaines techniques sont également présentées.

— Rinaldi (2016) propose une ingénierie didactique pour le calcul de la soustraction. Dans son travail se trouve aussi une présentation d'une organisation mathématique de référence. La présentation faite du savoir savant et du savoir à enseigner est particulièrement intéressante pour la modélisation du bloc du savoir dans notre modèle.

Une rectification est pourtant nécessaire. Le terme « champ additif » est un terme propre au vocabulaire scientifique de la didactique, que nous nous sommes autorisé à utiliser dans notre travail. Cependant, ce que nous allons ici étudier est effectivement une partie de cet objet : nous nous concentrerons seulement sur les praxéologies liées aux opérations d'addition et de soustraction *des nombres entiers positifs*, restreints *aux relations ternaires*[1]. Ces praxéologies sont engendrées par des instanciations du système de variable de $GT^{+/-}$:

$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, S.V.]

Dans cette perspective, la présentation de notre modèle sera faite, dans un premier moment, à partir de l'identification des variables et des valeurs que nous considérons comme cardinales dans la description des types de tâches de $GT^{+/-}$. Dans un deuxième moment, ce sont les techniques qui feront

1. « . . . qui relient trois éléments entre eux » (Vergnaud, 1981, p. 14)

l'objet de nos discussions : nous proposerons quelques réflexions sur leurs portées et leurs possibles domaines de concurrence. Enfin, nous passerons aux principaux éléments mathématiques du bloc du savoir qui donnent du sens aux techniques identifiées. Soulignons dès à présent que la notion d'ostensif traversera tous ces moments.

3.1 Le Systeme De Variables

Reprenons le type de tâches $T^{+/-}$:

$T^{+/-}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs

Remarquons, tout d'abord, le caractère générique de $T^{+/-}$. De nombreux sous-types de tâches, donc plus spécifiques que $T^{+/-}$, peuvent être considérés. Pour prendre en compte ce niveau de granularité plus bas, nous cherchons à repérer les caractéristiques principales des tâches de $T^{+/-}$. Ces caractéristiques sont prises en compte dans notre thèse par un système de variables de $GT^{+/-}$:

Tableau 3.1 – Les cinq variables de $GT^{+/-}$

$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, *V1, V2, V3, V4, V5*				
V1 : Ostensifs	V2 : L'idée de la situation	V3 : L"information cachée (?)	V4 : Les deux nombres connus de la tâche	V5 : L'existence de retenue

Dans la suite, nous présentons les raisons du choix de ces cinq variables ainsi que leurs valeurs.

3.1.1 Variable 1 : ostensifs

Comment les tâches sont-elles rencontrées dans une institution donnée ? Quelles sont leurs matières premières ? Comment s'y matérialisent-elles ?

Notre réponse se trouve dans les ostensifs et les considérer, comme le montre Maréchal (2010), est nécessaire étant donnés les effets qu'ils provoquent dans l'activité mathématique :

> Par exemple, poser un problème du type « Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ? » ne représente pas le même niveau de modélisation que de résoudre 3 + 4 = ... sur une feuille de calculs. Le premier nécessite une organisation des éléments en jeu qui n'est pas requise dans le second, mais offre aussi une possibilité matérielle de mise en œuvre de techniques de dénombrement pour résoudre la tâche. Les techniques favorisées, accessibles ou pertinentes ne sont donc pas les mêmes dans les deux cas de figure. C'est pourquoi, il est nécessaire de prendre en compte la nature des ostensifs impliqués dans les activités proposées, afin de mettre en évidence les techniques qui y sont favorisées, accessibles ou pertinentes. (Maréchal, 2010, pp. 89-90)

Pour la prise en compte de ces ostensifs, nous décidons de les considérer comme une variable de GT$^{+/-}$. Cela nous a conduit à l'étude de ses valeurs.

Tout d'abord, nous avons fait un choix : nous nous limitons aux ostensifs qu'il est possible de retrouver dans les énoncés des tâches présentes dans les manuels. La problématique de notre recherche et le matériel empirique cible de notre analyse explique cette restriction.

Après avoir fait ce choix, l'identification des valeurs nous a conduit à une réflexion que nous souhaitons la partager ici. Pour cela, nous reprenons les exemples de tâches proposés par Maréchal (2010) (t_1 et t_2) et un autre suggéré par nous (t_3) :

t_1) Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ?

t_2) Calcule 3 + 4.

t_3) Combien de billes y a-t-il dans les deux paquets ?

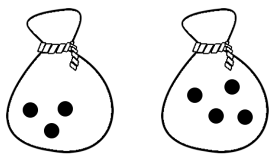


Figure 3.1 – Tâche « t3 »

Comment pouvons-nous caractériser les ostensifs qui sont présents dans ces tâches ?

Jolivet (2018), face à une question de même nature, a proposé d'associer les tâches à une liste d'objets d'ostensifs. Maréchal (2010), afin de construire une typologie de tâches, propose de prendre en compte le registre d'ostensifs dominant (Bosch et Chevallard, 1999), comme elle explique dans la citation ci-dessous :

> Dans les activités proposées aux élèves, le support choisi par l'enseignant met en avant un registre d'ostensifs dominant qui influence nécessairement le choix des techniques mises en œuvre par les élèves. Par exemple, proposer une activité où des jetons sont mis à la disposition des élèves leur permet de recourir à la technique de dénombrement, ce qui n'est pas le cas dans d'autres situations où les élèves doivent directement recourir au calcul. (p. 89)

Inspiré de Maréchal (2010), nous avons décidé de caractériser les types de tâches à partir du *registre d'ostensifs dominant* utilisé pour donner vie aux tâches d'un type donné, ce qui déterminera les valeurs de la première variable de notre GT$^{+/-}$.

Nous soulignons que l'adjectif « dominant » est essentiel dans cette modélisation. A ce propos, nous voyons par exemple que les trois tâches (t_1, t_2 et t_3) sont énoncées à l'aide de la langue naturelle écrite, comme la plupart des tâches proposées dans les manuels. Nous remarquons aussi que son rôle n'est pas le même dans chacune de ces tâches. Pour cette raison, nous disons que la caractéristique *dominante* fait référence à deux facteurs : la présence remarquable d'un certain registre d'ostensifs et son impact dans le choix de la technique. Dans ce sens, bien que nous ayons dans les tâches de façon plus ou moins expressive la coexistence d'autres registres d'ostensifs, la modélisation proposée prend en compte cet attribut d'être dominant.

Compte tenu de ce qui a été dit, nous définissons les valeurs de cette variable en considérant le registre dominant qui caractérise le type de tâches comme suit :

Tableau 3.2 – Valeurs de V1

V1 : Ostensifs	V1a. Langage naturel écrit
	V1b. Pictographique
	V1c. Langage arithmétique
	V1d. Langage algébrique

Sur les exemples précédents, nous disons, donc, que la tâche « t_1 » est d'un type de tâches qui a comme instanciation la valeur V1a, la tâche « t_2 » concerne l'instanciation V1c et la tâche « t_3 » est un exemple d'un type de tâches pour la valeur V1b.

Or, cela ne veut pas dire que nous ne considérerons pas la conjonction de deux (ou plus) valeurs si la discussion s'avère pertinente, bien entendu.

Nous ajoutons encore deux autres commentaires au sujet de V1c et V1d.

Le langage arithmétique peut être résumé par les symboles mathématiques « = », « + », « - » et les chiffres. Le langage algébrique, à son tour, fait usage de tout ce qui fait partie du langage arithmétique, mais on trouve dans ce registre des lettres pour représenter des valeurs inconnues dans une expression mathématique - un artifice historiquement révolutionnaire.

3.1.2 Variable 2 : l'idée de la situation

La deuxième variable que nous prenons en compte est ce que nous nommons « l'idée de la situation ».

Nous avons décidé, ainsi comme Maréchal (2010), de différencier les tâches « t_1 » et « t_2 » par leurs registres d'ostensifs dominants.

> t_1) Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ?
> t_2) Calcule 3 + 4.

Or, elles relèvent de types de tâches différents aussi par une autre caractéristique : l'usage ou non d'un contexte. Ce que nous prendrons en compte par la variable de niveau inférieur V2.1 [2] :

2. Une valeur d'une variable donnée peut être elle-même une variable d'un niveau inférieur de la modélisation.

Tableau 3.3 – Valeurs de V2 I

<table>
<tr><td rowspan="2">V2 : L'idée de la situation</td><td rowspan="2">V2.1 : Usage d'un contexte</td><td>V2.1.a : oui</td></tr>
<tr><td>V2.1.b : non</td></tr>
</table>

Sur cet aspect, nous avons vu émerger dans des noosphères un discours en faveur de l'étude des mathématiques à partir des contextes, ce qui peut être facilement repéré dans les documents curriculaires de plusieurs sociétés. Remarquons que la valorisation des contextes n'entraîne pas la disparition des tâches décontextualisées, c'est-à-dire V2.1.b, mais incite à donner à cette valeur une place plus restreinte au service du travail de la technique.

S'il est vrai que les tâches contextualisées sont devenues prescrites pour l'enseignement des mathématiques, il est vrai aussi que les contextes sont un sujet de jugements des noosphères. Pour cette raison, nous considérons *la nature* de ces contextes comme une autre variable de niveau inférieur, dont deux valeurs possibles ont été pour le moment retenues : les contextes internes à la discipline de mathématiques et les contextes extramathématiques.

Tableau 3.4 – Valeurs de V2 II

<table>
<tr><td rowspan="4">V2 : L'idée de la situation</td><td rowspan="2">V2.1 : Usage d'un contexte</td><td>V2.1.a : oui</td></tr>
<tr><td>V2.1.b : non</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V2.2 : Nature du contexte</td><td>V2.2.a : Mathématique</td></tr>
<tr><td>V2.2.b : Extramathématique</td></tr>
</table>

Nous signalons que V2.2 est dépendante de l'instanciation V2.1.a.

Précisons que dans des niveaux de granularité plus bas de V2.2.a et V2.2.b se trouvent encore d'autres valeurs possibles que nous ne cherchons pas à repérer ici. Par exemple, pour V2.2.b on pourrait distinguer le fait que le contexte relève d'une autre autre discipline enseignée ou de la vie courante.

Toujours liée à l'instanciation V2.1.a, nous avons vu apparaître au sein de la Didactique, spécialement dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, toute une étude des situations contextualisées qui demandent la mobilisation de l'addition et/ou de la soustraction (Vergnaud, 1981, 1990). Un résultat important de ses études concerne la catégorisation des situations ternaires, présentée de façon résumée ci-après :

> Première catégorie : deux mesures se composent pour donner une mesure.
> Deuxième catégorie : une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.
> Troisième catégorie : une relation relie deux mesures.

> Quatrième catégorie : deux transformations se composent pour donner une transformation.
> Cinquième catégorie : une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.
> Sixième catégorie : deux états relatifs (relation) se composent pour donner un état relatif. (Vergnaud, 1981, p. 133)

Dans Kaspary (2014), Maréchal (2010) et spécialement dans Vergnaud (1981), nous trouvons une explication détaillée de chacune de ces catégories et de leurs différences.

Nous pouvons regrouper ces situations par les trois idées principales qu'elles évoquent : *composer* (1re, 4e et 6e catégories), *transformer* (2e et 5e catégories) et *comparer* (3e catégorie). Nous retenons ces trois idées comme les valeurs d'une troisième variable « V2.3 : structure additive », car nous verrons que c'est ainsi que les tâches sont organisées dans les manuels.

Tableau 3.5 – Valeurs de V2 III

V2 : L'idée de la situation	V2.1 : Usage d'un contexte	V2.1.a : oui
		V2.1.b : non
	V2.2 : Nature du contexte	V2.2.a : Mathématique
		V2.2.b : Extramathématique
	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison

Les analyses conduites dans notre travail nous ont montré, cependant, que cette modélisation n'était pas encore satisfaisante : nous avons été amené à définir une quatrième variable « V2.4 : opération de la situation ». Cela est dû au constat que les institutions organisent souvent les tâches en fonction de l'opération arithmétique attendue. Dans cet esprit, par exemple, nous avons dans les manuels des chapitres séparés pour chacune des quatre opérations.

Avec ces variables de niveau inférieur, nous avons la configuration finale de V2 comme suit :

Tableau 3.6 – Valeurs de V2 IV

V2 : L'idée de la situation	V2.1 : Usage d'un contexte	V2.1.a : Oui
		V2.1.b : Non
	V2.2 : Nature du contexte	V2.2.a : Mathématique
		V2.2.b : Extramathématique
	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison
	V2.4 : Opération de la situation	V2.4.a : Addition
		V2.4.b : Soustraction

3.1.3 Variable 3 : l'information cachée (?)

Nous passons maintenant à la troisième variable, « l'information cachée (?) ».

Vergnaud (1981) a montré que les situations changent considérablement en fonction de quelle information nous y cherchons. Dans les modélisations proposées par Kaspary (2014), Maréchal (2010) et Rinaldi (2016), l'effet de la *permutation* de l'information cachée a été pris en compte pour décrire les (sous-) types de tâches.

Voici deux tâches présentées dans Maréchal (2010, p. 91) qui illustrent cette discussion :

> t_1) Denis a 4 billes dans la main droite et 3 dans la main gauche, combien a-t-il de billes en tout ?
> t_2) Denis a 4 billes dans la main droite. En tout il y a 7 billes. Combien a-t-il de billes dans la main gauche ?

Modélisons chacune des tâches par une expression mathématique : la tâche « t_1 » est modélisable par « $4 + 3 = ?$ », la tâche « t_2 » par « $4 + ? = 7$ ». Si déjà là nous voyons une différence entre elles, cela devient encore plus flagrant lorsque nous nous intéressons à leurs techniques.

Notons, cependant, que « t_2 » peut aussi être modélisée par l'expression « $7 - 4 = ?$ ». Pour éviter toute ambigüité dans les valeurs, nous avons décidé de retenir seulement l'écriture la plus congruente avec la situation, dans ce cas-là « $4 + ? = 7$ ». La notion de congruence est ici prise au sens de Duval (1988) [3].

3. Voici un autre exemple : « Un homme a 23 ans de plus que son fils, 31 ans de moins que son père. La somme des âges des trois personnes est 119 ans. Calculez les âges.

En désignant par x l'âge du père et par y l'âge du fils, nous pouvons écrire la première équation de deux façons différentes :

$x - 23 = y$ c.à.d. l'âge du père moins 23 est égal à l'âge du fils.

Nous définissons alors les valeurs de V3 de la façon suivante :

Tableau 3.7 – Valeur de V3

V3 : L'information cachée (?)	V3a. Opération directe : « a +/- b = ? »
	V3b. Opération lacunaire : « a +/- *?* = c » ou « ? +/- b = c »

Si les valeurs de variables permettent de caractériser les (sous-) types de tâches de notre $GT^{+/-}$, il est vrai aussi qu'elles ont pour objectif de faire apparaître les phénomènes cibles de notre recherche. Remarquons, dans ce sens, que la valeur V3b pourrait être décomposée en deux autres. Effectivement, chercher l'état initial, « ? +/- b = c » ou la transformation « a +/- *?* = c », ne correspondent pas du point de vue cognitif aux mêmes situations pour Vergnaud (1981). Mais nous ne considérons pas cette distinction, dans le cas spécifique de notre thèse, comme fondamentale dans l'analyse.

3.1.4 Variable 4 : les deux nombres connus de la tâche

La quatrième variable de notre modèle concerne *les nombres* traités dans les tâches.

En prenant l'école primaire comme institution cible, nous avons déjà discuté dans le chapitre 2 que nous sommes poussés à considérer « t_1 : 4 + 3 » et « t_2 : 36 + 78 », par exemple, comme des tâches relatives à des types de tâches différents.

Dans cette même direction, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels, Vergnaud (1981) a souligné que la caractéristique des nombres est un facteur cognitif important à considérer pour la distinction du niveau de difficulté.

> D'une façon générale, la complexité croit, à l'intérieur d'une même classe de problème, avec la difficulté du calcul nécessaire. Les grands nombres donnent lieu à plus de difficultés que les petits nombres, les nombres décimaux à plus de difficultés que les nombres entiers, sauf lorsque l'opération nécessaire se réduit à une composition de petits nombres ou à des opérations mentales simples. (Vergnaud, 1981, p. 142)

Nous avons retenus quatre caractéristiques qui peuvent influencer les techniques d'addition et de soustraction concernant les deux nombres connus de la tâche : leurs tailles, l'existence des multiples d'une puissance de dix, la taille de leur différence et si ces deux nombres sont de même ordre ou pas. Ce que nous résumons comme suit :

---

x = y + 23 c.à.d. l'âge du père est égal à l'âge du fils plus 23.

On remarque tout de suite que la paraphrase des deux équations n'est pas congruente à la phrase de l'énoncé : « un père a 23 ans de plus que son fils ». En revanche il y a une équation qui est sémantiquement congruente à cette phrase, mais qui ne lui est pas référentiellement équivalente : x + 23 = y. » (Duval, 1988, p. 18)

Tableau 3.8 – Valeurs de V4

V4 : Les deux nombres connus de la tâche	V4.1 : Leurs tailles	V4.1.a : Deux petits
		V4.1.b : Un petit et un grand
		V4.1.c : Deux grands
	V4.2[4] : L'existence de multiples d'une puissance de dix, 10^n	V4.2.a : Aucun multiple de 10^n
		V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n
		V4.2.c : Les deux sont des multiples de 10^n
	V4.3 : L'ordre de grandeur des nombres	V4.3.a : Même ordre
		V4.3.b : Ordre différent
	V4.4 : La taille de leur différence	V4.4.a : Différence petite
		V4.4.b : Différence grande

Tout d'abord nous considérons la *taille* des nombres comme une variable importante à considérer dans notre modèle. Le caractère « petit », par exemple, est nécessaire pour l'instrumentalisation de certains ostensifs de calcul, puis de la mise en œuvre des techniques. Lorsque l'étude passe aux nombres plus « grands », l'évolution praxéologique provient du besoin d'autres techniques plus adaptées.

Remarquons, cependant, que les adjectifs « petits » et « grands » sont *flous*. Pour éviter les ambigüités, nous allons considérer les nombres petits comme inférieurs à 20 et les grands comme supérieur ou égal à 20. Une barrière qui peut être toujours questionnée face aux choix institutionnels et aux rapports personnels.

Les multiples de puissances de 10 attirent également notre attention dans l'étude des opérations, parce que ces nombres sont, en général, associés à des techniques de calcul mental ou réfléchi.

Une autre variable que nous avons identifiée est « V4.3 : L'ordre de grandeur des nombres ». Elle est strictement liée aux grands nombres et à l'existence de multiples de puissances de 10. Elle est prise en compte dans notre modèle pour pouvoir différencier des tâches comme « 400 + 200 » ou « 400 + 32 », qui peuvent être accomplies par des techniques différentes.

Finalement, la quatrième et dernière variable est « V4.4 : La taille de leur différence ». Cette variable a été retenue par le besoin de différencier certaines tâches, comme « 145 - 142 » et « 145 - 67 ». Pour la première tâche, nous trouvons la différence facilement entre les nombres en cherchant le complément, ce qui n'est pas le cas de la deuxième tâche.

Toutes les valeurs des variables que nous avons repérées peuvent être combinées pour caractériser des types de tâches différents. En gardant seulement les combinaisons qui ont du sens d'un point de vue didactique, nous retenons le tableau suivant, où nous suggérons des tâches illustratives.

4. $n \in N$

Tableau 3.9 – Valeurs combinées de V4

<table>
<tr><td rowspan="14">V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td rowspan="3">V4.1.a : Deux petits</td><td colspan="3">V4.2.a : Aucun multiple de 10^n</td><td>4 + 2
4 - 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n</td><td>10 + 2
10 - 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">V4.2.c : Les deux sont multiples de 10^n</td><td>10 + 10
10 - 10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">V4.1.b : Un petit et un grand</td><td colspan="3">V4.2.a : Aucun multiple de 10^n</td><td>45 + 2 45 - 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n</td><td>400 + 2 400 - 2</td></tr>
<tr><td colspan="3">V4.2.c : Deux sont multiples de 10^n</td><td>400 + 10 400 - 10</td></tr>
<tr><td rowspan="8">V4.1.c : Deux grands</td><td rowspan="2">V4.2.a : Aucun multiple de 10^n
456 + 458
456 + 187</td><td colspan="2">V4.4.a : Différence petite</td><td>456 - 454</td></tr>
<tr><td colspan="2">V4.4.b : Différence grande</td><td>456 - 187</td></tr>
<tr><td rowspan="4">V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n</td><td rowspan="2">V4.3.a : Même ordre
400 + 123</td><td>V4.4.a : Différence petite</td><td>1003 - 1000</td></tr>
<tr><td>V4.4.b : Différence grande</td><td>400 - 123</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V4.3.b : Ordre différent
400 + 43</td><td>V4.4.a : Différence petite</td><td>100 - 98</td></tr>
<tr><td>V4.4.b : Différence grande</td><td>1000 - 249</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V4.2.c : Deux sont multiples de 10^n</td><td colspan="2">V4.3.a : Même ordre</td><td>400 + 200 400 - 200</td></tr>
<tr><td colspan="2">V4.3.b : Ordre différent</td><td>400 + 80 400 - 80</td></tr>
</table>

($n \in \mathbb{N}$)

Il est probable que ce modèle a laissé échapper des valeurs que nous n'avons pas prévues. L'exhaustivité n'est pas ici un objectif. Ce que nous cherchons est d'avoir un moyen d'interroger des raisons d'être des techniques d'addition et de soustraction.

3.1.5 Variable 5 : l'existence de retenues

Enfin, la dernière variable concerne « l'existence de retenues », dont le mot « retenue » est compris par le besoin de réaliser des regroupements ou des changements entre les classes des nombres.

L'existence de retenue dans la mise en œuvre des techniques algorithmiques posées est un facteur de difficulté important pour les élèves, comme l'a souligné Rinaldi (2016). Avec les analyses, nous avons noté que ce facteur est considéré institutionnellement pour l'organisation des praxéologies étudiées. Dans les manuels, par exemple, il n'est pas rare de trouver un arrangement des tâches qui prend en compte deux groupes : un sans retenues et un avec retenues. Cela arrive surtout au début de l'étude des algorithmes. Cette variable disparaît du choix didactique de l'institution lorsque les types de tâches correspondants aux valeurs de cette variable deviennent routiniers.

Tableau 3.10 – Valeurs de V5

V5 : L'existence de retenue	V5.a : Non
	V5.b : Oui

3.1.6 Synthèse du système de variables

Sur le tableau ci-dessous, nous reprenons toutes les variables et les valeurs qui permettent de caractériser les sous-types de tâches générés par $GT^{+/-}$.

Tableau 3.11 – Synthèse de $GT^{+/-}$

<table>
<tr><th colspan="3">$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation modélisable par ou donnée sous la forme « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, V1, V2, V3, V4 et V5]</th></tr>
<tr><td rowspan="4">V1 : Ostensifs</td><td colspan="2">V1a. Langage naturel écrit</td></tr>
<tr><td colspan="2">V1b. Pictographique</td></tr>
<tr><td colspan="2">V1c. Langage arithmétique</td></tr>
<tr><td colspan="2">V1d. Langage algébrique</td></tr>
<tr><td rowspan="9">V2 : L'idée de la situation</td><td rowspan="2">V2.1 : Usage d'un contexte</td><td>V2.1.a : Oui</td></tr>
<tr><td>V2.1.b : Non</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V2.2 : Nature du contexte</td><td>V2.2.a : Mathématique</td></tr>
<tr><td>V2.2.b : Extramathématique</td></tr>
<tr><td rowspan="3">V2.3 : Structure additive</td><td>V2.3.a : Composition</td></tr>
<tr><td>V2.3.b : Transformation</td></tr>
<tr><td>V2.3.c : Comparaison</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V2.4 : Opération de la situation</td><td>V2.4.a : Addition</td></tr>
<tr><td>V2.4.b : Soustraction</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V3 : L'information cachée (?)</td><td colspan="2">V3a. Opération directe : « a +/- b = ? »</td></tr>
<tr><td colspan="2">V3b. Opération lacunaire : « a +/- ? = c » ou « ? +/- b = c »</td></tr>
<tr><td rowspan="10">V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td rowspan="3">V4.1 : Leurs tailles</td><td>V4.1.a : Deux petits</td></tr>
<tr><td>V4.1.b : Un petit et un grand</td></tr>
<tr><td>V4.1.c : Deux grands</td></tr>
<tr><td rowspan="3">V4.2 : L'existence de multiples d'une puissance de dix ($n \in N$)</td><td>V4.2.a : Aucun multiple de 10^n</td></tr>
<tr><td>V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n</td></tr>
<tr><td>V4.2.c : Les deux sont multiples de 10^n</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V4.3 : L'ordre de grandeur des nombres</td><td>V4.3.a : Même ordre</td></tr>
<tr><td>V4.3.b : Ordre différent</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V4.4 : La taille de leur différence</td><td>V4.4.a : Différence petite</td></tr>
<tr><td>V4.4.b : Différence grande</td></tr>
<tr><td rowspan="2">V5 : L'existence de retenue</td><td colspan="2">V5.a : Non</td></tr>
<tr><td colspan="2">V5.b : Oui</td></tr>
</table>

Nous signalons que les lettres « a, b, c … » indiquent le dernier niveau des valeurs prises en compte par notre modèle.

3.2 Les Techniques

L'identification des techniques nous conduit à quelques réflexions, que nous partagerons ici. Rappelons, tout d'abord, qu'une technique peut être décrite comme un ensemble de types de tâches (Chaachoua, 2018).

3.2.1 Les techniques et leurs ingrédients

Intéressés aux techniques d'addition et de soustraction, nous proposons l'exercice d'imaginer comment les trois tâches présentées précédemment pourraient être accomplies :

t_1) Audrey a 3 billes, elle en gagne 4 contre Sylvia, combien en a-t-elle à la fin ?

t_2) Calcule 3 + 4.

t_3) Combien de billes y a-t-il dans les deux paquets ?

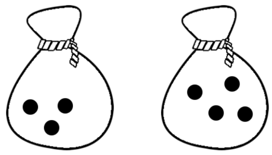


Figure 3.2 – Tâche « t3 » II

Spécialement pour les tâches « t_1 » et « t_3 » un premier geste semble nécessaire, celui de l'interprétation de l'énoncé.

— $T_{\text{interprétation}}$: Interpréter l'énoncé d'une situation donnée.

Ce type de tâches apparaît normalement incontournable lorsque la valeur « *langage naturel écrit* » est expressivement présente.

Si nous prenons maintenant les tâches « t_1 » et « t_2 » nous voyons aussi un autre geste nécessaire :

— $T_{\text{traduction}}$: Choisir des ostensifs qui permettent de *traduire et* de *manipuler* convenablement une situation donnée.

Le langage naturel écrit a une valence instrumentale assez déficitaire dans l'activité mathématique ; c'est pourquoi il faut faire appel à d'autres ostensifs à valence instrumentale plu forte.

> On ne calcule pas sur les énoncés du langage ordinaire : pour cela, on prêtera donc à l'arithmétique la vertu d'obliger à « raisonner » sur les énoncés du langage ordinaire, et on déniera au calcul toute autre valeur que celle d'une mécanique, qui peut seulement dérailler, et faillir. (Chevallard, 1989b, p. 64)

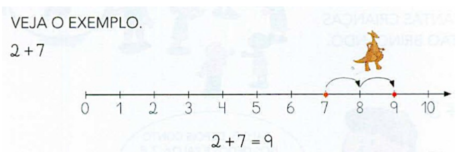
Les chiffres « 3 » et « 4 » sont eux-mêmes aussi peu utiles à répondre la tâche « t_2 » : on doit chercher d'autres ostensifs pour l'accomplir. En revanche, la tâche « t_3 » nous offre déjà dans son énoncé cette dimension ostensive de travail avec la valeur « pictogramme » et pour cette raison « $T_{\text{traduction}}$ », en principe, ne participe pas de sa technique.

Ces deux types de tâches révèlent des gestes de mise en œuvre des techniques d'addition et de soustraction. Nous voyons, alors, que les ingrédients des techniques sont divers et peuvent varier en fonction du niveau où nous nous plaçons dans la description. Sachant cela, nous avons décidé pour notre modélisation de nous centrer à la description des *noyaux* qui caractérisent un ensemble de techniques, ce que nous discutons dans le paragraphe suivant.

3.2.2 Le noyau de la technique

Pour continuer nos réflexions, nous proposons deux illustrations de la mise en œuvre d'une technique désignée couramment par le terme de *surcomptage* :

Tableau 3.12 – Comparaison de techniques

 **Figure 3.3** – Surcomptage I (Dante, 2011a, p. 133)	Pour accomplir la tâche « Calculer 5 + 3 », la fille utilise une coactivation de registres d'ostensifs différents, l'oral et le gestuel : « Je dis 5, après je compte avec les doigts et je dis 6, 7, 8. 5 + 3 = 8 ».
 **Figure 3.4** – Surcomptage II (Dante, 2011a, p. 134)	Pour accomplir la tâche « Calculer 2 + 7 », nous voyons ici l'usage de la droite numérique cordonné avec certains gestes (exprimés par les flèches).

Suite à ces deux exemples, nous nous posons la question suivante : s'agit-il de la même technique de *surcomptage* ?

Lorsque Chevallard (1998a) questionne la façon de décrire une technique, il affirme que sa mise en œuvre « revient à accomplir certains gestes dans le cadre de certains dispositifs » (p. 01). Dans ces deux exemples, les mises en œuvre des techniques sont différentes puisque les dispositifs et, par conséquent les gestes, ne sont pas les mêmes.

Cette discussion, comme le suggère Chevallard (1998a), consiste alors à regarder *jusqu'à quel point* ces deux cas peuvent être regardés comme *équivalents*[5].

Nous considérons qu'un des critères d'équivalence est l'existence d'*un noyau*, dont la description peut se faire par un ou quelques types de tâches. Par exemple, *les techniques de surcomptage* ont comme *noyau* : Identifier le nombre le plus grand présent dans la tâche ; Effectuer la séquence « a + 1, a + 2,. . . , a + b = c », dans le cas où a > b ; Indiquer le dernier terme de la séquence, « c ». Autour de ce *noyau* une variation de façons de faire peuvent être mise en place en fonctions des ostensifs utilisés et aussi d'autres types de tâches qui peuvent venir à intégrer la technique. Le noyau est alors cette partie sans laquelle la technique s'effondre.

3.2.3 Les techniques d'addition et de soustraction

En prenant en compte ce que nous avons présenté dans les deux derniers paragraphes, nous proposons par la suite une présentation synthétique des techniques d'addition et soustraction. Cette liste de technique n'a pas l'intention d'être exhaustive.

Pour certaines descriptions « a » et « b » désignent deux nombres connus de la tâche et les éventuels « c », « p », « q » et « n » sont d'autres nombres entiers positifs.

Tableau 3.13 – Dénombrement

Technique, τ_i	Noyau	
	Dénombrer des ostensifs qui représentent d'unités	
	Exemples de tâches	Illustration de la mise en œuvre des techniques
$\tau_{\text{Dénombrement}}$	5 + 2	○○○○○ ○○ ⇒ ○○○○○○○ Le résultat est 7.
	5 - 2	○○○∅∅ Le résultat est 3.
	5 - 2	○○○○○ △ △ Le résultat est 3.

5. En italique, mots utilisés par l'auteur Chevallard (1998a).

Tableau 3.14 – Surcomptage

<table>
<tr><th>Technique, τ_{i}</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tau_{\text{Surcomptage}}$</td><td colspan="2">Identifier le nombre le plus grand connu dans la tâche ; Effectuer la séquence « a + 1, a + 2, . . . , a + b = c », au cas où a et b sont les valeurs connues et a > b ; Indiquer le dernier terme de la séquence, « c ».</td></tr>
<tr><td>Exemple de tâche</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>41 + 3</td><td>« Je dis 41 ; après je dis 42, 43, 44.
Le résultat est 44. »</td></tr>
</table>

Tableau 3.15 – Séquence décroissante

<table>
<tr><th>Technique, τ_{i}</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tau_{\text{Séquence décroissante}}$</td><td colspan="2">Identifier le nombre le plus grand connu dans la tâche. Effectuer la séquence « a - 1, a - 2,. . . , a - b = c », au cas où a et b sont les valeurs connues et b < a ; Indiquer le dernier terme de la séquence, « c ».</td></tr>
<tr><td>Exemple de tâche</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>18 - 3 =</td><td>« Je dis 18 ; après je dis 17, 16, 15.
Le résultat est 15. »</td></tr>
</table>

Tableau 3.16 – Complément

<table>
<tr><th>Technique, τ_{i}</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\tau_{\text{Complément}}$</td><td colspan="2">Identifier le nombre le plus petit connu dans la tâche ; Effectuer la séquence « a + 1, a + 2, . . . , a + b = c », au cas où a et c sont les valeurs connues et a > c ; Indiquer l'ordre de la séquence, « b ».</td></tr>
<tr><td>Exemples de tâches</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>41 + ______ = 44</td><td>« Je dis 41 ; près je dis 42, 43, 44.
Le résultat est 3. »</td></tr>
<tr><td>38 - ______ = 34
38 - 34 =</td><td>« Je dis 34 ; près je dis 35, 36, 37, 38.
Le résultat est 4. »</td></tr>
</table>

Tableau 3.17 – Composition

<table>
<tr><th>Technique, τ_{i}</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tau_{\text{Composition}}$</td><td colspan="2">Superposer les ordres de numération non vides de b ($\neq 0$) aux mêmes ordres vides de a ($= 0$), au cas où « a » est du type « $\mathrm{p10^n}$ » et a > b.</td></tr>
<tr><td>Exemple de tâche</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>700 + 35</td><td>7<s>00</s> + 35 est égale à 735</td></tr>
</table>

Tableau 3.18 – Réduction en unités

<table>
<tr><th>Technique, τ_i</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$</td><td colspan="2">Effectuer « p +/- q », où $a = p10^n$ et $b = q10^n$. Indiquer la valeur « $(p +/- q)10^{\ n}$ ».</td></tr>
<tr><td>Exemple de tâche</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>200 + 400</td><td>2 + 4 = 6. Alors, 200 + 400 = 600</td></tr>
</table>

Tableau 3.19 – Décomposition

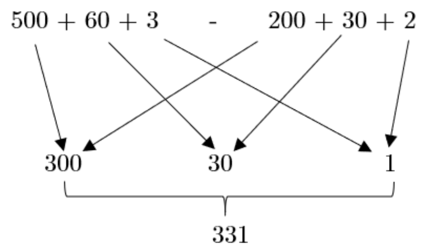
<table>
<tr><th>Technique, τ_i</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\tau_{\text{Décomposition}}$</td><td colspan="2">Représenter « a » comme $a_n10^n+\ a_{n\text{-}1}10^{n\ \text{-}1}\dots\ a_1 10+\ a_0$ et « b » comme $b_m10^m+\ b_{m\text{-}1}10^{m\text{-}1}\dots\ b_1 10+\ b_0$. Appliquer la technique par réduction en unités et la technique de juxtaposition.</td></tr>
<tr><td>Exemple de tâche</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>563 - 232</td><td>
</td></tr>
</table>

Tableau 3.20 – Algorithme posé de l'addition

<table>
<tr><th>Technique, τ_i</th><th colspan="2">Noyau</th></tr>
<tr><td rowspan="4">$\tau_{\text{Algorithme+}}$</td><td colspan="2">Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer l'addition de chaque colonne de la droite à gauche ; si le résultat de l'addition d'une colonne est supérieur à 9, redistribuer cette valeur à l'ordre supérieur.</td></tr>
<tr><td>Exemples de tâches</td><td>Illustration de la mise en œuvre des techniques</td></tr>
<tr><td>72 + 25</td><td>$$\begin{array}{r} 7\ 2 \\ +\ 2\ 5 \\ \hline 9\ 7 \end{array}$$</td></tr>
<tr><td>76 + 65</td><td>$$\begin{array}{r} {}^{1}7\ 6 \\ +\ 6\ 5 \\ \hline 1\ 4\ 1 \end{array}$$</td></tr>
</table>

Tableau 3.21 – Algorithme posé de la soustraction I

Technique, τ_i	Noyau	
$\tau_{\text{Algorithme(1)-}}$	Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche ; si $a_i < b_i$, alors attribuer à a_i une unité de a_{i+1}.	
	Exemples de tâches	Illustration de la mise en œuvre des techniques
	76 - 32	7 6 - 3 2 ——— 4 4
	76 - 37	${}^{6}\cancel{7}\ {}^{1}6$ - 3 7 ——— 3 9

Tableau 3.22 – Algorithme posé de la soustraction II

Technique, τ_i	Noyau	
$\tau_{\text{Algorithme(2)-}}$	Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche ; si $a_i < b_i$, alors attribuer à a_i une unité de l'ordre supérieur et attribuer une unité à b_{i+1}.	
	Exemple de tâche	Illustration de la mise en œuvre des techniques
	76 - 37	$7\ 6^{10}$ - ${}^{1}3\ 7$ ——— 3 9

Tableau 3.23 – Algorithme posé de la soustraction III

Technique, τ_i	Noyau	
$\tau_{\text{Algorithme(3)-}}$	Soustraire 1 unité de « a » et 1 unité de « b ». Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche.	
	Exemple de tâche	Illustration de la mise en œuvre des techniques
	700 - 123	7 0 0 - 1 2 3 ——— ? ? ? ⇒ 6 9 9 1 2 2 ——— 5 7 7

Dans le prochain paragraphe, nous invitons le lecteur à quelques réflexions sur les portées de ces techniques.

3.2.4 Les techniques et leurs portées

Par un regard épistémologique, on peut s'interroger sur les conditions, les contraintes et les dynamiques permettant à ces techniques d'exister dans une institution. A ce propos, nous présentons quelques points de discussions.

Un premier constat, assez évident, est qu'il existe un certain ordre d'apparition de quelques techniques. Cela est provoqué par leur nature même. Pour accomplir la tâche « 200 + 300 » avec $\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$, par exemple, il est indispensable que la tâche « 2 + 3 » ne soit plus problématique et pour cela une autre technique a dû exister auparavant. Son émergence est alors conditionnée à la stabilité d'autres techniques.

C'est dans ce sens que les premières rencontres avec les techniques d'addition et de soustraction passent inévitablement par celles adaptées aux petits nombres. C'est le cas de la technique $\tau_{\text{Dénombrement}}$, où nous notons une dynamique : le type de tâches qui caractérise son noyau - Dénombrer des ostensifs qui représentent les unités - a le statut d'« objet » dans l'étude du système de numération décimale et devient un « outil » pour les techniques du champ additif.

Grâce à une maturation technologique, nous retrouvons à l'intérieur de la portée de cette première technique la genèse d'une autre. Selon Vergnaud (1990), entre 5 et 7 ans les enfants découvrent qu'il n'est pas nécessaire de dénombrer toute la collection union pour connaître la somme. Cela donne lieu à la technique de surcomptage, $\tau_{\text{Surcomptage}}$.

Si nous prenons la variable « V4 : Les deux nombres connus de la tâche », nous voyons que la portée pragmatique de $\tau_{\text{Dénombrement}}$ est incluse dans la portée de $\tau_{\text{Surcomptage}}$: la première est limitée à « V4.1.a : Les deux petits », alors que la portée de la deuxième peut se caractériser par « V4.1.a : Les deux petits et V4.1.b : Un petit et un grand ».

Nous voyons alors dans la technique $\tau_{\text{Surcomptage}}$ un engagement vers la réduction ostensive et une portée plus large par rapport à celle où elle a été engendrée. De cela, nous pouvons inférer que $\tau_{\text{Dénombrement}}$ tendra à disparaître.

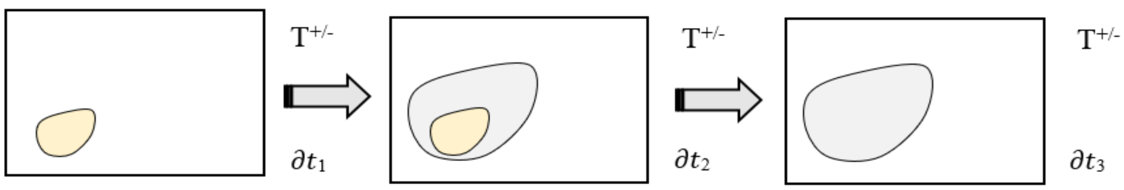


Figure 3.5 – Évolution praxéologique et la concurrence des techniques

Les autres techniques vont aussi avoir leurs parcours et probablement vont se retrouver dans différents enjeux concernant les domaines de concurrences. Puis, l'évolution des techniques s'oriente vers les algorithmes posés, dont la mise en œuvre est une traduction compactée de certaines techniques.

Les techniques des algorithmes posés ont des portées très larges, ce qui peut être au sein d'une institution une contrainte pour l'existence d'autres techniques. C'est pourquoi nous proposons ici de regarder de plus près leurs portées.

Pour les schémas ci-dessous, appelons « a_i » un chiffre du nombre « a » et « b_i » un chiffre du nombre « b ». Les indicateurs « u, d, c ... » indiquent l'ordre du chiffre, où « u : unités », « d : dizaines », « c : centaines », etc. Nous nous plaçons dans le cas où « a +/- b » est un type de tâches problématique.

Signalons que si « a » et « b » sont des nombres à un chiffre, le complexe d'ostensif relatif aux algorithmes posés n'a pas de valence instrumentale pour répondre aux tâches de ce type.

$$\begin{array}{r} a_u \\ +/-\ b_u \\ \hline \end{array}$$

Effectivement, disposer les nombres « 5 » et « 3 » en colonne, par exemple, ne nous aide pas à accomplir les tâches « 5 + 3 » ou « 5 - 3 ». Pour trouver la somme et la différence de ces deux nombres, nous devons chercher ailleurs d'autres ostensifs ayant une valence instrumentale appropriée à la situation.

Malgré cette déficience instrumentale, nous pouvons considérer qu'il y a un sens sémiotique et un intérêt didactique à faire rencontrer cette représentation dans les institutions.

Passons alors à un deuxième cas :

$$\begin{array}{rcc} & a_d & a_u \\ +/- & & b_u \\ \hline \end{array}$$

Nous voyons que l'algorithme de l'addition peut être une technique dans ce cas dès que « a_u +/- b_u » est un type de tâches routinier et « a_d +/- (espace vide) » est compris comme équivalent à « a_d +/- 0 ». Cependant, ici la portée de l'algorithme rentre en concurrence avec la technique de surcomptage. Comment devons-nous alors accomplir la tâche « 45 + 7 » en disposant de ces deux techniques ?

Si nous considérons maintenant la soustraction, la situation est un peu plus complexe : si $a_u < b_u$, l'usage de l'algorithme pour la soustraction est vain si $a_d = 1$. Comme nous le montrons ci-dessous avec la tâche « 13 - 7 » : une fois appliqués les algorithmes posés dont nous disposons, nous nous retrouvons avec la même tâche du départ « 13 - 7 » dont la solution est inconnue.

$$\begin{array}{rr} {}^{0}\cancel{1} & 3^{1} \\ - & 7 \\ \hline \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rr} 1 & 3^{1} \\ -\,^{1} & 7 \\ \hline \end{array}$$

$$(13 - 7 = ?) \qquad\qquad (13 - 7 = ?)$$

Pour tous les autres cas, les algorithmes posés d'addition et de soustraction fonctionnent *théoriquement*. Ils tendent à échouer, cependant, lorsque les nombres « a » et « b » sont très grands et spécialement quand « *V5 : L'existence de retenue »* assume la valeur « V5b : oui ».

Pour la soustraction par emprunt, un autre facteur qui augmente considérablement la difficulté est quand « a » contient plusieurs zéros. Pour cette raison, nous nous sommes retrouvés durant les analyses avec la technique $\tau_{\text{Algorithme(3) -}}$, illustrée ci-dessous.

$$\begin{array}{rccc} & 7 & 0 & 0 \\ - & 1 & 2 & 3 \\ \hline & ? & ? & ? \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} 6 & 9 & 9 \\ 1 & 2 & 2 \\ \hline 5 & 7 & 7 \end{array}$$

Cette technique est une stratégie d'évitement de la difficulté due à la valeur relative à l'existence de retenue. Nous en reviendrons lors des analyses.

En fonction des portées très vastes des algorithmes posés, il existe des domaines de concurrence entre ces algorithmes et plusieurs autres techniques. A titre d'exemple, considérons les trois techniques $\tau_{\text{Complément}}$, $\tau_{\text{Composition}}$ et $\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$. Dans chacune de leurs portées, nous pouvons sans grand risque d'erreur et avec peu d'effort accomplir, respectivement, les tâches « Calculer 47 - 45 », « Calculer 300 + 78 » et « Calculer 300 + 200 ». Mais nous pouvons aussi utiliser les algorithmes posés pour trouver ces sommes.

Tableau 3.24 – Comparaisons de trois techniques avec l'algorithme posé de l'addition

$\tau_{\text{Complément}}$ et $\tau_{\text{Algorithme(1) -}}$		$\tau_{\text{Composition}}$ et $\tau_{\text{Algorithme +}}$		$\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$ et $\tau_{\text{Algorithme +}}$	
$47 - 45$ $45, \underbrace{46,\ 47}_{2}$ $47 - 45 = 2$	$\begin{array}{rr} 4 & 7 \\ -4 & 5 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$	$3\cancel{00} + 78$ 378	$\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ + & 7 & 8 \\ \hline 3 & 7 & 8 \end{array}$	$300 + 200$ Comme $3 + 2 = 5$, alors $300 + 200 = 500$	$\begin{array}{rrr} 3 & 0 & 0 \\ +2 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 0 & 0 \end{array}$

Que devrait-il alors se passer dans les domaines de concurrence entre ces techniques ? Que se passe-t-il dans les institutions ?

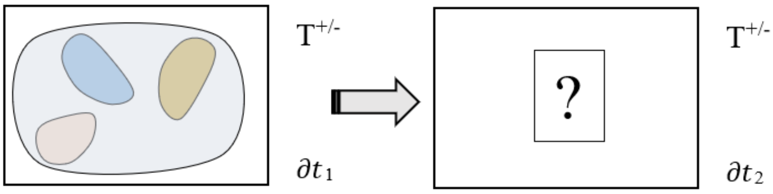


Figure 3.6 – L'avenir des domaines de concurrence

Nous croyons que ces questions sont intimement liées aux *fins éducatives* souhaitables par les institutions d'enseignement, au sens de Gascón et Nicolás (2019). C'est-à-dire les objectifs de l'école dans/pour la société ; objectifs qui ont notamment leur origine dans la « sphère de valeurs » de cette société. Nous donnons deux exemples.

Si finalement l'enjeu de l'étude du champ additif est de produire des résultats pour les calculs, nous pouvons questionner sur le coût didactique que représente l'introduction de plusieurs techniques de calcul. Nous disposons facilement de calculatrices actuellement, dont la portée est plus avantageuse que celle de l'algorithme posé, ce qui diminue l'intérêt de l'étude de ces techniques pour le calcul.

Si, par contre, l'enjeu de l'étude est celui des technologies du champ additif, la diversité de techniques devient fondamentale. Vis-à-vis de cet enjeu, il faut au moins que l'institution conserve la pluralité des valeurs de la variable « $V4$: *Les deux nombres connus de la tâches* ».

La noosphère évidemment porte un regard sur ces différentes configurations, en envisageant celle qui selon elle est la plus adéquate pour les fins éducatives de sa société.

3.3 Le Bloc Du Savoir

Dans ce paragraphe, nous avons pour objectif de présenter un ensemble de notions, idées, concepts et propriétés qui permettent d'engendrer et de justifier les techniques du champ additif à l'école primaire. Nous nous plaçons dans le domaine des mathématiques, c'est-à-dire sans prendre en compte ce qui relève par exemple des contrats didactiques et des technologies personnelles. Tous les énoncés qui suivent font partie de la *théorie* Θ appelée *système de numération décimale.*

Pour identifier cet ensemble d'énoncés, le travail de Rinaldi (2016) a été spécialement important en ce qui concerne *les savoirs savants.* L'auteure fait référence à Bezout et à Reynaud pour caractériser la période précédant la réforme des mathématiques modernes. Les propriétés de l'addition et de la soustraction sont aussi énoncés à partir des axiomes de Peano. Nous faisons aussi référence au travail de (Tempier, 2010) pour discuter des deux principes fondamentaux pour les opérations arithmétiques.

3.3.1 Les aspects ordinal et cardinal des nombres

Les signifiés des nombres font aussi partie de l'environnement technologique des techniques d'addition et de soustraction. Deux notions sont exploitées dans le contexte du champ additif : l'aspect cardinal et l'aspect ordinal des nombres.

L'aspect cardinal est présent dans la définition donnée par Bezout (1764, p.1, *apud* Rinaldi (2016, p. 39)) : « Le nombre exprime de combien d'unités ou de parties d'unités une quantité est composée. ». Les techniques de *dénombrement,* indiquées ci-dessus par nous, sont soutenues par cette notion.

L'aspect ordinal est présent dans la définition proposée par Reynaud (1821, p.1, *apud* Rinaldi (2016, p. 39)) : « Pour former les nombres, on part de l'unité ; l'unité ajoutée à elle-même, donne un nombre nommé deux, celui-ci augmenté d'un, compose un nouveau nombre nommé trois ; . . . . ».

> La définition du nombre proposée par Reynaud, contrairement à celle de Bezout, n'est pas liée aux grandeurs. L'unité ne dépend plus de l'espèce de la grandeur. C'est une entité abstraite qui a cependant une matérialité, car elle correspond à un élément quelconque, mais bien identifié d'une collection. Le nombre apparait alors comme le résultat d'un comptage d'un en un des éléments de la collection. L'aspect ordinal avec l'idée de successeur est également mis en avant. Les mots qui désignent les nombres sont introduits avec les règles de fonctionnement caractéristiques de la numération orale. (Rinaldi, 2016, pp. 39 - 40)

Cette notion est au cœur des techniques mettant en œuvre les séquences des nombres, comme celle de surcomptage.

3.3.2 Principe décimal et principe position

Encore liés aux nombres, deux autres principes sont fondamentaux pour l'élaboration et la mise en œuvre des techniques opératoires (Tempier, 2010) : l'aspect position et l'aspect décimal de la numération. Ces deux notions interviennent dans toutes les techniques de calcul que nous avons présenté, encore que cela soit plus perceptible dans certains cas, comme $\tau_{\text{Composition}}$ et $\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$.

L'aspect position de la numération concerne les valeurs que les chiffres ont en fonction de leurs positions :

Aspect position de la numération : dans l'écriture d'un nombre, la valeur des chiffres dépend de leur position.

4 137 c'est :

4 **milliers** 1 **centaine** 3 **dizaines** et 7 **unités**

Ce que l'on écrit souvent dans un tableau de numération :

M	C	D	U
4	1	3	7

Le chiffre 0 sert à marquer la position des chiffres quand une unité est absente.

Figure 3.7 – Aspect cardinal du nombre (Tempier, 2010, p.61)

L'aspect décimal, à son tour, concerne les relations entre ces différentes valeurs :

Aspect décimal de la numération (ou relations entre unités) : 10 unités d'un certain rang sont égales à une unité du rang supérieur.

1 dizaine = 10 unités,

1 centaine = 10 dizaines, donc 1 centaine = 100 unités

1 millier = 10 centaines, donc 1 millier = 100 dizaines et 1 millier = 1000 unités.

Figure 3.8 – Aspect décimal du nombre (Tempier, 2010, p.61)

Nous notons que la mise en œuvre des algorithmes d'addition et de soustraction est basée sur des gestes qui prennent en compte ces deux principes.

3.3.3 Les propriétés des opérations

D'autres énoncés technologiques du champ additif peuvent être traduits par des propriétés des opérations d'addition et soustraction.

Nous remarquons que ces propriétés participent de façon *active* dans les techniques. Cela veut dire qu'elles ont une dimension opérationnelle, *qu'elles permettent de faire quelque chose avec*, au-delà de *justifier ce qu'on fait.*

> [. . .] structuralement, le savoir [θ /Θ] permet d'engendrer τ (pour T donné). Pour cette raison, le savoir-faire [T/τ] pourra être classiquement présenté, dans le texte du savoir, comme une simple application du « savoir » [θ /Θ]. (Chevallard, 1998b, p. 96)

A cet égard, remarquons qu'il existe des types de tâches dont les techniques consistent simplement à *la mise en œuvre d'une propriété,* comme nous le verrons dans quelques exemples ci-après.

Maintenant nous présentons les propriétés retenues, en commençant par les deux suivantes :

— *L'opération de soustraction est l'opération inverse de l'opération d'addition et vice versa.*

— *Commutativité de* l'addition : $\forall$ (p, q) $\in N \times N$, p + q = q + p

A propos de la remarque précédente, nous pouvons intégrer à certaines techniques, quand pertinent, un type de tâches relatif à la mise en œuvre de la propriété de la commutativité de l'addition. Par exemple, pour accomplir la tâche « 3 + 13 » avec la technique de surcomptage, nous appliquons tout d'abord cette propriété pour nous ramener à la tâche « 13 + 3 ».

Une autre propriété est la non-commutativité de l'opération de soustraction :

— *Non-commutativité de la soustraction :* $\forall$ (p, q) $\in N^* \times N^*$, p - q $\neq$ q - p

Notons que ce troisième discours technologique sert à prévenir, au niveau de la technique, l'usage de la commutativité hors de son domaine de validité.

Un autre principe technologique attendu dans le parcours de l'étude du champ additif concerne le rôle du zéro dans les opérations d'addition et de soustraction. Nous le résumons de la façon suivante :

— *Élément neutre de l'addition :* $\forall \ n \in N^*, n + 0 = 0 + n = n$

— *Zéro dans la soustraction :* $\forall \ n \in N^*$, n - $0 = n$

La prise en compte des régularités du rôle du zéro rend certaines tâches d'addition et de soustraction rotinières. C'est-à-dire, avec ces technologies, l'on n'a pas besoin de recourir à d'autres techniques pour les tâches du type : « Calculer a + b, tel que a = 0 ou b = 0 » ou « Calculer a - b, tel que b = 0 ». Ce savoir permet de *donner la réponse tout de suite.*

Une dernière propriété que nous avons identifions avec Rinaldi (2016) est celle dite de la « *conservation des écarts* ».

> Une différence ne change pas si on ajoute ou si on soustrait le même nombre aux deux termes de la différence. Cette propriété est aussi connue sous le nom de propriété de conservation des écarts. Cela se traduit pour p, q et r entiers tels que les différences introduites aient un sens, c'est-à-dire pour p $\geq$ q : (p + r) - (q + r) = p - q et pour p $\geq$ q, p $\geq$ r et q $\geq$ r par (p - r) - (q - r) = p - q . (Rinaldi, 2016, p. 48)

Tempier (2010) nous montre la différence entre deux algorithmes posés qui mobilisent pour l'un principe d'échanges d'unités, pour l'autre conservation des écarts :

Technique dite « par emprunt » : au rang des dizaines, on ne peut soustraire 2 dizaines de 9 dizaines, donc on échange 1 centaine contre 10 dizaines. On peut maintenant soustraire 9 dizaines de 12 dizaines : cela fait 3 dizaines. Il reste alors 4 centaines …

$$\begin{array}{rccc} & 4 & & \\ & \cancel{5} & {}_{1}2 & 7 \\ - & 3 & 9 & 2 \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

Technique traditionnelle française : au rang des dizaines, on ne peut soustraire 2 dizaines de 9 dizaines. On ajoute alors 10 dizaines à 527. Pour ne pas modifier la différence, il faut aussi ajouter 10 dizaines à 392. Comme 1 centaine est égale à 10 dizaines, on ajoute alors 1 centaine à 392. On peut maintenant soustraire 9 dizaines de 12 dizaines : cela fait 3 dizaines. Il reste alors à soustraire 4 centaines de 5 centaines.

$$\begin{array}{rccc} & 5 & {}_{1}2 & 7 \\ - & 3 & 9 & 2 \\ & {}_{1} & & \\ \hline & 1 & 3 & 5 \end{array}$$

Figure 3.9 – Comparaison de deux techniques de soustraction (Tempier, 2010, p.63)

Cette deuxième technique, présentée par Tempier (2010) comme technique « traditionnelle Française », est celle qui m'était inconnue dans la petite histoire d'introduction à ce chapitre. Le témoignage, comme nous le verrons lors des analyses, montre que cette technique et son environnement technologique ont disparu du système d'enseignement brésilien.

3.3.4 La théorie des ensembles

Nous introduisons ici un court paragraphe sur la théorie des ensembles. Le besoin de le faire vient d'un retour du à l'analyse du corpus. Ce corpus concerne la période 1994 - 2004, qui atteste de l'existence des vestiges du mouvement des mathématiques modernes à l'étude de l'école primaire au Brésil.

La théorie des ensembles peut être vu comme un objet en soi d'enseignement. Dans notre cas, cependant, nous le percevons comme un ensemble de technologies qui traverse et impacte les conditions de vie de plusieurs objets d'étude. C'est le cas des opérations d'addition et soustraction.

Par exemple, dans ce contexte, l'opération d'addition de deux nombres entiers est comprise comme le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles finis disjoints. Et pour donner du sens à l'opération de soustraction, la notion exploitée peut être celle d'ensemble complémentaire.

> Pour définir la soustraction, deux entiers naturels a et b étant donnés, vérifiant b > a, il est toujours possible de choisir dans un ensemble B de cardinal b, une partie A de B de cardinal a. La différence entre a et b est le cardinal de l'ensemble complémentaire de A dans B. (Rinaldi, 2016, p. 42)

Dans les analyses, nous irons plus loin sur les impacts de cet environnement technologique sur l'étude du champ additif. Nous verrons que I_{PNLD} a proposé des changements importants sur ce point.

3.3.5 Une précision sur les ostensifs au niveau du bloc du savoir

Nous avons dit que tous les éléments praxéologiques se font présents au sein d'une institution à partir d'une dimension ostensive, y compris les éléments du savoir. Comment l'environnement technologique du champ additif peut-il émerger matériellement dans l'activité d'étude à l'école primaire ? Dans cette perspective, quels moyens peuvent utiliser les institutions pour exprimer la propriété de commutativité de l'addition présentée ici comme « $\forall$ (p, q) $\in N \times N$, p + q = q + p » ?

De façon générale, nous remarquons que pour faire vivre ces éléments technologiques, l'institution école primaire fera appel à une diversité des dispositifs et d'ostensifs.

Prenons deux exemples : pour l'aspect cardinal du nombre, nous voyons la mobilisation des objets dits concrets, comme les jetons et les billes, et aussi de pictogrammes les plus variés ; pour l'aspect ordinal du nombre, nous voyons que la droite numérique et les frises [6] sont souvent sollicités. Nous remarquons que l'étude de ces deux aspects peut se faire en l'absence des termes « cardinal » et « ordinal » dans l'institution. D'autres éléments technologiques peuvent, au contraire, être institutionnalisés et baptisés, ce qui leur donne notamment un autre statut au sein de l'institution.

Le fait est simple : les ostensifs participent de façon décisive du bloc du savoir, et de façon particulièrement plurielle lorsque le langage mathématique est encore un moyen étrange de communication. Les éléments technologiques que nous avons identifiés sont alors rencontrés sous des formes diverses, qui peuvent être bien différentes de celles utilisées ici dans notre présentation.

6. Comme dans le jeu de l'oie, formé d'un parcours où l'on déplace des pions en fonction des résultats des dés.

Conclusions

Dans ce chapitre nous avons présenté notre modèle praxéologique de référence du champ additif. Il sera notre *unité d'analyse* pour comprendre et interpréter les rapports noosphériens de I_{PNLD} et I_M.

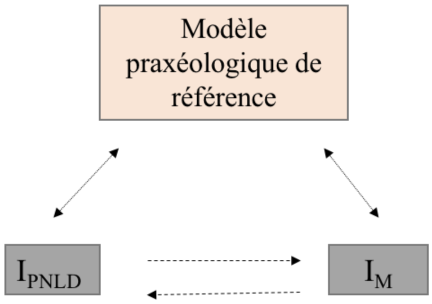


Figure 3.10 – Modèle praxéologique de référence pour l'analyse des institutions noosphériennes

Nous l'avons élaboré dans un premier temps en nous appuyant sur des travaux existants, ce qui nous a apporté un point de vue épistémologique et didactique sur l'étude du champ additif. Or, ce modèle a été aussi progressivement enrichi au regard des besoins de l'analyse. Pour cette raison, nous avons volontairement laissé apparaître ici des références aux données empiriques, qui seront effectivement présentées dans le prochain chapitre.

La construction du modèle de référence nous a conduit aussi à un retour sur des notions introduites dans le chapitre 2. Pour la description de la technique, nous avons proposé un moyen de description à partir d'un ensemble de types de tâches appelé *noyau*. En ce qui concerne les valeurs de la variable « Ostensifs » nous avons été conduit à retenir comme valeurs caractérisant des types de tâches *les registres d'ostensif dominant.*

Pour la présentation de ce modèle, nous avons fait des choix basés sur T4Tel. De ce point de vue, nous n'avons pas affiché une liste de types de tâches du champ additif, bien que nous pourrions le faire à partir de l'instanciation des variables. A partir de la notion de générateur de types de tâches, nous avons cherché à identifier les ingrédients permettant de caractériser cette liste de types de tâches. Nous verrons dans les analyses que cette manière de concevoir cet élément praxéologique sera un vrai outil dans notre travail. Voici déjà quelques questions qui traverseront nos analyses et que permet cet outil :

$\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$	I_{M}
Quelles sont les variables et valeurs visées dans les critiques de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ au cours de plus de vingt années d'évaluation de manuels ? Est-ce que cette institution suggère l'introduction ou la disparition de valeurs ? Quel est l'impact de cette demande : une nouvelle technique, un bouleversement de l'environnement du bloc du savoir... ? S'agit-il des valeurs qui sont déjà prises en compte par les niveaux les plus hauts de codéterminations, mais qui ont du mal à être considérées dans les niveaux plus bas ?	Quelles sont les valeurs des variables qui apparaissent ou disparaissent au cours du temps dans les manuels ? Répondent-elles à une demande de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$? Quels sont les impacts d'une nouvelle valeur sur d'autres éléments praxéologiques ? Quelles sont les ruses employées pour s'adapter aux conséquences de la disparition/introduction d'une valeur de variable ? Quelles sont et d'où viennent les résistances qui empêchent les changements ?

Les variables, les techniques, les technologies, les ostensifs et les portées des techniques sont donc des différentes facettes de l'activité mathématique que nous allons prendre en compte. C'est pour cette raison que le jugement que porte la noosphère sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques peut être interprété à partir d'eux ; c'est ce que nous nous proposons de faire.

Munis de ce modèle praxéologique de référence, nous présentons dans le prochain chapitre les analyses des deux institutions noosphériennes, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et I_{M}.

Chapitre 4

Analyse des données

> « Le système d'enseignement n'existe, en tant que système, que parce qu'il est soumis à des lois - les lois du fonctionnement didactique. Épistémologiquement, il s'agit là d'une affirmation banale. Mais, historiquement, il s'agit d'une affirmation décisive : son acceptation ou son refus déterminent un carrefour de l'évolution de nos sociétés. L'accepter change tout : elle engage à la recherche des lois qui gouvernent l'acte d'enseignement et sa gestion sociale ; elle conduit à un réalisme efficace, loin de l'utopie de la volonté nue. »
>
> *(Chevallard, 1986, p. 32)*

...

Objectifs du chapitre : Construction des observables. Analyse des effets didactiques de l'assujettissement entre institutions. Étude curriculaire dans le temps. Reprise des aspects méthodologiques.

...

Introduction I

Nous sommes arrivés au chapitre d'analyse. Ce sont les praxéologies attachées à $T^{+/-}$ qui seront au centre de nos discussions. Notre présentation sera faite en deux parties. La première sera dédiée au bloc du savoir du champ additif à l'école primaire et la deuxième au bloc du savoir-faire.

Nous commençons par le bloc du savoir parce que nous croyons qu'il permet au lecteur d'avoir une entrée révélatrice dans le curriculum existant au Brésil dans les années 90, où la première évaluation de manuels a eu lieu. Il dévoile sur quelles approches d'enseignement l'étude des mathématiques était basée à cette époque dans cette société. Cela permettra de mieux comprendre aussi certains aspects du bloc du savoir-faire.

Cette distinction en deux blocs est plutôt fonctionnelle : nous traitons chaque bloc de façon différente du point de vue méthodologique. Cela ne nous empêchera pas d'interroger les quatre éléments praxéologiques chaque fois que cela s'avère nécessaire.

L'analyse sera réalisée en cinq études de cas : 1) la théorie des ensembles ; 2) les propriétés de l'opération d'addition ; 3) l'algébrisation des calculs à trous ; 4) les tâches contextualisées ; et 5) les techniques des algorithmes posés. Les deux premières seront traitées dans le bloc du savoir et les trois autres dans le bloc du savoir-faire.

Avant de passer à ces études de cas, nous précisons quelques aspects historiques sur les conditions curriculaires du contexte étudié.

Un Peu D'histoire Pour Mieux Comprendre Certains Observables

Dans nos premiers contacts avec les données empiriques, un point particulier a attiré notre attention. La première évaluation de I$_{\text{PNLD}}$ dénonce la répétition des discours répandus par la Réforme des Mathématiques Modernes dans les manuels brésiliens utilisées au début des années 90. Rappelons : cette réforme a eu lieu dans le monde au cours des années 60. Le langage, le formalisme et la théorie des ensembles ont fait l'objet des principales critiques. Comme I$_{\text{PNLD}}$ le souligne alors fortement, les centres de recherches avaient constaté depuis plus de 15 ans les échecs de l'exagération de ce mouvement.

De plus la réforme des mathématiques modernes apparaît juste avant le coup d'état qui a donné lieu en 1964 à la dictature militaire brésilienne qui a duré jusqu'en 1985. Le Brésil a alors souffert d'une obscurité de réflexion et de critiques à propos de l'enseignement des Mathématiques dans les années 70 (Fiorentini, 1994), période où la réforme se montrait déjà en faillite.

> A notre avis, deux facteurs déterminaient cette réalité : la répression exercée par le régime militaire et, surtout, l'influence de la Pédagogie Techniciste, qui était hégémonique à cette époque. (Fiorentini, 1994, pp. 285-286, traduction propre) [1]

Dans la période 1983 - 1990, fin du régime militaire, Fiorentini (1994) identifie la création d'une communauté nationale de chercheurs en éducation mathématique. Après les années 90, le même auteur montre l'émergence de cette communauté scientifique, favorisée par le retour au Brésil de plusieurs chercheurs formés aux USA, France, Angleterre et Allemagne.

Nous ajoutons que la période 1985 - 1996 a été dédiée à la recherche d'un nouveau système d'éducation brésilien (Romão, 2008), période où le Ministère de l'Éducation a mis en place la politique « Éducation pour tout le monde : chemins pour les changements » (Filgueiras, 2011). Donc, c'est au moment de la re-démocratisation du pays que les discussions sur la qualité des manuels deviennent un point de débat et que le système d'évaluation dirigé par I$_{\text{PNLD}}$ apparaît comme un besoin.

Selon Valente (2009), les manuels ont été des véhicules importants pour la diffusion des principes de la réforme des mathématiques modernes. C'est ce qui explique, face au contexte, le *retard* des manuels du début des années 90 en comparaison aux tendances curriculaires mondiales.

Cet exemple illustre bien la force de l'influence de la société sur les niveaux plus bas de codétermination. La société brésilienne, ainsi constituée, ne permettait pas de changements au niveau de la pédagogie et de la discipline mathématiques, alors qu'une évolution était revendiquée au niveau international, c'est-à-dire, au niveau de la civilisation.

1. Dois fatores, a nosso ver, foram determinantes dessa realidade : a repressão exercida pelo Regime Militar e, sobretudo, a influência da Pedagogia Tecnicista que era hegemônica nesse período. (Fiorentini, 1994, pp. 285-286)

Civilisation

$\downarrow\uparrow$

Société

$\downarrow\uparrow$

École

$\downarrow\uparrow$

Pédagogie

$\downarrow\uparrow$

Les Mathématiques

Figure 4.1 – Niveaux de codétermination

Rappelons que cette réforme a conduit à une conception particulière des mathématiques et de son étude, bien décrite par Chevallard (1980) :

> L'étude des structures, c'est-à-dire le déroulement des théories axiomatiques correspondantes, sera présentée tendanciellement comme le tout de l'activité mathématique. Apprendre (sinon faire) des mathématiques, à propos d'une structure, ce sera apprendre la langue de la structure. Ainsi se dépose la vulgate des « mathématiques modernes », que les pesanteurs idéologiques aideront à accréditer. [...]
> Si les mathématiques consistent en l'étude des structures, si le moyen approprié à cette étude est la méthode axiomatique, si la théorie axiomatique (qui, donc, en réalise l'étude) est une langue (et une langue bien faite), alors l'enseignement des mathématiques sera l'enseignement de ces différentes langues bien faites qui nous font connaître groupes, ordres, anneaux et corps. L'imagerie, qui se fournit au rayon du langage, précipite en elle toute une logique nullement évidente - en fait erronée - de l'apprentissage : cette langue que serait la mathématique, on l'apprendra à simplement l'entendre ; comme on retient une chanson, on l'apprendra en l'écoutant se dire. Son enseignement aura donc pour seul et suffisant moyen une diction impeccable de cette langue impeccable. C'est le thème de la rigueur enfin réalisée : les mathématiques modernes sont une Pentecôte de la rigueur, perfection formelle indépassable enfin advenue. Tout cela compose, côté enseignement, un tableau qui se passe de trop longue description : l'enseignement moderne des mathématiques s'organise comme spectacle où est donné à voir - à entendre - la grande parade mathématique. [...] Mathématique, science étrange, qu'on montre, mais qui ne se pratique pas ! (Chevallard, 1980, pp. 12-13)

En 1997, juste après la première évaluation de manuels (1994), sort le document officiel « Paramètres Curriculaires Nationaux - PCN » pour l'école primaire au Brésil. Un document du ministère de l'Éducation qui est devenue une référence pour les discussions curriculaires et même pour les productions des manuels par I_{M}.

Ces nouveaux paramètres curriculaires, en effet, plus qu'un document, révèlent le nouvel esprit d'une nouvelle noosphère en émergence. Il fallait, alors, produire des manuels compatibles avec ce changement, mission attribuée à $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Dans ce document officiel, figure un texte intitulé « Brève analyse de la trajectoire des réformes et du cadre actuel de l'enseignement des mathématiques ». Quelques extraits de ce texte font référence à la réforme des mathématiques modernes, comme le montre l'extrait ci-dessous :

> En rapprochant les mathématiques scolaires des mathématiques pures, en centrant l'enseignement sur les structures et en utilisant un langage unificateur, la réforme n'a pas permis de prendre en compte un point fondamental qui deviendrait son plus gros problème : ce qui était proposé était hors de la portée des élèves, en particulier ceux des premières années du primaire. L'enseignement s'intéressait trop aux abstractions au sein de la mathématique, davantage axée sur la théorie que sur la pratique. Le langage de la théorie des ensembles, par exemple, a été introduit avec une importance telle que l'apprentissage des symboles et une terminologie sans fin ont compromis l'enseignement du calcul, de la géométrie et de la mesure. Au Brésil, les mathématiques modernes étaient principalement véhiculées par les manuels et ont beaucoup influencé l'étude des mathématiques. (Brasil, 1997, p.20, traduction propre) [2]

Dans ce même texte, sont annoncées les nouvelles tendances curriculaires présentes au niveau international.

> En 1980, le National Council of Teachers of Mathematics - NCTM - des États-Unis a formulé des recommandations concernant l'enseignement des mathématiques dans le document intitulé « Programme pour l'action ». Il a mis en exergue la résolution de problèmes au centre de l'enseignement des mathématiques dans les années 80. La compréhension de la pertinence des aspects sociaux, anthropologiques et linguistiques dans l'apprentissage des mathématiques a également donné une nouvelle orientation aux discussions sur les programmes. Ces idées ont influencé les réformes qui ont eu lieu dans le monde entier depuis lors. Les propositions faites au cours de la période 1980-1995 dans différents pays présentent des points de convergence, tels que :
>
> • Orienter l'école vers l'acquisition des compétences de base nécessaires au citoyen et pas seulement pour la préparation d'études ultérieures ;
>
> • L'importance de faire jouer un rôle actif aux élèves dans le développement de leurs connaissances ;
>
> • L'accent mis sur la résolution de problèmes, l'exploration des mathématiques à partir des problèmes rencontrés dans la vie quotidienne et rencontrés dans les différentes disciplines ;
>
> • L'importance de travailler avec un large éventail de contenus, y compris depuis l'école primaire des statistiques, des probabilités et des éléments combinatoires pour répondre à la demande sociale qui indique la nécessité de traiter ces problèmes ;
>
> • Il faut inciter les étudiants à comprendre l'importance de l'utilisation de la technologie et surveiller son renouvèlement en cours. (Brasil, 1997, pp. 20-21, traduction propre) [3]

2. « Ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a reforma deixou de considerar um ponto básico que viria se tornar seu maior problema : o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. No Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada principalmente pelos livros didáticos e teve grande influência. » (Brasil, 1997, p.20)

3. « Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM -, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação" . Nele destacava-se a resolução de problemas como foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, lingüísticos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas idéias influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em

Les discours de I_{PNLD} sont nourris et raisonnés par ces principes. L'émergence de cette institution a provoqué des changements dans les manuels, mais ces changements ne sont pas arrivés de façon spontanée en consonance à ce qui se passait dans le reste du monde, comme nous le montrerons par la suite dans nos analyses.

diferentes países, apresentam pontos de convergência, como, por exemplo :
• direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores ;
• importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento ;
• ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas ;
• importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos,incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos ;
• necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso da tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação. » (Brasil, 1997, pp. 20-21)

$$[\ \theta\ ,\ \Theta\ ]$$

4.1 Le Cas De La Théorie Des Ensembles

> Bien que les textes abandonnent déjà les exagérations sur la théorie des ensembles depuis quelques années, beaucoup d'entre eux portent encore un accent inutile sur ce sujet. En vérité, à l'école primaire, son langage est totalement inutile. L'abstraction de concepts tels que celui de l'ensemble vide ne rend pas cette langue appropriée à la maturité des élèves. D'autre part, l'utilisation de concepts plus simples tels que l'union d'ensembles n'a pas d'utilité essentielle. C'est seulement à la fin du XIXe siècle que l'homme a établi explicitement le lien entre le processus de comptage et la théorie des ensembles. (Brasil, 1994, p. 58, traduction propre) [4]

L'évaluation de 1994 a essayé de finir définitivement avec les legs de la réforme des mathématiques modernes dans les manuels brésiliens. A cette époque, la théorie des ensembles était un héritage encore solide dans la plupart des manuels : I_{PNLD} évalue 16 collections de manuels dédiées à l'école primaire, les plus utilisées dans le pays à l'époque alors, parmi ces 16 collections 13 ont reçu de fortes critiques sur ce point.

Dans un premier temps, les jugements de I_{PNLD} sur les manuels nous apprennent que, encore dans la première moitié des années 90, le rapport à la théorie des ensembles à l'école primaire au Brésil est non-vide. Ces jugements décrivent l'état actuel du curriculum, et conduisent à envisager des changements importants. Ces changements peuvent être résumés, pour le moment, par la proscription suivante : *l'objet théorie des ensembles ne doit plus vivre à l'école primaire*. Cela est explicitement déclaré dans une liste de recommandations de I_{PNLD} à I_M. Par exemple :

> L'élimination pure et simple de la partie concernant la théorie des ensembles et la distinction entre nombre et les représentants des nombres. L'introduction de toute la terminologie et les symbolismes de la théorie des ensembles dans les quatre premières années de scolarité est incompatibles avec les objectifs de la formation initiale et de base de l'élève tant en ce qui concerne l'acquisition de l'information, qu'en ce qui concerne le développement des compétences et des attitudes relatives à l'apprentissage des mathématiques.
> Surtout dans les manuels de la première année, la présentation des notions ensemblistes visait l'introduction des notions de nombre naturel et d'addition. Cette approche valorise le formalisme au détriment de l'expérience de l'élève. Il présente des situations qui, par leurs aspects formels, finissent par devenir un contenu en soi, reléguant à un second plan les concepts visés et obscurcissant leur signification. (Brasil, 1994, p. 63, traduction propre) [5]

4. « Embora os textos já estejam abandonando os exageros sobre a teoria dos conjuntos existentes há alguns anos, muitos deles ainda apresentam uma ênfase inútil sobre este assunto. Em verdade, no primeiro grau, sua linguagem é totalmente dispensável. A abstração de conceitos como o de conjunto vazio não torna esta linguagem apropriada à maturidade dos alunos. Por outro lado, o emprego de conceitos mais simples, como o de união de conjuntos não tem nenhuma utilidade essencial. Somente no fim do século XIX é que o homem estabeleceu explicitamente a conexão entre o processo de contagem e a teoria dos conjuntos. » (Brasil, 1994, p. 58)

5. « A eliminação pura e simples da parte relativa à teoria dos conjuntos et à distinção entre número e numeral. A introdução de toda a terminologia e simbologia da teoria dos conjuntos nos quatro primeiros anos de escolaridade é incompatível com os objetivos pretendidos na formação inicial e básica do aluno, no que se refere tanto à aquisição de informações como também ao desenvolvimento de habilidades e atitudes relativas à aprendizagem da Matemática.Especialmente nos livros da primeira

Remarquons que cette proscription concernant l'enseignement des mathématiques est particulièrement soutenue par des arguments du niveau de la *Pédagogie*, tels que : les objectifs de la formation des élèves à l'école primaire et la valorisation de l'expérience de l'enfant.

D'autres passages dans le document de 1994 viennent étayer ce jugement. Ils nous aident à mieux comprendre les arguments de l'évaluation. Prenons dans ce sens un autre extrait :

> Les manuels ont conservé le formalisme et le symbolisme du Mouvement des Mathématiques Modernes, sans l'assimiler, en conséquence se déroule une présentation néfaste des Mathématiques pour les enfants du premier degré. La présentation de diverses notions de la théorie des ensembles est caricaturale. [...]
> Cette présentation a déjà été largement critiquée aux niveaux international et national et son utilisation depuis 1976 à ICME - KARLSRUHE a été découragée.
> À notre avis, les notions de la théorie des ensembles sont inutiles pour les activités de classification d'objets. L'enfant compte et reconnaît les chiffres dès son arrivée à l'école. Les concepts de la théorie des ensembles, tels que l'inclusion, l'ensemble vide, l'unité et la correspondance biunivoque sont des tentatives de formalisation précoce, nuisibles à la construction des connaissances mathématiques à ce stade de maturité de l'enfant. (Brasil, 1994, p. 174, traduction propre) [6]

Ce discours, essentiellement négatif, est légitimé par une autre institution de la noosphère, que nous désignerons ici par I_{EM}, formée par la communauté scientifique « Éducation Mathématique ». A ce propos, nous signalons une certaine hiérarchisation des institutions, où nous voyons $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ profitant du statut de I_{EM} pour valider son jugement en direction à I_{M}. Un autre aspect à mettre en évidence dans ce passage concerne les différents niveaux de codétermination qui interviennent dans le discours, comme nous illustrons dans la Figure 4.2 :

série, a apresentação das noções de conjuntos visa à introdução dos conceitos de número natural e de adição. Esse enfoque valoriza o formalismo em detrimento da experiência do aluno. Apresenta situações que, por seus aparatos formais, acabam por tornar-se um conteúdo em si, relegando a um segundo plano os conceitos visados e obscurecendo seu significado. » (Brasil, 1994, p. 63)

6. « O texto reteve o formalismo e a simbologia do Movimento da Matemática Moderna, sem assimilá-lo, do que decorre uma apresentação nociva da Matemática para as crianças do primeiro grau. A apresentação de várias noções da teoria dos conjuntos é caricatural. [...] Essa apresentação já foi bastante criticada em nível internacional e nacional, tendo sido desaconselhada a sua utilização desde 1976 no ICME - KARLSRUHE. Em nossa opinião, as noções da teoria de conjuntos são desnecessárias para atividades de classificação de objetos. A criança já conta e reconhece números ao chegar à escola. Os conceitos da teoria dos conjuntos, tais como inclusão, conjunto vazio, unitário, pertinência e correspondência um a um, são tentativas de formalização precoce, nocivas à construção do conhecimento matemático neste estágio de maturidade da criança. » (Brasil, 1994, p. 174)

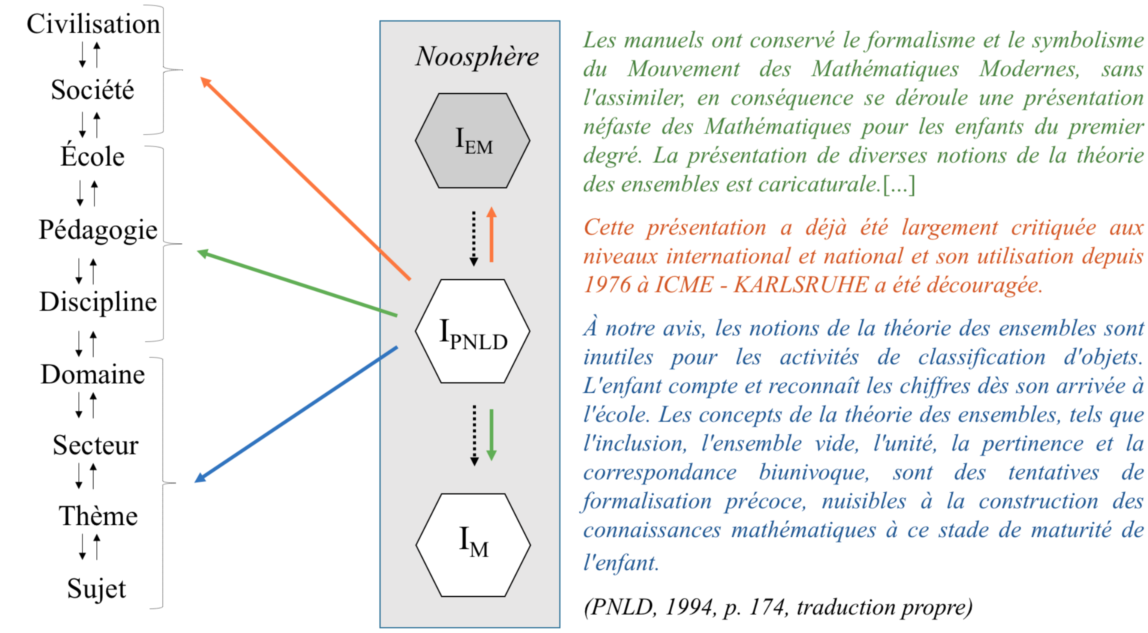


Figure 4.2 – Les niveaux de codétermination et les discours de PNLD

Les erreurs conceptuelles retrouvées dans les manuels nourrissent également cette évaluation négative. A propos de ces erreurs, $\mathrm{I_{PNLD}}$ fait une référence directe au rapport au savoir des auteurs des manuels.

> [. . .] les auteurs confondent le concept d'ensemble vide avec l'idée « d'avoir », « pris tout » et « est devenu vide », qui est représenté par une ligne fermée sans éléments à l'intérieur.
> Ces exemples prouvent que les auteurs ne savent pas que l'ensemble vide est défini par une propriété considérée sur un univers.
> De plus, les auteurs ne connaissent pas l'unicité de l'ensemble vide quand ils disent : « [. . .] tout ensemble vide est un ensemble fini. » (Brasil, 1994, p. 162, traduction propre) [7]

Nous voyons que le document de 1994 spécifie clairement ce que $\mathrm{I_M}$ devrait faire à l'époque : supprimer des manuels tout ce qui concerne la théorie des ensembles.

L'abandon de cette théorie génère, cependant, des perturbations aux niveaux plus bas de codétermination, un effet en cascade sur les praxéologies régionales jusqu'aux praxéologies ponctuelles. Les praxéologies possiblement affectées seront, parmi d'autres, celles liées au champ additif. Et c'est à partir des praxéologies du champ additif que nous étudierons l'effet de cette nouvelle contrainte sur l'enseignement des mathématiques

7. « [...] os autores confundem o conceito de conjunto vazio com a ideia de "tinha", "tirou tudo" e "ficou vazio", o que representam utilizando uma linha fechada sem elementos no seu interior.Estas colocações comprovam que os autores não sabem que o conjunto vazio é definido por uma propriedade, tendo sido considerado um universo.Além disso, os autores desconhecem a unicidade do conjunto vazio quando afirmam : "[...] qualquer conjunto vazio é um conjunto finito".»(Brasil, 1994, p. 162)

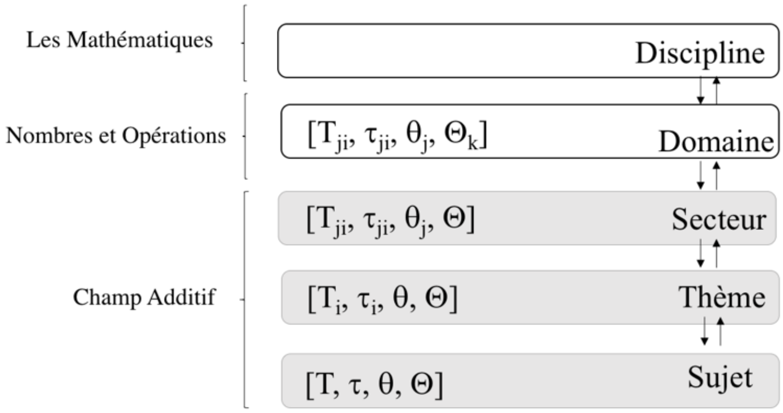


Figure 4.3 – Impact sur les niveaux de codétermination

Nous précisons alors que nous ne serons pas intéressés par l'avenir de l'étude de la théorie des ensembles, mais aux nouvelles conditions et contraintes de la vie des objets du champ additif si la proscription de I_{PNLD} est effectivement entendue.

Pour pouvoir comprendre comment cette théorie s'*infiltrait* dans l'étude du champ additif et pour mieux interpréter les possibles impacts de sa disparition, nous décidons d'analyser des manuels évalués à l'époque.

4.1.1 Analyse des manuels évalués en 1994

Après avoir rendu compte des jugements de I_{PNLD} sur la théorie des ensembles en 1994, nous passons à l'analyse des manuels évalués à ce moment-là. Nous centrerons notre attention sur la notion de nombre et sur les opérations d'addition et de soustraction.

4.1.1.1 La notion de nombre

Nous rappelons que les aspects cardinal et ordinal des nombres ont été considérés comme partie intégrante de l'environnement technologique des techniques d'addition et de soustraction. En ce qui concerne la notion de cardinal, nous avons constaté que certains manuels évalués en 1994 la définissaient en lien avec la notion d'ensemble. Nous avons sélectionné quelques extraits des manuels pour montrer cette filiation.

L'exemple ci-dessous illustre une pratique récurrente dans les manuels de l'époque. Pour répondre à la question « Combien de gâteaux a faits madame Coruja ? », nous avons comme réponse « n éléments / n unités ». Les mots « éléments » et « unités » relèvent de l'univers des mathématiques et non du contexte évoqué. Le premier fait partie du lexique de la théorie d'ensembles et le deuxième du système de numération décimal.

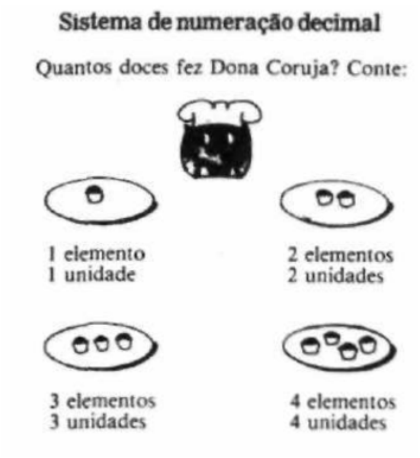


Figure 4.4 – (Brasil, 1994, p.200)

Un autre mot qui apparaît souvent dans le vocabulaire des énoncés des tâches est celui d'« ensemble ». Il est généralement accompagné par l'ostensif diagramme.

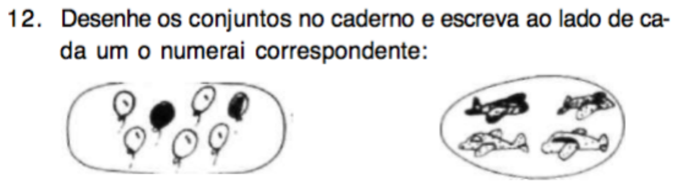


Figure 4.5 – (Brasil, 1994, p.191) [a]

a. Traduction : « Dessinez les *ensembles* dans votre cahier et écrivez à côté de chacun le chiffre correspondant »

En effet, l'usage de l'ostensif diagramme est très présent dans ces matériaux. Il est précisément défini dans un manuel comme « une ligne fermée représentant un ensemble ». Les notions d'ensemble et de dizaine sont aussi définies à l'aide d'un vocabulaire propre : « Ensemble : collection d'éléments » et « Dizaine : ensemble de dix éléments ou dix unités ».

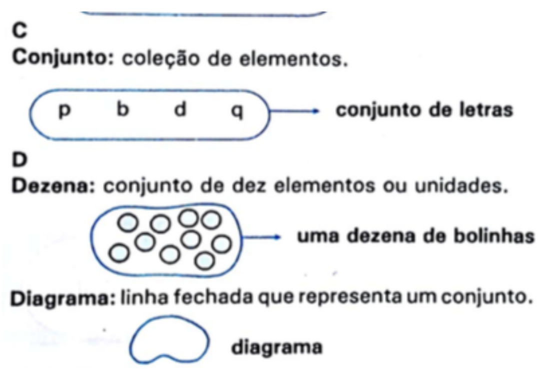


Figure 4.6 – (Passos et al., 1992a, v. 3, p. 176)

Nous signalons que l'usage de l'ostensif diagramme est questionné par la communauté de didactique et en particulier par Guy Brousseau dès l'année 1970.

> [. . .] dès sa création l'IREM a mis à l'étude l'emploi des diagrammes (de type Venn ou autres). Il en a signalé les difficultés et les dangers. Puis il les a proscrits comme modèles *explicites* de la logique et comme *objet* d'enseignement. Les inconvénients ne peuvent pas être écartés si ces diagrammes sont considérés comme l'objet d'un enseignement classique (avec description dénomination, explications etc.) car le modèle est faux et conduit alors à des phénomènes dénommés quelques années plus tard « glissement méta ». (Brousseau, 1970)

Plus de 20 ans après, cet ostensif occupe encore une place non négligeable dans les manuels brésiliens. C'est dans ce contexte que l'étude du nombre rencontre aussi la notion d'ensembles équipotents, d'où nous voyons l'émergence d'expressions comme « $2 = 2$ » et « $4 \neq 3$ ».

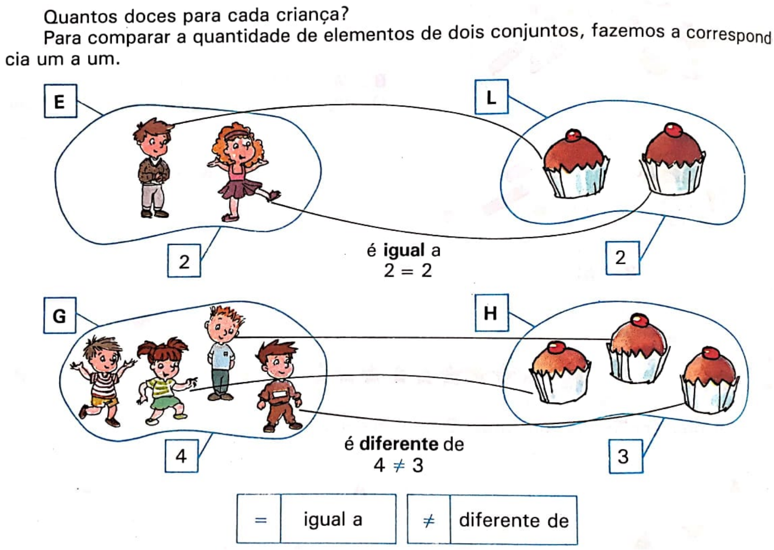


Figure 4.7 – (Passos et al., 1992a, v. 3, p. 20) [a]

a. Traduction : « Combien de bonbons pour chaque enfant ? Pour comparer le nombre d'éléments dans deux ensembles, nous faisons correspondre un par un. »

Cela est aussi une manière de *théoriser* la notion de correspondance biunivoque, nécessaire pour la compréhension du sens cardinal de nombre.

4.1.1.2 Les opérations d'addition et de soustraction

A la recherche d'extraits qui nous montrent l'impact de la théorie des ensembles sur les opérations d'addition et de soustraction, nous trouvons l'énoncé suivant : « a) Combien d'éléments sont manquants dans l'ensemble pour former une douzaine ? »

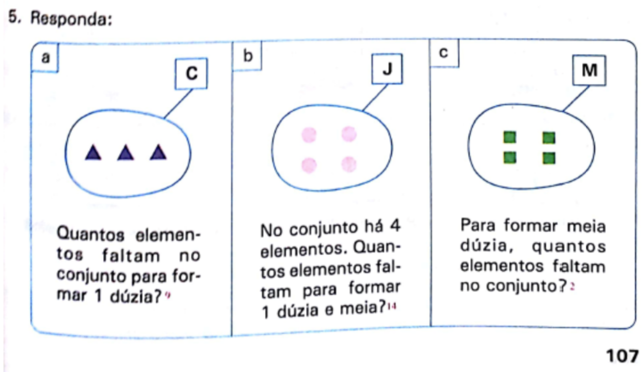


Figure 4.8 – (Passos et al., 1991, v. 2, p. 07)

Nous pensons que cette tâche n'est pas du même type que, par exemple, la tâche « Combien d'œufs manquent dans le panier pour compléter une douzaine ? ». Le contexte mathématique évoqué dans le manuel n'est pas neutre et relève d'un univers mathématique particulier.

Observons également l'usage des lettres majuscules traditionnellement utilisées pour nommer les ensembles, aussi présente dans la Figure 4.9 :

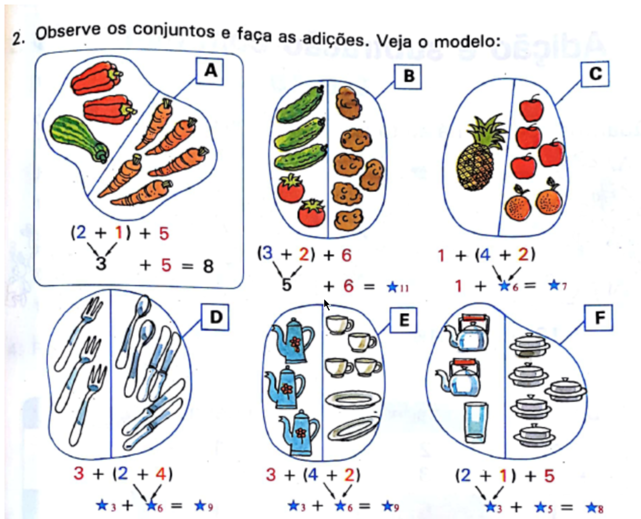


Figure 4.9 – (Passos et al., 1992b, v. 1, p. 63) [a]

a. Traduction : « Observez les ensembles et faites les additions ».

Remarquons dans ce dernier exemple que le parallèle établi entre les représentations d'ensembles et les opérations conduit à une incohérence. En prenant l'ensemble « A » de la figure, nous avons les poivrons et la courgette comme éléments dans un même sous-ensemble. D'où vient alors 2 + 1 ? L'intention didactique de donner lieu à l'existence des parenthèses provoque une confusion : si « n » est le cardinal d'un ensemble délimité par une courbe fermée, alors dans l'ensemble « A » nous avons finalement deux sous-ensembles qui ont comme cardinal 3 et 5. Il s'agit clairement d'un problème de représentation.

Dans certains manuels l'influence de la théorie des ensembles est tellement forte que nous trouvons formellement l'addition définie comme dans la Figure 4.10 :

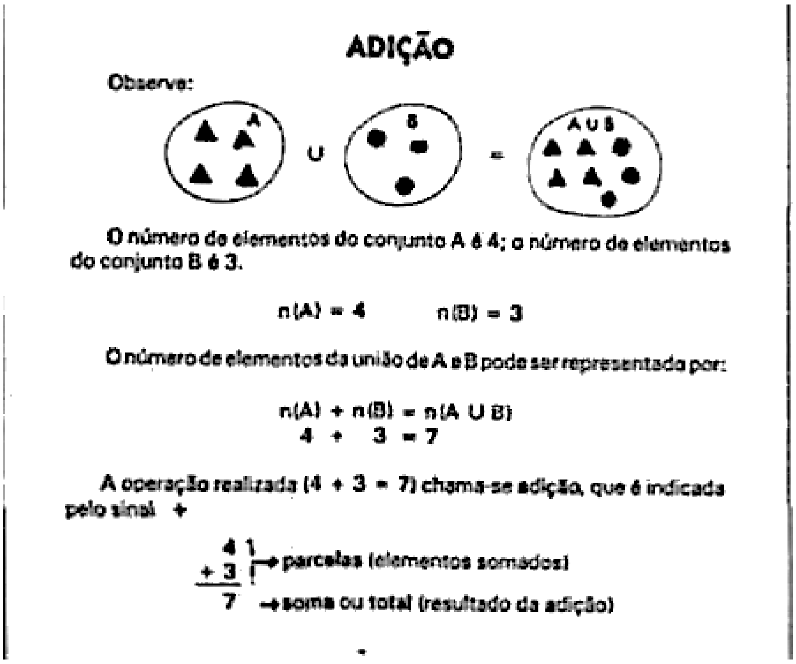
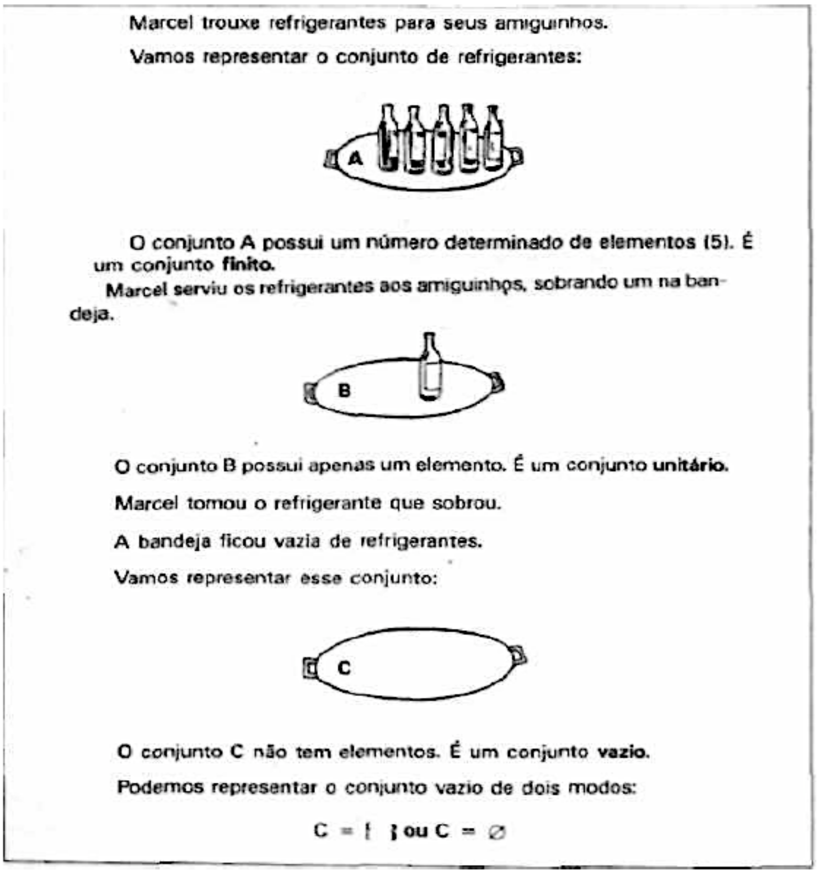


Figure 4.10 – (Brasil, 1994, p. 228) [a]

a. Traduction : Observez-vous : (référence au schéma composé par des diagrammes)
Le nombre d'éléments de l'ensemble A est 4 ; le nombre d'éléments de l'ensemble B est 3.
$n(A) = 4$ $\qquad n(B) = 3$
Le nombre d'éléments de l'ensemble union de A et B peut être représenté par :
$n(A) + n(B) = n(A \cup B)$
$4 + 3 = 7$
L'opération réalisée ($4 + 3 = 7$) s'appelle addition, qui est indiquée par le signe +.

Nous signalons, cependant, que rien n'est dit sur le fait que ces ensembles doivent être disjoints pour que la définition soit valable. Une sorte de contradiction entre la volonté de formaliser et la carence de rigueur est remarquable. Pour Rinaldi (2016, p. 42), « Présentés avec ce vocabulaire spécifique aux mathématiques, le nombre entier et les opérations semblent perdre toute matérialité et n'avoir aucun lien avec le réel. ». Un point de vue partagé par I_{PNLD}.

Pour l'opération de soustraction, nous n'avons pas trouvé d'extraits qui montrent la définition de cette opération à partir de l'idée d'ensemble complémentaire. En revanche, les notions d'ensemble fini, ensemble unitaire et ensemble vide sont fusionnées dans une situation typique de cette opération (voir Figure 4.11).



Marcel trouxe refrigerantes para seus amiguinhos.

Vamos representar o conjunto de refrigerantes:

A

O conjunto A possui um número determinado de elementos (5). É um conjunto **finito**.

Marcel serviu os refrigerantes aos amiguinhos, sobrando um na bandeja.

B

O conjunto B possui apenas um elemento. É um conjunto **unitário**.

Marcel tomou o refrigerante que sobrou.

A bandeja ficou vazia de refrigerantes.

Vamos representar esse conjunto:

C

O conjunto C não tem elementos. É um conjunto **vazio**.

Podemos representar o conjunto vazio de dois modos:

C = { } ou C = ∅

Figure 4.11 – (Brasil, 1994, p. 224) [a]

a. Traduction :
Marcel a apporté du soda à ses amis.
Allons-nous représenter l'ensemble de sodas :
(dessin)
L'ensemble A a un nombre déterminé d'éléments (5). Il est un ensemble **fini**.
Marcel a servi les sodas à ses amis en restant un sur le plateau.
(dessin)
L'ensemble B a juste un élément. Il est un ensemble **unitaire**.
Marcel a bu le soda qui est resté.
Le plateau est devenu vide de soda.
Allons-nous représenter cet ensemble :
(dessin)
L'ensemble C n'a pas d'éléments. Il est un ensemble **vide**.
Nous pouvons représenter l'ensemble vide de deux manières :
C = { } ou C = ∅

Un autre aspect à signaler sur la rigueur est que la nature des éléments d'un ensemble est toujours considérée de façon intuitive : une fois représenté un élément, il est considéré nécessairement différent des autres, car implicitement nous sommes dans le monde sensible. Or, ni les images et ni les contextes n'aident à mettre en évidence cet aspect, comme on le voit dans deux extraits donnés en Figure 4.12.

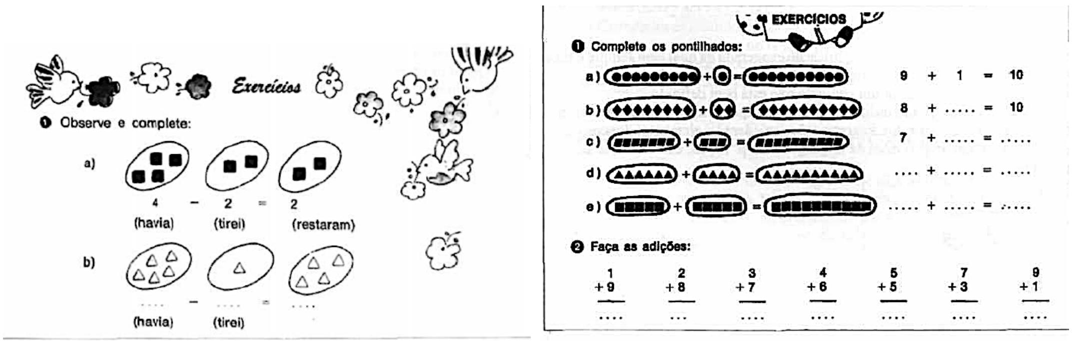


Figure 4.12 – (Brasil, 1994, p. 205)

Si nous avons un ensemble qui ne contient que des éléments congruents, cet ensemble est unitaire, ce qui révèle un problème dans la plupart des cas.

Suite à tous ces exemples, nous pensons que le besoin d'entourer avec une ligne fermée les figures n'est expliqué que par un geste didactique abusif qui fait du diagramme un *patrimoine des Mathématiques* à être, inévitablement, mis en exhibition.

Pour finir cette présentation, nous avons décidé de regarder une de rares collections de manuels qui n'a pas reçu de critiques de Ipnld sur la théorie des ensembles en 1994. Ce que nous constatons est qu'effectivement cette théorie était absente de cette collection de manuels, à l'exception de très rares passages, comme le montre notre dernier exemple, Figure 4.13.

Figure 4.13 – (Garcia et Carneiro Soares, 1989a, v. 1, p. 49)

Le schéma des trois ensembles, dont un est l'union des deux autres, apporte une dimension technologique pour le calcul « 2 + 1 = 3 ». Mais, par manque de l'univers de la théorie des ensembles, cette représentation dans le manuel peut passer inaperçue. Elle amène à penser cependant que cette théorie a déjà existé dans ce manuel auparavant.

Dans le prochain paragraphe, nous proposons une réinterprétation de la proscription par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ de la théorie des ensembles en considérant les effets possibles sur le champ additif. Cela est rendu possible grâce à ce que nous avons observé dans ces manuels.

4.1.2 Réinterprétation de la proscription

Nous considérons que le *système de numération décimale* est la théorie qui soutient l'étude du champ additif à l'école primaire. En effet, les opérations arithmétiques se développent au fur et à mesure du développement du système de numération décimale. Cependant, comme nous l'avons vu, la *théorie des ensembles* apporte à cette étude quelques autres concepts. Ceci dit, nous distinguons ces deux théories :

$\Theta 1$: système de numération décimale

$\Theta 2$: théorie des ensembles

Un point important : à l'époque que $\Theta 2$ existait à l'école primaire, $\Theta 1$ y existait également. $\Theta 2$ n'a pas remplacée $\Theta 1$, ni le contraire. $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ a envisagé, en effet, un *dessèchement des excès* apportés par $\Theta 2$.

La question que nous nous posons, en considérant la demande de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, est : quels sont les effets sur les praxéologies régionales, locales et ponctuelles, concernant le champ additif, lorsque $\Theta 2$ doit être supprimée ? Autrement dit, quelles sont les praxéologies [$\mathrm{T}^{+/-}$, τ_{ji}, θ_{j}, $\Theta 2$] qui devront aussi disparaitre ?

4.1.2.1 Les technologies θ_{j} de $\Theta 2$

A l'aide de l'analyse faite des manuels évalués en 1994, nous avons identifié des *logos* θ_{j} dérivés de $\Theta 2$ qui participent de l'étude du champ additif. Nous les présentons dans le tableau ci-dessous. Cette liste n'est pas exhaustive et ces discours ne sont pas forcément présentés dans les manuels comme nous les avons décrits.

Tableau 4.1 – Logos de la théorie des ensembles dans le champ additif

Technologies générées par la théorie des ensembles dans le champ additif
$\theta_{2.1}$: Un ensemble est constitué d'éléments.
$\theta_{2.2}$: Un élément est tout *objet* qui constitue un ensemble.
$\theta_{2.3}$: Une ligne fermée représente un ensemble d'éléments différents qui s'appelle diagramme.
$\theta_{2.4}$: Tout ensemble fini a sa cardinalité qui est exprimée par un nombre entier positif.
$\theta_{2.5}$: Une dizaine est un ensemble avec dix éléments.
$\theta_{2.6}$: Soit A un ensemble, si card(A) = 1, A est un *ensemble unitaire.*
$\theta_{2.7}$: Soit A un ensemble, si card(A) = 0, A est un *ensemble vide.*
$\theta_{2.8}$: Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors card(A) + card(B) = card(A ∪ B).
$\theta_{2.9}$: Si on a une correspondance biunivoque entre tous les éléments de deux ensembles, alors ces ensembles ont la même cardinalité.

Supprimer Θ2 suppose donc que ces technologies n'aient plus de condition pour exister dans le champ additif. Comment cela affecte-t-il les techniques de calcul ?

4.1.2.2 Les techniques $\tau_{\mathbf{ji}}$

La réponse à la question que nous venons de poser nous révèle un phénomène intéressant.

L'analyse des manuels nous ont montré que les notions de la théorie des ensembles étaient présentes au début de l'étude du champ additif. Dans ce contexte, les techniques d'addition et de soustraction s'appuient spécialement sur le dénombrement d'ostensifs. Or, cette technique n'exige pas un logos basé sur les ensembles pour pouvoir exister.

Alors, malgré la présence de tout un univers de notions particulaires de Θ2, les techniques mobilisées pour l'addition et pour la soustraction ne dépendent pas, épistémologiquement, de Θ2 pour vivre. C'est dans ce sens que la théorie des ensembles amène *des excès* au champ additif.

La question alors se pose finalement pour les types de tâches : existe-t-il des vestiges de la théorie des ensembles observables dans les tâches ? L'existence d'une théorie nous amène-t-elle à poser des questions que nous ne ferions pas en son absence ?

4.1.2.3 Les sous-types de tâches $\mathbf{T}^{+/-}$

Les types de tâches du champ additif sont modélisés dans notre travail par des instanciations des variables du $GT^{+/-}$. Nous nous demandons alors quelles sont les valeurs de nos variables, définies dans notre modèle de référence, qui sont affectées plus sensiblement par la théorie des ensembles. Rappelons dans le tableau ci-dessous le générateur de type de tâches $GT^{+/-}$.

Tableau 4.2 – Générateur de type de tâches $GT^{+/-}$

<table>
<tr><th colspan="5">$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation modélisable par ou donnée sous la forme « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, V1, V2, V3, V4, V5]</th></tr>
<tr><td>V1 : Ostensifs</td><td>V2 : L'idée de la situation</td><td>V3 : L'information cachée (?)</td><td>V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td>V5 : L'existence de retenue</td></tr>
</table>

Pour répondre à cette question, notons d'abord que les variables V3, V4 et V5 se sont *immunes* à la théorie des ensembles : c'est dire que l'existence ou non de $\Theta 2$ n'intervient pas sur ces variables puisque leurs valeurs ne changent pas en fonction de $\Theta 2$. Ce qui n'est pas le cas lorsque nous analysons de plus près les variables V1 et V2, et plus spécialement certaines de leurs valeurs :

Tableau 4.3 – Valeurs de V1 et V2 affectées par la théorie des ensembles

<table>
<tr><td rowspan="2">V1 : Ostensifs</td><td colspan="2">V1a : Langage naturel écrit</td></tr>
<tr><td colspan="2">V1b : Pictographique</td></tr>
<tr><td>V2 : L'idée de la situation</td><td>V2.2 : Nature du contexte</td><td>V2.2.a : Mathématiques</td></tr>
</table>

Le fait est que la théorie des ensembles apporte des conditions pour que certains ostensifs et certaines idées soient présents, de façon naturalisée, au niveau des tâches. Pour attraper cet aspect, nous devons cependant prendre en compte des niveaux encore plus bas des valeurs définies dans notre modèle de référence, ce qui permet de l'enrichir.

Au niveau de V1a, un vocabulaire loin d'être ordinaire apparaît en lien avec la théorie des ensembles. C'est le cas des mots « éléments », « vide », « fini », « ensemble »... Dans le même sens, nous avons observé la présence remarquable de l'ostensif diagramme, qui nous l'associons à l'intérieur de V1b.

Dans des niveaux plus bas de V2.2.a, les ensembles peuvent constituer un contexte pour les tâches du champ additif. Ce contexte n'a pas d'autre intérêt didactique que de faire vivre $\Theta 2$.

La proscription de I_{PNLD} prévoit alors la disparition des valeurs mises en évidence dans le tableau ci-dessous :

Tableau 4.4 – Introduction de nouvelles valeurs dans V1 et V2

<table>
<tr><td rowspan="2">V1 : Ostensifs</td><td>V1.1 Langage naturel écrit</td><td colspan="2">V1.1a Vocabulaire de la théorie des ensembles</td></tr>
<tr><td>V1.2 Pictographique</td><td colspan="2">V1.2a Diagramme</td></tr>
<tr><td>V2 : L'idée de la situation</td><td>V2.2 : Nature du contexte</td><td>V2.2.1 : Mathématique</td><td>V2.2.1 : Théorie des ensembles</td></tr>
</table>

Pour avancer dans notre étude, nous allons reprendre les documents de I_{PNLD} afin d'analyser l'évolution de son discours tout au long des évaluations. Cela pourra nous suggérer des changements ou résistances de I_M sur la nouvelle contrainte établie en 1994.

4.1.3 Dix ans de persistance et la fin de la théorie des ensembles dans les manuels brésiliens

La liberté institutionnelle prévaut parfois sur l'assujettissement. Après l'évaluation de 1994, I_{PNLD} a continué à insister sur le besoin de changements curriculaires sur la théorie des ensembles. Le message suivant est présenté dans les évaluations de 1996 et de 1998, reprise des discours déjà présents dans la première évaluation :

> Le manuel de mathématiques a eu une grande influence sur la détermination des connaissances scolaires valorisées culturellement. (...) les changements introduits dans des éditions successives des manuels ont maintenu un décalage par rapport aux changements préconisés par les nouvelles propositions curriculaires et par les recherches et études concernant l'enseignement des mathématiques. Bien que certains manuels incorporent des recommandations provenant de ces sources, de nombreux autres manuels présentent des foyers de résistance spécifiques, liés aux points suivants :
>
> - Les éléments de la théorie des ensembles servent de base à l'introduction de concepts tels que le nombre cardinal, l'addition de nombres naturels, de multiples communs et autres. Au niveau scolaire considéré, l'utilisation de ces éléments n'a pas de fonction essentielle pour clarifier les significations de tels concepts et, au contraire, les rend plus obscurs, avec un formalisme précoce et inutile. Les abstractions telles que l'ensemble vide et l'ensemble infini sont inadéquates pour l'enseignement des premières années. Les exposés fondés sur la théorie des ensembles ont été vivement critiqués, tant au niveau national qu'international, et ont été découragés, par exemple, par la Conférence internationale sur l'éducation mathématique de 1976 en Allemagne. (Brasil, 1996, p.65, traduction propre) (Brasil, 1998a, p.173, traduction propre) [8]

Les critiques et les éloges présents dans les documents de I_{PNLD} révèlent d'une part la résistance à l'abandon de la théorie des ensembles et d'une autre part ceux qui ont pu se détacher de cette tendance, comme l'illustre l'évaluation des deux manuels suivants :

8. « O livro didático de matemática tem tido grande influência na determinação do saber escolar culturalmente valorizado. [...] as mudanças introduzidas em sucessivas edições têm mantido um descompasso em relação às mudanças preconizadas pelas novas propostas curriculares e pelas pesquisas e estudos concernentes ao ensino da matemática. Embora alguns textos incorporem recomendações dessas fontes, muitos livros didáticos apresentam focos de resistência específicos, relativos aos seguintes pontos críticos :- Elementos da teoria dos conjuntos são tomados como base para a introdução de conceitos tais como o de número cardinal, o de adição de números naturais, o de múltiplos comuns e outros. No nível de ensino considerado, o recurso a esses elementos não tem uma função essencial para esclarecer os significados de tais conceitos e, ao contrário, torna-os ainda mais obscuros, com um formalismo precoce e desnecessário. Abstrações como o conjunto vazio e o conjunto infinito são inadequadas para o ensino de 1º Grau. Apresentações baseadas na teoria dos conjuntos foram exaustivamente criticadas, tanto no âmbito nacional quanto no internacional, tendo sido desaconselhadas, por exemplo, pela International Conference on Mathematical Education de 1976, realizada na Alemanha.» (Brasil, 1996, p.65) (Brasil, 1998a, p.173)

> [...] l'œuvre révèle l'incorporation, avec un certain succès, de nouvelles connaissances du domaine de l'enseignement des mathématiques. Cependant, les auteurs n'arrivent pas à échapper de la tradition consistant à proposer la théorie des ensembles en tant que contenu spécifique, avec les problèmes de symbolisme habituels inappropriés pour l'âge de l'élève et qui ne correspondent pas à leur utilisation en mathématiques. (Brasil, 1996, p.78, traduction propre) [9]

> C'est louable surtout l'innovation de ne pas travailler les nombres et les opérations à partir des ensembles, rompant ainsi avec une tradition déjà jugée insuffisante pour les premières années, mais envisagée avec insistance dans de nombreux manuels. (Brasil, 1998a, p.194, traduction propre) [10]

En 2000 nous trouvons, bien que plus rarement, des critiques sur la présence gênante de la théorie des ensembles dans les manuels. Voici des exemples :

> Un exemple d'induction à l'erreur est de confondre le concept d'ensemble avec sa représentation au moyen de diagrammes constitués de lignes fermées qui contournent les éléments de l'ensemble. Ainsi, on voit des exercices comme « dessiner une ligne fermée et former un ensemble ». (Brasil, 2000, p. 286, traduction propre) [11]

> Bien que le traitement donné aux ensembles soit correct, avec de bonnes illustrations, il est superflu car il est non articulé au reste du manuel et montre des excès dans l'introduction des symboles de la théorie des ensembles et à l'exigence de leur usage. (Brasil, 2000, p. 372, traduction propre) [12]

> L'introduction d'un vocabulaire spécifique n'est pas appropriée à ce niveau, en particulier en ce qui concerne la théorie des ensembles et la géométrie. (Brasil, 2000, p. 411, traduction propre) [13]

Il semble alors qu'il y ait encore dans l'année 2000 un usage abusif de l'ostensif *diagramme* et d'un vocabulaire propre par certains auteurs des manuels.

La dernière trace que nous avons trouvée sur la théorie des ensembles dans les documents produits par IPNLD a été dans l'évaluation de 2004. Parmi l'ensemble de 31 collections de manuels approuvées à ce moment-là, seulement une a reçu une critique à ce sujet :

9. « [. . .] a obra revela a incorporação, com algum sucesso, de novos conhecimentos da área de Educação Matemática. No entanto, os autores não conseguem fugir da tradição já tantas vezes criticada de tratar a teoria dos conjuntos como um conteúdo específico, com os usuais problemas de simbologia inadequada à faixa etária do aluno e não-coerente com seu uso na Matemática. » (Brasil, 1996, p.78)

10. « É louvável, sobretudo, a inovação de não trabalhar números e operações a partir de conjuntos, rompendo assim com uma tradição já avaliada como inadequada para as séries iniciais, mas insistentemente contemplada em muitos livros didáticos. » (Brasil, 1998a, p.194)

11. « Um exemplo de indução ao erro é confundir o conceito de conjunto com sua representação por meio de diagramas constituídos de linhas fechadas envolvendo os elementos do conjunto. Assim, aparecem exercícios do tipo "desenhe uma linha fechada e forme um conjunto" . » (Brasil, 2000, p. 286)

12. « Embora o tratamento dado a conjuntos seja correto, com boas ilustrações, ele se mostra supérfluo, pois está desarticulado do restante do livro e evidencia excessos na introdução e cobrança da simbologia da Teoria dos Conjuntos. » (Brasil, 2000, p. 372)

13. « [...] a introdução do vocabulário específico não é adequado à série, principalmente em relação à Teoria dos Conjuntos e Geometria. » (Brasil, 2000, p. 411)

> [...] il est donné beaucoup d'importance à l'approche de la langue des ensembles, un problème qui a été découragé à ce stade de l'apprentissage des mathématiques.(Brasil, 2002, p. 114, traduction propre) [14]

> Il est suggéré que l'enseignant complète le contenu de la géométrie, des grandeurs et mesures et du traitement de données pour assurer une formation mathématique plus large à l'élève. En revanche, cela devrait atténuer l'approche linguistique de la théorie des ensembles dans le manuel de la première année, sujet inapproprié pour les élèves de ce groupe d'âge. (Brasil, 2002, p. 115, traduction propre) [15]

Il est significatif de remarquer que dans cette évaluation de 2004 [16], I_{PNLD} présente une liste de problèmes à surmonter dans les manuels dans laquelle rien n'est mentionné sur la théorie des ensembles. L'absence de critiques laisse penser que ce point a été dépassé.

Il est important de dire que le rapport de I_{PNLD} sur l'enseignement de la théorie des ensembles n'a pas changé dans le temps. Le jugement négatif sur I_M s'estompe avec le temps en fonction du changement de I_M.

L'assujettissement de ces deux institutions semble alors impacter les contenus d'enseignement des mathématiques en ce qui concerne ce point en particulier. Pour étudier les effets de ce changement, nous avons décidé de regarder quelques manuels publiés après 2004. Nous présentons par la suite cette analyse.

4.1.4 Le champ additif dans les manuels et la disparition de la théorie des ensembles

En considérant les manuels de notre corpus publiés après 2004, et dans un premier temps centrant notre regard sur leurs tables de matières, le bilan est facile à faire : aucun chapitre n'est dédié à la théorie des ensembles. Mais, la question qui nous intéresse est un peu plus complexe que cela : qu'est-ce que la disparaissons de cette théorie a provoqué dans le champ additif ? Pour y répondre, les observables construits dans nos analyses précédentes sont fondamentaux :

14. « [...] é dado muito destaque à abordagem da linguagem dos conjuntos, assunto que tem sido desaconselhado nessa etapa da aprendizagem da Matemática. » (Brasil, 2002, p. 114)

15. « Sugere-se ao professor complementar os conteúdos de geometria, grandezas e medidas e tratamento da informação para assegurar uma formação matemática mais ampla do aluno. Em contrapartida, deve aliviar a abordagem da linguagem da teoria dos conjuntos no livro da 1ª série, tema inadequado para alunos dessa faixa etária. » (Brasil, 2002, p. 115)

16. Rappelons que l'année de référence de l'évaluation ne correspond pas nécessairement à l'année de publication du document de l'évaluation. Dans ce cas, l'évaluation dite de 2004 a été publiée en 2002.

Tableau 4.5 – Observables I

Technologies générées par la théorie des ensembles dans le champ additif
$\theta_{2.1}$: Un ensemble est constitué d'éléments.
$\theta_{2.2}$: Un élément est tout *objet* qui constitue un ensemble.
$\theta_{2.3}$: Une ligne fermée représente un ensemble d'éléments différents qui s'appelle diagramme.
$\theta_{2.4}$: Tout ensemble fini a sa cardinalité qui est exprimée par un nombre entier positif.
$\theta_{2.5}$: Une dizaine est un ensemble avec dix éléments.
$\theta_{2.6}$: Soit A un ensemble, si card(A) = 1, A est un *ensemble unitaire*.
$\theta_{2.7}$: Soit A un ensemble, si card(A) = 0, A est un *ensemble vide*.
$\theta_{2.8}$: Si A et B sont deux ensembles disjoints, alors $\text{card}(A) + \text{card}(B) = \text{card}(A \cup B)$.
$\theta_{2.9}$: Si on a une correspondance biunivoque entre tous les éléments de deux ensembles, alors ces ensembles ont la même cardinalité.

Tableau 4.6 – Observables II

<table>
<tr><td rowspan="2">V1 : Ostensifs</td><td>V1.1 : Langage naturel écrit</td><td colspan="2">V1.1.a : Vocabulaire de la théorie des ensembles</td></tr>
<tr><td>V1.2 : Pictographique</td><td colspan="2">V1.2.a : Diagramme</td></tr>
<tr><td>V2 : L'idée de la situation</td><td>V2.2 : Nature du contexte</td><td>V2.2.1 : Mathématique</td><td>V2.2.1 : Théorie des ensembles</td></tr>
</table>

De façon résumée, les technologies listées et les valeurs des variables V1.1.a, V1.2.a et V2.2.1 ont perdu leur raison d'être et n'ont plus de condition pour exister dans les nouveaux manuels, comme nous l'avons prévu. Dans ce sens, nous constatons dans un premier temps que le vocabulaire concernant la théorie des ensembles (ensemble, élément, union, vide, fini...), a été absolument minimisé. Cela ne signifie pas la disparition de ces mots évidement, mais leur usage, rare, est strictement lié à un lexique ordinaire.

Ces disparitions ne provoquent pas de manques pour l'étude du champ additif. Le nombre comme cardinal d'un ensemble, par exemple, trouve son sens dans l'idée de quantité d'objets d'une collection et la notion de correspondance biunivoque est toujours travaillée mais sans le formalisme des ensembles équipotents, comme l'illustre la Figure 4.14.

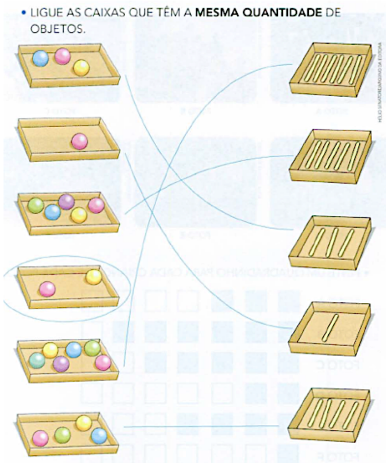


Figure 4.14 – (Dante, 2011a, v. 1, p. 31)

Ce qui est suffisant pour la maîtrise de certaines techniques de calcul, où ce logos est exploité intuitivement :

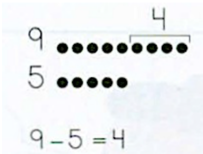


Figure 4.15 – (Dante, 2011a, p. 147, v.1)

Les lignes fermées, emblématiques et symboliques de la théorie des ensembles, sont toujours présentes dans les manuels, mais essentiellement comme outil didactique pour le regroupement d'objets, comme pour l'étude de l'aspect décimale des nombres. Cet ostensif a perdu sa valence sémiotique en tant qu'ensemble, comme nous l'avons vu auparavant. Son usage est, dans ce nouveau scénario, moins fréquent.

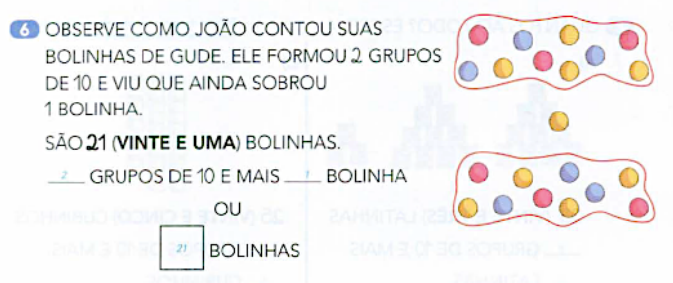
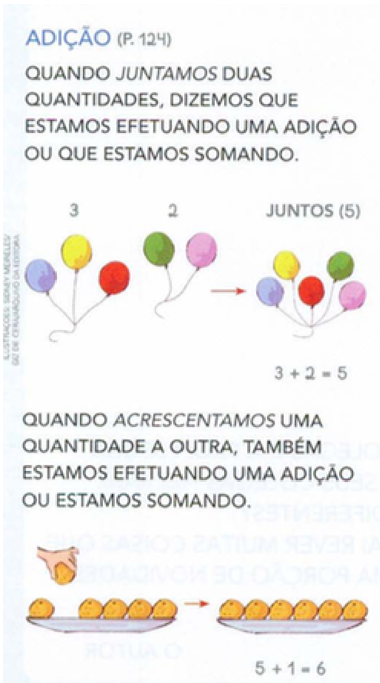


Figure 4.16 – (Dante, 2011a, v. 1, p. 175) [a]

a. Traduction : Remarquez comment John a compté ses billes. Il a formé 2 groupes de 10 et a vu qu'il restait encore 1 bille.
Il y a 21 (vingt et une) billes.
______ groupes de 10 et plus ______ bille
ou ______ billes.

Les définitions de l'addition et de la soustraction se sont naturellement éloignées de Θ2. Ces opérations sont alors comprises de façon étroite aux *sens* qui elles évoquent : réunions des collections, transformation d'un état initial à un état final et comparaisons de deux valeurs.



(a) (Dante, 2011a, v. 1, p. 218) [a]

a. Traduction : Addition : Lorsque nous rassemblons deux quantités, nous disons que nous faisons une addition ou nous calculons la somme. Lorsque nous ajoutons une quantité à une autre, nous sommes aussi en train de faire une addition ou calculer la somme.

(b) (Dante, 2011a, v. 1, p. 220) [a]

a. Traduction : Soustraction : opération qui : prend une quantité d'une autre ou compare deux quantités.

Dans ce nouveau contexte, la variable V2.3 de notre GT$^{+/-}$ assume, en quelque sorte, un rôle technologique pour les opérations. Il s'agit d'un résultat que nous allons approfondir dans une autre étude de cas.

Tableau 4.7 – Variable V2

V2 : *L'idée de la situation*	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison

Après ce tour du champ additif sans la présence de théorie des ensembles, nous concluons cette étude de cas avec quelques reprises et réflexions sur des points que nous jugeons comme importants.

4.1.5 Conclusion De L'etude De Cas Sur La Theorie Des Ensembles

La théorie des ensembles était une *vulgate* dans les manuels utilisés au début des années 90, c'est-à-dire une pratique commune de I_M, vulgarisée dans la plupart de ses produits. Cela a été objet de jugements de I_{PNLD} en 1994.

Ces jugements, spécialement de nature proscriptive, nous ont conduit à l'hypothèse que les manuels auraient changé sur cet aspect et nous a engagé dans cette étude de cas. Il nous manquait, cependant, des éléments plus précis pour comprendre comment le champ additif était affecté par l'existence de cette théorie. Le caractère assez général des discours de I_{PNLD} ne nous donnait pas les détails de l'état actuel du curriculum et pour cela une visite aux manuels de l'époque a été nécessaire.

Nous avons examiné des manuels de notre corpus, sans avoir fait une sélection *a priori*, afin de repérer des passages qui nous indiquaient la filiation entre la théorie des ensembles et le champ additif. Cela nous a apporté des éléments importants pour caractériser, sous la perspective praxéologique, les éléments susceptibles aux changements face à la proscription.

En connaissant mieux le contexte du curriculum de 1994, nous avons continué à examiner les documents de I_{PNLD}. Nous avons vu qu'au fur et à mesure que les évaluations avançaient, les jugements sur la théorie des ensembles étaient de moins en moins fréquents, jusqu'au moment que cet objet a disparu des évaluations (en 2004). Cela nous a amené à supposer que l'assujettissement de I_M à I_{PNLD} a provoqué des changements dans les manuels. Ce qui a été confirmé à la fin par une nouvelle visite aux manuels plus récents de notre corpus (après 2004). Ces changements ont mis en place, naturellement, d'autres *vulgates* sur l'enseignement des mathématiques, considérées pour le moment comme plus adéquates.

De façon résumée notre parcours d'analyse peut être schématisé de la façon suivante :

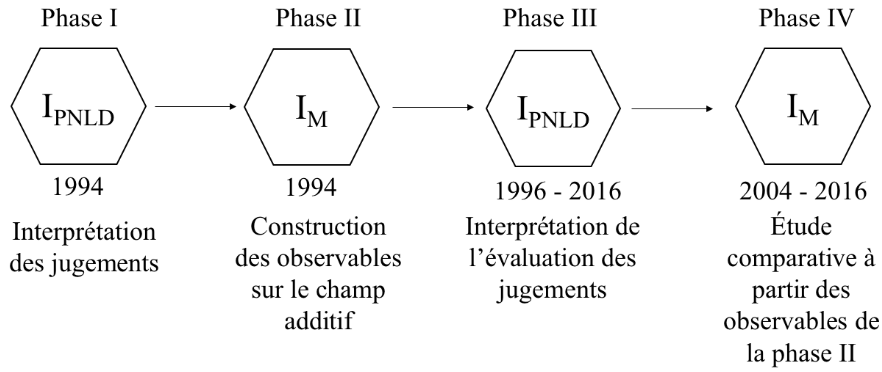


Figure 4.18 – Parcours d'étude I

Pour finir, nous soulignons que les changements dans le contenu des manuels ont été poussés par le système d'évaluation bien que d'autres institutions de la noosphère l'eussent déjà revendiqué avant, comme celle de la communauté de recherche en éducation mathématique, I_{EM}. Cela montre que les assujettissements sont motivés par des *gestes didactiques* (Chevallard, 2019), dans notre cas par un système d'approbation ou d'exclusion des manuels dans le marché, qui punit les *mauvaises instances*.

Nous passerons dans la suite à la deuxième étude de cas sur les propriétés d'addition.

4.2 Le Cas Des Propriétés De L'opération D'addition

L'évaluation de 1994 a été marquée aussi par une forte critique sur les propriétés d'addition.

> En outre, par rapport à l'approche du contenu, une importance inutile est accordée à ce niveau de scolarité aux propriétés structurelles des opérations : fermeture, commutativité, associativité, existence d'un élément neutre. (Brasil, 1994, p. 61, traduction propre) [17]

L'accent sur l'étude de ces propriétés [18] a été aussi associé par I_{PNLD} à l'appréciation du formalisme de la réforme des mathématiques modernes. Nous résumons les jugements faits en 1994 en trois points :

— *La précocité de la présentation des propriétés ;*

— *La valorisation inutile sur la nomenclature qui amène à l'étude un formalisme futile et inapproprié à la maturité des élèves ;*

— *La généralisation hâtée des propriétés à partir de peu d'exemples ;*

Ces trois points sont récurrents dans l'évaluation des manuels de l'époque. Ils décrivent, dans un premier temps, l'état actuel de l'étude des propriétés d'addition. Mais, dans un deuxième temps, cette description substantiellement négative insinue des proscriptions et des prescriptions sur l'avenir de cette étude.

Au contraire de la théorie des ensembles, I_{PNLD} n'a pas cherché à faire disparaître ces propriétés du curriculum, comme le montre l'extrait de l'évaluation ci-dessous.

> Les relations entre les propriétés des opérations et le système de numération décimale, ainsi que les relations entre différentes opérations, doivent être explorées. (Brasil, 2002, p. 13, traduction propre) [19]

Ce jugement concerne dans la sphère didactique sur le quand et le comment on devrait les étudier à l'école primaire. Dans ce sens, nous constatons que tout au long des évaluations (1994 - 2016), la raison d'être de cet environnement technologique du champ additif a été toujours un objet de jugement pour I_{PNLD}.

En 1996 et 1998, I_{PNLD} présente une liste de caractéristiques des manuels brésiliens qui sont contraires aux nouvelles tendances curriculaires dans le monde. L'intention est d'identifier les résis-

17. « Ainda na linha do enfoque dado ao conteúdo, verifica-se uma ênfase desnecessária, neste estágio, sobre as chamadas propriedades estruturais das operações : fechamento, comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro. » (Brasil, 1994, p. 61)

18. Soit a, b et c des nombres entiers positifs, alors on a les propriétés suivantes :Fermeture : comme a et b sont nombres entier positifs et si $a + b = d$, alors d est un nombre entier positif. Commutativité : si $a + b = c$, alors $b + a = c$ Élément neutre : $a + 0 = a$ Associativité : $(a + b) + c = a + (b + c)$

19. « As relações entre as propriedades das operações e o nosso sistema de numeração decimal, assim como as relações entre diferentes operações, devem ser exploradas. » (Brasil, 2002, p. 13)

tances aux changements de la part de I_M. Un des points de cette liste est justement la formalisation précoce des propriétés des opérations arithmétiques.

> Le manuel de mathématiques a eu une grande influence sur la détermination des connaissances scolaires valorisées culturellement. (...) les changements introduits dans des éditions successives des manuels ont maintenu un décalage par rapport aux changements préconisés par les nouvelles propositions curriculaires et par les recherches et études concernant l'enseignement des mathématiques. Bien que certains textes incorporent des recommandations provenant de ces sources, de nombreux manuels présentent des foyers de résistance spécifiques, liés aux points critiques suivants :
> [. . .]
> - Formalisation précoce des propriétés structurelles des opérations. (Brasil, 1996, p. 65, traduction propre) (Brasil, 1998a, p. 173, traduction propre) [20]

Dans les évaluations de 2004 et 2007 (publiées en 2002 et 2006), quand la théorie des ensembles a déjà perdu sa force, les pratiques très directives étaient toujours condamnées par l'évaluation.

> Bien que correcte, la systématisation des concepts et des procédures est très directive [...] sans que l'élève ait le temps de découvrir lui-même des propriétés et des régularités. (Brasil, 2002, p. 134, traduction propre) [21]

> [...] il y a un excès de systématisation, avec une prédominance des algorithmes et la présentation de toutes les propriétés des opérations, en particulier dans la troisième et quatrième année. (Brasil, 2006, p. 194, traduction propre) [22]

Dans les évaluations plus tardives, comme en 2013 et 2016 (publiées en 2012 et 2015), selon I_{PNLD} quelques manuels conservent encore cette pratique formelle et précoce de présentation. La place donnée aux propriétés des opérations reste quelque chose de gênant.

> Il y a une attention excessive portée au contenu des nombres et des opérations, en particulier dans le manuel de la 4e année, au détriment de l'étude des autres domaines. Le manuel de 5e année comprend, par exemple, des contenus qui peuvent être laissés pour de futures étapes d'apprentissage : comme l'étude formelle sur les propriétés opérationnelles ; [...] (Brasil, 2012, pp. 211-212) [23]

20. « O livro didático de matemática tem tido grande influência na determinação do saber escolar culturalmente valorizado. [...] as mudanças introduzidas em sucessivas edições têm mantido um descompasso em relação às mudanças preconizadas pelas novas propostas curriculares e pelas pesquisas e estudos concernentes ao ensino da matemática. Embora alguns textos incorporem recomendações dessas fontes, muitos livros didáticos apresentam focos de resistência específicos, relativos aos seguintes pontos críticos : [. . .] - Formalização precoce das propriedades estruturais das operações » (Brasil, 1996, p. 65) (Brasil, 1998a, p. 173)

21. « Embora correta, a sistematização de conceitos e procedimentos é feita de forma muito diretiva, [...] sem que o aluno tenha tempo de descobrir propriedades e regularidades. » (Brasil, 2002, p. 134)

22. « Percebe-se a preocupação em equilibrar os conceitos, algoritmos e procedimentos, em especial, nas primeiras séries. Entretanto, nota-se excesso de sistematização, com predomínio de algoritmos e da apresentação de todas as propriedades das operações, principalmente na 3ª e na 4ª séries. » (Brasil, 2006, p. 194)

23. « Nota-se atenção excessiva aos conteúdos de números e operações, em particular no livro do 4º ano, em detrimento do estudo dos demais campos. No livro do 5º ano incluem-se, por exemplo, conteúdos que podem ser deixados para futuras etapas da aprendizagem : o estudo formal de propriedades operatórias ; » (Brasil, 2012, pp. 211-212)

> En général, les propriétés sont présentées après avoir examiné un ou plusieurs exemples, sans poser suffisamment de questions pour permettre aux étudiants de comprendre la signification des concepts. (Brasil, 2015, p. 106, traduction propre) [24]

Cependant, nous trouvons aussi au fil du temps des choix didactiques qui sont valorisés et encouragés par l'évaluation. Cela donne des éléments sur les prescriptions de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, c'est-à-dire, sur le comment l'enseignement du bloc du savoir devrait être étudié selon cette institution de la noosphère. A cet égard, comme illustré par les deux prochains passages, pour cette institution les propriétés doivent être au service des techniques. Cela pose une vraie question sur la place de ces propriétés en tant qu'objet d'étude en soi (nous associons cette discussion à la dialectique outil-objet proposée par Douady (1986)).

> À ce stade également, les élèves doivent comprendre les différentes significations des opérations et, en développant avec une certaine autonomie leurs propres stratégies pour les exécuter, ils appliquent leurs propriétés et développent leur capacité à argumenter et à justifier leurs solutions. C'est en explorant les relations entre les propriétés des opérations et le système de numérotation décimale, ainsi que les relations entre les différentes opérations, que les élèves peuvent acquérir la compréhension et la maîtrise des algorithmes conventionnels. (Brasil, 2015, p. 15, traduction propre) [25]

> Dans les manuels évalués, pour l'enseignement du calcul mental, on a souvent recours à la décomposition additive ou multiplicative des nombres et à l'utilisation de propriétés commutatives, associatives et distributives d'addition et de multiplication. Il s'agit donc de permettre à l'élève de développer des compétences extrêmement utiles dans sa formation en mathématiques.(Brasil, 2015, p. 32, traduction propre) [26]

Le traitement réalisé par l'élève à partir de tâches d'exploration et l'institutionnalisation sans excès de formalisme sont aussi des caractéristiques bien vues tout au long de l'évaluation. L'usage de la calculatrice apparaît dans ce contexte comme un dispositif intéressant dans l'exploitation et la construction des propriétés.

A partir de ce que *pense* $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, au travers de ce que cette institution a rendu public durant ces années d'évaluation, nous proposons de passer maintenant aux produits de I_{M}.

24. « Em geral, propriedades são apresentadas depois da observação de um ou de alguns exemplos, sem que sejam feitos questionamentos suficientes para que os alunos compreendam os significados dos conceitos. » (Brasil, 2015, p. 106)
25. « Também nesse estágio é necessário que os alunos compreendam os vários significados das operações e que, ao desenvolver com alguma autonomia estratégias próprias para efetuá-las, apliquem suas propriedades e desenvolvam sua habilidade de argumentar e justificar suas soluções. É na exploração das relações entre as propriedades das operações e o nosso sistema de numeração decimal, assim como das relações entre diferentes operações, que os estudantes podem adquirir a compreensão e o domínio dos algoritmos convencionais. » (Brasil, 2015, p. 15)
26. « Nas obras avaliadas, para o ensino do cálculo mental, recorre-se muitas vezes à decomposição - aditiva ou multiplicativa - dos números e ao emprego das propriedades comutativas, associativas e distributivas da adição e da multiplicação. Trata-se, portanto, de possibilitar ao aluno desenvolver capacidades de extrema utilidade em sua formação matemática. » (Brasil, 2015, p. 32)

4.2.1 Analyse des manuels du début de l'évaluation : trois cas différents

Dans notre corpus nous disposons de trois collections de manuels qui ont été évaluées en 1994. Ce qui est intéressant est que ces trois collections sont assez différentes vis-à-vis de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. La première a reçu l'étiquette « non-recommandée » avec de fortes critiques, la deuxième « recommandée avec restriction» et la troisième est l'une des rares collections qui a été « recommandée » à cette époque. Notons donc que nous avons trois exemples qui illustrent, en quelque sorte, une *mauvaise,* une *moyenne* et une *bonne* instance de I_{M} selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Nous décidons d'analyser ces trois *instances* de l'institution I_{M} en ce qui concerne les propriétés de l'addition. Cela nous permettra de comprendre les critiques et les demandes de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. [27]

4.2.1.1 La collection « non-recommandée », une mauvaise instance de I_{M}

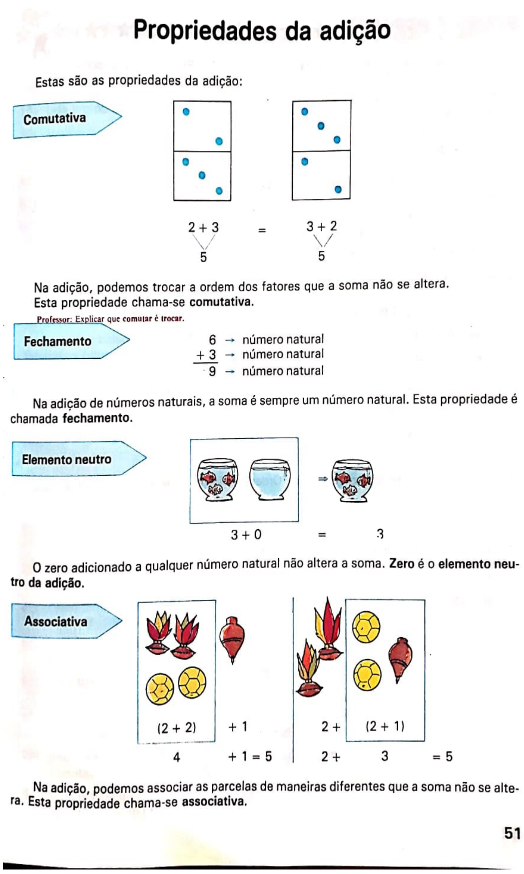
> La collection développe le contenu mathématique sans aucune précision, en faisant de graves erreurs conceptuelles, en abusant de la terminologie et des symboles mathématiques. Elle sélectionne, sans critère, des situations du monde réel et/ou des éléments destinés à donner un sens aux enfants des concepts et des règles présentés. Cela incite l'élève à des idées fausses préjudiciables à sa formation mathématique. En même temps, la limitation des situations présentées et la forme mécanique de son développement ne favorisent pas l'application dans des situations nouvelles ; au contraire, ils peuvent développer une attitude passive et négative à l'égard de la connaissance. (Brasil, 1994, p. 186, traduction propre) [28]

Cette première citation exprime le jugement général de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ sur cette collection de manuels. Nous l'examinons de plus près pour comprendre ce qui fait que l'institution d'évaluation lui accorde un tel mépris.

À la recherche des traces de l'étude des propriétés de l'addition, nous trouvons dans les manuels de la troisième et quatrième année une page entière dédiée à la présentation de ces propriétés. Le verbe « présenter » est bien approprié au choix didactique. C'est-à-dire que l'institutionnalisation de ces objets *arrive de nulle part* et les propriétés sont donc *objets de contemplation.*

27. Le choix de parler de bonne, moyenne et mauvaise instance de I_{M} est plutôt métaphorique. Les manuels ne sont pas eux-mêmes d'instances de I_{M} , mais ils sont les produits, la matière empirique sur laquelle notre analyse est basée pour accéder aux rapports d'un collectif d'acteur qui interviennent comme sujets de I_{M} .

28. « A obra desenvolve o conteúdo matemático sem nenhuma precisão, fazendo erros conceituais graves, empregando de forma inadequada a terminologia e a simbologia matemática. Seleciona, sem critério, as situações e/ou elementos do mundo real destinados a dar às crianças significado aos conceitos e às regras apresentadas. Isto induz o aluno a concepções inadequadas com prejuízo para sua formação matemática posterior. Ao mesmo tempo, a limitação das situações apresentadas e a forma mecânica de seu desenvolvimento não favorecem a aplicação em novas situações ; ao contrário, podem desenvolver uma atitude passiva e negativa quanto ao conhecimento. » (Brasil, 1994, p. 186)



Propriedades da adição

Estas são as propriedades da adição:

Comutativa

2 + 3 = 3 + 2

5 5

Na adição, podemos trocar a ordem dos fatores que a soma não se altera. Esta propriedade chama-se **comutativa**.

Professor: Explicar que comutar é trocar.

Fechamento

6 → número natural
+ 3 → número natural
9 → número natural

Na adição de números naturais, a soma é sempre um número natural. Esta propriedade é chamada **fechamento**.

Elemento neutro

3 + 0 = 3

O zero adicionado a qualquer número natural não altera a soma. **Zero é o elemento neutro da adição.**

Associativa

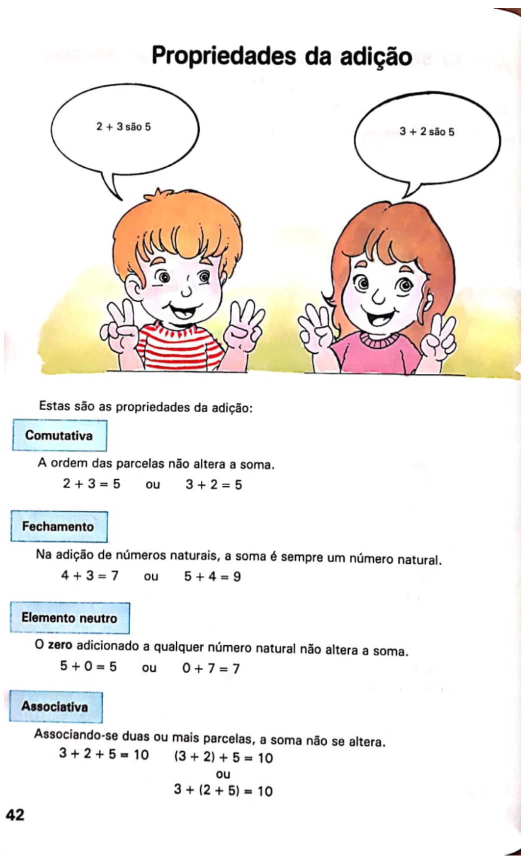
(2 + 2) + 1 2 + (2 + 1)

4 + 1 = 5 2 + 3 = 5

Na adição, podemos associar as parcelas de maneiras diferentes que a soma não se altera. Esta propriedade chama-se **associativa**.

51

(a) (Passos et al., 1992a, v. 3, p. 42)



Propriedades da adição

Estas são as propriedades da adição:

Comutativa

A ordem das parcelas não altera a soma.

2 + 3 = 5 ou 3 + 2 = 5

Fechamento

Na adição de números naturais, a soma é sempre um número natural.

4 + 3 = 7 ou 5 + 4 = 9

Elemento neutro

O **zero** adicionado a qualquer número natural não altera a soma.

5 + 0 = 5 ou 0 + 7 = 7

Associativa

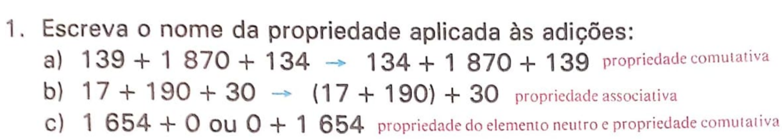
Associando-se duas ou mais parcelas, a soma não se altera.

3 + 2 + 5 = 10 (3 + 2) + 5 = 10
ou
3 + (2 + 5) = 10

42

(b) (Passos et al., 1992c, v. 4, p. 51)

Suite à cette présentation, une liste d'exercices est proposée. Ces activités ont pour objectif, selon le livre du maître, « l'identification et l'emploi de ces propriétés ». « Identifier », en effet, est un genre de tâches présent un peu partout dans cette collection. On *identifie* des ensembles et sous-ensembles, on *identifie* les nombres romains, les nombres pairs et impairs, les terminologies des quatre opérations, le numérateur et le dénominateur d'une fraction... (tous ces types de tâches, comme beaucoup d'autres, sont indiqués comme objectifs du plan de cours disponible dans le livre du maître). Dans cet esprit, nous avons des activités comme la suivante où l'élève doit « écrire le nom de la propriété appliquée » :



1. Escreva o nome da propriedade aplicada às adições:
   a) 139 + 1 870 + 134 → 134 + 1 870 + 139 propriedade comutativa
   b) 17 + 190 + 30 → (17 + 190) + 30 propriedade associativa
   c) 1 654 + 0 ou 0 + 1 654 propriedade do elemento neutro e propriedade comutativa

Figure 4.20 – Passos et al. (1992c, v. 4, p. 43)

En petites lettres se trouvent les réponses que l'on attend de l'élève, présentées dans le livre du maître. Notons que les résultats des calculs ne sont pas donnés et que l'exercice ne demande pas de le faire. L'objectif est donc essentiellement l'identification des propriétés. Ce réductionnisme est si fort que la simple présence du zéro dans « c » devrait suggérer la propriété de l'élément neutre, comme indiqué par la réponse attendue. Cependant, la propriété de l'élément neutre n'a pas été effectivement appliquée.

Lorsque les activités demandent à l'élève d'« appliquer une propriété indiquée », quelques questions se posent. Dans l'exemple ci-dessous, pourquoi devrions-nous utiliser la propriété de commutativité pour le calcul « 5 + 2 » pour obtenir « 2 + 5 » ? Normalement, ne ferions-nous pas justement l'inverse ? De plus, qu'est-ce que signifie appliquer la propriété de la fermeture dans le calcul « 8 + 9 » ?

2. Aplique a propriedade indicada e resolva:
   a) Propriedade comutativa: 5 + 2   2 + 5 = 7
   b) Propriedade do fechamento: 8 + 9   17
   c) Propriedade do elemento neutro: 8 + 0   8
   d) Propriedade associativa: (10 + 5) + 3   10 + (5 + 3) = 18

Figure 4.21 – Passos et al. (1992a, v. 3, p. 52)

La propriété de fermeture, en effet, n'a pas cette dimension *opérationnelle* qu'on trouve dans les autres propriétés, parce qu'elle ne *participe* pas activement de la mise en œuvre, des gestes, des techniques du champ additif - ce qui est lié à sa nature même. C'est pourquoi l'activité « b » est discutable.

Cet exemple montre que la raison d'être de l'étude des propriétés n'est pas attachée à une meilleure optimisation des calculs addition. D'autres exemples corroborent encore davantage cette affirmation :

3. Efetue, aplicando as propriedades:

Comutativa
a) 15 + 20   20 + 15 = 35
b) 360 + 6   6 + 360 = 366
c) 112 + 28   28 + 112 = 140
d) 1 925 + 118   118 + 1 925 = 2 043
e) 17 + 754   754 + 17 = 771

Figure 4.22 – Passos et al. (1992a, v. 3, p. 52)

Dans cette activité la consigne est « effectuer en appliquant les propriétés ». Cependant, les valeurs arbitraires des nombres dans les tâches montrent un complet désintérêt d'associer la propriété de commutativité aux techniques de calcul. Cela est particulièrement frappant dans le calcul « 360 + 6 » pour obtenir « 6 + 360 ».

Un point essentiel à ajouter : dans cette collection l'algorithme posé est la *bonne* et presque l'unique technique d'addition utilisée. A cet égard, remarquons que cette technique peut exister sans ces propriétés. C'est-à-dire, les propriétés dans le contexte de cette collection de manuel ne composent pas le logos d'une praxis donnée. Les propriétés constituent un objet d'étude (étrange) dissocié du reste.

4.2.1.2 La collection « recommandée avec restrictions », *une instance moyenne*

> Bien qu'il renonce à une introduction artificielle de la théorie des ensembles, l'ouvrage présente une caractéristique formelle, notamment en ce qui concerne les opérations des nombres naturels : il développe même à partir de la troisième année, chaque opération dans un chapitre unique, augmentant progressivement les difficultés de calcul, en prenant comme fil conducteur les propriétés structurelles des opérations. Cependant, il n'oublie pas d'introduire des concepts, des propriétés, des algorithmes mathématiques issus de situations problématiques faisant référence à des contextes culturels usuels. [...] Le manuel présente des défaillances méthodologiques parmi lesquelles :
>
> - La plus grave concerne la progressivité du processus de symbolisation. Ainsi, dans des situations problématiques, la pensée de l'élève est incitée de manière linéaire, au moyen de questions, à exprimer ses conclusions dans un langage mathématique complexe, présenté comme un modèle à suivre avec rigueur et insistance. [...] Le manuel de la troisième année présente des situations pratiques qui conduisent le raisonnement de l'élève aux conclusions des propriétés structurelles des opérations avec des nombres entiers positifs. Cette explication, même si elle est bien préparée, se place au début de cette année et révèle une préoccupation au formalisme, en particulier en ce qui concerne les propriétés, la fermeture et l'existence de l'élément neutre, pour l'addition et la multiplication. » (Brasil, 1994, pp. 192-193, traduction propre) [29]

La collection étiquetée par « recommandée avec restriction » présente, selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, des problèmes par rapport au langage utilisé et au formalisme.

Le début de l'étude du champ additif est marqué ici par un travail *quasi* exhaustif sur les tables d'addition. En effet, les tables d'opérations sont une *vulgate* de l'époque, c'est-à-dire, un geste didactique commun dans les manuels pour la construction d'un répertoire de calculs.

29. « Embora dispense uma introdução artificial à teoria dos conjuntos, a obra tem uma característica formal especialmente no que se refere às operações com números naturais : desenvolve mesmo a partir da 3a série, cada operação em um capítulo estanque, amplia gradualmente as dificuldades de cálculo, tomando como fio condutor as propriedades estruturais das operações. [. . .] O livro apresenta falhas metodológicas entre as quais : - as mais graves referem-se à progressividade do processo de simbolização. Assim, por exemplo, nas situações-problema o pensamento do aluno é induzido linearmente, por meio de questões, a expressar suas conclusões, em uma linguagem matemática complexa, dada como modelo a ser rigorosa e insistentemente seguida. [...] Deve-se observar que o conteúdo desenvolvido é sobrecarregado, especialmente na 4a série. Em muitos capítulos, as diferentes linguagens são empregadas de maneira a tornar, além disso, esse conteúdo complexo. O livro 3 apresenta situações práticas que conduzem o raciocínio do aluno para as conclusões das propriedades estruturais das operações com números naturais. Esta explicitação, embora seja preparada, é precoce nesta série, e revela preocupação com o formalismo, especialmente no que se refere às propriedades, fechamento e existência do elemento neutro, para adição e a multiplicação. » (Brasil, 1994, pp. 192-193)

13. Complete corretamente as adições:

a) 7 + ...0... = 7	0 + ...7... = 7
b) 1 + ...6... = 7	6 + ...1... = 7
c) 2 + ...5... = 7	5 + ...2... = 7
d) 3 + ...4... = 7	4 + ...3... = 7

Figure 4.23 – (Giovanni, 1989a, v.1, p. 31)

Dans ce contexte, la commutativité est traitée intuitivement - notons dans la figure ci-dessus que chaque exercice contient deux tâches avec les valeurs commutées. Dans le même esprit le *zéro* est considéré comme valeur dans le regroupement de tâches, comme l'on voit dans le prochain extrait :

1. Calcule:

a) 1 + 0 = ...1...	b) 2 + 0 = ...2...	c) 3 + 0 = ...3...
d) 4 + 0 = ...4...	e) 5 + 0 = ...5...	f) 6 + 0 = ...6...
g) 7 + 0 = ...7...	h) 8 + 0 = ...8...	i) 9 + 0 = ...9...

Figure 4.24 – (Giovanni, 1989a, v.1, p. 32)

Ce travail a lieu dans la première année de l'école primaire et est finalisé par une liste de tâches et la question : « Dans une addition, lorsque l'on change l'ordre des nombres, le résultat est-il modifié ? »

6. Calcule:

a) 1 + 2 = 3 2 + 1 = 3	b) 1 + 6 = 7 6 + 1 = 7	c) 1 + 5 = 6 5 + 1 = 6
d) 8 + 0 = 8 0 + 8 = 8	e) 3 + 2 = 5 2 + 3 = 5	f) 4 + 3 = 7 3 + 4 = 7
g) 0 + 4 = 4 4 + 0 = 4	h) 7 + 2 = 9 2 + 7 = 9	i) 2 + 5 = 7 5 + 2 = 7
j) 6 + 2 = 8 2 + 6 = 8	l) 9 + 0 = 9 0 + 9 = 9	m) 8 + 1 = 9 1 + 8 = 9
n) 3 + 5 = 8 5 + 3 = 8	o) 2 + 4 = 6 4 + 2 = 6	

Uma pergunta-desafio

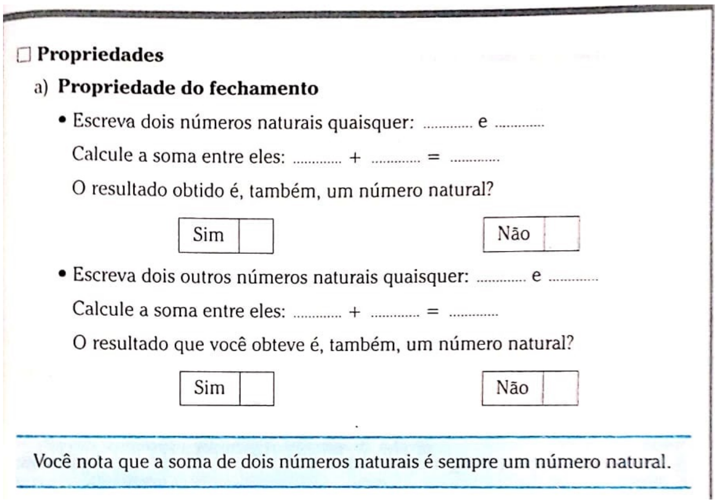
Observe os exercícios que você fez e responda:

Numa adição, quando trocamos a ordem dos números, o resultado muda?

Sim [ ] Não [X]

Figure 4.25 – (Giovanni, 1989a, v.1, p. 32)

Cette étude est reprisé, approfondie et institutionnalisée dans les manuels de la troisième et de la quatrième année.



☐ **Propriedades**

a) **Propriedade do fechamento**

- Escreva dois números naturais quaisquer: .... e ....

Calcule a soma entre eles: .... + ... = ...

O resultado obtido é, também, um número natural?

Sim ☐ Não ☐

- Escreva dois outros números naturais quaisquer: .... e ....

Calcule a soma entre eles: .... + ... = ...

O resultado que você obteve é, também, um número natural?

Sim ☐ Não ☐

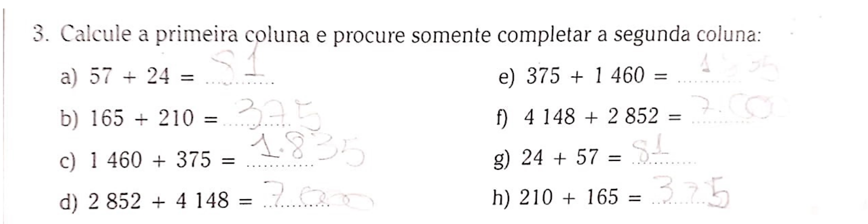
Você nota que a soma de dois números naturais é sempre um número natural.

Figure 4.26 – (Giovanni, 1989b, v.4, p. 35) [a]

a. Traduction : Propriétés
a) Propriété de la fermeture
• Écrire deux nombres entier positifs quelconques : . . . . . . et . . . .
Calculer la somme de ces deux nombres : . . . . . . + ... = ...
Le résultat obtenu est, aussi, un nombre entier positif ?
• Écrire deux nombres entier positifs quelconques : . . . . . . et . . . .
Calculer la somme de ces deux nombres : . . . . . . + ... = ...
Le résultat obtenu est, aussi, un nombre entier positif ?
Vous notez que la somme de deux nombres entier positifs est toujours un nombre entier positif.

Chaque propriété est étudiée séparément avec une même organisation : deux activités d'exploration, puis institutionnalisation et activités d'application. Dans ce contexte, nous remarquons qu'il existe une intention de l'auteur pour que l'élève participe à l'étude et pas seulement en être que spectateur.

Dans le moment d'application, nous trouvons d'autres éléments à souligner. Commençons par une activité relative à la commutativité :



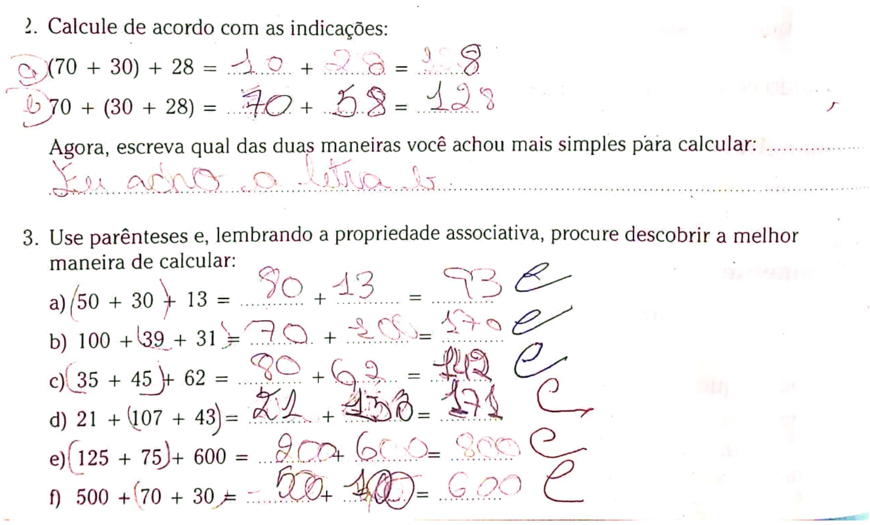
3. Calcule a primeira coluna e procure somente completar a segunda coluna:

a) 57 + 24 = 81	e) 375 + 1 460 = 1835
b) 165 + 210 = 375	f) 4 148 + 2 852 = 7000
c) 1 460 + 375 = 1835	g) 24 + 57 = 81
d) 2 852 + 4 148 = 7000	h) 210 + 165 = 375

Figure 4.27 – (Giovanni, 1989c, v.3, p. 56)

Dans cet exemple, la consigne demande à l'élève d'accomplir les tâches de la première colonne puis, sans faire de nouveaux calculs, accomplir les tâches de la deuxième colonne. Il s'agit d'un choix didactique pour donner une raison d'être à la propriété de commutativité : si on connaît la somme de « a + b », on connaît aussi la somme de « b + a ». Cette activité, cependant, n'interroge pas comment on calcule « a + b » et n'exploite pas non plus une autre raison d'être possible de la permutation des termes de l'addition, celle de faciliter le calcul.

Pour l'associativité, nous avons l'activité ci-dessous :



2. Calcule de acordo com as indicações:
a) (70 + 30) + 28 = 100 + 28 = 128
b) 70 + (30 + 28) = 70 + 58 = 128

Agora, escreva qual das duas maneiras você achou mais simples para calcular: Eu acho a letra b

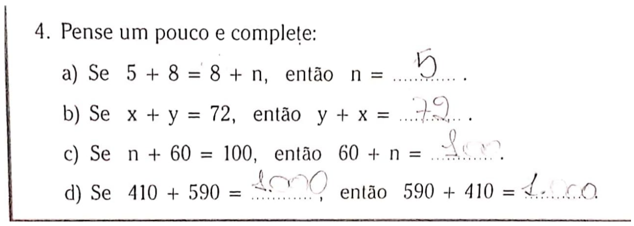
3. Use parênteses e, lembrando a propriedade associativa, procure descobrir a melhor maneira de calcular:
a) (50 + 30) + 13 = 80 + 13 = 93
b) 100 + (39 + 31) = 70 + 100 = 170
c) (35 + 45) + 62 = 80 + 62 = 142
d) 21 + (107 + 43) = 21 + 150 = 171
e) (125 + 75) + 600 = 200 + 600 = 800
f) 500 + (70 + 30) = 500 + 100 = 600

Figure 4.28 – (Giovanni, 1989c, v.3, p. 58)

D'abord l'élève est amené à accomplir et à comparer deux façons d'accomplir une tâche : laquelle des deux manières trouve t-il la plus simple pour calculer - c'est écrit dans l'énoncé de l'activité 2. [30]. Puis, dans la prochaine activité, l'élève est invité à faire usage de la propriété d'associativité pour « *découvrir la meilleure manière de calculer »* (mots retirés de l'énoncé). Cela montre une intention de mettre cette propriété au service des calculs.

Cependant, nous trouvons aussi dans cette collection des tâches présentées à l'aide d'un vocabulaire algébrique, structurées même par des sentences du type « Si . . . alors . . . ». Les trois prochains exemples nous permettent dans ce sens de mieux comprendre les critiques de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ sur le formalisme et le langage.

30. Ce manuel a été utilisé par un vrai élève en 1992. Bien qu'on ne regarde pas ses réponses, nous voyons que dans cette activité il affirme que la lettre « b » est la manière la plus simple : est-il est ce qui était attendu comme réponse ?


4. Pense um pouco e complete:

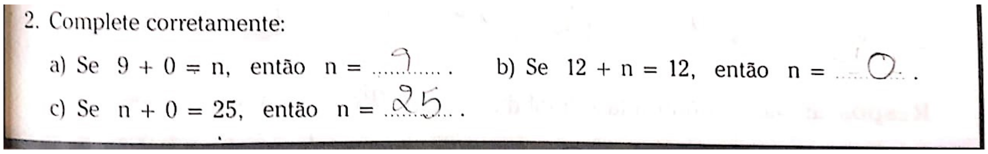
a) Se 5 + 8 = 8 + n, então n = ...5...

b) Se x + y = 72, então y + x = ...72...

c) Se n + 60 = 100, então 60 + n = ...100...

d) Se 410 + 590 = ...1000..., então 590 + 410 = ...1000...

Figure 4.29 – (Giovanni, 1989c, v.3, p. 56)


2. Complete corretamente:

a) Se 9 + 0 = n, então n = ...9... b) Se 12 + n = 12, então n = ...0...

c) Se n + 0 = 25, então n = ...25...

Figure 4.30 – (Giovanni, 1989c, v.3, p. 59)

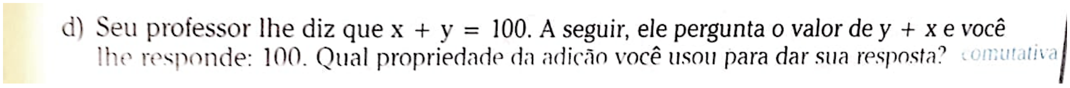

d) Seu professor lhe diz que x + y = 100. A seguir, ele pergunta o valor de y + x e você lhe responde: 100. Qual propriedade da adição você usou para dar sua resposta? comutativa

Figure 4.31 – (Giovanni, 1989b, v.4, p. 39) [a]

a. Traduction : « Votre professeur vous dit que x + y = 100. Puis il vous demande la valeur de y + x et vous lui répondez : 100. Quelle est la propriété de l'addition que vous avez appliquée pour donner votre réponse ? »

Cette algébrisation a été fortement condamnée dans l'évaluation de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Dans cette collection, ce langage est présent depuis la première année de l'école primaire, ce qui a été jugé comme inapproprié pour ce niveau scolaire.

> L'expression verbale valeur de "n" n'a aucune signification pour un enfant qui vient de commencer dans le monde des nombres et des lettres. [...] nous constatons que le travail ne fournit pas les conditions pour un développement progressif de la construction du langage mathématique par l'élève. (Brasil, 1994, p. 197, traduction propre) [31]

Ce formalisme apporté pour le langage algébrique illustre, de façon caricaturale, un curriculum des mathématiques passionné *par les ostensifs des mathématiques savantes.*

4.2.1.3 La collection « recommandée », *une bonne instance*

> Les auteurs incorporent dans le texte les résultats de recherches récentes dans le domaine de l'enseignement des mathématiques, ce qui a permis d'améliorer considé-

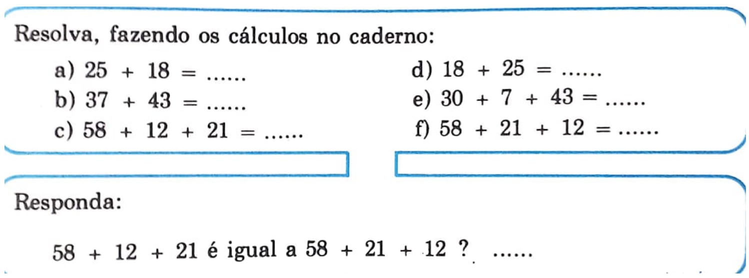
31. « A expressão verbal "valor do número n" , não tem nenhum significado para uma criança apenas iniciada no mundo do número e das letras. [...] vê-se que a obra analisada não propicia condições para um processo gradativo de construção da linguagem matemática pelo aluno. » (Brasil, 1994, p. 197)

> rablement la qualité de l'œuvre. Les contenus présentés au cours des quatre années sont bien intégrés. (Brasil, 1994, p. 158, traduction propre) [32]

Nous avons appris avec la première étude de cas que I_{PNLD} légitime et construit ses jugements par l'assujettissement à la communauté scientifique en éducation mathématique, I_{EM}. L'étiquète « recommandée » attribuée à cette collection est justement liée au fait que cette collection est plus conforme à ce qui dit I_{EM}, comme le montre la description de l'évaluation.

Déjà dans les premiers contacts avec les manuels de cette collection [33], nous notons des différences remarquables par rapport aux deux autres précédemment analysées. Dans ce cas, l'étude se déroule toujours au travers de nombreuses activités. La partie cours et d'institutionnalisation sont quasiment absentes.

Les traces concernant les propriétés de l'addition ne sont pas faciles à identifiées dans ces manuels. En effet, à aucun moment nous ne voyons les termes « commutativité, associativité, élément neutre ou propriété de la fermeture ». Exceptionnellement, nous trouvons quelques activités qui peuvent être associées à ces deux premières propriétés. Dans le manuel de la 2e année, par exemple, l'activité suivante (Figure 4.32) nous a persuadés à penser à la propriété de la commutativité :


Resolva, fazendo os cálculos no caderno:

a) 25 + 18 = ...
b) 37 + 43 = ...
c) 58 + 12 + 21 = ...
d) 18 + 25 = ...
e) 30 + 7 + 43 = ...
f) 58 + 21 + 12 = ...

Responda:

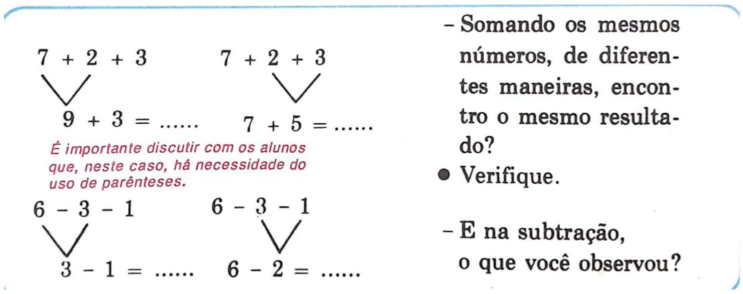
58 + 12 + 21 é igual a 58 + 21 + 12 ? ......

Figure 4.32 – (Garcia et Carneiro Soares, 1989b, v.2, p. 43)

Ce sont les tâches « a et d » et « c et f » qui nous suggèrent une certaine intention de travailler cette propriété. Cependant, l'unique question posée à l'élève est : « 58 + 12 + 21 est égal à 58 + 21 + 12 ? ». Les tâches « b et e » nous empêchent d'inférer sur le vrai propos des auteurs.

Nous retrouvons aussi un autre extrait que nous associons à l'étude de la propriété d'associativité. Les questions sont « En additionnant les mêmes nombres, de manières différentes, trouvons-nous le même résultat ? Et dans la soustraction, qu'avez-vous observé ? »

32. « As autoras incorporam ao texto resultados de pesquisas recentes na área de Educação Matemática, resultando daí um ganho significativo na qualidade da obra. Há uma boa integração dos conteúdos apresentados no decorrer dos quatro volumes. » (Brasil, 1994, p. 158)
33. Nous comptons dans notre corpus trois manuels de cette collection : 1ère, 2e et 4e année.



7 + 2 + 3 7 + 2 + 3

9 + 3 = ... 7 + 5 = ...

É importante discutir com os alunos que, neste caso, há necessidade do uso de parênteses.

6 − 3 − 1 6 − 3 − 1

3 − 1 = ... 6 − 2 = ...

– Somando os mesmos números, de diferentes maneiras, encontro o mesmo resultado?

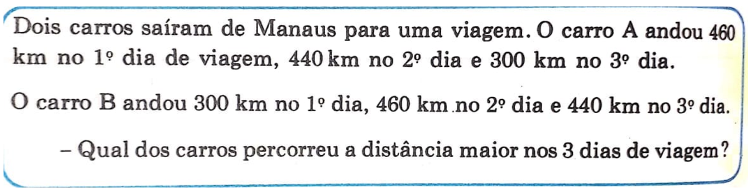
● Verifique.

– E na subtração, o que você observou?

Figure 4.33 – (Garcia et Carneiro Soares, 1989b, v.2, p. 134)

Bien que l'étude de la propriété soit plus explicitement dans ce cas-là, nous notons dans cette collection que le moment d'institutionnalisation du savoir reste toujours à la charge de l'institution d'enseignement.

Un dernier extrait a été repéré dans le manuel de la 4e année, où nous pouvons lire : « Deux voitures sont parties de Manaus en voyage. La voiture A a roulé 460km le premier jour, 440km le deuxième jour et 300km le troisième jour. La voiture B a roulé 300km le premier jour, 460km le deuxième jour et 440km le troisième jour. Laquelle des deux voitures a parcouru la plus grande distance dans les 3 jours de voyage ? »



Dois carros saíram de Manaus para uma viagem. O carro A andou 460 km no 1º dia de viagem, 440 km no 2º dia e 300 km no 3º dia.

O carro B andou 300 km no 1º dia, 460 km no 2º dia e 440 km no 3º dia.

– Qual dos carros percorreu a distância maior nos 3 dias de viagem?

Figure 4.34 – (Garcia et Carneiro Soares, 1989c, v.4, p. 46)

Nous pensons que cette activité invite à nouveau à étudier les propriétés d'associativité et de commutativité, or cette déduction n'est effectivement qu'une supposition faite par nous en raison des nombres utilisés. Rien n'est effectivement déclaré sur le bloc du savoir.

Les propriétés d'addition ne sont donc pas objets d'étude dans cette collection et participent très discrètement du travail des techniques. Est-ce exactement cela que $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ envisageait pour l'enseignement ?

A partir des documents d'évaluation, nous ne pouvons pas dire que ce *style d'enseignement* soit la raison de l'étiquète « recommandée » de cette collection. Cependant, il est vrai que nous trouvons ici une sorte de *volonté de faire différemment*, des tentatives d'un *nouvel enseignement des mathématiques* suffisamment distant de celui de la réforme des mathématiques moderne, ce qui a pu être vu en 1994 *déjà comme quelque chose de positif.*

4.2.1.4 L'avenir des manuels étudiés

Ces trois collections relèvent trois projets didactiques bien différents sur l'enseignement des mathématiques. Nous avons pensé alors qu'il serait intéressant d'analyser l'avenir de ces trois *instances* face aux évaluations. Cependant, nous avons rencontré un problème pour avancer sur cette idée.

Rappelons qu'à partir de 1998, les écoles publiques du Brésil ne peuvent choisir que les manuels recommandés par I_{PNLD}. Les manuels qui ne sont pas en conformité avec l'institution évaluatrice perdent donc une importante vitrine dans le marché nationale. Un facteur que nous avons signalé comme décisif pour pousser au changement des manuels.

Rappelons également qu'après la première évaluation, les documents suivants de I_{PNLD} contiennent seulement des informations sur les manuels recommandés. Cela veut dire que quand une collection n'est pas dans la liste de I_{PNLD}, deux situations sont possibles : 1) La maison d'édition n'a pas posé la candidature de la collection de manuels au processus d'évaluation, soit parce qu'elle ne le produit plus, soit pour d'autres raisons ; 2) La maison d'édition a posé la candidature de la collection de manuels au processus évaluatif et la collection a été désapprouvée. En considérant cela, par rapport aux trois collections analysées, nous avons la configuration suivante :

Tableau 4.8 – Les résultats d'évaluation des trois collections

	Alegria de Saber *(mauvaise instance)*	A conquista da matemática *(instance moyenne)*	Matemática : Educação e o Desenvolvimento do Senso Crítico *(bonne instance)*
1994	Non-recommandée	Recommandée avec restriction	Recommandée
1996	-	Recommandée	Recommandée
1998	-	Recommandée avec restriction (une étoile∗)	Recommandée (deux étoiles∗)
2000-2001	-	-	Recommandée (une étoile∗)
2004	-	-	-
2007	-	Recommandée	-
2010	-	-	-
2013	-	Recommandée	-
2016	-	Recommandée	-

∗ Les évaluations de 1998 et 2000-2001 indiquaient la qualité des manuels avec une étoile (recommandée avec restriction), deux étoiles (recommandée) ou trois étoiles (recommandée avec distinction). Cela a disparu par la suite.

La collection illustrant une *mauvaise instance* dans la première évaluation disparaît des documents de I_{PNLD} depuis la première évaluation. Pour des raisons inconnues, l'assujettissement au fil du temps ne peut pas être regardé pour ce cas-là.

La collection qui exemplifie une *bonne instance* dans la première évaluation a un parcours curieux. Dans les premières années d'évaluation cette collection continue à être approuvée par I_{PNLD}, mais disparaît ensuite. Soulignons que si dans la première évaluation nous avons trouvé un nombre généreux d'éloges la concernant, les résultats des évaluations suivantes n'ont pas été si glorieux. En 2000, par exemple, plusieurs critiques sont lancées sur cette collection, qui n'avait pas beaucoup changé dès l'édition évaluée en 1994[34]. Le fait est que I_{PNLD} devient à chaque nouvelle évaluation plus exigeante, ce qui impacte évidemment la notion de bonne ou mauvaise instance. Un autre facteur intéressant est que les auteures de cette collection, Tânia Maria Figueiredo Braga Garcia et Maria Tereza Carneiro Soares, concluent dans cette période leurs doctorats dans le domaine de l'éducation. Toutes les deux ont actuellement leurs carrières liées à la recherche en éducation mathématique. En plus, la deuxième a été évaluatrice des manuels en 2013 pour I_{PNLD}. Les institutions noosphèriennes auxquelles elle appartient ont changé durant sa vie[35].

La collection de manuels qui exemplifie dans la première évaluation une instance *moyenne*, faute d'un meilleur terme, a par contre son parcours marqué par l'assujettissement à I_{PNLD}, ce qui lui a permis d'appartenir jusqu'à l'époque actuelle au marché national pour les écoles publiques. C'est pour cela que nous allons centrer notre attention maintenant sur cette collection afin d'attraper les changements et résistances autour de l'étude des propriétés d'addition.

4.2.2 L'effet de l'évaluation sur une collection de manuels

Nous avons déjà présenté la collection évaluée en 1994, qui a été classifiée par I_{PNLD} comme « recommandée avec restriction ». Pour les années 1996 et 1998, cette collection a été mise à jour et a été soumise au processus d'évaluation. Sur sa nouvelle couverture se trouve l'étiquette « Édition Rénovée ». Bien que nous trouvions des changements en comparaison à l'édition ancienne, beaucoup de choses sont préservées.

Un premier point remarquable de changement concerne les nombreuses activités sur les tables d'addition, qui ont beaucoup diminué, entrainant la disparition de la liste de tâches du type « a + 0 ». En effet, la réduction du nombre des exercices est une marque perceptible dans cette nouvelle version - un effet des critiques visant la tendance techniciste, assez forte à l'époque ?

L'activité sur la notion de commutativité, par exemple, reste encore présente dans le manuel de la

34. Nous avons les manuels du quatrième année publiés en 1989 et 1998 et les différences, sauf les aspects graphiques, sont difficiles d'être signalées.

35. Il convient de dire que du point de vue juridique, par un problème de conflit d'intérêt, une personne ne peut pas être sujet de I_M et de I_{PNLD} dans une même période.

première année, mais plus compactée - avant, les exercices allaient de la lettre « a » jusqu'à la lettre « o ».

22. Calcule:

a) 1 + 2 3
2 + 1 3

b) 1 + 6 7
6 + 1 7

c) 1 + 5 6
5 + 1 6

d) 8 + 0 8
0 + 8 8

e) 3 + 2 5
2 + 3 5

f) 4 + 3 7
3 + 4 7

g) 0 + 4 4
4 + 0 4

h) 7 + 2 9
2 + 7 9

i) 2 + 5 7
5 + 2 7

23. Observando o exercício 22, responda **sim** ou **não**:
Numa adição, quando trocamos a ordem dos números, o resultado muda?
não

Figure 4.35 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v.1, p. 22)

Un autre point de changement important est la disparition de la propriété de fermeture. Nous rappelons que cette propriété ne peut pas participer, par sa nature même, aux gestes des techniques de calcul. La raison de son étude se trouve alors dans l'appréciation d'une approche théorique, puis plus formelle, du champ additif. Cela semble justifier le choix de l'avoir supprimée dans les manuels.

Cependant, l'analyse montre beaucoup plus de résistances que de changements. Les autres propriétés sont traitées comme objets d'étude et comme outil pour les calculs (au sens de Douady (1986)). Les institutionnalisations sont faites pour chaque propriété, qui sont baptisées par leurs noms - commutative, associative et élément neutre. Le langage algébrique est aussi gardé malgré les fortes critiques de IPNLD.

5. Qual é a propriedade da adição que está sendo aplicada nas sentenças:

a) 0 + 15 = 15 elemento neutro
b) 12 + 18 = 18 + 12 comutativa
c) 27 + 0 = 27 elemento neutro
d) (7 + 5) + 8 = 7 + (5 + 8) associativa
e) a + b = b + a comutativa
f) a + (b + c) = (a + b) + c associativa

6. Considerando as seguintes igualdades e usando as propriedades da adição, descubra o valor do número **n** nas seguintes igualdades:

a) n + 30 = 30 n = 0
b) n + 7 = 13 + 7 n = 13
c) n + (8 + 5) = (10 + 8) + 5 n = 10
d) 0 + n = 35 n = 35

7. Usando parênteses e lembrando da propriedade associativa da adição, procure a melhor maneira de calcular:

a) 100 + (37 + 42) 100 + 79 = 179
b) (30 + 20) + 57 50 + 57 = 107
c) (75 + 25) + 62 100 + 62 = 162
d) 24 + (63 + 37) 24 + 100 = 124

8. A professora de Matemática pediu o valor do número **n** na igualdade n + 16 = 16. Sérgio respondeu que n = 16 e Cármen respondeu que n = 0. Nessas condições:

a) Quem deu a resposta correta? Cármen
b) Qual a propriedade usada para dar o resultado? elemento neutro

Figure 4.36 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992b, v.3, p. 39)

De la première évaluation (1994) à la plus récente (2016), le langage utilisé dans les manuels reçoit toujours beaucoup d'attention de la part de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Sur cet aspect, cette institution est emphatique sur le besoin d'un travail progressif en respect avec la maturité de l'enfant et en sachant que le langage mathématique n'est pas acquis spontanément par les élèves. Il est clair que l'algébrisation des questions à l'école primaire, comme nous le voyons ici, n'est pas en conformité avec ce discours.

Cependant, malgré les critiques, cette collection a continué à être approuvée en 1996 et 1998. Donc, ce *défaut* n'empêchait pas l'achat de ces manuels par les écoles. Son public fidèle, s'il existe, pouvait toujours les avoir. Cela veut dire que les critiques ne sont pas un geste didactique suffisamment puissant. Ce scénario change dans les évaluations de 2000 et 2004, lorsque la collection n'apparait plus dans la liste de manuels approuvés par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et c'est seulement en 2007 qu'elle revient.

Tableau 4.9 – Résultats d'évaluation de la collection analysée

1994	Recommandée avec restriction
1996	Recommandée
1998	Recommandée avec restriction (une étoile)
2000-2001	-
2004	-
2007	Recommandée
2010	-
2013	Recommandée
2016	Recommandée

Une question se pose alors : l'évaluation a-t-elle changé son *niveau* de jugement ne tolérant plus certains *défauts* au fil du temps ? Si oui, est-ce que cette collection de manuels a dû changer pour être conforme au jugement de l'institution évaluatrice ?

Nous passons à l'examen de la cette collection de 2007. Les premiers signes de différence se trouvent à nouveau sur la nouvelle couverture. Le nom consacré dans le marché, « *A conquista da matemática* », reste préservé mais, avec une nouvelle étiquette : « la plus actuelle ». Une deuxième étiquette y est aussi placée : « avec projet interdisciplinaire ». Cela montre bien l'intention de faire publicité d'un travail de mise à jour de la collection. Au-delà de cette première impression que la couverture veut provoquer, à l'intérieur de ces manuels nous nous retrouvons effectivement avec une nouvelle œuvre.

Tout le langage algébrique a disparu, aussi bien que la plupart des activités dédiées aux propriétés d'addition. En effet, la place de ces propriétés a été significativement réduite. Elles apparaissent seulement dans les deux dernières années de l'école primaire quasi camouflée parmi les activités. Nous nous sommes alors demandé la raison d'être de ce qui est resté de cette étude. Pour cela, prenons une des activités proposées sur la notion de commutativité :

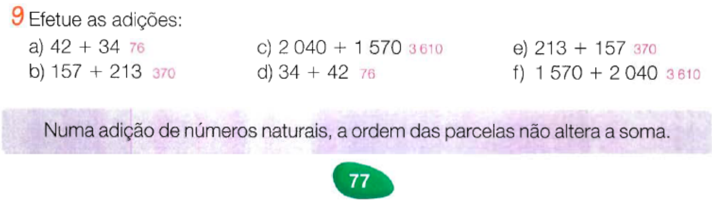


Figure 4.37 – (Giovanni et Giovanni Jr., 2005a, v.3, p. 77)

Après ces six tâches, on institutionnalise : « Dans une addition de nombres entiers positifs, l'ordre des nombres ne change pas la somme. ». Remarquons que les valeurs des nombres ne permettent pas de montrer le possible avantage de permutation des termes d'une addition. L'intention est donc uniquement portée sur l'identification de la régularité en jeu. C'est dans ce même esprit que la propriété d'associativité est travaillée, à partir des nombres 1402, 659 et 2216 :

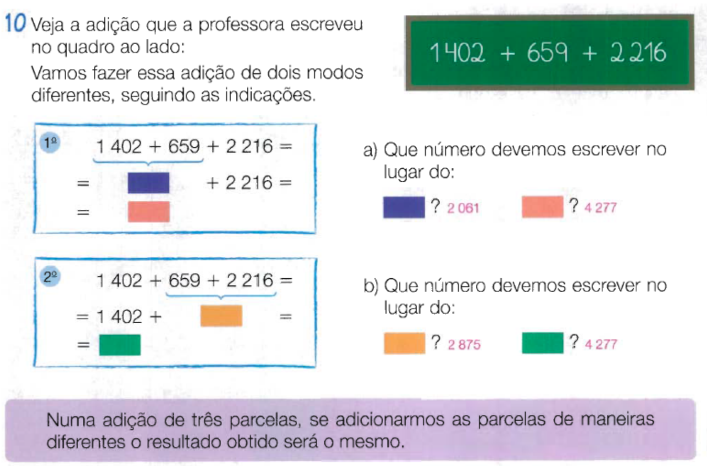


Figure 4.38 – (Giovanni et Giovanni Jr., 2005a, v.3, p. 78)

Quelle est l'intention de conserver cette place à l'institutionnalisation à la fin de l'école primaire ? Les élèves ne devraient-ils pas savoir depuis déjà un moment que, par exemple, « dans une addition, si une des valeurs est égale à zéro, le résultat est égal à l'autre valeur » [36] ?

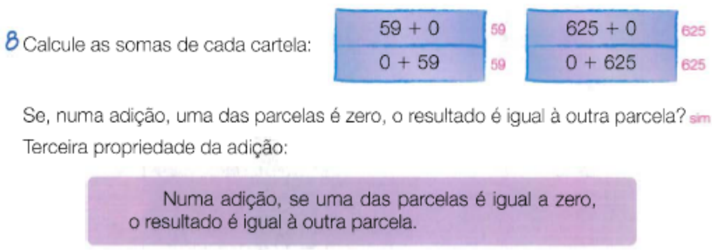


Figure 4.39 – (Giovanni et Giovanni Jr., 2005b, v.4, p. 66)

36. Texte proposé dans la Figure 4.39.

Presque 10 ans après, dans une version actualisée de cette collection, approuvée en 2016, nous retrouvons toujours ces mêmes activités. Bien que nous retrouvons également certains changements en regardant la totalité de la collection, ils ne sont pas présents en ce qui concerne l'étude des propriétés d'addition. Il s'agit alors d'un aspect qui est devenu stable dans cette collection - par un manque des critiques de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$?

Cependant, pour acquérir cette stabilité, le choix le plus accommodant a pu avoir été de faire disparaître ce qui gênait l'institution d'évaluation. Le problème est que ce qui reste, ce qui résiste, est quelque chose d'étrange avec une raison d'être douteuse.

En effet, ces technologies sont essentielles pour faire vivre de façon intelligible certaines praxis, en particulier celles liées aux calculs réfléchis. Cependant, ces techniques n'existent presque pas dans cette collection. Ce sont les algorithmes posés qui dominent l'étude. Alors, à quelle praxis correspondent effectivement ces logos qui sont conservés dans cette collection ?

Le problème du manque de connexion entre la praxis et le savoir est un phénomène connu dans la communauté didactique. Mais, c'est normalement la carence du discours technologico-théorique pour les techniques qui sont au centre des critiques, comme discutent Sierra, Bosch et Gascón :

> Actuellement, les mathématiques scolaires se caractérisent par le fait que le discours mathématique qui explique, justifie et interprète les techniques, qu'elles soient algorithmiques ou non, n'est pas intégré à la pratique mathématique des élèves dans le but de le rendre plus efficace. (Sierra Delgado et al., 2013, p. 809, traduction propre) [37]

Or, ce n'est pas exactement ce qui se passe dans cette collection, parce que les algorithmes posés ont leurs éléments technologiques exploités - qui n'ont pas été présentées ici.

Finalement, ce que nous constatons est que le travail de ces logos en tant qu'objet a été énormément affaibli, sans la compensation d'une participation active dans les techniques. Néanmoins, l'institutionnalisation de ces propriétés permet de garder au moins un peu du théoricisme *volé* par les nouveaux mouvements de l'enseignement des mathématiques.

4.2.3 Conclusion de l'étude de cas sur les propriétés d'addition

Dans cette étude de cas, nous nous sommes centrés essentiellement sur un unique niveau de codétermination, celui du secteur, avec un intérêt particulier sur les propriétés d'addition. Cet intérêt est dû aux jugements que nous avons identifiés de la part de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

37. « Actualmente, la matemática escolar se caracteriza porque el discurso matemático que explica, justifica e interpreta las técnicas, sean estas algorítmicas o no, no está integrado en la práctica matemática de los alumnos con el objetivo de hacerla más eficaz. » (Sierra Delgado et al., 2013, p. 809)

Ces jugements portent essentiellement sur les conditions de rencontre avec les propriétés du champ additif à l'école primaire. Les descriptions à connotation négative suggèrent de proscriptions concernant les choix didactiques et d'autres jugements désignent les éléments souhaités par l'institution évaluatrice.

L'analyse des documents de I_{PNLD} nous montre que la place donnée à l'étude de ces propriétés est toujours un point de controverse dans I_M. Pour cette raison, les critiques de certains manuels sur ce point sont présentes tout au long des évaluations.

Un premier aspect traité par les évaluations est le formalisme découlant du mouvement des mathématiques modernes. Un second aspect est la raison d'être de l'étude des propriétés des opérations. I_{PNLD}, dans ce sens, a mis l'accent sur le caractère d'outil de ces propriétés afin de rendre intelligible et possible l'existence de certaines techniques.

Après cette entrée par les documents des évaluations, nous avons décidé de regarder les manuels en commençant par ceux évalués en 1994. Nous avons alors considéré trois collections qui ont été évaluées différemment par I_{PNLD}. Comme déjà suggéré par l'évaluation, nous nous sommes retrouvés face à des projets didactiques très différents. Cela nous a apporté plus de compréhension sur les jugements de I_{PNLD}.

Notre analyse s'est poursuivi sur l'une de ces collections, dont l'histoire est attachée aux évaluations. Notre objectif était d'avoir des observables sur des possibles changements des manuels liés aux évaluations de I_{PNLD}. Pour cela, nous avons visité les différentes éditions de cette collection au fil du temps.

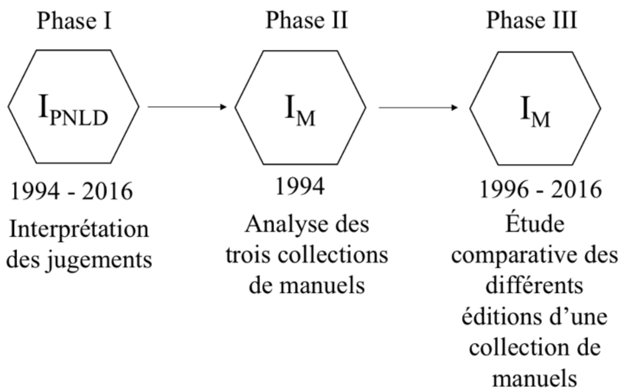


Figure 4.40 – Parcours d'étude II

L'analyse des différentes éditions de cette collection dans le temps nous a montré effectivement des changements importants dans l'étude des propriétés d'addition. Les premiers manuels nous ont faits découvrir des tâches communiquées à l'aide d'un langage algébrique.

> [. . .] la croyance qui prévaut était que l'introduction de propriétés structurelles des

> opérations, qui justifiait logiquement chaque passage dans le transformisme algébrique, permettrait à l'élève d'identifier et d'appliquer ces structures dans de différents contextes sous-jacents. (Fiorentini et al., 1993, p. 84, traduction propre) [38]

Ce langage a disparu de l'école primaire. Nous reviendrons plus tard sur cet aspect, qui sera sujet d'une étude de cas dans le bloc du savoir-faire.

Nous avons vu aussi disparaître de ces manuels l'étude en soi des propriétés d'addition. Et nous constatons que le manque d'une diversité des techniques de calcul n'offre pas des conditions pour que ces propriétés soient exploitées en tant qu'outil. Cela montre un des effets (nocifs) de la survalorisation des algorithmes posés, qui sera également sujet de nos discussions plus tard.

Pourtant, certaines de ces propriétés sont toujours institutionnalisées à la fin de ce cycle scolaire, encore que sans une raison d'être apparente. Une espèce de monument - à quoi sert-il ? Il sert à décorer.

Ces discussions sont bien entendu particulièrement liées à une *instance* représentative de $\mathrm{I_M}$. Mais elles nous révèlent des manœuvres possibles pour s'adapter aux gestes didactiques d'autres institutions de la noosphère.

38. « [. . .] prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos que estivessem subjacentes. » (Fiorentini et al., 1993, p. 84)

Conclusions Du Bloc Du Savoir

En revenant sur le schéma de la transposition didactique [39], nous voyons que le modèle de curriculum à être enseigné - le prescrit, dans le langage courant - se construit à l'ombre de I_1.

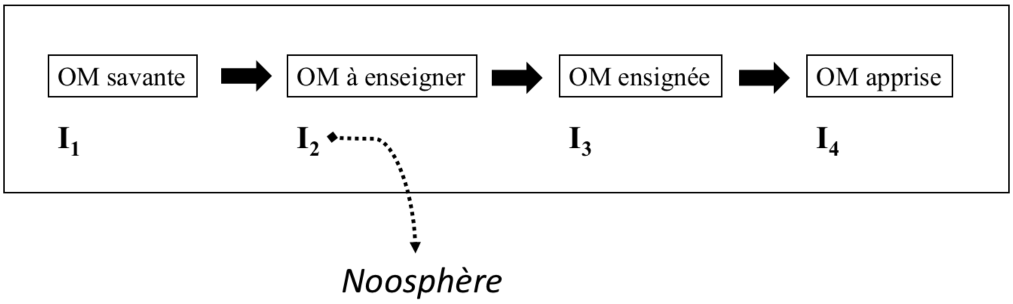


Figure 4.41 – Transposition didactique

La noosphère alors est, entre autres, le filtre de la culture (en y incluant les manies) des Mathématiques Savantes. Un filtre pour éviter les possibles dégâts transpositifs.

La réforme des mathématiques modernes a été conduite par la volonté de rétrécir la distance entre I_1 et I_2, et par conséquent la distance entre I_1 et le *système stricto sensu*, I_3 et I_4. L'histoire nous a montré l'échec de ce choix et les noosphères des différentes sociétés se sont mises au travail pour repenser le curriculum, avec une participation spéciale d'une nouvelle institution en émergence, celle que nous avons nommée I_{EM}. Le problème est que la noosphère du Brésil, comme nous l'avons présenté au début de ce chapitre, est restée quasiment inactive pendant une période. Une noosphère comme celle-là n'aide pas au processus de *défigement* du curriculum (Chevallard, 2019).

Après la réanimation de cette noosphère, le curriculum est rentré dans un état de bouleversement. Dans les deux études de cas qui composent nos analyses du bloc du savoir, nous avons montré cela à partir de la caricature de la théorie des ensembles présente dans le curriculum et l'appréciation excessive du formalisme, manifesté par un langage robuste et une valorisation en soi des propriétés mathématiques.

Ces deux études de cas témoignent fortement du rôle des ostensifs dans le bloc du savoir. Sans l'introduction de certains ostensifs à l'école primaire, l'héritage des mathématiques modernes ne se révèlerait pas si explicite dans cette phase de scolarité. A cet égard, il est bien de dire qu'une des *manies* des Mathématiques Savantes se trouve justement dans l'affection pour certains ostensifs et le rejet d'autres.

39. « Dans ce schéma, I1 est l'institution productrice du savoir mathématique, I2 la noosphère, I3 l'institution scolaire et I4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique » (Bosch et Gáscon, 2005, p. 116).

> Nous avons vu qu'il existe des contraintes écologiques générales sur les praxéologies mathématiques au niveau des registres ostensifs dominants, contraintes qui seraient en un sens indépendantes de la praxéologie concrète considérée. En sens inverse, il existe aussi des contraintes écologiques à des niveaux « microscopiques » du travail mathématique qui, par le fait de produire des variations dans l'instrumentation ostensive des techniques, peuvent bouleverser les conditions d'existence et d'évolution d'une praxéologie. La description des différentes organisations mathématiques produite dans la recherche en didactique ou dans les institutions didactiques et dans leurs noosphères, ne peut négliger la dimension ostensive de ces praxéologies, comme si le savoir mathématique et les connaissances qu'il permet de produire étaient indépendants de ces entités dans lesquelles il se matérialise, comme s'il pouvait exister indépendamment des « molécules ostensives » qui le constituent. (Bosch et Chevallard, 1999, p. 105)

Ces deux études de cas nous ont orientés vers des choix méthodologiques spécifiques en fonction de leurs caractéristiques. Nous avons essayé de garder dans la structure de leurs présentations nos parcours d'analyse, afin de révéler les besoins et les intuitions qui ont conduit nos choix méthodologiques. Nous en profitons ici pour expliquer certaines différences de ces parcours.

Dans la première étude de cas, sur la théorie des ensembles, nous avons fait des allers-retours entre les documents de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et les manuels de I_{M}. En effet, les manuels ont été nécessaires pour inférer comment cette théorie intervenait effectivement dans l'étude du champ additif. C'est-à-dire, l'analyse des manuels a dégagé des éléments relevant de niveaux plus bas de codétermination, qui sont traitées superficiellement dans le discours d'évaluation. Ce sont dans ces niveaux que nous pouvons voir les effets sur les praxéologies associées à notre $\mathrm{GT}^{+/-}$. Dans le cas des propriétés, nous nous sommes situés dans le niveau cible de l'étude, au niveau du secteur.

Un autre aspect qui différencie ces deux études concerne la nature des nouvelles conditions et contraintes que $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ a cherché de mettre en place. Le premier cas est caractérisé par la proscription de la théorie des ensembles, alors que le deuxième concerne plutôt la proscription de certaines pratiques et la prescription d'autres, en touchant à des aspects écologiques de la vie des propriétés de l'addition.

Le choix du corpus a été aussi différent d'une étude de cas à l'autre. Ce facteur est dû à l'hétérogénéité des manuels produits par I_{M}. Le fait est que le même corpus de manuels ne nous offre pas toujours des observables pertinents pour chaque étude de cas.

La question est que les auteurs, accompagnés de leurs équipes de maison d'édition, peuvent produire des projets d'étude différents. Les similarités de ces choix nous permettent d'identifier des *vulgates* (Chervel, 1990). Cependant, certains d'autres phénomènes ne sont communs qu'à certaines instances de I_{M}. L'extrait d'un manuel de 1993, présenté ci-après, illustre bien cela.

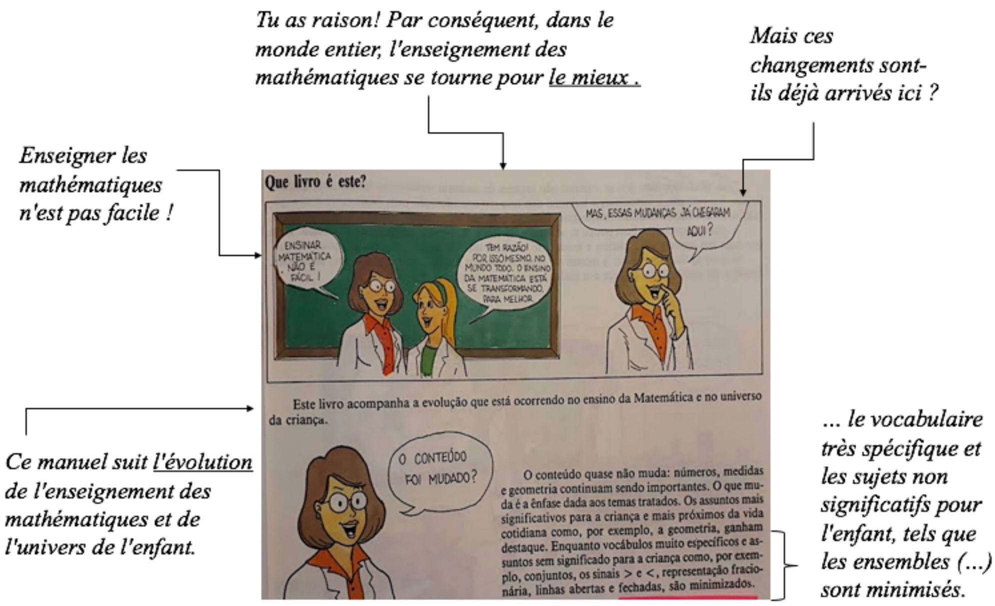


Figure 4.42 – (Imenes et al., 1993)

En ce qui concerne l'héritage de la réforme des mathématiques modernes, notons que ce manuel serait dès la première évaluation un *bon* manuel vis-à-vis de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. La défense des « changements » et de « l'évolution de l'enseignement des mathématiques » présente dans cette image révèle que ce manuel a été clairement assujetti à ce que disait à l'époque l'institution scientifique I_{EM}. Cependant, cela n'était pas le cas de beaucoup d'autres manuels. Ce manuel ne serait pas utile, par exemple, pour étudier l'impact de la théorie des ensembles dans le champ additif.

Nous en profitons pour souligner à nouveau la place de I_{EM} dans ce jeu de pouvoir à propos de qui décide quoi dans la noosphère. Cette institution exerce effectivement une place spéciale dans cette noosphère. Pour cela, nous remarquons que même I_{M} s'adresse à I_{EM} pour montrer son engagement à une noosphère basée sur la science, et alors vue comme plus juste. Regardons ce qui est écrit dans une collection de manuels (une instance de I_{M} portant une évaluation d'elle-même) :

> Les nouveaux paradigmes de l'éducation suggèrent la formation d'un élève critique, capable d'analyser et d'interpréter le monde qui l'entoure. Tenant compte du rôle fondamental des mathématiques dans ce contexte, ces manuels entendent établir un lien entre l'éducation mathématique et la formation du sujet autonome et conscient de son rôle d'agent de transformation de la réalité. (Giovanni Jr., 2014a, p. 258, v.4, traduction propre) [40]

Un dernier point à retenir est que les effets de l'assujettissement sont également distincts d'une

40. « Novos paradigmas em Educação apontam para a formação de um aluno crítico, capaz de analisar e interpretar o mundo ao seu redor. Levando em conta o papel fundamental da Matemática nesse contexto, esta coleção pretende estabelecer um elo entre a Educação Matemática e a formação do sujeito autônomo e consciente do seu papel de agente transformador da realidade. » (Giovanni Jr., 2014a, p. 258, v.4)

étude de cas à l'autre. I_M a beaucoup changé et est devenu en conformité avec les jugements de I_{PNLD} sur la théorie des ensembles, au point que cela n'est plus un objet d'évaluation. Par contre, ce n'est pas le cas de la raison d'être des propriétés d'addition, bien que les manuels aient aussi changé dans le temps sur ce sujet.

Pour avancer sur d'autres tensions curriculaires et l'étude de l'assujettissement de nos deux institutions, nous passerons au bloc du savoir-faire.

$$[\ T\ ,\ \tau\ ]$$

Introduction II

Les études de cas du bloc du savoir-faire ont une particularité méthodologique autour de la notion de générateur de types de tâches, pour nous $GT^{+/-}$ défini comme suit dans notre modèle de référence :

Tableau 4.10 – Les cinq variables de $GT^{+/-}$

$GT^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, *V1, V2, V3, V4, V5*				
V1 : Ostensifs	V2 : L'idée de la situation	V3 : L'information cachée (?)	V4 : Les deux nombres connus de la tâche	V5 : L'existence de retenue

Chaque étude de cas relative au bloc du savoir-faire sera caractérisée par un regard attentif sur une partie des types de tâches générés par $GT^{+/-}$. Pour cela, nous instancions certaines de ces variables, ignorons temporairement l'existence d'autres et considérons alors quelques-unes comme observables. Notre intention est de mettre en évidence ce qui vraiment importe dans chaque cas. À ce propos, nous introduisons la notion de sous-générateur de types de tâches :

Soit GT : [T, SV] et GT' : [T', SV'].

GT' est un sous-générateur de GT si T' $\subseteq$ *T et SV'* $\subseteq$ *SV*

La première étude de cas du bloc du savoir-faire est caractérisée par le sous-générateur suivant :

Tableau 4.11 – Sous-générateur de types de tâches GT_x

GT_x : [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sou la forme* « ? +/- b = c » ou « a +/- ? = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, V1, V4]	
V1 : Ostensifs	*V4 :Les deux nombres connus de la tâche*

Nous avons incorporé dans le type de tâches principal du générateur une instanciation de la variable V3. Cela veut dire que nous sommes intéressés ici aux types de tâches qui ont une caractéristique spécifique : les calculs à trous. Ainsi, nous avons éliminé de notre liste toutes les tâches du type « a +/- b = ? ». Nous avons donc T_x plus spécifique que $T^{+/-}$, $T_x \subset T^{+/-}$. Nous avons aussi décidé d'ignorer les variables V2 et V5, car elles n'apportent pas nécessairement d'éléments pour comprendre cette étude de cas. Le nouveau système de variables est évidemment plus restreint que le premier. Nous avons alors $GT_x \subset GT^{+/-}$.

Les choix que nous venons d'énoncer n'ont pas été faits de façon aléatoire. Lorsque nous analysons les discours de I_{PNLD}, nous identifions que l'intention de faire changer les praxis retrouvées dans les manuels repose sur certains caractères, que nous pouvons exprimer à l'aide des variables. Les sous-générateurs sont donc déjà des résultats d'analyse.

Une fois que nous décidons sur quelles variables centrer notre regard, le travail d'analyse consiste, entre autres, à identifier les valeurs que ces variables prennent dans les manuels au fil du temps. Du point de vue méthodologique, l'assujettissement de I_M à I_{PNLD} est marqué, spécialement au niveau de la praxis, par les changements des valeurs considérées par I_M.

Les deux autres études de cas, concernant les tâches contextualisées et la technique des algorithmes posés, sont caractérisées par les sous-générateurs suivants :

Tableau 4.12 – Sous-générateur de types de tâches GT_c

GT_c : [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, V2]
V2 : L'idée de la situation

Tableau 4.13 – Sous-générateur de types de tâches GT_+ et GT

<table>
<tr><td colspan="2">GT_+ : [Chercher une valeur manquante d'une situation donnée sous la forme « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4, V5]</td></tr>
<tr><td>V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td>V5 : L'existence de retenue</td></tr>
<tr><td colspan="2">GT_- : [Chercher une valeur manquante d'une situation donnée sous la forme « a - b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4, V5]</td></tr>
<tr><td>V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td>V5 : L'existence de retenue</td></tr>
</table>

La présentation de l'origine de ces générateurs et les précisions sur leurs types de tâches principaux et leurs systèmes de variables auront lieu lors des analyses.

4.3 Le Cas De L'algebrisation Des Calculs À Trous

Dans le document de 1994, relatif à la première évaluation de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, les expressions « traitement algébrique » et « cheminement algébrique » sont fréquemment présentes dans des critiques sur les quatre opérations élémentaires. C'est ce premier constat qui nous a poussés à considérer cette étude de cas.

Il est important de dire que quand nous avons décidé de cadrer nos analyses dans le « champ additif », nous n'avions pas réfléchi sur le sujet « algèbre », comme nous n'avions pas imaginé de parler de la théorie des ensembles. Le mot « algèbre » apparait dans notre travail avec les données empiriques, accompagné également des questions que nous nous posions sur ce que signifie « une technique algébrique », en reprenant du point de la TAD les deux expressions utilisées par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Nous allons montrer que l'intention de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, à un niveau général, était de motiver une relecture de la dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre à l'école primaire, qui a été bouleversée par la réforme des mathématiques modernes. Pour comprendre ce qui existe dans les manuels brésiliens de l'époque et les changements survenus, nous proposons dans un premier temps une discussion brève sur cette dialectique.

4.3.1 La dialectique de l'arithmétique et l'algèbre : quelques commentaires sur leurs frontières

Il y a un domaine des mathématiques qu'on reconnait par le nom « Algèbre », comme la « Géométrie », l'« Arithmétique »... Mais, en dehors de ce domaine, on peut se retrouver dans un culte de l'algébrisation, qui se manifeste particulièrement par l'usage d'un langage symbolique, appelé parfois « langage mathématique ». Ce langage apporte un sens particulier sur ce qui signifie *faire des mathématiques*. L'école a un rôle indiscutable dans sa manutention.

> Dans la diffusion de l'algèbre par l'école, par exemple, une contrainte de civilisation, qui s'indurer dans la « métaphysique occidentale » (Derrida), joue formidablement : la préférence pour les mots, la passion « rhétorique » et la répulsion corrélative pour le style « syncopé » et « symbolique » des sciences modernes que le sujet de nos sociétés rencontre d'abord dans l'algèbre scolaire. (Chevallard, 2011, p. 03)

La définition de ce qu'*est* l'algèbre et le rôle du langage symbolique dans les institutions d'enseignement ont évolué historiquement. Dans le programme français de 1945, par exemple, nous voyons le terme « nombres algébriques » pour les nombres relatifs (Chevallard, 1984). En remontant plus loin dans le temps, dans un livre de John Adams de 1703 [41], un chapitre est dédié aux « définitions algébriques », où les signes « + » et « - » sont présentés. Dans ce même livre, dans les chapitres

41. https ://archive.org/details/cockersdecimalar00cock/ge/18 , 15 décembre 2019

précédents, les calculs résolus d'addition et de soustraction ne sont pas faits avec ces signes. Ce que nous voyons est qu'« avec quelques variations en fonction des périodes et des pays, le fait général relève de ce que l'existence de l'algèbre en tant que domaine des mathématiques enseignées est tout au plus fluctuante. » (Ruiz-Munzón et al., 2012, p. 03). En plus, cette facette d'être vue comme autonome et à la fois d'être transversal aux autres domaines des mathématiques est également un sujet controversé quand on parle de curriculum. Sur ce point nous allons nous concentrer sur la dialectique entre l'arithmétique et l'algèbre.

Chevallard (1984) signale deux dialectiques entre ces deux domaines. L'une d'elles est celle de les considérer comme opposées. Cette dichotomie, qui représente une tradition ancienne, suggère dans un premier temps de débuter par l'apprentissage de l'arithmétique, qui est vue comme un ensemble cohérent et relativement complet. L'algèbre doit être introduite dans un deuxième temps, provisoirement appuyée sur l'arithmétique. Munzón et al. (2015) signalent que le curriculum scolaire de la majorité des systèmes éducatifs occidentaux avant la réforme des mathématiques modernes était organisé dans cet esprit.

Cette délimitation du terrain des mathématiques est aussi frappante à partir des ostensifs qu'on mobilise dans chaque domaine. « Le passage de l'arithmétique à l'algèbre est d'autant mieux marqué, jusqu'au début du XIXème siècle, que c'est seulement avec l'étude de l'algèbre que s'introduisent les « signes algébriques ». Longtemps, en effet, l'arithmétique les ignore » (Chevallard, 1984, p. 54).

Par contre, l'arrivée de la réforme des mathématiques modernes impacte fortement cette dialectique. Il s'agit, comme dit Chevallard (1984), du changement d'une tradition séculaire de comment on organise les mathématiques.

> L'effacement de l'opposition arithmétique/algèbre, en effet, altère les conditions de la mise en rapport du numérique et de l'algébrique. L'ancien rapport d'outil de travail à objet travaillé semble perdu. Les deux domaines - le numérique, le littéral - vont coexister dans une simple juxtaposition, existants qui trouvent en eux-mêmes leur propre justification. Les rapports, naguère encore banals entre ces deux ordres de réalité mathématiques, semblent désormais abolis. Ou plutôt, ils laissent place à des rapports nouveaux, et inversés : ce n'est plus l'algébrique qui vient permettre d'étudier le numérique, c'est le numérique qui « justifie » et « permet de comprendre l'algébrique ». (pp. 76-77)

Fiorentini et al. (1993) indiquent pour cette période une nouvelle conception de l'enseignement, nommée « fondamentaliste-structurel ». La valeur linguistique basée sur la logique est au cœur de cette manière de concevoir l'algèbre, qui assume un rôle de soutenir les autres domaines des mathématiques. Ce n'est pas par hasard que le mot « formalisme », ou « pseudo-formalisme », est associé au moment de la réforme, car les formes algébriques « offrent une image formelle du domaine de calcul » (Chevallard, 1989b).

Même après la vague de la réforme, la triade classique « arithmétique-algébrique-géométrie » semble perdue définitivement. Or, l'algèbre reprend son rôle instrumental pour résoudre des problèmes, mais garde aussi son caractère fondamentaliste (Fiorentini et al., 1993).

Il est intéressant de remarquer que l'article auquel nous faisons référence de ces trois derniers auteurs a comme titre « Contribution pour repenser... l'éducation algébrique élémentaire » [42]. Ils commencent le texte en disant que, contrairement à la Géométrie, l'Algèbre semble être reléguée à un état de léthargie à ce moment-là (1993) en ce qui concerne les discussions de l'enseignement de mathématiques au Brésil. L'article propose une réflexion pour repenser cet enseignement. Peu après cette publication, en 1997 un livre de deux autres chercheurs brésiliens, Lins et Gimenez, est publié avec le titre « Perspectives en Arithmétique et Algèbre pour le siècle XXI » [43]. Nous voyons dans ces publications une autre tendance qui semble toujours d'actualité, nommée « pensée algébrique » - qui peut à leur tour avoir aussi différentes interprétations, ce qui ne sera pas ici objet de discussion.

Cette nouvelle conception propose une vision contraire à la subordination d'une pensée algébrique à l'usage d'un langage algébrique (Fiorentini et al., 1993).

> Cette approche propose l'introduction de la pensée algébrique dès les premières années scolaires, de manière intégrée à l'activité mathématique liée aux différents domaines des mathématiques à cette étape. Des auteurs, tels que Carraher, Schliemann et Brizuela (2006), Kaput (2000), Malara (2003), Subramaniam (2004) et Warren (2004) ont axé leurs recherches sur la pensée algébrique qui peut être promues dans le contexte numérique à partir d'activités qui facilitent la transition entre l'arithmétique et l'algèbre. Ces auteurs proposent d'adopter une approche structurelle pour rompre avec l'importance du calcul qui prédomine dans les premières années d'études et favoriser le développement de modes de pensée algébriques, aidant ainsi les élèves à se familiariser avec les structures qui sous-tendent les opérations mathématiques et leurs propriétés. Cette approche consiste essentiellement à proposer aux élèves des problèmes dans lesquels peuvent s'extraire modèles numériques et relations fonctionnelles exprimées verbalement. (Munzón et al., 2015, p. 70, traduction propre) [44]

Or, lorsque l'on regarde les Paramètres Curriculaires Brésiliens pour l'école primaire de 1997, nous notons que le mot « algèbre » (y compris les variations de ce terme, comme algébriques) n'a pas beaucoup d'importance parmi les quatre-vingts pages qui le composent. Un des rares moments où ce

42. Titre original en portugais : « Contribuições para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar ». (Fiorentini et al., 1993)

43. Titre original en portugais : « Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI ». (Campos Lins et Giménez, 1997)

44. « Este enfoque propone la introducción del pensamiento algebraico desde los primeros cursos escolares, de forma integrada con la actividad matemática relativa a las diferentes áreas de la matemática en esta etapa. En particular, autores como Carraher, Schliemann y Brizuela (2006), Kaput (2000), Malara (2003), Subramaniam (2004) y Warren (2004) han centrado su investigación en el pensamiento algebraico que puede ser promovido em el contexto numérico a partir de actividades que faciliten la transición entre la aritmética y el álgebra. Estos autores proponen adoptar un enfoque estructural para romper con el énfasis computacional que predomina en los primeros cursos escolares y favorecer el desarrollo de modos de pensamiento algebraico, ayudando así a los alumnos a familiarizarse con las estructuras que subyacen en las operaciones matemáticas y sus propiedades. Este enfoque consiste básicamente en proponer a los alumnos problemas en los que se deben extraer patrones numéricos y relaciones funcionales expresadas verbalmente. » (Munzón et al., 2015, p. 70)

mot est présent, une contrainte est énoncée sur la place de l'algèbre à l'école :

> Bien qu'une pré-algèbre puisse déjà être développée dans les premières années, c'est surtout dans les dernières années du collège que les travaux algébriques seront étendus ; en travaillant avec des situations problématiques, l'élève reconnaîtra différentes fonctions de l'algèbre (telles que la modélisation, la résolution de problèmes arithmétiquement insolubles, la démonstration), la représentation de problèmes au moyen d'équations (identification de paramètres, de variables et de relations et la mise en contact avec des formules, des équations, des variables et des inconnues) et connaître la « syntaxe » (règles de résolution) d'une équation. (Brasil, 1997, p. 39, traduction propre) [45]

L'expression « pré-algébrique » est timidement traitée par ce document. C'est seulement dans les paramètres curriculaires dédiés au collège que figure une discussion plus accentuée sur l'enseignement de l'algèbre. La notion « pré-algèbre » est reprise ici de façon un peu plus claire :

> Le travail avec l'algèbre dans ce cycle a pour point de départ la "pré-algèbre" développée au cycle précédent, dans lequel les notions algébriques sont explorées à travers des jeux, des généralisations et des représentations mathématiques (comme des graphes, des modèles), et non par des procédures purement mécaniques pour traiter des expressions et des équations. (Brasil, 1998b, p. 84, traduction propre) [46]

> Les adolescents développent de manière très significative la capacité de penser "abstraitement" s'ils disposent d'expériences variées impliquant des notions algébriques, depuis l'école primaire, de manière informelle, dans le cadre d'un travail articulé avec l'Arithmétique. (Brasil, 1998b, p. 117, traduction propre) [47]

Les conditions d'existence de cette *pré-algèbre* à l'école primaire sont liées à un non-formalisme et à une non-procédure mécanique des expressions et équations. La première évaluation de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ en 1994 détecte, cependant, une dialectique entre le numérique et l'algébrique différente de celle qui commençait à résonner dans ces institutions de la noosphère des années 1990. Le retard des manuels de cette époque apparaissait de manière contondante sur cet aspect et, spécialement, sur les calculs à trous.

45. « Embora nas séries iniciais já se possa desenvolver uma pré-álgebra, é especialmente nas séries finais do ensino fundamental que os trabalhos algébricos serão ampliados ; trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a "sintaxe" (regras para resolução) de uma equação. » (Brasil, 1997, p. 39)

46. « O trabalho com a Álgebra, neste ciclo, tem como ponto de partida a « pré-álgebra» desenvolvida no ciclo anterior, em que as noções algébricas são exploradas por meio de jogos, generalizações e representações matemáticas (como gráficos, modelos), e não por procedimentos puramente mecânicos, para lidar com as expressões e equações. » (Brasil, 1998b, p. 84)

47. « Os adolescentes desenvolvem de forma bastante significativa a habilidade de pensar « abstratamente» se lhes forem proporcionadas experiências variadas envolvendo noções algébricas, a partir dos ciclos iniciais, de modo informal, em um trabalho articulado com a Aritmética. » (Brasil, 1998b, p. 117)

4.3.2 Les praxéologies des calculs à trous : une reprise à notre modèle de référence

Dans quelques manuels évalués en 1994, le langage algébrique était naturellement présent dans l'étude des propriétés arithmétiques, c'est ce que nous avons déjà montré dans la dernière étude de cas. Or, nos données empiriques montrent que l'algébrisation a trouvé aussi sa place autour des types de tâches comme « ? +/- b = c » ou « a +/- ? = c ». Ce constat invite à centrer notre attention sur les calculs à trous pour bien comprendre cette filiation, c'est ce que nous proposons de faire avant de passer aux analyses des données.

En reprenant notre modèle de référence, nous notons que les praxéologies auxquelles nous nous sommes intéressés ici portent sur une partie plus restreinte que celle générée par GT$^{+/-}$.

Tableau 4.14 – Générateur de types de tâches GT^{+}

GT$^{+/-}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, *V1, V2, V3, V4, V5*				
V1 : Les Ostensifs	V2 : L'idée de la situation	V3 : L'information cachée (?)	V4 : Les nombres	V5 : L'existence de retenue

Pour prendre en compte cette partie plus restreinte, nous avons décidé de caractériser un sous-générateur de types de tâches ($GT_x \subset GT^{+/-}$). Cela permet d'identifier plus précisément où I_{PNLD} a l'intention de provoquer des changements par la création de nouvelles contraintes par rapport à ce qui existe dans les manuels.

Pour l'élaboration de ce sous-générateur, le premier pas a été de modifier le complément du type de tâches principal de GT$^{+/-}$.

T$^{+/-}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs

T_x : Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « ? +/- b = c » ou « a +/- ? = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs

Évidemment nous avons $T_x \subset T^{+/-}$. Ce passage de la description plus générale à une description plus spécifique est le résultat de l'instanciation de la variable V3 de notre $GT^{+/-}$ du départ.

Tableau 4.15 – Instanciation de la variable V3

V3 : *L'information cachée (?)*	~~V3a. opération directe : « *a* +/- b = ? »~~
	V3b. opération lacunaire : « a +/- *?* = c » ou « ? +/- *b* = c »

Par rapport aux autres variables, à partir aussi d'une rétroaction de nos données empiriques, nous constatons qu'effectivement seulement deux, V1 et V4, sont fondamentales pour cette étude de cas. Les autres, V2 et V5, ne participent pas de façon décisive sur les aspects questionnés par I_{PNLD} à propos de l'algébrisation.C'est pour cela que le système de variables de GT_x est aussi plus compact que l'original.

Tableau 4.16 – Sous-générateur de types de tâches GT_x

GT_x : [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par,* ou *donnée sous la forme, « a +/- ? = c » ou « ? +/- b = c »,* où a, b et c sont des nombres entiers positifs, *V1, V4]*	
V1 : Les Ostensifs	*V4 :Les deux nombres connus*

Cette caractérisation de l'étude de cas à partir d'un sous-générateur est un résultat en soi de l'analyse. Elle est une première identification, à partir des documents de I_{PNLD} et des traces des manuels, d'un point discutable et favorable aux changements. Autrement dit, le sous-générateur permet de cadrer où se trouve une non-conformité entre les institutions noophèriennes, I_M et $I_{PNLD.}$ De plus, cette caractérisation permet d'optimiser méthodologiquement l'analyse des manuels.

Par la suite, nous allons conduire une étude *a priori* des valeurs que ces deux variables peuvent assumer et leurs impacts sur les techniques de calcul à trous, en considérant une possible pratique d'*algébrisation* de l'activité mathématique.

4.3.2.1 Sur les ostensifs dans les types des tâches et les techniques des calculs à trous

Dans un premier temps, nous proposons de nous concentrer sur la variable V1.

Nous revenons maintenant à une discussion déjà évoquée dans le chapitre 2 : en considérant les tâches ci-dessous, sont-elles d'un même type ?

t_1 : calculer « $25 + x = 40$ »

t_2 : calculer « $25 + n = 40$ »

t_3 : calculer « $25 + \heartsuit = 40$ »

t_4 : calculer « $25 + \ldots = 40$ »

Sans l'ambition de donner une réponse exhaustive, cette question nous permet d'avancer sur l'effet des ostensifs dans les praxis des calculs à trous.

Commençons par dire que dans l'approche anthropologique où nous nous plaçons, la réponse à cette question se trouve dans la prise en compte de l'institution où ces tâches vivent ou sont candidates à vivre. En plaçant alors la question dans le cadre de notre étude, nous posons cette question autrement : les ostensifs « x », « n », « $\heartsuit$ » et « $\ldots$ » ont-ils un impact sur les praxéologies des calculs à trous à l'école primaire ? Ou encore, ces ostensifs ont-ils les mêmes valences sémiotiques et instrumentales dans cette institution pour les tâches décrites ci-dessus ?

Analysons de plus près ces ostensifs. Dans ces 4 tâches nous avons la mobilisation du *langage arithmétique* combiné avec d'autres ostensifs qui sont soit *algébriques*, soit des *pictogrammes*. Ces deux derniers ont pour rôle de représenter la valeur inconnue de l'égalité, un contrat de signification qui doit être assumé dans l'institution. Dans ce sens, les pictogrammes peuvent être perçus comme un geste didactique qui suggère leur mobilisation hors de sa valence sémiotique vulgarisée socialement. Si nous considérons l'ostensif « $\heartsuit$ », par exemple, nous savons qu'il représente avant tout un cœur (ou l'amour). Or, dans la tâche, le « $\heartsuit$ » doit être entendu comme la valeur inconnue d'un calcul à trous. Nous voyons là une différence importante entre « $\heartsuit$ » et « x » par rapport à leurs valences sémiotiques. Bien que le « x » soit avant tout une lettre de l'alphabet, son sens algébrique est déjà popularisé [48].

L'ostensif « $\ldots$ », en tant que pictogramme, a aussi ce même geste didactique intériorisé. Cependant, il a quelque chose de différent du « $\heartsuit$ ». La valeur inconnue n'est pas cachée ou remplacée par les trois points ; les trois points représentent *un vide*. Un vide qui doit être rempli par l'élève avec la réponse qui rend le calcul correct. Ils ont donc une fonction dans l'énoncé de la tâche que les autres ostensifs ne l'ont pas. Notons que pour cette raison à la fin l'élève arrivera difficilement à l'expression « $\ldots = 9$ », comme il peut se passer avec « $x = 9$ » et « $\heartsuit = 9$ ». Avec « $\ldots$ », à la fin nous nous retrouvons avec une expression du type « $5 + 4 = 9$ ».

Malgré cette différence de « $\ldots$ » et « $\heartsuit$ », nous avons décidé de les associer à une même valeur, « V1.b : Pictogrammes ». Nous justifions ce choix par notre intérêt à distinguer des ostensifs algébriques et non-algébriques, en sachant que l'introduction des lettres peut être une marque forte de l'algébrisation du corpus mathématique (Chevallard, 1989b). Notons que pour la même raison nous ignorons la différence entre « x » et « n » et nous les associons simplement à la valeur « langage algébrique »,

48. Au moins pour ceux qui occupent la position d'enseignant ou d'auteur de manuel.

bien qu'ils puissent impacter différemment les praxéologies personnelles [49].

Pour interroger la valence instrumentale de ces ostensifs, nous passerons maintenant aux techniques : ces ostensifs, sont-ils manipulables pour accomplir les calculs à trous ? Prenons la tâche « 8 + ? = 12 » pour illustrer trois mises en œuvre des techniques possibles, présentées dans le tableau ci-dessous. Le « ? » peut être un ostensif algébrique ou un pictogramme.

Tableau 4.17 – Trois mises en œuvre de techniques pour accomplir la tâche « 8 + ? = 12 »

τ_1	τ_2	τ_3
8 + ? = 12 On cherche le complément $8, \underbrace{9, 10, 11, 12}_{4}$	8 + ? = 12 On applique l'opération inverse 12 - 8 = 4	8 + ? = 12 ? = 12 - 8 ? = 4

Notons que seulement dans la mise en œuvre de τ_3 l'ostensif qui représente la valeur inconnue du calcul à trous est transposé au niveau de la technique. C'est-à-dire, l'ostensif conserve sa valence sémiotique et acquiert une valence instrumentale pour assurer la mise en œuvre de la technique. Ce caractère de garder une mémoire du processus est typique du traitement algébrique, c'est pour cette raison que nous la considérons comme une technique algébrique.

Contrairement à τ_3, dans les techniques τ_1 et τ_2, quel que soit l'ostensif utilisé en « ? », il ne participe pas comme un outil pour accomplir la tâche. « L'arithmétique, en revanche, demeure essentiellement un savoir oral, qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur les nombres. » (Chevallard, 1989b, p.64). La valence instrumentale des ostensifs qui ont le rôle de représenter la valeur inconnue est quasiment absente dans ces praxis. Cela révèle une différence importante entre les techniques algébriques et arithmétiques pour les calculs à trous.

Ce traitement algébrique peut également être retrouvé au niveau des techniques pour les tâches décrites en « langage naturel » - registre ostensif privilégié pour communiquer les situations problèmes, est dans l'univers mathématique, pauvre instrumentalement. Ces tâches demandent donc une modélisation pour être accomplies, c'est-à-dire la prise en compte du type de tâches « $T_{\text{traduction}}$: Choisir des ostensifs qui permettent de traduire et de manipuler convenablement une situation donnée. ». (Discussion faite dans le chapitre 3). À cet égard, « le choix des moyens sémiotiques devient central : c'est lui qui déterminera le *contrôle* du processus de modélisation et de son résultat, le modèle et le travail du modèle. » (Chevallard, 1989b, p. 62).

Une fois modélisée, on se retrouve dans les tâches du type « a + ? = c » ou « ? + b = c ». Prenons un exemple présenté par Chevallard (1989b) : « Paul a 8 billes, il en gagne un certain nombre et a

49. Praxéologie personnelle au sens de Croset et Chaachoua (2016)

alors 13 billes, combien en a-t-il gagné ? ». L'auteur commente que, dans un premier niveau, l'élève reste sur le concret, avec la manipulation des objets physiques. Ensuite, dans un second niveau il est prévu un traitement arithmétique pour accomplir la tâche.

> [. . .] la résolution du problème ne suppose plus que les instruments standardisés énumérés plus haut, papier et crayon. L'élève construit un modèle qui peut s'écrire $8 + \ldots = 13$ et qui préfigure la notation classique de l'équation du premier degré $8 + x = 13$. Par le travail sur ce modèle, il obtiendra alors la valeur cherchée, qui sera trouvée par un algorithme de résolution de l'équation obtenue : par exemple en énumérant les entiers à partir de 1, et en calculant les sommes successives jusqu'à obtenir 13 : $8 + 1$, $8 + 2$, $8 + 3$, etc. ; plus tard en effectuant la soustraction de 8 à 13 par un algorithme de calcul longuement étudié. » (Chevallard, 1989b, p. 61)

L'analyse faite par Chevallard est adressée à l'école primaire. Notons comment l'auteur a exprimé la modélisation de la tâche : « $8 + \ldots = 13$ ». Il parle d'une *préfiguration* de l'équation du premier degré « $8 + x = 13$ », qui n'a pas de condition d'existence à ce niveau de scolarité. Pour les mêmes raisons, la technique algébrique n'est même pas citée dans ce contexte.

Nous passerons maintenant à l'analyse de la variable V4.

4.3.2.2 Sur les nombres dans les types des tâches et les techniques des calculs à trous

Dans notre modèle de référence, nous avons identifié quatre caractéristiques relatives aux nombres qui peuvent impacter le choix des techniques : leurs tailles, la taille de leur différence, l'existence des multiples d'une puissance de dix et si les nombres connus sont ou non de même ordre. Ces caractéristiques nous ont permis de catégoriser les valeurs de V4, ce que nous avons montré dans le chapitre 3. Sans revenir sur les détails de cette modélisation, nous proposons maintenant une brève analyse d'une liste de tâches qui illustrent des valeurs de V4 dans les calculs à trous. Notre intention est de provoquer une réflexion sur les portées des *techniques arithmétiques* et la *technique algébrique*[50]. Considérons donc les tâches suivantes :

t_1 : calculer « $5 + ? = 7$ »

t_2 : calculer « $85 + ? = 87$ »

t_3 : calculer « $37 + ? = 85$ »

t_4 : calculer « $100 + ? = 400$ »

Tout d'abord, revenons à la question qui a été posée pour la première variable : ces tâches, sont-elles d'un même type ? En considérant ce que nous avons déjà discuté sur les subjectivités institutionnelles, nous proposons un regard épistémologique à partir de leurs techniques. Pour cela, nous signalons ici quelques techniques possibles de notre modèle de référence, en prenant en compte leurs

50. La technique algébrique est celle où l'on préserve l'ostensif de la valeur inconnue et la structure des étapes de résolution.

portées pragmatiques, c'est-à-dire, l'ensemble des tâches sur lequel les techniques sont fiables (Kaspary, Chaachoua, et Bessot, 2020) :

- $\{t_1, t_2\} \subset P(\ \tau_{\text{Complément}})$ [51]
- $\{t_4\} \subset P(\ \tau_{\text{Réduction-en-unités}})$ [52]
- $\{t_2, t_3, t_4\} \subset P(\ \tau_{\text{Algorithme(1) -}})$ [53]

Notons qu'il y a des techniques territorialement plus ou moins puissantes, au sens qu'on peut les utiliser avec peu de risque d'erreur quasi partout ou seulement sur un petit domaine. C'est le cas, respectivement, de l'algorithme posé et de la technique de réduction en unités. Mais, cette puissance territoriale se réduit face à la concurrence de techniques plus efficaces. C'est pourquoi on peut questionner du point de vue didactique la recherche de solution de t_3, « 85 + ? = 87 » et t_4, « 100 + ? = 400 », à partir d'un algorithme posé de la soustraction. Néanmoins, il est bien de dire que même après la concurrence, ces techniques trouvent leurs places dans l'étude arithmétique.

Remarquons aussi que pour utiliser la technique de l'algorithme posé dans ces tâches, nous devrons inévitablement accomplir le type de tâche « $T_{\text{opération.inverse}}$: appliquer l'opération inverse de la tâche en jeu », pour passer du type de tâches « a + ? = c » au type « c - a = ? ». Ce qui n'est pas le cas si on utilise la technique du complément, par exemple.

Maintenant, considérons la technique dite algébrique. De façon généralisée nous pouvons modéliser les étapes de cette technique de la façon suivante :

a + ? = c

? = c - a

? = b

En gardant systématiquement la structure et l'ostensif de la valeur inconnue, le traitement algébrique employé est toujours le même indépendamment des valeurs de « a » et « c ». C'est-à-dire que les valeurs de V4, sur les caractéristiques des nombres, n'ont pas d'importance. C'est seulement au niveau du type de tâches « ? = c - a » que nous pouvons de nouveau distinguer des techniques de nature arithmétique.

La technique algébrique a donc une portée vraiment importante. La question que l'on se pose est : cette technique peut-elle être en concurrence avec des techniques purement arithmétiques ? Si oui, quelle est la possible conséquence de cette concurrence ?

51. Noyau de la technique Complément : Identifier le nombre plus petit connu dans la tâche ; Effectuer la séquence « a + 1, a + 2,. . . , a + b = c », au cas où a et c sont les valeurs connues et a > c ; Indiquer l'ordre de la séquence, « b ».
52. Noyau de la technique Réduction-en-unités : Effectuer « p +/- q », où a = p10n et b = q10n. Indiquer la valeur « (p +/- q) 10 n ».
53. Noyau de la technique Algorithme(1) - : Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche ; si ai < bi, alors attribuer à ai une unité de ai+1

La situation n'est pas vraiment la même que celle de la concurrence entre l'algorithme posé et les autres techniques, parce que le traitement algébrique n'existe pas sans la dimension arithmétique. Or, nous supposons que cette puissance en matière de portée peut devenir une contrainte pour la valorisation, puis l'existence, de certaines techniques arithmétiques, comme dans le cas de la technique de complément.

4.3.2.3 D'autres configurations de calculs à trous

Dans les discussions faites jusqu'à maintenant, à chaque fois nous sommes restés dans des exemples du type « a + ? = c », en nous posant la question sur l'ostensif « ? » et les caractéristiques des nombres « a » et « c ». Pourtant, il y a d'autres configurations de calculs à trous :

- ? + b = c
- ? - b = c
- a - ? = c

Nous n'avons pas distingué ces différents cas par une variable parce que notre intérêt n'est pas sur les calculs à trous en soi, mais sur la volonté d'algébriser l'activité mathématique qui se manifeste dans ces types de tâches. Néanmoins, quelques commentaires restent nécessaires.

Plusieurs techniques arithmétiques sont également applicables dans ces différentes configurations. Le choix d'une *bonne* technique arithmétique va dépendre, comme pour « a + ? = c », des valeurs que la variable V4 assume. Or, le cas « a - ? = c » mérite une certaine attention, car le type de tâches « $T_{\text{opération.inverse}}$: appliquer l'opération inverse de la tâche en jeu » n'intervient pas de façon directe dans les techniques, même si l'on est dans une démarche algébrique. Les tâches du type « a - ? = c » sont spécialement plus complexes que les autres cas.

Tableau 4.18 – Techniques algébriques pour les calculs à trous

a + ? = c	? + b = c	? - b = c	a - ? = c	
a + ? = c ? = c - a ? = b	? + b = c ? = c - b ? = a	? - b = c ? = c + b ? = a	a - ? = c - ? = c - a !	a - ? = c a = c + ? c + ? = a ? = a - c ? = b

Ajoutons un dernier commentaire sur ces techniques algébriques en ce qui concerne l'environnement technologique. Remarquons que deux technologies différentes permettent de les justifier : par équivalences d'égalités ou par l'opération inverse. Dans le cas de la première technologie, nous l'explicitons de la façon suivante :

$a + ? = c$

$\underline{a + ? - a = c - a}$

$\underline{(a - a) + ? = c - a}$

$? = c - a$

Pour finalement analyser les rapports noosphèriens de I_{M} et de I_{PNLD} aux calculs à trous, nous proposons d'étudier les observables de ces deux institutions en commençant par le début du processus évaluatif.

4.3.3 Les types de tâches et les techniques importunes : le discours de l'institution évaluatrice face aux manuels

Nous passons maintenant à l'analyse du document de I_{PNLD} de 1994 et des manuels évalués à cette occasion. Dans ces données nous avons identifiées une forte filiation entre l'arithmétique et l'algèbre. Cette filiation a été jugée comme inappropriée par l'évaluation.

Dans ce document de I_{PNLD}, nous relevons quelques exemples de tâches condamnés par l'institution évaluatrice. C'est le cas des deux tâches suivantes :

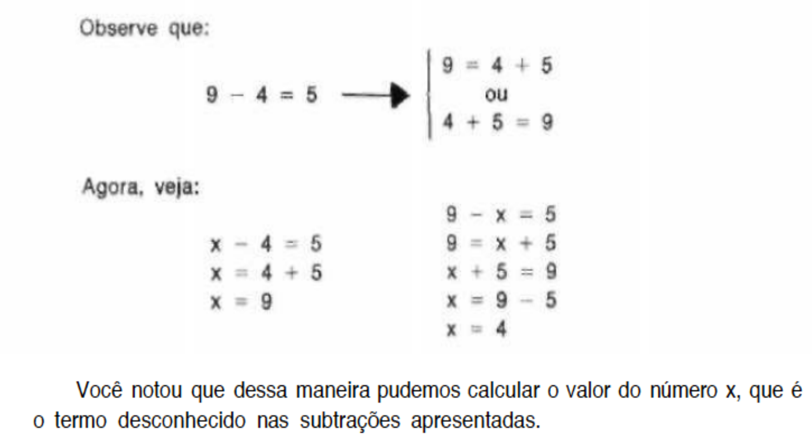
> « En utilisant la propriété associative d'addition, donnez la valeur du nombre n et du nombre m :
> $2 + (n + l) = (2 + 4) + m$
> $(6 + 2) + 3 = n + (m + 3)$ »

Ces tâches ont été proposées dans un manuel brésilien de l'école primaire publié en 1986, qui était toujours commercialisé au début des années 90. Comme nous l'avons montré dans notre étude de cas sur les propriétés d'addition, ce type d'activité a disparu des manuels. De même d'autres formes de communication des résultats mathématiques, comme l'expression « $5 + 2 \iff 7 - 2 = 5$ »[54], sont présentes à ce niveau scolaire avec le symbole d'équivalence logique. L'existence de ces ostensifs semble résulter d'une sorte d'*affection* pour les symboles mathématiques. Or, I_{PNLD} est emphatique en déclarant absolument inadéquat ce type de langage à cette phase de scolarité. Ces critiques concernent spécialement les calculs à trous. Nous avons repéré des extraits de manuels de l'époque qui illustrent cela.

Il est important de préciser que ces extraits ne représentent pas la pratique de tous les manuels de cette période. À savoir qu'en 1994, des 16 manuels évalués par I_{PNLD}, 7 ont reçu de fortes critiques sur cet aspect. Cette proportion est significative, mais demande de prendre des précautions pour la généralisation des résultats.

54. Exemple cité par I_{PNLD} dans l'évaluation de 1994.

Commençons par un premier extrait dans lequel nous avons deux tâches décrites comme « x - 4 = 5 » et « 9 - x = 5 ».



Observe que:

$9 - 4 = 5 \longrightarrow \left| \begin{array}{c} 9 = 4 + 5 \\ \text{ou} \\ 4 + 5 = 9 \end{array} \right.$

Agora, veja:

	$9 - x = 5$
$x - 4 = 5$	$9 = x + 5$
$x = 4 + 5$	$x + 5 = 9$
$x = 9$	$x = 9 - 5$
	$x = 4$

Você notou que dessa maneira pudemos calcular o valor do número x, que é o termo desconhecido nas subtrações apresentadas.

Figure 4.43 – (Brasil, 1994, p. 209)

D'abord, notons que « x » représente la valeur inconnue des deux égalités. Il faut donc comprendre que « x » est une valeur fixe dans chaque cas, mais qui varie en fonction de la tâche : nous avons selon la tâche « $x = 9$ » et « $x = 4$ ». Cette généralisation de l'ostensif « x » est naturalisée dans le champ de l'algèbre.

Examinons comment la tâche du type « a - x = c » est accomplie. La règle utilisée dans les deux cas consiste à réaliser des opérations toujours avec le deuxième nombre. Ainsi, l'auteur du manuel propose une résolution qui évite le cas « - x = c - a » et les « + » et « - » conservent le sens d'opération.

Enfin, soulignons le discours « arithmétique » trouvé en haut de l'image. À propos de ce parallèle entre l'arithmétique et l'algèbre et en analysant d'autres productions où ces deux dimensions se font présentes, nous rejoins à ce que dit Chevallard (1984) :

> En fait, les calculs numériques présentés ici n'existent qu'à être l'image en miroir des calculs littéraux . . . ! Et c'est pour permettre de tels calculs que le langage algébrique, précisément, est nécessaire. . . Il y a ainsi méprise sur la spécificité des deux ordres de calcul et, conséquemment, sur le type de rapports qu'ils entretiennent : la justification de l'algèbre s'appuierait sur un mode de fonctionnement du numérique qui n'est en fait qu'un décalque du fonctionnement de l'algébrique, et qui, donc, suppose l'algébrique ! (p. 78).

Voici ce que I_{PNLD} écrit à propos de premier extrait :

> De telles explications proposent un cheminement clairement algébrique pour trouver la valeur de x.
> En supposant que l'élève maîtrise les transformations algébriques effectuées, le manuel les applique pour résoudre des problèmes. Celles-ci sont reprises dans le manuel de la 4e année, au chapitre "Problèmes de structure" (p. 63-68). D'autres difficultés sont introduites, telles que :

> $n + n + n = 3n$
> $(n + 41) : 3 = 19$ transformés en $n + 41 = 3$ x 19
> Cette approche algébrique de la résolution de problèmes est condamnée à ce stade de l'apprentissage, selon les études dans le domaine [de l'éducation mathématique]. Si la résolution des problèmes est importante dans cette phase, on peut les résoudre de manière arithmétique en recherchant des moyens intuitifs de les représenter. (Brasil, 1994, pp. 209-210, traduction propre) [55]

Selon cette institution, les lettres n'ont pas de conditions pour assumer cette valence sémiotique et instrumentale à ce niveau scolaire. C'est sur la maturité de l'enfant, un aspect considéré au niveau de la Pédagogie, que le jugement de I_{PNLD} se fonde. Cela révèle clairement une non-conformité aux rapports noosphèriens.

Nous pourrions supposer que l'usage des lettres *invite* à effectuer des transformations algébriques. Pourtant, nous retrouvons la même valeur instrumentale employée sur « x » dans d'autres *ostensifs non-algébriques*, comme le montre l'extrait suivant.

Figure 4.44 – (Brasil, 1994, p. 231)

Le petit carré assume le sens de valeur inconnue et participe de la technique exactement comme nous l'avons vu avec « n ». Ce même traitement est utilisé dans les tâches décrites en langage naturel.

55. « Tais explicações propõem um caminho claramente algébrico para encontrar o valor de x.Presumindo que o aluno dominou as transformações algébricas efetuadas, o livro as aplica na resolução de problemas. Estes são retomados no livro 4, no capítulo "Problemas com estruturas" (p. 63 a 68). Outras dificuldades são introduzidas, tais como :
$n + n + n = 3n$
$(n + 41) : 3 = 19$ transformado em $n + 41 = 3$ x 19.
Este enfoque algébrico na resolução de problema é condenado nessa etapa da aprendizagem, de acordo com os estudos na área. Se a resolução desses problemas é importantes nessa série, podem ser resolvidos aritmeticamente, buscando formas intuitivas de representá-los. » (Brasil, 1994, pp. 209-210)

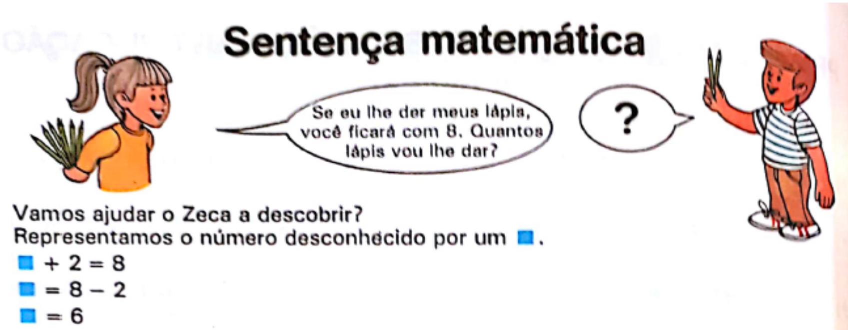


Figure 4.45 – (Passos et al., 1992c, v.4, p. 66)

Dans cet exemple, la tâche consiste à découvrir combien de crayons la fille a, en sachant que le garçon a 2 crayons et que si elle lui donne tous ses crayons, il en aura 8. Remarquons que l'énoncé de la tâche est libre d'ostensifs algébriques et la réponse peut être trouvée en dénombrant les crayons illustrés dans l'image. Or, pour accomplir cette tâche, une modélisation est proposée dont le premier pas fait appel à un ostensif qui permet de représenter l'inconnu : « Représentons le nombre inconnu par un ■ ». Une fois la situation modélisée, nous nous retrouvons avec une tâche et une technique comme celles que nous avons décrites auparavant.

Bien que nous nous sommes centrés sur les calculs à trous, soulignons que le *rituel* de représentation de la valeur inconnue par un pictogramme est aussi présent dans les tâches du type « a + b = ? » : à la place d'écrire l'expression « a + b = c », on écrit « ? = c » comme réponse.

Figure 4.46 – (Passos et al., 1992c, v.4, p. 44)

Pour I_{PNLD}, cette espèce d'algébrisation est jugée comme *fortement inadéquate* - mots utilisés dans le document d'évaluation de 1994. Le point qui corrobore ce jugement négatif de I_{PNLD} est l'aspect mécanique apporté par cette algébrisation à l'étude des calculs à trous. Voyons ce que dit l'institution évaluatrice sur deux manuels qui utilisent cette technique :

> Dans l'étude des égalités mathématiques, les auteurs imposent un traitement "algébrique" précoce et automatique pour la découverte du terme inconnu dans les égalités, impliquant l'addition et la soustraction, ou la multiplication et la division, en utilisant l'opération inverse. L'automatisme est accentué lorsque, dans les exemples présentés, impliquant une addition ou une multiplication, le terme inconnu est toujours le premier. (Brasil, 1994, p. 166, traduction propre) [56]

56. « No estudo das sentenças matemáticas, os autores forçam um tratamento "algébrico" precoce e automático para a descoberta do termo desconhecido em sentenças que envolvem adição e subtração,

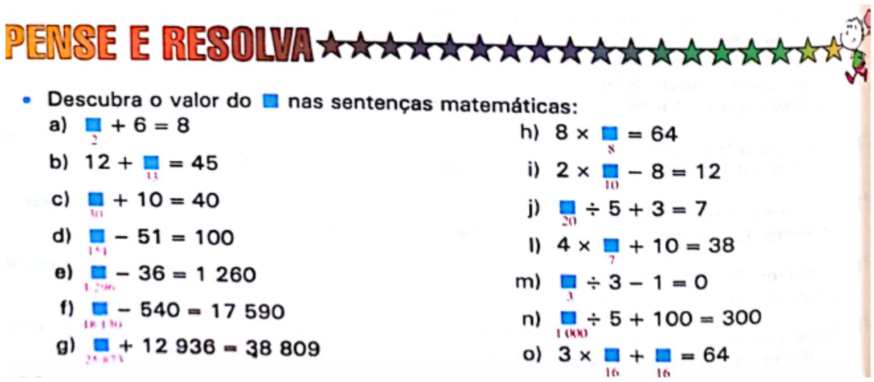
> Dans le livre de troisième année, p. 63 à p. 68, le texte propose des égalités dans lesquelles nous identifions une valeur inconnue. Pour les résoudre, l'élève doit toujours passer un nombre du premier membre pour le deuxième membre, ce qui permet de mécaniser le raisonnement. L'auteur ne réalise pas que la voie algébrique est inappropriée et préjudiciable à ce stade de maturité de l'élève. (Brasil, 1994, p. 185, traduction propre) [57]

Nous associons cette manière d'étudier les calculs à trous à la conception de l'enseignement de l'algèbre « linguistique-pragmatique », décrite par Fiorentini et al. (1993) comme suit :

> Dans cette conception prévaut la conviction que l'acquisition, même mécanique, des techniques requises par la « transformation algébrique » serait nécessaire et suffisante pour que l'apprenant acquière la capacité de résoudre des problèmes, bien que ces problèmes soient presque toujours artificiels, au sens que ce ne sont pas leur nature et leur pertinence qui détermineraient les contenus algébriques à apprendre, mais la manière de "fabriquer" un problème dont la solution de tels objets, considérés comme indispensables, devrait être utilisés. (pp. 83-84) [58]

Cela signifie que l'activité d'étude n'a pas pour objectif les tâches des calculs à trous eux-mêmes, mais le traitement algébrique qu'on doit réaliser pour les résoudre.

Sur la portée de cette technique algébrique d'autres commentaires semblent nécessaires. Pour cela, prenons la liste de tâches suivante :


PENSE E RESOLVA

- Descubra o valor do ■ nas sentenças matemáticas:

a) ■ + 6 = 8
b) 12 + ■ = 45
c) ■ + 10 = 40
d) ■ − 51 = 100
e) ■ − 36 = 1 260
f) ■ − 540 = 17 590
g) ■ + 12 936 = 38 809
h) 8 × ■ = 64
i) 2 × ■ − 8 = 12
j) ■ ÷ 5 + 3 = 7
l) 4 × ■ + 10 = 38
m) ■ ÷ 3 − 1 = 0
n) ■ ÷ 5 + 100 = 300
o) 3 × ■ + ■ = 64

Figure 4.47 – (Passos et al., 1992c, v.4, p. 66)

Soulignons d'abord que les tâches « ■ + 6 = 8 », « ■ + 10 = 40 » et « ■ + 12936 = 38809 » sont

ou multiplicação e divisão, usando a operação inversa. O automatismo se acentua quando nos exemplos apresentados, envolvendo adição ou multiplicação, o termo desconhecido é sempre o primeiro. » (Brasil, 1994, p. 166)

57. « No livro da 3a série, p. 63 a 68, o texto propõe igualdades onde é visto uma incógnita. Para resolvê-las, o aluno deve sempre passar [um número do] do primeiro membro [para o segundo membro], mecanizando assim o raciocínio. A autora não percebe que o caminho algébrico é inadequado e prejudicial nesta fase de maturidade do aluno. » (Brasil, 1994, p. 185)

58. « Nessa concepção prevalece a crença de que a aquisição, ainda que mecânica, das técnicas requeridas pelo « transformismo algébrico » seria necessária e suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de resolver problemas, ainda que esses problemas fossem, quase sempre, artificiais, no sentido de que não era a natureza e relevância deles que determinariam os conteúdos algébricos a serem aprendidos, mas a forma como « fabricar » um problema para cuja solução tais e tais tópicos, tidos como indispensáveis, deveriam ser utilizados. » (Fiorentini et al., 1993, p. 83-84)

soumises à la même technique algébrique, qui conduit obligatoirement à passer par les soustractions « 8 - 6 », « 40 - 10 » et « 38809 - 12936 ». Dans ce contexte, les valeurs de la variable V4, sur les caractéristiques des nombres connus, n'interfèrent pas dans l'usage de cette technique. Cette puissance au niveau de la portée peut certainement devenir un obstacle pour l'existence d'autres techniques purement arithmétiques.

Au niveau du logos, la notion centrale qui émerge dans cette étude est la notion d'opération inverse, qui justifie le passage pour isoler la valeur inconnue.

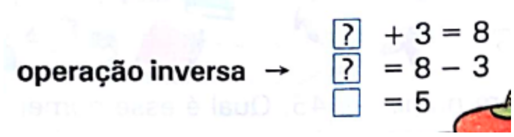


Figure 4.48 – (Passos et al., 1991, v.2, p. 91)

Des stratégies didactiques inusitées sont rencontrées dans les manuels de l'époque pour mener cette étude. Dans la figure ci-dessous, par exemple, nous voyons des canards qui rentrent et sortent d'un lac, accompagnés des expressions mathématiques « 4 + 3 = 7 » et « 4 = 7 - 3 ». Un discours écrit explique la situation : « le nombre 3 est passé d'un côté à l'autre de l'égalité et l'addition a été transformée en soustraction. » (!)

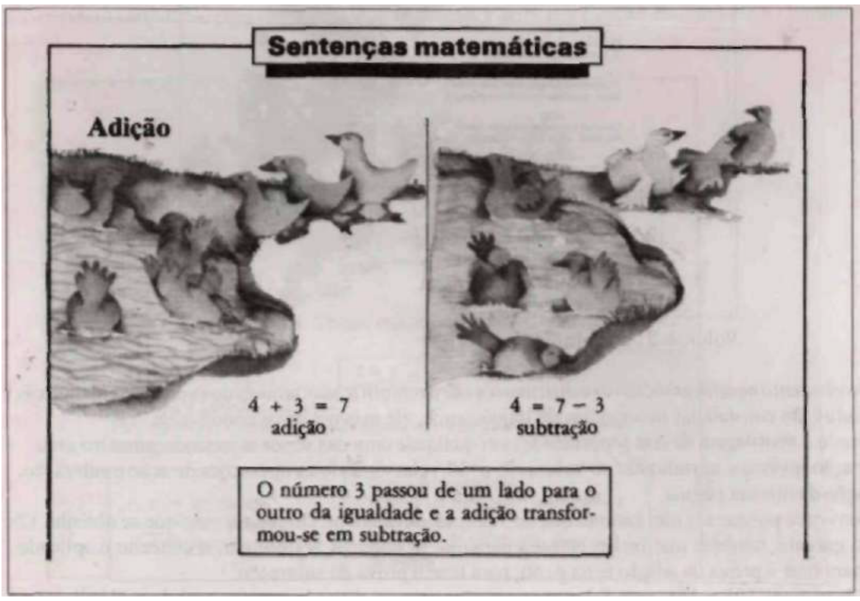
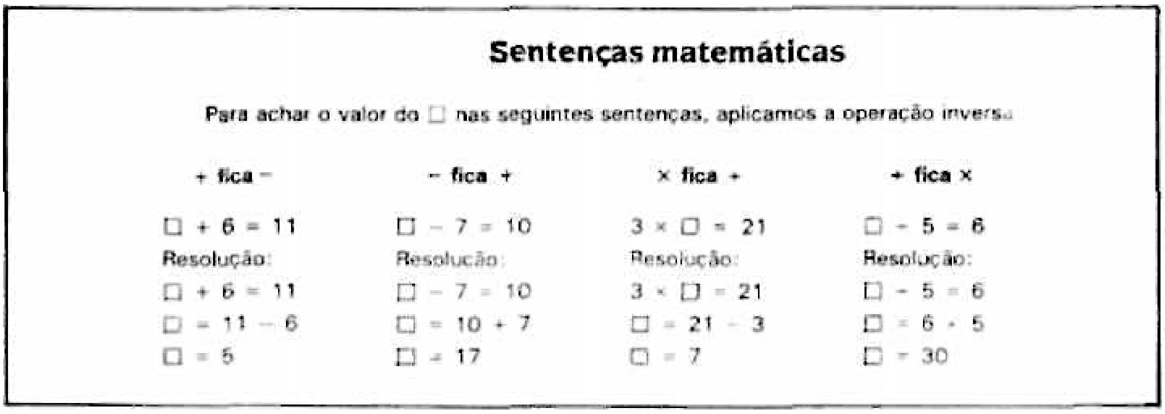


Figure 4.49 – (Brasil, 1994, p. 166)

Dans un autre extrait, nous trouvons : « Pour trouver la valeur de ■ dans les égalités, nous appliquons l'opération inverse ». Ensuite est indiqué « + devient - » et « - devient + ».



Sentenças matemáticas

Para achar o valor do □ nas seguintes sentenças, aplicamos a operação inversa

+ fica −	− fica +	× fica ÷	÷ fica ×
□ + 6 = 11	□ − 7 = 10	3 × □ = 21	□ ÷ 5 = 6
Resolução:	Resolução:	Resolução:	Resolução:
□ + 6 = 11	□ − 7 = 10	3 × □ = 21	□ ÷ 5 = 6
□ = 11 − 6	□ = 10 + 7	□ = 21 ÷ 3	□ = 6 · 5
□ = 5	□ = 17	□ = 7	□ = 30

Figure 4.50 – (Brasil, 1994, p. 242)

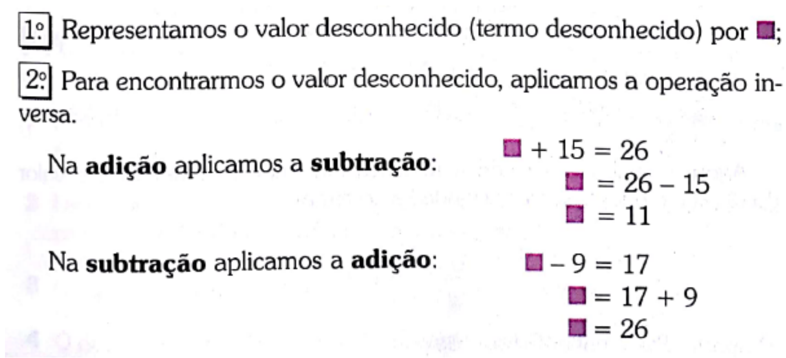
Observons aussi comme le terme inconnu est choisi stratégiquement en fonction de l'opération. Les tâches du type « a - ■ = c » (et aussi « a ÷ ■ = c ») sont, en générale, absentes lorsque le traitement algébrique est présent. Cela évite l'inconvénient « - ■ = c - a », qu'on ne sait pas traiter dans l'arithmétique sur N !

Nous proposons par la suite une discussion sur l'avenir des calculs à trous algébrisés dans les manuels brésiliens.

4.3.4 La pensée, le langage et les techniques algébriques, chacun dans son temps

Cette étude de cas possède quelques aspects similaires déjà identifiés dans les deux autres premiers concernant la théorie des ensembles et les propriétés d'addition : le langage algébrique disparaît des manuels, puis les valeurs inconnues ne sont plus représentées par des lettres.

A la suite de la première évaluation, les jugements de $\mathrm{I_{PNLD}}$ sur cette algébrisation de l'activité mathématique se font rarement présents dans les documents de cette institution. Cela suggère que le problème est dépassé pour la majorité des collections/ En effet, nous n'avons trouvé que dans une seule collection de notre corpus des manuels approuvés par $\mathrm{I_{PNLD}}$ des vestiges de la technique algébrique.



1º Representamos o valor desconhecido (termo desconhecido) por ■;

2º Para encontrarmos o valor desconhecido, aplicamos a operação inversa.

Na **adição** aplicamos a **subtração**:

■ + 15 = 26
■ = 26 – 15
■ = 11

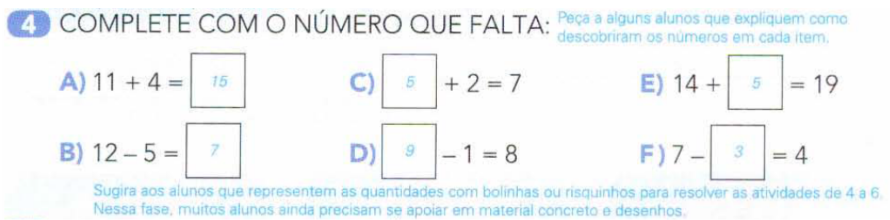
Na **subtração** aplicamos a **adição**:

■ – 9 = 17
■ = 17 + 9
■ = 26

Figure 4.51 – (Teresa et al., 2001, p. 137)

Il n’est pas étonnant que cette collection soit justement elle qui résistait en 2004 à l’abandon de la théorie des ensembles.

Dans un autre manuel approuvé en 2013, comme dans les autres de notre corpus, nous retrouvons un scénario *nettoyé* de l’algébrisation de l’activité mathématique à l’école primaire. Nous amenons ici quelques extraits qui permettent d’illustrer comment les calculs à trous sont traités sans le formalisme structurel de la technique algébrique. Voici le premier exemple :



4 COMPLETE COM O NÚMERO QUE FALTA: Peça a alguns alunos que expliquem como descobriram os números em cada item.

A) 11 + 4 = 15 | C) 5 + 2 = 7 | E) 14 + 5 = 19

B) 12 – 5 = 7 | D) 9 – 1 = 8 | F) 7 – 3 = 4

Sugira aos alunos que representem as quantidades com bolinhas ou risquinhos para resolver as atividades de 4 a 6. Nessa fase, muitos alunos ainda precisam se apoiar em material concreto e desenhos.

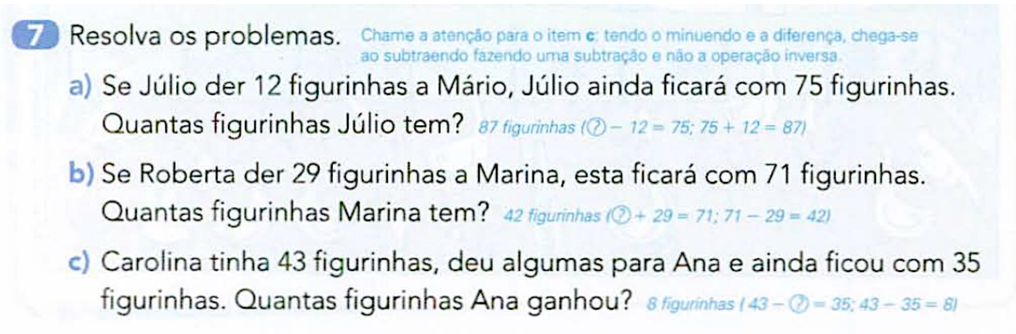
Figure 4.52 – (Dante, 2011b, v.2, p. 67)

En bleu se trouvent les suggestions aux enseignants. En haut il est écrit : « Demandez à quelques élèves d’expliquer comment ils ont trouvé les nombres de chaque exercice. ». En bas : « Suggérez aux élèves de représenter les quantités avec de petites boules ou des égratignures pour résoudre l’activité 4 à 6. À ce stade, de nombreux élèves doivent encore s’appuyer sur du matériel concret et des dessins. ». Notons que les nombres sont choisis en fonction des techniques disponibles à ce moment de l’étude : l’étude est proposée dans l’univers de l’arithmétique et du monde sensible. Plus tard, avec de grands nombres et les algorithmes posés, l’usage de schémas est proposé comme aide à modéliser et interpréter les situations problèmes qui renvoient aux calculs à trous, comme le montre la Figure 4.53.

Figure 4.53 – (Dante, 2011c, v.5, p. 67)

Remarquons que le point d'interrogation représente un *état* inconnu et ne participe qu'à la modélisation de la tâche : il est absent de la mise en œuvre de la technique. Ces calculs à trous sont traités spécialement dans l'étude de la notion d'opération inverse.

Pour le prochain et dernier exemple, nous suggérons au lecteur de prêter attention à la tâche « c ».



7 Resolva os problemas. Chame a atenção para o item c: tendo o minuendo e a diferença, chega-se ao subtraendo fazendo uma subtração e não a operação inversa.

a) Se Júlio der 12 figurinhas a Mário, Júlio ainda ficará com 75 figurinhas. Quantas figurinhas Júlio tem? 87 figurinhas (? − 12 = 75; 75 + 12 = 87)

b) Se Roberta der 29 figurinhas a Marina, esta ficará com 71 figurinhas. Quantas figurinhas Marina tem? 42 figurinhas (? + 29 = 71; 71 − 29 = 42)

c) Carolina tinha 43 figurinhas, deu algumas para Ana e ainda ficou com 35 figurinhas. Quantas figurinhas Ana ganhou? 8 figurinhas (43 − ? = 35; 43 − 35 = 8)

Figure 4.54 – (Dante, 2011d, v.4, p. 137) [a]

a. Traduction : Résoudre les problèmes :
a) Si Júlio offre à Mário 12 cartes, Júlio aura toujours 75 cartes. Combiens de cartes Júlio a-t-il ?
b) Si Roberta offre 29 cartes à Marina, elle en aura 71. Combien de cartes Marina a-t-elle ?
c) Carolina avait 43 cartes, elle a offert quelques à Ana en lui restant toujours 35. Combien de cartes Ana a-t-elle reçu ?

La remarque indiquée dans le livre du maître en haut de l'image dit : « Attirer l'attention sur l'item c : ayant le premier terme et la différence, vous obtenez le deuxième terme en soustrayant et non en utilisant l'opération inverse ». Le type de tâche « a - ? = c » est alors reconnu comme particulier parmi les autres calculs à trous.

En revenant à nouveau sur les documents de I_{PNLD}, il est remarquable que cette institution prenne beaucoup de précautions pour parler de l'algèbre à l'école primaire. Le sujet est traité timidement et dans peu d'endroits tout au long des documents d'évaluation. En 2007, par exemple, l'institution commente la non-existence des points de vue consolidés sur les contenus de l'algèbre pour ce niveau scolaire, mais elle affirme que l'étude des régularités en font partie.

> Sur les quatre blocs de contenu de l'école primaire adoptés dans ce document pour l'école primaire, le premier bloc - nombres et opérations - inclut des connaissances du domaine de l'algèbre jugées appropriées pour cette étape de la scolarité. Bien qu'il

> n'existe pas encore de vues consolidées sur ce que devraient être ces contenus d'algèbre, il est généralement admis que l'exploration de régularités dans des séquences numériques ou de figures est l'un de ces contenus et qu'elle est traitée dans de nombreux manuels. Un autre problème qui inclut l'initiation à l'algèbre est la détermination de l'élément inconnu dans une égalité mathématique. Ceci est souvent associé aux opérations inverses. (Brasil, 2006, pp. 28-29, traduction propre) [59]

Dans l'évaluation de 2010, I_{PNLD} considère le temps de l'étude comme une condition pour le développement du langage et des techniques algébriques, en conseillant une étude progressive durant les neuf premières années de l'école.

> La perception des régularités, qui peuvent conduire à la création de modèles symboliques pour diverses situations, et la capacité à traduire, en langage mathématique, des problèmes rencontrés dans la vie quotidienne ou provenant d'autres domaines de la connaissance, devraient être progressivement développées. Ainsi, on commence l'utilisation du langage et des techniques de l'algèbre et tout au long des neuf années de l'école primaire elle s'intensifie pour devenir plaine. L'utilisation du langage algébrique pour exprimer des généralisations dans d'autres domaines des mathématiques est une autre compétence qui, peu à peu, doit être acquise. (Brasil, 2009, p. 23, traduction propre) [60]

En 2013 et 2016, ce même discours se renforce en portant l'attention sur la continuité de la vie scolaire pour permettre d'élargir et d'approfondir le langage et techniques propres de l'algèbre. Dans cet esprit, les *praxis algébrisées*, comme nous l'avons vu dans les manuels plus anciens, se retrouvent au niveau du collège dans l'introduction de l'étude de l'« équation du premier degré », avec un discours technologique bien plus robuste. Cela permet, en principe, que soient exploitées les valeurs de la variable V4 à l'école primaire pour donner vie aux différentes techniques arithmétiques de calcul.

4.3.5 Conclusions de l'étude de cas de l'algébrisation des calculs à trous

Une sorte de juxtaposition de l'algèbre et de l'arithmétique est également une autre marque de l'héritage des réformes des mathématiques modernes rencontré dans les manuels évalués en 1994. C'est

59. « Quando são adotados os quatro blocos de conteúdos para a fase do Ensino Fundamental, mencionados neste documento, inclui-se no primeiro deles - números e operações - os conhecimentos do campo da álgebra que são julgados apropriados para essa etapa da formação escolar. Embora não haja, ainda, pontos de vista consolidados sobre quais devam ser esses conteúdos de álgebra, é consensual que a exploração das regularidades em sequências numéricas ou de figuras é um desses conteúdos e ele é abordado em muitas das obras deste Guia. Uma outra questão que se inclui na iniciação à álgebra é a determinação do elemento desconhecido em uma igualdade matemática. Isso ocorre, muitas vezes, associado às operações inversas. » (Brasil, 2006, pp. 28-29)

60. « A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir, em linguagem matemática, problemas encontrados no dia-a-dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser, gradativamente, desenvolvidas. Desta forma, se inicia o uso da linguagem e das técnicas da álgebra, que, ao longo dos 9 anos do ensino fundamental, se intensifica e deve se tornar pleno. O uso da linguagem algébrica para expressar generalizações em outros campos da Matemática é outra competência que, pouco a pouco, deve ser adquirida. » (Brasil, 2009, p. 23)

dans ce contexte que les tâches qui pourraient être aisément accomplies par des techniques purement arithmétiques sont accomplies par des outils algébriques : « [. . .] je fais de l'algèbre sur le numérique : c'est l'outil algébrique, et lui seul, qui me permet ce travail du numérique. » (Chevallard, 1984, p. 78). Cette approche promeut un « formalisme mathématique » qui *manque* à l'arithmétique (Chevallard, 1989b). Un changement sur cet aspect est prescrit par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ dès les premières évaluations.

Cette étude complète en quelque sorte les deux autres premiers cas. Cependant, nous avons été confronté au fait de parler de l'algébrisation de certaines praxis, aspect non prévu dans notre modèle de référence sur le champ additif. Il nous a semblé alors nécessaire d'introduire, bien que modestement, une discussion sur la dialectique entre l'algèbre et l'arithmétique. L'étude réalisée nous a révélé des tensions historiques curriculaires sur cette dialectique. Apparemment, elles ne sont pas encore finies.

Suite aux premiers contacts avec les documents de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et les manuels de I_{M}, nous avons décidé de délimiter notre analyse en proposant un sous-générateur, où les calculs à trous et deux variables sont devenus nos observables principaux.

Une fois que ce nouveau générateur a été élaboré, nous nous sommes engagés dans une réflexion *a priori* sur les praxéologies qu'il permet de générer, en supposant une possible influence de l'algèbre. Cette présentation reprend et approfondit notre modèle de référence. Cet exercice a été fondamental pour bien comprendre les données de 1994. Ensuite nous avons visité les autres matériaux empiriques de 1996 - 2016 pour confirmer le changement de pratique attendue par les évaluations.

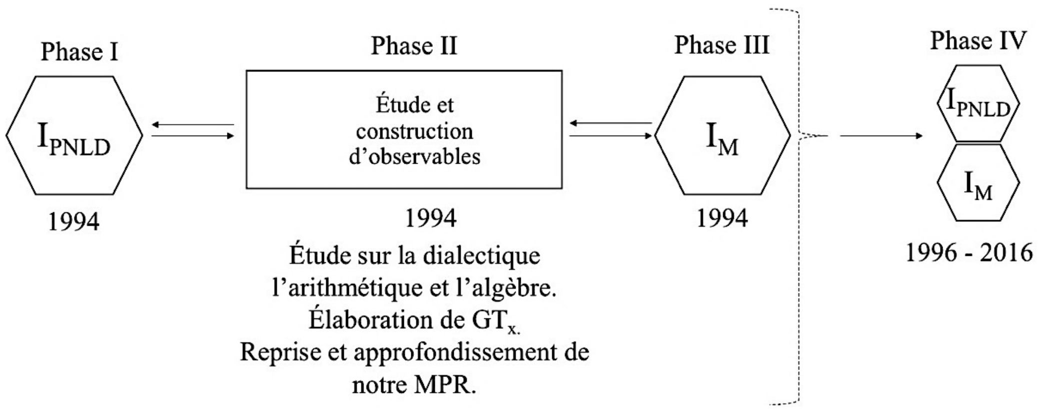


Figure 4.55 – Parcours d´étude III

Les derniers discours de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ prescrivent une étude de longue durée de l'algébrisation des praxis. Une position assumée également par la didactique depuis déjà un moment.

> [. . .] quelles sont les conditions de possibilités, et les limites, d'un enseignement et d'un apprentissage fonctionnels du calcul algébrique ? En particulier, elle attire l'attention sur les conditions de génération du rapport de l'élève aux écritures symboliques (et pas seulement au calcul algébrique) en tant qu'outils de conceptualisation et de résolution de problèmes. Cette dernière ligne de recherche conduit à insérer la question des écritures algébriques dans une perspective de longue durée, concernant la construction

> de codes, et la manipulation formellement valide, et fonctionnellement pertinente, des codes ainsi crées : partant de l'école maternelle avec les premiers codages graphiques, passant par l'école primaire avec les écritures numériques, elle se cristallise, au Collège, autour du code algébrique et se poursuit au-delà par la mise en œuvre fonctionnelle du calcul algébrique. (Chevallard, 1990, p. 30)

Cette perspective de longue durée devient une contrainte pour l'existence du langage et de la technique algébrique : ce n'est qu'au collège que les codes et les symboles algébriques doivent être rencontrés, l'étude à l'école primaire se restreignant au numérique. Cela n'empêche pas le développement de la *pensée algébrique* dès les premières années scolaires. Il en découle que la quatrième valeur « V1d : langage algébrique » n'a pas de place à l'école primaire dans cette perspective.

Les techniques arithmétiques ne sont alors plus perturbées par une concurrence avec les techniques algébriques. La diversité des valeurs de la variable « V4 : les deux nombres connus » peut alors avoir un vrai enjeu didactique pour l'étude des techniques des calculs à trous, spécialement pour les calculs mentaux. Or, la non-algébrisation n'est pas une condition suffisante pour l'enrichissement des techniques arithmétiques : les institutions tendent à être très créatifs pour trouver des moyens pour restreindre cette richesse possible. Les études suivantes témoigneront dans ce sens.

4.4 Le Cas Des Tâches Contextualisées

L'importance des tâches contextualisées dans l'enseignement des mathématiques est affirmée dans les discours noosphèriens de différentes époques. Il s'agit d'un aspect présent dans des tendances diverses : résolution des problèmes, interdisciplinarité, ethnomathématique, modélisation mathématique... Dans cet esprit, le travail à partir de *bons contextes* fonctionne comme un postulat pour un apprentissage *significatif*.

Nettement, cette discussion trouve sa justification dans les niveaux plus hauts de codétermination : c'est pour des *fins éducatives* qu'on justifie le fait de confier aux contextes une place importante des choix didactiques.

Notons que même dans les moments de l'histoire où intervenaient de forts mécanismes de décontextualisation - ou purification - des œuvres mathématiques, comme dans la réforme des mathématiques modernes (Chevallard, 1982), les tâches étaient encore présentes dans l'étude de la discipline. Les tâches contextualisées sont, dans ce sens, quelque chose d'inhérente à l'enseignement des mathématiques. Ce qui a changé historiquement dans le temps est le rôle et l'importance donnée à ces tâches. Coppé et Houdement (2009) résument bien cet aspect à partir d'une analyse de la résolution de problèmes dans le curriculum français :

> La résolution de problèmes a eu une place constante dans les programmes et les instructions de l'école primaire de 1945 à nos jours, mais la nature des problèmes et leur rôle ont changé. Après 1945, ils ont une fonction résolument utilitariste, compréhensible du fait que pour beaucoup d'élèves, l'école primaire représente la fin des études. Placés en fin d'apprentissage, ils ont aussi pour fonction de montrer que les savoirs transmis par l'école ont été appris. 25 ans plus tard, la situation a radicalement changé : l'école primaire ne marque plus la fin d'études, mais prépare au secondaire ; le regard sur l'élève est différent. Les problèmes acquièrent une nouvelle fonction, celle de motiver les apprentissages, voire de les initier. De la réforme des Mathématiques Modernes à nos jours, les problèmes confirment leur place en début du processus d'apprentissage, où ils devraient permettre non seulement de motiver, mais aussi d'engager les élèves dans une découverte des notions mathématiques nouvelles. Simultanément naît un autre mouvement dans les années 1980 : l'introduction d'ambitions méthodologiques et plus transversales, avec les situations problèmes, parmi lesquelles les problèmes ouverts, mais pouvaient aussi ne pas viser seulement des compétences mathématiques. Nous verrons que cette introduction fut sans doute influencée par les recherches didactiques, mais aussi par la recherche action-innovation. Cette dimension devient plus explicite dans les années 1990, mais demeure controversée, comme le prouve le dernier programme 2008. (p.11)

Au Brésil, cette discussion a eu lieu aussi dans les documents officiels des années 1990. Dans les paramètres nationaux de l'éducation de 1997, par exemple, il est signalé que la résolution des problèmes et l'exploration des situations du quotidien et d'autres disciplines sont au cœur des courants d'enseignement qui ont influencé les reformes curriculaires dans le monde en 1980 à 1995. Or, il est reconnu que ces nouvelles aspirations pour l'éducation sont restées loin de l'école brésilienne de l'époque.

> Par exemple, les conseils pour aborder les concepts, les idées et les méthodes du point de vue de la résolution de problèmes sont encore largement inconnus ; d'autres fois, la résolution de problèmes a été incorporée en tant qu'élément isolé, développé en parallèle en tant qu'application d'apprentissage, à partir de listes de problèmes dont la résolution dépend essentiellement du choix de techniques ou de formes de résolution connues par les élèves. (Brasil, 1997, p.22, traduction propre) [61]

Ceci explique les mauvaises performances des élèves évalués à l'échelle nationale en 1993 pour le gouvernement, où la difficulté en résolution des problèmes a été un des principaux facteurs de ce résultat. La formation des enseignants et la qualité des manuels sont rendus responsables de ce scénario.

> Une partie des problèmes par rapport à l'enseignement des mathématiques est liée au processus de formation des enseignants, tant en ce qui concerne la formation initiale que continue. En raison des problèmes de formation des enseignants, les pratiques en classe reposent sur des manuels, qui sont malheureusement souvent de mauvaise qualité. (Brasil, 1997, p.22, traduction propre) [62]

Néanmoins, si les situations contextualisées sont valorisées par les lignes directrices du curriculum brésilien de l'époque, la tendance à les considérer superficiellement est soulignée.

> Une autre distorsion notable fait référence à une interprétation erronée de l'idée de « quotidien », c'est-à-dire, le travail devient centré seulement avec ce qui est censé faire partie de la vie quotidienne de l'élève. Ainsi, de nombreux contenus importants sont ignorés soit parce qu'ils sont jugés, sans analyse appropriée, qu'ils ne présentent aucun intérêt pour les élèves, soit qu'ils ne font pas partie de leur « réalité », c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'application pratique immédiate. Cette posture conduit à l'appauvrissement du travail, produisant l'effet inverse à l'enrichissement du processus enseignement-apprentissage. (Brasil, 1997, p.23, traduction propre) [63]

Dans cet esprit, les tâches contextualisées apparaissent comme une espèce de vecteur d'apprentissage pour aboutir à l'objet *même* de l'étude, où la décontextualisation est prévue. « La pensée dite concrète pèche ainsi par une tendance obligée à l'abstraction, c'est-à-dire à la déconnexion, à la décontextualisation praxéologique, vice qu'elle partage donc avec les formes didactiques apparemment les plus évoluées. » (Chevallard, 1997, p.11). Le document officiel rend explicite cet aspect dans l'extrait suivant :

61. « Assim, por exemplo, as orientações sobre a abordagem de conceitos, idéias e métodos sob a perspectiva de resolução de problemas ainda são bastante desconhecidas ; outras vezes a resolução de problemas tem sido incorporada como um item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem, a partir de listagens de problemas cuja resolução depende basicamente da escolha de técnicas ou formas de resolução conhecidas pelos alunos. » (Brasil, 1997, p.22)

62. « Parte dos problemas referentes ao ensino de Matemática estão relacionados ao processo de formação do magistério, tanto em relação à formação inicial como à formação continuada. Decorrentes dos problemas da formação de professores, as práticas na sala de aula tomam por base os livros didáticos, que, infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória. » (Brasil, 1997, p.22)

63. «Outra distorção perceptível refere-se a uma interpretação equivocada da idéia de "cotidiano" , ou seja, trabalha-se apenas com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno. Desse modo, muitos conteúdos importantes são descartados ou porque se julga, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos, ou porque não fazem parte de sua "realidade" , ou seja, não há uma aplicação prática imediata. Essa postura leva ao empobrecimento do trabalho, produzindo efeito contrário ao de enriquecer o processo ensino-aprendizagem. » (Brasil, 1997, p.23)

> En revanche, une connaissance n'est pleine que si elle est mobilisée dans des situations autres que celles qui l'ont engendrée. Pour être transférables à des situations nouvelles et généralisées, les connaissances doivent être décontextualisées, pour être contextualisées dans d'autres situations. Même au primaire et au collège, on s'attend à ce que les connaissances acquises ne soient pas inextricablement liées à un contexte concret et unique, mais puissent être généralisées, transférées à d'autres contextes. (Brasil, 1997, p.23, traduction propre) [64]

Dans les discours officiels, une expression donne le ton de la proposition envisagée pour l'enseignement des mathématiques , celle de « construction de la citoyenneté ». À cet égard, les thèmes transversaux aux mathématiques apparaissent comme importants : les problèmes de sexisme, les problèmes écologiques, l'histoire, les questions sur la santé, la pluralité culturelle, l'éducation financière et bien d'autres. Ces thèmes, ainsi que la « réalité des élèves » et le ludique, fournissent la source des contextes possibles vis-à-vis la noosphère.

Cette discussion sur la nature même des contextes est faite dans une dimension générale de l'activité mathématique, au niveau de la discipline. Elle a des filiations manifestes avec les niveaux supérieurs. Lorsqu'on descend au niveau du domaine et plus précisément du secteur, (Vergnaud, 1990) nous apporte un autre regard sur les contextes d'addition et de soustraction.

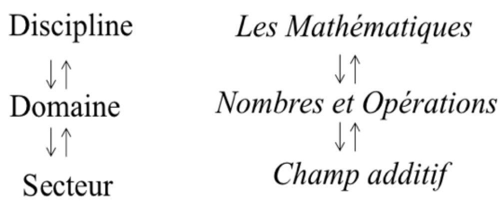


Figure 4.56 – Discipline, Domaine et Secteur

Le fondateur de la théorie des champs conceptuels nous montre, par une dimension cognitive, qu'il existe différentes classes de situations contextualisées mobilisant les opérations d'addition et de soustraction. Ces classes prennent en compte le sens et les relations entre les nombres de la situation. Vergnaud (1981) les classifie en six catégories :

> Première catégorie : deux mesures se composent pour donner une mesure.
> Deuxième catégorie : une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.
> Troisième catégorie : une relation relie deux mesures.
> Quatrième catégorie : deux transformations se composent pour donner une transformation.

64. «Por outro lado, um conhecimento só é pleno se for mobilizado em situações diferentes daquelas que serviram para lhe dar origem. Para que sejam transferíveis a novas situações e generalizados, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem contextualizados novamente em outras situações. Mesmo no ensino fundamental, espera-se que o conhecimento aprendido não fique indissoluvelmente vinculado a um contexto concreto e único, mas que possa ser generalizado, transferido a outros contextos. » (Brasil, 1997, p.30)

> Cinquième catégorie : une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.
> Sixième catégorie : deux états relatifs (relation) se composent pour donner un état relatif. (p. 133)

Ainsi comme nous l'avons proposé dans notre modèle de référence (chapitre 3), nous simplifions ces six catégories par les trois principaux sens des structures additives : composition (1^re^, 4^e^ et 6^e^ catégories), transformation (2^e^ et 5^e^) et comparaison (3^e^ catégorie).

Notons que ce travail des structures additives de Vergnaud est présent dans les références des paramètres nationaux de l'éducation du Brésil et influence certains passage du texte officiel, comme on peut le comprendre ici derrière cet objectif de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire :

> Résoudre des situations problématiques et construire sur elles la signification d'opérations fondamentales en cherchant à reconnaître que la même opération est liée à différents problèmes et que le même problème peut être résolu en utilisant différentes opérations. (Brasil, 1997, p.47, traduction propre) [65]

Nous constatons que les évaluations de $\mathrm{I_{PNLD}}$, de 1994 à 2016, sont alignées avec ces idées. C'est ce que nous montrerons avec plus de détails dans le paragraphe 4.4.2. En revanche, c'est là que se trouvait un jugement de non-conformité de $\mathrm{I_{PNLD}}$ aux praxéologies rencontrées dans les manuels des années 1990. Cette non-conformité a été réduite au fil du temps par les évaluations.

Avant de passer à l'analyse des données empiriques, nous proposons de reprendre le modèle de référence pour caractériser notre étude de cas à partir d'un sous-générateur de types de tâches.

4.4.1 Un sous-générateur comme observable

Dans notre modèle de référence, nous avons identifié cinq variables qui expriment des caractéristiques des types de tâches du champ additif. Cette fois-ci, notre étude portera spécialement sur les valeurs que la variable V2 assume dans les manuels et celles qu'elles devraient assumer selon $\mathrm{I_{PNLD}}$. Pour cela,considérons $\mathrm{GT_c}$:

Tableau 4.19 – Sous-générateur de types de tâches $\mathrm{GT_c}$

$\mathrm{GT_c}$: [Chercher une valeur manquante d'une situation *modélisable par* ou *donnée sous la forme* « a +/- b = c », où a, b et c sont des nombres entiers positifs, V2]
V2 : L'idée de la situation

Notamment, nous avons $\mathrm{GT_c} \subset \mathrm{GT^{+/-}}$, car $\mathrm{T_c} = \mathrm{T^{+/-}}$ et $\mathrm{SV_c} \subset \mathrm{SV^{+/-}}$.

65. Resolver situações-problema e construir, a partir delas, os significados das operações fundamentais, buscando reconhecer que uma mesma operação está relacionada a problemas diferentes e um mesmo problema pode ser resolvido pelo uso de diferentes operações. (Brasil, 1997, p.47)

Dans notre modèle de référence, nous avons retenu les valeurs suivantes pour V2 :

Tableau 4.20 – Valeurs de la variable V2 du modèle de référence

V2 : L'idée de la situation	V2.1 : Usage d'un contexte	V2.1.a : Oui
		V2.1.b : Non
	V2.2 : Nature du contexte	V2.2.a : Mathématique
		V2.2.b : Extramathématique
	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison
	V2.4 : Opération de la situation	V2.4.a : Addition
		V2.4.b : Soustraction

Nous proposons par la suite d'étudier le rapport et les jugements de I_{PNLD} concernant cette variable.

4.4.2 Le rapport et le jugement de l'institution évaluatrice sur les tâches contextualisées

En 1994, I_{PNLD} a constaté une distance outrée entre l'activité mathématique scolaire et la vie sociale, un facteur fortement condamné par cette institution.

> Comme dans presque tous les manuels pour le premier degré de la scolarité, c'est un manuel intemporel, totalement détaché de la réalité socioculturelle. Pas de photos, pas de données réelles dans les activités, les illustrations des enfants sont caricaturales, etc. (Brasil, 1994, p. 171, traduction propre) [66]

> Le manuel est a-historique et intemporel. Il ne montre pas les situations qui révèlent les problèmes et les aspirations de la société actuelle. Cela ne montre pas non plus que des concepts mathématiques ont été construits au fil du temps dans les relations sociales et historiques entre hommes. (Brasil, 1994, p. 189, traduction propre) [67]

Une autre critique frappante tout au long de ce document d'évaluation concerne la fragmentation de l'étude des opérations : l'opération d'addition est traitée de façon dissociée de l'opération de soustraction et vice-versa. De nombreux passages du texte de I_{PNLD} constatent cela :

> Tout au long de la collection des manuels, il y a des problèmes irréalistes, sans défis, traditionnels, en forme de liste : problèmes d'addition, de soustraction, de multiplication et de division. Ces problèmes reflètent la fragmentation totale du contenu et

66. «Como acontece em quase todos os textos do primeiro grau, trata-se de um texto atemporal, totalmente descolado da realidade sócio-cultural. Não apresenta fotografias, não utiliza dados reais nas atividades, as ilustrações das crianças apresentadas são caricaturais, etc. » (Brasil, 1994, p. 171)
67. « O texto é a-histórico e atemporal. Não mostra situações que revelem os problemas e aspirações da sociedade atual. Também não mostra que os conceitos matemáticos foram construídos através dos tempos nas relações sociais e históricas entre os homens. » (Brasil, 1994, p. 189)

> ne tiennent pas compte de la réalité de l'enfant. (Brasil, 1994, p. 200, traduction propre) [68]

> Les opérations sur les nombres naturels sont traitées séparément même en 3e et 4e années. Comme les situations-problèmes sont présentées sous forme de listes et traitées dans des chapitres distincts, l'élève utilise toujours la procédure canonique pour les résoudre. De cette façon, ils n'ont pas la possibilité de retravailler leurs propres procédures de résolution. Refuse aux élèves, par conséquent, de précieuses occasions d'établir des relations entre les opérations. (Brasil, 1994, p. 207, traduction propre) [69]

> [. . .] Bien que des situations parfois plus complexes apparaissent dans ces listes, l'élève n'a pas besoin de réfléchir, car il sait à l'avance quelle opération utiliser. (Brasil, 1994, p. 154, traduction propre) [70]

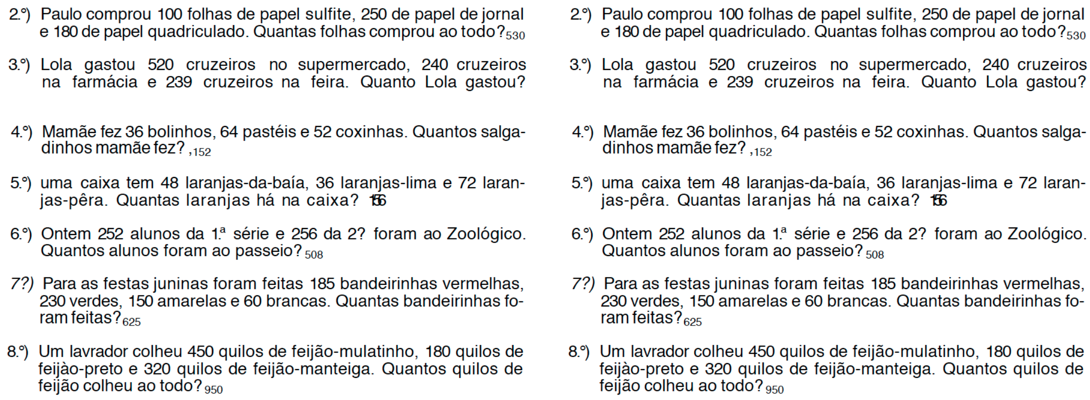
La fragmentation du contenu est tellement marquante que les tâches sont regroupées de telle sorte qu'on a toujours l'emploi du même vocabulaire et du même ordre de présentation du texte. La liste d'exercices ci-dessous, extraite d'un manuel évalué à l'occasion, exemplifie caricaturalement cette pratique :

---

68. «Ao longo da obra, encontram-se problemas nada criativos, sem desafios, tradicionais e em forma de lista, sob títulos : problemas de adição, subtração, multiplicação e divisão. Esses problemas refletem a total fragmentação do conteúdo e não consideram a realidade da criança. » (Brasil, 1994, p. 200)

69. « As operações com números naturais são trabalhados separadamente mesmo em 3a e 4a séries. À medida em que as situações-problema são apresentadas através de listas e tratadas em capítulo isolados, o aluno utiliza sempre o procedimento canônico para resolvê-las. Assim não tem a possibilidade de reelaborar seus próprios procedimentos de resolução. Nega-se, desta forma, ao aluno ocasiões valiosas de estabelecer relações entre as operações » (Brasil, 1994, p. 207)

70. « [. . .] Embora, algumas vezes, apareçam nessas listas situações mais complexas, o aluno não precisa refletir, pois sabe de antemão qual a operação a ser utilizada. » (Brasil, 1994, p. 154)



2.º) Paulo comprou 100 folhas de papel sulfite, 250 de papel de jornal e 180 de papel quadriculado. Quantas folhas comprou ao todo? 530

3.º) Lola gastou 520 cruzeiros no supermercado, 240 cruzeiros na farmácia e 239 cruzeiros na feira. Quanto Lola gastou?

4.º) Mamãe fez 36 bolinhos, 64 pastéis e 52 coxinhas. Quantos salgadinhos mamãe fez? ,152

5.º) uma caixa tem 48 laranjas-da-baía, 36 laranjas-lima e 72 laranjas-pêra. Quantas laranjas há na caixa? 156

6.º) Ontem 252 alunos da 1.ª série e 256 da 2? foram ao Zoológico. Quantos alunos foram ao passeio? 508

7?) Para as festas juninas foram feitas 185 bandeirinhas vermelhas, 230 verdes, 150 amarelas e 60 brancas. Quantas bandeirinhas foram feitas? 625

8.º) Um lavrador colheu 450 quilos de feijão-mulatinho, 180 quilos de feijào-preto e 320 quilos de feijão-manteiga. Quantos quilos de feijão colheu ao todo? 950

2.º) Paulo comprou 100 folhas de papel sulfite, 250 de papel de jornal e 180 de papel quadriculado. Quantas folhas comprou ao todo? 530

3.º) Lola gastou 520 cruzeiros no supermercado, 240 cruzeiros na farmácia e 239 cruzeiros na feira. Quanto Lola gastou?

4.º) Mamãe fez 36 bolinhos, 64 pastéis e 52 coxinhas. Quantos salgadinhos mamãe fez? ,152

5.º) uma caixa tem 48 laranjas-da-baía, 36 laranjas-lima e 72 laranjas-pêra. Quantas laranjas há na caixa? 156

6.º) Ontem 252 alunos da 1.ª série e 256 da 2? foram ao Zoológico. Quantos alunos foram ao passeio? 508

7?) Para as festas juninas foram feitas 185 bandeirinhas vermelhas, 230 verdes, 150 amarelas e 60 brancas. Quantas bandeirinhas foram feitas? 625

8.º) Um lavrador colheu 450 quilos de feijão-mulatinho, 180 quilos de feijào-preto e 320 quilos de feijão-manteiga. Quantos quilos de feijão colheu ao todo? 950

Figure 4.57 – (Brasil, 1994, p. 176) [a]

[a] Traduction des exercices de l'image : 2) Paul a acheté 100 feuilles de papier sulfite, 250 feuilles de papier journal et 180 de papier quadrillé. Combien de feuilles il a acheté en tout ? 3) Lola a dépensé 520 *cruzeiros* en supermarché, 240 *cruzeiros* à la pharmacie et 239 *cruzeiros* au marché. Combien a dépensé Lola ? 4) Maman a fait 36 muffins, 64 *pastéis* et 52 *coxinhas*. Combien d'unités a fait maman ? 5) Une boîte contient 48 oranges-da-baía, 36 oranges-citrons et 72 oranges-poire. Combien y a-t-il d'oranges dans la boîte ? 6) Hier 252 élèves de la 1ère année et 256 de la 2ème sont allés au zoo. Combien d'élèves sont allés à la visite ? 7) Pour les fêtes de Juin ont été faites 185 drapeaux rouges, 230 verts, 150 jaunes et 60 blancs. Combien de drapeaux étaient faits ? 8) Un agriculteur a récolté 450 kilos de haricots-mulâtres, 180 kilos de haricots-noirs et 320 livres de haricots-beurre. Combien de kilos d'haricot a été récolté en tout ? 9) Lors d'une fête, il y avait 150 enfants, 60 hommes et 70 femmes. Combien de personnes y avait-il à la fête ? 10) Marcos a 230 billes bleues, 240 billes vertes et 195 billes blanches. Combien de balles Marcos a-t-il ? 11) Pour décorer une salle ont été utilisés 4 cents roses rouges, 3 cents roses blanches et 6 douzaines de roses jaunes. Combien de roses ont été utilisées ? 12) J'ai acheté 6 mètres de denim bleu, 12 mètres de lin beige et 18 mètres de soie blanche. Combien de mètres de tissu ai-je acheté en tout ? 13) Lors d'une compétition scolaire, 96 crayons ont été distribués,185 règles et 297 caoutchoucs. Combien d'objets ont été distribués ? 14) Dans une école, il y a 450 élèves de 1ère année et 530 de 2ème année. Combien d'élèves étudient en première et deuxième années dans cette école ? 15) Pendant une foire, 350 *coxinhas*, 420 quibes et 200 tartes ont été vendus. Combien d'unités ont été vendus au total ?

Toutes les tâches de cette liste sont résolues par la somme des trois valeurs indiquées dans les énoncés. Du point de vue des structures additives (Vergnaud, 1990), toutes se réfèrent à l'idée de composition de mesures. Plusieurs autres extraits de I_{PNLD} témoignent de la présence de cette pratique dans la plupart des manuels de l'époque.

Les tâches alors se distinguent par l'opération qui permet de les accomplir : tâches d'addition et tâches de soustraction. Cependant, ce choix se révèle inconsistant, parce que ces deux groupes ne sont pas disjoints, comme le montre bien le commentaire fait par I_{PNLD} dans l'extrait suivant :

> Pour résoudre des situations de compléter (combien manquent) et de comparaison, l'enfant utilise différentes procédures de calcul utilisant le signe (+), parfois le signe (-). [. . .] Ce fait est abondamment documenté dans les recherches sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. (Brasil, 1994, p. 195, traduction propre) [71]

71. « Para resolver situações de completar (quantos faltam) e de comparar, a criança utiliza diferentes procedimentos de cálculo empregando ora o sinal (+), ora o sinal (-). [...] Este fato é fartamente documentado em pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática. » (Brasil, 1994, p. 195)

Nous pouvons décrire le scénario de 1994, raconté par I_{PNLD}, à l'aide de V2. À ce propos, remarquons que V2.2 et V2.3 étaient quasiment des éléments inaperçus, inexplorés ou négligés dans la production des manuels. Alors que V2.1 et V2.4 sont clairement présentes dans l'élaboration des tâches du champ additif.

Tableau 4.21 – V2 en 1994 selon I_{PNLD}

V2 : L'idée de la situation	V2.1 : Usage d'un contexte	V2.1.a : Oui
		V2.1.b : Non
	V2.2 : Nature du contexte	V2.2.a : Mathématique
		V2.2.b : Extramathématique
	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison
	V2.4 : Opération de la situation	V2.4.a : Addition
		V2.4.b : Soustraction

En plus, les valeurs effectivement prises en compte par I_M en 1994 sont des composantes structurantes de l'activité, c'est-à-dire de l'organisation didactique du champ additif : d'abord l'étude est partagée en opérations d'addition et opérations de soustraction, puis à l'intérieur de chacune de ces deux études on sépare les tâches contextualisées et les tâches non-contextualisées.

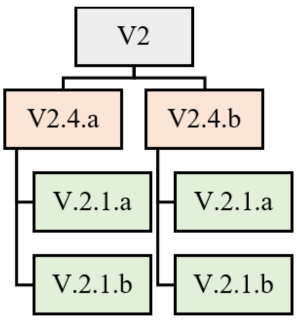


Figure 4.58 – Structuration de V2 en 1994 selon I_{PNLD}

I_{PNLD} prescrit depuis la première évaluation que V2.2 et V2.3 soient prises en compte par I_M. Dans cette perspective, 10 ans après la première évaluation, en 2004, des progrès sont ouvertement célébrés par l'institution évaluatrice face aux changements des manuels. À cet égard, nous retrouvons le texte ci-dessous :

> Les conceptions de l'enseignement des mathématiques ont beaucoup évolué au cours des dernières décennies. Jusqu'à récemment, les propositions didactiques prévalantes

> reposaient uniquement (ou principalement) sur la mémorisation de contenu, la manipulation mécanique d'algorithmes et de procédures. *Celles-ci ne permettent pas à l'étudiant d'acquérir une connaissance mathématique autonome et critique lui permettant de résoudre des problèmes rencontrés dans différents contextes.* Au contraire, ils ont été amenés à mémoriser des noms, à résoudre des exercices proches des modèles présentés précédemment et *à identifier les opérations à utiliser dans chaque problème, étayés par des mots-clés soigneusement expliqués dans le manuel ou par l'enseignant.* [. . .]
> *De nombreuses recherches et l'expérience d'enseignant ont montré que cela était dû en partie à l'utilisation de manuels inappropriés.* Les manuels inclus dans cette liste de manuels approuvés montrent que l'enseignant peut désormais disposer de manuels dans lesquels les activités principales des cours de mathématiques ne sont pas la mémorisation ni l'application mécanique de formules, d'algorithmes et de procédures. *Les sujets traditionnellement traités de manière très similaire par différents auteurs ont acquis de nouvelles approches, exemples, motivations et applications.* De même, de nouveaux contenus et activités ont été intégrés à ces livres, tels que la lecture, l'interprétation et la création de graphiques et de tableaux. *En outre, ces travaux ont cherché à intégrer les différents domaines des mathématiques scolaires et à proposer des situations significatives aux étudiants, également concernés par la contextualisation et l'interdisciplinarité.* (Brasil, 2002, p. 32, traduction et souligné propres) [72]

« Les manuels inappropriés » ont dû alors changer pour surmonter les problèmes jugés par Ipnld. La prise en compte des *bons* contextes et l'interdisciplinarité apparaissent comme des solutions utilisées pour cela. L'autonomie et la criticité des élèves aux problèmes de la société sont à la base de toute cette discussion.

À partir de l'évaluation de 2004, la contextualisation est devenue un critère permanente d'évaluation, présente dans la grille utilisée par les évaluateurs de Ipnld. L'importance accordée à la contextualisation et à l'interdisciplinarité est ressentie aussi ostensiblement dans l'ensemble des textes officiels de cette institution. À savoir que dans plusieurs documents ces deux mots sont facilement repérés par une marque qui les différencie d'autres mots du texte, sont-ils alors des mots « importants » vis-à-vis Ipnld.

72. « As concepções sobre ensino de Matemática têm mudado muito nas últimas décadas. Até pouco tempo, prevaleciam propostas pedagógicas baseadas apenas (ou principalmente) na memorização de conteúdos, na manipulação mecânica de algoritmos e procedimentos. Essas não propiciavam ao aluno a aquisição de um conhecimento matemático autônomo e crítico, que lhe permitisse resolver problemas encontrados em vários contextos. Ao contrário, eram levados a memorizar nomes, a resolver exercícios próximos de modelos apresentados anteriormente e a identificar as operações que deveriam ser utilizadas em cada problema, apoiados em palavras-chave cuidadosamente explicitadas no livro didático ou pelo professor. [...]Muitas pesquisas, e a experiência de professores como você, identificaram essa situação como sendo, em parte, resultado da utilização de livros didáticos inadequados. As obras incluídas neste catálogo mostram que o professor pode, hoje, dispor de livros em que as atividades principais nas aulas de Matemática não são as de memorização ou de aplicação mecânica de fórmulas, algoritmos e procedimentos. Assuntos tradicionalmente tratados de forma muito parecida por diferentes autores ganharam novas abordagens, exemplos, motivações e aplicações. Da mesma forma, novos conteúdos e atividades foram incorporados a esses livros, como a leitura, a interpretação e a elaboração de gráficos e tabelas. Além disso, essas obras têm procurado integrar os diferentes campos da Matemática escolar e propor situações significativas para os alunos, preocupando-se também com a contextualização e a interdisciplinaridade. » (Brasil, 2002, p. 32)

As situações-problema apresentadas envolvem, em sua maioria, uma boa contextualização. Além disso, a inclusão de temas como economia de água, eleições, educação para o trânsito, ambiente e outros contribuem para a formação da cidadania. Também se percebe o importante estímulo à interdisciplinaridade ao relacionar tópicos de Matemática e os de outras áreas, tais como Geografia, Ciências, Língua Portuguesa.

Figure 4.59 – (Brasil, 2002, p. 56) [a]

a. Traduction de l'image : « La majorité des situations problèmes sont proposées à l'aide d'une bonne contextualisation. En outre, l'inclusion de sujets tels que l'économie d'eau, les élections, l'éducation du trafic, l'environnement et d'autres contribuent à la formation de la citoyenneté. Nous avons également remarqué l'importance de l'interdisciplinarité de mathématiques et d'autres domaines, tels que la géographie, les sciences et la langue portugaise. » (Brasil, 2002, p. 56, traduction propre)

En effet, depuis que la contextualisation est devenue un critère officiel de jugement, ce que Ipnld ambitionne sur cet aspect pour l'enseignement des mathématiques n'a pas beaucoup changé dans ces années d'évaluation. Par exemple, l'extrait ci-dessous est présenté dans les documents des cinq évaluations de la période de 2007 à 2016.

> Afin de favoriser l'attribution de significations aux contenus mathématiques, deux principes ont pris une importance particulière dans l'enseignement actuel : la contextualisation et l'interdisciplinarité. Le premier d'entre eux établit la nécessité d'articuler l'enseignement des mathématiques avec diverses pratiques et besoins sociaux, tandis que le second plaide en faveur d'un enseignement ouvert pour les relations entre les mathématiques et d'autres domaines du savoir scientifique ou technologique. Dans les deux cas, ces principes sont en harmonie avec la conception des mathématiques exposée dans ce texte. Cependant, il ne faut pas oublier que les liens internes entre les contenus mathématiques sont également des moyens d'attribuer des significations à ces contenus. En outre, il convient de noter que les contextualisations artificielles, où la situation présentée n'est qu'un prétexte pour obtenir des données numériques utilisées dans des opérations mathématiques, sont inefficaces. Des contextualisations prétendument basées sur la vie quotidienne, mais avec des aspects totalement irréalistes ne sont pas non plus souhaitables. (Brasil, 2006, p. 16) (Brasil, 2009, p. 24) (Brasil, 2012, p. 15) (Brasil, 2015, pp. 17-18, traduction propre) [73]

73. « Com o objetivo de favorecer a atribuição de significados aos conteúdos matemáticos, dois princípios têm assumido particular destaque no ensino atual : o da contextualização e o da interdisciplinaridade. O primeiro deles estabelece a necessidade de o ensino da Matemática estar articulado com as várias práticas e necessidades sociais, enquanto o segundo defende um ensino aberto para as inter-relações entre a Matemática e outras áreas do saber científico ou tecnológico. Em ambos os casos, há harmonia desses princípios com a concepção de Matemática exposta neste texto. No entanto, não se pode esquecer que as conexões internas entre os conteúdos matemáticos são, também, formas de atribuição de significados a esses conteúdos. Além disso, convém observar que as contextualizações artificiais, em que a situação apresentada é apenas um pretexto para a obtenção de dados numéricos usados em operações matemáticas, são ineficazes. Também não são desejáveis as contextualizações pretensamente baseadas no cotidiano, mas com aspectos totalmente irreais. » (Brasil, 2006, p. 16) (Brasil, 2009, p. 24) (Brasil, 2012, p. 15) (Brasil, 2015, pp. 17-18)

Dans l'ensemble de ces évaluations, plusieurs manuels sont couverts d'éloges à propos des contextes utilisés. D'autres, cependant, sont jugés négativement en fonction spécialement de l'artificialité des contextes ou de comment ils sont exploités dans l'étude des objets mathématiques. Moins communes sont les critiques sur des incompréhensions de l'idée des structures additives :

> La collection contient également diverses situations qui donnent un sens aux quatre opérations de base. Cependant, dans le cas de problèmes additifs, il est observé que les situations de comparaison apparaissent uniquement associées à la soustraction. (Brasil, 2006, p. 213, traduction propre) [74]

Dans l'évaluation de 2016, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ décrit l'état des manuels de la façon suivante :

> Indissociable de la construction progressive des nombres naturels et du système de numération décimale, est l'étude des opérations fondamentales d'addition, soustraction, multiplication et division, *abordées dans toutes les collections suivant cette séquence.* Dans ce domaine, une classification des idées d'opérations s'est répandue. Avec cette classification, il y a un essai d'organiser, par catégories, les significations possibles que ces opérations peuvent revêtir dans les différents contextes de leur emploi. L'une de ces catégories comprend les situations qui donnent du sens aux opérations d'addition et de soustraction, *appelées situations additives.* Dans celles-ci, l'addition et la soustraction sont associées à divers contextes de composition, de décomposition, de comparaison et de transformations de quantités. Ces situations problématiques peuvent être modélisées par différentes stratégies de résolution et en choisissant une addition ou une soustraction de nombres. (Brasil, 2015, p.30, traduction et souligné propres) [75]

Ce que nous remarquons avec ces derniers extraits est que V2.2 et V2.3 ont été prises en compte par I_{M}, selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. En particulier, V2.2 assume une pluralité des valeurs que nous n'avions pas retenues dans notre modèle de référence du chapitre 3. Il s'agit là d'un effet clair de l'assujettissement des institutions noosphèriennes.

74. « Também estão presentes, na coleção, várias situações que dão sentido às quatro operações básicas. No entanto, no caso dos problemas aditivos, observa-se que as situações de comparação aparecem apenas associadas à subtração. » (Brasil, 2006, p. 213)

75. « Indissociável da construção progressiva dos números naturais, e do sistema de numeração decimal, é o estudo das operações fundamentais de adição, subtração, multiplicação e divisão, abordadas, em todas as coleções seguindo-se essa sequência. Nesse terreno, tem se difundido uma classificação das denominadas ideias das operações. Com essa classificação, procura-se organizar, por meio de categorias, possíveis significados que essas operações podem assumir nos diversos contextos de seu emprego. Uma dessas categorias inclui as situações que dão sentido às operações de adição e de subtração, as chamadas situações aditivas. Nessas, a adição e a subtração aparecem associadas a contextos diversificados de composição, decomposição, comparação e transformações de quantidades. Tais situações-problema podem ser modeladas por meio de diferentes estratégias de resolução e pela escolha de uma adição ou de uma subtração de números. [...]. » (Brasil, 2015, p.30)

Tableau 4.22 – V2 en 1994 selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$

V2 : L'idée de la situation	V2.1 : Usage d'un contexte	V2.1.a : Oui
		V2.1.b : Non
	V2.2 : Nature du contexte	V2.2.a : Mathématique
		V2.2.b : Interdisciplinarité
		V2.2.c : Vie quotidienne
		V2.2.d : Questions de la société
		V2.2.e : Histoire des mathématiques
		Et d'autres...
	V2.3 : Structure additive	V2.3.a : Composition
		V2.3.b : Transformation
		V2.3.c : Comparaison
	V2.4 : Opération de la situation	V2.4.a : Addition
		V2.4.b : Soustraction

Ces variables et valeurs permettent aussi de montrer comment l'enseignement est organisé en 2016 dans les manuels : au départ on sépare l'étude en deux moments, un pour l'addition et un pour la soustraction (V2.4), où on va rencontrer des tâches contextualisées et non contextualisées (V2.1) ; à l'intérieur de chaque opération, dans les tâches contextualisées, nous rencontrons les principes des structures additives (V2.3), où les tâches font référence à des contextes divers de V.2.2. Nous pouvons alors rendre compte de cette organisation de l'enseignement par la structuration des variables comme indiquée dans la figure suivante.

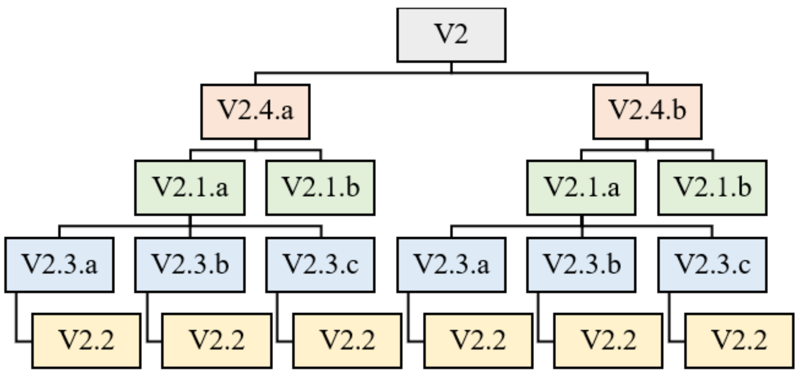


Figure 4.60 – Structuration de V2 dans l'évaluation de 2016 selon $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$

Deux remarques sont ici nécessaires. La première est sur le fait de partager l'étude du champ additif par les opérations d'addition et de soustraction. Nous soulignons que cela a été jugé fortement comme inapproprié en 1994 par $\mathrm{I_{PNLD}}$, mais malgré cela $\mathrm{I_M}$ conserve cette structure. Cette organisation didactique tend à changer seulement quand les types de tâches de chaque opération sont déjà perçus comme suffisamment routiniers. C'est-à-dire, V2.4.a et V2.4.b se rencontrent si elles ont été travaillées individuellement auparavant.

En revanche, $\mathrm{I_M}$ a cherché à se conformer au jugement de $\mathrm{I_{PNLD}}$ en intégrant les valeurs de V2.3 et V2.2 dans les tâches d'addition et de soustraction. Or, la prise en compte de V2.3 aboutie à un autre phénomène de segmentation du curriculum, d'où notre deuxième remarque. Pour cela, considérons un autre extrait de $\mathrm{I_{PNLD}}$ de l'évaluation de 2016 sur les structures additives :

> Le travail pédagogique soutenu par ces études a été largement préconisé et peut être considéré comme adopté dans les collections approuvées. Mais une pause est nécessaire pour réfléchir à cette question. La classification résumée ci-dessus est une connaissance qui doit être acquise par les enseignants et les auteurs des manuels en tant qu'instrument permettant de formuler une séquence de situations problématiques ou d'explications de la systématisation, mais il n'y aucune raison d'attendre que l'élève s'approprie la nomenclature sous-jacente. De plus, il est déconseillé d'utiliser cette nomenclature pour intituler les unités des manuels (chapitres, sections, leçons). Par exemple : « Chapitre 3 : La multiplication en tant que décompte dans un arrangement rectangulaire » ou « La leçon d'aujourd'hui porte sur l'idée de la comparaison ». De tels choix vont dans le sens opposé de celui qui peut permettre à l'élève de développer un raisonnement et des stratégies plus autonomes. (Brasil, 2015, p.30, traduction propre) [76]

Ce que $\mathrm{I_{PNLD}}$ prescrit ici pour l'avenir des manuels est de ne pas exploiter les valeurs de la variable V2.3 au niveau de l'organisation didactique de l'étude du champ additif pour l'élève.

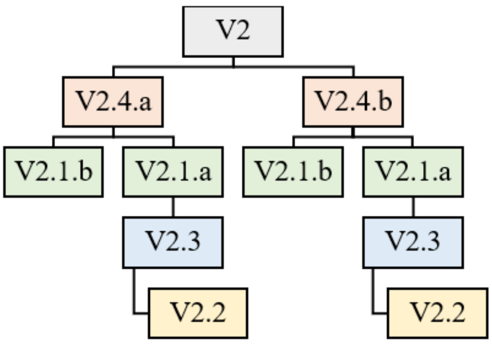


Figure 4.61 – Structuration prescrite pour V2 dans l'évaluation de 2016 par $\mathrm{I_{PNLD}}$

Or, même avec cette configuration l'étude du champ additif reste toujours segmentée par les deux

76. « O trabalho pedagógico apoiado nesses estudos tem sido preconizado amplamente e pode-se dizer que é adotado nas coleções aprovadas. Mas é necessária uma parada para refletir sobre essa questão. A classificação acima sumarizada é um conhecimento a ser adquirido pelos professores e autores como instrumento de formulação da sequência de situações- problema ou das explanações de sistematização, mas não faz sentido esperar que o aluno se aproprie da nomenclatura que ela envolve. E mais, é desaconselhável utilizar essa nomenclatura como título de unidades (capítulos, seções, lições). Por exemplo : "Capítulo 3 : Multiplicação como contagem em organização retangular" ou "A lição de hoje é sobre a ideia de comparar" . Tais escolhas caminham em sentido contrário à de possibi- litar ao aluno desenvolver raciocínios e estratégias com mais autonomia. » (Brasil, 2015, p.30)

opérations. Si on envisage une configuration possible de V2 qui représente le souhait de I_{PNLD} , à quoi ressemblerait ce réglage ? Notre interprétation des discours de cette institution nous amène à penser que ce sont des tâches *bien* contextualisées qui devraient motiver l'étude (V2.1.a et V2.2), où les sens des structures additifs vont être construits par la diversité de ces tâches (V2.3). Les opérations d'addition et de soustraction apparaissent alors à la fin du processus et non au départ : un bouleversement important de la manière d'étudier le champ additif. Dans ce sens, les tâches non-contextualisées continuent à exister, avec une place restreinte et suffisante pour le moment de travail avec les techniques.

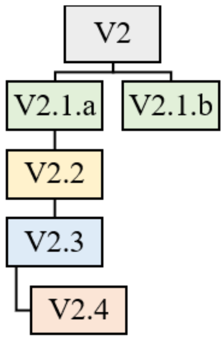


Figure 4.62 – Structuration idéal de V2 pour I_{PNLD}

Même s'il est vrai que cette configuration idéalisée est encore loin de ce qui se fait dans le curriculum dominant, soulignons que l'assujettissement de I_M à I_{PNLD} a produit des effets. Certains de ces effets sont vus (par I_{PNLD}) comme positifs, comme la prise en compte des différentes natures de contextes, encore que leur usage reste toujours un sujet cible de jugements négatifs. La segmentation de l'étude est, en revanche, un fort aspect de résistance. La prise en compte des valeurs de V2.3 a comme *effet secondaire* cette segmentation.

Par la suite nous proposons de continuer notre analyse en regardant de plus près le phénomène de changement sur une collection de manuels.

4.4.3 Les tâches contextualisées dans une collection de manuels, une analyse comparative de deux périodes

Dans notre thèse, le choix des manuels à analyser pour chaque étude de cas est toujours une question que nous nous posons face au corpus et à la nature des phénomènes analysés. Pour cette étude de cas, nous décidons de regarder de plus près une collection de manuels qui a été évaluée dans les deux périodes que nous étudions, 1994 et 2016. L'unique collection qui a ce profil parmi les matériaux que nous avons s'appelle « A conquista da Matemática », en français « La conquête des mathématiques »[77]. Notre regard vers les deux versions de cette collection sera dirigé par les valeurs que la variable V2 assume dans chacune des deux époques en confrontation avec ce que nous avons identifié dans l'analyse des documents de IPNLD.

En commençant par les sommaires des manuels, quelques différences sont perceptibles entre les deux époques. Prenons des exemples :

Unidade 3 — **Operações com números naturais**
1. Adição 48
2. Multiplicação 60
3. A subtração 97
4. A divisão 120
5. Expressões numéricas 146
6. Resolvendo problemas 153

Figure 4.63 – (Giovanni, 1989c, v.3, p. 03)[a]

a. Traduction de l'image : Opérations avec les nombres naturelles : 1. Addition ; 2. Multiplication ; 3. Soustraction ; 4. Division ; 5. Expression numériques ; 6. Résolution des problèmes.

2 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO 38

EXPLORANDO – Adição e subtração em diferentes situações 40
1. As ideias da adição 41
Juntar quantidades 41
Acrescentar uma quantidade a outra 41
2. As ideias da subtração 42
Tirar uma quantidade de outra 42
Completar uma quantidade para atingir outra 42
Comparar duas quantidades 42
3. Situações de adição 45
4. Situações de subtração 53
5. Expressões numéricas 61
FALANDO DE JOGOS E BRINCADEIRAS – Gincana das nações 64

Figure 4.64 – (Giovanni Jr., 2014a, v.4, p. 04)[a]

a. Traduction de l'image : Addition et soustraction : 1. Les idées de l'addition : réunir quantités, ajouter une quantité dans une autre ; 2. Les idées de la soustraction : retirer une quantité de l'autre, compléter une quantité pour arriver à une autre, comparer deux quantités ; 3. Situations d'addition ; 4. Situations de soustraction ; 5. Expressions numériques.

Ces deux sommaires correspondent à la même année scolaire[78]. Dans la version plus ancienne,

77. La version de « A conquista da Matemática » évaluée en 1994 est celle publiées par sa maison d'édition en 1989. L'école primaire au Brésil en 1994 se passait en quatre années. Nous n'avons pas la bonne version du manuel de la deuxième année de 1989 et pour cela nous nous concentrerons sur les autres trois manuels des autres années. Ce manque n'affecte pas notre analyse vu que nous ne sommes pas intéressés ici à l'évolution temporelle d'une année scolaire à l'autre. La version de cette collection évaluée par IPNLD en 2016 a été publiée par IM en 2014.

78. La troisième année de l'école primaire en 1989 correspond au quatrième année en 2016. Cette différence est due à une réforme dans le système d'enseignement brésilien qui a modifié le temps de l'école primaire de 4 ans pour 5 ans.

les quatre opérations sont étudiées dans l'ordre « addition, multiplication, soustraction et division », alors que dans le manuel plus récent, l'étude des quatre opérations est combinée par paires « addition et soustraction » et « multiplication et division ». Selon Ipnld, ce dernier format est devenu un genre de vulgate de l'actualité, suivi par quasi tous les auteurs de manuels.

Dans les deux cas, les opérations sont étudiées séparément. Sur cette collection spécifique, IPNLD avait constaté et critiqué cela en 1994 et aussi dans l'évaluation de 2016 :

> Bien qu'il ait renoncé à une introduction artificielle de la théorie des ensembles, l'ouvrage présente une particularité formelle, notamment en ce qui concerne les opérations sur les nombres naturels : l'étude se développe, même à partir de la 3e année, avec chaque opération faisant l'objet d'un chapitre étanche, élargissant progressivement les difficultés de calcul, en prenant comme fil conducteur les propriétés structurelles des opérations. (Brasil, 1994, p. 192, traduction propre) [79]

> À juste titre, les différentes significations des opérations sont travaillées. Cependant, dans la 2e année, elles sont travaillées de manière isolée, chacune étant explorée dans un chapitre spécifique, à partir des éléments discriminants, ce qui est tout à fait inapproprié. (Brasil, 2015, p. 75, traduction propre) [80]

Nous voyons alors que malgré le jugement négatif de IPNLD, cette non-conformité avec l'évaluation persiste dans cette collection. Un autre aspect aussi flagrant dans la comparaison de ces deux sommaires concerne les titres donnés aux chapitres. Remarquons qu'ils étaient nommés en 1989 d'après les opérations à étudier. Dans un livre du maître de cette collection ancienne les objectifs d'étude des deux opérations sont signalés comme : « associer l'addition aux situations de *réunion*, les traduisant par une expression mathématique » et « associer la soustraction aux situations de *retirer* ou de *compléter*, les traduisant par une expression mathématique ». Nous remarquons déjà à cette époque une intention de faire vivre certains sens des opérations. Dans la version plus actuelle, les sens du champ additif sont devenus aussi une sorte de moyen de structuration de l'étude. Face à cela, IPNLD suggère à l'enseignant de contourner ce problème :

> Vu que les différentes significations des opérations sont présentées séparément, il est nécessaire de proposer des situations permettant aux élèves de décider quelle opération utiliser. (Brasil, 2015, p. 71, traduction propre) [81]

La précision territoriale et temporelle qui démarque *a priori* où et quand utiliser chaque opération fait rencontrer une espèce d'inconsistance didactique. Les travaux de Vergnaud (1990) ont bien montré

79. « Embora dispense uma introdução artificial à teoria dos conjuntos, a obra tem uma característica formal especialmente no que se refere às operações em números naturais : desenvolve mesmo a partir da 3a série, cada operação em um capítulo estanque, amplia gradualmente as dificuldades de cálculo, tomando como fio condutor as propriedades estruturais das operações. » (Brasil, 1994, p. 192)

80. « Acertadamente, são trabalhados os diferentes significados das operações. Entretanto, no volume 2, elas são trabalhadas isoladamente, sendo que cada uma é explorada em um capítulo específico, com itens discriminando cada um dos significados da operação, o que é bastante inadequado. » (Brasil, 2015, p. 75)

81. « Como os diferentes significados das operações são apresentados separadamente, é preciso propor situações que permitam aos alunos decidirem que operação utilizar. » (Brasil, 2015, p. 71)

que certains problèmes additifs mobilisent des stratégies d'addition et de soustraction - soulignons ici le connecteur « et ». Or, dans cette collection certains sens additifs de V2.3 sont restreints à seulement une des deux opérations. Voici un exemple :

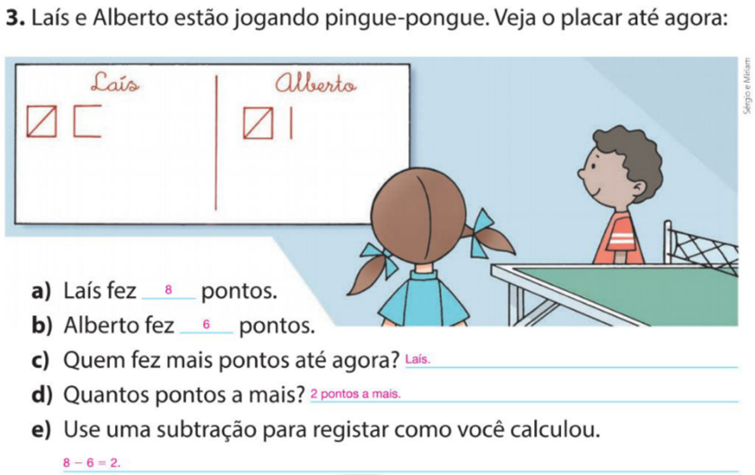


Figure 4.65 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 77) [a]

a. Traduction de l'image :
3) Laís et Alberto jouent au ping-pong, vérifiez le score jusqu'à présent :
a) Laís a fait ... points.
b) Alberto a fait ... point.
c) Qui a fait plus de point jusqu'à présent ?
d) Combien de points de plus ?
e)Utilisez une soustraction pour représenter comment vous avez calculé.

Nous voyons que l'élève doit représenter la situation par une soustraction, « 8 - 6 = 2 », bien que le problème peut être aussi modélisé par « 6 + 2 = 8 ». Nous trouvons ce même esprit dans l'ancienne version de la collection, comme le montre l'exemple suivant :

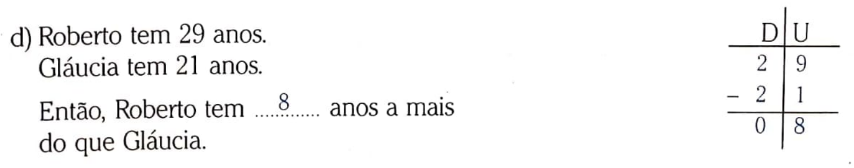
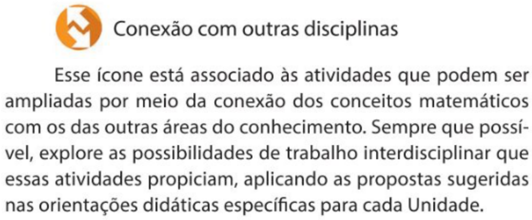


Figure 4.66 – (Giovanni, 1989a, v.1, p. 127) [a]

a. Traduction de l'image : Roberto a 29 ans. Gláucia a 21 ans. Alors, Roberto a ... ans de plus que Gláucia.

C'est un problème classique de comparaison de l'âge de deux personnes. La technique choisie dans le manuel est l'algorithme posé de la soustraction. Cela est une constante dans les situations de comparaisons : c'est toujours la soustraction qui permet de modéliser et d'accomplir ce type de tâches.

Sur la nature des contextes, d'autres remarques sont nécessaires. Il est notable dans la version plus actuelle, à la différence de l'ancienne, une forte volonté d'intégrer et de faire apparaître une richesse de contextes extra-mathématiques. Cela se voit spécialement par trois indicateurs. Le premier est la présence d'une icône à côté de certaines activités qui signale le caractère interdisciplinaire de la question proposée. A propos de cette icône, il est dit dans le livre du maître :


Conexão com outras disciplinas

Esse ícone está associado às atividades que podem ser ampliadas por meio da conexão dos conceitos matemáticos com os das outras áreas do conhecimento. Sempre que possível, explore as possibilidades de trabalho interdisciplinar que essas atividades propiciam, aplicando as propostas sugeridas nas orientações didáticas específicas para cada Unidade.

Figure 4.67 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 262) [a]

a. Traduction : Connexion avec d'autres disciplines - Cette icône est associée à des activités pouvant être développées en associant des concepts mathématiques à ceux d'autres domaines de la connaissance. Dans la mesure du possible, explorez les possibilités de travail interdisciplinaire que ces activités offrent en appliquant les propositions suggérées dans les directives didactiques propres à chaque unité.

Le deuxième indicateur concerne les sessions qui ont été intégrées dans la collection, comme « D'autres contextes » et « De cette façon, vous apprenez aussi », toujours présentées dans des boxes ou des pages qui se démarquent du texte commun. Il y a aussi la session « En parlant de… », qui consiste à un projet thématique à travailler durant toute l'année scolaire. Selon le livre du maître, ces unités sont destinées à conduire l'étude des mathématiques vers des questions plus générales de la société. Cependant, $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ n'est pas vraiment satisfait de la qualité et de l'usage de ces contextes :

> La collection se caractérise par des présentations contextualisées des sujets à traiter dans chaque chapitre, suivies d'exemples d'activités, d'une systématisation du contenu et des activités d'application. [...] Les relations des mathématiques avec d'autres domaines sont développées dans les sections « Autres contextes » [...]. Cependant, les liens suggérés sont parfois artificiels. Les questions relatives aux autres disciplines, en général, servent uniquement de fond à l'élaboration de questions mathématiques. (Brasil, 2015, p. 71, traduction propre) [82]

Un dernier constat que nous présentons ici concerne la valorisation des tâches non-contextualisées dans les deux versions de la collection. Dans les manuels plus anciens, nous retrouvons facilement des pages pleines d'exercices sans aucun contexte, jusqu'à avoir 70 tâches du type « a + b » dans deux uniques pages. Ces listes d'exercices existent toujours dans les nouveaux manuels, mais elles dépassent difficilement une dizaine de tâches. Les tâches contextualisées sont bien plus remarquables dans les manuels plus récents : elles sont dans ce nouveau scénario présentes tout au long des chapitres,

82. « A coleção caracteriza-se pelas apresentações contextualizadas dos assuntos a serem trabalhados em cada capítulo, seguidas de exemplos de atividades, sistematizações dos conteúdos e atividades de aplicação. [...] As relações da Matemática com outras áreas dos conhecimentos são desenvolvidas nas seções Outros contextos [...] . Entretanto, as conexões sugeridas são, por vezes, artificiais. Assuntos relativos a outras disciplinas, em geral, servem apenas como pano de fundo para a elaboração de questões da Matemática. » (Brasil, 2015, p. 71)

contrairement aux anciens manuels où elles étaient habituellement regroupées en moments spécifiques pour l'étude des « situations-problèmes ».

Face à ce que nous avons identifié, nous avons les deux schémas suivants :

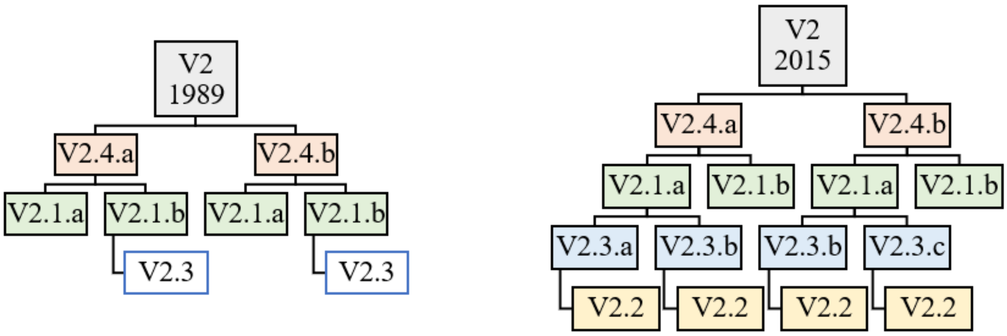


Figure 4.68 – Comparaison entre les structurations de 1989 et de 2015

Les valeurs de 2016 ne sont pas les mêmes que celles suggérées par I_{PNLD}. Mais, le degré de conformité a notablement augmenté en comparaison des valeurs du passé. Ce qui pèse encore sur la non-conformité ne sont pas vraiment les valeurs, mais la structure mettant toujours en avant les deux opérations par une bifurcation dans l'activité d'étude.

Le fait est que, dans un *paradigme de visites aux œuvres*[83] très bien enraciné, l'intérêt de l'étude se concentre souvent sur certaines techniques, qui deviennent le grand motivateur pour déterminer l'organisation des tâches dans les institutions d'enseignement. Et c'est là l'explication didactique de ce découpage lié aux opérations. Nous verrons plus tard, dans la dernière étude de cas de notre travail, que cette collection manifeste une obsession évidente pour les algorithmes posés des opérations. L'objectif principal est alors l'étude de ces techniques de calcul et pas des tâches du champ additif.

4.4.4 Conclusions de l'étude de cas des tâches contextualisées

En 1994, deux critiques de I_{PNLD} sont significativement remarquables dans la plupart des manuels évalués : la pauvreté des contextes des tâches mathématiques et la manière segmentée de l'étude des quatre opérations. Ce constat nous a conduit à démarrer une étude de cas interrogeant le sujet «

83. « Le paradigme de la visite des œuvres n'est certes pas l'apanage de l'école de la scolarité obligatoire : il est la forme banalisée du didactique dans le tourisme, les médias, les jeux télévisés et même à l'université. Son emprise se reconnaît aisément à un critère simple : la visite de l'œuvre ne fait pas rencontrer les raisons d'être de l'œuvre en général, non plus que les raisons de la rencontrer là en particulier. Qu'est-ce qui motive l'œuvre ? Telle est la question qu'une certaine modernité enseignante, amante du « savoir » hypostasié et sanctifié, a farouchement tenté de censurer. à quoi sert cette œuvre ? à quelles questions permet-elle de répondre ? En quoi et à quoi est-elle utile ? Pourquoi, ainsi, s'arrêter sur la théorie du parallélogramme ou sur l'histoire de l'empire byzantin ? On connaît la réponse de ceux pour qui le monde humain est toujours déjà naturalisé : parce qu'il y a eu l'empire byzantin ; parce qu'il y a des parallélogrammes ! L'école devient ainsi le reposoir d'œuvres dont les fonctions ne sont plus reconnues. » (Chevallard, 2010, p. 07)

contextualisation » dans le curriculum des mathématiques. Ensuite, nous avons délimité cette étude par la prise en compte d'un sous-générateur GT_c, qui a désigné les observables de l'analyse des documents de I_{PNLD} et I_M.

Pour déterminer des contraintes qui pèsent sur la variable V2, nous avons analysé les documents de I_{PNLD} (1994 - 2016). Cela nous a permis d'identifier les valeurs souhaitables de cette variable pour cette institution noosphèrienne. Cette analyse nous a également permis d'identifier, selon I_{PNLD}, des vulgates et des changements de vulgates dans les manuels. Pour conclure, nous avons analysé une collection qui illustre l'assujettissement et les résistances de I_M aux demandes de I_{PNLD}.

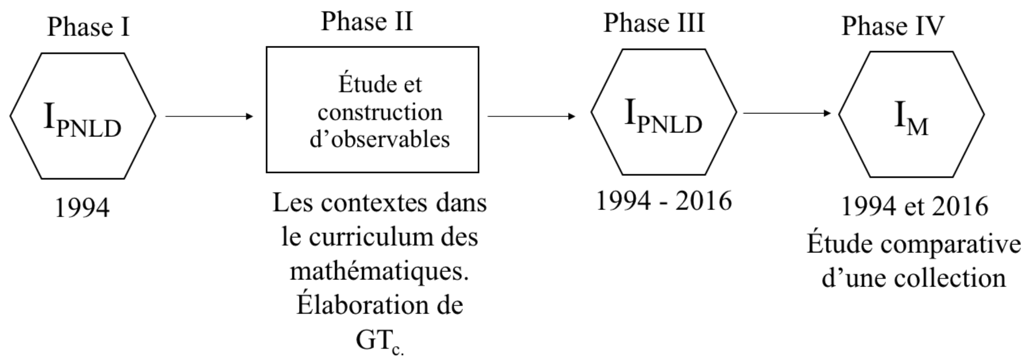


Figure 4.69 – Parcours d'étude IV

Cette analyse a montré l'insertion d'une diversité importante de contextes de la part de I_M. Par contre, I_{PNLD} constate que plusieurs contextes sont des *prétextes* pour l'étude des objets mathématiques. Le point est que pour répondre aux nouvelles contraintes, des adaptations sont faites dans les manuels. Or, ces adaptations n'ont pas suffisamment de puissance pour changer les paradigmes d'apprentissage. Cela nous amène à croire que, dans certains cas, la prise en compte des contextes n'est rien d'autre que des *manœuvres de conformité* des institutions aux injonctions de la noosphère.

Cette étude de cas nous a aussi interpelé au sujet de l'expression « champ additif », qui baptise le « secteur » des niveaux de codétermination de notre modèle de référence.

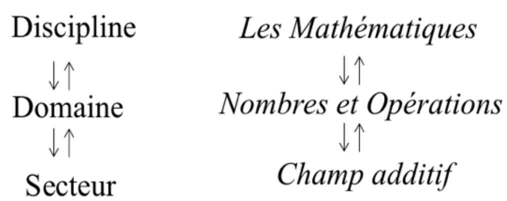


Figure 4.70 – Discipline, Domaine et Secteur

La question est que les parcours d'étude proposés dans certains manuels promeuvent la rencontre avec l'addition et la rencontre avec la soustraction, mais pas forcément avec *le champ additif.* C'est-à-dire qu'il existe dans l'expression « champ additif » un point de vue didactique qui n'est pas effectivement partagé par certaines institutions sur l'étude des opérations arithmétiques. En revanche, nous décidons de garder ce nom en sachant que les institutions peuvent s'organiser autrement, comme dans le cas que nous venons d'analyser :

Les Mathématiques	*Les Mathématiques*
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
Nombres et Opérations	*Nombres et Opérations*
$\downarrow\uparrow$	$\downarrow\uparrow$
Addition	*Soustraction*

Figure 4.71 – Bifurcation du secteur

Le terme *Champ additif* exprime, en effet, l'une des demandes de l'institution évaluatrice sur les tâches contextualisées : travailler les opérations d'addition et soustraction ensembles. Ce terme révèle aussi le modèle utilisé par nous en position de chercher pour analyser les praxéologies liées à $\mathrm{GT}^{+/-}$.

Un dernier et important aspect de notre étude concerne la structuration hiérarchique des variables et aussi des valeurs comme moyen de prendre en compte des éléments propres de l'organisation didactique. Nous pensons que la prise en compte de cet aspect dans l'analyse praxéologique nous offre des pistes importantes pour penser et questionner les différents parcours d'étude.

4.5 Les Portées Des Algorithmes Posés

Le phénomène du favoritisme institutionnel de certaines techniques a été déjà sujet de certaines de nos réflexions dans le chapitre 2. Cette étude de cas va permettre de les enrichir et de les illustrer.

Les techniques dites « algorithmes posés » des opérations d'addition et de soustraction ont une place importante dans l'enseignement du champ additif. La *taille* de cette place est un objet de débat noosphèrien.

> Vu que leur utilisation est largement répandue dans les classes primaires du monde entier, et que, d'après Shuard en 1986, 80 % du temps consacré à l'enseignement du calcul est réservé au seul enseignement des algorithmes, plusieurs études ont été conduites, notamment au Royaume Uni, aux Etats-Unis, en Australie pour analyser l'impact de l'enseignement d'un algorithme sur l'apprentissage des élèves en mathématiques. (Rinaldi, 2016, p. 78)

Cette étude de cas découle du fait que $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ assume, depuis le début des évaluations, un discours de vigilance vis-à-vis de la dominance occupée par l'enseignement de ces algorithmes. Ce discours peut être considéré comme une réaction critique sur ce qui a été et est toujours trouvé dans les manuels.

Cette attention portée aux techniques de calcul posé est expliquée selon Rinaldi (2016) par la « passivité cognitive » que l'algorithme provoque. « C'est pourquoi ils sont dangereusement séduisants, au point qu'il n'est pas rare de voir des élèves avoir recours à l'algorithme de la soustraction pour trouver le résultat de 100 \$ - 99,95 \$. » (p. 80). Les institutions d'enseignement ont toute leur responsabilité dans le favoritisme de ces techniques.

Pour cette étude, nous allons d'abord analyser les discours de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ durant la période 1994 à 2016, puis analyser une collection de manuels évaluée en 1996 et 2016 afin de chercher de possibles impacts des évaluations. Notre texte suivra cette logique.

4.5.1 Les résultats des évaluations

En 1994, les critères d'évaluation qui conduisaient les jugements de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ n'étaient pas encore bien structurés. À ce moment-là, l'évaluation est guidée par une liste de questions générales. Deux de ces questions sondaient les choix didactiques concernant les techniques opératoires :

> Le manuel permet-il à l'élève de développer ses propres algorithmes pour répondre à certaines situations ou exige-t-il la conformité à celles présentées par les auteurs ? Comment les techniques opératoires sont-elles présentées ? (Brasil, 1994, p. 58, traduction propre) [84]

Le résultat de l'évaluation consiste en de fortes critiques en réponse aux questions précédentes.

84. « O texto permite que o aluno desenvolva seus próprios algoritmos para atacar certas situações ou exige conformidade aos que apresenta ? Em particular, como são apresentadas as técnicas operatórias ? » (Brasil, 1994, p. 58)

> Le manuel impose une obéissance aveugle aux algorithmes et aux modèles présentés par les auteurs.(Brasil, 1994, p. 182, traduction propre) [85]

> Les algorithmes sont imposés et généralement présentés par des particularités. Cette approche ne permet pas aux élèves d'utiliser leurs propres modes de fonctionnement.(Brasil, 1994, p. 236, traduction propre) [86]

Ces critiques dénoncent une distance entre ce que pense I_{PNLD} de l'étude des techniques à l'école primaire et ce qui était présent dans des manuels produits par I_{M}. Précisions qu'en 1994 les manuels étant évalués pour la première fois, puis les attentes de I_{PNLD} ne sont pas encore connues par I_{M}. Cependant, même dans l'évaluation de 2004, environs dix ans après la première manifestation des souhaits de cette institution, I_{PNLD} montre toujours une insatisfaction sur ce point.

> [. . .] il est noté que, malgré tous les progrès réalisés, certains points doivent être améliorés dans certains manuels : [. . .] la formalisation de concepts ou d'algorithmes est souvent prématurée, basée sur peu d'exemples et d'activités. (Brasil, 2002, p. 33, traduction propre) [87]

Dans l'évaluation de 2007, le scénario change légèrement. Bien que l'institution évaluatrice reconnaisse une certaine volonté de I_{M} pour se mettre en conformité avec l'évaluation, comme l'introduction de techniques de calcul mental dans les manuels, ce sont les jugements négatifs qui donnent le ton de l'évaluation en ce qui concerne les techniques opératoires. La liberté institutionnelle de I_{M}, en effet, ralentit *le progrès* attendu par I_{PNLD}.

> Malgré cela [les succès réussis dans des évaluations], il y a aussi des manuels qui apportent quelques défauts. En particulier, ils présentent de manière restreinte les significations des nombres ou des opérations. Ou, encore, ils conduisent de manière très directive la construction des algorithmes conventionnels, avec peu d'interaction avec les stratégies de calcul propres des élèves. Dans l'enseignement primaire, on a beaucoup insisté sur la nécessité de développer des compétences de calcul mental et de calcul d'estimation [. . .], bien comme l'utilisation correcte de la calculatrice. Mais, il est vrai que le calcul mental est couvert par la plupart des collections évaluées. Dans beaucoup d'entre elles, un bon travail pédagogique est fait pour construire cette compétence indispensable dans la formation mathématique de l'élève. Cependant, dans d'autres des stratégies de calcul mental sont présentées, mais l'élève est peu encouragé à les utiliser. (Brasil, 2006, p. 27, traduction propre) [88]

85. « O texto força uma obediência cega aos algoritmos e modelos apresentados pelas autoras. » (Brasil, 1994, p. 182)
86. « Os algoritmos são impostos e, geralmente, apresentados através de desdobramento de particularidades. Essa abordagem não permite ao aluno utilizar maneiras próprias de operar. » (Brasil, 1994, p. 236)
87. « [...] constata-se que, não obstante todos os progressos assinalados, há pontos que precisam ser aperfeiçoados em alguns livros : [...] a formalização dos conceitos ou algoritmos é muitas vezes prematura, feita com base em poucos exemplos e atividades. » (Brasil, 2002, p. 33)
88. «Apesar disso, [dos sucessos conquistados nas avaliações] há, ainda, coleções que trazem algumas deficiências. Em particular, apresentam de maneira restrita os significados dos números ou das operações. Ou, ainda, conduzem de forma muito diretiva a construção dos algoritmos convencionais, com pouca interação com as estratégias de cálculo próprias dos alunos. No Ensino Fundamental, tem sido muito enfatizada a necessidade do desenvolvimento das habilidades de cálculo mental e de estimativa - de resultados de operações e de medidas, bem como do uso apropriado da calculadora.

C'est dans les évaluations de 2010 et de 2013 que nous trouvons les traces les plus remarquables de changements. Pour les manuels qui sont jugés en conformité avec les rapports de I_{PNLD}, l'évaluation devient élogieuse, comme dans le cas ci-dessous :

> **Correctement**, les stratégies spontanées des enfants sont souvent soulignées. De la même manière, il existe un travail continu et cohérent de présentation de plusieurs stratégies de résolution de problèmes, qui impliquent des calculs réfléchi et écrit, et des algorithmes conventionnels et non conventionnels. De plus, l'enfant est invité à choisir la stratégie de sa préférence et à montrer à ses collègues comment il a résolu l'activité. De cette façon, il peut plus facilement réaliser qu'il n'y a pas seulement un moyen de résoudre les problèmes, bien aussi de développer la capacité d'argumentation et d'autonomie. (Brasil, 2012, p. 222, traduction propre) [89]

Ainsi comme le montre cet extrait, d'autres éloges nous indiquent des pistes pour préciser les prescriptions de I_{PNLD} : ces jugements positifs suggèrent, en quelque sorte, des conditions et des contraintes qui devraient, selon I_{PNLD}, gouverner la vie des praxéologies du champ additif à l'école primaire. L'analyse du discours de cette institution montre deux caractéristiques assez récurrentes et présentées comme souhaitables : 1) le ralentissement de l'institutionnalisation des algorithmes et 2) l'usage de matériaux concrets. Voici deux exemples :

> En outre, l'élargissement du contenu **est bien pris en charge**. Un exemple est la construction des algorithmes qui est faite, progressivement, avec le soutien de matériaux concrets et la diversité des procédures, sans l'exigence d'une formalisation précoce de la part de l'étudiant. (Brasil, 2009, p. 169, traduction propre) [90]

> **D'une manière positive,** la présentation d'algorithmes conventionnels est précédée de l'étude d'algorithmes alternatifs, dont certains sont associés à l'utilisation de matériaux concrets. (Brasil, 2012, p. 186, traduction propre) [91]

Lorsque les manuels montrent des résistances aux demandes de I_{PNLD}, l'évaluation manifeste des critiques dans les documents officiels. La plupart de ces critiques, concernant les techniques, sont fondées sur les mêmes arguments présentés au cours des premières années d'évaluation, ce qui montre la force des pratiques dominantes.

O cálculo mental é abordado na maioria das coleções avaliadas. Em muitas delas, é feito um bom trabalho pedagógico para a construção dessa competência indispensável na formação matemática do aluno. Contudo, em outras, as estratégias de cálculo mental são apresentadas, mas o aluno é pouco incentivado a utilizá-las. » (Brasil, 2006, p. 27)

89. « **Acertadamente**, as estratégias espontâneas das crianças são frequentemente enfatizadas. Da mesma forma, há um trabalho contínuo e consistente de apresentação de várias estratégias de resolução de problemas, que envolvem cálculos mental e escrito, e os algoritmos convencionais e não convencionais. Além disso, a criança é convidada a escolher a estratégia de sua preferência e mostrar aos colegas como resolveu a atividade. Desse modo, ela pode perceber mais facilmente que não há somente uma maneira de resolver os problemas, além de desenvolver a capacidade de argumentação e a autonomia. » (Brasil, 2012, p. 222)

90. « Além disso, a ampliação dos conteúdos é bem cuidada. Um exemplo é a construção dos algoritmos que é feita, progressivamente, com apoio de materiais concretos e diversidade de procedimentos, sem a exigência de formalização precoce por parte do aluno. » (Brasil, 2009, p. 169)

91. « De modo positivo, a apresentação dos algoritmos convencionais é antecedida pelo estudo de algoritmos alternativos, alguns dos quais associados ao uso de materiais concretos. » (Brasil, 2012, p. 186)

> **Même** avec la présence de quelques exemples de techniques de calcul moins conventionnelles, les algorithmes formels restent prioritaires. (Brasil, 2009, p. 142, traduction propre) [92]

Les enseignants participent au processus transpositif des entités praxéologies présentes dans les manuels : ils sont les principaux acteurs du processus de la transposition didactique interne dans leurs interactions en classe avec les élèves. Compte tenu de cela et pour contourner les praxéologies indésirables, I_{PNLD} donne directement des conseils aux enseignants, comme celui ci-dessous :

> Compte tenu de l'appréciation excessive des algorithmes et des procédures dans les activités proposées, **il est recommandé que l'enseignant** programme et enseigne aux élèves à utiliser leurs propres stratégies, en les encourageant à les comparer avec celles consacrées à l'enseignement et d'en tirer des conclusions. » (Brasil, 2012, p. 36, traduction propre) [93]

Signalons que I_{PNLD} motive les enseignants à exploiter didactiquement les domaines des concurrences des techniques. Une tactique pour que les praxéologies personnelles jouent contre le favoritisme de certaines techniques.

Dans l'évaluation de 2016 (publiée en 2015), un des résultats de l'évaluation montre un degré de conformité plus accentué entre I_{PNLD} et I_{M} à propos du travail des techniques opératoires, même si on trouve toujours des manuels qui résistent à l'abandon de certains choix didactiques.

> On peut considérer que les collections approuvées ont promu un travail pédagogique satisfaisant de construction, avec l'élève, des algorithmes des opérations, en parcourant un chemin qui commence par les algorithmes spontanés, des algorithmes diversifiés, jusqu'à l'algorithme conventionnel, qui est l'un des but d'apprentissage des cinq premières années de l'école primaire. [. . .] Dans l'étude des algorithmes, on souligne positivement, l'utilisation fréquente des matériaux concrets déjà mentionnés dans la construction du système de numération. [. . .] Une modalité de calcul appréciée dans l'enseignement primaire et qui a reçu, à des degrés divers, l'attention de tous les manuels approuvés dans PNLD 2016 et énumérés dans ce document, est le calcul réfléchi. Ce choix est soutenu par des études en éducation mathématique qui suggèrent sa pertinence pour l'éducation de l'élève. Le travail sur le calcul réfléchi a cherché à développer chez les élèves la capacité d'effectuer des opérations plus rapidement et indépendamment de l'utilisation d'algorithmes conventionnels ou de l'utilisation de la calculatrice. (Brasil, 2015, pp. 31-32, traduction propre) [94]

92. « Mesmo com a presença de alguns exemplos de técnicas de cálculo menos convencionais, os algoritmos formais são priorizados. » (Brasil, 2009, p. 142)

93. « Dada a excessiva valorização de algoritmos e procedimentos nas atividades propostas, recomenda-se que o docente programe e oriente os alunos a usarem estratégias próprias, incentivando-os a compará-las com as consagradas no ensino e a tirar conclusões. » (Brasil, 2012, p. 36)

94. «Pode-se considerar que as coleções aprovadas têm promovido um trabalho pedagógico satisfatório de construção, com o aluno, dos algoritmos das operações, percorrendo-se um caminho que começa com os algoritmos espontâneos dos alunos, desde algoritmos diversificados, até o algoritmo convencional, que é um dos focos da aprendizagem nos cinco primeiros anos do ensino fundamental. [...]. No estudo dos algoritmos destaca-se, positivamente, o recurso frequente aos materiais concretos já mencionados na construção do sistema de numeração decimal. [...]. Uma modalidade de cálculo valorizada no ensino fundamental e que tem recebido, em variados graus, a atenção de todas as coleções aprovadas no PNLD 2016 e listadas neste Guia, é o cálculo mental. Essa escolha é amparada por estudos em Educação Matemática que sugerem sua relevância para a formação do aluno. O trabalho com o cálculo mental tem procurado desenvolver, nos alunos, a capacidade para efetuar operações

Les discours de I_{PNLD} au cours du temps nous montrent un mouvement lent, mais remarquable, de changements des projets de I_M par rapport aux techniques opératoires. Cela ressort de l'examen de la totalité des manuels produits dans cette période d'évaluation. Dans la prochaine étape, nous proposons de regarder ce possible impact à partir d'une analyse comparative d'une collection de manuels.

4.5.2 Analyse d'une collection de manuels

Pour avancer dans cette étude, nous avons décidé d'analyser une collection de manuels qui a été évaluée et approuvée à deux périodes différentes. Nous avions comme hypothèse, soutenue par ce que nous avons observé dans les documents d'évaluation, qu'il est possible d'identifier des changements sur les praxéologies autour des techniques algorithmiques. Notre intention initiale était d'étudier de plus près comment se passe ce phénomène de changement et les possibles *adaptations* praxéologiques dérivées.

Nous avons donc choisi d'analyser une collection de manuels de notre corpus pouvant être comparée à deux moments différents de l'évaluation : en 1996 et eb 2016 [95]. Cette collection est intéressante à regarder, car elle peut montrer des traces des vingt ans d'assujettissement au processus d'évaluation.

Pour l'analyse de chaque période, nous identifierons les techniques opératoires et leurs portées institutionnelles au fil du temps. Face aux critiques récurrentes de I_{PNLD}, nous porterons une attention particulière aux algorithmes posés et aux praxéologies qui se développent autour de ces techniques.

Pour l'analyse de chaque période, nous identifierons les techniques opératoires et leurs portées institutionnelles au fil du temps. Face aux critiques de I_{PNLD}, nous porterons une attention particulière aux algorithmes posés et aux praxéologies qui se développent autour de ces techniques.

Pour cette étude de cas, nous caractérisons le champ de notre analyse par deux sous-générateur de $GT^{+/-}$:

Tableau 4.23 – Sous-générateur de types de tâches GT_x

<table>
<tr><td colspan="2">GT_+ : [Chercher une valeur manquante d'une situation donnée sous la forme « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4, V5]</td></tr>
<tr><td>V4 : Les deux nombres connus de la tâche</td><td>V5 : L'existence de retenue</td></tr>
</table>

de modo mais rápido e independentemente do emprego dos algoritmos convencionais ou do uso da calculadora.» (Brasil, 2015, pp. 31-32)

95. Nous n'avons pas pu utiliser la version évaluée en 1994 parce que nous manque le livre de la deuxième année de cette collection. Comme l'évolution praxéologique aura un enjeu important dans cette analyse, nous avons décidé de prendre la collection évaluée en 1996, qui est ailleurs la même qui a été évaluée en 1998.

Tableau 4.24 – Sous-générateur de types de tâches GT_x

GT_- : [Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a - b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4, V5]	
V4 : Les deux nombres connus de la tâche	V5 : *L'existence de retenue*

Afin de limiter nos observables aux techniques des opérations d'addition et de soustraction, nous avons décidé d'instancier les variables V1, V2 et V3 de notre système du départ.

Tableau 4.25 – Variables instanciées

V1 : Les ostensifs	V1c. Langage arithmétique	
V2 : L'idée de la situation	V2.4 : Opération de la situation	V2.4.a : Addition
		V2.4.b : Soustraction
V3 : L'information cachée (?)	V3.a Opération directe : « *a* +/- b = ? »	

La différence de chaque sous-générateur se trouve dans l'instanciation de V2.

Les variables V4 et V5 apparaissent comme importantes pour cette étude, car l'évolution praxéologique est conduite à partir de leurs valeurs.

Tableau 4.26 – Système de variable composé par V4 et V5

V4 : Les deux nombres connus de la tâche	V4.1 : Leurs tailles	V4.1.a : Deux petits
		V4.1.b : Un petit et un grand
		V4.1.c : Deux grands
	V4.2[96] : L'existence de multiples d'une puissance de dix, 10^n	V4.2.a : Aucun multiple de 10^n
		V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n
		V4.2.c : Les deux sont des multiples de 10^n
	V4.3 : L'ordre de grandeur des nombres	V4.3.a : Même ordre
		V4.3.b : Ordre différent
	V4.4 : La taille de leur différence	V4.4.a : Différence petite
		V4.4.b : Différence grande
V5 : L'existence de retenue	V5.a : Non	
	V5.b : Oui	

Pour l'analyse de chaque collection de manuels, considérons « $T_+^{x.\,y}$ » et « $T_-^{x.\,y}$ » les types de tâches générés respectivement par « GT_+ » et « GT_- », tel que :

96. n ∈ N

- x : indique la période à laquelle le manuel a été évalué par $\mathrm{I_{PNLD}}$.
- y : différencie les types de tâches et attribue à la modélisation la notion du temps institutionnel : $\mathrm{T_+}^{x.1} \neq \mathrm{T_+}^{x.2}$et $\mathrm{T_+}^{x.1}$ apparait avant de $\mathrm{T_+}^{x.2}$ dans la collection de manuels de l'époque « x »..
- y' : symbolise l'élargissement ou la réduction de l'ensemble de tâches défini par y.

Précisons que cette analyse prend en compte les livres du maître, dans lesquels nous recherchons des explications sur les choix des auteurs et leurs intentions.

4.5.3 Techniques d'addition

4.5.3.1 L'analyse de 1996 (α)

La collection de manuels « A Conquista da Matemática », publiée par une maison d'édition en 1992, a été évaluée et approuvée en 1996 par $\mathrm{I_{PNLD}}$ - période désignée ici par « α ».

La première rencontre avec le champ additif en « α » se fait à partir d'un type de tâches de $\mathrm{GT_+}$ caractérisé par les valeurs V4.1.a et V5.a.

Tableau 4.27 – $\mathrm{T_+}^{\alpha.1}$

$\mathrm{T_+}^{\alpha.1}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a, V5.a	
V4.1.a : les deux petits	V5.a : Sans retenue

L'attribut « petit » est bien précisé dans le manuel : ils sont tous inférieurs à 10. Avec V5.a nous avons aussi « a + b < 10 ». La technique employée est celle du dénombrement. Cependant, particulièrement dans le livre du maître, nous trouvons également la représentation verticale du calcul, comme nous pouvons le voir dans l'extrait ci-dessous.

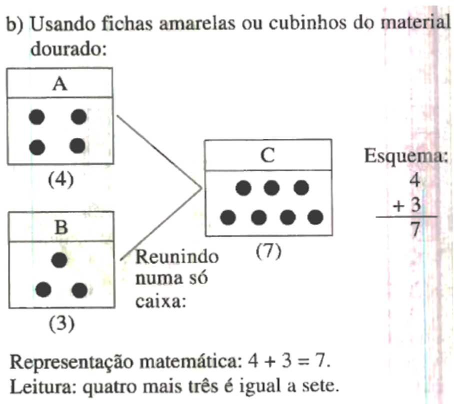


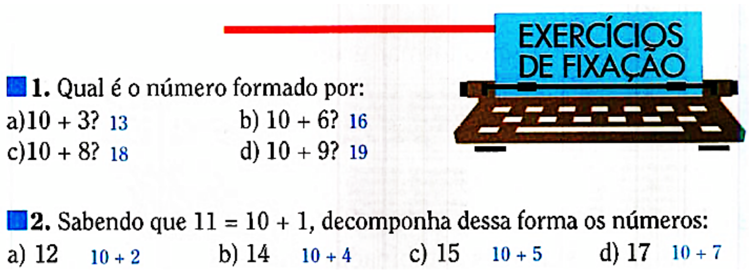
Figure 4.72 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v.1, p. 06)

Vu que ce complexe d'ostensif n'a pas une valence instrumentale dans ce domaine, à quoi sert-il ? Nous allons garder cette question à l'esprit.

La rencontre avec le nombre 10 fait apparaître une nouvelle technique : $\tau_{\text{Composition}}$[97]. Cette technique commence avec une portée réduite au cas de $T_+{}^{\alpha.2}$, mais juste après elle est élargie pour $T_+{}^{\alpha.2'}$.

Tableau 4.28 – $T_+{}^{\alpha.2}$

$T_+{}^{\alpha.2}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs,V4.1.a et V4.2.b, V5.a	
V4.1.a : les deux petits et V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n	V5.a. sans retenue



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Qual é o número formado por:
a) 10 + 3? 13 b) 10 + 6? 16
c) 10 + 8? 18 d) 10 + 9? 19

2. Sabendo que 11 = 10 + 1, decomponha dessa forma os números:
a) 12 10 + 2 b) 14 10 + 4 c) 15 10 + 5 d) 17 10 + 7

Figure 4.73 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 52)

Tableau 4.29 – $T_+{}^{\alpha.2'}$

$T_+{}^{\alpha.2'}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a, V5.a	
V4.1.b : Un petit et un grand et V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n	V5.a. sans retenue

97. Noyau : Superposer les ordres de numération non vides de b ($\neq 0$) aux mêmes ordres vides de a ($= 0$), au cas où « a » est du type « $p10^n$ » et $a > b$.

$10 + 6 = 16$
- $30 + 8 = 38$
- $50 + 4 = 54$
- $70 + 7 = 77$

Figure 4.74 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 53)

Le « grand » ici est restreint aux nombres inférieurs à 100.

En reprenant le livre du maître, nous voyons à nouveau l'emploi du complexe d'ostensifs vertical.

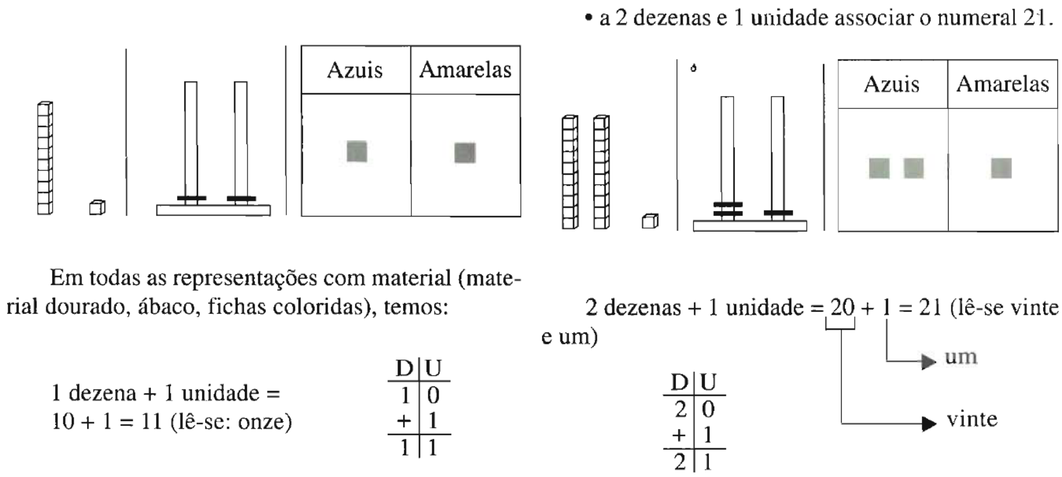


Figure 4.75 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 09)

S'il est vrai que l'algorithme posé est applicable dans ces cas, son usage pose des questions. À ce moment-là l'élève n'a pas encore rencontré cette technique, cependant elle apparaît dans les notes proposées à l'enseignement pour quasiment toutes les tâches. À quoi sert-elle ? Est-elle un moyen de valider les calculs ? Est-elle *une forme plus mathématique* de faire ou de représenter les calculs ?

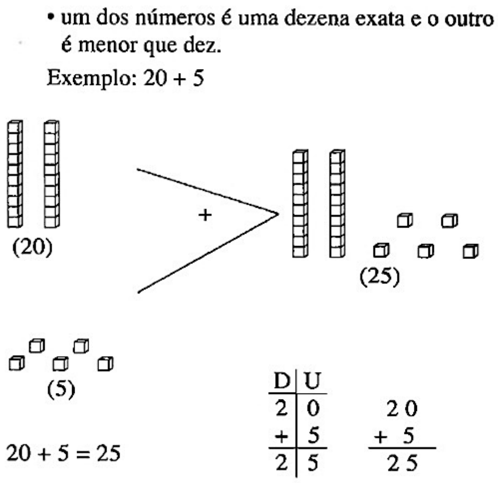


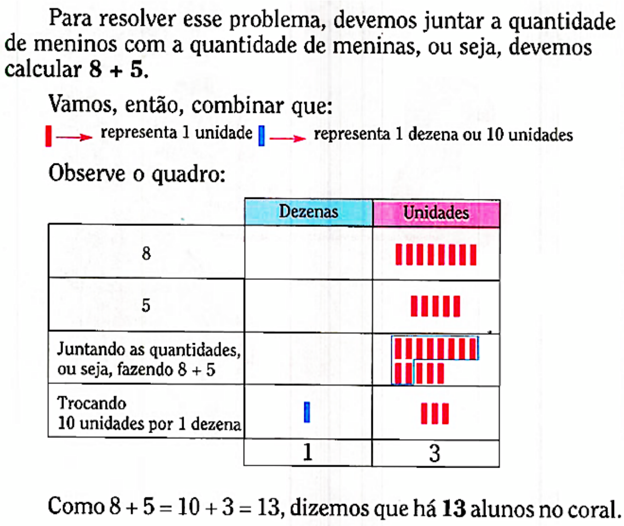
Figure 4.76 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v.1, p. 11)

Le troisième type de tâches proposé dans cette collection reprend le travail avec deux nombres *petits*. L'évolution porte sur le changement de la valeur de V5. Dans ce cas-là, les petits nombres sont toujours inférieurs à 10, mais « a + b > 10 ».

Tableau 4.30 – $T_+{}^{\alpha.3}$

$T_+{}^{\alpha.3}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a, V5.b	
V4.1.a : Les deux petits	V5.b. avec retenue

Pour répondre à ce type de tâches, une organisation didactique est d'abord mise en place. Les tâches sont accomplies dans un premier moment à partir d'une manipulation d'ostensifs, où la technique du dénombrement est mobilisée. Cependant, cette technique gagne un nouvel élément : le regroupement de dix unités afin de former une dizaine.



Para resolver esse problema, devemos juntar a quantidade de meninos com a quantidade de meninas, ou seja, devemos calcular **8 + 5.**

Vamos, então, combinar que:

→ representa 1 unidade → representa 1 dezena ou 10 unidades

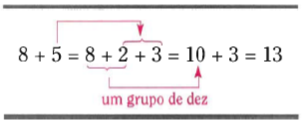
Observe o quadro:

	Dezenas	Unidades
8		
5		
Juntando as quantidades, ou seja, fazendo 8 + 5		
Trocando 10 unidades por 1 dezena		
	1	3

Como 8 + 5 = 10 + 3 = 13, dizemos que há **13** alunos no coral.

Figure 4.77 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 58)

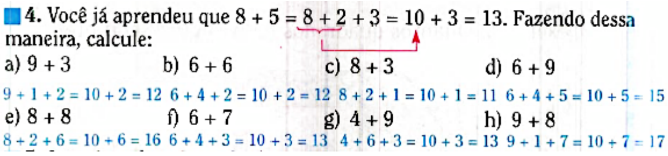
Cette manipulation d'ostensifs donne lieu rapidement un traitement *plus arithmétique* d'une technique de complément à dix.



$$8 + 5 = 8 + \underbrace{2 + 3}_{} = 10 + 3 = 13$$

um grupo de dez

Figure 4.78 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 59)



4. Você já aprendeu que 8 + 5 = 8 + 2 + 3 = 10 + 3 = 13. Fazendo dessa maneira, calcule:

a) 9 + 3 b) 6 + 6 c) 8 + 3 d) 6 + 9

9 + 1 + 2 = 10 + 2 = 12 6 + 4 + 2 = 10 + 2 = 12 8 + 2 + 1 = 10 + 1 = 11 6 + 4 + 5 = 10 + 5 = 15

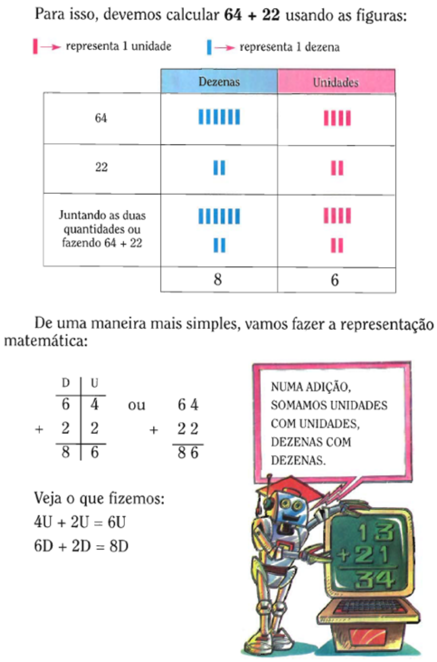
e) 8 + 8 f) 6 + 7 g) 4 + 9 h) 9 + 8

8 + 2 + 6 = 10 + 6 = 16 6 + 4 + 3 = 10 + 3 = 13 4 + 6 + 3 = 10 + 3 = 13 9 + 1 + 7 = 10 + 7 = 17

Figure 4.79 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 60)

Remarquons que dans cette technique on trouve forcément une tâche du type « 10 + n, n < 10 », qui est à son tour du type ${T_+}^{\alpha.2}$ travaillé avant. Ce *mouvement* met en évidence un des premiers indices de la dynamique entre les praxéologies ponctuelles.

Après un travail avec ces premiers types de tâches et leurs techniques, l'algorithme posé de l'addition est présenté officiellement dans le manuel de l'élève de la première année de l'école primaire. Les tâches « 31 + 7 », « 50 + 30 » et « 64 + 22 » sont accomplies par cette technique. Un travail de manipulation d'ostensifs sous forme de dessins est également mis en place, mais ils sont rapidement abandonnés.



Para isso, devemos calcular **64 + 22** usando as figuras:

I → representa 1 unidade   I → representa 1 dezena

	Dezenas	Unidades
64	IIIIII	IIII
22	II	II
Juntando as duas quantidades ou fazendo 64 + 22	IIIIII II	IIII II
	8	6

De uma maneira mais simples, vamos fazer a representação matemática:

	D	U
	6	4
+	2	2
	8	6

ou

$$\begin{array}{r} 64 \\ +\ 22 \\ \hline 86 \end{array}$$

Veja o que fizemos:
4U + 2U = 6U
6D + 2D = 8D

Figure 4.80 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 63)

Accordons une attention spéciale à certaines tâches appartenant à la portée de l'algorithme posée. Que les deux nombres soient multiples de 10 ou que l'un d'eux soit petit, la technique fonctionne ! Dans cette collection de manuels, nous pouvons regrouper ces tâches dans un même type :

Tableau 4.31 – $T_+{}^{\alpha.4}$

<table>
<tr><td colspan="2">$T_+{}^{\alpha.4}$: {Chercher une valeur manquante d'une situation donnée sous la forme« a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.b, V4.1.c, V5.a} \ $T_+{}^{\alpha.2'}$</td></tr>
<tr><td>V4.1.b : Un petit et un grand</td><td rowspan="2">V5.a : Sans retenue</td></tr>
<tr><td>V4.1.c : Les deux grands</td></tr>
</table>

Sans concurrence avec d'autres techniques, la portée institutionnelle est quasiment celle de la portée pragmatique de cette technique, sauf par le type de tâches $T_+{}^{\alpha.2'}$ qui garde son autonomie. Soulignons cet aspect : $T_+{}^{\alpha.2'}$ pourrait être un domaine de concurrence de ces deux techniques, mais cette concurrence n'est pas exploitée didactiquement dans cette collection de manuels.

Sur la variable V5, le travail se fait d'abord sans qu'il y ait des retenues. Cela veut dire que la mise en œuvre de la technique fait rencontrer des tâches du type $T_+{}^{\alpha.1}$, qui doivent être à ce moment routinières.

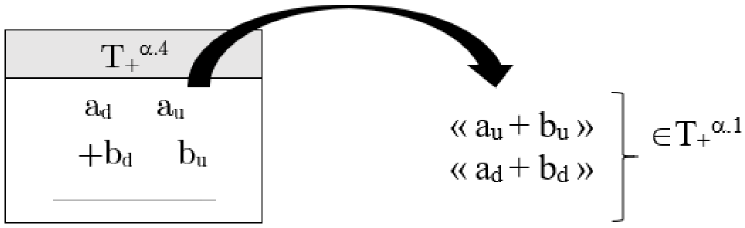


Figure 4.81 – Types de tâches ingrédients d'une technique

La représentation en colonne des nombres d'un chiffre, que nous avions auparavant interrogé, semble alors avoir une raison d'être : elle contribue à la praxéologie didactique pour une bonne gestion de l'algorithme posé, qui est la technique *maître* de l'étude.

Dès la première année de l'école primaire, la technique de l'algorithme posé a sa portée élargie par la prise en compte de la valeur « V5.b : Avec retenue ». Dans ce premier moment, seulement la valeur « V4.1.b : Un petit et un grand » est considérée.

Tableau 4.32 – $T_+^{\alpha.4'}$

$T_+^{\alpha.4}$: {Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, (V4.1.b, V4.1.c, V5.a), (V4.1.b, V5.b)} \ $T_+^{\alpha.2'}$	
V4.1.b : Un petit et un grand	V5.a : Sans retenue
V4.1.c : Les deux grands	
V4.1.b : Un petit et un grand	V5.b : Avec retenue

L'organisation didactique s'appuyant sur des ostensifs pour illustrer des regroupements est toujours présente pour un petit moment (deux tâches sont accomplies à l'aide de ces ostensifs). De plus, le travail fait autour du type de tâche $T_+^{\alpha.2}$, de complément à 10, aide à la gestion et à la justification de l'algorithme posé.

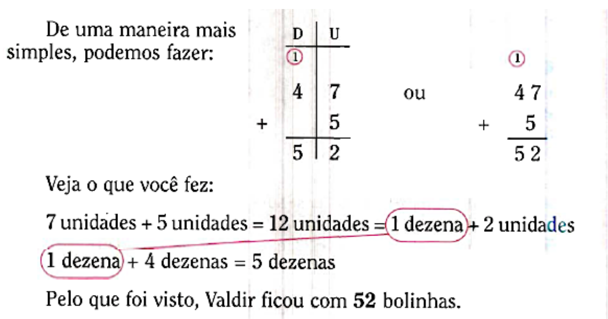


Figure 4.82 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v. 1, p. 66)

L'élargissement de la technique prend alors en compte, dans sa mise en œuvre, le type de tâches $T_+^{\alpha.3}$ déjà travaillé auparavant.

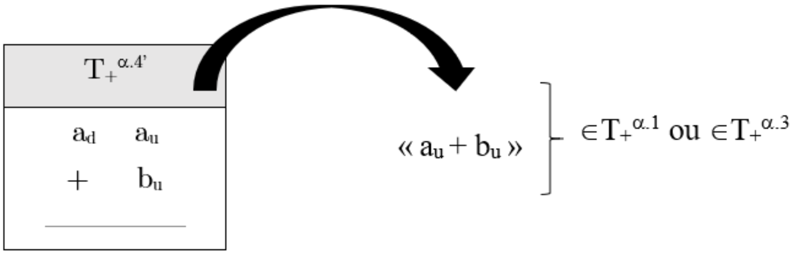
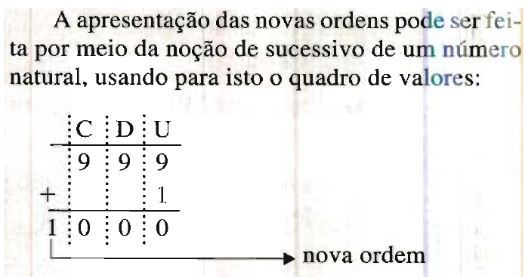


Figure 4.83 – Types de tâches ingrédients d'une technique II

D'autres nombres supérieurs à 100 sont traités dans les manuels des années suivantes. En revenant sur le livre du maître, nous voyons l'algorithme posé aussi comme un moyen technologique de justifier les nouveaux ordres d'un nombre, comme illustre la Figure 4.84 ci-après.


A apresentação das novas ordens pode ser feita por meio da noção de sucessivo de um número natural, usando para isto o quadro de valores:

	C	D	U
	9	9	9
+			1
1	0	0	0

nova ordem

Figure 4.84 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992b, v. 3, p. 04) [a]

a. Traduction : « La représentation des nouvelles ordres décimaux peut être faites à partir de la notion de successeur d'un nombre naturel, en utilisant pour cela e tableau de numération décimal. »

Avec le temps, les rencontres avec les nombres plus grands rendent nécessaire un élargissement supplémentaire de la portée de l'algorithme posée et la portée de la technique de composition, exprimées respectivement par les types de tâches $T_+^{\alpha.2''}$ et $T_+^{\alpha.4''}$:

Tableau 4.33 – $T_+^{\alpha.2''}$

$T_+^{\alpha.2''}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, (V4.2.b ou V4.2.c) et V4.3, V5.a	
V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n ou V4.2.c : Deux sont multiples de 10^n et V4.3.b : Ordre différent	V5.a. sans retenue

Tableau 4.34 – $\mathrm{T_+}^{\alpha.4''}$

$\mathrm{T_+}^{\alpha.4''}$: {Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme*« a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.b, V4.1.c, V5.a, V5.b } \ $\mathrm{T_+}^{\alpha.2''}$	
V4.1.b : Un petit et un grand	V5.a ou V5.b
V4.1.c : Les deux grands	

En illustrant la dynamique praxéologique à partir de certaines *photos* clés de l'étude de $\mathrm{T_+}$, nous avons alors le parcours suivant :

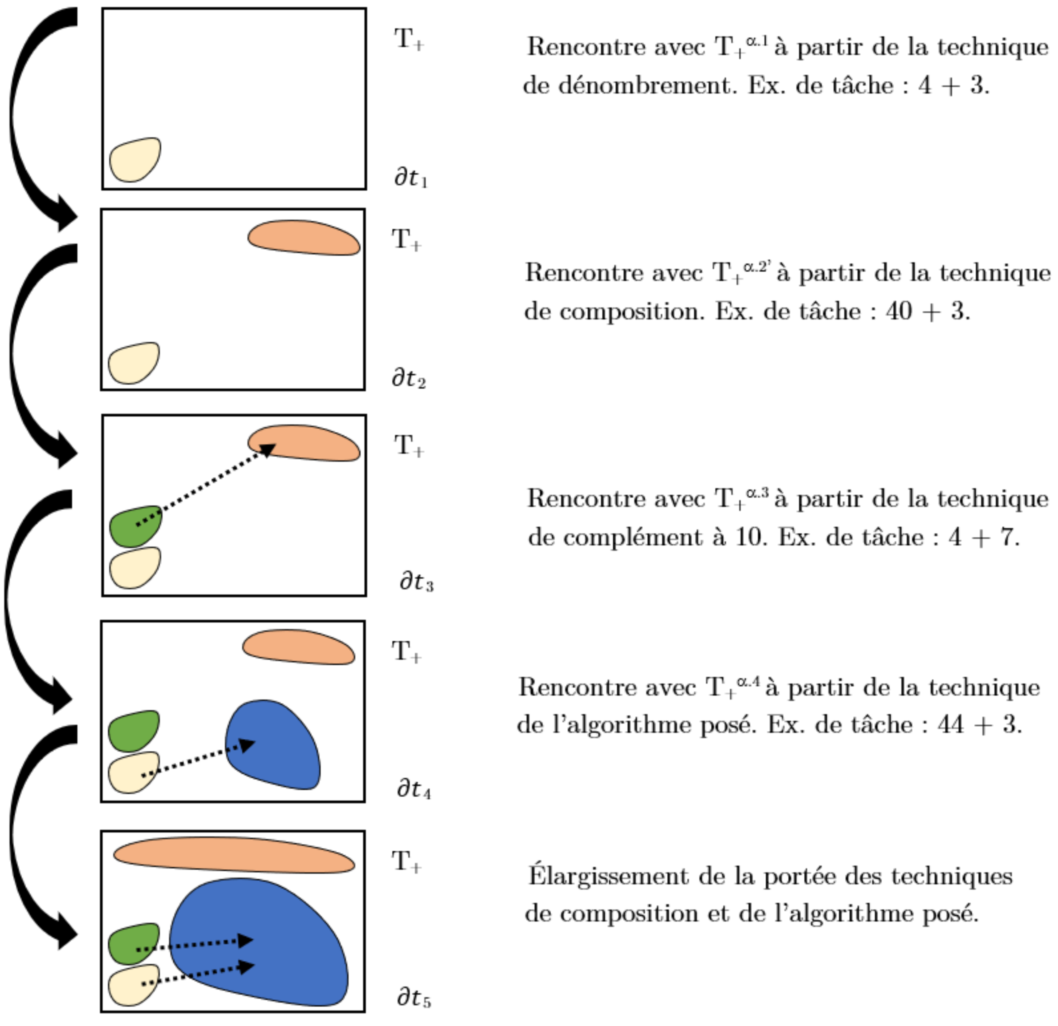


Figure 4.85 – Évolution praxéologique en α

Dernières remarques : bien évidemment les dimensions des images ne sont pas nécessairement proportionnelles aux portées des techniques ; les flèches indiquent l'usage du type de tâches comme ingrédient de l'autre technique ; il reste toujours à la fin de l'école primaire des domaines qui ne sont pas traités, représentés par les parties blanches, comme les tâches comportant des nombres avec plus de 6 chiffres ; aucune concurrence entre techniques n'a été identifiée dans les manuels de l'élève.

4.5.3.2 L'analyse de 2016 (β)

Vingt années après, la collection de manuels « A Conquista da Matemática » a été évaluée en 2016 par $\mathrm{I_{PNLD}}$, période désignée ici par « β » et sur laquelle notre analyse se concentrera maintenant.

Les premières rencontres avec le champ additif se font par l'intermédiaire des mêmes types et tâches et techniques proposées en « α » : la technique de dénombrement pour $\mathrm{T_+}^{\beta.1}$ et la technique de composition pour $\mathrm{T_+}^{\beta.2}$.

Tableau 4.35 – $\mathrm{T_+}^{\beta.1}$

$\mathrm{T_+}^{\beta.1}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a, V5.a	
V4.1.a : Les deux petits	V5.a : Sans retenue

Tableau 4.36 – $\mathrm{T_+}^{\beta.2}$

$\mathrm{T_+}^{\beta.2}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a et V4.2.b, V5.a	
V4.1.a : Les deux petits et V4.2.b : Seulement un est multiple de 10^n	V5.a : Sans retenue

En parallèle, des séquences des nombres supérieurs à 10 sont proposées qui favorisent la technique de sur-comptage.

Tableau 4.37 – $\mathrm{T_+}^{\beta.3}$

$\mathrm{T_+}^{\beta.3}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.b, V5.a, V5.b	
V4.1.b : Un petit et un grand	V5.a : Sans retenue
	V5.b : Avec retenue

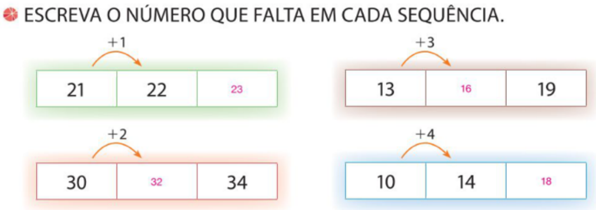


Figure 4.86 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992a, v.1, p. 159)

La technique de sur-comptage soutient dans un premier temps la technique de composition, qui doit à son tour prendre son autonomie. Donc, pour répondre « 30 + 2 », le travail proposé suggère de privilégier la technique de composition.

À l'intérieur de $T_+{}^{\beta.3}$, une concurrence est établie dans le domaine représenté par $T_+{}^{\beta.4}$:

Tableau 4.38 – $T_+{}^{\beta.4}$

$T_+{}^{\beta.4}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.a, V5.b	
V4.1.a : Les deux petits	V5.b avec retenue

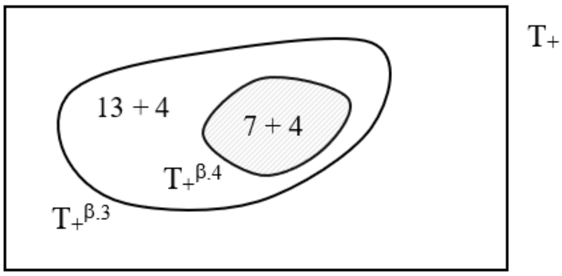


Figure 4.87 – Concurrence de techniques

Deux techniques sont proposées en parallèle pour $T_+{}^{\beta.4}$: la technique du complément à dix, repérée en « α » et la technique de sur-comptage.

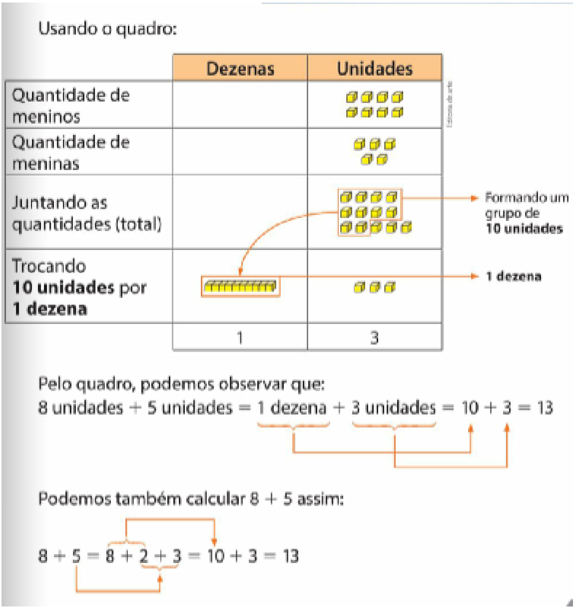


Figure 4.88 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 23)

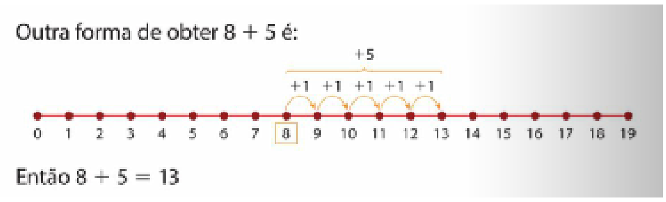


Figure 4.89 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 24)

Nous ne trouvons pas d'indices de préférence institutionnelle sur l'une de ces techniques : la technique pour accomplir ces types de tâches dépendra des praxéologies personnelles des élèves. Dans tout les cas, il y a un souhait que ce type de tâche devienne routinier au service de l'évolution praxéologique.

Ensuite, nous trouvons un chapitre appelé « Addition et soustraction de dizaines exactes [98] », qui amène à modéliser un cinquième type de tâches :

98. « Dizaines exactes » ou « dizaines entières » sont deux termes utilisés couramment au Brésil pour faire référence aux nombres multiples de 10 inférieurs à 100.

Tableau 4.39 – $T_+^{\beta.5}$

$T_+^{\beta.5}$: Chercher une valeur manquante d'une situation *donnée sous la forme* « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.2.c et V4.3.a, V5.a	
V4.2.c : Deux sont multiples de 10^n et V4.3.a : Même ordre	V5.a : Sans retenue

Pour accomplir les tâches de ce type, tout d'abord des matériaux tangibles sont utilisés pour la mise en œuvre de la technique $\tau_{\text{Réduction-en-unités}}$[99].Cependant, c'est aussi à ce même moment que l'algorithme posé est présenté pour la première fois à l'élève.

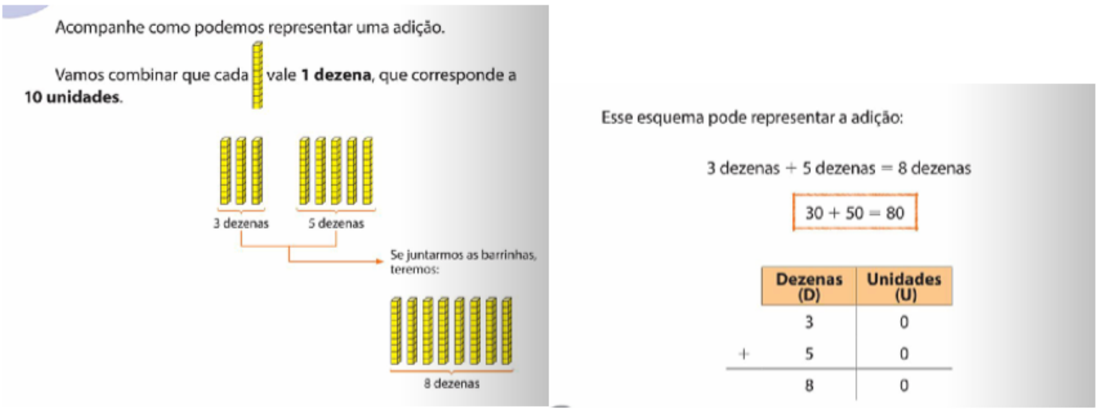


Figure 4.90 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 38)

Lorsque l'on regarde les tâches de $T_+^{\beta.5}$ proposées, on remarque à chaque fois la présence d'une table de numération : l'élève est clairement invité à l'utiliser pour accomplir ces tâches. Nous voyons clairement alors que l'algorithme posé est la technique attendue.

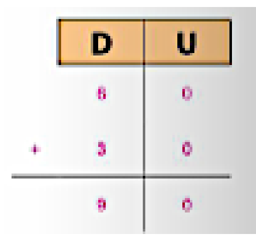


Figure 4.91 – (Giovanni Jr., 2014b, v.2, p. 40)

Un peu plus tard dans le manuel, cette technique a sa portée élargie. D'abord, trois tâches sont présentées et accomplies par l'algorithme posé : « 12 + 14 », « 37 + 41 » et « 28 + 4 ». L'organisation

99. Noyau : Effectuer « p +/- q », où a = $p10^n$ et b = $q10^n$. Indiquer la valeur « (p +/- q) 10^n ».

didactique suit toujours le même ordre : manipulation avec matériel tangible vers l'algorithme posé accompagné des discours technologiques.

Tableau 4.40 – $T_+^{\beta.5'}$

<table>
<tr><td colspan="2">$T_+^{\beta.5'}$: {Chercher une valeur manquante d'une situation donnée sous la forme « a + b = ? », où a, b sont des nombres entiers positifs, V4.1.b, V4.1.c, V5.a} $T_+^{\beta.2}$</td></tr>
<tr><td>V4.1.b : Un petit et un grand</td><td rowspan="2">V5.a : Sans retenue</td></tr>
<tr><td>V4.1.c : Les deux grands</td></tr>
</table>

Les premiers contacts avec l'algorithme posé gardent la valeur « V5.a : Sans retenue », mais la valeur « V5.b : Avec retenue » apparaît peu après.

Les tâches qui ont la valeur « V4.1.b : Un petit et un grand » pourraient être accomplies par la technique de sur-comptage, cependant, à ce moment-là plusieurs exemples (28 + 4, 18 + 5, 15 + 8, 18 + 5, 67 + 5) montrent que l'algorithme posé prend le dessus dans le domaine de concurrence de ces deux techniques. En revanche, la technique de composition reste préservée.

Lorsque les nombres dépassent la taille de deux chiffres, les portées institutionnelles des techniques de composition et de l'algorithme s'adaptent et sont également élargies. Les portées institutionnelles s'approchent, donc, de leurs portées pragmatiques.

L'élargissement de l'algorithme est soutenu par la manipulation d'ostensifs tangibles jusqu'à la quatrième année. Ce travail, toujours limité au premier moment de rencontre avec la praxéologie, permet d'évoquer l'environnement technologique de cette technique.

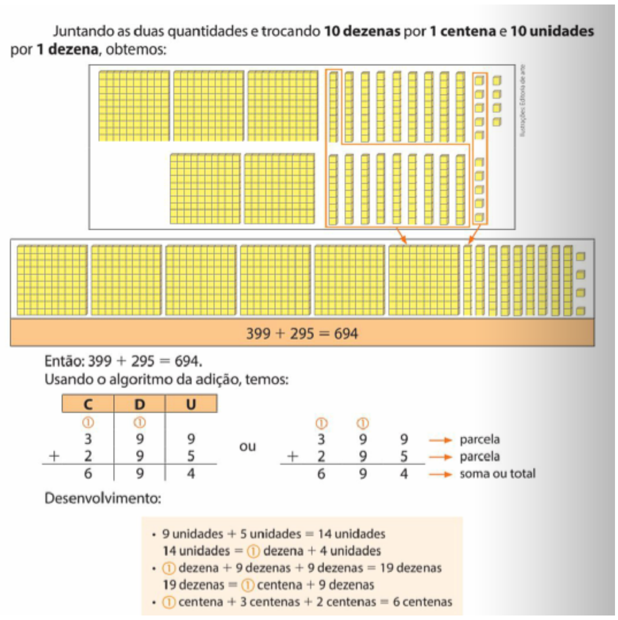


Figure 4.92 – (Giovanni Jr., 2014a, v.4, p. 46)

La portée de l'algorithme posée reste alors, à part quelques moments exceptionnels, quasiment intouchable. À savoir, seulement sur une unique page du manuel et dans une unique activité, nous trouvons une concurrence possible avec une autre technique. Voici l'extrait :

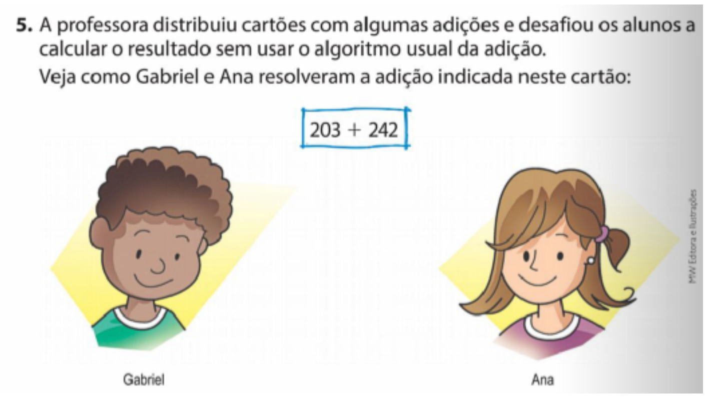


Figure 4.93 – (Giovanni Jr., 2014c, v. 3, p. 118)

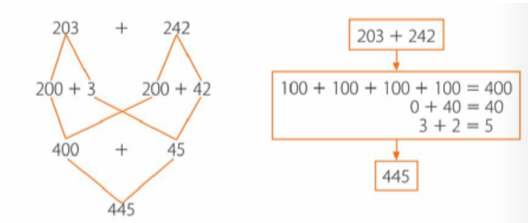


Figure 4.94 – (Giovanni Jr., 2014c, v. 3, p. 118)

Dans l'activité, un *défi* (mot utilisé par l'auteur) est lancé aux élèves : calculer une addition sans utiliser l'algorithme posé. (Il s'agit vraiment d'un défi dans ce contexte !). La technique consiste à faire des décompositions et des compositions. Les tâches « 200 + 200 » et « 400 + 45 » déjà travaillées sont considérées comme routinières. S'il est vrai que ce type de travail offre d'autres possibilités pour les calculs avec les grands nombres, sa place extrêmement restreinte d'une page est sans doute une contrainte importante empêchant à une déstabilisation durable de la portée de l'algorithme posé.

Nous synthétisons ce parcours d'étude par les *photos* suivantes :

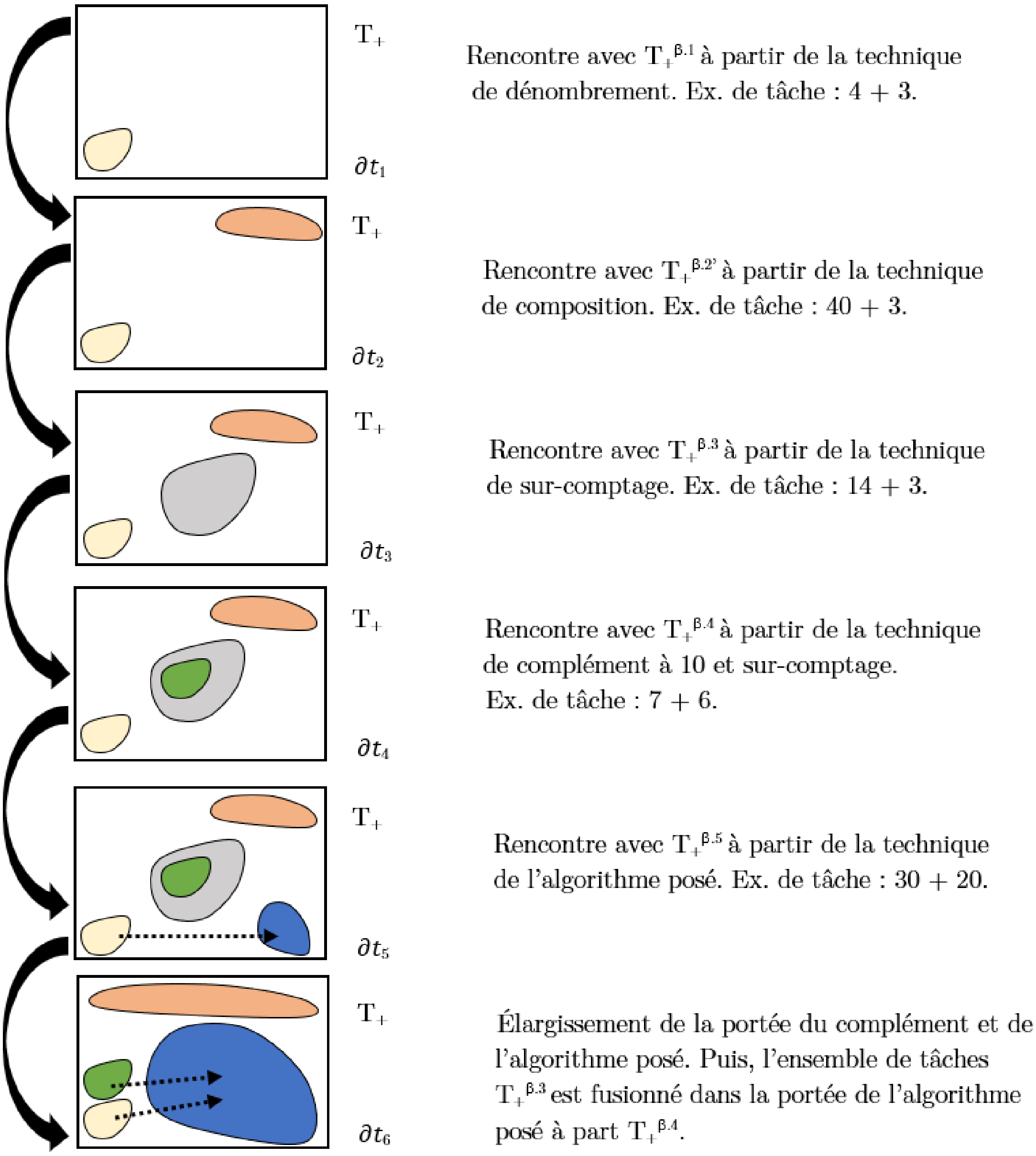


Figure 4.95 – Évolution praxéologique en β

4.5.3.3 Croisement des analyses α et β

L'étude de cas et son analyse illustre un cas de non-conformité à ce que souhaite I_{PNLD} par rapport à la survalorisation de l'algorithme posé. Cette non-conformité résiste/persiste dans le temps. S'il est vrai qu'on observe des changements dans les parcours d'étude de chaque période, soulignons que ces changements ne touchent pas vraiment la place importante donnée à cette technique, qui est dans ce cas une contrainte écologique pour l'existence d'autres façons de faire les calculs. À l'issue de chaque parcours d'étude des deux périodes, nous nous retrouvons finalement des configurations similaires en ce qui concerne les portées des techniques.

Soulignons néanmoins quelques différences entre les deux périodes. Par exemple, au contraire de « α », la technique de sur-comptage apparaît de façon explicite en « β ». Cependant, la droite numérique est présentée une unique fois à l'élève dans l'élaboration de cette technique et l'étude des séquences numériques est aussi timide pour accomplir les tâches d'addition de $\mathrm{T_+}^{\beta.3}$. Cela peut justifier le fait que ce type de tâches soit après incorporé dans la portée de l'algorithme posé.

Dans la période « β » apparaît une intention d'accorder certaine importance aux multiples de 10, en lui attribuant un chapitre à part. Il s'agitd'une organisation didactique clairement différente de celle de la période « α », qui pourrait certainement avoir un impact sur l'éventail des techniques. Mais, lorsque l'on y regarde de plus près, c'est l'algorithme posé qui est revendiqué pour accomplir les tâches.

En revanche, les complexes d'ostensifs en colonne des calculs pour les petits nombres, souvent trouvés dans les livres du maitre en « α », ont disparu. Soulignons qu'en 2010, $\mathrm{I_{PNLD}}$ a évalué positivement l'usage du registre horizontal pour représenter les calculs au début de l'étude.

> **De façon adéquate,** les opérations d'addition et de soustraction sont exploitées dans la première année sans regroupement et avec enregistrement horizontal. (Brasil, 2009, p. 60, traduction propre) [100]

De façon générale, ces résultats ne vont pas dans le sens de notre hypothèse initiale sur le changement praxéologique. Mais, son importance se trouve justement là. Nous avons ici un exemple de l'hétérogénéité de la noosphère, qui nous permet aussi de réfléchir sur la difficulté de transformations curriculaires face aux paradigmes enracinés des nos systèmes éducatifs.

Nous passons maintenant à l'opération de soustraction.

4.5.4 Techniques de soustraction

À partir de l'analyse faite de l'opération de l'addition, il est raisonnable de prévoir que nous retrouverons un phénomène de résistance au changement praxéologique (et de paradigme) pour l'opération de soustraction. Une première analyse que nous avons faite a confirmé cette prédiction. Elle nous a montré que dans cette collection de manuels, dans les deux périodes, l'ensemble de techniques n'est pas non plus varié. La place importante accordée aux algorithmes posés est une constante. C'est pourquoi nous avons décidé de ne pas présenter en détail l'évolution praxéologique de chaque période pour cette opération, mais plutôt de repérer des points qui permettent d'enrichir notre discussion.

100. « De forma adequada, as operações de adição e subtração são exploradas no volume 1, sem reagrupamento e com registro horizontal. » (Brasil, 2009, p. 60)

4.5.4.1 L'analyse de 1996 (α) confrontée à l'analyse de 2016 (β)

En « α » deux algorithmes posés pour la soustraction sont proposés quand la variable V5 assume la valeur « V5.b : Avec retenue » : τ $_{\text{Algorithme(1) -}}$ [101] et τ $_{\text{Algorithme(2)-}}$ [102]. Ces techniques partagent les mêmes portées institutionnelles dans ce manuel.

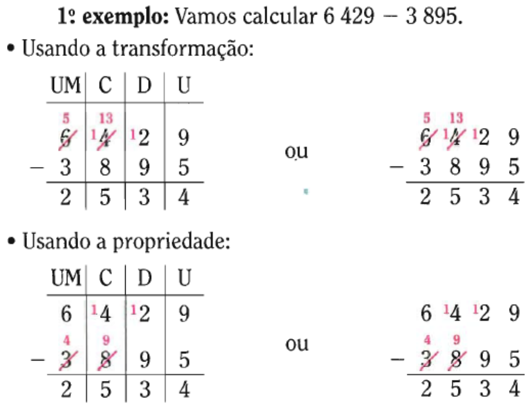


Figure 4.96 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992b, v.3, p. 63)

Ces deux façons de faire diffèrent non seulement par les geste qu'elles mettent en œuvre, mais aussi par leurs environnements technologiques. Alors que la première s'appuie sur les transformations des ordres décimaux, la deuxième est basée sur la propriété de conservation des écarts.

Ces deux techniques coexistent, sans que l'une se montrât plus préférable que l'autre : après la présentation de ces deux techniques, nous ne trouvons plus de traces du complexe d'ostensifs vertical permettent d'inférer la technique utilisée.

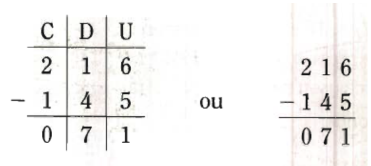


Figure 4.97 – (Giovanni et Giovanni Jr., 1992c, v.4, p. 44)

Dans ce cas-là, c'est seulement dans la praxéologie personnelle (Croset et Chaachoua, 2016) de l'élève que pourrait apparaître un phénomène du favoritisme de l'une de ces techniques. Institutionnellement, les deux techniques vont continuer à partager le même domaine de concurrence.

101. Noyau : Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche ; si $a_i < b_i$, alors attribuer à a_i une unité de a_i+1.
102. Noyau : Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche ; si $a_i < b_i$, alors attribuer à ai une unité de l'ordre supérieur et attribuer une unité à b_i+1.

Un autre algorithme posé de la soustraction est présenté en « α » et maintenu en « β ». Cette autre technique, τ $_{\text{Algorithme(3)-}}$ [103], s'installe à l'intérieur de la portée des deux autres techniques et prend en compte les multiples de puissances de dix. Cette technique s'appuie également sur le principe de la conservation d'écart.

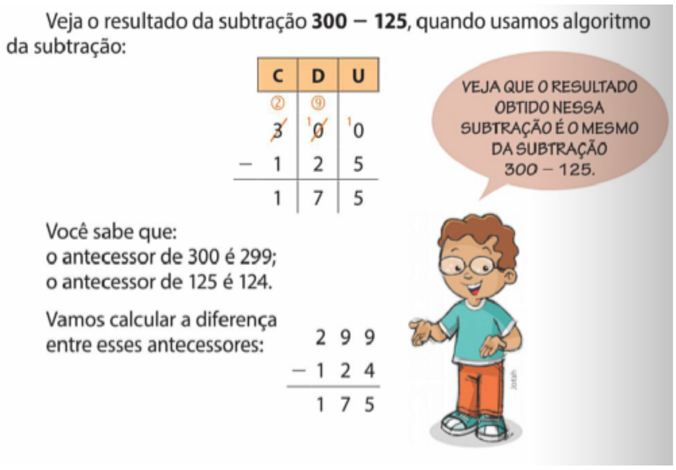


Figure 4.98 – (Giovanni Jr., 2014c, v.3, p. 148)

Au lieu de calculer « 400 - 123 », on calcule « 399 - 122 ». Cette technique cherche à éviter la difficulté apportée par la valeur « V5.b : Avec retenue » : au lieu d'accomplir une tâche avec retenue, on cherche une tâche « équivalente » échappant au coût de cette valeur de V5. Cependant, la technique se montre vraiment utile si l'unique moyen d'accomplir les tâches de ce type est de poser l'opération. Or, n'y a-t-il pas d'autre moyen de répondre à « 100 - 75 » ?

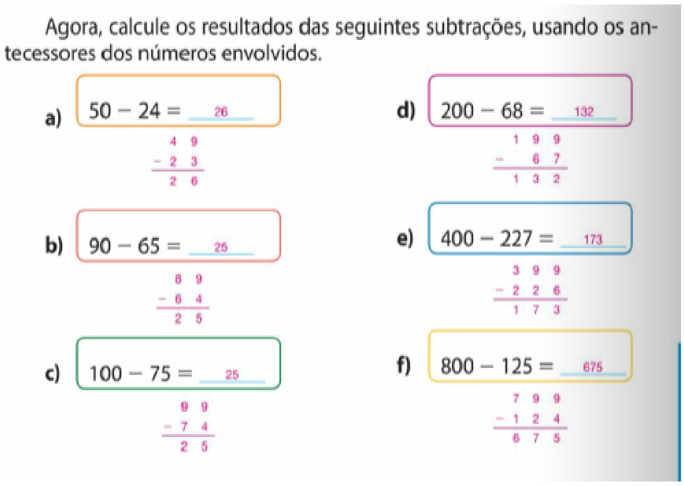


Figure 4.99 – (Giovanni Jr., 2014c, v.3, p. 148)

103. Noyau : Soustraire 1 unité de « a » et 1 unité de « b ». Poser verticalement a et b, de telle sorte que leurs ordres soient positionnés dans les mêmes colonnes ; effectuer la soustraction de chaque colonne de la droite à gauche.

Rinaldi (2016), en analysant des manuels français, a identifié la technique de calcul dite "à la russe" , qui consiste à remplacer une soustraction pour une autre équivalente afin d'avoir un nombre rond (c'est-à-dire un multiple de 10, 100, etc.), car avec les nombres ronds le calcul mental est plus facile.

> Ainsi avec cette technique pour calculer 143 - 67, on calcule 146 - 70. Ces deux calculs sont équivalents pourtant le second est plus facile à effectuer mentalement. On a ajouté à 67, le nombre 3 pour obtenir un nombre « rond » et ajouté 3 à 143 pour conserver l'écart. (Rinaldi, 2016, p. 26)

La technique proposée par le manuel brésilien a un objectif différent qui n'est pas le calcul mental : elle permet à la fois d'éviter le calcul avec retenues, mais aussi d'éliminer d'autres techniques plus spontanées. Finalement, il s'agit d'une étude faite *pour* les algorithmes posés.

4.5.5 Conclusions de l'étude de cas sur les portées des algorithmes posés

Les techniques avec des portées pragmatiques puissantes cours le risque d'être survalorisées par les institutions parce qu'elles permettent d'éviter d'aborder les questions sur le bon choix d'une technique : on sait que celle-ci, elle marche ! Le coût pédagogique est aussi drastiquement réduit lorsque l'une de ces techniques est élue comme *la* technique : on doit savoir bien la maîtriser et alors on saura accomplir la plupart des tâches du champ additif.

Cette réduction de l'étude à celle de techniques puissantes a pourtant une conséquence perverse : l'appauvrissement du bloc du savoir. Plusieurs technologies risquent de ne pas être rencontrées et de ne pas avoir raison d'être si les techniques n'existent pas. Pour cette raison et d'autres, ces techniques vont faire l'objet d'attentions et de divergences dans la noosphère.

Pour mener cette étude de cas liée à cette discussion, nous avons parcouru le chemin synthétisé ci-dessous :

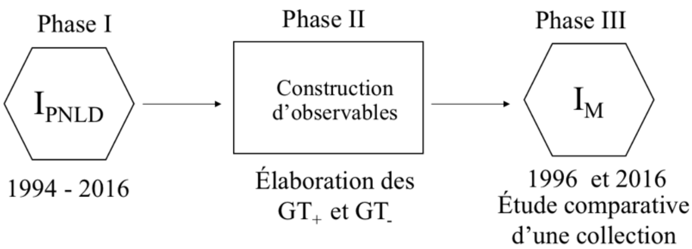


Figure 4.100 – Parcours d'étude V

L'élaboration des observables à identifier dans les manuels a nécessité de définir deux sous-générateur de $GT^{+/-}$, afin de pouvoir étudier les techniques de calculs de chaque opération.

La notion de portée des techniques et l'étude de la chronogenèse des praxéologies, à l'aide de V4 et V5, ont été au cœur de notre analyse des manuels. Les notions de variable et de générateur ont montré à nouveau leur pertinence pour réfléchir sur les choix didactiques d'un parcours d'étude.

Les portées institutionnelles des techniques sont des types de tâches au sein d'une institution. Nous avons montré que la pluralité de valeurs de V4, présentée dans notre modèle de référence, n'est pas vraiment exploitée dans la collection analysée : les techniques qui y sont disponibles ne leur donne pas de raison d'être.

Nous proposons de conclure cette étude de cas un peu différemment des autres. Dans notre corpus nous avons un manuel de cette même collection qui a été évalué en 1994. Ce manuel appartenait à un élève qui a laissé les traces de ses productions. Nous reproduisons ici quelques extraits de ces traces pour nous aide à réfléchir sur la transposition didactique interne de ces praxéologies. Deux extraits en particulier ont retenu notre attention à propos de l'opération de soustraction. Le premier est celui-ci :

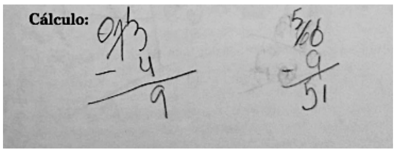


Figure 4.101 – Trace d'un élève (Giovanni, 1989c, v.3, p. 159)

Pour résoudre les tâches « 13 - 4 » et « 60 - 9 », l'élève pose l'opération et utilise la technique par emprunt. Cependant, dans le premier cas la technique, elle-même, n'aide en rien à trouver la réponse : quand l'élève emprunte 1 dizaine aux unités, il se retrouve face à la même tâche d'avant, « 13 - 4 » ! En ce qui concerne la deuxième tâche, on constate encore une autre fois la force du *contrat* qu'amène l'élève à poser toujours l'opération, indépendamment des valeurs en jeu.

Le deuxième extrait concerne la dernière technique que nous avons présentée (s'appuyant sur le principe de la conservation des écarts pour éviter une retenue). Voici comment l'élève l'utilise :

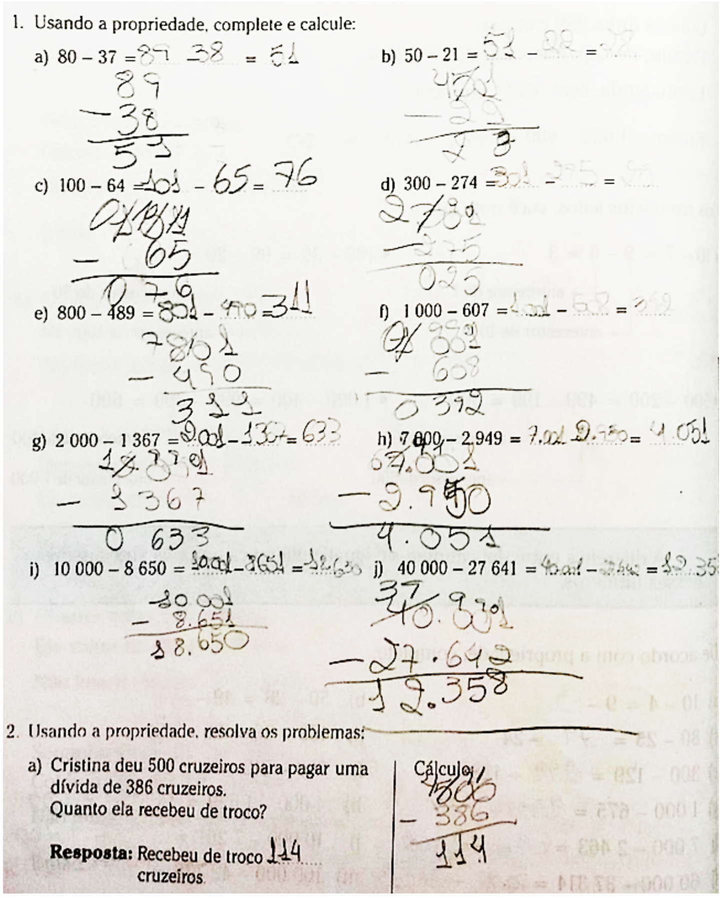


Figure 4.102 – Trace d'un élève (Giovanni, 1989c, v.3, p. 118)

L'analyse de cette trace montre que l'élève ne comprend pas vraiment le fonctionnement de la technique. Dans la première tâche, il a essayé d'avoir le « 9 » à la fin du premier nombre, puis il ajoute une unité au deuxième nombre. La tâche « 80 - 37 » est devenue, à tort, « 89 - 38 ». Il répète la technique d'additionner une unité au deuxième nombre dans toutes les autres tâches, alors que la technique proposée consiste à soustraire une unité. Quand on additionne une unité aux deux nombres de la soustraction, on trouve une soustraction équivalente, mais cela ne nous aide pas à éviter des retenues. Les calculs sont aussi difficiles qu'avant, ce qui est notable pour les plusieurs erreurs dans la mise en œuvre de la technique posée par emprunt. Dans les activités qui suivent, l'élève ignore la consigne d'utiliser cette technique et pose l'opération directement sans changer les nombres pour alors appliquer la technique par emprunt. Évidemment, il n'a pas vu l'avantage de cette autre façon de faire.

Il faut souligner néanmoins que face aux jugements positifs de Ipnld sur les *progrès* des manuels sur ce sujet, nous pouvons certainement trouver d'autres manuels actuels s'engageant dans une étude plus plurielle au niveau des techniques de calcul. Néanmoins, la place des algorithmes posée est une question qui reste actuelle et continuera à l'être dans la noosphère, surtout avec l'avènement d'une société technologique, où la présence des calculatrices est des plus en plus commune.

Après tout, la passion pour les algorithmes posés est un symptôme de quelques paradigmes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Pour cette raison, ils sont tellement résistants, même si associés à une étude aussi fastidieuse.

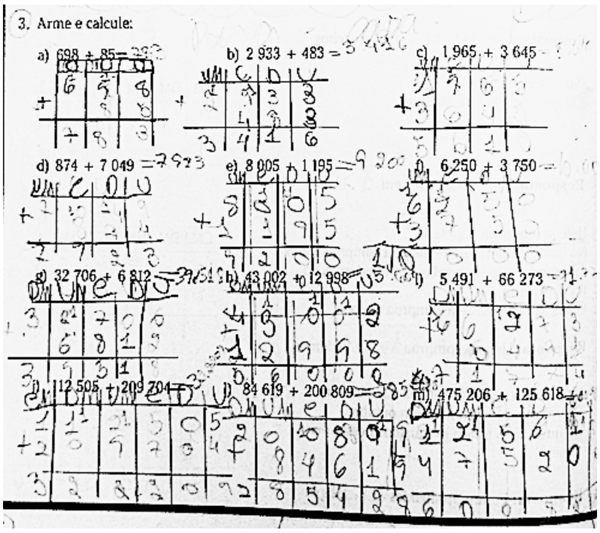


Figure 4.103 – Trace d'un élève (Giovanni, 1989c, v.3, p. 52)

Conclusions Du Bloc Du Savoir-Faire

La noosphère, de façon caricaturale, est composée par des institutions et sujets d'une part *traditionnels/ conservateurs / nostalgiques* et d'autre part composée par des *agitateurs / révolutionnaires / râleurs*. La noosphère est une partie de la société.

Les modèles dominants d'enseignement d'une société sont soumis aux jugements de cette noosphère. Et ces modèles ont la caractéristique d'être résistants. Une raison est peut-être qu'ils ont atteint une certaine stabilité accompagnée d'un sentiment de sécurité des sujets qui le mettent en place. Ils sont aussi plus résistants lorsque les perturbations de la noosphère affectent les paradigmes qui les fondent.

La question est que lorsque certaines fins éducatives ne sont pas touchées, les changements de modèles dominants risquent d'être simplement des marches de manœuvre de conformité, produisant une espèce d'illusion. En revanche, lorsque les échecs des modèles dominants résonnent au niveau civilisationnel de l'échelle de codétermination, comme dans le cas des héritages plus forts du mouvement des mathématiques modernes, nous remarquons moins des résistances aux changements curriculaires.

Ainsi comme pour le bloc du savoir, des particularités méthodologiques sont apparue pour répondre aux spécificités de chaque étude de cas. Cependant, l'analyse du bloc du savoir-faire s'appuie sur un invariant significatif : la modélisation des sous-générateurs. Nous reprenons ce qui a déjà été dit auparavant : l'élaboration de sous-générateurs est une étape de l'analyse, mais aussi un résultat qui résulte des premières confrontations aux données empiriques. De façon résumée, chaque sous-générateur est alors un résultat en soi, qui produit des observables pour avancer vers d'autres résultats.

Ce qui est intéressant de retenir est que chaque variable de notre système de départ a contribué d'une façon différente aux analyses. La variable « V2 : l'idée de la situation » n'est pas très adéquate, par exemple, à la caractérisation des portées des techniques, alors que la structuration de leurs valeurs nous a apporté des éléments caractérisant de différentes organisations didactiques. Cela relève de la nature des variables, qui peut être un objet en soi d'étude en didactique.

Nous pourrions compléter notre analyse par l'étude d'autres cas, comme l'usage de la calculatrice ou les ostensifs mobilisés au niveau de la technique. Cependant, nous croyons que ces cinq études de cas assez différents nous ont permis de cheminer grâce à différentes réflexions théoriques que nous avons présentées dans les premiers chapitres. Cela nous invite aux conclusions et perspectives de notre travail que nous présentons par la suite.

Conclusions et perspectives

La didactique en tant que science « se voue à étudier les conditions et contraintes sous lesquelles les praxéologies se mettent à vivre, à migrer, à changer, à opérer, à dépérir, à disparaître, à renaître, etc., au sein des institutions humaines. » (Chevallard, 2007, p. 719). L'intérêt porté aux praxéologies rencontrées et empêchées de vivre dans les institutions officielles d'enseignement, qui déterminent le curriculum scolaire, nous invite à ouvrir la porte de la *noosphère*.

Quelle première impression en y entrant ? La noosphère est, comme toute entité sociale, composée d'une mosaïque d'institutions I_n.

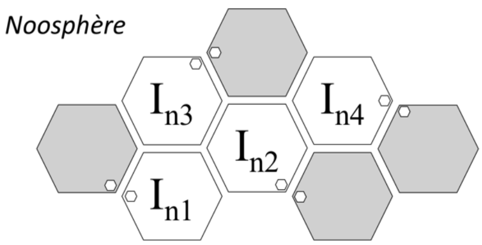


Figure 4.104 – Noosphère

Les institutions, selon l'anthropologue Douglas (2007), sont entre autres des *conventions*. Formées par des personnes, ces dispositifs sociaux portent et développent des manières de penser et de faire propres vis-à-vis de certains objets « o » (Chevallard, 2002), modélisé par R(I, o).

Les rapports des institutions noosphériennes, $\mathrm{R}(\mathrm{I}_\mathrm{n}, \mathrm{o})$, ou simplement les *rapports noosphèriens*, ont comme objet « o » les rapports $\mathrm{R}(\mathrm{I}_\mathrm{e}, \mathrm{o}_\mathrm{c})$ qui existent ou pourraient venir à exister dans les institutions d'enseignements I_e : $\mathrm{R}(\mathrm{I}_\mathrm{n}, \mathrm{R}(\mathrm{I}_\mathrm{e}, \mathrm{o}_\mathrm{c}))$.

Un constat important est que les rapports noosphériens dérivent des *jugements* « ¿ » que les institutions I_n portent sur $R(I_e, o_c)$: $I_n \vdash R(I_e, o_c) =$ « ¿ ». Le fait de juger est une caractéristique primaire des institutions de la noosphère. Nous avons considéré quatre valeurs pour ces jugements : descriptif, prescriptif, proscriptif et suggestif. Ces quatre valeurs indiquent respectivement ce qu'*est*, ce que *devrait être*, ce que *ne doit pas être* et ce que *pourrait être* le rapport $R(I_e, o_c)$ selon I_n.

Plus nous cherchons à comprendre le fonctionnement de la noosphère, plus nous observons que les pièces de la mosaïque qui la constituent sont liées les unes aux autres. Ainsi comme les personnes sont assujetties à des institutions, il existe un assujettissement *entre* les institutions qui contraint et conditionne les manières de faire et de penser. Ceci constitue un élargissement de la notion d'assujettissement (Chevallard, 2003) au sein de la TAD que nous notons :

$$R(I_{n1},o) \cong R(I_{n2},o), \text{ où } o = R\ (I_e\ , o_c)$$

Si I_{n1} est assujettie à I_{n2}, alors le rapport de la première à un objet donné « o » tend à être en conformité au rapport de la deuxième à ce même objet « o » non par hasard, mais par influence directe. Cette *influence directe* peut se traduire par des gestes de $I_{n2.}$ La non-conformité entre leurs rapports illustre la liberté de I_{n1} et motive l'adjectif de *mauvaise institution* de I_{n1} vis-à-vis I_{n2}.

La stabilité curriculaire (toujours momentanée) et les changements curriculaires peuvent être interprétés comme des effets d'assujettissements entre les institutions noosphèriennes.

> Que le changement curriculaire affecte les objets de l'étude ou la manière de les étudier, qu'il soit spontané ou provoqué, on peut tenter d'en analyser les effets observables ou d'en prévoir les effets probables - avec l'idée d'intervenir sur eux, après coup ou par anticipation. Cette problématique, simple d'apparence, ne laisse pourtant pas de soulever des difficultés, qu'il serait léger d'abandonner à la seule inspiration politique. (Chevallard, 1997, p. 06)

Notre travail s'inscrit dans l'étude de ce jeu de pouvoir entre les institutions noosphériennes qui vise à modifier le curriculum. Plus précisément, comment ce jeu d'assujettissement impacte le curriculum et contribue à son évolution et ses changements ? Cela nous a conduits à l'hypothèse de travail qui suit : *la propension aux changements curriculaires peut être éclairée par l'analyse des assujettissements des institutions composant la noosphère.*

Dans le cadre de notre thèse, nous avons restreint notre étude à celle de la noosphère de *la société brésilienne*, et porté notre attention sur deux institutions particulières, I_M et I_{PNLD}. À ce propos, la noosphère s'est constituée telle comme elle est selon la société que l'on observe. Les pièces de la mosaïque ne peuvent alors être assemblées qu'en prenant en compte les spécificités de ce niveau d'échelle de codétermination.

Sans revenir en détails sur le contexte étudié, nous rappelons que I_{PNLD} est une institution singulière, spécifique de la société brésilienne. Elle a été créée pour juger de façon délibérée I_M, établissant de ce fait une relation d'assujettissement entre les deux institutions. Ce jugement est donc le reflet de ce que $\mathrm{I_{PNLD}}$ envisage pour les institutions d'enseignement, $\mathrm{R(I_e,\, o_c)}$.

$$\mathrm{I_{PNLD}} \vdash \mathrm{R(I_e,\, o_c)} = ¿$$

$$\mathrm{I_{PNLD}} \vdash \mathrm{R(I_M,\, o_c)} = ¿$$

$\mathrm{I_{PNLD}}$ perturbe alors nécessairement les conditions et contraintes sous lesquelles $\mathrm{I_M}$ produit des manuels, d'où les *problématiques possibiliste et impossibiliste* (Chevallard, 2011) se posent :

> Étant donné un certain ensemble de conditions $\mathrm{C_{PNLD}}$ (d'origine $\mathrm{I_{PNLD}}$) et un certain ensemble de contraintes $\mathrm{K_{PNLD}}$ (d'origine $\mathrm{I_{PNLD}}$) auxquelles l'institution $\mathrm{I_M}$ est soumise, quelles entités praxéologiques est-il possible que l'institution $\mathrm{I_M}$ conçoive ? Ou encore, quelles entités praxéologiques est-il vraisemblable que $\mathrm{I_M}$ ne produise pas ?
>
> $$(\mathrm{K_{PNLD}},\, \mathrm{C_{PNLD}},\, \wp,\, \mathrm{I_M})$$
>
> $$\text{non-}(\mathrm{K_{PNLD}},\, \mathrm{C_{PNLD}},\, \wp,\, \mathrm{I_M})$$

Les jugements de $\mathrm{I_{PNLD}}$ ont alors pour objectif d'affecter les praxéologies $\wp$ que $\mathrm{I_M}$ peut proposer, en sachant que :

— Le jugement descriptif essentiellement positif concernant $\wp_0$ renforce l'existence de $\wp_0$. Le jugement descriptif essentiellement négatif concernant $\wp_0$ insinue une prescription ou une proscription vis-à-vis de $\wp_0$.

— Le jugement prescriptif cherche à mettre en place une nouvelle $\wp_0$'. Cela peut être conditionné par la disparition d'une ancienne $\wp_0$.

— Le jugement proscriptif à propos de $\wp_0$ cherche à faire disparaître $\wp_0$.

— Tout jugement suggestif valide la possibilité d'existence de $\wp_0$.

Cette variété de jugements et de leurs effets ont été observés dans les cinq études de cas qui composent notre analyse. Lorsque les conditions et contraintes $(\mathrm{K_{PNLD}},\, \mathrm{C_{PNLD}})$ ne sont pas suffisamment prises en compte par $\mathrm{I_M}$, certaines praxéologies $\wp_0$ indésirables pour $\mathrm{I_{PNLD}}$ sont trouvées de façon significative dans les manuels : $\mathrm{I_{PNLD}}$ intervient alors de manière punitive, soit par un geste de désapprobation d'une collection de manuels, soit par un geste de les critiquer dans les résultats d'évaluation.

Nous avons étudié ces deux institutions à partir de ce qu'elles rendent public au travers de leurs productions, à savoir les documents d'évaluation pour $\mathrm{I_{PNLD}}$ et les manuels scolaires pour $\mathrm{I_M}$. Nous les considérons comme des « boîtes noires » ce qui signifie que nous avons ignoré volontairement leurs modes de fonctionnement. Or, la diversité de manuels nous a interpelés.

Selon Douglas (2007), les institutions confèrent une certaine uniformité aux dispositifs sociaux. Cette diversité de manuels, se traduisant par des rapports différents aux objets d'enseignement, nous suggère l'existence de « sous-institutions » à l'intérieur de I_M, qui sont elles-mêmes des institutions. Ces sous-institutions ont leurs propres *conventions*, en partagent toutes des *conventions communes* à I_M. Parler d'unité va dépendre alors du niveau d'où l'on regarde.

Cette caractéristique est courante dans la société. Un exemple : l'école, la classe du CP, les six garçons au fond de la classe. « Juan » occupe les positions respectivement d'élève de l'école, d'élève du CP et de leader du groupe de six garçons : le qualitatif de bon ou mauvais sujet peut ne pas être le même dans chacune de ces institutions. Cependant, le groupe des six garçons est soumis aux conditions et contraintes du CP qui à son tour est soumis à l'école.

I_M est une institution noosphèrienne avec cette caractéristique d'être composée par différentes « sous-institutions ». Nous n'avions ni l'intérêt ni les moyens de les identifier comme telles dans notre travail. Ceci est l'une des limites de la thèse.

Ces sous-institutions - qui pourraient être caractérisées peut-être par des paradigmes d'enseignement et d'apprentissage différents - conduisent à la production de collections de manuels distinctes. Bien sûr, certaines sont plus affectées par les jugements de I_{PNLD} que d'autres. Comme notre étude concernait les effets d'« actions - réactions » autour des résultats des évaluations de manuels, nous avons plutôt porté notre attention sur les *mauvaises sous-institutions*.

Mais, comme dans toute institution, les rapports des sous-institutions de I_M à certains objets sont similaires. Cette homogénéité, qui change dans le temps, est désignée dans notre travail par le terme de *vulgates* (Chervel, 1990). L'identification des vulgates est sans doute un aspect important pour toute recherche qui utilise les manuels comme ressource pour interroger le curriculum.

Néanmoins, nous pensons qu'il est également important l'identification de pratiques singulières, y compris celles qui résistent aux incitations au changement de la noosphère.

> Aucune personne qui a l'intention d'expliquer l'action collective ne peut ignorer superficiellement les énormes problèmes rencontrés par une petite communauté qui tente de continuer à exister telle qu'elle est actuellement. (Douglas, 2007, p. 36, traduction propre) [104]

D'autres niveaux de l'échelle de codétermination déterminent les limites de notre recherche. À ce propos, notre analyse est faite au niveau de l'école primaire, dans la discipline des mathématiques, dans le domaine des nombres et des opérations, en considérant le secteur du champ additif.

104. « Ninguém que esteja empenhado em explicar a ação coletiva pode descartar superficialmente os formidáveis problemas enfrentados por uma pequena comunidade que tenta continuar existindo tal como é » (Douglas, 2007, p. 36)

La période que l'on regarde, 1994 à 2016, est aussi un aspect limitant de nos données empiriques. Nous avons vu que le début de cette période est marqué par une sorte de réveil de la noosphère brésilienne après un état de léthargie. Un contexte politique nouveau dans la société brésilienne ainsi que l'émergence dans cette société de I_{EM}, institution scientifique de l'éducation mathématique, sont derrière ce changement d'état. I_{EM} est devenue une sorte d'institution de référence pour cette noosphère sur ce qui est bien ou pas bien pour les institutions d'enseignement.

> La noosphère de l'enseignement des mathématiques est, comme toute noosphère, composite, sans véritable cohésion d'ensemble, animée de mouvements divers où des collectifs plus ou moins intégrés tentent d'acquérir une influence, voire un véritable *leadership*. (Wozniak, 2005, p. 145)

Les jugements de I_{PNLD} sont, dans ce sens, souvent soutenus par ce que dit $\text{I}_{\text{EM.}}$ En effet, attibuer à cette institution un certain pouvoir normatif sur les enjeux d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, bien que cela ne soit pas l'objectif de I_{EM}, est un phénomène connu dans plusieurs sociétés modernes : les institutions scientifiques sont souvent considérées comme *productrices des vérités*.

Plusieurs autres institutions font partie de la mosaïque de la noosphère du Brésil, avec des assujettissements plus ou moins visibles que ceux des deux institutions que nous avons analysées.

Les niveaux inférieurs de l'échelle de codétermination nous ont amenés à certaines réflexions théoriques relatives à l'objet d'enseignement. Le modèle praxéologique a été notre principal outil pour construire une *méthode de mesure* pour interpréter le curriculum et les changements curriculaires.

> Étudier l'équipement praxéologique d'une instance donnée n'est pas une problématique première en didactique, mais une problématique dérivée. Ce qui est l'objectif premier de la didactique, c'est l'étude des conditions et contraintes sous lesquelles l'équipement praxéologique d'un type donné d'instances a changé, ou est en train de changer, ou pourrait changer, en intégrant telle ou telle entité praxéologique.
> L'outil de telles études est l'analyse didactique : analyse du didactique qui a amené, ou impulse, ou pourrait susciter le changement praxéologique visé.
> L'analyse didactique suppose l'analyse de conditions et contraintes de tous niveaux, et en particulier l'analyse praxéologique de l'œuvre, c'est-à-dire de l'entité praxéologique dont on étudie ainsi la diffusion passée, présente ou à venir. (Chevallard, 2011, p. 04)

Le modèle praxéologique est même devenu un objet d'étude durant un moment de notre recherche. La modélisation selon les quatre éléments praxéologiques issue du travail de chercheur a été souvent sujet à débat. Dans le cadre de T4tel, les questions sur la nature des éléments du quadruplé et de leurs mises en œuvre ont été enrichies et des réponses partielles leur ont été apportées.

Les premières questions que nous nous sommes posées portaient sur la modélisation d'un type de tâches, d'où l'apparition des notions de générateur et de variable (Chaachoua et Bessot, 2016) dans notre étude. Pour prendre en compte différents niveaux de granularité dans la description de cet élément praxéologique, nous avons conçu un générateur du champ additif $\text{GT}^{+/-}$, avec un système composé de cinq variables.

Nous avons fait l'hypothèse que certains changements praxéologiques peuvent être exprimés en termes de changements concernant le système de variables en jeu. Cela a été mis en évidence par les études de cas présentées, notamment celles à propos du bloc du savoir-faire. Nous avons constaté lors des analyses, la pertinence méthodologique de centrer notre regard sur une partie plus restreinte des variables de $GT^{+/-}$. Nous avons alors défini la notion de sous-générateur, notion qui s'est avérée être un outil stratégique pour éclairer des phénomènes didactiques. Avec l'idée de sous-générateurs de types de tâches, nous avons pu dans un premier temps mieux cadrer certaines divergences entre I_M et I_{PNLD}. Puis, dans un deuxième temps, l'analyse comparative entre les manuels de différentes époques à partir du changement des valeurs de variables a été fondamentale du point de vue méthodologique. Nous pensons que l'intérêt de ces notions théoriques et des moyens méthodologiques qu'ils permettent dépasse largement la problématique de notre thèse.

Rappelons que Chaachoua et Bessot (2016) ont attribué trois fonctions aux variables dans l'étude praxéologique : 1) Générer des sous-types de tâches en jouant sur les valeurs de cette variable ; 2) Caractériser les portées des techniques ; et 3) Décrire les praxéologies personnelles. Suite à nos analyses et comme suggèrent Kaspary, Chaachoua, et Bessot (2020), nous ajoutons une quatrième fonction liée à la dimension de l'organisation didactique : 4) La caractérisation et la conception des parcours d'étude. La conception reste pour le moment, bien entendu, sur le plan des perspectives.

Sur cette quatrième fonction, nous revenons ici sur deux études de cas en particulier. La première est celle de tâches contextualisées, où nous avons constaté que la façon dont certaines variables et valeurs sont structurées par les institutions détermine la trame principale de comment on étudie un certain objet. Prenons deux configurations de variables qui figurent deux parcours d'étude possibles :

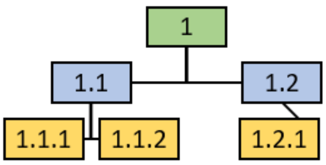


Figure 4.105 – Configuration I

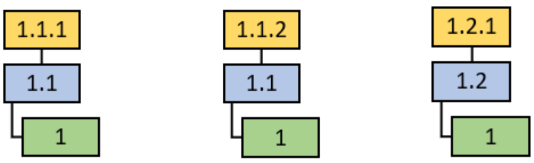


Figure 4.106 – Configuration II

Dans ces deux configurations, la rencontre avec l'objet « 1 » est différente. Dans la configuration

I, on commence par l'étude de l'objet « 1 » pour alors étudier ses nuances. Dans la configuration II, on rencontre d'abord des cas particuliers pour ensuite les associer à un niveau générique. La structuration du système de variable peut donc être un moyen pour le chercheur d'exprimer comment l'activité d'étude est organisée par l'institution.

La deuxième étude de cas sur laquelle nous souhaitons revenir est celle de la place des algorithmes posés, où la deuxième fonction « caractériser les portées des techniques » a été explorée pour analyser l'évolution praxéologique. Ce travail a dévoilé des dynamiques praxéologiques (Kaspary, Chaachoua, et Bessot, 2020) importantes pour mieux comprendre les conditions et les contraintes de la genèse et la vie des techniques dans les institutions.

Soulignons que chaque variable considérée dans notre modèle praxéologique de référence a permis de rendre compte d'une spécificité de notre étude. Cela est dû à leur nature, qui fait qu'une variable est plus adaptée qu'une autre pour expliciter certains aspects de l'activité d'étude.

La modélisation des techniques a aussi suscité des réflexions. Nous avons assumé que cet élément praxéologique se laisse décrire par un ensemble de types de tâches (Chevallard, 2018). Pour établir un niveau de description pertinent à notre modèle de référence, nous avons introduit la notion de *noyau d'une technique*, comme une partie de l'ensemble de types de tâches qui caractérisent plusieurs manières de faire relativement proches et sans laquelle les techniques associées s'effondreraient.

Les notions d'ostensifs et de non-ostensif ont été également au centre de plusieurs de nos discussions. Dans (Kaspary, 2014; Kaspary et Bittar, 2014, 2018), nous avions vu l'intérêt de questionner les portées des techniques en les associant aux valences instrumentales des ostensifs lors de leur mise en œuvre. Aussi dans ces travaux, nous avions signalé la puissance d'étudier l'évolution praxéologique manifestée par la réduction ostensive dans les techniques à l'école primaire. Dans ce travail de thèse, nous continuons à penser que l'analyse des ostensifs nous offre des aspects essentiels pour mieux comprendre l'activité humaine.

Ces notions théoriques nous ont permis d'interpréter les jugements de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et d'étudier les effets de ces jugements sur les manuels produits par I_{M}. Suite aux cinq études de cas et grâce à ces outils théoriques, nous avons pu repérer des changements praxéologiques dans les manuels ainsi que de nombreux non-changements.

Certains de ces changements ont été, cependant, une espèce de *manœuvre pour la conformité*, une sorte de *déguisement* des anciens objets d'enseignement. Les raisons d'être de ces objets deviennent alors douteuses et leur étude prend « l'allure d'un rituel justifié seulement par la coutume » (Chevallard, 1997, p. 09).

Les non-changements montrent, de leur côté, la résistance dérivée de la liberté institutionnelle et de la dureté des paradigmes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.

Il faut oser dire que, par son fonctionnement capitaliste, I_{M} est contraint de prendre en compte ce qu'est un *bon* manuel pour les *vraies* institutions d'enseignements, ce manuel n'étant pas nécessairement un bon manuel pour $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Une tension claire entre les demandes de l'évaluation par $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ et les attentes des institutions d'enseignement contraint et conditionne la production des manuels. Un paradoxe se révèle : les manuels doivent servir au réel et transformer le réel. Le résultat de cette tension est que dans certains cas les lois du fonctionnement didactique du système *stricto sensu* orientent l'élaboration des manuels autant, sinon plus, que les évaluations. Après tout, il est nécessaire d'assumer les impuissances de la noosphère face aux contraintes de la réalité du fonctionnement des systèmes didactiques.

> À cet égard, l'utopie du programme comme tracé régulateur peut être prise dans une lumière beaucoup plus réaliste : le programme est un tracé régulateur de transposition didactique. En un sens, donc, un programme peut être regardé comme ouvrant un espace de liberté et de créativité didactiques. Liberté sous contraintes bien sûr ! Contraintes, non pas du programme seulement - lesquelles demeurent toujours relativement légères - mais contraintes imposées par le fonctionnement didactique. (Chevallard, 1986, p. 14)

Enfin, il semble qu'il restera toujours une infinité d'autres interrogations sur les phénomènes didactiques en attente pour satisfaire le plaisir des curieux. La science est généreuse à ceux qui doutent de la naturalité des choses.

...

Capítulo 5

Resumo Extendido

Motivações

Currículo, palavra com entendimento diverso, está no cenário de várias pesquisas que se interessam pela difusão e não difusão de saberes na sociedade. Grande parte dessas pesquisas centram sua atenção nas instituições de ensino, porque mesmo levando em consideração as metamorfoses de adaptação, parte do currículo que existe nessas instituições foi projetada para ali existir.

> Quando ela [a skholè] se torna também um assunto do estado, quando o estado decreta a skholè obrigatória, uma normatização se opera: uma Escola considerada adequadamente diferenciada - em ensino fundamental e médio, etc. - a fim de integrar o essencial das práticas escolares existentes, se estabelecem currículos nacionais, repertórios de obras a estudar e formas legítimas de estudo. A Escola torna-se assim o principal operador de entrada na sociedade: as gerações mais novas vêm aprender sobre a sociedade, aprendendo algumas das obras que a constituem. (Chevallard, 1998c, p. 01, tradução nossa)

Dentre as pesquisas relativas às instituições de ensino, há aquelas que assumem um currículo estabelecido, em um determinado momento, e questionam as condições e restrições que permitem o seu bom funcionamento. As práticas de ensino e o aprendizado do aluno costumam ter um lugar especial nesses estudos. O currículo é constantemente visto nesses casos como uma espécie de *dado* de pesquisa. Existem, no entanto, outros tipos de estudos, que tomam o currículo não como um *estado*, mas como um *objeto de estudo*. Nossa tese se encaixa neste segundo caso.

O que percebemos é que o currículo, aquele elaborado para existir nas escolas, muda com o tempo. Muda porque *eles* decidem que o conceito " ♣ " não é mais necessário, porque descobriram que a teoria

“ ♠ ” foi invalidada ou porque viram as falhas de ensino sob uma perspectiva “ ♦ ”. E, porque as necessidades da sociedade mudam. Embora existam tendências globais sobre “ ♣, ♠, ♦, ...”, cada sociedade constrói e desenvolve seu próprio currículo à sua maneira. Nesse sentido, as questões que nos fazemos são: quem são esses “*eles*” que decidem o currículo a que estão sujeitas as instituições de ensino? Como eles o concebem? Essas perguntas, tomadas talvez a princípio como infantis ou politicamente desanimadoras, são o que alimentam nossa curiosidade de pesquisa.

Consideramos o currículo escolar como uma norma que engaja a escola em um grande projeto da sociedade. Por isso, nenhum currículo é virgem de valores e a disciplina de matemática, como todas as outras, é um meio de difusão de uma cultura.

Segundo Neyret (1995), os livros didáticos têm sido amplamente utilizados pelos pesquisadores como meio de fornecer indicações valiosas sobre a transposição didática de determinados saberes. Nossa pesquisa também faz parte dos trabalhos que utilizam os livros didáticos como um observável que permite caracterizar as escolhas curriculares.

O contexto

Considerando que o currículo é produto de uma sociedade, enquadramos o estudo de nossa tese no contexto específico da sociedade brasileira.

Os livros didáticos no Brasil são o principal recurso de trabalho para o professor, o que motiva projetos de pesquisa em torno desses materiais (Bittar, 2017). As condições e restrições para a viabilização dos livros didáticos neste país conferem a este contexto um caráter singular. Em 1929, o Estado instituiu o Programa Nacional do Livro Didático - PNLD, instituição oficial e específica fundada para legislar as políticas relacionadas a esse recurso. Em 1994, foi realizada por essa instituição a primeira avaliação dos livros didáticos utilizados pelas escolas públicas do país. Esta avaliação revelou uma situação alarmante e mostrou a necessidade de mudanças nos livros didáticos. Assim, a qualidade desse recurso tornou-se um ponto de debate político. Desde então, os livros didáticos produzidos pelo mercado editorial são submetidos a revisões periódicas promovidas pelo Estado.

Para estudar as mudanças e não mudanças dos livros didáticos ao longo do tempo em função das avaliações, utilizamos e desenvolvemos noções teóricas e ferramentas metodológicas específicas da Teoria Antropológica do Didático, TAD (Chevallard, 1998b). Também decidimos nos concentrar nas operações de adição e subtração nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O manuscrito

Nosso trabalho de tese foi construído em regime de cotutela, Brasil - França. O idioma para a redação deste manuscrito é o francês, complementado por um substancial resumo redigido em português apresentado aqui aos leitores lusófonos.

A tese está organizada em quatro capítulos. No primeiro, apresentamos uma reflexão teórica sobre a constituição e as mudanças curriculares com base nos conceitos da TAD. Esta é uma forma de compartilhar nossos óculos com o leitor antes de apresentar o contexto e o problema de pesquisa, que também fazem parte deste capítulo.

Existem conceitos que nos ajudam a refletir e questionar a realidade; há outros que nos ajudam a modelar e trabalhar com os dados da realidade. O segundo capítulo tem como objetivo apresentar conceitos teóricos que participam ativamente como ferramentas metodológicas para caracterizar e estudar as (não) mudanças curriculares. Uma visão global da metodologia é definida ao final deste capítulo.

O terceiro capítulo é dedicado à apresentação de um *modelo praxeológico de referência* relativo às operações de adição e subtração. Este modelo serve como unidade de análise para o nosso estudo e é construído a partir dos conceitos apresentados no capítulo anterior.

As análises compõem o quarto capítulo. Elas são constituídas por cinco estudos de caso bastante distintos e por isso permitem revelar fenômenos diversos em torno das mudanças curriculares e das não mudanças observadas nos livros didáticos.

Por fim, o texto termina com as conclusões e perspectivas gerais deste trabalho. Para o resumo em português, decidimos apresentar: 1) a problemática da tese; 2) uma visão global da metodologia; e 3) os resultados gerais da análise. O leitor sentirá possivelmente falta da reflexão teórica que desencadeou muitas das nossas escolhas e modelizações. Para suprir essa falta, indicamos sempre que possível em qual parte do texto em francês encontramos uma apresentação mais detalhada sobre o assunto.

5.1 O assujeitamento está na gênese das coisas

> "Em uma dada sociedade, em uma dada instituição desta sociedade, há um controle ativo, mais ou menos estreito, mais ou menos vigilante, das formas de pensar, de dizer, de pronunciar, de agir. , que supõe ser didático. Esse controle social é apenas parcialmente proibitivo; ele é essencialmente um prescritor - ele nos diz o que pensar e como fazer; ou melhor, para proibir, ele prescreve. "
>
> *(Chevallard, 2010, p. 10, tradução nossa)*

...

Objetivos do capítulo: Introdução e desenvolvimento de conceitos teóricos de suporte à problematização central da tese. Apresentação do contexto da pesquisa. Formalização da problemática.

...

A ciência é onde podemos ficar confortáveis para duvidar. Na Didática, são os fenômenos em torno da difusão e não difusão de objetos do saber que alimentam nossa mente desconfiada, visando manter uma relação menos ingênua e mais bem equipada com seu estudo (Chevallard, 2003).

Esses fenômenos vêm de sistemas de várias naturezas. Eles acontecem em um jantar familiar ou em uma reunião de negócios. Os pesquisadores em didática, no entanto, frequentemente se concentram nos sistemas escolares e isso não é um acaso. Essa demarcação tem razão de existir apesar de seus prejuízos: a responsabilidade dos sistemas oficiais de ensino pela difusão de *determinados objetos* oferece um terreno fértil para a pesquisa em didática, pois é ali que vive um currículo que, produzido pela transposição didática (Chevallard, 1985), foi deliberadamente projetado para ser difundido.

Para estudar esses fenômenos, nos situamos na teoria antropológica da didática - TAD. A problemática desta pesquisa e o referencial teórico se desenvolvem mutuamente; é isso que estrutura nosso texto em três momentos. O primeiro é dedicado à apresentação e desenvolvimento de elementos teóricos importantes para o nosso trabalho (ver 1.1). Em seguida, expomos o contexto dos dados de nossa análise (ver 1.2), para então chegar ao terceiro momento de formalização da problemática da tese (ver 1.3, apresentado aqui em português).

A problemática da tese

A noosfera é a entidade social que decide e legitima os objetos a serem estudas nas instituições de ensino.

Seguindo a teorização desenvolvida nos capítulos 1.1 e 1.2, assumimos a seguinte hipótese de trabalho: *a propensão para mudanças curriculares pode ser melhor compreendida pela análise dos assujeitamentos das instituições que compõem a noosfera.*

> Uma mudança curricular pode afetar qualquer componente do currículo. Além disso, tal mudança pode ser espontânea e ocorrer quase sem o conhecimento dos atores e tomadores de decisão, ou provocada, e então resultar de uma deliberação oficial. (Chevallard, 1997, p. 83, tradução nossa)

Em toda sociedade, mais notadamente nas sociedades democráticas, a noosfera se desenvolve graças aos assujeitamentos entre as diferentes instituições que a compõem. O contexto particular que estudamos, o do Brasil, ilustra esse assujeitamento não espontâneo pela criação de uma instituição que visa deliberadamente implementar mudanças curriculares a partir dos livros didáticos. Parte-se da premissa de que os livros didáticos são um importante porta-voz dessa noosfera.

Por isso, consideramos as editoras de livros didáticos e o PNLD como as duas instituições principais de nosso estudo, respectivamente I_M et I_{PNLD}. A busca por uma conformidade adequada das *relações* (ver 1.1) dessas duas instituições projeta condições e restrições que podem potencialmente influenciar a vida dos objetos que vivem ao final da transposição didática (conforme esquema presente em Bosch et Gáscon (2005)).

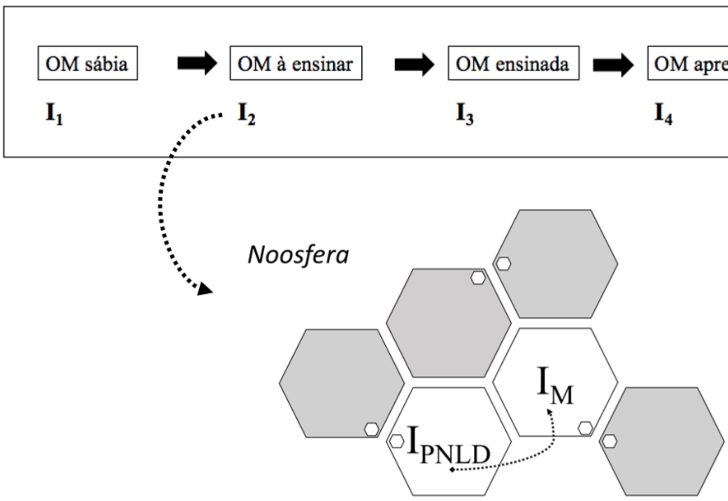


Figura 5.1 – As instituições da nossa pesquisa

Ressaltamos que muitas outras instituições fazem parte desse contexto, como a instituição de professores ou a comunidade científica de Educação Matemática, que são arbitrariamente ignoradas em nossa análise.

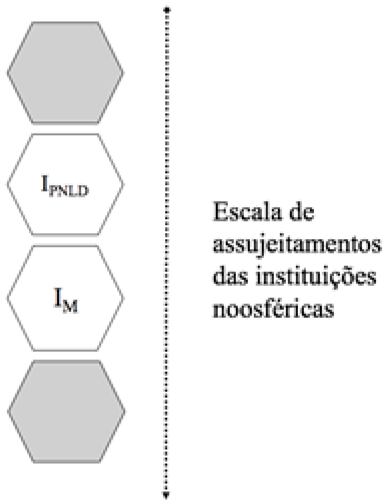


Figura 5.2 – Escala de assujeitamentos das instituições noosféricas

Essas duas instituições noosféricas expressam cada uma à sua maneira *as relações* - que consideram apropriadas - de um aluno ou um professor com os objetos a serem ensinados e aprendidos. I_M expõe suas *relações* a partir de um conjunto de atividades matemáticas *inertes* nos livros didáticos. E são a partir dessas atividades que poderemos interpretar e inferir as *relações noosféricas* desta instituição. I_{PNLD}, por sua vez, expressa suas *relações* por meio das avaliações dos livros didáticos. Trata-se de uma forma indireta de expressar o que deveria e não deveria existir, segundo essa instituição, em uma sala de aula.

I_{PNLD} é então uma instituição particular, porque além do julgamento produzido por toda instituição da noosfera, I_{PNLD} tem o direito e obrigação de também julgar outra instituição noosférica, I_M.

$$I_{PNLD} \vdash R(I_M, o_c) = ¿$$

Este julgamento resulta em mudanças em I_M. A não aprovação dos livros didáticos é o gesto prescritivo e punitivo diante da não conformidade entre essas duas instituições (ver 1.2).

I_{PNLD} é então uma *instancia de avaliação* (Chevallard, 2017), que produz julgamentos sobre o grau de conformidade da relação $R(I_M, o_c)$ com o sua própria relação. Esse julgamento indica o possível universo de atividades matemáticas tidas como adequadas e também nos revela aquelas tidas como inadequadas segundo esta instituição.

...

Comentário :

Na TAD, toda atividade humana, seja ela matemática ou não, pode ser modelada por quatro elementos: tipo de tarefas, técnicas, tecnologias e teoria. Este modelo é denominado praxeologia. A noção de praxeologia é objeto de discussão no capítulo 2.

Ou seja, nos discursos produzidos por $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, encontramos um universo bastante amplo de praxeologias *possíveis* e *impossíveis* (Chevallard, 2011). A natureza desta instituição leva-nos, portanto, ao seguinte problema: dado um determinado conjunto de condições $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$ e um determinado conjunto de restrições $\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$ as quais a instituição I_{M} está sujeita, que entidades praxeológicas é possível que a instituição de I_{M} conceba? Ou ainda, que entidades praxeológicas é provável que I_{M} não produza?

$$\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp, \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$
$$\text{non-}\Re(\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}, \mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}, \wp, \mathrm{I}_{\mathrm{M}})$$

Um livro didático é aprovado por $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ quando pelo menos uma parte significativa de ($\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$) é considerada por I_{M}. Observe, no entanto, que a entidade praxeológica ainda não foi instanciada nessa modelização. Ela é construída a partir da interpretação e assujeitamento de I_{M} a ($\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$) e outros (K, C) diversos.

Nosso trabalho é organizado, portanto, em dois eixos. Por um lado, a partir dos resultados das avaliações de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, buscamos identificar as condições e restrições prescritas para a vida de um conjunto - limitado, mas não unitário - de praxeologias. Por outro lado, analisamos os livros didáticos para descrever as praxeologias produzidas por I_{M}. As seguintes questões estão se colocam: "O conjunto de condições e restrições ($\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$) é respeitado por I_{M}? Qual é o grau de conformidade entre essas instituições?". Também podemos nos aventurar, como sugere Chevallard (2011), a buscar quais praxeologias não foram produzidas em virtude desse assujeitamento. .

Para concluir, é importante dizer que antes mesmo da democratização da escola, onde os livros didáticos também serviam como forma de controle educacional, esses materiais participam de importantes transformações educacionais no país como instrumento de implementação e integração de políticas educacionais (Pimentel et Vilela, 2011). Mais recentemente, Zúñinga (2007) considera que as avaliações de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ visam aprimorar o "livro didático real" a partir do que os avaliadores consideram um "livro didático ideal", com base em teorias e metodologias de ensino recentes. O estudo dessas mudanças está no centro de nosso trabalho. A partir disso, podemos afirmar que nosso objetivo de pesquisa é de estudar os efeitos desse sistema de avaliação nos livros didáticos. Do ponto de vista didático, trata-se de estudar as questões de assujeitamento que circulam na noosfera.

5.2 Metodologia

> "Sobre esse problema de medidas, aparentemente tão pobre, também podemos apreender o divórcio entre o pensamento do realista e o pensamento do cientista. O realista imediatamente pega o objeto específico na palma da mão. É porque ele o tem que ele o descreve e mede. Ele esgota a medida até a última casa decimal, como um tabelião conta uma fortuna até o último centavo. Ao contrário, o cientista *se aproxima* desse objeto originalmente mal definido. E primeiro *se prepara* para medi-lo. Ele discute as condições de seu estudo; ele determina a sensibilidade e o alcance de seus instrumentos. Finalmente, é seu *método de medição*, e não o *objeto de sua medição*, que o estudioso descreve. O objeto medido é determinado pelo grau de aproximação tido pelo método de medição. O cientista acredita no *realismo* da medida mais do que na *realidade* do objeto. O objeto pode então mudar de natureza quando mudamos o grau de aproximação. Pretender exaurir a determinação quantitativa de uma só vez é perder as *relações* possíveis com o objeto."
>
> *(Bachelard, 2004, pp. 253-254, tradução nossa)*

...

Objetivos do capítulo: Estabelecer as escolhas da pesquisa. Apresentar conceitos teóricos que serão utilizados como ferramentas de análise. Elaborar um plano geral da metodologia.

...

> "Até que um dos aldeões pensou um objeto jamais pensado. [...] Objeto estranho: uma porção de buracos amarrados por barbantes. Os buracos eram para deixar passar o que não se desejava pegar: a água. Os barbantes eram necessários para se pagar o que se deseja pegar: os peixes. Ele teceu uma rede.[...] Outros ficaram alegres e trataram de aprender a arte de fazer redes. Os tipos mais variados de redes foram inventados. [...] Cada rede pegava um tipo diferente de peixe. [...] Os pescadores-fabricantes de redes se organizaram numa confraria. Para pertencer à confraria, era necessário que o postulante soubesse tecer redes e que apresentasse, como prova de sua competência, um peixe pescado com as redes que ele mesmo tecera." (Alves, 1999, pp. 83-84)

Todo modelo de descrição de dados utilizado pelo pesquisador é uma espécie de *rede*, uuma ferramenta que lhe permite capturar conscientemente alguns observáveis e ignorar arbitrariamente muitos outros. Neste capítulo, apresentamos conceitos da teoria antropológica do didático que servem de matéria-prima para nossa rede. Essa rede também é formada das escolhas feitas pelo pesquisador.

O contexto de estudo pode ser primeiramente descrito pela instanciação de certos níveis de co-determinação (ver 1.2.1). Essas instanciações constituem nossa primeira escolha.

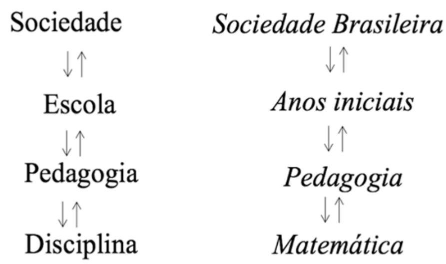


Figura 5.3 – Níveis de co-determinação do nosso estudo

Nosso trabalho se concentra principalmente nos níveis abaixo da disciplina na escala de co-determinação. Esta segunda escolha resulta de uma questão de custo metodológico, mas também (e sobretudo) do fato de ser nestes outros níveis que podemos identificar traços mais precisos do currículo prescrito.

Nos anos iniciais do ensino fundamental no Brasil, identificamos quatro áreas, intituladas por $\mathrm{I_{PNLD}}$ como: "Números e Operações", "Geometria", "Grandezas e Medidas" et "Tratamento da Informação". Em nossa tese, optamos por focar em "Números e Operações" (terceira escolha).

Nos níveis abaixo da área "Números e Operações", uuma quarta escolha foi de tomar como objeto de nossa pesquisa o setor "Campo aditivo", relativo às praxeologias que evocam as ideias das operações de adição e de subtração.

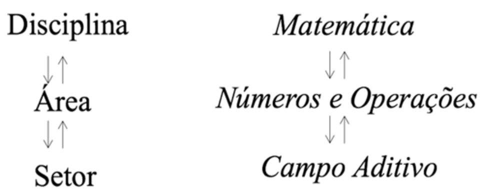


Figura 5.4 – Disciplina, Área e Setor

As duas últimas escolhas são estritamente justificadas pela formação pessoal do pesquisador. Em Kaspary (2014), realizamos um estudo de livros didáticos brasileiros sobre o Campo Aditivo. Este estudo permitiu emergir, em estado embrionário, algumas questões acerca da influência e do assujeitamento das instituições noosféricas, que deram origem a esse trabalho.

Para estudar as relações noosféricas sobre o setor do campo aditivo, mas também para levar em conta os níveis inferiores "tema" e "assunto", utilizamos diversas ferramentas analíticas da teoria antropológica do didático (ver 2.1, 2.2 e 2.3). Uma dessas noções é a de Tipo de tarefas (ver 2.1.1). O Tipo de tarefa que caracteriza nosso estudo é descrito da seguinte maneira:

$T^{+/-}$: Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* ou *dada sob a forma* "a +/- b = c", onde a, b e c são números naturais.

A seguir, sabendo que nenhuma descrição pode ser verdadeiramente fiel ao caos do processo analítico, buscaremos identificar outras escolhas e limites da nossa metodologia.

Visão global da metodologia

Em nossa pesquisa, o acesso às *relações* sobre $T^{+/-}$ é feito a partir dos produtos finais das instituições analisadas: os livros didáticos no caso da instituição I_M e os documentos oficiais de avaliação no caso de I_{PNLD}. Estes dados, relativos a cada instituição, são de naturezas diferentes e é aí que reside o nosso principal desafio metodológico: confrontar duas instituições que não se expressam da mesma forma.

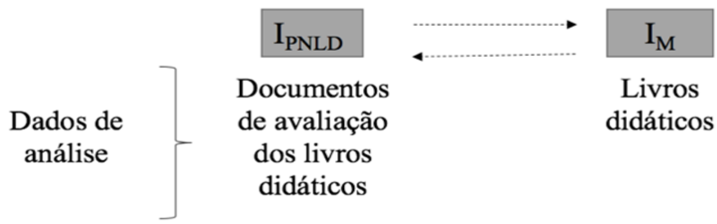


Figura 5.5 – Dados da análise

Para interpretar e comparar as *relações noosféricas* obre $T^{+/-}$, contamos com um modelo praxeológico de referência desse objeto matemático.

Um aspecto importante a ser considerado em nosso estudo é a noção de tempo, que intervém em duas dimensões em nossa análise. Em primeiro lugar, há a dimensão do tempo institucional durante o qual as praxeologias relativas a $T^{+/-}$ mudam com o decorrer da atividade de estudo. No nosso caso, o tempo institucional são os anos iniciais do Ensino Fundamental, onde o surgimento de dinâmicas praxeológicas, por exemplo, possibilita contar a história de $T^{+/-}$. Em paralelo, temos que levar em conta uma outra dimensão temporal, aquela relativa ao período de nossa análise, estabelecido entre 1994 - 2016: neste período, aparecem mudanças praxeológicas de origem diferente daquelas causadas pela atividade de estudo. Neste caso, as praxeologias mudam em resposta às mudanças curriculares motivadas pela noosfera. No entanto, essa segunda maneira de ver o tempo não pode ser compreendida sem a análise da primeira e vice-versa.

Ao longo deste período, buscamos compreender o assujeitamento de uma instituição à outra a partir das possíveis (e indesejáveis) praxeologias $\varphi(\wp)_t$ emanadas de I_{PNLD} e das praxeologias efetivamente produzidas por I_M, $(\wp_i)_t$ - o índice “t” denota um momento no período de 1994 a 2016. O estudo da mudança e resistência à mudança dessas praxeologias é o principal recurso de nossa análise.

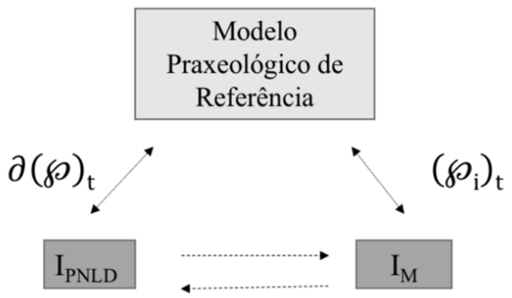


Figura 5.6 – Praxeologias possíveis e praxeologias produzidas

Uma forma de realizar esta pesquisa poderia ser, por exemplo, identificar essas praxeologias, $\varphi(\wp)_t$ e $(\wp_i)_t$, e confrontá-las. Essa escolha, porém, traria um custo alto em termos de análise de dados. Primeiro, porque o volume de material produzido por cada instituição é significativo, mas também porque o objeto matemático, o campo aditivo, é vasto. Outro fator desfavorável a essa escolha é que realizar toda uma modelagem praxeológica dos diferentes momentos do período de 1994 à 2016 parece desnecessário para discutir o assujeitamento entre essas instituições. A esse respeito, lembramos que não pretendemos descrever o estado curricular dos objetos a serem ensinados, mas procuramos estudar os efeitos do assujeitamento de duas instituições presentes nessa noosfera. É por isso que nosso trabalho foca em praxeologias sujeitas à desestabilização.

Para identificar essas praxeologias candidatas à uma possível mudança, primeiro estudamos a instituição I_{PNLD}. Para isso, equipados com nosso modelo praxeológico de referência, analisamos os documentos de avaliação procurando vestígios dos julgamentos de I_{PNLD} sobre I_M. Este primeiro trabalho começa com uma análise do primeiro documento publicado em 1994.

$$\begin{array}{l} I_{PNLD} \vdash R(I_M, O_{c.a}) = ¿ \\ 1994 \end{array} \begin{cases} ¿ : \text{descritivo sobre o estado atual} \\ ¿ : \text{prescritivo, o que deveria ser} \\ ¿ : \text{proscritivo, o que não deveria ser} \\ ¿ : \text{sugestivo, o que poderia ser} \end{cases}$$

Em seguida, produzimos uma interpretação desses julgamentos relacionados ao objeto “$O_{c.a.}$: campo aditivo” através dos elementos teóricos mobilizados em nosso modelo praxeológico de referência: o quarteto praxeológico, as variáveis, os ostensivos e os escopos das técnicas (ver 2.2.1, 2.3.1 e 2.3.3). Em seguida, construímos hipóteses sobre os efeitos desses julgamentos sobre a vida das praxeologias do campo aditivo.

A análise pode continuar por dois caminhos possíveis: com a análise de outros documentos de

I_{PNLD}, ou com a análise de I_{M}. A escolha por um desses caminhos depende daquilo que observamos na avaliação de 1994. É sempre esperada, de todo modo, uma importante dinâmica entre a análise da *avaliação* e a análise dos *avaliados*. É a comparação dos livros didáticos ao longo do tempo que permitirá identificar as mudanças praxeológicas que atestam a intenção de estar em conformidade com I_{PNLD}, ou as não mudanças praxeológicas que manifestam a resistência e a liberdade de I_{M}.

5.3 Nosso Modelo Praxeológico de Referência

> "Toda disciplina experimental considera, mais ou menos explicitamente, uma unidade de análise que é ao mesmo tempo a construção teórica básica e o domínio elementar para a análise de dados empíricos. Como uma construção teórica fundamental, a unidade de análise (sua estrutura e dinâmica) deve ser capaz de ser claramente descrita usando os termos primitivos da teoria. Como domínio básico de contingência, ela deve fornecer um conjunto de indicadores empíricos. A unidade de análise escolhida irá, portanto, ocupar um lugar central e privilegiado na relação entre teoria e dados empíricos e, assim, constituir um dos traços essenciais para caracterizar a disciplina em questão."
>
> *(Bosch et Gáscon, 2005, p. 115, tradução nossa)*

...

Objetivos do capítulo: Construir um sistema de variáveis. Identificar técnicas de adição e de subtração. Propor uma primeira reflexão sobre o escopo das técnicas do campo aditivo. Apresentar os principais elementos do bloco de saber.

...

No Brasil, existe um algoritmo de subtração e eu poderia jurar que era objeto de estudo em todas as escolas do mundo. Sua naturalização, para mim, não me permitia pensar de outra forma.

Ontem fiquei sabendo que os franceses têm outro algoritmo, tão comum para eles quanto o meu é para mim. E eu, como professora de matemática, não o conhecia. Para reforçar meu entusiasmo por esta descoberta, hoje uma colega vietnamita me disse, com surpresa, que nunca tinha visto em sua vida o algoritmo que utilizo, que se tornou para ela, durante nossa incrível discussão, como "o método brasileiro".

Escrito na França, em Grenoble, no dia 15 de março de 2018

...

A tentativa de reconhecer o que pode existir, sob um conjunto de condições aceitáveis, permite questionar o que se faz em uma instituição e o que não se faz ali, mas poderia ser feito. Trata-se de confrontar o real estável com o contingente e, nesse sentido, "a problemática ecológica surge assim como fundamento de uma *arte do possível*" (Chevallard, 1998b, p. 28).

A emancipação dos modelos dominantes está no cerne desta discussão e o desenvolvimento de um modelo de referência é uma ferramenta metodológica para isso.

Este modelo, no âmbito de nossa tese, é construído a partir das diferentes noções apresentadas no capítulo 2. Seu estado final é, como já dissemos, marcado por várias idas e vindas das análises. Ou seja, seu desenvolvimento começa no início da etapa metodológica e continua ao longo de todas as outras etapas da pesquisa. Nesse sentido, não devemos nos deixar enganar pela linearidade sugerida pela ordem dos capítulos. O modelo praxeológico antecede a apresentação das análises, mas este deve ser visto como vinculado a uma restrição textual e não como uma escolha que realmente revela a essência do trabalho metodológico.

Para a construção deste modelo, a literatura é uma das principais fontes a considerar. No nosso caso, temos a sorte de ter um universo suficientemente rico de pesquisas sobre o campo aditivo. A saber, os notáveis estudos realizados no âmbito da Teoria de Campos Conceituais.

A importância dos estudos de Gérard Vergnaud (1990) e seus sucessores também é observada nas discussões curriculares. De acordo com Magina et al. (2001), evidências convincentes da influência desse quadro teórico podem ser encontradas na elaboração dos "Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (1997)", um dos documentos oficiais mais popularizados do sistema educacional brasileiro.

Além dos trabalhos de Vergnaud, três estudos foram selecionados para nos ajudar a construir nosso modelo de referência: Kaspary (2014), Maréchal (2010) e Rinaldi (2016).

Uma retificação, no entanto, se faz necessária. O termo "campo aditivo" é um termo específico do vocabulário científico da Didática, que nos permitimos usar em nosso trabalho. No entanto, o que estudamos é de fato uma parte desse objeto: nos concentraremos apenas nas praxeologias relacionadas às operações de adição e subtração dos números naturais, restritas às relações ternárias [1]. Essas praxeologias são geradas por instanciações do sistema de variáveis $GT^{+/-}$:

Tabela 5.1 – As cinco variáveis de $GT^{+/-}$

$GT^{+/-}$: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* ou *dada sob a forma* "a +/- b = c", onde a, b e c são números naturais, *V1, V2, V3, V4, V5]*				
V1: Ostensivos	V2: Ideia da situação	V3: Informação desconhecida (?)	V4: Os dois números conhecidos	V5: Necessidade de realizar agrupamentos

Nesta perspectiva, a apresentação do nosso modelo é feita, em primeiro lugar, a partir da identificação das variáveis e valores que consideramos cardinais na descrição dos tipos de tarefas de $GT^{+/-}$. DNum segundo momento, são as técnicas que estão no centro das nossas discussões: apresentamos

1. "... que relacionam três elementos entre eles" (Vergnaud, 1981, p. 14, tradução nossa)

algumas reflexões sobre os seus escopos e possíveis domínios de concorrência entre elas. Por fim, passamos aos principais elementos matemáticos do bloco de saber que dão sentido às técnicas identificadas. Sublinhamos que a noção de ostensivo atravessa esses diferentes momentos.

O leitor interessado na apresentação desse modelo e nas reflexões teóricas e metodológicas desencadeadas pela sua construção, pode encontrar mais detalhes na leitura dos capítulos 2 e 3 em francês.

5.4 Análise dos dados

> "O sistema educacional só existe como sistema porque está sujeito às leis - as leis do funcionamento didático. Epistemologicamente, esta é uma afirmação trivial. Mas, historicamente, esta é uma afirmação decisiva: sua aceitação ou rejeição determina uma encruzilhada na evolução de nossas sociedades. Aceitá-lo muda tudo: estimula a pesquisa sobre as leis que regem o ato de ensinar e sua gestão social; leva ao realismo efetivo, longe da utopia da vontade nua."
>
> *(Chevallard, 1986, p. 32, tradução nossa)*

...

Objetivos do capítulo: Construção de observáveis. Análise dos efeitos didáticos do assujeitamento entre instituições. Estudo curricular ao longo do tempo. Retomada dos aspectos metodológicos.

...

A apresentação da análise é feita em duas partes: a primeira dedicada ao *bloco do saber* e a segunda ao *bloco do saber-fazer* (ver capítulo 3). Essa distinção em dois blocos é sobretudo funcional: tratamos cada bloco de maneiras diferentes do ponto de vista metodológico. Isso não nos impede de questionar os quatro elementos praxeológicos sempre que necessário.

Iniciamos pelo bloco de saber porque acreditamos que ele dá ao leitor uma entrada reveladora no currículo existente no Brasil na década de 1990, momento em que ocorreu a primeira avaliação de livros didáticos.

A análise é composta por cinco estudos de caso: 1) teoria dos conjuntos; 2) as propriedades da operação de adição; 3) algebrização de tarefas e técnicas; 4) tarefas contextualizadas; e 5) as técnicas de "arme e efetue". Os dois primeiros são tratados no bloco do saber e os outros três no bloco do saber-fazer.

Antes de passar aos resultados gerais de cada estudo de caso, especificamos alguns aspectos históricos importantes do contexto estudado.

Um pouco de história para melhor compreender os dados

Em nosso primeiro contato com os dados empíricos, um aspecto em particular chamou nossa atenção. A primeira avaliação de I_{PNLD} denunciava a repetição dos discursos difundidos pela Reforma da Matemática Moderna nos livros didáticos brasileiros utilizados no início da década de 1990. Lembremos que essa reforma ocorreu no mundo nos anos de 1960. A linguagem, o formalismo e a teoria dos conjuntos foram, portanto, objetos das principais críticas apontadas pela avaliação. Como $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ enfatizou fortemente na época, os centros de pesquisa já haviam observado, há mais de 15 anos, os fracassos do exagero desse movimento.

A Reforma da Matemática Moderna surge pouco antes do golpe de Estado, que em 1964 deu origem à ditadura militar brasileira que durou até 1985. O Brasil então sofreu com a obscuridade de pensamento e críticas sobre a Educação Matemática na década de 1970 (Fiorentini, 1994), período em que a reforma já havia mostrado seu fracasso para o resto do mundo.

> Dois fatores, a nosso ver, foram determinantes dessa realidade: a repressão exercida pelo Regime Militar e, sobretudo, a influência da Pedagogia Tecnicista que era hegemônica nesse período. (Fiorentini, 1994, pp. 285-286)

No período de 1983 a 1990, fim do regime militar, Fiorentini (1994) identifica a criação de uma comunidade nacional de pesquisadores em Educação Matemática. Após a década de 1990, o mesmo autor mostra o fortalecimento dessa comunidade científica, favorecida pelo retorno ao Brasil de vários pesquisadores formados nos EUA, França, Inglaterra e Alemanha.

Acrescentamos que o período de 1985 a 1996 foi dedicado à busca de um novo sistema educacional brasileiro (Romão, 2008), período em que o Ministério da Educação implantou a política "Educação para todos: caminhos para a mudança" (Filgueiras, 2011). Assim, é à medida que o país se redemocratiza que as discussões sobre a qualidade dos livros didáticos se tornam um ponto de debate. O sistema de avaliação promovido pelo $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ surge então como uma necessidade.

Segundo Valente (2009), os livros didáticos foram veículos importantes para a disseminação dos princípios da Reforma da Matemática Moderna. Isso explica o *atraso* dos livros didáticos no início da década de 1990 em comparação com as tendências curriculares globais.

Este exemplo ilustra bem a força da influência da sociedade nos níveis mais baixos de codeterminação. A sociedade brasileira, assim constituída, não permitia mudanças no nível da pedagogia e da disciplina matemática, ao passo que se reivindicava uma evolução a nível internacional.

Em 1997, logo após a primeira avaliação do livro didático (1994), foi publicado o documento oficial "Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN" para o Ensino Fundamental no Brasil. Documento do Ministério da Educação que se tornou referência para discussões curriculares e para a produção de livros didáticos por I_{M}.

Esses novos parâmetros curriculares, mais do que um documento, revelam o novo espírito de uma nova noosfera emergente. Era preciso, portanto, produzir livros compatíveis com essa mudança, missão atribuída ao $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Nesse documento oficial, há um texto intitulado "Breve análise da trajetória das reformas e do quadro atual da educação matemática". Alguns trechos desse texto referem-se à reforma da matemática moderna, conforme mostramos a seguir:

> Ao aproximar a Matemática escolar da Matemática pura, centrando o ensino nas estruturas e fazendo uso de uma linguagem unificadora, a reforma deixou de considerar um ponto básico que viria se tornar seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. No Brasil, a Matemática Moderna foi veiculada principalmente pelos livros didáticos e teve grande influência. (Brasil, 1997, p.20)

Neste mesmo texto, são anunciadas as novas tendências curriculares discutidas a nível internacional.

> Em 1980, o *National Council of Teachers of Mathematics* - NCTM -, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento "Agenda para Ação". Nele destacava-se a resolução de problemas como foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. Essas ideias influenciaram as reformas que ocorreram mundialmente, a partir de então. As propostas elaboradas no período 1980/1995, em diferentes países, apresentam pontos de convergência, como, por exemplo:
>
> • direcionamento do ensino fundamental para a aquisição de competências básicas necessárias ao cidadão e não apenas voltadas para a preparação de estudos posteriores;
>
> • importância do desempenho de um papel ativo do aluno na construção do seu conhecimento;
>
> • ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas;
>
> • importância de se trabalhar com um amplo espectro de conteúdos,incluindo-se, já no ensino fundamental, elementos de estatística, probabilidade e combinatória, para atender à demanda social que indica a necessidade de abordar esses assuntos;
>
> • necessidade de levar os alunos a compreenderem a importância do uso da tecnologia e a acompanharem sua permanente renovação.(Brasil, 1997, pp. 20-21)

Os discursos do $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ são alimentados por esses princípios. O surgimento dessa instituição ocasionou mudanças nos livros didáticos, mas essas mudanças não aconteceram de forma espontânea em consonância com o que estava acontecendo no resto do mundo, como mostraremos mais adiante em nossas análises.

Aspectos gerais do estudo de caso sobre a Teoria dos Conjuntos

A Teoria dos Conjuntos era uma *vulgata* (ver 2.2) nos livros didáticos usados no início dos anos 1990, ou seja, uma prática comum de I_{M}, popularizada na maioria de seus produtos. Isso foi objeto de fortes julgamentos da parte de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ em 1994.

Esses julgamentos, principalmente de natureza proscritiva, nos levaram à hipótese de que os livros didáticos teriam mudado em relação a esse conteúdo. Carecíamos, no entanto, de elementos mais precisos para entender como o campo aditivo era afetado pela existência dessa teoria. A característica bastante geral dos discursos de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ não nos dava em detalhes do estado atual do currículo e, por isso, decidimos visitar os livros didáticos da época.

Nós então examinamos os livros didáticos de nosso acervo, a fim de localizar passagens que nos indicassem a conexão entre a teoria dos conjuntos e o campo aditivo. Isso nos forneceu elementos importantes para caracterizar, do ponto de vista praxeológico, os elementos suscetíveis de mudanças diante das proscrições impostas por $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Com uma melhor compreensão do currículo de 1994, continuamos a revisar os documentos de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$. Constatamos que à medida que as avaliações progrediam, os julgamentos sobre a teoria dos conjuntos eram cada vez menos frequentes, até o momento em que esse objeto desapareceu das avaliações (em 2004). Isso nos levou a especular que o assujeitamento de I_{M} à instituição $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ ocasionou mudanças nos livros didáticos. Isso foi confirmado por uma nova visita aos livros mais recentes de nosso acervo (publicados após 2004). Essas mudanças, é claro, colocaram em prática outras *vulgatas* no ensino do campo aditivo, considerados no momento como mais adequadas (ver 4.1.4).

Por fim, destacamos que as mudanças no conteúdo dos livros didáticos foram impulsionadas pelo sistema de avaliação, embora outras instituições da noosfera já o tivessem reivindicado antes, como a comunidade de pesquisa em Educação Matemática, I_{EM}. Isso mostra que os assujeitamentos são motivados por certos gestos Chevallard (2019), que nesse caso consistem na aprovação ou exclusão de livros didáticos do mercado editorial, que pune, portanto, as *más instâncias* de I_{M}.

Aspectos gerais do estudo de caso sobre as propriedades de adição

Neste estudo de caso, nos concentramos principalmente em um único nível de co-determinação, o do setor, com um interesse particular nas propriedades de adição. Esse interesse se deve aos julgamentos que identificamos por parte de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$.

Esses julgamentos referem-se principalmente às *condições de encontro* pelos alunos com as propriedades do campo aditivo nos anos iniciais. Os discursos de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, de conotação negativa, sugeriam algumas proscrições quanto às escolhas didáticas realizadas no estudo dessas propriedades. Esses discursos designavam, em paralelo, o que era desejado pela instituição avaliadora.

A análise dos documentos de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ nos mostrou que o estudo dessas propriedades ainda é (em 2016) um ponto controverso em relação a aquilo que é produzido por I_{M}. Por esse motivo, as críticas sobre a *razão de ser* dessas propriedades no estudo do campo aditivo é um elemento de crítica ao longo de todas as avaliações. $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$, neste sentido, tem enfatizado o *aspecto de ferramenta* (no sentido de

Douady (1984)) dessas propriedades de forma a tornar inteligível e possível a existência de várias técnicas aritméticas, especialmente aquelas ditas de cálculo mental. Uma *razão de ser* distante do formalismo observado nos livros didáticos.

Após uma primeira análise nos documentos de avaliação, decidimos examinar os livros didáticos começando por aqueles avaliados em 1994. Em seguida, consideramos três coleções que foram classificadas de forma diferente por I_{PNLD} (Não recomendada; Recomendada com restrições; e Recomendada). Como já sugerido pela avaliação, nos deparamos com projetos didáticos muito diferentes. Isso nos trouxe mais compreensão sobre os julgamentos feitos por I_{PNLD}.

Nossa análise continuou tomando como objeto de análise uma dessas coleções, cuja história está atrelada às avaliações. Visitamos, assim, as diferentes edições desta coleção ao longo do tempo.

A análise dessas diferentes edições nos mostrou mudanças importantes no estudo das propriedades de adição. A saber que os livros publicados no início da década de 90 continham, por exemplo, tarefas comunicadas em linguagem algébrica.

> [. . .] prevaleceu a crença de que a introdução de propriedades estruturais das operações, que justificassem logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico, capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos que estivessem subjacentes. (Fiorentini et al., 1993, p. 84)

Esta linguagem desapareceu dos anos iniciais. Este aspecto é também observado em outro estudo de caso, apresentado mais para frente.

Também vimos desaparecer o trabalho feito com as propriedades de adição *como objetos* (no sentido de Douady (1984)). No entanto, esse desaparecimento se deu pela simples retirada dos livros didáticos daquilo que incomodava a instituição de avaliação. O problema é que o que resta do estudo dessas propriedades, o que resiste, é algo estranho com uma *razão de ser* duvidosa.

Essas propriedades são essenciais para dar vida de forma inteligível a certas práxis. No entanto, uma vez que existe um conjunto muito limitado de técnicas matemáticas, essas propriedades não têm razão de existir. É exatamente o que acontece nessa coleção de livros didáticos.

Em resumo, o que percebemos é que o trabalho desses *logos* como *objetos* foi enormemente enfraquecido, sem a compensação da sua participação ativa nas técnicas aritméticas. Notamos, portanto, que a falta de uma diversidade de técnicas de cálculos mentais não oferece condições para que essas propriedades sejam exploradas *como ferramentas*. Isso mostra um dos efeitos (nocivos) da supervalorização dos algoritmos "arme e efetue", que também é assunto de um outro estudo de caso.

Apesar disso, essas propriedades ainda se encontram institucionalizadas no final deste ciclo escolar, embora sem uma *razão de ser* aparente. São elas, então, uma espécie de *monumento*? Estão lá para serem *contempladas*? Ou são elas um símbolo de nostalgia do teoricismo *roubado* pelos novos movimentos da Educação Matemática?

Esses resultados estão particularmente ligados a uma coleção específica de livros didáticos de I_M, mas eles nos revelam possíveis manobras de adaptação dos assujeitamentos noosféricos.

Aspectos gerais do bloco do saber

Retomando o esquema da transposição didática, observamos que o modelo curricular a ser ensinado, o prescrito, é construído à sombra de I_1.

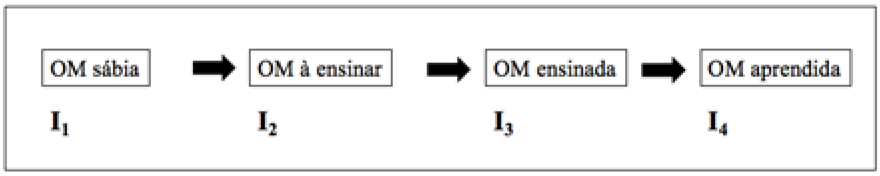


Figura 5.7 – Transposição Didática

A noosfera é então, entre outras coisas, o filtro da cultura (incluindo as manias) da matemática erudita. Um filtro para evitar possíveis danos transpositivos.

A Reforma da Matemática Moderna foi impulsionada pelo desejo de diminuir a distância entre I_1 e I_2 e, consequentemente, a distância entre I_1 e o sistema *stricto sensu*, I_3 e I_4. A história nos mostrou o fracasso dessa escolha. E as noosferas de diferentes sociedades começaram a trabalhar para repensar o currículo, com a participação especial de uma nova instituição emergente, científica, que chamamos de I_{EM}. O problema é que a noosfera brasileira, como apresentamos no início deste capítulo, esteve em grande parte inativa por um período. Uma noosfera como essa não ajuda no processo de *degelo* do currículo (Chevallard, 2019).

I_{EM} participa desse jogo de poder sobre quem decide o quê na noosfera de maneira bastante interessante. Esta instituição de fato tem um lugar especial nas discussões curriculares e é nesse sentido que notamos que I_M recorre à I_{EM} para mostrar seu compromisso com uma noosfera baseada na ciência.

> Novos paradigmas em Educação apontam para a formação de um aluno crítico, capaz de analisar e interpretar o mundo ao seu redor. Levando em conta o papel fundamental da Matemática nesse contexto, esta coleção pretende estabelecer um elo entre a Educação Matemática e a formação do sujeito autônomo e consciente do seu papel de agente transformador da realidade. (Giovanni Jr., 2014a, p. 258, v.4)

Após a reanimação desta noosfera, o currículo voltou a um estado de convulsão. Nos dois estudos de caso que compõem nossas análises do bloco do saber, mostramos isso a partir da caricata Teoria dos Conjuntos e da supervalorização do formalismo, manifestada pela presença de uma linguagem robusta no estudo das propriedades matemáticas.

Esses dois estudos de caso testemunham sobre o impacto dos ostensivos (ver 3.3.5) no bloco de saber. Sem a introdução de certos ostensivos nos anos iniciais, o legado da Matemática Moderna não seria tão explícito nesta fase da escolaridade. A esse respeito, é importante sublinhar que uma das manias da matemática erudita é justamente o afeto por certos ostensivos - e a rejeição de outros.

Um último aspecto a ser sublinhado é que os efeitos do assujeitamento são distintos de um estudo de caso para outro. I_M mudou muito e se alinhou aos julgamentos de I_{PNLD} em relação à Teoria dos Conjuntos, a ponto de não ser mais um objeto de julgamento nas avaliações. Em contraste, este não é o caso do estudo das propriedades de adição, embora os livros didáticos também tenham mudado com o tempo em relação a esse aspecto.

Para avançar nossa apresentação sobre outras tensões curriculares, passamos ao bloco do saber-fazer.

Algumas observações metodológicas sobre o bloco do saber-fazer

Os estudos de caso do bloco saber-fazer têm uma particularidade metodológica em torno da noção de *gerador de tipo de tarefa* (ver 2.3.1), para nós $GT^{+/-}$:

Tabela 5.2 – Gerador de tipos de tarefas$^{+/-}$

$GT^{+/-}$: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* ou *dada sob a forma* "a +/- b = c", onde a, b e c são números naturais, *V1, V2, V3, V4, V5]*				
V1: Ostensivos	*V2*: Ideia da situação	*V3*: Informação desconhecida (?)	*V4*: Os dois números conhecidos	*V5*: Necessidade de realizar agrupamentos

Cada estudo de caso relativo ao bloco do saber-fazer é caracterizado por um olhar atento a alguns dos tipos de tarefas gerados pelo $GT^{+/-}$. Para isso, instanciamos algumas dessas variáveis, ignoramos temporariamente a existência de outras e então consideramos algumas como observáveis. Nossa intenção é destacar o que realmente importa em cada estudo de caso. A este respeito, propomos a noção de *sub-gerador de tipo de tarefa*:

Seja GT : [T, SV] e GT' : [T', SV'].

GT' é um sub-gerador de tipo de tarefas de GT se T' $\subseteq$ *T e SV'* $\subseteq$ *SV*

O primeiro estudo de caso do bloco do saber-fazer é caracterizado pelo seguinte sub-gerador:

Tabela 5.3 – Sub-gerador de tipos de tarefas GT_x

GT_x: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada* ou *dada sob a forma* "? +/- b = c" ou "a +/- ? = c", onde a, b et c são números naturais, *V1*, *V4*]	
V1: *Ostensivos*	*V4*: *Os dois números conhecidos*

Incorporamos no tipo de tarefa principal do gerador uma instanciação da variável V3 (ver 3.1.3). Isso significa que estamos interessados aqui nos tipos de tarefas que possuem uma característica específica: eliminamos de nossa lista todas as tarefas do tipo "a +/- b = ?". Nós temos assim T_x mais específico que $T^{+/-}$, logo $T_x \subset T^{+/-}$. Decidimos também ignorar as variáveis V2 e V5, pois elas não contribuem necessariamente para o entendimento deste estudo de caso. O novo sistema de variáveis é, portanto, mais restrito do que o primeiro. Logo $GT_x \subset GT^{+/-}$.

As escolhas que acabamos de descrever não foram feitas ao acaso. Quando analisamos os discursos de I_{PNLD}, identificamos que as intenções em mudar a práxis encontrada nos livros didáticos repousa em certas características, que podemos expressar por meio de variáveis. Os sub-geradores, portanto, são resultados de análises.

Depois de decidirmos em quais variáveis focar, parte do trabalho analítico consiste em identificar os valores que essas variáveis assumem nos livros didáticos ao longo do tempo. Isso porque, do ponto de vista metodológico, o assujeitamento de I_M a I_{PNLD} eé marcado pelas alterações dos sistemas de variável considerados por I_M.

Os outros dois estudos de caso, relativos a tarefas contextualizadas e à técnica dos algoritmos "armados", são caracterizados pelos seguintes sub-geradores:

Tabela 5.4 – Sub-gerador de tipos de tarefas GT_c

GT_c: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* ou *dada sob a forma* "a +/- b = c", onde a, b et c são números naturais, V2]
V2: Ideia da situação

Tabela 5.5 – Sub-geradores de tipos de tarefas GT_+ et GT_-

GT_+: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* "a + b = ?", onde a, b são números naturais, V4, V5]	
V4: Os dois números conhecidos	*V5: Necessidade de realizar agrupamentos*
GT_-: [Encontrar um valor ausente de uma situação *possível de ser modelizada por* "a - b = ?", onde a, b são números naturais, V4, V5]	
V4: Os dois números conhecidos	*V5: Necessidade de realizar agrupamentos*

A apresentação da origem destes geradores está presente nas análises de cada estudo de caso.

Aspectos gerais do estudo de caso sobre a algebrização de tarefas e técnicas

Uma espécie de justaposição da álgebra e da aritmética é também outra marca do legado da Reformas da Matemática Moderna encontrada em livros didáticos avaliados em 1994. É neste contexto que as tarefas que poderiam ser facilmente realizadas por técnicas puramente aritméticas são realizadas por ferramentas algébricas: "[. . .] eu faço a álgebra na aritmética: é a ferramenta algébrica, e só ela, que me permite esse trabalho aritmético." (Chevallard, 1984, p. 78, tradução nossa). Esta abordagem promove um "formalismo matemático" que *falta* na aritmética (Chevallard, 1989b). Uma mudança neste aspecto é prescrita por I_{PNLD} desde as primeiras avaliações.

Este estudo complementa de alguma forma os outros dois primeiros casos. Para isso, foi necessário, embora modestamente, desenvolver uma reflexão sobre a dialética entre álgebra e aritmética (ver 4.3.1). O estudo realizado nos revelou as tensões curriculares históricas desta dialética, que se fazem ainda presentes nos dias de hoje.

Após os primeiros contatos com os documentos de I_{PNLD} e os livros didáticos de I_M, decidimos delimitar a nossa análise propondo um sub-gerador GT_x com duas variáveis, que passaram a ser os nossos principais observáveis.

Uma vez que este novo gerador foi elaborado, nos engajamos em uma reflexão a priori sobre as praxeologias que ele permite gerar (ver 4.3.2). Esta apresentação retoma e aprofunda nosso modelo de referência. Este exercício foi fundamental para o entendimento dos dados de 1994.

Demos sequência à análise visitando os demais materiais empíricos de 1996 a 2016 para confirmar a mudança esperada pelas avaliações.

Os discursos de I_{PNLD} prescrevem um estudo de longo prazo para a introdução da algebrização no estudo da Matemática. Posicionamento também assumido pela I_{EM} já há algum tempo.

Esta perspectiva de longo prazo torna-se uma restrição para a existência da linguagem e de técnicas algébricas: é apenas nos anos finais do ensino fundamental que os símbolos algébricos devem ser encontrados. Isso não impede, no entanto, o desenvolvimento do *pensamento algébrico* desde os primeiros anos escolares. Segue-se que um dos valores da variável V1 (linguagem algébrica) não tem condição de existência nos anos iniciais sob esta perspectiva.

Desse modo, as técnicas aritméticas não são mais perturbadas pela concorrência com técnicas algébricas. A diversidade dos valores da variável V4 pode então ser uma aposta didática para a existência de múltiplas técnicas de cálculos aritméticos. Porém, a não algebrização não é *condição suficiente* para isso acontecer. O que percebemos na nossa análise é que as instituições tendem a ser muito criativas na busca de meios para limitar essa possível diversidade. Os próximos estudos de caso testemunham nessa direção.

Aspectos gerais do estudo de caso sobre as tarefas contextualizadas

Em 1994, duas críticas de $\mathrm{I_{PNLD}}$ são significativamente presentes na avaliação da maioria dos livros didáticos: a pobreza dos contextos de tarefas matemáticas e a maneira segmentada de estudar as quatro operações. Essa constatação nos levou a considerar o sub-gerador $\mathrm{GT_c}$, que delimitou os dados empíricos a serem analisados.

Para determinar as restrições que pesam sobre a variável V2, foram analisados, em um primeiro momento, todos os documentos de $\mathrm{I_{PNLD}}$ (1994 - 2016). Isso nos permitiu identificar os valores desejáveis desta variável para esta instituição noosférica. Essa análise também permitiu identificar, segundo $\mathrm{I_{PNLD}}$, vulgatas e mudanças de vulgatas nos livros didáticos. Em seguida, para confrontar essa análise, examinamos uma coleção que ilustra o assujeitamento e a resistência em mudar práticas de ensino duradouras.

Esta segunda etapa da análise mostrou a inserção de uma diversidade significativa de contextos por parte de $\mathrm{I_M}$. Por outro lado, constata-se que diversos contextos são *pretextos* para o estudo de objetos matemáticos. A questão é que, para responder às novas demandas impostas por $\mathrm{I_{PNLD}}$, são feitas adaptações nos livros didáticos que não têm poder suficiente para mudar paradigmas de aprendizagem. Isso nos leva a crer que, em alguns casos, a consideração dos contextos nada mais é do que uma *manobra de conformidade* de $\mathrm{I_M}$ face ao assujeitamento de $\mathrm{I_{PNLD}}$.

Este estudo de caso também nos fez questionar sobre a expressão "campo aditivo", que batiza o "setor" dos níveis de co-determinação do nosso modelo de referência

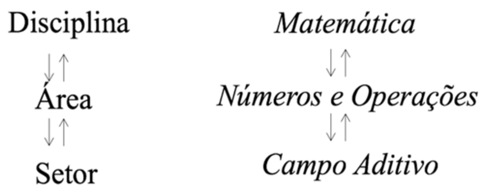


Figura 5.8 – Disciplina, Área e Setor

A questão é que as trajetórias de estudo propostas em alguns livros didáticos promovem o encontro com a adição e o encontro com a subtração, mas não necessariamente com o *campo aditivo*. O termo *campo aditivo*, expressa uma das demandas da instituição avaliadora em relação às tarefas contextualizadas: trabalhar as operações de adição e subtração simultaneamente. Ou seja, há na expressão “campo aditivo” um ponto de vista didático que não é realmente compartilhado por algumas instituições no estudo das operações aritméticas. Apesar disso, optamos por manter o setor nomeado dessa forma sabendo que as instituições podem se organizar de maneiras diferentes, como no caso da coleção analisada:

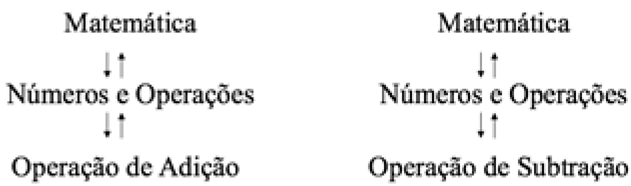


Figura 5.9 – Bifurcação do setor

Um aspecto final e importante que gostaríamos de frisar diz respeito à estruturação hierárquica das variáveis e seus valores. Essa estruturação permitiu modelizar elementos específicos da organização didática (ver 4.4.3).

Aspectos gerais do estudo de caso sobre os algoritmos “armados”

Técnicas com *escopos pragmáticos* vantajosos (ver 3.2.4) correm o risco de serem supervalorizadas pelas instituições. Essa supervalorização tem uma consequência perversa: o empobrecimento do bloco do saber. Várias tecnologias (ver 3.3) podem não ser encontradas se uma diversidade de técnicas não se faz presente na instituição. Por esse e outros motivos, essas técnicas são objeto de atenção e divergência na noosfera. No caso do campo aditivo, elas são os algoritmos “armados” :

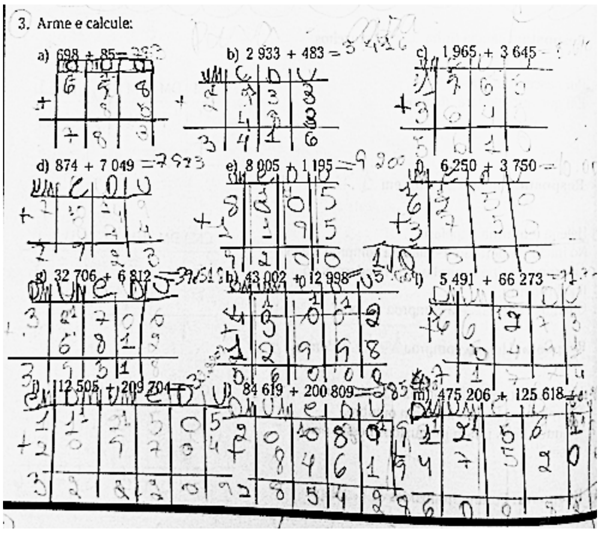


Figura 5.10 – Registro de um aluno em um livro didático (Giovanni, 1989c, v.3, p. 52)

Este estudo de caso surge do fato de I_{PNLD} ter, desde o início das avaliações, um discurso de vigilância face à dominância ocupada pelo ensino destes algoritmos. Esse discurso pode ser visto como uma reação crítica ao que foi e ainda é encontrado nos livros didáticos.

Essa atenção às técnicas de cálculo "armado" é explicada de acordo com (Rinaldi, 2016) pela "passividade cognitiva" que esses algoritmos causam. "É por isso que eles são perigosamente atraentes, tanto que não é incomum que os alunos usem o algoritmo de subtração para encontrar o resultado de 100− 99,95." (Rinaldi, 2016, p. 80, tradução nossa). As instituições de ensino têm responsabilidade pelo favoritismo dessas técnicas.

Para este estudo, analisamos primeiro os discursos de I_{PNLD} do período de 1994 a 2016, em seguida, analisamos uma coleção de livros didáticos avaliados em 1996 e 2016 a fim de buscar os possíveis impactos das avaliações.

A intenção de restringir os dados empíricos a serem analisados nos livros didáticos nos levou a definir dois sub-geradores de $GT^{+/-}$: um destinado à análise das técnicas de adição e outro destinado às técnicas de subtração.

A noção de escopo das técnicas e o estudo da cronogênese das praxeologias a partir das variáveis V4 e V5, estiveram no centro de nossa análise dos livros didáticos. As noções de variável e gerador de tipo de tarefas mostraram mais uma vez sua relevância para refletir sobre as escolhas didáticas de um percurso de estudo.

Os *escopos institucionais* de técnicas são tipos de tarefas em uma instituição (ver 3.2.4). Mostramos nesse estudo de caso que a pluralidade de valores de V4, apresentada em nosso modelo de referência (ver 3.1.4), não é explorada na coleção de livros didáticos analisada. O estudo de caso ilustra então um caso de não conformidade com o que I_{PNLD} sugere. Esta não conformidade resiste/persiste com o tempo. Embora seja verdade que observamos mudanças nas trajetórias de estudo da coleção de 1996 e da coleção de 2016, deve-se notar que essas mudanças não afetam realmente o escopo das técnicas de cálculo "armado", que neste caso é uma restrição ecológica para a existência de outras maneiras de encontrar a soma ou a diferença de dois números.

Observamos também, entretanto, que a existência de certos julgamentos positivos de I_{PNLD} sobre o assunto, nos indica que podemos encontrar outros livros didáticos engajados em um estudo mais plural no nível das técnicas. De todo modo, o espaço reservado aos algoritmos de cálculo "armado" é uma questão que permanece atual na noosfera. Afinal, a *paixão* por esses algoritmos é um sintoma de algum paradigma de ensino, que os fazem, portanto, resistentes.

Aspectos gerais do bloco do saber-fazer

A noosfera, de forma caricatural, é constituída por instituições e sujeitos, por um lado *tradicionais/conservadores/nostálgicos* e por outro por *agitadores/revolucionários/ protestantes*. A noosfera é uma parte da sociedade.

Os modelos dominantes de ensino de uma sociedade estão sujeitos aos julgamentos da sua noosfera. E esses modelos têm a característica de serem resistentes. Talvez uma das razões dessa resistência seja o fato deles terem alcançado certa estabilidade, acompanhada por uma sensação de segurança dos sujeitos que os praticam. Eles também são mais resistentes quando as perturbações provocadas pela noosfera afetam os paradigmas nos quais eles se baseiam.

Quando os *fins educacionais* não são realmente questionados, as mudanças nos modelos dominantes são mera conformidade às demandas de algumas instituições, produzindo assim uma espécie de mudança ilusória. Em contraste, quando as falhas dos modelos dominantes ressoam no nível civilizacional da escala de co-determinação, como no caso dos legados mais fortes do Movimento da Matemática Moderna, notamos menos resistência à mudança curricular.

A análise do bloco do saber-fazer contém uma invariante metodológica importante: a modelagem de sub-geradores de tipos de tarefas. Vale ressaltar mais uma vez que a modelização de sub-geradores é uma etapa da análise, mas também um resultado produzido dos primeiros confrontos com os dados empíricos. Em resumo, cada sub-gerador é um resultado em si mesmo, que produz observáveis que permitem nos levar em direção a outros resultados.

O que é interessante observar é que cada variável do nosso modelo de referência contribuiu de maneira diferente para a análise. A variável "V2: a ideia da situação" não é muito adequada, por exemplo, para caracterizar o escopo das técnicas, ao passo que a estruturação dos seus valores nos forneceu elementos preciosos sobre diferentes organizações didáticas.

Poderíamos completar nossa análise estudando outros casos, como o uso da calculadora ou os ostensivos mobilizados ao longo do estudo do campo aditivo. No entanto, acreditamos que esses cinco estudos de caso, bastante distintos, nos permitiram identificar fenômenos importantes relativos ao assujeitamento das instituições noosféricas, o que nos convida às conclusões e perspectivas do nosso trabalho.

Conclusões e Perspectivas

A Didática, enquanto ciência, "se dedica a estudar as condições e restrições sob as quais as praxeologias começam a viver, migrar, mudar, operar, murchar, desaparecer, renascer, etc., nas instituições humanas." (Chevallard, 2007, p. 719, tradução nossa). O interesse pelas praxeologias encontradas e impedidas de viver nas instituições de ensino oficiais, que determinam o currículo escolar, nos convida a abrir as portas da *noosfera*.

Qual a primeira impressão ao entrar? A noosfera é, como qualquer entidade social, feita de um mosaico de instituições I_n.

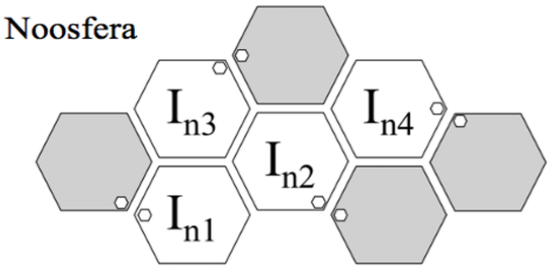


Figura 5.11 – Noosfera

As instituições são, segundo a antropóloga Douglas (2007), entre outras coisas, *convenções*. Formadas por pessoas, esses dispositivos sociais desenvolvem formas de pensar e fazer específicos em relação a determinados objetos "o" (Chevallard, 2002), modelizado por R(I, o).Nós então definimos em nosso trabalhos as *relações noosféricas* como $R(I_n, R(I_e, o_c))$ (ver 1.1.2).

Uma observação importante é que as relações noosféricas derivam dos julgamentos "¿" que as instituições I_n fazem sobre $R(I_e, o_c)$, ou seja, $I_n \vdash R(I_e, o_c) =$ "¿". Julgar é uma característica primária das instituições noosféricas. Consideramos quatro valores para esses julgamentos: descritivo, prescritivo, proscritivo e sugestivo. Esses quatro valores indicam respectivamente o que *é*, o que *deveria ser*, o que não *deveria ser* e qual *poderia ser* a relação $R(I_e, o_c)$ de acordo com I_n.

Quanto mais buscávamos compreender o funcionamento da noosfera, mais observávamos que as peças do mosaico que a constituem estão ligadas entre si. Assim como as pessoas estão sujeitas às instituições, existe um assujeitamento entre as instituições, que restringe e condiciona os modos de fazer e pensar em cada uma delas. Isso constitui uma extensão da noção de assujeitamento (Chevallard, 2003) proposto pela TAD.

$$R(I_{n1,}o) \cong R(I_{n2,}o), \text{ onde } o = R\ (I_e\ , o_c)$$

Se I_{n1} é assujeitada à I_{n2}, então a relação do primeiro com um determinado objeto "o" tende a estar em conformidade com a relação do segundo com este mesmo objeto "o", não por acaso, mas por influência direta. Essa *influência direta* pode se traduzir pelos gestos de $\mathrm{I_{n2}}$. A não conformidade entre essas relações ilustra a liberdade de $\mathrm{I_{n1}}$ e motiva o adjetivo de *má instituição* de $\mathrm{I_{n1}}$ segundo $\mathrm{I_{n2}}$.

A estabilidade curricular (sempre momentânea) e as mudanças curriculares podem ser interpretadas como efeitos dos assujeitamentos entre as instituições noosféricas.

Nosso trabalho estuda esse jogo de poder entre as instituições da noosfera que visa mudar o currículo. Mais precisamente, estuda como esse jogo de assujeitamento impacta o currículo e contribui para sua evolução e mudanças. Isso nos levou à seguinte hipótese de trabalho: *a propensão para mudanças curriculares pode ser melhor compreendida pela análise dos assujeitamentos das instituições que compõem a noosfera.*

Para o estudo da tese, restringimos nossa análise à noosfera da sociedade brasileira, e focamos nossa atenção em duas instituições particulares, $\mathrm{I_M}$ et $\mathrm{I_{PNLD}}$. Sobre isso, vale frisar que a noosfera é constituída, tal como ela é, de acordo com a sociedade que observamos. As *peças do mosaico* não podem ser montadas senão levando em consideração as especificidades desse nível da escala de co-determinação.

Sem entrar em detalhes sobre o contexto estudado, gostaríamos de lembrar que $\mathrm{I_{PNLD}}$ é uma instituição singular, específica da sociedade brasileira. Ela foi criada para julgar deliberadamente $\mathrm{I_M}$, estabelecendo assim uma relação de assujeitamento entre essas duas instituições. Este julgamento é um reflexo do que $\mathrm{I_{PNLD}}$ prevê e deseja para as instituições de ensino, $\mathrm{R(I_e, o_c)}$.

$$\mathrm{I_{PNLD}} \vdash \mathrm{R(I_e, o_c)} = ¿$$

$$\mathrm{I_{PNLD}} \vdash \mathrm{R(I_M, o_c)} = ¿$$

$\mathrm{I_{PNLD}}$ perturba, voluntariamente, as condições e restrições sobre as quais $\mathrm{I_M}$ produz os livros didáticos, o que nos leva às *problemáticas possibilística e impossibilística* (Chevallard, 2011):

> Dado um determinado conjunto de condições $\mathrm{C_{PNLD}}$ e um determinado conjunto de restrições $\mathrm{K_{PNLD}}$ as quais a instituição $\mathrm{I_M}$ está sujeita, que entidades praxeológicas é possível que a instituição de $\mathrm{I_M}$ cconceba? Ou ainda, que entidades praxeológicas é provável que $\mathrm{I_M}$ não produza?
>
> $$\Re(\mathrm{K_{PNLD}}, \mathrm{C_{PNLD}}, \wp, \mathrm{I_M})$$
>
> $$\text{non-}\Re(\mathrm{K_{PNLD}}, \mathrm{C_{PNLD}}, \wp, \mathrm{I_M})$$

Os julgamentos de $\mathrm{I_{PNLD}}$ otêm portanto por objetivo afetar as praxeologias $\wp$ que $\mathrm{I_M}$ propõe em seus livros didáticos, sabendo que:

— O julgamento descritivo predominantemente positivo sobre $\wp_0$ (instanciação de $\wp$) reforça a existência de $\wp_0$. O julgamento descritivo predominantemente negativo de $\wp_0$ insinua uma prescrição ou proscrição de $\wp_0$.

— O julgamento prescritivo visa dar vida a uma nova praxeologia $\wp_0$'. Isso pode ser condicionado pelo desaparecimento de uma antiga praxeologia $\wp_0$.

— O julgamento proscritivo sobre a praxeologia $\wp_0$ ambiciona o desaparecimento de $\wp_0$.

— Qualquer julgamento sugestivo valida a possibilidade de existência de $\wp_0$.

Essa variedade de julgamentos e seus efeitos foram observados nos cinco estudos de caso que compõem nossa análise. Quando as condições e restrições ($\mathrm{K}_{\mathrm{PNLD}}$, $\mathrm{C}_{\mathrm{PNLD}}$) não são suficientemente levadas em consideração por I_{M}, certas praxeologias $\wp_0$ indesejáveis por $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ são significativamente encontradas nos livros didáticos: $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ então intervém de forma punitiva, seja por um gesto de desaprovação de uma coleção de livros didáticos, seja por um gesto de crítica nos resultados da avaliação.

Estudamos essas duas instituições com base no que elas tornam público por meio de suas produções, ou seja, os documentos de avaliação de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ e os livros didático no caso de I_{M}. Consideramos essas instituições como "caixas pretas", co que significa que ignoramos deliberadamente seus modos de funcionamento.

Um ponto que nos questionou sobre nossa modelização foi o fato de existir uma diversidade de livros didáticos produzidos por I_{M}. Segundo Douglas (2007), as instituições conferem certa uniformidade aos arranjos sociais. Essa diversidade de livros didáticos, resultando em diferentes relações com os objetos de ensino, nos sugere a existência de "sub-instituições" ao interior de I_{M}, que são elas próprias instituições. Essas sub-instituições têm suas próprias convenções, que compartilham por sua vez convenções comuns com I_{M}. Falar sobre uniformidade dependerá então do nível de onde estamos olhando.

Essa característica de diversidade e inclusão é comum na sociedade. Um exemplo: a escola, a turma do primeiro ano, os seis meninos que se sentam no fundo da sala. *João* ocupa, respectivamente, as posições de aluno da escola, de aluno do primeiro ano e de líder do grupo de seis meninos: a qualidade de ser um *bom* ou *mau* sujeito atribuída a João pode não ser a mesma em cada uma dessas instituições. No entanto, o grupo de seis rapazes está sujeito às condições e restrições do primeiro ano, que por sua vez também está sujeito à escola.

I_{M} é, nesse sentido, uma instituição noosférica com a característica de ser composta por diferentes "sub-instituições". No entanto, não tínhamos interesse nem meios para identificá-las como tais em nosso trabalho. Essa é uma das limitações da tese.

Essas sub-instituições, que talvez pudessem ser caracterizadas por diferentes paradigmas de ensino e aprendizagem, levam à produção de coleções distintas de livros didáticos. Claro, algumas dessas instituições são mais afetadas pelos julgamentos de $\mathrm{I_{PNLD}}$ do que outras. Visto que nosso estudo analisou os efeitos de "ação-reação" aem torno dos resultados das avaliações dos livros didáticos, nós acabamos por consequência nos concentrando sobretudo nas *más sub-instituições*.

Entretanto, como em qualquer instituição, há relações com certos objetos de ensino que são semelhantes para (quase) todas as sub-instituições de $\mathrm{I_M}$ à certains objets sont similaires. Essa homogeneidade, que muda com o tempo, é referida em nosso trabalho pelo termo *vulgata* (Chervel, 1990). Identificar vulgatas é sem dúvida um aspecto importante de qualquer pesquisa que use livros didáticos como um recurso para questionar o currículo. No entanto, acreditamos que também se faz importante identificar práticas singulares, incluindo aquelas que resistem aos incentivos de mudança da noosfera.

> Ninguém que esteja empenhado em explicar a ação coletiva pode descartar superficialmente os formidáveis problemas enfrentados por uma pequena comunidade que tenta continuar existindo tal como é. (Douglas, 2007, p. 36)

Outros níveis da escala de co-determinação determinam os limites de nossa pesquisa. A este respeito, a nossa análise é centrada nos Anos Iniciais, na disciplina de Matemática, na área dos Números e Operações e o setor Campo Aditivo.

O período que analisamos, de 1994 a 2016, também é um aspecto limitante de nossos dados empíricos. Vimos que o início desse período é marcado por uma espécie de despertar da noosfera brasileira após um estado de letargia. Um novo contexto político na sociedade brasileira, bem como o surgimento nesta sociedade de $\mathrm{I_{EM}}$, uma instituição científica de educação matemática, estão por trás dessa mudança de estado. $\mathrm{I_{EM}}$ se tornou uma espécie de instituição de referência para esta noosfera sobre o que é *bom* e *ruim* para instituições de ensino.

Os julgamentos de $\mathrm{I_{PNLD}}$ são, neste sentido, muitas vezes apoiados pelo que diz $\mathrm{I_{EM.}}$ Com efeito, atribuir a esta instituição um certo poder normativo sobre as questões do ensino e da aprendizagem da matemática, embora não seja esse o objetivo de $\mathrm{I_{EM}}$, é um fenômeno conhecido em várias sociedades modernas. Afinal, as instituições científicas são muitas vezes consideradas como produtoras de verdades absolutas.

Vale dizer também que diversas outras instituições fazem parte do mosaico da noosfera brasileira, com assujeitamentos mais ou menos visíveis do que esse estabelecido entre as duas instituições que analisamos.

Os níveis inferiores da escala de co-determinação nos levaram a algumas reflexões teóricas sobre o objeto matemático. Quanto a isso, o modelo praxeológico tem sido nossa principal ferramenta para a construção de um *método de medição* ppara interpretar o currículo e mudanças curriculares.

O modelo praxeológico se tornou por um tempo em nossa pesquisa um objeto de estudo em si mesmo. No âmbito da modelização do T4tel (ver 2.3), questões sobre a natureza dos elementos do quarteto praxeológico foram debatidas e respostas parciais foram lançadas ao longo do trabalho.

As primeiras questões que nos colocamos referem-se à modelagem de um tipo de tarefa, daí o uso da noção de gerador de tipo de tarefas proposta por Chaachoua et Bessot (2016). Para levar em consideração diferentes níveis de granularidade na descrição deste elemento praxeológico, projetamos um gerador do campo aditivo $GT^{+/-}$, com um sistema composto por cinco variáveis.

Levantamos a hipótese de que algumas mudanças praxeológicas podem ser expressas em termos de mudanças no sistema de variáveis em jogo, o que foi confirmado por alguns estudos de caso, em particular aqueles relativos ao bloco do saber-fazer. Durante as análises, notamos a relevância metodológica de focar nossa atenção em uma parte mais restrita das variáveis de $GT^{+/-}$. Definimos então a noção de sub-gerador, noção que se revelou uma ferramenta estratégica para lançar luz sobre fenômenos didáticos. Com a ideia de sub-geradores de tipos de tarefas, fomos capazes em um primeiro momento de melhor enquadrar algumas não conformidades entre I_M e I_{PNLD}, para então, em um segundo momento, realizar uma análise comparativa entre livros didáticos de diferentes períodos com base na mudança nos valores das variáveis. Acreditamos que o interesse dessas noções teóricas e dos meios metodológicos que elas permitem colocar em prática vai muito além da problemática da nossa tese.

Chaachoua et Bessot (2016) atribuem três funções às variáveis no estudo praxeológico: 1) Gerar sub-tipos de tarefas; 2) Caracterizar o escopo das técnicas; e 3) Descrever praxeologias pessoais. Seguindo nossas análises e conforme sugerem Kaspary, Chaachoua, et Bessot (2020), acrescentamos uma quarta função vinculada à dimensão da organização didática: 4) A caracterização de percursos de estudo.

Sobre esta quarta função, retornamos aqui a dois estudos de caso em particular. O primeiro é o das tarefas contextualizadas, onde notamos que a forma como certas variáveis e valores são estruturados pelas instituições determina a organização didática de como estudamos um determinado objeto. Para exemplificar, tomemos duas configurações de variáveis que representam dois caminhos de estudo possíveis:

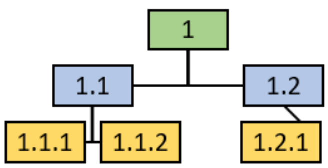


Figura 5.12 – Configuração I

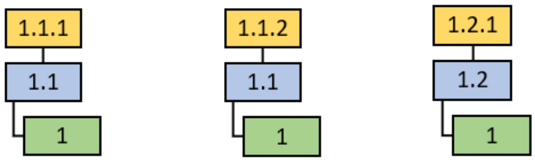


Figura 5.13 – Configuração II

Nessas duas configurações, o encontro com o objeto "1" é diferente. Na configuração I, começamos pelo estudo do objeto "1" e depois estudamos suas nuances. Na configuração II, primeiro encontramos casos especiais e, em seguida, os associamos a um nível genérico. A estruturação do sistema de variáveis pode, portanto, ser uma forma de o pesquisador expressar como a atividade de estudo é organizada pela instituição.

O segundo estudo de caso ao qual desejamos retornar é o da valorização dos algoritmos de cálculos "armados", onde a segunda função "Caracterizar o escopo das técnicas" foi explorada para analisar a evolução praxeológica. Este trabalho revelou dinâmicas praxeológicas (Kaspary, Chaachoua, et Bessot, 2020) importantes, que permitem melhor compreender as condições e restrições da génese e da vida das técnicas nas instituições.

Note que cada variável considerada em nosso modelo praxeológico de referência tornou possível analisar uma especificidade de nosso estudo. Isso se deve à natureza das variáveis, que torna uma mais adequada do que outra para explicar certos aspectos da atividade de estudo.

A modelagem das técnicas também deu origem a reflexões. Assumimos que esse elemento praxeológico pode ser descrito por um conjunto de tipos de tarefas (Chaachoua, 2018) (ver 2.3.2). Para estabelecer um nível de descrição relevante para o nosso modelo de referência, introduzimos a noção do *núcleo de uma técnica* (ver 3.2.2), como parte do conjunto de tipos de tarefas que caracterizam várias maneiras relativamente semelhantes e sem as quais as técnicas associadas não existiriam..

As noções de ostensivo e não ostensivo também estiveram no centro de muitas de nossas discussões. Em (Kaspary, 2014; Kaspary et Bittar, 2014, 2018), vimos o interesse em questionar o escopo das técnicas, associando-as às valências instrumentais dos ostensivos (ver 2.2.2). Ainda nesses trabalhos, apontamos o interesse de estudar a evolução praxeológica manifestada pela redução ostensiva das técnicas. No estudo da tese, a análise dos ostensivos nos mostrou igualmente aspectos essenciais para melhor compreendermos a atividade humana.

Essas noções teóricas nos permitiram interpretar os julgamentos de $\mathrm{I}_{\mathrm{PNLD}}$ e estudar os efeitos desses julgamentos nos livros didáticos produzidos por I_{M}. Com os cinco estudos de caso e graças a essas ferramentas teóricas, fomos capazes de identificar mudanças praxeológicas nos livros didáticos, bem como numerosas não mudanças.

Algumas dessas mudanças são, no entanto, uma espécie de *manobra de conformidade*, uma espécie de *disfarce* dde antigas práticas de ensino. As razões de ser dessas mudanças tornam-se então duvidosas e seu estudo assume "a aparência de um ritual justificado apenas pelo costume" (Chevallard, 1997, p. 09, tradução nossa).

As não mudanças, por outro lado, mostram resistências derivadas da liberdade institucional e da solidez dos paradigmas de ensino e aprendizagem da matemática.

É preciso ousar dizer que, pelo seu funcionamento capitalista, $\mathrm{I_M}$ é obrigado a levar em consideração o que é um *bom* livro para instituições de ensino *reais*, não sendo este livro necessariamente um *bom* livro para $\mathrm{I_{PNLD}}$. Uma clara tensão entre as demandas da avaliação de $\mathrm{I_{PNLD}}$ e as expectativas das instituições de ensino restringe e condiciona a produção de livros didáticos. Um paradoxo é imposto: os livros didáticos devem servir ao real e transformar o real. O resultado dessa tensão é que em alguns casos as leis do funcionamento didático do sistema *stricto sensu* orientam a produção dos livros didáticos tanto, senão mais, do que as avaliações. Afinal, é preciso aceitar a impotência da noosfera diante das restrições da realidade do funcionamento dos sistemas didáticos.

Bibliographie

R. A. Alves : Entre a ciência e a sapiência : o dilema da educação. Edições Loyola, São Paulo, SP, 2a. ed édn, 1999. ISBN 978-85-15-01900-7. (Cité sur les pages 38 et 254)

M. Artaud : Besoins praxéologiques de la profession : le cas des grandeurs et de leur mesure. In 20e école d'été de didactique des mathématiques, Autrans, Grenoble, 2019. (Cité à la page 12)

G. Bachelard : La formation de l'esprit scientifique : contribution à une psychanalyse de la connaissance objective. Bibliotheque des textes philosophiques. Librairie Philosophique Vrin, Paris, 2004. ISBN 978-2-7116-0045-8. OCLC : 551742905. (Cité sur les pages 37 et 254)

M. Bittar : A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. Zetetike, 25(3):364, déc. 2017. ISSN 2176-1744. URL https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8648640. (Cité sur les pages 2 et 248)

P. Bolea, M. Bosch, J. Garcia, J. Gascón, L. Ruiz et T. Sierra : Analyse de "La mesure en CM1" d'après la Théorie anthropologique du didactique. In Sur la théorie des situations didactiques. Questions, réponses, ouvertures... Hommage à Guy Brousseau., Collection : Recherches en Didactique des Mathématiques. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble, 2005. (Cité à la page 78)

M. Bosch et J. Gáscon : La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. p. 107 – 122, Grenoble, 2005. La Pensée Sauvage. (Cité sur les pages 10, 18, 32, 66, 77, 158, 251 et 259)

M. Bosch et Y. Chevallard : La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'estude et problematique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(01):77 – 124, 1999. (Cité sur les pages 41, 48, 49, 55, 79, 82 et 159)

BRASIL : Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos. MEC - Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, 1994. (Cité sur les pages 21, 22, 28, 69, 116, 117, 118, 120, 123, 124, 125, 137, 140, 143, 147, 148, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 192, 193, 194, 203, 209, 210 et 300)

BRASIL : Guia de Livros didáticos de 1ª a 4ª séries : livros recomendados. MEC - Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, 1996. (Cité sur les pages 129, 130 et 138)

BRASIL : Parâmetros Curriculares Nacionais : Matemática. MEC/SEG, Brasília, 1997. (Cité sur les pages 50, 113, 114, 168, 189, 190, 191 et 264)

BRASIL : Guia de Livros didáticos : 1ª a 4ª séries. MEC - Ministério da Educação e do Desporto, Brasília, 1998a. (Cité sur les pages 129, 130 et 138)

BRASIL : Parâmetros curriculares nacionais : terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental : Matemática. MEC/SEG, Brasília, 1998b. (Cité à la page 168)

BRASIL : Guia de livros diáticos : 1ª à 4ª séries. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2000. (Cité sur les pages 71 et 130)

BRASIL : Guia de livros didáticos : 1ª a 4ª séries. Matemática et Ciências. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2002. (Cité sur les pages 69, 131, 137, 138, 196, 197, 210 et 300)

BRASIL : Guia do livro didático 2007. Matemática. Séries/Anos iniciais do Ensino Fundamental. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2006. (Cité sur les pages 26, 68, 138, 185, 197, 198, 210 et 211)

BRASIL : Guia de Livros Didáticos. PNLD 2010. Alfabetização Matemática e Matemática. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2009. (Cité sur les pages 185, 197, 211, 212 et 231)

BRASIL : Guia de Livros Didáticos : PNLD 2013 : Alfabetização matemática e Matemática - Ensino Fundamental, Anos iniciais. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2012. (Cité sur les pages 138, 197, 211 et 212)

BRASIL : Guia de livros didáticos : PNLD 2016 : Alfabetização Matemática e Matemática : ensino fundamental anos iniciais. MEC - Ministério da Educação, Brasília, 2015. (Cité sur les pages 69, 70, 139, 197, 198, 200, 203, 205, 212 et 213)

G. BROUSSEAU : Les avatars du diagramme de Venn. Premiers pas de la Didactique., 1970. (Cité à la page 121)

G. BROUSSEAU : Problèmes de didactique des décimaux. Recherches en Didactique des Mathématiques, 2/1(Grenoble : La Pensée Sauvage):37 – 127, 1981. (Cité à la page 52)

G. Brousseau : D'un problème à l'étude a priori d'une situation didactique. In Seconde école d'été de didactique des mathématiques, École des éducateurs spécialisés - Olivet, 1982. (Cité à la page 44)

R. Campos Lins et J. Giménez : Perpectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Papirus, Campinas (SP), 1997. ISBN 978-85-308-0450-3. OCLC : 803800951. (Cité à la page 167)

J. Carneiro : 50 anos do AI-5 : negar ditadura é ignorância histórica, diz pesquisador. BBC NEWS BRASIL, déc. 2018. URL `https://www.bbc.com/portuguese/brasil-46496289`. (Cité à la page 15)

J. B. P. Carvalho : The Brazilian mathematics textbook assessments. ZDM, 50(5):773–785, sept. 2018. ISSN 1863-9690, 1863-9704. URL `http://link.springer.com/10.1007/s11858-018-0949-x`. (Cité sur les pages 22, 23, 24, 27, 29 et 72)

H. Chaachoua : T4tel un cadre de reference didactique pour la conception des EIAH. In Actes du séminaire de didactique des mathématiques de l'ARDM, p. 05 – 22, Paris, 2018. Julia Pilet & Céline Vendeira. URL `https://ardm.eu/wp-content/uploads/2018/10/Préactes-ARDM-fevrier2018.pdf`. (Cité sur les pages 42, 52, 55, 56, 92 et 281)

H. Chaachoua et A. Bessot : Introduction de la notion de variable dans le modèle praxéologique. In Actes du 5e congrès pour la Théorie Antrophologique du Didactique., Castro-Urgiales, 2016. (Cité sur les pages 52, 53, 243, 244 et 280)

H. Chaachoua et C. Comiti : L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. In Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action. IUFM de l'Académie de Montpellier, Montpellier, 2010. ISBN 978-2-9537146-0-9. OCLC : 908432420. (Cité à la page 19)

A. Chervel : História das disciplinas escolares : reflexões sobre um campo de pesquisa. p. 177 – 229, 1990. (Cité sur les pages 19, 30, 31, 159, 242 et 279)

Y. Chevallard : La recherche, l'enseignement et le reste. p. 149 – 156, Montpellier, 1980. (Cité à la page 112)

Y. Chevallard : Pourquoi la transposition didactique ? In Séminaire de didactique et de pédagogie des mathématiques de l'IMAG, p. 167 – 194, Grenoble, 1982. (Cité sur les pages 9, 13 et 188)

Y. Chevallard : Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège (1ère partie). Petit x, 05:5 – 94, 1984. (Cité sur les pages 166, 177, 186 et 270)

Y. Chevallard : La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Recherches en didactique des mathématiques. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1. éd édn, 1985. ISBN 978-2-85919-078-1. OCLC : 257525638. (Cité sur les pages 6, 9 et 250)

Y. Chevallard : Les programmes et la transposition didactique - Illusions, contraintes et possible. In Bulletin de l'APMEP, p. 32 – 50, 1986. (Cité sur les pages 9, 109, 246 et 262)

Y. Chevallard : Quelques représentations touchant le concept de représentation. In Actes - Seconde rencontre nationale sur la didactique de l'histoire, de la géographie et des sciences sociales, INRP, p. 111–137, Paris, 1987. (Cité sur les pages 30 et 47)

Y. Chevallard : Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. In Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique., p. 211 – 236, Grenoble, 1989a. (Cité sur les pages 7 et 8)

Y. Chevallard : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège : deuxième partie. Petit x, 19:43 – 72, 1989b. (Cité sur les pages 11, 92, 166, 171, 172, 173, 186 et 270)

Y. Chevallard : Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège : troième partie. Petit x, 23:05 – 38, 1990. (Cité à la page 187)

Y. Chevallard : Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique. In Actes du Séminaire de l'Associazione Mathesis, p. 190–200, Turin, 1994. (Cité sur les pages 47 et 50)

Y. Chevallard : Omettre ou transmettre ? Les choix curriculaires et leurs enjeux. In Actes ARDM, p. 78 – 90, Houlgate, 1997. (Cité sur les pages 8, 32, 189, 240, 245, 251 et 282)

Y. Chevallard : À propos des TICE : transmission et appropriation du savoir, nouveaux rôles de l'enseignant, organisation de l'établissement. Toulouse, 1998a. (Cité sur les pages 55, 93 et 94)

Y. Chevallard : Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : l'approche anthropologique. In Actes de l'école d'été de la Rochelle, p. 91 – 120, Université de la Rochelle : IREM de Clermont-Ferrand., 1998b. In R. Noirfalise. (Cité sur les pages 2, 34, 41, 43, 44, 45, 56, 57, 66, 78, 104, 248 et 259)

Y. Chevallard : Questions vives, savoirs moribonds : le problème curriculaire aujourd'hui. In Actes du colloque « Défendre et transformer l'école pour tous », Marseille, 1998c. URL http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=19. (Cité sur les pages 1 et 247)

Y. Chevallard : Organiser l'étude - Ecologie & Regulation. In XIe école d'été de didactique des mathématiques, p. 41–56, Grenoble, 2002. La Pensée Sauvage. (Cité sur les pages 18, 38, 39, 239 et 276)

Y. Chevallard : Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In Rapport au savoir didactiques, p. 81–104. Paris, 2003. ISBN 2-907164-65-1. URL https://www.xarg.org/ref/a/2907164651/. (Cité sur les pages 6, 7, 8, 240, 250 et 276)

Y. Chevallard : Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In Congrès international sur la théorie anthropologique du didactique, p. 705 – 746, Baeza (Espagne), 2007. L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García. (Cité sur les pages 11, 17, 239 et 276)

Y. Chevallard : La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. In 15e école d'été de didactique des mathématiques, Clermont-Ferrand, France., 2009. (Cité sur les pages 17, 18 et 55)

Y. Chevallard : UE SCEE2 : Théorie de l'apprentissage et didactique pluridisciplinaire. 2010. (Cité sur les pages 5, 206 et 250)

Y. Chevallard : Les problématiques de la recherche en didactique à la lumière de la TAD. In Séminaire de l'ACADIS, Marseille, 2011. (Cité sur les pages 11, 34, 35, 165, 241, 243, 253 et 277)

Y. Chevallard : Observer le didactique : quoi ? comment ? et pourquoi ? In UMR Éducation, formation, travail, savoirs (EFTS), Toulouse, 2017. (Cité sur les pages 7, 11, 12 et 252)

Y. Chevallard : Some sensitive issues in the use and development of the anthropological theory of the didactic. In au CITAD6 : 6e congrès international de la Théorie Anthropologique du Didactique, Autrans, environs Grenoble, 2018. (Cité sur les pages 11, 14 et 245)

Y. Chevallard : The curriculum problem and the paradigm of questioning the world, in Mathematics and beyond. Belaterra, en Espagne, 2019. (Cité sur les pages 11, 158, 265 et 267)

A. Choppin : História dos livros e das edições didáticas : sobre o estado da arte. Educação e Pesquisa, 30(3):549–566, déc. 2004. ISSN 1517-9702. URL http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1517-97022004000300012&lng=pt&tlng=pt. (Cité sur les pages 24 et 28)

S. Coppé et C. Houdement : Résolution de problèmes a l'école primaire française : perspectives curriculaire et didactique. In Colloque de la COPIRELEM, France, 2009. URL https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959613. (Cité à la page 188)

M.-C. Croset et H. Chaachoua : Une réponse à la prise en compte de l'apprenant dans la TAD : la praxéologie personnelle. Recherches en Didactique des Mathématiques,, 36(2):161 – 194, 2016. (Cité sur les pages 172 et 232)

L. R. Dante : Ápis : Alfabetização Matemática, vol. 01. Ática, São Paulo, 2011a. (Cité sur les pages 29, 93, 133, 134 et 300)

L. R. Dante : Ápis : Alfabetização Matemática, vol. 02. Ática, São Paulo, 2011b. (Cité sur les pages 183 et 300)

L. R. Dante : Ápis : Matemática, vol. 05. Ática, São Paulo, 2011c. (Cité sur les pages 184 et 300)

L. R. Dante : Ápis : Matemática, vol. 04. Ática, São Paulo, 2011d. (Cité sur les pages 184 et 300)

R. Douady : De la didactique des mathématiques a l'heure actuelle. Cahier de didactique des mathématiques, (6), 1984. URL http://docs.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS00003.pdf. (Cité à la page 266)

M. Douglas : Como as instituições pensam. Edusp, São Paulo, 2007. ISBN 978-85-314-0455-9. OCLC : 298928509. (Cité sur les pages 239, 242, 276, 278 et 279)

R. Duval : Ecarts Semantiques et Coherence Mathématique : introduction aux problèmes de congruence. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 1(IREM de Strasbourg):7 – 25, 1988. (Cité sur les pages 86 et 87)

R. Duval : Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives., 05:37–65, 1993. (Cité à la page 47)

D. Falcão : Editoras de livro didático vão à Justiça. Folha de São Paulo, mai 1996. URL https://www1.folha.uol.com.br/fsp/1996/5/21/cotidiano/1.html. (Cité sur les pages 23 et 24)

J. M. Filgueiras : Os processos de avaliação de livros didáticos no Brasil (1938-1984). Doutorado em Educação : História, Política, Sociedade, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC - SP, São Paulo, 2011. (Cité sur les pages 111 et 263)

D. Fiorentini : Rumos da pesquisa brasiliera em educação matemática : o caso da produção científica em cursos de pós-graduação. Thèse de doctorat, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, São Paulo, 1994. (Cité sur les pages 111 et 263)

D. Fiorentini, M. n. Miorim et A. Miguel : Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar. Pro-position, 04(01):78 – 91, 1993. (Cité sur les pages 157, 166, 167, 180 et 266)

T. M. Garcia et M. T. Carneiro Soares : Matemática : educação e o desenvolvimento do senso crítico : 1ª série, vol. 01. Editora do Brasil, São Paulo, 1989a. (Cité sur les pages 125 et 300)

T. M. Garcia et M. T. Carneiro Soares : Matemática : educação e o desenvolvimento do senso crítico : 2ª série, vol. 01. Editora do Brasil, São Paulo, 1989b. (Cité sur les pages 148, 149 et 300)

T. M. Garcia et M. T. Carneiro Soares : Matemática : educação e o desenvolvimento do senso crítico : 4ª série, vol. 01. Editora do Brasil, São Paulo, 1989c. (Cité sur les pages 149 et 300)

J. Gascón : Los modelos epistemológicos de referencia como instrumento de emancipación de la didáctica y la historia de las matemáticas. Educación Matemática, 2014. (Cité à la page 66)

J. Gascón et P. Nicolás : Economía, ecología y normatividad en la teoría antropológica de lo didáctico. Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, 21, juin 2019. ISSN 1983-3156, 15165388. URL https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/42538. (Cité à la page 101)

M. Gaspar : Avaliação divide educadores. Folha de São Paulo, mai 1996. URL https://www1.folha.uol.com.br/fsp/1996/5/21/cotidiano/4.html. (Cité à la page 23)

J. R. Giovanni : A conquista da Matemática, vol. 01. FTD, São Paulo, 1989a. (Cité sur les pages 144, 204, 300 et 301)

J. R. Giovanni : A conquista da Matemática, vol. 04. FTD, São Paulo, 1989b. (Cité sur les pages 145, 147 et 300)

J. R. Giovanni : A conquista da Matemática, vol. 03. FTD, São Paulo, 1989c. (Cité sur les pages 145, 146, 147, 202, 235, 236, 237, 273, 300 et 301)

J. R. Giovanni et J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : teoria e aplicação, vol. 01. FTD, São Paulo, 1992a. (Cité sur les pages 152, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 225, 300 et 301)

J. R. Giovanni et J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : teoria e aplicação, vol. 03. FTD, São Paulo, 1992b. (Cité sur les pages 152, 222, 232, 300 et 301)

J. R. Giovanni et J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : teoria e aplicação, vol. 04. FTD, São Paulo, 1992c. (Cité sur les pages 232 et 301)

J. R. Giovanni et J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : a + novinha, vol. 03. FTD, São Paulo, 2005a. (Cité sur les pages 154 et 300)

J. R. Giovanni et J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : a + novinha, vol. 04. FTD, São Paulo, 2005b. (Cité sur les pages 154 et 300)

J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática, vol. 04. FTD, São Paulo, 2014a. (Cité sur les pages 160, 202, 228, 267 et 301)

J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : alfabetização matemática, vol. 02. FTD, São Paulo, 2014b. (Cité sur les pages 204, 205, 226, 227 et 301)

J. R. Giovanni Jr. : A conquista da Matemática : alfabetização matemática, vol. 03. FTD, São Paulo, 2014c. (Cité sur les pages 229, 233 et 301)

Imenes, Jakubo et Lellis : Matemática ao vivo, 2ª série. Scipione, São Paulo, 1993. (Cité sur les pages 160 et 300)

S. Jolivet : Modèle de description didactique, de ressources d'apprentissage en mathémaiques, pour l'indecation et des services EIAH. Thèse de doctorat, Université Grenobles Alpes, Grenoble, 2018. (Cité sur les pages 48 et 82)

D. Kaspary : Análise da proposta de ensino de uma coleção de livros didáticos para as operações de adição e subtração dos números naturais. Mémoire de Master, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brésil, 2014. (Cité sur les pages 39, 42, 79, 85, 86, 245, 255, 260 et 281)

D. Kaspary et M. Bittar : A redução ostensiva no estudo das operações de adição e de subtração em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais. Caminhos da Educação Matemática em Revista/ On line, 02(01):03 – 16, 2014. (Cité sur les pages 245 et 281)

D. Kaspary et M. Bittar : Ostensivos como ingrediente primário do estudo da evolução praxeológica. In A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO : princípios e fundamentos, p. 395 – 410. EDITORA CRV, 1 édn, 2018. ISBN 978-85-444-2229-8. (Cité sur les pages 49, 245 et 281)

D. Kaspary, H. Chaachoua et A. Bessot : Qu'apporte la notion de portee d'une technique a l'etude de la dynamique praxeologique ? Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 25:343 – 269, 2020. (Cité sur les pages 57, 58, 60, 174, 244, 245, 280 et 281)

S. Magina, T. Campos, T. Nunes et V. Gitirana : Repensando adição e subtração : contribuições da Teoria dos Campo Conceituais. PROEM, São Paulo, 1 édn, 2001. (Cité sur les pages 79 et 260)

C. Maréchal : Effets des contraintes institutionnelles sur les pratiques enseignantes dans l'enseignement spécialisé. Une analyse didactique à partir du cas de l'introduction à l'addition. Thèse de doctorat, University of Geneva, Genève, 2010. (Cité sur les pages 79, 81, 82, 83, 85, 86 et 260)

Ministère de l'éducation français : Éduscol : Informer et accompanher les professionnels de l'éducation - Mathématiques, 2016. URL https://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/20/7/RA16_C4_MATH_representer_N.D_566207.pdf. (Cité à la page 51)

N. R. Munzón, M. Bosch et J. Gascón : El problema didáctico del álgebra elemental : Un análisis macro-ecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. Journal of Research in Mathematics Education, 4(2):106, juin 2015. ISSN 2014-3621. URL http://hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/1386. (Cité sur les pages 166 et 167)

F. Murakawa et C. Araújo : Vélez quer alterar livros didáticos para « resgatar visão » sobre golpe. Valor econômico, avr. 2019. URL https://valor.globo.com/politica/noticia/2019/04/03/velez-quer-alterar-livros-didaticos-para-resgatar-visao-sobre-golpe.ghtml. (Cité à la page 16)

R. Neyret : Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les Instituts universitaires de formation des maitres. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble, 1995. (Cité sur les pages 2, 20 et 248)

L. Passos, A. Fonseca et M. Chaves : Alegria de Saber : Matemática, vol. 02. Editora Scipione, São Paulo, 1991. (Cité sur les pages 122, 181 et 300)

L. Passos, A. Fonseca et M. Chaves : Alegria de Saber : Matemática, vol. 03. Editora Scipione, São Paulo, 1992a. (Cité sur les pages 120, 121, 141, 142 et 300)

L. Passos, A. Fonseca et M. Chaves : Alegria de Saber : Matemática, vol. 01. Editora Scipione, São Paulo, 1992b. (Cité sur les pages 122 et 300)

L. Passos, A. Fonseca et M. Chaves : Alegria de Saber : Matemática, vol. 04. Editora Scipione, São Paulo, 1992c. (Cité sur les pages 141, 179, 180 et 300)

G. Pimentel et D. Vilela : Contribuições para uma história do livro didático no Brasil : um estudo do PNLD. Recife, Brésil, 2011. (Cité sur les pages 35 et 253)

A.-M. Rinaldi : Place et rôle des technologies dans l'enseignement et l'apprentissage du calcul soustractif en CE2 : proposition d'ingénierie. Thèse de doctorat, l'Université Sorbonne Paris et l'Université Paris Diderot, Paris, 2016. (Cité sur les pages 79, 86, 90, 102, 104, 105, 123, 209, 234, 260 et 273)

J. E. Romão : Globalização e reforma educacional no brasil (1985-2005). Revista Iberoamericana De Educación, p. 111 – 127, 2008. (Cité sur les pages 111 et 263)

N. Ruiz-Munzón, Y. Matheron, M. Bosch et J. Gascón : Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. Recherches en Didactique des Mathématiques, (Enseignement de l'algébre élémentaire, Bilan et perspective.), 2012. (Cité à la page 166)

J. Santos : Relações saber-poder : discursos, tensões e estratégias que re(orientam) a constituição do livro didático de matemática. Thèse de doctorat, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, Brésil, 2019. (Cité sur les pages 19, 20, 24, 25, 26, 27 et 30)

T. l. S. Sierra Delgado, M. Bosch et J. Gascón : El Cuestionamiento Tecnológico-Teórico en la Actividad Matemática : el caso del algoritmo de la multiplicación. Boletim de Educação Matemática, 27:805 – 828, 2013. (Cité à la page 155)

D. M. X. d. B. Souza et M. A. d. Silva : O dispositivo pedagógico do currículo-brinquedo de matemática, marcado pela dimensão de gênero, na produção de subjetividades. Reflexão e Ação, 26(2):149–164, mai 2018. ISSN 1982-9949, 0103-8842. URL https://online.unisc.br/seer/index.php/reflex/article/view/11747. (Cité à la page 29)

F. Tempier : Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. 86:59–90., 2010. (Cité sur les pages 19, 67, 102, 103 et 105)

M. Teresa, M. do Carmo, M. Elisabete et A. Coelho : Caracol : matemática : 2ª série, vol. 01. Scipione, São Paulo, 2001. (Cité sur les pages 183 et 300)

W. R. Valente : Livro didático e educação matemática : uma história inseparável. Zetetike, 16 (2), oct. 2009. URL https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894. (Cité sur les pages 111 et 263)

G. Vergnaud : L'enfant, la mathématique et la réalité. Collection Exploration Recherches en sciences de l'éducation, 1981. (Cité sur les pages 79, 84, 85, 86, 87, 190 et 260)

G. Vergnaud : La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques., 10:133–170, 1990. (Cité sur les pages 47, 79, 84, 98, 190, 194, 203 et 260)

F. Wozniak : Conditions et contraintes de l'enseignement de la statistique en classe de seconde générale. Un repérage didactique. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon I, Lyon, France, 2005. (Cité sur les pages 10 et 243)

N. Zúñinga : Uma análise das repercussões do Programa Nacional do Livro Didático no Livro Didático de Matemática. Thèse de doctorat, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brèsil, 2007. (Cité sur les pages 27, 35 et 253)

Corpus de manuels

Alves, W. M. de C. (1999a). Matemática com a turma dos nove (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Alves, W. M. de C. (1999b). Matemática com a turma dos nove (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Bueno, A. M. (2003). Pensar e Viver : Matemática (Vol. 04). São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2011a). Ápis : Alfabetização Matemática (Vol. 03). São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2011b). Ápis : Alfabetização Matemática (Vol. 02). São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2011c). Ápis : Alfabetização Matemática (Vol. 01). São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2011d). Ápis : Matemática (Vol. 05). São Paulo : Ática.

Dante, L. R. (2011e). Ápis : Matemática (Vol. 04). São Paulo : Ática.

Garcia, T. M., & Carneiro Soares, M. T. (1989a). Matemática : Educação e o desenvolvimento do senso crítico : 1ª série (Vol. 01). São Paulo : Editora do Brasil.

Garcia, T. M., & Carneiro Soares, M. T. (1989b). Matemática : Educação e o desenvolvimento do senso crítico : 2ª série (Vol. 01). São Paulo : Editora do Brasil.

Garcia, T. M., & Carneiro Soares, M. T. (1989c). Matemática : Educação e o desenvolvimento do senso crítico : 4ª série (Vol. 01). São Paulo : Editora do Brasil.

Garcia, T. M., & Carneiro Soares, M. T. (1998). Matemática : Educação e o desenvolvimento do senso crítico : 4ª série (Vol. 01). São Paulo : Editora do Brasil.

Giovanni, J. R. (1989a). A conquista da Matemática (Vol. 04). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R. (1989b). A conquista da Matemática (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R. (1989c). A conquista da Matemática (Vol. 03). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R. (1992). A conquista da Matemática (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Fleitas, O. (1982a). A conquista da Matemática (02 éd., Vol. 03). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Fleitas, O. (1982b). A conquista da Matemática (02 éd., Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Fleitas, O. (1982c). A conquista da Matemática (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (1992a). A conquista da Matemática : Teoria e aplicação (Vol. 04). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (1992b). A conquista da Matemática : Teoria e aplicação (Vol. 03). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (1992c). A conquista da Matemática : Teoria e aplicação (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (1992d). A conquista da Matemática : Teoria e aplicação (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2004a). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2004b). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2005a). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 03). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2005b). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2005c). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni, J. R., & Giovanni Jr., J. R. (2005d). A conquista da Matemática : A + novinha (Vol. 04). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2008a). A conquista da Matemática Júnior (Vol. 05). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2008b). A conquista da Matemática Júnior (Vol. 03). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2008c). A conquista da Matemática Júnior (Vol. 04). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2008d). A conquista da Matemática Júnior : Alfabetização matemática (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2008e). A conquista da Matemática Júnior : Alfabetização matemática (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2014a). A conquista da Matemática (Vol. 04). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2014b). A conquista da Matemática (Vol. 05). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2014c). A conquista da Matemática : Alfabetização matemática (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2014d). A conquista da Matemática : Alfabetização matemática (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Giovanni Jr., J. R. (2014e). A conquista da Matemática : Alfabetização matemática (Vol. 03). São Paulo : FTD.

Imenes, Jakubo, & Lellis. (1993a). Matemática ao vivo, 2ª série. São Paulo : Scipione.

Imenes, Jakubo, & Lellis. (1993b). Matemática ao vivo, 3ª série. São Paulo : Scipione.

Imenes, Jakubo, & Lellis. (1993c). Matemática ao vivo, 4ª série. São Paulo : Scipione.

Imenes, Jakubo, & Lellis. (2000). Matemática ao vivo, 1ª série (7° éd.). São Paulo : Scipione.

Passos, L., Fonseca, A., & Chaves, M. (1991). Alegria de Saber : Matemática (Vol. 02). São Paulo : Editora Scipione.

Passos, L., Fonseca, A., & Chaves, M. (1992a). Alegria de Saber : Matemática (Vol. 04). São Paulo : Editora Scipione.

Passos, L., Fonseca, A., & Chaves, M. (1992b). Alegria de Saber : Matemática (Vol. 03). São Paulo : Editora Scipione.

Passos, L., Fonseca, A., & Chaves, M. (1992c). Alegria de Saber : Matemática (Vol. 01). São Paulo : Editora Scipione.

Pires, C., & Nunes, M. (2000a). Matemática no Planeta Azul (Vol. 02). São Paulo : FTD.

Pires, C., & Nunes, M. (2000b). Matemática no Planeta Azul (Vol. 01). São Paulo : FTD.

Teresa, M., do Carmo, M., Elisabete, M., & Coelho, A. (2001). Caracol : Matemática : 2ª série (Vol. 01). São Paulo : Scipione.

Corpus des documents d'évaluation des manuels

Brasil. (1994). Definição de Critérios para Avaliação dos Livros Didáticos. Brasília : MEC - Ministério da Educação e do Desporto.

Brasil. (1996). Guia de Livros didáticos de 1ª a 4ª séries : Livros recomendados. Brasília : MEC - Ministério da Educação e do Desporto.

Brasil. (1998). Guia de Livros didáticos : 1ª a 4ª séries. Brasília : MEC - Ministério da Educação e do Desporto.

Brasil. (2000). Guia de livros diáticos : 1ª à 4ª séries. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Brasil. (2002). Guia de livros didáticos : 1ª a 4ª séries. Matemática et Ciências. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Brasil. (2006). Guia do livro didático 2007. Matemática. Séries/Anos iniciais do Ensino Fundamental. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Brasil. (2009). Guia de Livros Didáticos. PNLD 2010. Alfabetização Matemática e Matemática. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Brasil. (2012). Guia de Livros Didáticos : PNLD 2013 : Alfabetização matemática e Matemática-Ensino Fundamental, Anos iniciais. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Brasil. (2015). Guia de livros didáticos : PNLD 2016 : Alfabetização Matemática e Matemática : Ensino fundamental anos iniciais. Brasília : MEC - Ministério da Educação.

Table des figures