Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge

Ratha Loeng

Université de Paris

Ecole doctorale ED623 : Savoirs, Sciences, Education

Laboratoire de Didactique André Revuz (LDAR)

Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge

Par Ratha Loeng

Thèse de doctorat de **Didactique des disciplines/Mathématiques**

Dirigée par Laurent Vivier
Et par Corine Castela

Présentée et soutenue publiquement le 19 septembre 2019

Devant un jury composé de :

Pierre Arnoux, PU, Université d'Aix-Marseille, Président du jury
Carl Winsløw, Professeur, Université de Copenhague, Rapporteur
Patrick Gibel, Maître de Conférences HDR, Université de Bordeaux, Rapporteur
Rosa Elvira Páez Murillo, Professeur, Université Autonome de la Ville de Mexico, Examinatrice
Alain Kuzniak, PU émérite, Université Paris Diderot, Examinateur
Laurent Vivier, Maître de Conférences HDR, Université Paris Diderot, Directeur de thèse
Corine Castela, Maître de Conférences émérite HDR, Université de Rouen, Co-directrice de thèse

Titre : Les fonctions sinus et cosinus dans le secondaire en France et au Cambodge

Résumé :

Les thèmes « Trigonométrie » et « Fonctions trigonométriques » sont intéressants mais peu traités en didactique des mathématiques, notamment dans le contexte français. Ils sont pourtant présents de longue date dans les curriculums français et cambodgien. Nous nous intéressons à l'apprentissage par les élèves de ces thèmes mathématiques dans l'enseignement secondaire, ainsi qu'aux difficultés de compréhension qui leurs sont liées.

Les objets d'étude du secondaire « cosinus et sinus d'un angle géométrique », « cosinus et sinus d'un nombre réel », « cosinus et sinus d'un angle orienté » et « fonctions cosinus et sinus usuelles d'une variable réelle » constituent des notions délicates du point de vue mathématique autant que didactique : il y a des changements de cadres, des changements d'objets mathématiques (grandeurs « angle » et « longueur » – et leurs mesures – nombres réels) avec les mêmes signes « cos » et « sin » utilisés pour désigner des objets d'étude différents. Nous nous focalisons sur les passages entre les différents cadres, sur les difficultés des élèves dans l'apprentissage, et en particulier, sur le passage de la trigonométrie du cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle, en France, en Terminale Scientifique (correspondant au programme de Première « spécialité Mathématiques » en vigueur à partir de la rentrée 2019) et en 11^{e} au Cambodge (correspondant à la Première en France).

Pour notre étude, nous nous appuyons principalement sur l'organisation praxéologique de la *Théorie Anthropologique du Didactique*. Nous déterminons trois organisations mathématiques locales (OML) correspondant à la trigonométrie du triangle, à la trigonométrie du cercle et enfin aux fonctions trigonométriques à partir de l'étude de curriculums français et cambodgiens d'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire, auxquelles nous associons un travail sur une sélection de manuels. Nous présentons une théorie mathématique permettant de justifier, construire et coordonner rigoureusement les trois OML. Puis nous élaborons, à l'aide des outils d'analyse des tâches de la *Double Approche didactique et ergonomique*, un questionnaire portant sur les trois OML déterminées, destiné à des élèves de Terminale Scientifique, afin d'évaluer les effets de l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire. L'étude des curriculums, l'étude mathématique et le questionnaire, dans les contextes français et cambodgien, nous conduisent à concevoir, à l'aide des outils d'analyse de la structuration des milieux de la *Théorie des Situations Didactiques*, une situation didactique se focalisant sur la notion de périodicité afin de faire découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus via un registre graphique, au niveau Terminale Scientifique en France et au niveau 11^{e} au Cambodge.

Les résultats sur l'ensemble de notre travail de recherche prouvent les difficultés de compréhension chez les élèves sur ces deux thèmes via les trois OML et révèlent les obstacles didactique et épistémologique dans l'enseignement et l'apprentissage des objets cosinus et sinus ainsi que des objets mathématiques qui les accompagnent. Des recherches ciblées, se focalisant sur les deux obstacles indiqués précédemment, du côté des élèves et du côté des enseignants, pourront conduire à une organisation didactique permettant d'éviter l'obstacle didactique dans l'enseignement et l'apprentissage des deux thèmes dans le secondaire.

Mots clefs :

Trigonométrie ; Fonctions sinus et cosinus ; Notion de périodicité ; Théorie Anthropologique du Didactique ; Double Approche ; Théorie des Situations Didactique ; Difficultés de compréhension des élèves

Title: The sine and cosine functions in secondary school in France and Cambodia

Abstract:

The themes "Trigonometry" and "Trigonometric Functions" are interesting but not very well covered in mathematics didactic, especially in the French context. However, they have long been present in French and Cambodian curricula. We are interested in students' learning of these mathematical themes in secondary education, as well as the difficulties of understanding related to them.

The study objects of secondary school, namely "cosine and sine of a geometric angle", "cosine and sine of a real number", "cosine and sine of an oriented angle" and "usual cosine and sine functions of a real variable", constitute both mathematical and didactical difficulties: there are changes in settings, changes in mathematical objects (quantities "angle" and "length" – and their measurements – real numbers) with the same signs "cos" and "sin" used to designate different study objects. We focus on transitions between different settings, on students' difficulties in learning, and in particular on the switch between the trigonometry of the trigonometric circle and the cosine and sine functions of a real variable, in French Terminale Scientifique (grade 12) (corresponding to the Première (grade 11) "Spécialité Mathématiques" curriculum in force for the new school year in September 2019) and in grade 11 in Cambodia (corresponding to the Première in France).

For our study, we mainly rely on the praxeological organization of the *Anthropological Theory of the Didactic*. We determine three local mathematical organizations (LMO) corresponding to the trigonometry of the triangle, the trigonometry of the circle and the trigonometric functions. These LMOs arise from the study of French and Cambodian curricula pertaining to trigonometry, sine and cosine functions in secondary school, along with analyzes of a selection of textbooks. We present a mathematical theory to justify, construct and rigorously coordinate the three LMOs. Then, using the task analysis tools of the *didactic/ergonomic Double Approach*, we elaborate a questionnaire on the three determined LMOs. This is intended for grade 12 students, in order to evaluate the effects of the teaching trigonometry, sine and cosine functions in secondary school. The curricula study, the mathematical study and the questionnaire, in the French and Cambodian contexts, lead us to conceive, using the milieus structuration analysis tools from the *Theory of Didactic Situations*, a didactical situation focusing on the notion of periodicity aiming to discover the notions of sine and cosine functions via a graphical register, both in grade 12 in France and in grade 11 in Cambodia.

The results on the whole research show students' difficulties in understanding these two themes via the three LMOs and reveal both a didactical and an epistemological obstacle in the teaching and learning of the cosine and sine objects as well as the mathematical objects that accompany them. Carrying out targeted research by focusing on the mentioned abode obstacle, on the students' side and on the teachers' side, will lead to a didactical organization allowing to avoid the teaching and learning didactical obstacle of the two themes in secondary school.

Keywords:

Trigonometry; Sine and cosine functions; Notion of periodicity; Anthropological Theory of the Didactic; Double Approach; Theory of Didactic Situations; Students' difficulties of understanding

Remerciements

Le travail de thèse n'est pas du tout un travail simple à réaliser. C'est un travail qui prend du temps, de l'énergie morale et physique et qui demande un gros investissement tant de la doctorante que de ses directeurs de thèse, depuis le premier jour jusqu'à l'achèvement. La doctorante a besoin d'un grand soutien ainsi que d'encouragement de la part de la famille, des collègues et des personnes qui s'engagent dans ce parcours de formation doctorale.

Je remercie infiniment :

- l'Ambassade de France au Cambodge ainsi que Campus France à Paris ;
- mes co-directeurs de thèse, M. Laurent VIVIER et Mme Corine CASTELA ;
- les membres de jury : le président du jury M. Pierre ARNOUX ; les rapporteurs de thèse M. Carl WINSLØW et M. Patrick GIBEL ; les examinateurs M. Alain KUZNIAK, Mme Rosa Elvira PÁEZ MURILLO ;
- M. Pierre ARNOUX, professeur de mathématiques à l'Université d'Aix-Marseille pour son soutien, son encouragement, ses conseils et qui m'a encouragée à prendre la décision de poursuivre mes études supérieures dans la formation de master puis dans la formation de doctorat en didactique des mathématiques, en France ;
- Mme Pascale BANAKAS, ses élèves et le lycée Sainte Louise à Paris, en France ;
- Mme Yaël BARANES, ses élèves et le lycée Merkaz Hatorah Filles au Raincy, en France ;
- M. Bunnaroth CHHO, M. Hong LOV, leurs élèves et le lycée Preah Monivong à Battambang, au Cambodge ;
- M. Kao KOV, ses élèves et le lycée Samdech Euv à Battambang, au Cambodge ;
- Mme Marie-Jeanne PERRIN et M. Marc ROGALSKI pour leurs conseils dans mon travail de thèse ;
- la bibliothèque de l'IREM à Paris 7 ainsi que le bibliothécaire M. Jérôme BARBERON ;
- l'école doctorale ED623, le LDAR et les chercheurs du LDAR ;
- les doctorant(e)s dans le LDAR, et en particulier les doctorant(e)s du même bureau 5002 au 5^{e} étage du bâtiment Sophie Germain, ainsi que Stéphane, Sophie, Noëmie ;
- mes élèves que j'ai rencontrés et avec qui j'ai travaillé au cours de ma carrière professionnelle d'enseignante de mathématiques dans le secondaire au Cambodge depuis le 01 octobre 2001 ;
- mes parrains Bernard et Muriel MICHEL, ainsi que leur famille, qui m'ont parrainée depuis juillet 1997 pour que je puisse finir, dans de bonnes conditions, ma Licence de mathématiques à la Capitale Phnom Penh ;
- M., Mme Guy et Louisette POITOU, ainsi que leur famille, pour leur grand soutien, leurs encouragements et leurs lecture et relecture de mon travail de thèse ;
- mes parents et mes quatre sœurs-frères.

Finalement, j'aimerais dédier ce travail de thèse à ma maman Nhan CHOEUNG qui est partie dans un autre monde le 11 novembre 2017.

Table des matières

Liste des tableaux

Chapitre 5

Liste des figures

Chapitre 1

Chapitre 2

Chapitre 5

Introduction

La trigonométrie est importante et utile, avec des applications directes dans des situations réelles que l'on retrouve dans les programmes d'enseignement des mathématiques du secondaire avec notamment le calcul des longueurs (longueurs/distances inaccessibles), des angles, des aires, des surfaces et des volumes d'un solide, etc. De plus, elle est un outil/objet important dans d'autres disciplines comme par exemple pour les sciences physiques avec notamment les mouvements oscillants, l'électricité, l'optique, les ondes électromagnétiques, l'astronomie, etc.
En analyse, les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions de base dans l'étude des séries de Fourrier, outil fondamental pour l'étude des fonctions périodiques dans l'analyse harmonique.

Dans les deux institutions, française et cambodgienne, du secondaire, la trigonométrie est déclinée en trois thèmes : *Trigonométrie du triangle, Trigonométrie du cercle trigonométrique* et *Fonctions trigonométriques,* se situant respectivement dans le domaine de la géométrie euclidienne, celui de la géométrie repérée et celui de l'analyse ; et, il y a certainement des passages de l'un vers l'autre dans cet ordre, sur le temps long, à travers les cinq dernières années dans le secondaire en France (de la quatrième à la Terminale Scientifique) et les trois années du lycée au Cambodge. C'est le point de départ de notre réflexion.
Malgré l'importance de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques dans les curriculums, ces thèmes sont peu traités en didactique des mathématiques, notamment dans le contexte français. Ils sont pourtant présents de longue date dans les curriculums français et cambodgien. Nous nous intéressons plutôt à l'apprentissage par les élèves de ces concepts mathématiques dans l'enseignement secondaire, ainsi qu'à leurs difficultés de compréhension.

Nous pensons d'emblée, après une première étude rapide des curriculums, aux objets d'étude suivants : cosinus et sinus d'un angle géométrique (angle aigu/obtus), cosinus et sinus d'un nombre réel, cosinus et sinus d'un angle orienté, fonctions cosinus et sinus usuelles d'une variable réelle. Nous faisons une première hypothèse que ces objets d'étude ne sont pas simples à appréhender par les élèves dans le secondaire, point de départ de la réflexion. Il y a des changements de cadres d'étude, des changements d'objets d'étude (tels que grandeurs « angle » et « longueur » – et leurs mesures – nombres réels) ; de plus, les mêmes signes « cos » et « sin » sont utilisés pour désigner des objets d'étude différents. Nous nous focalisons sur les passages entre les différents cadres, sur les difficultés des élèves dans l'apprentissage, et en particulier, sur le passage de la trigonométrie du cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle.

La réflexion sur les objets d'étude indiqués précédemment nous mène à démarrer, notre recherche de thèse, principalement par **l'état des lieux** avec nos deux premières questions de recherche (QR1-chapitre 2, avec *l'étude des rapports institutionnels* avec laquelle nous réalisons trois Organisations Mathématiques Locales (OML) existantes, avec les textes officiels et des manuels ; QR2-chapitre 4, avec *l'étude des rapports personnels* via un questionnaire).

L'étude praxéologique des programmes d'études a été, dans un premier temps, très large en prenant en compte toutes les praxéologies où intervenaient les notions de sinus et cosinus. Cette étude large a ensuite permis d'élaborer un questionnaire, composé de six exercices, il avait pour objectif d'identifier la réussite, l'échec et les difficultés des élèves, relativement aux connaissances enseignées relevant des trois OML dans leurs premières versions étendues. On prenait en particulier en compte les notions de dérivation ou de parité.

Toutefois, les résultats au questionnaire ont permis de restreindre l'étude. D'une part cela était nécessaire pour la réalisation de la thèse et, d'autre part, les résultats sur les transitions entre les trois cadres, et notamment de la trigonométrie du cercle trigonométrique aux fonctions trigonométriques en analyse, étaient suffisamment riches pour nos recherches. Ainsi, l'étude praxéologique a été restreinte aux transitions entre les trois OML et l'analyse du questionnaire a porté sur les trois premiers exercices dont l'analyse *a posteriori* présente un intérêt potentiel faisant émerger les objets mathématiques déjà étudiés par des élèves dans les trois OML.

Parallèlement aux résultats obtenus aux études des rapports institutionnels (l'étude praxéologique mathématique des programmes et des manuels) et des rapports personnels (questionnaire), il a émergé le besoin d'une théorie mathématique sur laquelle est fondé l'enseignement. Nous avons alors besoin d'une « théorie » pour créer une OM Régionale (OMR) mettant de la cohérence dans des éléments d'objets mathématiques qui sont dispersés, même chez les enseignants, ainsi que pour pouvoir créer une OM qui servira d'OM de référence. Ce besoin est ainsi devenu le besoin d'une ***théorie mathématique*** (QR3-chapitre 3) mettant en cohérence les trois OML. Dans notre étude, nous considérons les trois OML (programmes et manuels) et la théorie mathématique déterminées comme une OMR de référence qui nous sert de points d'appui pour l'interprétation des savoirs et des savoir-faire proposés par les programmes et les manuels étudiés, ainsi que la réflexion sur les perspectives visant à l'amélioration de l'enseignement et de l'apprentissage de la trigonométrie et des fonctions cosinus et sinus dans le secondaire.
Ainsi, les résultats obtenus aux trois premières questions de recherche nous mènent à faire le choix de nous concentrer sur « *les transitions entre les trois OML* plus que sur l'enseignement des fonctions » ; plus précisément, nous nous focalisons sur le passage de la trigonométrie du cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus. Nous réfléchissons alors sur la construction des connaissances mathématiques pour introduire les notions de fonctions cosinus et sinus, via le registre graphique dans le cadre fonctionnel, afin de nourrir la réflexion dans l'appropriation par l'élève des objets de savoir visés, en réalisant une situation d'enseignement (QR4-chapitre 5).
Ainsi, notre question de recherche s'est au fur et à mesure structurée suivant les résultats obtenus aux quatre questions de recherche indiquées précédemment. Elle pose finalement la question suivante : **La trigonométrie du triangle et la trigonométrie du cercle trigonométrique sont-elles un appui ou un obstacle pour l'introduction des fonctions sinus et cosinus à la fin du secondaire, en France et au Cambodge ?**

Nous décrivons maintenant notre thèse qui est structurée par six chapitres.

Le chapitre 1 présente la problématique, la méthodologie générale ainsi que nos questions de recherche.

Le chapitre 2 porte sur l'étude de curriculums français et cambodgien, dans le but de déterminer notamment l'OML dans les trois contextes : Trigonométrie dans un triangle, Trigonométrie dans le cercle trigonométrique et Fonctions trigonométriques, avec l'étude de la praxéologie mathématique de la *Théorie Anthropologique du Didactique*. Principalement, nous nous focalisons sur les ***praxéologies mathématiques à enseigner*** (textes officiels et manuels), avec l'étude des rapports institutionnels à la trigonométrie et aux fonctions sinus et cosinus. Nous réalisons donc trois OML existantes :

(1) OML portant sur la « Trigonométrie du triangle », située dans le domaine de la géométrie euclidienne, relative aux relations trigonométriques dans le triangle rectangle et dans un triangle quelconque ;

(2) OML portant sur la « Trigonométrie du cercle trigonométrique », située dans le domaine de la géométrie repérée, relative aux relations trigonométriques dans le cercle trigonométrique ;

(3) OML portant sur les « Fonctions trigonométriques », située dans le domaine de l'analyse, relative aux fonctions numériques associées aux objets « cosinus » et « sinus ».

L'étude praxéologique mathématique des manuels montre qu'il semble que certains éléments d'objets mathématiques ne soient pas explicités ; autrement dit, il semble qu'il puisse y avoir un manque de cohérence entre les trois OML dans les manuels étudiés. Nous voulons préciser que les résultats obtenus à nos deux premières questions de recherche (QR1-chapitre 2 et QR2-chapitre 4) nous mènent à réfléchir sur la nécessité de construire une théorie mathématique (QR3-chapitre 3) mettant en cohérence les trois OML.

Le chapitre 3 porte sur l'étude mathématique, dans le but de déterminer une « théorie mathématique », visant les concepts de fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle avec *approche géométrique* (Isométries vectorielles dans le plan euclidien – Fonctions cosinus et sinus d'un angle orienté) et *approche analytique* (Fonction exponentielle complexe – Fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle) ; et pour finir, nous faisons un lien entre les deux approches géométrique et analytique en nous appuyant sur une paramétrisation du cercle unité pour mesurer les angles orientés d'une part, et d'autre part, pour mettre ces mesures en relation avec la mesure de la longueur des arcs de cercle. La théorie mathématique permet de justifier rigoureusement les trois organisations mathématiques locales. Cette théorie mathématique réalisée propose une structuration régionale susceptible de construire une vision cohérente utile aux enseignants. C'est un appui indispensable pour repenser le curriculum et la formation des enseignants. Mais le travail de transposition pour les enseignants reste à faire. Pour notre étude, il s'agit d'une référence permettant de comprendre les enjeux de l'enseignement de la trigonométrie (chapitre 1) en mettant en évidence des *nécessités* et des marges de manœuvre, notamment dans l'introduction des fonctions trigonométriques. En outre, il s'agit d'une prise de recul nécessaire pour mieux comprendre les réponses des élèves (chapitre 4) ainsi que pour élaborer une ingénierie didactique dont on donne un préliminaire au chapitre 5.

Le chapitre 4 porte sur l'étude des rapports personnels (élèves) via un questionnaire. Le questionnaire élaboré, dans le contexte français à partir des trois OML déterminées, s'appuie sur les « connaissances enseignées » aux élèves de Terminale Scientifique pour évaluer les effets de l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire ainsi que pour connaître les connaissances effectives des élèves dans les trois OML avec l'étude praxéologique mathématique des manuels, à l'aide des outils d'analyse des

tâches, de la *Double Approche didactique et ergonomique* et de la *Théorie de l'activité*, dont les analyses permettent d'expliciter les difficultés cognitives des élèves. Concernant l'analyse *a posteriori*, nous nous focalisons plutôt sur l'identification de grands types d'erreurs commises par certains élèves et sur ce que les élèves ont appris en termes de connaissances disponibles, notamment. Nous repérons plus précisément les connaissances qui interviennent dans notre questionnaire au niveau disponible. Précisons que nous interprétons les résultats en termes d'obstacles. Les résultats du dépouillement du questionnaire révèlent clairement des ***obstacles didactique et épistémologique*** liés aux connaissances enseignées dans les trois OML. Nous pouvons dire que les difficultés des élèves, liées aux savoirs appris, proviennent probablement de changements de cadres et d'OML peu (ou pas) explicités. Nous faisons une deuxième hypothèse : les difficultés des élèves résultent du fait que, dans les manuels de mathématiques du secondaire et sans doute dans les pratiques des enseignants, le lien entre les trois OML est largement implicite et ce serait plus simple, pour les élèves, SANS les angles orientés.
On peut penser au « radian » : son introduction peu explicitée renforce-t-elle la confusion entre les objets ***angle***, ***mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique*** et ***nombre réel*** ? Ainsi, une troisième hypothèse porte sur le radian que nous considérons comme le cœur de ces obstacles didactique et épistémologique relativement à deux OML portant respectivement sur la trigonométrie du cercle trigonométrique et sur les fonctions trigonométriques.

Le chapitre 5 porte sur la construction des connaissances mathématiques via une situation d'enseignement. L'étude préalable (*étude de curriculums*-chapitre 2, *étude mathématique*-chapitre 3, *questionnaire*-chapitre 4) nous amène à envisager une « ingénierie didactique préliminaire » afin de faire découvrir mathématiquement, dans le domaine de l'Analyse, les notions de fonctions cosinus et sinus, via un travail graphique dans le cadre fonctionnel, dans le but de surmonter un obstacle didactique. Notre situation didactique est élaborée, à l'aide des outils d'analyse de la structuration des milieux de la *Théorie des Situations Didactiques*, en nous focalisant sur le contexte français pour la soumettre aux élèves de Terminale Scientifique en France, et aussi, aux élèves de 11e (correspondant à la Première en France) au Cambodge, avec certaines adaptations sur le terrain, dues aux spécificités de l'enseignement cambodgien. Précisons que notre situation didactique est développée ***sans les angles orientés***, en se basant sur **l'enroulement de la droite numérique sur un cercle** et en prenant appui sur le quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ représenté géométriquement par un cercle de rayon R. Nous souhaitons d'une part conduire explicitement les élèves à dissocier les grandeurs « angle » et « longueur », et d'autre part, expliciter la notion de périodicité lors de la découverte des notions de fonctions cosinus et sinus. Les outils d'analyse de la structuration des milieux nous servent convenablement dans la construction des connaissances mathématiques pour nourrir la réflexion dans l'appropriation par l'élève des connaissances visées, via les milieux et les variables didactiques choisis, notamment. Nous souhaitons mettre les élèves dans une situation a-didactique pour surmonter des difficultés et obtenir un apprentissage, nous nous focalisons donc sur le potentiel d'adidacité de la situation.

Le chapitre 6 porte sur la conclusion et les perspectives de recherche.

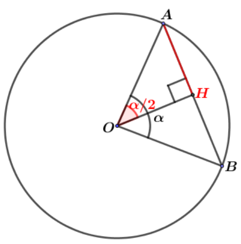
Nos quatre questions de recherche (voir la section 4 du chapitre 1) forment un circuit enchainé d'idées permettant de nous faire penser à la nécessité de nouvelles recherches pour préciser les caractéristiques des obstacles didactique et épistémologique que nous mettons en évidence afin d'enrichir l'enseignement et l'apprentissage de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire.

Chapitre I : **Problématique et Méthodologie**

Dans ce chapitre, nous exposons notre problématique, le cadre théorique adopté et la méthodologie utilisée.

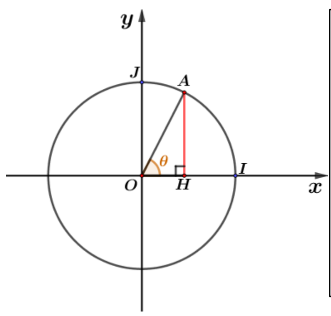
1. Questions préliminaires

Historiquement la trigonométrie est introduite pour traiter des questions astronomiques, domaine dans lequel les trajectoires de planètes, supposées circulaires à l'époque, jouent un rôle déterminant. Dans ce contexte, les Grecs (Hipparque $(-190\ ;\ -120)$, Ptolémée $(90\ ;\ 168)$) s'intéressent particulièrement aux relations entre angle au centre, arc intercepté et corde sous-tendant l'arc. Ils établissent des tables de cordes. Ainsi la trigonométrie se développe initialement en lien avec le cercle. Un peu plus tard, l'astronome et mathématicien indien Âryabhata $(476\ ;\ 550)$ définit le sinus comme une « demi-corde » dans un cercle : « Le sinus de l'angle moitié est la moitié de la longueur de la corde interceptée dans le cercle » et le sinus au sens de Âryabhata est donc le produit du rayon R du cercle par le sinus de nos jours, (voir *Figure 1*, et aussi, *l'annexe n° 1*, pp. 379-380). De nos jours, le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle (ici, c'est $\sin\theta$) est le sinus au sens de Âryabhata (ici, c'est AH) divisé par le rayon du cercle, (voir *Figure 2*). On ne distingue plus le sinus au sens de Âryabhata du sinus tel qu'il est défini de nos jours lorsqu'on travaille dans le cercle unité.



$$\boxed{R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}AB}$$

Figure 1 : Sinus au sens de Âryabhata



L'angle au centre θ (en degrés) intercepte l'arc de cercle IA. H est le projeté orthogonal de A sur l'axe des abscisses.
$\sin\theta = \frac{AH}{OA}$ et dans le cercle unité : $\sin\theta = AH$.

Figure 2 : Sinus de nos jours

Dans l'enseignement français, la dynamique du développement de la trigonométrie est inversée. On commence par la trigonométrie du triangle rectangle[1] au collège (4^e-3^e) en définissant cosinus, sinus et tangente des angles aigus. Puis on introduit dans un second temps une trigonométrie du cercle qui permet de définir en Seconde le cosinus et le sinus d'un nombre réel à l'aide du principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Ceci débouche sur les fonctions trigonométriques[2] sinus et cosinus étudiées en Terminale Scientifique, la fonction tangente ne figurant plus au programme du lycée. Ces deux fonctions sont l'occasion d'une première rencontre avec la notion de périodicité. En 1^{re}

[1] Dans l'institution française actuelle (BO n° 30 du 26-7-2018) au niveau du secondaire, les notions de cosinus, de sinus et de tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sont introduites en 3^e. (Voir l'annexe n° 5, p. 427)

[2] Dans l'institution française actuelle (BO Spécial n° 1 du 22-1-2019), les fonctions cosinus et sinus sont introduites en 1^{re} Scientifique. (Voir l'annexe n° 5, p. 427)

Scientifique, la trigonométrie du triangle rectangle est généralisée aux triangles quelconques dans le cadre du travail sur le produit scalaire. Par ailleurs, l'introduction des notions de mesure d'angle en radian et d'angles orientés permet d'inclure les angles (au centre) dans la trigonométrie du cercle.

La question que nous voulons explorer dans cette thèse est la suivante : **La trigonométrie du triangle et la trigonométrie du cercle trigonométrique sont-elles un appui ou un obstacle pour l'introduction des fonctions sinus et cosinus à la fin du secondaire, en France et au Cambodge ?** Nous considérons que la trigonométrie du triangle se situe dans le cadre « Géométrie euclidienne », la trigonométrie du cercle trigonométrique, dans le cadre « Géométrie repérée » et les fonctions[3] sinus et cosinus, dans le cadre « Analyse ».

Notre précédente question se décline en plusieurs sous-questions :

1. Comment trigonométrie du triangle, trigonométrie sur le cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus sont-elles enseignées en France et au Cambodge ?
   En particulier, comment est prise en charge, dans les manuels, l'articulation entre ces deux trigonométries ? Quels objets d'étude servent de points d'appui à cette articulation ? Quel rôle y joue l'extension des points de vue sur les angles ?
2. Qu'est-ce que les élèves ont appris dans l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus à travers les principaux cadres (géométrique, géométrie-repérée, fonctionnel) ? Quelles sont leurs difficultés, en particulier relativement à l'articulation des différents cadres sur le sinus et le cosinus ?
3. Au vu des difficultés mises en évidence, est-il possible de concevoir une situation d'enseignement prenant appui sur la trigonométrie du cercle pour introduire les notions de fonctions sinus et cosinus ?

Dans l'enseignement cambodgien, en ce qui concerne la dynamique du développement de la trigonométrie, on procède de la même manière qu'en France. La trigonométrie du triangle rectangle, la trigonométrie dans un cercle pour l'angle géométrique dont la mesure en degrés est comprise entre 0 et 180 degré(s), et la trigonométrie dans un triangle (formule des sinus, formule des cosinus) sont introduites, dans cet ordre, en 10^{e} (Seconde en France), puis la trigonométrie du cercle trigonométrique (y compris les notions de mesure d'angle orienté en radian) et les notions de fonctions sinus et cosinus, dans cet ordre, en 11^{e} (1re en France). Les propriétés des fonctions sinus et cosinus ne sont pas toutes introduites en 11^{e}, par exemple, les limites en 0, la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus, sont complétées en 12^{e} (Terminale en France) dans d'autres thèmes d'études tels que : « Limites » et « Dérivés ». Remarquons que les concepts des cosinus et sinus d'un nombre réel par l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique (introduits en Seconde en France) ne font pas partie des programmes du secondaire cambodgien.

En ce qui concerne les thèmes d'étude en France et au Cambodge sur les objets « cosinus » et « sinus » il y a peu de différences, mais les différences à remarquer concernent particulièrement la structuration des objets d'étude visés et la transposition didactique, du savoir à enseigner au savoir enseigné (voir chapitre 2).

[3] Il y a plusieurs manières rigoureuses pour introduire les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle à l'aide d'une série (voir chapitre 3) ou à l'aide de l'équation différentielle $y'' + y = 0$, par exemple ; mais on n'est pas obligé de faire tout cela au niveau Terminale dans l'enseignement de mathématique actuel.

2. État de l'art

La trigonométrie et les fonctions trigonométriques du secondaire sont peu traitées dans la recherche en didactique des mathématiques.

La plupart des recherches existantes s'intéressent aux difficultés et à la compréhension de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques des élèves du secondaire et au début de l'université. Il semble qu'il y ait consensus entre les auteurs sur les résultats obtenus dans les travaux de recherche. Ces résultats montrent que les élèves ont des difficultés à s'approprier et à mettre en fonctionnement les objets cosinus et sinus enseignés. Concernant les objets cosinus et sinus du secondaire, les élèves rencontrent les trois contextes suivants :

(1) Trigonométrie dans le triangle rectangle ;
(2) Trigonométrie dans le cercle unité ;
(3) Fonctions trigonométriques.

Dans cette revue de travaux, nous différencions les recherches suivant le point de vue qu'elles mettent en avant pour définir les fonctions trigonométriques.

Remarquons d'abord que la majorité des articles sur la trigonométrie se désintéresse de l'analyse curriculaire.

2.1. Recherches privilégiant la relation aux angles

Concernant les deux articles de Weber (2005, 2008), nous ne traitons pas l'article de 2008 car il n'apporte pas davantage d'éléments par rapport à celui de 2005 que nous allons présenter ci-après.

Ne sont considérés dans l'article de Weber 2005 que des sinus et cosinus de mesure d'angles en degrés. Donc les fonctions considérées ne sont pas les fonctions sinus et cosinus usuelles en analyse.

Ensuite, quand l'auteur évoque un enseignement de la trigonométrie basé sur le cercle unité, **il ne s'agit aucunement de faire intervenir la longueur des arcs. À un angle au centre donné, on associe un point du cercle et ses coordonnées.**

L'auteur mentionne l'existence d'une recherche à grande échelle (Kendal & Stacey, 1997) ayant montré que l'approche par le triangle rectangle donnait de meilleurs résultats que celle par le cercle unité ci-dessus.

Un groupe d'étudiants (de niveau début de l'université aux USA) est soumis à un module expérimental avec une pédagogie « active » inspirée de D. Tall (travaux de groupes et discussion). Les activités sont centrées sur le point de vue fonctions comme processus (*computing*) de façon à ce que les étudiants construisent un point de vue *procept*. Il s'agit d'abord d'estimer des valeurs en utilisant l'un ou l'autre des deux modèles possibles d'un angle connu par sa mesure en degrés : angle au centre du cercle trigonométrique auquel est associé un point du cercle et ses coordonnées, angle d'un triangle rectangle. Des angles obtus sont considérés grâce au premier modèle. **Le modèle n'est pas donné aux étudiants, ils doivent le construire avec Papier-Crayon et rapporteur pour une mesure donnée.** Ceci est rendu possible par le choix de travailler avec des mesures en degrés et pas en radians. Les tâches qui suivent ce travail peuvent être résolues sans estimer les valeurs, à partir de propriétés géométriques des modélisations (par exemple, comparer plusieurs valeurs de sinus

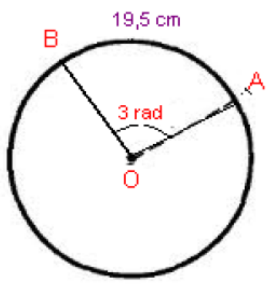
à partir de leur modélisation sur le cercle, montrer que $\cos^2 + \sin^2 = 1$, dire pour quelles valeurs la fonction sinus est décroissante) et c'est ce qui est visé.
Des questions portent également sur la tangente. La périodicité n'est pas abordée.
Les résultats au post-test de ce groupe sont très bons mais il faut noter une très grande proximité des tâches de cette évaluation avec les tâches travaillées pendant le module.

Tuna (2013) se focalise sur les notions de degré et de radian comme unités de mesure des angles, sur le lien entre mesure en radian et longueur d'arc intercepté sur un cercle de rayon donné.

Les questions soumises aux 93 étudiants de 3e et 4e années d'un cursus de formation de professeurs de primaire en Turquie sont les suivantes :

Q1 : Que comprenez-vous de la notion de degré qui est une unité mesurant les angles (angle measuring unit) ?
Q2 : Que comprenez-vous de la notion de radian qui est une unité mesurant les angles ? Quelle sorte de relation y a-t-il entre degré et radian ?
Q3 : Combien de radians y a-t-il dans un cercle ?

Question 4:



Based on what are given in the figure, what is the length (cm) of the radius of the circle with O center?

Figure 3 : Extrait de l'article de Tuna, 2013, p. 6

L'enquête montre que, exception faite de la question concernant le degré, moins de 20% des étudiants répondent correctement aux questions concernant le radian. Les formulations des réponses (par exemple, le radian est l'unité de longueur du degré donnée par 34% de la population) mais aussi le fait que l'auteur lui-même considère comme incorrecte la réponse : « le degré est $1/360^{ème}$ de n'importe quel cercle » motiveraient une étude approfondie du curriculum trigonométrique en Turquie, de façon à essayer de comprendre ce qui peut conduire à un tel état des lieux.

Tanguay (2010) aborde la question de l'enseignement des radians, sur la base de ses réflexions et de son expérience d'enseignant, au collégial (correspondant à la Première et à la Terminale en France) et en formation des maîtres à Montréal, au Canada. L'auteur y intègre aussi la possibilité de traiter, à l'aide d'une lecture graphique sur le cercle trigonométrique et à l'aide de la formule du taux d'accroissement d'une fonction, la dérivée de la fonction sinus avant tout enseignement formel des méthodes de dérivation, pour les élèves en 5e secondaire au Canada (correspondant à la Seconde en France). Concernant les radians, Tanguay précise : « […] Les auteurs des manuels […] introduisent tous la trigonométrie dans le cercle et la mesure d'angle en radians comme préalables à l'étude des fonctions trigonométriques. Parmi les nombreuses raisons qui motivent l'utilisation des radians dans ce contexte, la principale est sans doute que dans les domaines scientifiques où les fonctions trigonométriques ont un rôle central à jouer, ces fonctions s'appliquent systématiquement à une variable libre correspondant à une mesure en radians », (pp. 60-61). L'auteur attire l'attention du lecteur sur l'existence de deux fonctions sin différentes, différence non approfondie dans l'enseignement de mathématiques du secondaire au Canada : « Voilà certainement un point sur lequel les enseignants de 5^e^ secondaire n'insisteront jamais trop : les fonctions $\sin_{\mathrm{deg}} t$ et $\sin_{\mathrm{rad}} t$, correspondant au sinus d'un angle mesurant respectivement t degrés et t radians, **ne constituent pas la même fonction !** », (p. 61). Le Groupe didactique des mathématiques *IREM* d'Aquitaine (2016) attire aussi l'attention, avec une autre manière de présentation, sur le fait qu'« il ne s'agit pas de la même fonction sinus selon que l'ensemble de départ est un ensemble de mesures d'angles en degrés ou bien l'ensemble ℝ », (p. 5). Cette distinction entre les deux fonctions mentionnées précédemment n'est pas un aspect particulièrement mis en avant par les auteurs des manuels de mathématiques français du secondaire (voir chapitre 2).

2.2. Recherches consacrées aux difficultés des élèves à articuler 'angle au centre' et 'longueur d'arc'

Akkoc (2008) se concentre sur le « radian d'un angle » (The radian of an angle).
Il faut d'abord noter que ce qui est ici nommé radian d'un angle est en fait le rapport de la longueur de l'arc intercepté sur un cercle par l'angle au centre avec le rayon du cercle. L'auteur précise bien que c'est un nombre réel. Il s'agit en fait de la mesure en radian d'un angle non orienté. L'auteur fait référence à la métaphore de l'enroulement en l'associant à la possibilité de définir des fonctions trigonométriques de la variable réelle, chose selon lui impossible avec les mesures en degrés, ce qui contredit le point de vue adopté par Weber.

Dans l'article de Akkoc (2008), l'étude vise à déterminer le concept-image du radian construit par des professeurs de mathématiques stagiaires en Turquie, grâce à un questionnaire suivi de l'interview de 6 professeurs dont les réponses au questionnaire dessinent des concept-image différents.
Nous retenons les questions ayant le plus de rapport avec notre recherche :

(i) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \sin x$. Construire les points suivants dans le même repère cartésien : (a) $\big(30, f(30)\big)$, (c) $\big(\pi/2\,, f(\pi/2)\big)$, (e) $\big(3, f(3)\big)$.

(ii) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$. Si $f(x) = -\sqrt{3}/2$, $x =$?

(v) Convertir en degrés les angles donnés en radians et réciproquement : $5\pi/2$, $3\pi/5$, 160°, 50°

(vi) Définir la fonction cosinus.

(vii) (a) Expliquer le concept de radian ? (b) Expliquer la relation entre les mesures en radian et en degré des angles.

(viii) Qu'est-ce qui vient dans votre esprit quand vous voyez π ? Dites-moi tout ce que vous savez sur π.

(ix) Quelles sont la place et l'importance du triangle rectangle dans l'enseignement de la trigonométrie ?

(x) (a) Qu'est-ce que le cercle unité ? Expliquer. (b) Selon vous, quelles sont la place et l'importance du cercle unité dans l'enseignement de la trigonométrie ?

Les étudiants, sauf un, ne savent pas définir le concept de radian mais les conversions de radians en degrés et réciproquement ne leur posent pas de problème. **Ils n'interprètent pas le sinus et le cosinus comme s'appliquant à des nombres réels mais à des mesures d'angles, en radians seulement quand π est présent**. Dans ce cas, la technique la plus fréquente est de convertir en degré. Ensuite, au niveau de la représentation graphique, si le nombre dont on considère le sinus ou le cosinus utilise π, la moitié des étudiants prend pour l'abscisse une valeur approchée du nombre, l'autre prend la valeur en degré ($\pi/2 = 90$). **Pour les autres cas, en l'absence de l'ostensif °, certains ne savent pas faire, d'autres interprètent comme une mesure en degré** ($30 \sin 30 = 15$).
Pour (ii), les réponses sont soit en radians, soit en degrés, soit les deux. Cette question semble assez bien réussie, y compris $2k\pi$. On peut faire l'hypothèse que cela correspond à un exercice familier.
Sur π, on pourrait dire qu'il y a deux composantes dans le concept image : π comme nombre qui sert dans le calcul de la circonférence avec des valeurs comme $3{,}14$ et π comme demi-tour, mesure de l'angle plat en radians associé à 180°. Dans cette deuxième composante, π peut être identifié au nombre 180.
Par ailleurs, les réponses aux questions (vi), (ix) et (x) montrent que les étudiants restent majoritairement (4 sur 6) attachés au triangle rectangle, notamment pour définir le cosinus.
Ainsi le concept-image construit par l'approche dans le triangle rectangle est difficilement déstabilisé par le passage au cercle trigonométrique. Celui-ci ne suffit pas à inclure le point de vue « fonction de la variable réelle » dans le concept-image de sinus et de cosinus qui reste centré sur les angles et leurs mesures en degré avec un passage par des mesures en radians lorsque figure π qui fait fonction d'ostensif pour la mesure en radian (en l'absence du signe rad).

De Kee, Mura & Dionne (1996) se concentrent sur la compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves canadiens de 5^e^ secondaire (onzième année dans le secondaire canadien, correspondant à la Seconde en France), ayant terminé l'étude de la trigonométrie prévue à leur programme. Les auteurs se focalisent sur deux contextes : contexte du triangle rectangle (vu en 4^e^ secondaire) et contexte du cercle trigonométrique (vu en 5^e^ secondaire). Pour certaines tâches parmi les cent vingt-et-une tâches proposées, les élèves ne pouvaient se servir que d'une règle, d'un compas, d'une ficelle ou de papier quadrillé. Les auteurs ont eu deux entretiens, en deux temps, avec cinq élèves de 5^e^ secondaire appartenant à une même classe : 2 faibles, 1 moyen et 2 forts (classés par leur enseignante). Le premier entretien porte sur le contexte du triangle rectangle, et le second, sur le contexte du cercle trigonométrique. Les auteurs ont constaté que : « au terme du programme de trigonométrie des élèves, des 'forts' comme des 'faibles', peuvent éprouver encore des difficultés avec les notions les plus élémentaires de cette branche des mathématiques, soit le sinus et le cosinus », (p. 25). Ils ont mis en évidence quatre représentations des notions de sinus et de cosinus apparues chez les élèves interviewés. Voici un extrait de la page 25 :

> . un procédé qui consiste à diviser l'une par l'autre les longueurs de deux côtés d'un triangle (rectangle) et qui produit le sinus ou le cosinus d'un angle (aigu). Parfois, comme on l'a vu, les élèves ont appliqué ce procédé indûment à des triangles qui n'étaient pas rectangles ou à des angles qui n'étaient pas aigus ;

. les coordonnées cartésiennes d'un point d'un cercle trigonométrique, ces coordonnées étant, pour les élèves, le cosinus et le sinus du « point » ;
. les fonctions sinus et cosinus d'une calculatrice, fonctions qui fournissent, selon les élèves, le sinus et le cosinus d'un nombre exprimant la mesure d'un angle. Les élèves n'avaient pas accès à une calculatrice pendant les entrevues, mais ils y ont fait souvent référence comme au moyen privilégié de trouver la valeur d'un sinus ou d'un cosinus ;
. les courbes à l'aspect onduleux caractéristique qui sont les graphiques des fonctions sinus et cosinus. Certains élèves admettaient que ces courbes continuaient à représenter les mêmes fonctions lorsqu'elles subissaient une rotation ou un changement d'échelle.

Nous extrayons la rubrique 2.2.3 toute entière à la page 24 car c'est un point de vue important que les auteurs n'ont pas interprété.

2.2 3 *La compréhension procédurale*. Une tâche semblable à la précédente visait la compréhension procédurale de la même définition. Cette fois-ci, en plus du dessin d'un cercle trigonométrique sur papier quadrillé, nous avons fourni aux élèves une règle et une ficelle et nous leur avons demandé de trouver la valeur approximative du sinus du nombre 2. À nouveau, Anne, Luc et Paul n'ont pas su quoi faire. Claire et Berthe ont situé « le point » 2 sur le cercle en estimant visuellement sa position par rapport aux « points » $\pi/2$ = 1,57 et π = 3,14 dont elles connaissaient par coeur la position. Elles ont ensuite évalué les coordonnées du « point » 2 en se servant du quadrillage. À cette étape, aucun des élèves ne s'est servi de la ficelle que nous leur avions fournie pour mesurer un arc de longueur 2 et situer le point correspondant de façon plus précise.	Remarquons d'abord que Claire et Berthe étaient jugées « fortes » par leur enseignante. À notre avis, il semble que Claire et Berthe voient le nombre 2 comme étant un point, de même que $\pi/2$ et π mais pas une mesure de longueur de l'arc de cercle dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Il semble que les élèves ne réactivent pas les connaissances portant sur l'unité de mesure de la longueur d'arcs du cercle trigonométrique.

Figure 4 : Une ficelle fournie non utilisée pour mesurer un arc de longueur 2 – extrait de l'article de De Kee, Mura & Dionne, 1996, p. 24

Dans le contexte du cercle trigonométrique, l'expression « sinus d'un nombre réel » a été utilisée par les auteurs mais pas par les élèves ; les auteurs précisent que les élèves préfèrent parler du sinus d'un angle ou d'un point. Les auteurs concluent que les élèves s'approprient mieux les notions de sinus et de cosinus dans le contexte du triangle rectangle par rapport à celles dans le contexte du cercle trigonométrique.

Winsløw (2016) étudie la relation que l'on peut construire entre le fait de donner une définition rigoureuse de la fonction sinus et l'ensemble des contenus enseignés dans un cours d'analyse jusqu'à l'intégration de fonctions. Dans un enseignement classique sur la trigonométrie et les fonctions trigonométriques, l'auteur repère trois contextes via trois registres graphiques, (voir *Figure 5*).

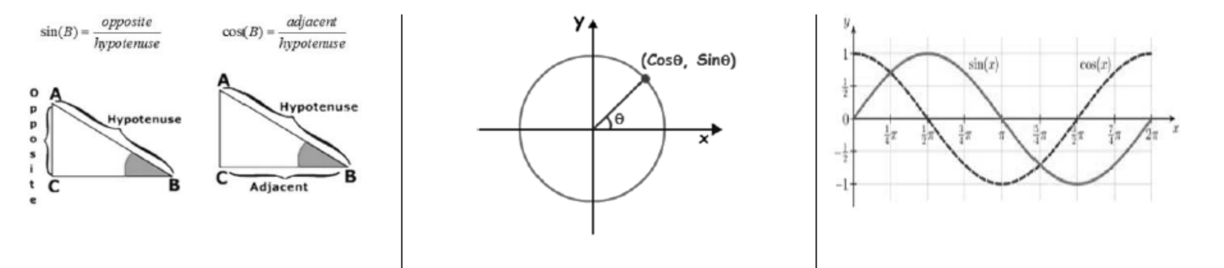


Figure 1: Triangle context. **Figure 2: Cartesian context.** **Figure 3: Function context.**

Figure 5 : Extrait de l'article de Winsløw, 2016, p. 5

Winsløw se positionne par rapport à l'ingénierie expérimentée par Demir & Heck (2013, voir plus loin). Il considère que l'on ne peut pas atteindre une compréhension approfondie en se contentant de multiplier les ostensifs à partir des logiciels dynamiques d'autant que les différentes définitions adoptées par Demir & Heck (2013) n'ont pas de base mathématique solide. Elles reposent fondamentalement sur la notion d'angle, complètement naturalisée depuis le primaire comme mesure de l'espace entre deux droites sécantes. Parmi les opérations mystérieuses qui accompagnent le passage du point de vue Triangle au point de vue Cartésien, il y a le remplacement du degré par le radian. Winsløw considère que discuter sur le changement d'unité de mesure ne fait que détourner du problème de fond : supposer qu'un nombre réel peut être associé à toute paire de droites sécantes en tant que mesure de l'espace compris entre les deux, reste un postulat non fondé mathématiquement.

Concernant les cours de calcul standard en analyse universitaire, il s'agit de montrer qu'à partir de deux cours typiques de l'enseignement sur les fonctions trigonométriques au début de l'université, on peut essayer de développer un questionnement plus profond, c'est-à-dire chercher des explications et donner de nouvelles significations à deux faits généralement connus et acceptés comme plausibles par les étudiants :

(I) every point on the unit circle S^1 corresponds uniquely to a real number ("angle") and these numbers give rise to a natural "distance" on S^1 (and hence to a measure of the "width opened between rays");

(II) the map from angles to coordinates of the corresponding point in S^1 gives rise to two well-defined real functions ("cosine", "sine") with the usual properties.

Figure 6 : Extrait de l'article de Winsløw, 2016, p. 6

Pour voir si à partir d'un tel enseignement, un étudiant pourrait avoir établi des liens et avancer sur les points (I) et (II), Winsløw interviewe deux fois un étudiant de maitrise de mathématiques ayant servi d'assistant dans son cours expérimental. L'entretien semi-directif est basé sur les questions suivantes :

- What is your favourite definition of the function sine?
  - Follow-up questions according to the definition chosen, leading to:
- What is your favourite definition of angles? How do they relate to sine?
  - Follow-up questions for instance on arc length, if referring to circle arc
- What mathematical resources does the course (described above) provide to elucidate the previous questions? (textbook at hand to look up points)

Figure 7 : Questions posées à un étudiant lors de l'entretien semi-directif – extrait de l'article de Winsløw, 2016, p. 9

Confronté à ces questions, l'étudiant commence par dessiner une courbe puis il donne des propriétés ; ensuite, réalisant qu'il n'a pas de définition, il en vient au cercle trigonométrique, (voir *Figure 8*). Remarquons que l'étudiant (Figure6: Diagram) identifie x comme l'angle approprié dans le triangle rectangle.

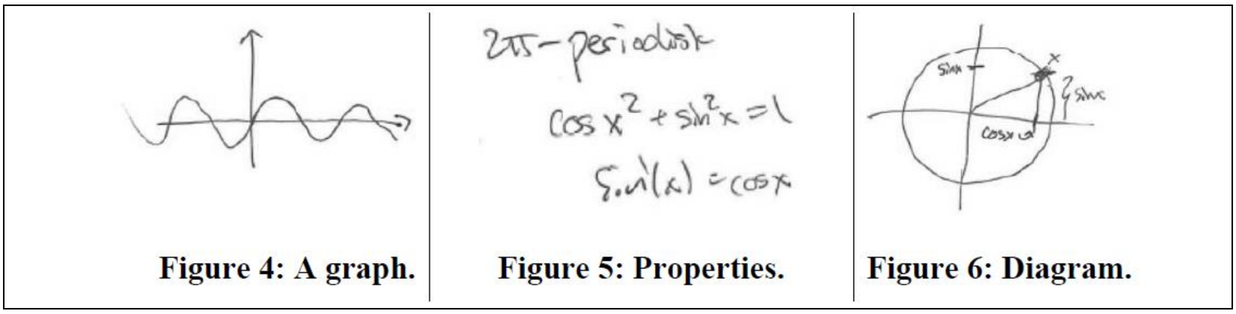


Figure 8 : Extrait de l'article de Winsløw, 2016, p. 9

En ce qui concerne ce qu'est pour lui un angle, il parle d'espace entre deux droites sécantes (avec deux angles différents). Quand Winsløw lui repose la question de la définition, il évoque le rapporteur puis les fonctions sinus et cosinus qui avec la calculatrice permettent de fournir une valeur (calculer l'angle). Concernant la dernière question, il y a une suite d'échanges conduisant l'étudiant à parcourir de nouveau le cours mais il ne parvient pas vraiment à faire un lien entre longueur de courbes et angles.
Il semble que les connaissances, liées aux trois contextes (voir *Figure 5*), vues dans le secondaire, posent une difficulté dans la compréhension de l'étudiant interviewé : confusion entre la grandeur « angle » et ses mesures ainsi que la nature du signe x dans les trois contextes.

2.3. Recherches privilégiant la longueur de l'arc de cercle (enroulement)

Bloch (2009) a relevé, dans son texte les savoirs, les étapes de l'apprentissage et les connaissances (apprises en France) ainsi que les obstacles relatifs à la mesure des angles en radians au lycée. Les élèves ne distinguent pas le cercle de la droite des réels et ils interprètent les mesures uniquement comme les mesures du cercle trigonométrique (rayon 1). Nous avons extrait la section 3.2 toute entière :

> **3.2 Deuxième obstacle : les tours du cercle et la droite réelle**
>
> Lorsqu'on demande à un élève de Seconde ou de Première d'enrouler R sur le cercle, en général il voit bien ce qui se passe ; mais lorsqu'on déroule, ça devient parfaitement obscur. Ceci conduit les élèves à dire fréquemment que $\pi/6 = 7\pi/6$ par exemple. C'est-à-dire que les élèves ne distinguent plus le cercle de la droite, et interprètent les mesures uniquement comme les mesures « du cercle ». C'est souvent renforcé d'ailleurs par le fait que les professeurs dessinent le cercle avec, marquées tout autour, les mesures des angles. De même les élèves s'avèrent incapables de résoudre des exercices comme : « $\pi/6$ est une mesure d'un angle A. Quelle est la mesure de A qui appartient à l'intervalle $\{18\pi, 20\pi\}$? » En effet pour comprendre la question, il faut avoir dans la tête les deux référents : le cercle, et la droite réelle. Or les élèves ne peuvent convoquer qu'un référent à la fois, le cercle si la question est posée en termes d'angles, le droite réelle si l'on parle de nombres. Il faut donc les faire *dérouler* après avoir enroulé et leur faire construire…

Figure 9 : Difficultés des élèves à distinguer le cercle unité de la droite des réels (Bloch, 2009, p. 51)

Martínez-Planell & Cruz Delagado (2016) se concentrent sur les fonctions sinus et cosinus de la variable réelle et sur leurs fonctions inverses.
Les auteurs présentent la décomposition génétique (théorie APOS) d'une introduction des fonctions sinus et cosinus et de leurs inverses basée sur le cercle unité, le mouvement d'un point sur un tel cercle et la longueur des parcours. Ils considèrent en particulier quatre

processus différents : du nombre réel t au point sur le cercle et le processus inverse, du point à son abscisse ou son ordonnée par projection et le processus inverse. Ce dernier, impliqué dans la résolution d'équations trigonométriques, met en jeu des savoirs sur les positions des points associés à t, $t+\pi$, $\pi - t$ et $-t$.

Un questionnaire constitué de 12 problèmes est soumis à 11 étudiants, qui sont interviewés pendant 1h45. Ce dispositif n'est pas conçu comme un module de formation. Il s'agit de déterminer où en sont les étudiants dans le processus de construction des différents niveaux du modèle APOS. L'article ne traite que de 6 problèmes. Les auteurs se sont inspirés de l'enseignement expérimenté par Weber (voir plus loin) en remplaçant le **rapporteur par un cure-pipe (pipe cleaner), ce qui leur permet de remplacer les mesures en degrés par des mesures en radians**. Dans le premier, les étudiants sont amenés à utiliser un cure-pipe et une règle graduée pour estimer la valeur de $\sin(1{,}2)$. Les 5 problèmes suivants traitent du processus d'inversion des fonctions sinus et cosinus. Dans le problème 2, il s'agit d'estimer $\sin^{-1}(0{,}8)$ en utilisant les mêmes instruments. Il s'agit ensuite de calculer $\sin^{-1}(0{,}974927912)$ en sachant que $\sin(10\pi/7) = -0{,}974927912$, puis de trouver toutes les solutions de $\cos t = -1/2$ sur l'intervalle $[0;2\pi]$ et de $\sin t = -3/5$. Le dernier problème a pour énoncé :

> We start on point $(1,0)$ on the unit circle and travel counterclockwise on the circle a distance T, as shown in the figure below, ending at point $(-0.6,-0.8)$. What is the value of T?

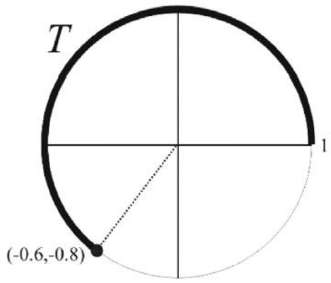


Figure 10 : Extrait de l'article de Martínez-Planell & Cruz Delagado, 2016, p. 119

Les auteurs ne précisent pas si une calculatrice est disponible pour les deux derniers problèmes.

Il est intéressant de noter la particularité du dernier problème par rapport aux trois précédents : ce sont les coordonnées du point extrémité qui sont données sans faire mention du sinus et du cosinus.

Les problèmes proposés mettent en grande difficulté 9 étudiants sur 11 : s'ils savent traiter, au moins en partie, le problème 4 qui correspond à une valeur remarquable, ils ne savent comment procéder pour les autres. Quant aux deux étudiants un peu plus avancés, ils ne mobilisent pas la projection pour déterminer le sinus puis la fonction inverse pour calculer la longueur d'arc (problème 6) ou la valeur du sinus pour situer le point $\mathrm{P}(t)$ (problème 3). Aucun des étudiants ne dessine un cercle unité pour les problèmes 4 et 5.

Ainsi, les deux processus impliqués dans la définition des fonctions trigonométriques, c'est-à-dire t donne le point $\mathrm{P}(t)$ puis projection sur les axes ne sont pas intériorisés simultanément. Il semble y avoir une différence entre savoir que cosinus et sinus sont les coordonnées de $\mathrm{P}(t)$ et faire le lien avec les projections de $\mathrm{P}(t)$ sur les axes. Ce qui peut poser problème pour tout ce qui concerne la résolution d'équations et les fonctions inverses, d'autant que la représentation géométrique des points associés aux valeurs $-t$, $t+\pi$, $\pi-t$ en lien avec les symétries, et son usage notamment en lien avec la fonction inverse est un point qui pose problème.

Comme cela a été mis en évidence dans d'autres recherches, tous les étudiants manifestent à un moment ou un autre des difficultés concernant la relation entre mesure d'angle et longueur d'arc, aussi bien que dans la possibilité de faire une relation entre le point de vue triangle rectangle et le point de vue cercle unité. Ceci doit conduire à accorder une grande importance à la dimension géométrique de la définition des fonctions trigonométriques et de leurs inverses.

Demir et Heck (2013) se concentrent sur les fonctions sinus et cosinus, en expérimentant un module d'enseignement avec des élèves en fin du secondaire (16-17 ans) de bon niveau aux Pays-Bas.

Les auteurs proposent un modèle triangulaire de ce qu'ils appellent 'Trigonometric Understanding' qui distingue trois 'contextes'[4], Trigonométrie du triangle, Trigonométrie du Cercle unité et Trigonométrie des graphes de fonctions, contextes dont sont aussi prises en compte les connections. Le processus d'enseignement est divisé en 7 étapes visant à construire les trois contextes et leurs connections.

Leur option est d'éviter une introduction trop précoce des mesures d'angles en radians mais à la place de mettre au cœur de l'apprentissage l'enroulement de la droite des réels sur le cercle unité et d'utiliser les concepts d'arc et de longueur d'arc pour introduire sinus et cosinus comme fonctions de la variable réelle. Le travail réalisé introduit d'emblée les représentations graphiques de ces fonctions. Leur hypothèse est qu'il est plus facile pour les étudiants d'envisager des phénomènes de covariation entre des grandeurs mesurées avec la même unité que de commencer avec une fonction qui à une mesure d'angles (en degré ou en radian) associe une longueur d'arc. En cela, ils adoptent un point de vue bien différent de celui de Weber et de Moore.

Comme Weber et Moore, ils font l'hypothèse qu'il faut d'abord commencer par du travail dans un environnement matériel instrumenté papier-crayon pour développer leur compréhension du sinus et du cosinus. Mais leur proposition est très originale : tout d'abord on considère une fonction d'enroulement de $\mathbb{R}$ sur un polygone régulier dont le point $(1\,;0)$ est le milieu d'un côté. Un point se déplace sur le polygone à n-côtés et les variations de son abscisse et son ordonnée en fonction de la distance parcourue sont étudiées et représentées graphiquement. Cette option permet d'éviter l'emploi d'une cordelette pour mesurer le parcours du point mobile.

Le tracé de la courbe est réalisé à la main pour $n=4$ et avec une rotation dans le sens positif, puis on étend pour les x négatifs et on recommence pour les variations de l'abscisse.

[4] 'Context' est le terme utilisé par les auteurs, nous verrons dans le chapitre 2 qu'un tel terme est bien pauvre pour décrire ce qui est en jeu. Nous parlerons plutôt d'Organisations Mathématiques Locales.

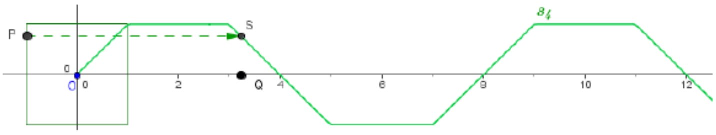


Figure 2: Screenshot of a GeoGebra activity on the graph of the sine-like function s_4.

Figure 11 : Figure 2-Extrait de l'article de Demir & Heck, 2013, p. 121

Ensuite on augmente n à la main ou avec une application implémentée sur GeoGebra.

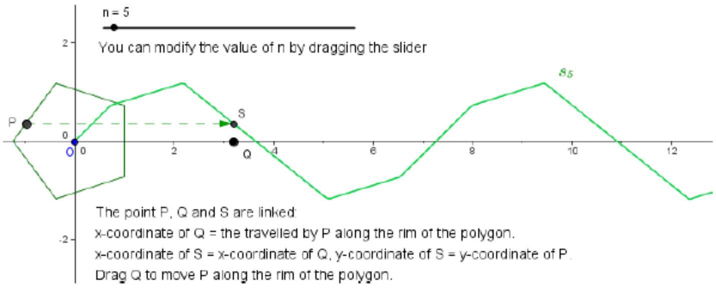


Figure 3: Screenshot of a GeoGebra activity on the graph of the sine-like function s_5.

Figure 12 : Figure 3-Extrait de l'article de Demir & Heck, 2013, p. 121

Le travail avec GeoGebra permet d'accroître la valeur de n et fait ainsi apparaître un polygone sensiblement identifiable à un cercle et des courbes très proches des représentations des fonctions sinus et cosinus.

La liaison avec les angles est à peine évoquée dans l'article. Nous n'examinons pas les activités proposées dans les étapes 3 à 7 qui n'apparaissent que dans le mémoire de Demir (2012). Elles permettent de faire le lien avec la notion de sinus et cosinus d'angles en degré, avec la trigonométrie du triangle rectangle et d'introduire la mesure en radians. On peut avancer que les difficultés relatives à la notion d'angle et aux mesures en radians sont sous-estimées comme le montre le fait que seul le cercle trigonométrique est impliqué dans le travail attendu des élèves autour du radian.

Dans l'institution du secondaire français, la notion d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique (rayon 1) est introduite en Seconde (grade 10) et en 1re Scientifique dans les nouveaux programmes (BO Spécial n° 1 du 22-1-2019). On introduit en 1re Scientifique (grade 11) la notion de radian et on définit les mesures d'angles en radians à partir du principe de l'enroulement de la droite des réels. On attend la Terminale Scientifique (grade 12) pour passer à l'approche fonctionnelle dans le domaine « Analyse ». (Voir le chapitre 2).

2.4. Recherches prenant appui sur le mouvement

Hentoray, Krysinska, Rosseel & Schneider (2015) s'intéressent aux phénomènes périodiques en physique. Ils proposent une étude des fonctions trigonométriques à partir d'un questionnement physique. Il s'agit d'une observation expérimentale consistant en le mouvement d'un corps attaché à un ressort ; ce mouvement peut être modélisé par un mouvement circulaire uniforme. Les auteurs choisissent un graphique de référence où la mesure du temps est égale à celle de la longueur de l'arc parcouru et ils choisissent, pour unité de longueur, le rayon du cercle parcouru par le corps tournant. Dans la rubrique 1.1.5 intitulée « Un graphique de référence adaptable à toute situation », les auteurs notent en caractère gras :

> En donnant à une période de 2π, on ajuste l'échelle des temps à celle des arcs parcourus, c'est-à-dire qu'on mesure par le même nombre à la fois le temps et l'arc parcouru. L'unité de longueur est bien sûr le rayon et l'unité de temps est le temps mis par le point tournant pour parcourir un arc dont la longueur est celle de rayon. On obtient alors le graphique de référence à partir duquel on construira les autres fonctions des particularités du mouvement. (Chapitre 1, rubrique 1.1.5, p. 14)

L'idée, dans l'extrait précédent, correspond exactement à celle de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique en utilisant la notion de radian sans le dire, vue en Seconde dans l'enseignement de mathématiques en France.

Nguyen Thi (2013) étudie une comparaison des modalités de présentation du concept de périodicité dans l'enseignement secondaire en mathématiques et en physique, au Viêt Nam et en France. L'auteure se focalise sur la modélisation de phénomènes périodiques ; elle s'appuie sur ce que l'on peut qualifier de « deux modèles de la périodicité » : le mouvement circulaire uniforme (nommé modèle C) et l'oscillation harmonique (nommé modèle O). Elle montre, via les résultats obtenus au questionnaire soumis à 200 élèves vietnamiens au début de la classe 12 (correspondant à la Terminale en France), la faiblesse de l'articulation entre les deux modèles C et O et les difficultés des élèves pour entrer dans un processus de modélisation. Nguyen Thi a réalisé une ingénierie didactique qui vise, via un problème extra-mathématique (voir *Figure 13*), au passage et à l'articulation entre les deux modèles C et O (voir *Figure 16*), en se concentrant sur la périodicité. L'ingénierie didactique a été conçue, dans un environnement de géométrie dynamique (le logiciel Cabri II Plus), à partir d'une situation basée sur une grande roue, en s'inspirant de l'énoncé initial de la noria dans le manuel vietnamien de mathématiques de classe 11. Concernant le processus de conception de l'ingénierie didactique, l'expérimentation finale a été précédée par deux pré-expérimentations avec l'amélioration des situations visées après chaque mise en œuvre. L'expérimentation finale, qui est composée de quatre situations enchaînées l'une à l'autre visant l'objectif principal dans la dernière situation, a été réalisée avec 12 élèves vietnamiens (répartis en 6 binômes) de classe 12, à Ho Chi Minh Ville. En se basant sur l'étude de curriculums vietnamien et français, Nguyen Thi fait *a priori* l'hypothèse que la périodicité des fonctions trigonométriques et les deux modèles C et O sont disponibles pour les élèves de classe 12, (voir *Tableau 1*).

Connaissances	**Niveaux d'enseignement**
Mouvement circulaire uniforme	Classe 10
Fonctions trigonométriques	Classe 11
Oscillations harmoniques	Début de classe 12

Tableau 24. Connaissances disponibles liées à la périodicité avant de l'expérimentation

Tableau 1 : Tableau 24-Extrait de la thèse de Nguyen Thi, 2013, p. 208

Mais elle a parallèlement constaté que « les manuels proposent peu de problèmes issus de contextes extra-mathématiques pour étudier des phénomènes périodiques et quand ils le font, c'est en imposant immédiatement le modèle mathématique à suivre ». Elle a conclu que

« l’élève ne passe pas par les étapes intermédiaires qui constituent le cœur et le moteur du processus de modélisation ». Donc, l’ingénierie didactique réalisée a visé quatre situations (nommées : 0, 1, 2, 3) enchaînées afin de faire que les élèves s’approprient les étapes intermédiaires dans le processus de modélisation ainsi que le lien entre le modèle C et le modèle O dans le registre graphique dans l’environnement de la géométrie dynamique du logiciel Cabri II Plus. Notons que le modèle mathématique du phénomène (une représentation algébrique de la fonction représentant la hauteur de la cabine en fonction du temps) a été proposé, à la fin de la situation 3 (la quatrième situation), aux élèves sous forme d’un devoir à la maison après l’institutionnalisation. Les trois premières situations (voir *Figure 13*) mènent les élèves à réaliser la construction d’un modèle intermédiaire géométrique du phénomène réel représentant la grande roue et son mouvement et la mise en place de la variable indépendante temps (voir *Figure 16*).

Situation 0

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S0-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l’enregistrement / Enregistrer.**

Sur l’écran, vous pouvez voir deux demi-droites horizontales d’origine respective A et A’ et parallèles. Sur la demi-droite Ax est placé un point P mobile.

Travail à faire : construire sur la demi-droite A’x’ un point P’ tel que A’P’ = 1,72 x AP.

Attention !

1) Enregistrer régulièrement votre travail : Fichier / Enregistrer ou « Ctrl S ».

2) Ne fermer que le fichier quand l’enseignant demande. Avant de fermer, aller dans Session / Arrêter l’enregistrement.

Un parc d’attractions possède une grande roue. Au début du voyage, M s’assoit dans une cabine.

Photo d’une grande roue

Situation 1

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S1-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l’enregistrement / Enregistrer.**

A l’écran vous pouvez voir un point P placé sur une demi-droite d’origine A.

Travail à faire : construire à l’écran une figure géométrique représentant le manège et la cabine de M de façon à ce que le déplacement du point P pilote le mouvement de la cabine de M.

Situation 2

A l’écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d’origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.

Travail à faire : placer sur la demi-droite AP le point P1 correspondant à 1 tour de la cabine M, le point P2 correspondant à 2 tours de la cabine M, le point P3 correspondant à 3 tours de la cabine M.

A l’écran, vous pouvez voir un point P sur la demi-droite d’origine A, un point I fixe sur le cercle et un point M qui se déplace sur le cercle, piloté par le point P.
Vous pouvez voir *aussi* les points P1, P2 et P3 sur la demi-droite d’origine A tels que nous venons de les construire.

On sait de plus qu’un tour complet de la grande roue dure 5 minutes.

Travail à faire :
Placer le point U pour que quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage.

Figure 13 : Extraits des fiches de la situation 0, de la situation 1 et de la situation 2 de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 214, 216, 221 et 224

Phase 1

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P1-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l’enregistrement / Enregistrer.**

M entre dans sa cabine lorsqu’elle passe au plus près du sol, au point I. La grande roue du manège a un rayon de 20 m et son centre est situé à 22 m du sol. Un tour dure T minutes.

Une lampe rouge éclaire par intermittence un endroit fixe (noté L) du manège où passent les cabines. Si une cabine est éclairée par la lampe rouge lors de son passage en L, son occupant gagne un voyage gratuit. On se demande si M va gagner un voyage gratuit sachant que la lampe s’allume au moment où il monte dans sa cabine.

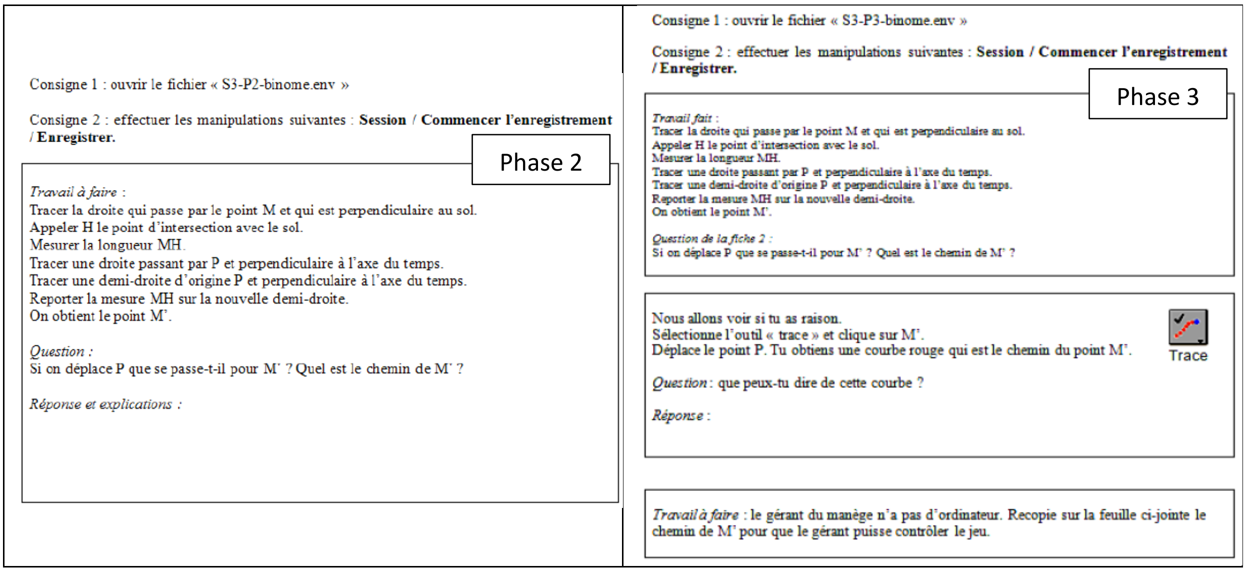
A l’écran, vous pouvez voir le cercle représentant le manège, le point I, un segment représentant le sol, et l’axe du temps construit précédemment.

Question :
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?
Si oui, au bout de combien de tours ? Peut-il en gagner d’autres ?

Réponse et explications :

P : De quelles informations avez-vous besoin pour savoir si M va gagner un voyage gratuit ?
Binôme 5 : **L’intervalle de temps.**
Binôme 1 : **Le temps d’allumage et la position de L.**
P : Oui, il faut donc savoir combien de temps la lampe s’allume.
Je vous donne l’information : la lampe s’allume une minute toutes les trois minutes.
P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
Binôme 1 : **La vitesse de la grande roue.**
P : La grande roue fait un tour en 5 minutes. On considère que c’est un mouvement uniforme. Au bout d’une minute, le manège a tourné 1/5 de tour. [comme dans la situation 2 de la séance 1].
P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
(…..)
Binôme 4 : **Où s’allume la lampe ? Où est L ?**
P : Oui, la lampe éclaire un endroit fixe (noté L) du manège, où est L ?
Je vous donne l’information : la lampe éclaire la position du manège à la hauteur de 35 mètres du sol.
Selon vous, il y a combien de points sur le cercle qui sont à la hauteur de 35 mètres du sol ?
Es : 2 points.
P : Le gérant ne peut pas éclairer 2 points parce qu’il y aura plusieurs personnes qui gagnent.
Nous somme d’accord que le point L est à droite du manège quand la cabine M monte.
En résumé, le point L est à une hauteur de 35 mètres par rapport au sol et à droite du manège.
P : De quelles informations avez-vous besoin en plus ?
(….)
P : On continue à travailler pour répondre aux questions de la fiche 1. Si vous avez besoin de plus d’informations, vous pouvez me les demander.
(Script de la séance 2)

<u>Figure 14</u> : Extraits des fiches de la situation 3 – Phase 1 (colonne de gauche) et Script du travail de coopération entre l'enseignant et les binômes (colonne de droite), Thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 240 et 252



Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P2-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Phase 2

Travail à faire :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Réponse et explications :

Consigne 1 : ouvrir le fichier « S3-P3-binome.env »

Consigne 2 : effectuer les manipulations suivantes : **Session / Commencer l'enregistrement / Enregistrer.**

Phase 3

Travail fait :
Tracer la droite qui passe par le point M et qui est perpendiculaire au sol.
Appeler H le point d'intersection avec le sol.
Mesurer la longueur MH.
Tracer une droite passant par P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Tracer une demi-droite d'origine P et perpendiculaire à l'axe du temps.
Reporter la mesure MH sur la nouvelle demi-droite.
On obtient le point M'.

Question de la fiche 2 :
Si on déplace P que se passe-t-il pour M' ? Quel est le chemin de M' ?

Nous allons voir si tu as raison.
Sélectionne l'outil « trace » et clique sur M'.
Déplace le point P. Tu obtiens une courbe rouge qui est le chemin du point M'.

Trace

Question : que peux-tu dire de cette courbe ?

Réponse :

Travail à faire : le gérant du manège n'a pas d'ordinateur. Recopie sur la feuille ci-jointe le chemin de M' pour que le gérant puisse contrôler le jeu.

<u>Figure 15</u> : Extraits des fiches de la situation 3 – Phase 2 (colonne de gauche) et Phase 3 (colonne de droite), Thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 258 et 261

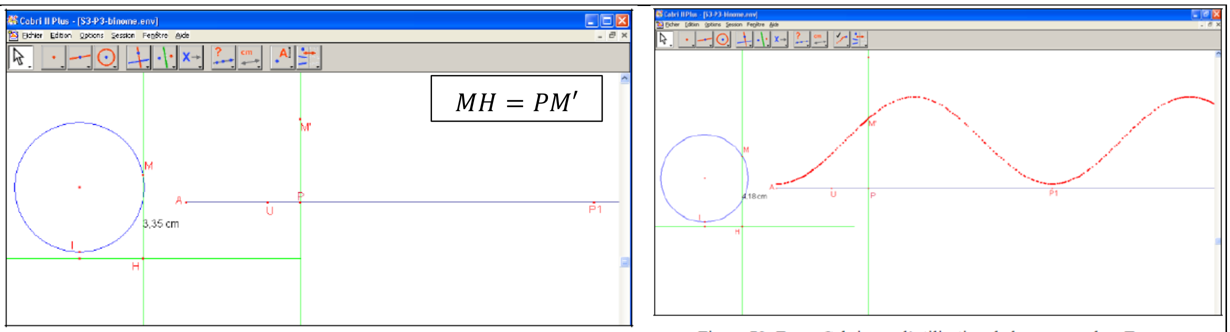


Figure 70. Ecran Cabri obtenu en suivant l'algorithme proposé

Figure 72. Ecran Cabri avec l'utilisation de la commande « Trace »

<u>Figure 16</u> : Figures 70 & 72-Extraits de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 259 et 261

Dans la phase 2 de la situation 3 (la quatrième situation) consistant en une anticipation du chemin de M' (voir *Tableau 2* avec colonne de gauche) :

- trois binômes, dont deux utilisent le terme « courbe ondulée », reconnaissent la caractéristique « alternative » de la courbe décrite par M' qui monte et descend ;
- trois autres binômes ne reconnaissent pas la périodicité de la courbe (un arc de cercle ou une parabole).

Dans cette phase 2 de la situation 3, Nguyen Thi a constaté la mise en évidence de l'absence d'articulation entre les deux modèles C et O chez les élèves.

Caractéristiques du chemin du point M' énoncés par écrit par les élèves :

	Caractéristiques du chemin de M'	Binômes
Fiche 2	Monte et descend	1, 4, 6
	Autres (arc de cercle, parabole,..)	2, 3, 5

Tableau 35. Les réponses apparues dans la phase 2 – Situation 3

Caractéristiques de la courbe réalisée par la commande « Trace » :

	Caractéristiques de la courbe	Binômes
Fiche 3	Courbe périodique	4, 5, 6
	Courbe ondulée	1, 2, 6
	Sinusoïde	4
	Parabole	3

Tableau 36. Les réponses apparues dans la phase 3 – Situation 3

Tableau 2 : Extraits de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 259, 263

Suit une phase utilisant la commande « Trace » permettant d'afficher la trajectoire suivie par le point M' lors de son déplacement piloté par le point P. Un des trois binômes qui n'avaient pas reconnu précédemment la périodicité ne reconnaît toujours pas la périodicité du chemin du point M' (voir *Tableau 2* avec colonne de droite). Un binôme aborde l'articulation entre le cercle et la courbe mais pas de façon très claire et un autre binôme dit que cette courbe est pareille au graphique de la fonction sinus.

Ensuite, on demande aux élèves de construire individuellement la courbe sur la feuille quadrillée (Phase 3 – *Figure 15* avec colonne de droite), mais les productions montrent de nombreuses incohérences avec les données du modèle C (voir *Figure 17*). Nguyen Thi fait le constat suivant : « à la fin de la phase 3, bien que l'articulation entre les deux modèles C et O soit introduite par l'énoncé, sa mobilisation effective par les élèves ne s'appuie pas sur les cohérences mathématiques qui permettent de passer effectivement de l'un des modèles à l'autre dans la résolution du problème ».

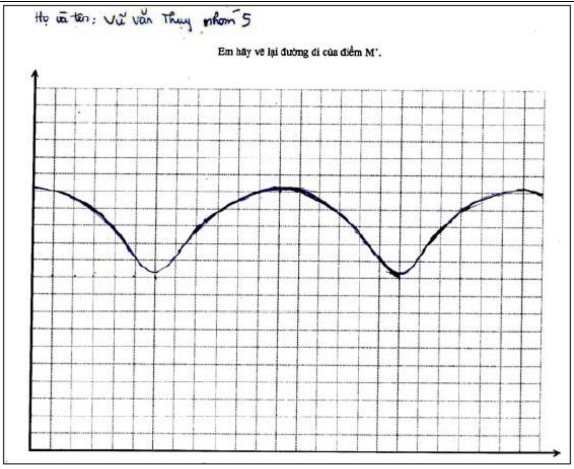


Figure 75. Graphiques construits par l'E1 du binôme 4 et l'E2 du binôme 5

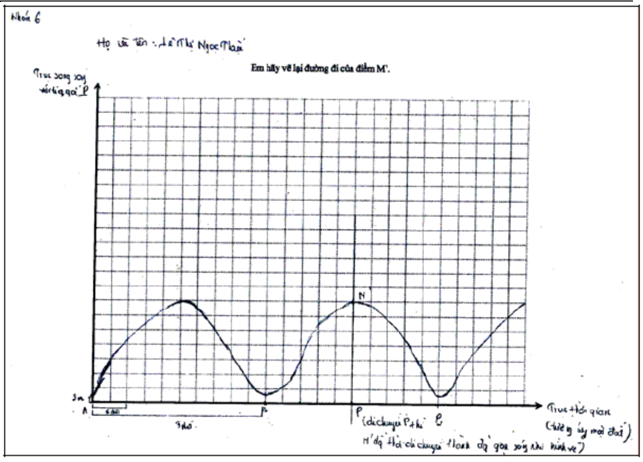


Figure 76. Graphique construit par l'E1 du binôme 6

Figure 17 : Figure 75 & 76-Extraits de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 265 et 266

La phase 4 de la situation 3 (voir *Figure 18*) consiste en la mise en concurrence des deux modèles C et O ; les élèves sont confrontés dans un premier temps aux calculs de la hauteur et du temps, et dans un deuxième temps, à un problème de coïncidences de deux phénomènes périodiques (la cabine M est en position L et la lampe est allumée), consistant en une formulation des solutions d'une équation trigonométrique via un travail graphique, attendue dans l'analyse *a priori*. Les supports instrumentaux dans cette phase 4 sont l'écran de Cabri (graphique unidimensionnel pour le modèle O) et la feuille du graphique sinusoïdal (graphique bidimensionnel-voir *Figure 18* avec colonne de droite). Cependant, le graphique donné aux élèves est une simple illustration non exploitable dans la résolution du problème (il n'y a aucune trace écrite sur les graphiques de quatre binômes parmi six (voir *Tableau 3*) ; il s'agit d'une conséquence de la faiblesse du rapport institutionnel au graphique d'une fonction au Viêt Nam). Concernant la tâche portant sur la hauteur (voir *Figure 18* avec colonne de gauche), seul un binôme a donné la bonne réponse, d'autres binômes ont des difficultés à accomplir cette tâche (changement de l'échelle entre Cabri et la réalité ; confusion entre la hauteur de la cabine M avec la distance rectiligne de la cabine à la position de départ I (trace écrite effacée d'un binôme) ; erreurs dans l'identification des grandeurs variables dans le passage du modèle O au modèle C). Les tâches demandées dans la phase 4 de la situation 3 posent des difficultés aux élèves.

Phase 4 de la situation 3

Stratégies		**Binômes**
graphique unidimensionnel	Demi-droite → cercle avec Cabri	-
	Demi-droite → cercle sur papier	2, 3, 4, 5, 6
graphique bidimensionnel (temps segmenté et tour)		1

Tableau 41. Les stratégies apparues dans la phase 4 – deuxième partie

Seul le binôme 1 utilise la stratégie « graphique bidimensionnel » pour résoudre le problème de coïncidence. Les autres binômes (2, 3, 4, 5 et 6) reprennent les procédures suivies lors de la phase 1, en empruntant les stratégies « graphique unidimensionnel », que ce soit dans Cabri ou sur papier, malgré leur coût prohibitif comparé à celui d'une stratégie « graphique bidimensionnel ». Notons que le binôme 5 a marqué 20 m sur la sinusoïde mais sans aller plus loin dans une stratégie graphique bidimensionnel.

Première question	Oui		
Deuxième question	4 tours (réponse correcte)	3 tours	2 tours
Troisième question	Oui	Oui	Oui
Binômes	1, 2, 3	4, 5	6

Tableau 43. Les réponses sur la phase 4 – deuxième partie

Tableau 3 : Extraits de la thèse Nguyen Thi, 2013, pp. 277 et 280

Durant l'institutionnalisation, l'enseignant sollicite collectivement les élèves pour accomplir les tâches à l'aide du graphique bidimensionnelle (fiche du graphique fourni au départ de cette phase) (voir *Figure 19*). Remarquons que l'enseignant ne prononce pas les termes : « sinusoïde », « périodicité », « période ».

Vers la fin de la phase 4 de la situation 3 (voir *Figure 19* de droite en bas), l'enseignant pose une question sur les comportements de la courbe si on fait varier le diamètre du cercle (il semble que ce point de vue n'ait pas été prévu dans l'analyse *a priori* de Nguyen Thi). Nguyen Thi écrit seulement que : « Les élèves ne répondent pas à ce qu'attend l'enseignant. L'enseignant accompagne sa réponse en montrant publiquement sur l'écran les effets du changement d'échelle » ; il n'y a pas d'interprétation sur ce point de vue liée à la variation du diamètre du cercle. L'idée de faire varier le diamètre du cercle est de nourrir la réflexion des élèves sur la perception de changement d'amplitude et de la période dépendant du rayon du cercle, mais pas sur la forme du graphe représentant la famille de fonctions trigonométriques, (voir chapitre 5).

Vous avez reçu en plus une feuille avec le chemin de M'.

Répondre aux questions suivantes dans le tableau ci-dessous.

Phase 4

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
A quelle hauteur est la cabine au bout de 22 minutes ?		
A quels moments la cabine est-elle à une hauteur de 30 mètres ?		

Le gérant décide de changer la hauteur de la lampe : il la met à 20 mètres à droite de la grande roue.
La lampe s'allume désormais 1 minute toutes les 4 minutes.

Questions	Réponses	Comment avez-vous fait ?
M va-t-il gagner un voyage gratuit ?		
Si oui, au bout de combien de tours ?		
Peut-il gagner d'autres voyages ?		

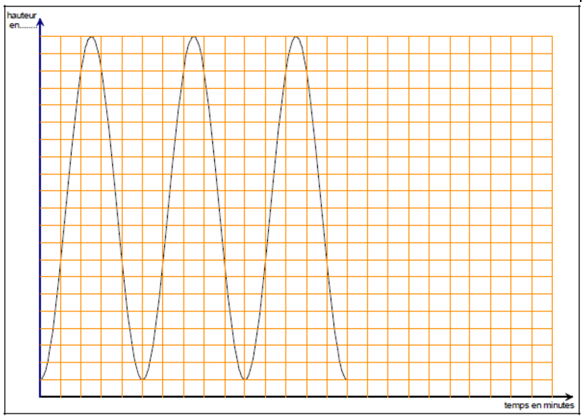


Figure 78. Graphique représentant le chemin du point M'

<u>Figure 18</u> : Extraits des fiches de la situation 3 – Phase 4, Thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 267-268

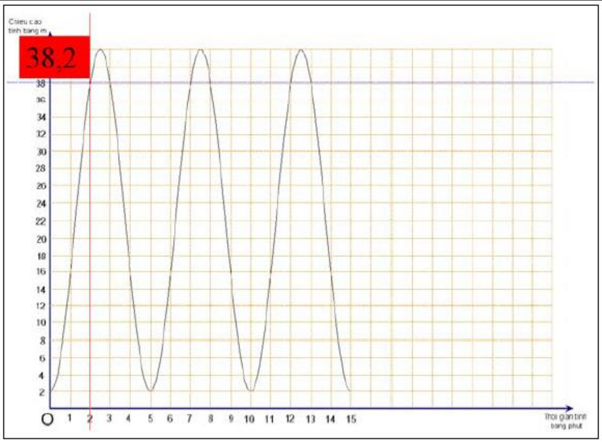


Figure 92. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

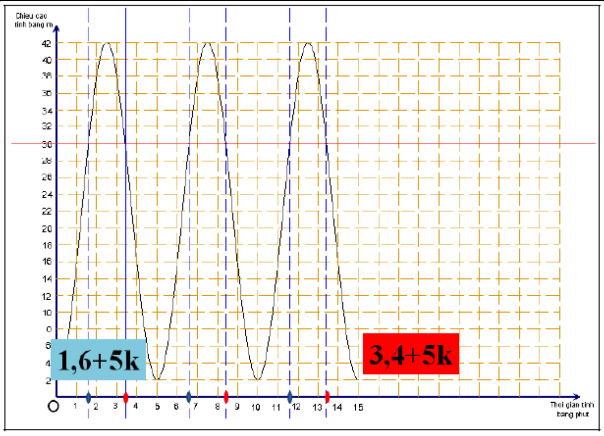


Figure 93. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

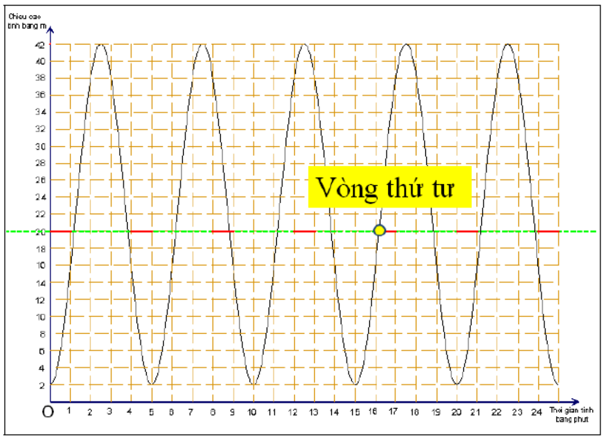


Figure 94. Ecran public de l'ordinateur de l'enseignant

On a vu que **le gérant peut utiliser le graphique pour résoudre le problème**.
P : M peut-il gagner un voyage gratuit ?
Es : Oui, **au bout de 3 tours**
Es : **Au bout de 4 tours**
P : Les segments rouges représentent les durées d'éclairement de la lampe.
On voit sur le graphique que M va gagner au bout de 4 tours. Peut-il en gagner d'autres ?
Es : **Oui**
P : Au bout de combien de tours ?
Es : **9 tours, 14 tours**
Es : **8 tours**
P : M gagne au 4e tour, le 5e non, le 6e non, le 7e non et le 8e oui. **M va gagner tous les 4 tours.**

P : Maintenant, je fais une synthèse de ce qu'on a travaillé.
Le déplacement de P entraine le déplacement du point M. **Quand P se déplace de A à U, M se déplace dans la première minute du voyage**.
(…)
Si l'on considère que ceci est l'axe des abscisses et cela est l'axe des ordonnées, **la hauteur M'P est l'ordonnée du point M' qui varie en fonction du temps**. Appelons h la hauteur de la cabine en fonction du temps, on peut noter h = f(t) ou t ↦ h = f(t).

P : Si on fait varier le diamètre du cercle (le diamètre de la roue étant toujours de 40 mètres), que se passe-t-il pour cette courbe ?
Es : La hauteur varie
P : Qu'est-ce qui ne change pas ?
Es : L'axe du temps
P : De plus, **l'allure de la courbe et la période ne changent pas**. (Script de la séance 2)

<u>Figure 19</u> : Extraits de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 282-285

Pour savoir ce que peut dire l'élève sur la fonction présentée graphiquement, par les modèles C et O, et par l'ostensif $t \mapsto f(t)$, Nguyen Thi propose aux élèves de travailler individuellement durant la phase 5, (voir *Figure 20* avec colonne de gauche). Les résultats montrent que les termes « variation » et « dépendance » sont les plus mentionnés et que le terme « périodicité » est mentionné par trois élèves issus de deux binômes.

> […], la périodicité a été utilisée par tous les binômes dans les phases 1, 3 et 4 de cette situation. Dans cette nouvelle phase, cette mention n'apparaît plus que minoritairement. Ce constat est à mettre en regard du rapport institutionnel vietnamien à la notion de fonction où la périodicité n'est pas un objet d'étude. En effet, dans les manuels scolaires, la variation d'une fonction est très importante dans le processus d'étude d'une fonction mais la périodicité d'une fonction n'est pas exploitée. (Thèse de Nguyen Thi (2013), p. 287)

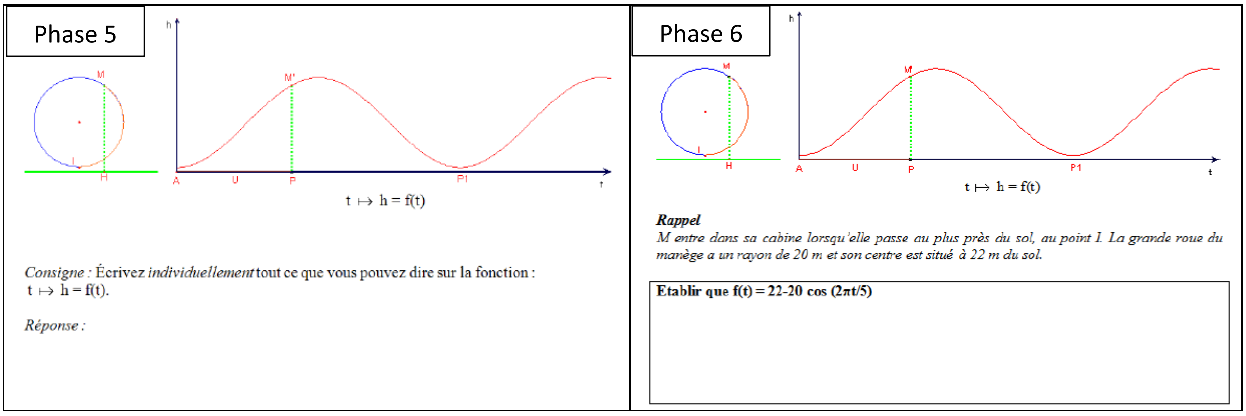


Figure 20 : Extraits de la thèse de Nguyen Thi, 2013, pp. 286-287

La situation 3 (la quatrième situation) se termine par la phase 6 (un devoir à la maison rendu par les élèves une semaine plus tard) qui consiste en un passage dans un registre algébrique de la fonction représentant la hauteur de la cabine en fonction du temps, (voir *Figure 20* avec colonne de droite). Les résultats de cette phase 6 mènent Nguyen Thi à constater que : « le passage à un registre algébrique, ultime étape du processus de modélisation, est inaccessible dans les conditions institutionnelles actuelles du lycée vietnamien », (p. 289).
Nguyen Thi a conclu que : « L'expérimentation de l'ingénierie montre que le problème de coïncidence des deux phénomènes périodiques choisi est pertinent pour concevoir la périodicité de chacun des phénomènes étudiés […] », (p. 295).

Nous faisons le constat suivant :
Dans la thèse de Nguyen Thi (2013), concernant le mouvement circulaire uniforme, lié à la correspondance entre le temps et la distance rectiligne parcourue par un point mobile sur un cercle, nous retenons par exemple que le déplacement du point P sur l'axe du temps au bout d'une minute correspond au déplacement de la cabine M pour $1/5$ tour de cercle (en considérant qu'il s'agit d'un événement uniforme), le point P décrivant l'axe du temps (la droite des réels au sens mathématique) pilote le point M (point correspondant au point P dans l'enroulement sur un cercle). Il s'agit de manière implicite d'un enroulement de la droite des réels sur un cercle, mais dans tout le plan considéré, l'unité de l'axe du temps et l'unité de longueur d'arcs de cercle ne sont pas les mêmes. Rappelons que l'ingénierie didactique de la thèse de Nguyen Thi vise principalement la périodicité d'une fonction trigonométrique ainsi que l'articulation entre le mouvement circulaire uniforme C et le mouvement harmonique O, mais ne s'intéresse pas à l'introduction des notions de fonctions cosinus et sinus. C'est une

application qui s'enrichit des connaissances apprises en mathématiques sur les fonctions trigonométriques.

2.5. Recherche faisant intervenir des arcs de cercle de rayon non unitaire

Nous traitons simultanément deux articles de Moore (2009, 2013) qui apportent des éléments complémentaires. Il s'agit d'une expérimentation d'un module d'enseignement avec des étudiants du Premier cycle universitaire aux USA.

Moore (2013) a mené une étude de 30 manuels du primaire et du secondaire aux USA : il y a trouvé, entre autres, les définitions suivantes de la mesure d'angle : quantité (amount) de rotation, nombre obtenu avec un rapporteur, mesure de la longueur d'un arc.

Moore (2013) s'est intéressé aux connaissances préalables sur les mesures d'angle de deux étudiants (bio-chimie et audiotechnologie, c'est-à-dire ne suivant pas un cursus mathématique).

Les deux étudiants interrogés savent déterminer la mesure en degrés de l'angle sous-tendant un arc de longueur donnée connaissant le rayon du cercle. Ils procèdent par égalité de rapports écrits en repérant les unités, sans leur donner un sens géométrique particulier. Ils échouent par contre quand il leur est demandé de mesurer l'ouverture d'un angle en utilisant un compas, une cordelette cirée, une règle et une calculatrice. Ils ne savent pas non plus donner un sens à un angle de mesure 1°.

Moore expérimente un module d'enseignement comportant deux séances consacrées aux mesures d'angles, d'abord en degré puis en radian ; deux autres séances traitent ensuite des fonctions trigonométriques. (Moore, 2013) présente les travaux réalisés en début des deux premières séances, (Moore, 2009) abordant l'usage fait de deux applications numériques téléchargeables autour des mesures d'angles d'abord, de la fonction sinus ensuite. Trois étudiants volontaires suivent ce module, dont les deux interviewés.

Les objets travaillés sont les suivants : l'ouverture d'un angle très étroitement mise en relation avec la longueur de l'arc intercepté sur un cercle, la quantification de ces grandeurs ; la mesure des angles en radians ; sinus et cosinus comme fonctions dont l'entrée est une mesure d'angle, leur covariation avec la longueur de l'arc intercepté sur un cercle trigonométrique.

Il faut noter que le vocabulaire utilisé est assez confus pour un didacticien français travaillant avec la théorisation des notions de grandeur et de mesure de grandeur telles que celles développées par exemple par N. Rouche (1994). Le prouve la phrase suivante du premier article.

> In order to enable coherence between the two trigonometries using angle measure, the focus of the lesson was to support students in conceptualizing angle measurement as the openness of an angle and to develop a method of quantifying this measurement. (p. 1480)

Sous le vocabulaire 'measurement', il nous semble reconnaître le concept de grandeur, la question de la mesure de cette grandeur étant évoquée en termes de 'quantifying the measurement'. C'est en tout cas ainsi que nous interprétons l'article.

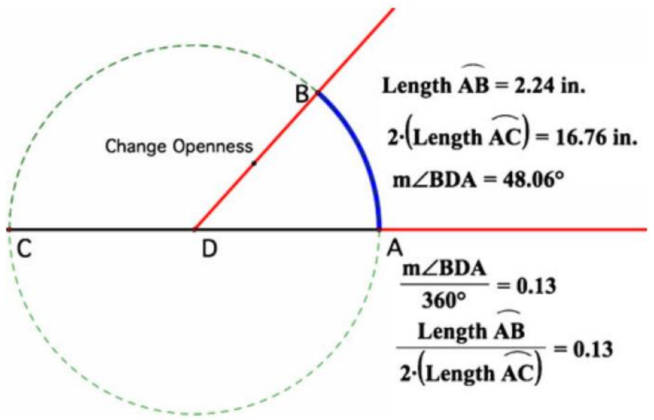
Les hypothèses à la base de l'expérimentation sont les suivantes : les difficultés des étudiants sur les fonctions trigonométriques résultent d'un enseignement qui présente le point de vue « triangle rectangle » et le point de vue « cercle unité » comme étant sans relation entre eux, ce qui fait que les étudiants ne construisent pas des conceptions cohérentes. Pour y remédier, l'auteur avance qu'il faut travailler sur la mesure des angles (en réalité, nous semble-t-il, sur les mesures de la grandeur 'ouverture d'un angle'), qu'il considère comme un point clé pour mettre en cohérence les deux points de vue sur les fonctions trigonométriques.

La première tâche dans la première séance du module consiste à graduer un rapporteur vierge en utilisant une unité[5] comme 'quip' telle que 15 quips correspondent à un tour complet. Les deux étudiants disposent pour ce faire d'une cordelette cirée, d'une règle graduée et d'un rapporteur vierge, ceux-ci ayant des rayons différents d'un étudiant à l'autre. Les étudiants sont donc conduits à observer que la longueur d'arc correspondant à 1 quip varie d'un rapporteur à l'autre. Ils finissent par conclure que le rapport $1/15$ est une valeur exprimant la fraction de la circonférence totale que représente l'arc associé à 1 quip. Ils perçoivent que **l'angle intercepte cette même fraction de la circonférence sur tous les cercles**. À la suite, les étudiants sont amenés à généraliser en affirmant que la mesure en quip d'un angle permet de quantifier **la fraction de la circonférence interceptée par cet angle sur n'importe quel cercle**, point de vue qu'ils réinvestissent pour définir ce que signifie qu'un angle a une ouverture de 1° et pour convertir 10° en quip.

On pourrait dire qu'utilisant la circonférence comme unité, est définie une mesure de la longueur des arcs d'un cercle donné puis via ces mesures, une relation d'équivalence entre arcs de cercles différents : sont équivalents les arcs correspondant à la même fraction de la circonférence. **À une telle classe d'arcs est associée la grandeur ouverture de l'angle qui intercepte ces arcs**.

À la suite est introduite la première Applet qui élargit le champ d'expérimentation grâce aux ressources dynamiques qu'elle procure. Elle permet notamment de rencontrer des situations de variabilité, soit de l'angle, soit du rayon.

Fig. 7 The protractor applet



<u>Figure 21</u> : Fig. 7-Extrait de l'article de Moore, 2013, p. 18

La deuxième séance commence par une tâche utilisant de nouveau cordelette cirée et règle graduée, les étudiants recevant des cordelettes de longueur différente. Il leur est demandé de tracer un cercle dont le rayon a même longueur que leur cordelette, puis d'estimer combien de fois il faut reporter le rayon pour obtenir la circonférence et enfin de créer des angles interceptant respectivement sur le cercle un arc de longueur approximativement égale au

[5] Moore (2013) introduit deux noms d'unités nouveaux : gip et quip (8 gips correspondent à un tour du cercle).

rayon et à 1,5 fois ce rayon. Les productions sont ensuite comparées, ce qui amène à constater que si les arcs sont de longueurs différentes, l'ouverture de l'angle au centre qui les intercepte, ne change pas.

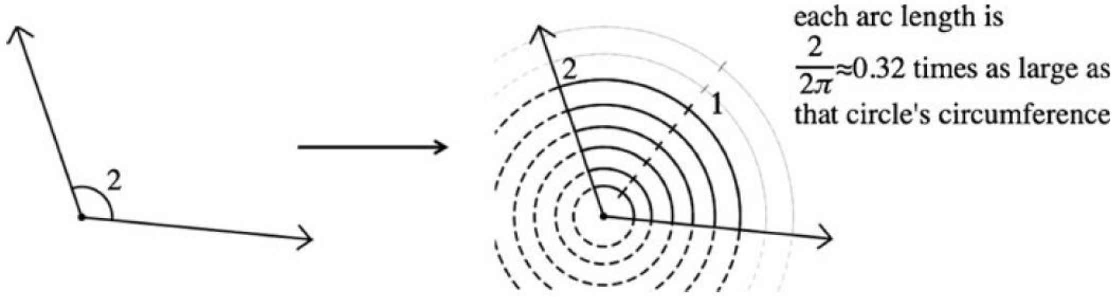


Fig. 1 An arc length image of angle measure that involves equivalence of arcs

Figure 22 : Fig. 1-Extrait de l'article de Moore, 2013, p. 6

Ceci amène les étudiants à discuter sur la possibilité d'utiliser le rayon comme unité pour mesurer l'arc de cercle et l'angle. Le radian est introduit comme 'a measure that stems from the process of measuring in radii' (p. 237). La première Applet permet de constater que le rapport de la mesure de l'arc au rayon est invariant à angle constant et que ce rapport est lui-même dans le même rapport à 2π que la mesure de l'arc à la circonférence (2009, Fig. 1, p. 1482).

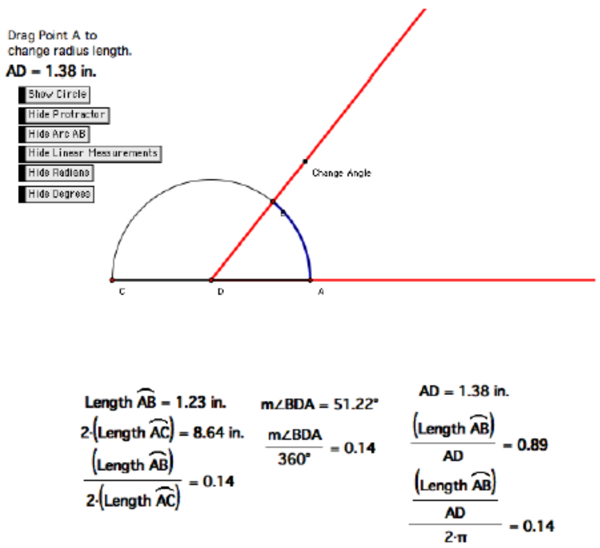


Figure 1. Angle measure applet.

Figure 23 : Figure 1-Extrait de l'article de Moore, 2009, p. 1482

Post-interview

Deux semaines après la deuxième session, les étudiants sont à nouveau confrontés à la tâche de déterminer la longueur de l'arc intercepté sur un cercle connaissant la mesure en degrés de l'angle et le rayon. La technique utilisée cette fois passe par la détermination de la fraction (ou du pourcentage) de circonférence. Une étudiante dit qu'elle conçoit la mesure en radian comme une fonction qui donne la longueur de l'arc intercepté à partir de la mesure du rayon. Confrontés à la demande de produire une formule liant longueur du rayon, longueur de l'arc intercepté et mesure de l'angle en radians, les deux étudiants produisent sans difficulté la formule attendue.

La suite du travail sur les fonctions trigonométriques n'est abordée que dans (Moore, 2009).

Sinus et cosinus sont présentées par l'auteur comme fonctions dont l'entrée est une mesure d'angle (ou de longueur d'arc) et la sortie un rapport de longueur, que ce soit dans le cas du triangle rectangle ou dans celui du cercle unité (il s'agit alors de fractions du rayon).

La seconde application permet de faire varier un point sur un cercle unité en affichant les mesures de l'arc, de l'ordonnée, (voir *Figure 24*). Elle permet également d'obtenir une représentation graphique des variations du sinus en fonction de la mesure de l'arc. Plusieurs points sont à remarquer. D'une part aucun angle, ni mesure d'angle n'apparaissent sur cet écran, seules des longueurs et mesures de longueurs y figurent. Mais d'autre part, la longueur de l'arc est mesurée dans trois unités le degré, le pied et le radian, ces deux dernières servant également pour mesurer la longueur des segments.

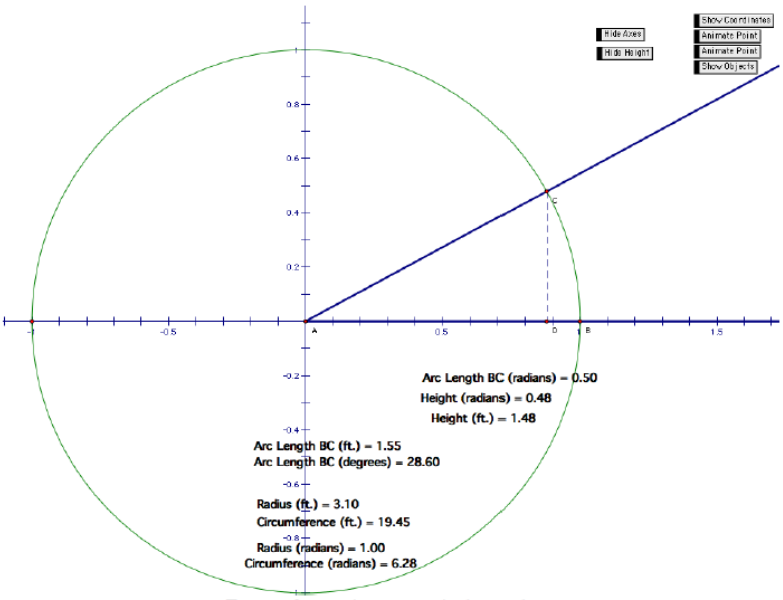


Figure 2. Motion on a circle applet.

Figure 24 : Figure 2-Extrait de l'article de Moore, 2009, p. 1485

L'Applet 2 permet de développer une vision covariationnelle de ces fonctions, sans focalisation particulière sur le cas $\sin_{rad}$ (notation de Tanguay, 2010).

On peut résumer le travail réalisé par Moore de la façon suivante. Il connecte étroitement mesure de l'ouverture d'angle et mesures des arcs interceptés, quantifiés comme fraction de la circonférence et comme fraction du rayon. Les deux objets sont quasi-fusionnés au point que la longueur d'un arc puisse être donnée en degrés mais aussi en radians, unité qui est l'objet d'un processus d'introduction attentif. Cette quasi-fusion entre mesure d'angles et mesures d'arcs permet que les fonctions trigonométriques, tout en ayant comme entrée des mesures d'angles, soient également définies à partir d'arcs de cercle.

Remarquons que, comme nous le verrons dans le chapitre 2, le passage de l'enroulement à la mesure d'angle en radian en 1re Scientifique est loin de prendre le temps accordé par ce module à l'unification des deux points de vue à l'intérieur de l'Organisation Mathématique Locale portant sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique.

2.6. Synthèse

Les travaux de recherche sur la trigonométrie et sur les fonctions trigonométriques mettent en évidence les difficultés de compréhension des notions de grandeurs « angle » et « longueur » ainsi que leurs mesures et des notions de cosinus et sinus. Il semble que les connaissances sur la trigonométrie dans le triangle rectangle soient mieux traitées par rapport à d'autres connaissances mentionnées dans les thèmes indiqués précédemment. Les difficultés à remarquer tout particulièrement concernent :

1. ce qu'est un angle : angle géométrique ;
2. ce qu'est la signification d'un angle ayant une mesure de 1°, ayant une mesure de 1 rad ;
3. au niveau du cercle, la relation entre « longueur d'un arc de cercle », « angle au centre qui intercepte l'arc de cercle » et « rayon du cercle » ;
4. au niveau du cercle, la distinction entre la longueur d'un arc de cercle et ses mesures liées au principe de l'enroulement de la droite des réels autour d'un cercle ;
5. au niveau fonctionnel, fonction trigonométrique non usuelle *vs.* fonction trigonométrique usuelle.

Dans notre travail de recherche, nous nous focalisons sur les fonctions sinus et cosinus usuelles et le passage de la trigonométrie sur le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus. Pour mieux orienter ce travail de recherche, nous abordons l'étude de curriculums sur les trois contextes indiqués au début de cette section 2, (cf. Demir & Heck, 2013 et Winsløw, 2016). Nous envisageons d'expliciter la perception de la notion de périodicité, les notions de fonctions cosinus et sinus, ainsi que l'interprétation des représentations graphiques de manière simultanée, au niveau du cercle dans le cadre géométrique repéré et au niveau du graphe de la fonction étudiée dans le cadre fonctionnel.
Notre travail de recherche se base sur l'étude de curriculums français et cambodgien, de façon à déterminer notamment l'organisation mathématique locale des trois contextes : Trigonométrie dans un triangle, Trigonométrie dans le cercle trigonométrique et Fonctions trigonométriques, (voir chapitre 2). Dans le chapitre 3, nous décrivons une théorie mathématique permettant de justifier rigoureusement les trois organisations mathématiques locales. Notre questionnaire (voir chapitre 4), élaboré dans le contexte français et à partir des trois organisations mathématiques déterminées, s'appuie sur les connaissances enseignées aux élèves de Terminale Scientifique pour évaluer les effets de l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire. L'étude préalable (*étude de curriculums*-chapitre 2, *étude mathématique*-chapitre 3, *questionnaire*-chapitre 4) nous mène à envisager une « ingénierie didactique préliminaire » (voir chapitre 5) afin de faire découvrir mathématiquement, dans le domaine de l'Analyse, les notions de fonctions cosinus et sinus, via un travail graphique. Notre situation didactique est élaborée en nous focalisant sur le contexte français pour la soumettre aux élèves de Terminale Scientifique en France, et aussi, aux élèves de 11^{e} (correspondant à la Première en France) au Cambodge, avec certaines adaptations sur le terrain, dues aux spécificités de l'enseignement cambodgien.

3. Cadre théorique

3.1. Emprunts à la Théorie Anthropologique du Didactique

Notre cadre théorique est axé pour l'essentiel sur la *Théorie Anthropologique du Didactique* (TAD dans la suite) (Chevallard, 1992, 1999, 2001).
Parmi les objets premiers de cette théorie figurent les notions d'objet, d'institution et de sujet d'une institution, puis de rapport institutionnel et rapport personnel à un objet. La première question formulée à l'issue de la section 1.1 vise ainsi à déterminer, analyser et comparer les rapports institutionnels à la trigonométrie et aux fonctions trigonométriques dans l'enseignement secondaire des deux pays, France et Cambodge. La deuxième est centrée sur l'étude du rapport personnel construit par les élèves à ces objets, en Terminale Scientifique pour la France, en 11e et 12e pour le Cambodge. La dernière question envisage d'élaborer une perspective d'évolution dans l'hypothèse d'un écart entre rapports personnels et rapport institutionnel.

3.1.1. Praxéologie mathématique

La notion de praxéologie fournit un modèle permettant de décrire et d'expliquer les savoirs et savoir-faire en fonctionnement dans une institution.
Voici un extrait du Cours 1 – Structures & Fonctions (Chevallard, 2002) :

> La théorie anthropologique du didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche* t d'un certain type T, *au moyen* d'une certaine *technique* τ, *justifiée* par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui à son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ. En bref, toute activité humaine *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter $[T/\tau/\theta/\Theta]$ et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation $[T/\tau/\theta/\Theta]$: le grec *praxis*, qui signifie « pratique », renvoie au *bloc pratico-technique* (ou *praxique*) $[T/\tau]$, et le grec *logos*, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au *bloc technologico-théorique* $[\theta/\Theta]$. Ces notions permettent de redéfinir de manière assez réaliste certaines notions courantes : ainsi peut-on considérer que, par *savoir-faire*, on désigne usuellement un bloc $[T/\tau]$, et, par *savoir*, en un sens restreint, un bloc $[\theta/\Theta]$ – ou même, mais en un sens large cette fois, une praxéologie $[T/\tau/\theta/\Theta]$ tout entière. Pour cette dernière raison, on pourra désigner aussi une organisation praxéologique comme étant une *organisation de savoir* – en se résignant alors à ne rencontrer qu'aléatoirement les points de vue institutionnels spontanés, qui font d'ordinaire un usage élitaire et parcimonieux du mot *savoir*.
> (Chevallard, 2002, *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 3-4)

On parle d'organisation praxéologique mathématique ou organisation mathématique (OM dans la suite) lorsque les types de tâches T relèvent des mathématiques.
Nous utilisons le modèle praxéologique comme outil pour décrire et analyser le rapport institutionnel à la trigonométrie et aux fonctions trigonométriques dans les enseignements secondaires français et cambodgien, jusqu'à la Terminale Scientifique pour la France et la 11e pour le Cambodge. Mais nous ne pouvons pas nous contenter pour ce faire de la notion d'OM ponctuelle (relative à un seul type de tâches) telle que définie ci-dessus ; un niveau d'organisation supérieure nous est nécessaire, ce que fournit la TAD avec les notions d'OM Locale et Régionale.
Voici un extrait du Cours 3 – Écologie & Régulation (Chevellard, 2002) :

> La mise en place d'une organisation ponctuelle $[T/\tau/\theta/\Theta]$ ne se rencontre par exemple qu'exceptionnellement dans les cours d'études réels : il n'existe guère de thèmes d'étude θ qui

ne renvoient qu'à un type de tâches T. Cette abstraction existe sans doute un peu plus pour l'élève parce que, dans l'état actuel des choses, celui-ci est évalué en priorité à propos de types de tâches T dont chacun définit pour lui un *sujet d'études* à part entière, quasi indépendants des autres. Mais pour le professeur, déjà, l'unité de compte – non bien sûr l'unité *minimale* – est plus vaste : c'est autour d'une technologie θ, qui prend alors le statut de *thème d'études,* que se regroupe pour lui un ensemble de types de tâches T_i ($i \in$ I) à chacun desquels, selon la tradition en vigueur dans le cours d'études, la technologie θ permettra d'associer une technique τ_i. L'organisation mathématique que le professeur vise à mettre en place en classe n'a plus alors la structure atomique qu'exhibe la formule $[T/\tau/\theta/\Theta]$: c'est un amalgame de telles organisations ponctuelles, que l'on notera $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in \mathrm{I}}$ et qu'on appelle organisation (mathématique) *locale*. Et c'est d'une telle organisation locale que l'élève devra alors extraire, en les reconstruisant avec ses camarades d'étude sous la direction du professeur (ou, faute de mieux, pour son propre compte), les organisations *ponctuelles* sur lesquelles sa maîtrise sera préférentiellement évaluée. Le professeur, quant à lui, doit gérer un phénomène analogue, mais à un niveau supérieur : l'organisation locale $[T_i/\tau_i/\theta/\Theta]_{i\in \mathrm{I}}$ correspondant au *thème d'études* doit être extraite d'une organisation plus vaste, qu'on dira régionale, et qu'on peut regarder formellement comme le fruit de l'amalgamation d'organisations locales admettant la *même théorie* Θ, $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta]_{i\in \mathrm{I}, j\in \mathrm{J}}$. Ce niveau, celui du *secteur d'études*, n'est au reste nullement terminal. On constate en effet, en général, l'existence de niveaux supérieurs *de détermination (d'une organisation) mathématique* : l'amalgamation de plusieurs organisations régionales $[T_{ji}/\tau_{ji}/\theta_j/\Theta_k]_{i\in \mathrm{I}, j\in \mathrm{J}, k\in \mathrm{K}}$ conduit ainsi à une organisation *globale*, identifiable à un *domaine d'études* ; et l'ensemble de ces domaines est amalgamé en une commune *discipline* – pour nous, « les mathématiques ».

(Chevallard, 2002, *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, p. 42)

C'est à travers cette notion d'organisation mathématique locale (OML dans la suite) que nous reformulons la première question présentée à la fin de la section 1.1. Décrire comment sont enseignés trigonométrie du triangle, trigonométrie sur le cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus en France et au Cambodge, sera pour nous déterminer dans les deux pays ce qui nous apparaît comme trois OML.

Nous décrirons ainsi trois OML différentes :

(1) OML portant sur la « Trigonométrie du triangle » (abrégée $\mathrm{OML}_{\mathrm{Triangle}}$), située dans le domaine de la géométrie euclidienne, relative aux relations trigonométriques dans le triangle rectangle et dans un triangle quelconque ;

(2) OML portant sur la « Trigonométrie du cercle trigonométrique » (abrégée $\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$), située dans le domaine de la géométrie repérée, relative aux relations trigonométriques dans le cercle trigonométrique (et aussi, à l'argument d'un nombre complexe dans le cadre géométrie-analytique) ;

(3) OML portant sur les « Fonctions trigonométriques » (abrégée $\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$), située dans le domaine de l'analyse, relatives aux fonctions numériques associées aux objets « cosinus » et « sinus ».

3.1.2. Transposition didactique

La transposition didactique des savoirs désigne le processus – à étudier – par lequel on passe d'un savoir d'origine (ou un savoir savant) à un savoir enseigné (Chevallard, 2011).

Remarquons que :

- le savoir savant est le savoir produit par les mathématiciens (ou par les savants en mathématiques) ;
- le savoir à enseigner est le savoir-initialement-désigné-comme-devant-être-enseigné ;
- le savoir enseigné est le savoir-tel-qu'il-est-enseigné.

Nous présentons ci-dessous le schéma suivant de la transposition didactique, adopté par Bosch et Gascón (2005). Dans ce schéma, I_1 est l'institution productrice du savoir mathématique, I_2 la noosphère, I_3 l'institution scolaire et I_4 la communauté d'étude protagoniste du processus didactique.

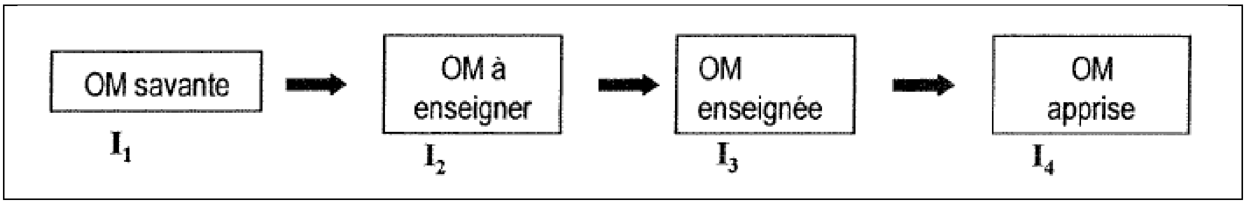


Figure 25 : Transposition didactique – Bocsh & Gascón, 2005, p. 116

Dans notre travail avec la praxéologie mathématique, nous étudions et déterminons les trois OML liées aux savoirs à enseigner (le curriculum et des manuels), puis à l'aide de l'élaboration théorique présentée dans le chapitre 3, nous définissons une OM Régionale (abrégée OMR) de référence, liée aux savoirs savants.

3.1.3. Modèle épistémologique de référence (ou OM de référence)

Bosch & Gascón (2005) précisent la différence entre les OM savantes et l'OM de référence de la manière suivante :

> L'OM de référence ne coïncide pas nécessairement avec les OM savantes d'où elle provient (parce qu'elle les inclut dans l'analyse), mais elle se formule dans des termes très proches. L'OM de référence est celle que le chercheur met à l'épreuve de la contingence et qui subit pour cela de permanents remaniements.
> (Bosch & Gascón, 2005, p. 117)

Dans le cadre de notre thèse, nous construisons l'OM de référence (Bosch & Gascón, 2005, pp. 107-122) à partir des programmes et des manuels français et cambodgien et de l'étude mathématique (chapitre 3).

L'OM de référence est initialement élaborée à partir du contexte français lors de l'analyse des manuels, puis nous faisons une étude similaire du contexte cambodgien en nous basant sur les trois OML déterminées avec l'étude praxéologique des programmes et des manuels français. Cela nous conduit à élargir les OML produites à partir de l'étude française, mais de manière légère. L'organisation praxéologique obtenue par l'amalgame des trois OML indiquées ci-dessus ne suffit pas à définir une OM de référence, notamment parce que le travail à partir des manuels ne débouche pas sur des constructions théoriques intégrant les technologies de ces OML à enseigner et leur donnant cohérence. Pour définir rigoureusement notre OM de référence, nous menons une étude mathématique qui vise à présenter une construction mathématique des concepts de cosinus et sinus, d'un angle (point de vue géométrique) et d'une variable réelle (point de vue analytique et fonctionnel, lié au cercle). Nous pouvons dire que l'OM de référence utilisée dans le cadre de notre thèse, est l'articulation des trois OML mises en évidence dans le chapitre 2 en une OMR dont la théorie est présentée dans le chapitre 3.

L'OM de référence nous sert de point d'appui pour :

- la comparaison de la praxéologie mathématique dans le secondaire en France et au Cambodge, l'analyse des technologies des manuels français et cambodgiens, leurs manques et confusions … ;
- l'élaboration d'un questionnaire et l'analyse des connaissances apprises relatives à ce questionnaire ;
- l'élaboration d'une situation didactique visant à l'appropriation par l'élève, en Terminale Scientifique, de connaissances relatives aux notions de fonctions cosinus et sinus, et l'analyse de la conception construite par l'élève relative à cette situation didactique.

3.2. Outils d'analyse des tâches de la Double Approche

Pour étudier le rapport personnel des élèves aux objets cosinus et sinus (OM apprise de Bosch et Gascón, voir *Figure 25*), nous élaborons un questionnaire (voir chapitre 4), adressé aux élèves en Terminale Scientifique et en 11^{e}-12^{e} au Cambodge. Pour concevoir cet outil et analyser *a priori* ce que ses différents items sont susceptibles de révéler sur les connaissances que nous cherchons à évaluer, nous avons recours aux ***outils d'analyse des tâches*** de la *Double Approche didactique et ergonomique* (abrégée DA) (Robert, 2008 ; Robert & Rogalski, 2002). Ceci nous permet de repérer quelles connaissances interviennent dans notre questionnaire au niveau disponible et quelles adaptations de connaissances y sont en jeu. Précisons que :

- une *connaissance mobilisable* est une connaissance déjà enseignée qui est appelée par l'énoncé ;
- une *connaissance disponible* est une connaissance déjà enseignée que l'élève doit prendre seul l'initiative d'utiliser.

Robert (2008) précise ces notions de la manière suivante :

> Que ce soit sur des connaissances anciennes ou en cours d'acquisition, et qu'elles doivent être mobilisables ou disponibles, les mises en fonctionnement peuvent varier, avec des conséquences sur les activités et les apprentissages. Si le travail consiste en une application immédiate d'une connaissance explicitée (appliquer une propriété sans calcul supplémentaire ni reconnaissance, remplacer une donnée générale par une donnée particulière…), on parle de tâche simple et isolée (TSI) ou bien d'application immédiate. Sinon, nous distinguons des grands types d'adaptations que nous présentons ci-dessous.
>
> […]
>
> Ces analyses sont relatives à un niveau scolaire donné, un programme donné et à une classe donnée. Sept types d'adaptations se dégagent, qui peuvent intervenir simultanément et qui ont chacun un spectre assez large (et encore une fois relatif) :
>
> > A1. Les connaissances (partielles) des modalités d'application des connaissances (notions, théorèmes, méthodes, formules…) : typiquement en géométrie, reconnaître la(es) configuration(s) où utiliser Thalès. Cela peut aller de reconnaissances de variables, de notations, à des reconnaissances de formules ou de conditions d'applications de théorèmes…
> >
> > A2. L'introduction d'intermédiaires – notations, points, expressions… : typiquement en géométrie introduire une parallèle, ou nommer un point pour utiliser Thalès ;

A3. Les mélanges de plusieurs cadres ou notions, les changements de points de vue, les changements ou jeux de cadres, les mises en relation ou interprétations… : typiquement en géométrie, utiliser du calcul algébrique pour obtenir le résultat (par exemple résoudre $x^2 = 1$ au milieu d'un problème de géométrie). Les énoncés qui jouent sur graphique/fonction contiennent automatiquement cette adaptation ;
A4. L'introduction d'étapes, l'organisation des calculs ou des raisonnements (cela va de l'utilisation répétée (in) dépendante d'un même théorème à un raisonnement par l'absurde faisant intervenir le théorème) : typiquement en géométrie, utiliser quatre fois le théorème de Thalès de manière non indépendante puis sa réciproque. Les étapes peuvent être classiques (étude d'une fonction) ou à imaginer ;
A5. L'utilisation de questions précédentes dans un problème ;
A6. L'existence de choix – forcés (un seul convient finalement) ou non ;
A7. Manque de connaissances nouvelles.
(Robert, 2008, *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, pp. 49-50, OCTARES 2008)

3.3. Outils empruntés à la Théorie des Situations Didactiques

Enfin, pour concevoir et analyser la situation d'enseignement que nous avons élaborée, nous empruntons des outils d'analyse de la *Théorie des Situations Didactiques* (abrégée TSD) (Brousseau, 1998) modifiés par Claire Margolinas (Margolinas, 1995) qui s'adaptent convenablement aux connaissances en jeu dans la situation, permettant d'identifier en particulier les milieux, le choix des variables didactiques.

Nous utilisons la notion de milieu en nous concentrant sur les milieux a-didactiques pour analyser les ressources dont disposent les élèves aux niveaux a-didactiques de la situation, et notamment pour analyser leurs réussites et leurs erreurs.

Nous donnons ci-dessous la définition du concept de situation a-didactique, extraite du « Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998) » de Guy Brousseau, (Glossaire_V5.pdf, 2010, dans le site de Guy Brousseau).

- Situation (a-didactique) d'action (relative à une connaissance) : C'est une situation où la connaissance du sujet se manifeste seulement par des décisions, par des actions régulières et efficaces sur le milieu et où il est sans importance pour l'évolution des interactions avec le milieu que l'actant puisse ou non identifier, expliciter ou expliquer la connaissance nécessaire.
- Situation (a-didactique) de formulation (d'une connaissance) : C'est une situation qui met en rapport au moins deux actants avec un milieu. Leur succès commun exige que l'un formule la connaissance en question (sous une forme quelconque) à l'intention de l'autre qui en a besoin pour la convertir en décision efficace sur le milieu. La formulation consiste pour ce couple d'actants à utiliser un répertoire connu pour formuler un message original, mais la situation peut conduire à modifier ce répertoire. On peut déduire théoriquement et vérifier expérimentalement qu'une formulation « spontanée » de connaissance exige que cette connaissance existe préalablement comme modèle implicite d'action chez les deux actants.
- Situation (a-didactique) de validation (sociale et culturelle) : Une situation de validation est une situation dont la solution exige que les actants établissent ensemble la validité de la connaissance caractéristique de cette situation. Sa réalisation effective dépend donc aussi de la capacité des protagonistes d'établir ensemble explicitement cette validité. Celle-ci s'appuie sur la reconnaissance par tous d'une conformité à une norme, d'une constructibilité formelle dans

> un certain répertoire de règles ou de théorèmes connus, d'une pertinence pour décrire des éléments d'une situation, et/ou d'une adéquation vérifiée pour la résoudre. Elle implique que les protagonistes confrontent leurs avis sur l'évolution du milieu et s'accordent selon les règles du débat scientifique.

Dans l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori*, nous menons l'analyse sur le potentiel d'adidacité de la situation en nous référant au modèle de structuration du milieu. Celui-ci est présenté par Brousseau dès 1986. Ce modèle est structuré au fur et à mesure afin d'éclairer les différentes positions relatives aux trois places Milieu (M), Élève (E), Professeur (P) des systèmes en présence dans la *situation didactique*.
La situation S_n de niveau n, qui correspond aux rapports entre M_n, E_n et P_n est notée $S_n = \{M_n, E_n, P_n\}$. Brousseau caractérise le milieu comme un « oignon », dans une structure récursive dans laquelle la situation S_n devient le milieu de la situation S_{n+1}, où le niveau n est englobé dans le niveau $n + 1$.
Margolinas (1995) puis Bloch (2000, 2005) ont fait évoluer ce modèle et sa représentation (voir *Tableau 4*).
Le modèle de structuration du milieu comprend sept niveaux regroupés en trois grandes classes :

- « sur-didactique » désigne les niveaux strictement positifs ;
- « didactique » désigne le niveau 0 ;
- « a-didactique » désigne les niveaux strictement négatifs.

La situation a-didactique dans ce modèle est constituée des trois situations suivantes dans l'ordre d'ascendance s'orientant vers la situation didactique : situation objective, situation de référence, situation d'apprentissage. Dans ces deux derniers niveaux a-didactiques, l'enseignant occupe successivement des positions de dévolueur, observateur (dans la situation de référence) et régulateur (dans la situation d'apprentissage), il n'enseigne pas.

Le texte suivant décrit les milieux correspondant aux trois niveaux négatifs dans l'ordre d'ascendance vers le niveau 0 :

> *Le milieu Matériel* : Le milieu matériel M-3 doit permettre aux étudiants d'agir avec leurs connaissances, d'entrer dans la question, mais il n'y a pas d'enjeu mathématique. La situation S-3 correspondant au milieu matériel n'est pas une situation finalisée du point de vue des connaissances.
> *Le Milieu Objectif* : Le milieu M-2 doit permettre aux étudiants de se poser des questions, de développer des stratégies résultant de leurs actions sur le milieu objectif, les rétroactions du milieu leur permettant alors de valider ou d'invalider leurs actions.
> *Le Milieu de Référence* : Les stratégies développées dans le milieu M-2 deviennent dans la situation d'apprentissage S-1 des énoncés. Le milieu M-1 est constitué de ces énoncés et des validations théoriques qu'ils peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif.
> (Maurel & Sackur 2002, *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques en 2001*, pp. 171-172)

<table>
<tr><td>M3 :
M-de construction</td><td></td><td>P3 :
P-noosphérien</td><td>S3 :
situation noosphérienne</td><td rowspan="3">Sur
didac
tique</td></tr>
<tr><td>M2 :
M-de projet</td><td></td><td>P2 :
P-constructeur</td><td>S2 :
situation de construction</td></tr>
<tr><td>M1 :
M-didactique</td><td>E1 :
E-réflexif</td><td>P1 :
P-projeteur</td><td>S1 :
situation de projet</td></tr>
<tr><td>M0 :
M-d’apprentissage : Institutionnalisation</td><td>E0 :
Elève</td><td>P0 : Professeur enseignant</td><td>S0 :
situation didactique</td><td></td></tr>
<tr><td>M-1 :
M-de référence : formulation validation</td><td>E-1 :
E-apprenant</td><td>P-1 : P régulateur</td><td>S-1 :
situation d’apprentissage</td><td rowspan="3">a-
didac
tique</td></tr>
<tr><td>M-2 :
M-objectif : action</td><td>E-2 :
E-agissant</td><td>P-2 :
P-observateur, dévolueur</td><td>S-2 :
situation de référence</td></tr>
<tr><td>M-3 :
M-matériel</td><td>E-3 :
E-objectif</td><td></td><td>S-3 :
situation objective</td></tr>
</table>

Tableau 4 : Schéma de structuration du milieu

4. Méthodologie générale de la thèse

Rappelons nos questions de recherche :

> **QR1**. Comment trigonométrie du triangle, trigonométrie sur le cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus sont-elles enseignées en France et au Cambodge ?
> En particulier, comment est prise en charge, dans les manuels, l’articulation entre ces deux trigonométries ? Quels objets d’étude servent de points d’appui à cette articulation ? Quel rôle y joue l’extension des points de vue sur les angles ?
>
> **QR2**. Qu’est-ce que les élèves ont appris dans l’enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus à travers les principaux cadres (géométrique, géométrie-repérée, fonctionnel) ? Quelles sont leurs difficultés, en particulier relativement à l’articulation des différents cadres, sur le sinus et le cosinus ?
>
> **QR3**. Pouvons-nous élaborer une *théorie mathématique* à l’usage des enseignants de mathématiques du secondaire ?
>
> **QR4**. Au vu des difficultés mises en évidence, est-il possible de concevoir une situation d’enseignement prenant appui sur la trigonométrie du cercle pour introduire les notions de fonctions sinus et cosinus ?

On aura remarqué que nous avons introduit une nouvelle question QR3 dont le lien avec le projet d’élaboration d’une OMR de référence (p. 53) est évident. Nous lui donnons d’autres justifications dans la partie 4.3.

Nous présentons ici notre méthodologie structurée en quatre QR :

1. Étude des rapports institutionnels (les trois OML à enseigner, chapitre 2) ;
2. Étude mathématique (chapitre 3 – mise en évidence des objets mathématiques rigoureux permettant de mettre en lumière ce qui manque dans les programmes et les manuels étudiés au chapitre 2 et d'ouvrir des perspectives dans l'amélioration de l'enseignement et de l'apprentissage dans le secondaire) ;
3. Étude des rapports personnels (les trois OML apprises, chapitre 4) ;
4. Mise en place d'une situation didactique (nourrir la réflexion de l'élève dans l'appropriation du passage de l'OML_{CTrigo} vers l'$OML_{FoncTrigo}$, chapitre 5).

4.1. Étude des rapports institutionnels : méthodologie de l'étude des programmes et des manuels

Pour répondre à notre **première question de recherche** « QR1 », nous commençons par étudier les textes officiels et des manuels de mathématiques actuels liés à nos questions de recherche préliminaires, dans les deux institutions française et cambodgienne ; c'est ce que nous nommons ici l'étude de curriculum (chapitre 2). Conformément à nos choix théoriques présentés dans la partie précédente, nous nous focalisons spécifiquement sur l'étude des praxéologies mathématiques à enseigner, plus précisément sur l'étude des trois OM locales correspondant à la trigonométrie du triangle, à la trigonométrie sur le cercle trigonométrique et enfin aux fonctions trigonométriques.

Pour déterminer les praxéologies mathématiques à enseigner, nous choisissons les manuels de mathématiques à partir desquels nous réalisons notre étude : du côté français, trois manuels par niveau (en suivant si possible la même collection/éditeur (collège-lycée)) depuis la 4^{e} jusqu'à la Terminale Scientifique (en Seconde et en Terminale Scientifique, nous analyserons quatre manuels), et du côté cambodgien, les deux manuels officiels, au lycée, par niveau (10^{e}, 11^{e} et 12^{e}).

Par niveau, nous identifions les objets de savoir en lien avec nos questions de recherche préliminaires et les praxéologies mathématiques liées à ces objets de savoir. Puis, nous menons une étude comparative sur les praxéologies mathématiques, d'un niveau à l'autre. S'agit-il d'une continuité, d'une extension, d'une rupture, avec ou sans articulation ?

Le travail réalisé pour déterminer les OML à enseigner ne nous conduit pas à analyser la partie « Exercices » des manuels étudiés. Ceci signifie que notre étude des rapports institutionnels est incomplète puisqu'elle ne nous permet pas de décrire ce que les institutions attendent que les élèves fassent avec les savoirs et techniques enseignés. Ceci résulte de l'ampleur du champ de savoir correspondant aux trois OML que nous avons choisi de déterminer du fait que « trigonométrie du triangle » et « trigonométrie sur le cercle trigonométrique » sont impliquées dans les deux pays dans le processus de construction des fonctions sinus et cosinus. Un tel choix a débouché en France sur la nécessité de prendre en compte cinq années du cursus.

4.2. Étude des rapports personnels : questionnaire d'évaluation des effets de l'enseignement

Afin de répondre à notre **deuxième question de recherche** « QR2 », c'est-à-dire de déterminer les rapports personnels des élèves aux praxéologies mathématiques à enseigner, nous élaborons un questionnaire qui sera posé en Terminale Scientifique en France, en 11^{e} et 12^{e} au Cambodge.

Pour des raisons de planification, cette phase de notre travail est menée parallèlement à l'étude praxéologique des manuels de mathématiques français du secondaire depuis la 4^{e} jusqu'à la Terminale Scientifique (chapitre 2). Cette étude nous a rapidement permis de repérer les types de tâches clés des trois OML en jeu et donc de choisir un ensemble de questions liées à ces types de tâches. Ce questionnaire a été élaboré dans le cadre institutionnel français et il s'adresse aux élèves en Terminale Scientifique. L'objectif du questionnaire est d'identifier la réussite, l'échec, les difficultés des élèves relativement aux savoirs enseignés relevant des trois OML. Ce questionnaire a deux versions semblables A et B afin d'éviter d'éventuelles communications entre élèves assis côte à côte lors de la passation du questionnaire. Nous résumons les six questions du questionnaire :

- Question I : elle porte sur l'OML_{Triangle} dans le cadre géométrique du domaine « Géométrie ». Elle consiste à déterminer numériquement les valeurs du cosinus et du sinus d'un angle dans un triangle (rectangle) dont on connaît les longueurs des trois côtés. (voir chapitre 4, pp. 217-218 ; pour version B, voir l'annexe n° 3, p. 410)
- Question II : elle porte sur l'OML_{CTrigo} dans le cadre géométrie-repérée du domaine « Géométrie repérée ». Elle consiste à déterminer le cosinus et le sinus d'un angle orienté connaissant les coordonnées du point du cercle trigonométrique (rayon unité) associé à l'angle orienté. (voir chapitre 4, pp. 218-220 ; pour version B, l'annexe n° 3, p. 410)
- Question III : elle porte sur l'$OML_{\text{FoncTrigo}}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ». Elle consiste en un travail graphique dans le registre graphique avec la courbe représentant la fonction cosinus/sinus donnée et en une exploitation de la périodicité et de la parité de la fonction cosinus/sinus. La périodicité est la connaissance centrale de cette question III, (voir chapitre 4, pp. 220-222, et aussi, l'annexe n° 3, pp. 411-412)
- Question IV : elle porte sur l'$OML_{\text{FoncTrigo}}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ». Elle conduit les élèves à utiliser les courbes représentant des fonctions trigonométriques données pour obtenir des informations et en une exploitation de la parité et de la périodicité d'une fonction. (voir l'annexe n° 3, pp. 412-415)
- Question V : elle porte sur l'$OML_{\text{FoncTrigo}}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ». Elle consiste en des réponses à choix multiples sur l'ensemble de définition, sur l'ensemble des images, sur la parité d'une fonction, sur la périodicité d'une fonction, sur la dérivabilité d'une fonction. (voir l'annexe n° 3, pp. 415-418)
- Question VI : elle porte sur l'$OML_{\text{FoncTrigo}}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ». Elle consiste en des réponses à choix multiples sur la/les solution(s) d'une équation trigonométrique variable x sous forme $\cos ax = b$ (resp. $\sin ax = b$) où a est un nombre entier positif et b n'est pas une des valeurs remarquables. (voir l'annexe n° 3, p. 418)

En ce qui concerne l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* du questionnaire, nous faisons le choix d'utiliser des outils d'analyse des tâches de la DA (Robert, 2008 ; Robert et Rogalski, 2002). Nous mettons en évidence les adaptations des connaissances apprises par l'élève et la

mise en fonctionnement des connaissances au niveau disponible qui apparaissent dans les différentes questions.
Vus les résultats obtenus lors de l'analyse *a posteriori* du questionnaire et vue notre question de recherche, nous faisons le choix de nous concentrer sur la question des transitions entre les trois OML (vu l'intérêt important des trois premières questions du questionnaire portant dans l'ordre l'$OML_{Triangle}$, l'OML_{Ctrigo} et l'$OML_{FoncTrigo}$) plus que sur l'enseignement des fonctions. Dans le corps de la thèse, nous nous focalisons sur les trois premières questions I, II, III.1 du questionnaire, en présentant les intentions didactiques et les choix faits, puis les analyses *a priori* (version A) et *a posteriori* (versions A et B) et pour finir, nous comparons les difficultés rencontrées ainsi que les emplois réussis des connaissances enseignées chez les élèves français et chez les élèves cambodgiens. (Voir chapitre 4)

Nous avons fait passer, en mars 2016, le questionnaire avec deux versions A et B, dans deux classes de Terminale Scientifique de deux lycées en France.
Nous menons l'analyse *a posteriori* du questionnaire avec les données de 40 copies d'élèves des deux classes. Nous précisons les phases de procédure de cette analyse dans le chapitre 4 (p. 232).
Le questionnaire français est traduit en khmer, dans ses deux versions A et B de façon à être passé, en mars et avril 2017, sur le terrain cambodgien. Or, comme il a été dit précédemment, ce questionnaire a été élaboré à partir de l'étude praxéologique en France. Les élèves cambodgiens sont donc évalués avec un instrument qui n'est pas conçu en relation étroite avec le rapport institutionnel souhaité au Cambodge.

La méthodologie d'analyse *a posteriori* est similaire à celle que nous avons adoptée précédemment du côté français.

4.3. Étude mathématique

Le passage de la trigonométrie dans un triangle vers la trigonométrie dans le cercle trigonométrique, puis vers les fonctions cosinus et sinus n'est pas du tout simple car il y a un changement de cadres d'étude, un changement d'objets d'étude (grandeurs « angle » et « longueur » – et leurs mesures – nombres réels) ; de plus, les mêmes signes « cos » et « sin » sont utilisés pour désigner des objets d'étude différents. Nous pouvons faire l'hypothèse que les difficultés de compréhension des concepts liés à ces thèmes existent non seulement chez les élèves mais aussi chez certains enseignants dans l'enseignement de mathématiques du secondaire.

Confirmant les résultats produits par les travaux déjà existants (cf. État de l'art), l'étude des manuels français, particulièrement des discours technologiques qui s'y rencontrent dans la partie Cours ainsi que l'analyse des difficultés des élèves français de Terminale Scientifique dans leurs réponses au questionnaire, ont mis en évidence que l'articulation de la trigonométrie du triangle rectangle avec la trigonométrie sur le cercle trigonométrique d'une part, et de cette dernière avec l'approche fonctionnelle du sinus et du cosinus représentaient une source de confusions tant pour les auteurs de manuels que pour les élèves.
Des difficultés sont notamment apparues autour de la coordination des notions de mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique se basant sur celle d'un angle orienté, de

l'introduction du radian comme unité de mesure des angles orientés et de l'introduction du cosinus et du sinus d'un angle orienté puis d'un nombre réel.

Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés chez les auteurs de manuels peuvent s'expliquer par le manque d'une théorie mathématique permettant de définir le concept clé d'angle orienté de deux vecteurs, présent sans être jamais défini dans les manuels français, et de donner une cohérence aux trois OM Locales que nous avons explorées dans notre travail.

Nous nous sommes donc posé la question de recherche « QR3 ». Pour y répondre, nous menons une étude mathématique (voir chapitre 3), en nous focalisons sur le contenu mathématique des concepts de fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle, avec deux approches :

- approche géométrique : Fonctions cosinus et sinus d'un angle orienté ;
- approche analytique : Fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle.

Un point particulier de cette étude concerne les raisons d'être du radian comme unité de mesure des angles orientés (voir la section 3 du chapitre 3).

Rappelons que l'étude mathématique constitue une partie de la construction de l'OM de référence dans le cadre de notre thèse, (voir p. 53).

Nous espérons que l'étude mathématique que nous élaborons dans le chapitre 3 pourra servir aux enseignants du secondaire afin de mieux comprendre ces objets de savoir et afin de mieux transmettre les savoirs enseignés visés, dans leur enseignement.

4.4. Mise en place d'une situation didactique

Pour répondre à la **quatrième question de recherche** « QR4 », nous élaborons une situation didactique pour des élèves en Terminale Scientifique afin de leur faire découvrir les notions de fonctions cosinus et sinus et leurs propriétés (en particulier, périodicité et parité). Dans l'élaboration de la situation didactique, nous nous appuyons sur les résultats présentés par les chapitres 2, 3 et 4.

Nos objectifs principaux lors de l'élaboration de la situation didactique sont :

- d'une part, faire réfléchir les élèves sur le fait que l'on définit les notions de fonctions cosinus et sinus à partir d'un arc du cercle trigonométrique, en lien avec le principe de l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique (cf. Demir & Heck, 2013), sans les angles orientés pour tenter de contourner l'obstacle didactique ;
- et d'autre part, expliciter aussi clairement que possible la périodicité d'une fonction et faire éviter une confusion entre « angles » et « nombres réels » de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus) en s'appuyant sur le cercle comme représentant géométrique du quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Méthodologie de l'élaboration de la situation didactique

Nous précisons les raisons qui nous mènent à élaborer une situation didactique, notre choix des variables didactiques, notre choix d'emprunt des outils d'analyse de la *Théorie des Situations Didactiques* en nous focalisant sur le potentiel d'adidacité de la situation, (voir la section 2 du chapitre 5).

Nous construisons une ingénierie didactique préliminaire qui est composée de deux situations didactiques :

1. Une situation didactique avec papier-crayon, notée « SD-P ».
   SD-P correspond à la partie A (en lien avec l'OML_{CTrigo}), intitulée « Coordonnées d'un point associé à un nombre réel – lecture graphique sur un cercle ». Elle conduit les élèves à travailler avec papier-crayon, sans rappeler que sont en jeu les notions de cosinus et sinus.
2. Une situation didactique avec GeoGebra, notée « SD-G ».
   SD-G correspond à la partie B, intitulée « Découvrir les propriétés de la fonction cosinus » pour la Demi-Classe 1, et pour la Demi-Classe 2, « Découvrir les propriétés de la fonction sinus ». Elle consiste à travailler, avec le logiciel GeoGebra, avec deux fenêtres de graphique :
   - à gauche, il s'agit d'un graphique (affiché sur l'écran « Graphique ») visant à la lecture sur un cercle de rayon R (revoir la figure donnée dans la partie A) ;
   - à droite, il s'agit d'un graphique (affiché sur l'écran « Graphique 2 ») ayant pour but d'illustrer les connaissances visées, correspondant à l'$OML_{FoncTrigo}$.

   Avec l'étude visée à l'aide des deux graphiques, nous cherchons à illustrer l'articulation entre les nouvelles connaissances visées et les connaissances antérieures liées étroitement à la trigonométrie sur le cercle trigonométrique, vues en Seconde et en 1re Scientifique, autrement dit, le passage de la trigonométrie sur le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus.

Cette situation didactique débute avec un cercle de rayon R. À partir du cercle trigonométrique vu en Seconde et en 1re Scientifique, les élèves travaillent, dans la partie A, sur les fonctions a et b définies par les coordonnées d'un point M, sur le cercle, qui est le point image d'un nombre réel t dans l'enroulement de la droite des réels (sans rappeler qu'il s'agit des cosinus et sinus ; ici : $a = R\cos(t/R)$ et $b = R\sin(t/R)$) en complétant un tableau de valeurs sur les trois premiers tours (pour faire apparaître la notion de périodicité), un tableau de variations sur les deux premiers tours et un tableau de signe sur le premier tour. Le travail se poursuit, dans la partie B, sur le logiciel GeoGebra avec les deux fenêtres de graphique décrites ci-dessus afin de mettre en évidence le lien entre le repérage sur le cercle trigonométrique et les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus avec l'intérêt de pouvoir restreindre l'étude au cas particulier où $R = 1$.

Nous analysons *a priori* et *a posteriori* l'activité de l'élève, avec des outils d'analyse de la TSD, en niveau de milieux de M_{-3} à M_{-1} dans la situation a-didactique. L'analyse est menée question par question en nous centrant sur les *interactions Élève-milieux*.

Nous présentons ci-après le schéma décrivant l'ensemble du processus dans notre travail de thèse.

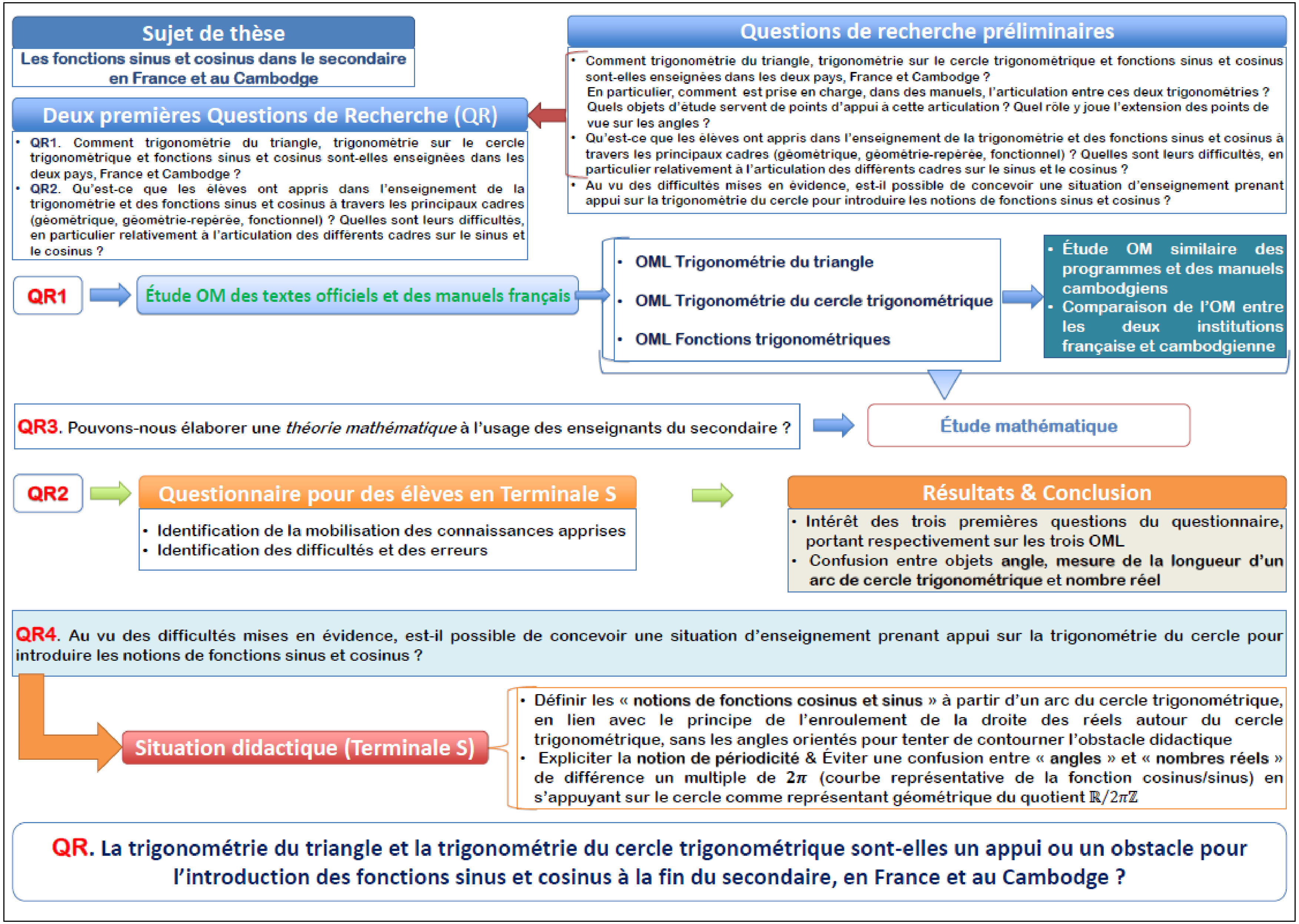


Tableau 5 : Schéma illustrant l'ensemble du processus de travail de thèse

Chapitre 2 : **Étude de curriculum**

Dans l'enseignement de mathématiques dans le secondaire, les fonctions sinus et cosinus ont leurs caractéristiques propres. Elles ne sont pas un couple de fonctions réciproques comme les fonctions exponentielle et logarithme népérien, par exemple. Elles sont considérées comme deux fonctions conjointes car l'étude des deux fonctions s'effectue de manière conjointe. Les termes « cosinus » et « sinus » ne sont pas entendus pour la première fois lors de l'introduction des notions de fonctions sinus et cosinus. En France, ces termes ont déjà été rencontrés de manière continue depuis le collège : « cosinus » en 4^{e} puis « sinus » en 3^{e}, puis lors des études secondaires au lycée. Dans les cinq dernières années du secondaire, il s'agit des mêmes termes : « cosinus » et « sinus », et des mêmes signes utilisés, « cos » et « sin », mais il ne s'agit pas des mêmes objets d'étude.
Donc, pour mieux répondre à notre première question de recherche (QR1) : Comment trigonométrie du triangle, trigonométrie sur le cercle trigonométrique et fonctions sinus et cosinus sont-elles enseignées en France et au Cambodge ?, nous étudions les textes officiels et des manuels de mathématiques actuels dans les institutions française et cambodgienne. Et pour cela, nous empruntons la notion de praxéologie mathématique à la *Théorie Anthropologique du Didactique* (TAD) car il s'agit d'un modèle qui consiste à décrire et à expliquer les savoirs mathématiques en fonctionnement dans une institution.

Nous exposons maintenant l'étude des praxéologies mathématiques des programmes et des manuels de mathématiques dans les deux institutions française et cambodgienne, l'une après l'autre. Puis, nous faisons une comparaison de l'organisation mathématique entre ces deux institutions.
<u>Remarque</u> :

1. Le thème d'étude en Terminale Scientifique est « Fonctions sinus et cosinus ». Selon les propos de certains manuels, dans ce thème, il s'agit d'une extension pour l'étude d'une fonction trigonométrique dans la partie Savoir-faire. Dans le cas où nous restreignons à ce thème « Fonctions sinus et cosinus », nous ne trouvons que certains tâches lorsque nous nous focalisons sur les fonctions sinus et cosinus (par exemple, étudier la dérivabilité de la fonction sinus) ; et nous ne trouvons aucun type de tâches. Nous souhaitons déterminer les types de tâches existants dans les manuels étudiés de Terminale Scientifique concernant notre thème d'étude, et pour cela, nous faisons le choix, dans le cadre de notre travail de thèse, d'intituler un paragraphe : « Fonctions trigonométriques en Terminale Scientifique » dans la sous-section 3.3 de ce chapitre 2. Donc, nous voulons préciser que pour mieux définir les types de tâches existants dans les manuels étudiés de Terminale Scientifique, nous sortons un peu de la méthodologie générale, c'est-à-dire que nous étudions aussi la partie « Exercices » en supplément.
2. Concernant les manuels de mathématiques français étudiés, bien que nous commencions ce projet de thèse en Octobre 2015, nous étudions des manuels de mathématiques français récents qui existent à la bibliothèque de l'IREM à Paris 7, et qui répondent aux programmes actuels en cours.

Nous abordons maintenant par la méthodologie de l'étude des programmes et des manuels, la méthodologie pour les OM locales.

1. Méthodologie de l'étude des programmes et des manuels

Nos méthodologies d'analyse des manuels français et cambodgiens sont les suivantes :

1.1. Méthodologie d'analyse des manuels français depuis la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique

À chaque niveau (ou chaque institution), nous déterminons les éléments des programmes relatifs aux thèmes (OML) à étudier. Pour choisir les manuels, nous regardons, par niveau, cinq manuels[6] de la bibliothèque de l'IREM à Paris 7. Comme notre thème principal de recherche s'adresse aux fonctions sinus et cosinus en Terminale Scientifique, pour les cinq manuels de départ, nous sélections d'abord cinq manuels de Terminales Scientifiques de grandes éditions qui sont bien diffusées : manuel Odyssée-édition Hatier, manuel Math'x-édition Didier, manuel Transmath-édition Nathan, manuel Déclic-édition Hachète, manuel Hyperbole-édition Nathan. Ensuite, nous choisissons de manière descendante pour les manuels de 1re Scientifique et de Seconde des mêmes éditions. Pour les manuels choisis aux niveaux 4e et 3e au collège, nous suivons le même procédé que précédemment. Remarquons que les collections de manuels au lycée et celles au collège ne sont pas les mêmes, et que seule la collection Transmath-édition Hatier existe depuis le collège jusqu'au lycée. Nous étudions d'abord les cinq manuels choisis par niveau en nous focalisant sur les contenus mathématiques et sur les organisations didactiques. Or, nous étudions des manuels depuis la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique, cinq manuels par niveau, c'est beaucoup. Donc, dans le cadre de notre thèse, nous faisons le choix d'étudier principalement trois manuels par niveau, et nous éliminons deux manuels par niveau. Nous éliminons deux des cinq manuels qui sont vraiment très proches, au niveau des contenus mathématiques et au niveau de l'organisation didactique, de ceux de nos trois manuels sélectionnés.

Concernant l'analyse des programmes et des manuels, nous étudions trois manuels par niveau, dans l'ordre ascendant, depuis la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique. Dans chaque manuel, nous analysons particulièrement les trois premières parties fondamentales : « Activités », « Cours » et « Savoir-faire », parce que ces trois parties sont les trois parties essentielles pour notre construction d'une praxéologie mathématique dans une institution.

Au lycée, il y a un cas exceptionnel où nous étudions, en Seconde et en Terminale Scientifique, un manuel supplémentaire. En effet, au regard du programme, les manuels de Seconde et de Terminale Scientifique ne font pas tous le même choix relativement aux objets d'étude visés. Par exemple :

- en Seconde, le manuel Déclic 2014 parle de « *mesure en radian d'un arc de cercle* » dans la définition donnée à la page 140. Pour nous, cela est une ambiguïté de la part des auteurs du manuel Déclic.
- en Terminale Scientifique, pour faire découvrir les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle, les auteurs du manuel Hyperbole 2012 se basent seulement sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle

[6] Nous utilisons des manuels récents qui sont déposés dans la bibliothèque de l'IREM à Paris 7. Les manuels de Terminale Scientifique récents sont ceux d'édition 2012 correspondant au programme 2011.

trigonométrique, et pour d'autres manuels de Terminale Scientifique 2012, les auteurs se basent plutôt sur les mesures en radians d'un angle orienté.

En ce qui concerne la sous-section « Extrait des manuels » (dans la section 3. Étude du curriculum français) pour chaque niveau, nous présentons la composition des trois sous-sous-sections suivantes :

- Liste des objets de savoir visés : nous déterminons la liste des objets de savoir abordés dans chaque manuel dans la partie Cours. Comme les manuels se différencient peu sur ce point, nous dressons une liste des objets de savoir visés, obtenue par la réunion des objets de savoir ; nous complétons par une étude des activités.
- Organisation mathématique : nous déterminons une praxéologie mathématique à l'aide des trois parties fondamentales des manuels : « Activités », « Cours » et « Savoir-faire ».
- Points de réflexion et commentaires : après l'étude dans les deux sous-sous-sections qui précèdent, nous faisons à chaque fois une sorte de synthèse (mais pas de manière systématique), comme une première discussion ciblant à la question de recherche. Il s'agit de faire ressortir des éléments importants, à chaque niveau, concernant les objets cosinus et sinus visés, proposés par les manuels répondant au programme correspondant pour chaque niveau/institution.

1.2. Méthodologie d'analyse des manuels officiels cambodgiens au lycée (10^{e}, 11^{e} et 12^{e})

Nous ne faisons aucun choix des manuels car dans l'institution cambodgienne, au lycée, il n'y a que deux manuels officiels pour chaque niveau de classe.

Il s'agit d'une méthodologie d'analyse similaire à celle de l'analyse des manuels français, mais avec adaptation au sujet de l'étude praxéologique des manuels.

2. Méthodologie pour les OM locales

Nous nous intéressons à présenter d'abord notre méthodologie pour déterminer les trois OM locales (ou régionales pour l'étude des fonctions) existantes dans des manuels français.

Nous étudions les programmes et des manuels, depuis la 4^{e} jusqu'à la Terminale Scientifique, concernant la trigonométrie et les fonctions sinus et cosinus. Nous nous focalisons d'abord sur *le contenu*, *les connaissances attendues et les commentaires du programme* concernant chaque niveau relatif à notre sujet de recherche, puis sur l'organisation de chaque thème (ou chapitre) relatif au programme dans des manuels. Remarquons que chaque chapitre des manuels est généralement composé des parties suivantes : *Prérequis* (ou Rappels) ; *Activités d'approche* ; *Cours* ; *Savoir-faire* (ou Méthodes) ; *Exercices*.

Dans le programme de chaque institution (ou niveau), nous nous intéressons particulièrement aux « Capacités » ou bien « Connaissances attendues », et dans des manuels, aux trois parties principales : « Activités d'approche », « Cours » et « Savoir-faire ». En effet, apparaissent les types de tâches ayant pour but de mettre en évidence les objets de savoir visés dans l'enseignement de mathématiques pour chaque institution, les techniques et les technologies associées.

Nous exposons dans l'ordre : méthodologie pour Types de tâches T, méthodologie pour Techniques τ associées, méthodologie pour Technologies θ (ou objets de savoir) associées.

2.1. Méthodologie pour Types de tâches *T*

Les connaissances attendues dans le programme sont notre point de départ pour lister les types de tâches puis nous les vérifions en examinant ce que proposent les manuels étudiés. Nous trouvons explicitement, dans la partie « Savoir-faire » des manuels des types de tâches (abrégés T) proposés de manière un peu diverse. Cependant, nous nous concentrons sur un point de vue mathématique pour distinguer nos T déterminés, et non sur le niveau de difficulté à accomplir les tâches d'un même type. Précisons que la partie « Savoir-faire » explicite la mise en œuvre des objets de savoir visés et leurs exploitations mathématiques (autrement dit, ce que l'enseignant doit enseigner et ce que l'élève doit apprendre et maîtriser).

Nous constituons une liste de types de tâches en intégrant tous les types rencontrés au moins une fois lors de notre étude des programmes et manuels, afin d'obtenir une liste aussi complète que possible.

Nous indexons finalement la liste des T en réunissant les listes des trois OML dans l'ordre suivant :

1. OM locale portant sur la « Trigonométrie dans le triangle » (abrégée $\text{OML}_{\text{Triangle}}$),
2. OM locale portant sur la « Trigonométrie dans le cercle trigonométrique » (abrégée $\text{OML}_{\text{CTrigo}}$), et
3. OM locale portant sur les « Fonctions trigonométriques » (abrégée $\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$) qui se situent dans le thème d'étude « Fonctions sinus et cosinus » en Terminale Scientifique.

Par ailleurs, dans le but de limiter la longueur de la liste et de repérer les continuités d'une institution aux suivantes, nous ne distinguons pas dans l'indexation les types qui sont une extension d'un type précédent du fait de l'introduction du sinus et de la tangente. Ainsi nous ne différencions pas le type « Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle », rencontré en 4$^{\text{e}}$, du type « Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle », en 3$^{\text{e}}$.

Chaque T est alors déterminé par un « verbe d'action » et un « complément fixé ».

Avant de continuer notre exposé, nous préférons présenter d'abord la liste des types de tâches T ci-après :

Nous classons les types de tâches T selon les trois OM indiquées dans le chapitre 1.

(1) $\text{OML}_{\text{Triangle}}$:

La Quatrième – Types de tâches T_i :

T_0 : Écrire le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.

T_1 : Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

La Troisième – Type de tâches T_i :

T_0 : Écrire le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.

T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

La Première Scientifique – Type de tâches T_i :
T_4 : Calculer le cosinus d'un angle dans un triangle.
T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.
T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

(2) OML$_{\text{CTrigo}}$:
La Seconde – Types de tâches T_i :
T_7 : Calculer la longueur d'un arc de cercle trigonométrique intercepté par l'angle au centre dont la mesure est donnée en degrés.
T_8 : Déterminer, en degrés, la mesure de l'angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur donnée.
T_9 : Déterminer/Placer le point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel, dans l'enroulement de la droite des réels.
T_{10} : Déterminer un nombre réel associé à un point du cercle trigonométrique dans l'enroulement de la droite des réels.
T_{11} : Dire si deux réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique.
T_{12} : Préciser le quadrant auquel appartient le point associé à un nombre réel donné sur le cercle trigonométrique.
T_{13} : Donner/préciser le signe du cosinus et/ou du sinus d'un nombre réel.
T_{14} : Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel.
T_{15} : Trouver un nombre réel x vérifiant $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.
La Première Scientifique – Types de tâches T_i :
T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.
T_{17} : Déterminer géométriquement une mesure d'un angle orienté de deux vecteurs dans le plan orienté.
T_{18} : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure α (en radians).
T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté.
T_{20} : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$ (puis dans $\mathbb{R}$,) une équation trigonométrique d'inconnue x : $\cos x = a$ ou $\sin x = b$.

(3) OML$_{\text{FoncTrigo}}$:
La Terminale Scientifique – Types de tâches T_i :
T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
T_{23} : Étudier la dérivabilité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et calculer sa fonction dérivée.
T_{24} : Étudier les variations d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et établir le tableau de variations de la fonction.

T_{25} : Construire la représentation graphique d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.

T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.

Nous commençons par la 4^e et nous trouvons quatre T différents qui sont numérotés dans l'ordre : T_0, T_1, T_2, T_3. Les T_1, T_2 et T_3 sont les trois types principaux pour le thème « Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ». Pourquoi T_0 apparaît-il et pourquoi ne commençons-nous pas par numéroter des T à partir de 1 ? Parce que nous nous demandons d'une part s'il s'agit vraiment d'un type de tâches, et d'autre part, nous savons bien que l'objectif de ce T_0 est de faire travailler les connaissances pour que l'élève s'adapte efficacement à ce nouveau concept introduisant un nouveau vocabulaire « côté adjacent » et pour qu'il le maîtrise bien, dans n'importe quelle position, dans le plan du triangle rectangle, dans le cadre géométrique.

Pour la suite du travail en 3^e, le thème d'étude consiste en « Triangle rectangle, relations trigonométriques » dans lequel il s'agit des trois sous-thèmes suivants :

- *cosinus d'un angle aigu* dans un triangle rectangle (déjà vu une fois en 4^e) ;
- *sinus d'un angle aigu* dans un triangle rectangle ;
- *tangente d'un angle aigu* dans un triangle rectangle.

Nous trouvons de nouveau les quatre types de tâches analogues à T_0, T_1, T_2, T_3 pour le sinus et la tangente d'un angle aigu. Donc, nous décidons de garder les quatre T avec la même numérotation mais chaque nouveau T est construit en ajout avec la conjonction « ou ».

L'étude se poursuit, en 1re Scientifique, avec le thème « Applications du produit scalaire dans le plan » en nous concentrant sur les calculs d'angles et de longueurs et sur les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus. Remarquons qu'en ce qui concerne les calculs d'angles et de longueurs, bien qu'il s'agisse de deux théorèmes proposés avec consensus entre les manuels : « Théorème de la médiane » et « Théorème de Pythagore généralisé », nous ne nous intéressons qu'à l'utilité du théorème de Pythagore généralisé consistant en les cosinus des angles saillants. Pour ce thème d'étude, nous avons quatre T, mais seuls les trois premiers T se situent dans l'OML$_{\text{Triangle}}$, et le quatrième type de tâches est T_{14} (rencontré une fois en Seconde, où T_{14} se situe dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$) avec nouvelles techniques associées à compléter. Nous organisons l'ordre des trois premiers T suivant les trois types T_1, T_2, T_3 vus au collège, et nous numérotons ces trois T ainsi : T_4, T_5, T_6. Donc, pour l'OML$_{\text{Triangle}}$, nous avons au total sept T ; à préciser que les T_4, T_5, T_6 sont respectivement les types de tâches d'extension des T_1, T_2, T_3 à un triangle quelconque.

Nous voulons préciser ici que T_{14} se situe dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ en Seconde et qu'il nous semble plus convenable de citer les techniques associées vues en Première Scientifique dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ en Seconde bien qu'elles soient rencontrées une année après.

Nous arrivons maintenant à l'OML$_{\text{CTrigo}}$, en Seconde et en 1re Scientifique. En Seconde, le thème d'étude est « Cosinus et sinus d'un nombre réel », classé dans le domaine « Fonctions ». Nous rencontrons neuf nouveaux T et nous les numérotons à la suite des T vus dans l'OML$_{\text{Triangle}}$. Nous avons donc : T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}. En 1re Scientifique, le thème d'étude est « Trigonométrie », classé dans le domaine « Géométrie ». Nous rencontrons cinq nouveaux T, nous les numérotons à la suite des T vus en Seconde, on a alors : T_{16}, T_{17}, T_{18}, T_{19}, T_{20}. Remarquons que les T_{14} (cos et/ou sin d'un nombre réel) et T_{19} (cos et/ou sin d'un angle orienté) sont deux types de tâches différents mais ils sont très liés au niveau des techniques associées dans le cadre de la géométrie repérée.

L'étude se poursuit finalement, en Terminale Scientifique, avec le thème d'étude « Fonctions sinus et cosinus » se situant dans le domaine de l'analyse. Rappelons-nous que notre projet de thèse s'appuie sur ce thème d'étude dans lequel nous souhaitons expliciter l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$. Pour l'étude d'une fonction trigonométrique, nous avons six types de tâches : T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25} et T_{26}, où T_{26} est la réunion des cinq types de tâches précédents dans cet ordre.

Donc, nous réalisons la liste des types de tâches de vingt-sept T au total.

2.2. Méthodologie pour Techniques τ associées

Nous présentons des techniques existantes et efficaces possibles, associées à chaque type de tâches repéré précédemment. Dans le cas où nous ajoutons une/des technique(s) non existantes dans les manuels étudiés, nous faisons chaque fois une remarque jointe.

Rappelons-nous que chaque T est déterminé par un « verbe d'action » et un « complément fixé » ; et, comme nous l'avons signalé, dans la sous-section 2.1, notre but est de limiter la longueur de la liste des T et de répéter les continuités d'une institution aux suivantes (voir p. 68) ; nous exposons donc des techniques suivant les cas à distinguer, ces cas étant des sous-types de tâches de chaque T. Chaque technique est exposée de manière discursive, chacune consiste en une description discursive des différentes phases (ou étapes) associées aux sous-types de tâches à effectuer. Concernant l'indexation de τ, nous faisons le choix d'utiliser $\tau_{i,j}$ associé à T_i bien qu'il existe une seule technique pour certains types de tâches ; pour cela, il y a deux raisons : par homogénéité et surtout à cause de nouvelles techniques déterminées dans la partie cambodgienne.

2.3. Méthodologie pour Technologies θ associées

Pour chaque institution, les technologies θ justifiant les techniques associées à chaque T sont repérées à partir des techniques associées. Nous les classons en deux types d'éléments technologiques nommés : savoirs antérieurs et savoirs visés. Nous indexons chaque indice des θ par un terme abrégé clairement compréhensible ; et nous exposons, dans chaque institution, les nouvelles technologies rencontrées.

Remarquons que pour faciliter la lecture dans la sous-section « Organisation mathématique » liée à l'étude de curriculum suivie, nous présentons les technologies associées avant les types de tâches et les techniques associées.

Nous utilisons les OML existantes, réalisées avec l'étude praxéologique des manuels français, comme les OML de base. Nous suivons notre méthodologie en faisant, de manière similaire, l'étude praxéologique des manuels cambodgiens. Nous analysons trois manuels (voir la sous-section 4.1, pp. 139-142) : manuel tome 2 de 10^{e}, manuel tome 1 de 11^{e} et manuel tombe 1 de 12^{e}. Chaque leçon n'est composée que de deux parties principales : Cours et Exercices. Dans la partie « Cours », il n'y a pas de rubrique « Savoir-faire » ; pourtant, il y a quelques petits exercices résolus (au plus trois) présentés comme des exemples qui suivent un concept défini (définition ou formule ou théorème/propriété) afin de le mettre en œuvre. La/les solution(s) donnée(s) indiquent les techniques et les technologiques associées à des tâches posées. Cela ne nous donne pas d'information suffisante permettant de bien déterminer les types de tâches rencontrés, les techniques et les technologies associées. Comme dans chaque leçon, il y a peu d'exercices proposés (une page ou une page et demie contenant une dizaine de petits exercices), nous nous adaptons à cette situation et nous sortons un peu de notre méthodologie indiquée précédemment dans l'étude praxéologique des manuels français, afin de repérer les types de tâches clefs.

3. Étude du curriculum français

3.1. Trigonométrie du triangle rectangle

3.1.1. Triangle rectangle : cosinus d'un angle

Le terme « trigonométrie » est sous-entendu **en 4^e^**.

Le thème d'étude « Triangle rectangle : cosinus d'un angle » est classé dans le domaine « Géométrie ».

Remarquons que selon *B. O. n° 30 du 26-7-2018,* la trigonométrie du triangle rectangle est classée dans le Thème D – Espace et géométrie - Connaissances : lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus et tangente. Les notions du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu dans le triangle rectangle sont introduites en 3^e^ dans le cycle 4. Nous regardons cinq manuels d'édition 2016. Il y a consensus entre les manuels, les auteurs proposent dans la partie Cours les définitions du cosinus, du sinus et de la tangente d'un angle aigu dans le triangle rectangle. Mais, trois des cinq manuels ne proposent ni la relation fondamentale ni la relation entre sinus, cosinus et tangente. Donc, concernant la trigonométrie du triangle rectangle, les savoirs visés, en 3^e^ dans le cycle 4, sont seulement les trois définitions.

3.1.1.1. ***Extrait du B. O. spécial numéro 6 du 28/08/2008***

Connaissances	**Capacités**
Triangle rectangle : cosinus d'un angle	- Utiliser dans un triangle rectangle la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des côtés adjacents. - Utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée : . du cosinus d'un angle aigu donné ; . de l'angle aigu dont le cosinus est donné.

3.1.1.2. ***Extrait des manuels*** (2011)

Liste des manuels étudiés :

1. TRIANGLE – Édition Hatier (Chapitre 13, pp. 239-254) ;
2. TRANSMATH – Édition Nathan (Chapitre 13, pp. 248-263) ;
3. Myriade – Édition Bordas (Chapitre 13, pp. 266-283).

3.1.1.2.1. <u>Liste des objets de savoir visés</u>

- <u>Vocabulaire</u>
    - Définition : ***côté adjacent*** à un angle aigu d'un triangle rectangle.
- <u>Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle</u>
    - Définition : ***cosinus d'un angle aigu***.

- Propriété : encadrement du cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

▪ <u>Avec une calculatrice</u>
  - Il y a un procédé pour trouver une « valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné en degrés ».
  - Il y a un procédé pour trouver une « valeur approchée de la mesure d'un angle en degrés dont le cosinus est donné ».

Nous nous intéressons ci-dessous au traitement de l'objet de savoir principal visé « Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle » dans les parties « Activités » et « Cours ».

<u>Découvrir le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle</u> :

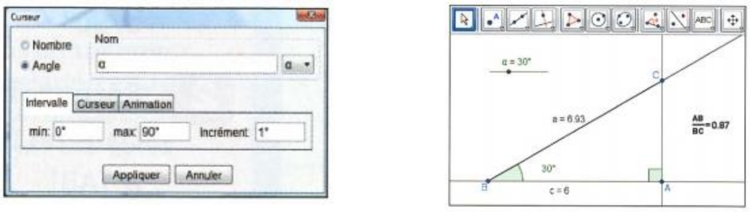
Pour faire découvrir le ***cosinus d'un angle aigu*** dans un triangle rectangle, des manuels proposent une <u>activité d'approche</u> constituée de deux étapes que nous décrivons ci-après.

De l'*observation expérimentale de configuration* (soit avec l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, soit avec papier-crayon et droite graduée) à la *preuve mathématique* :

Observation expérimentale de configuration :

1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

- Commencer par construire une figure et la réaliser en respectant les étapes indiquées ci-après ;



<u>Figure 26</u> : Extrait de l'activité 1 du manuel Transmath 2011, p. 250

- faire observer le quotient : $\frac{longueur\ du\ côté\ adjacent\ à\ un\ angle\ aigu}{longueur\ de\ l'hypoténuse}$ où la longueur du côté adjacent et celle de l'hypoténuse sont simultanément variables en lien avec la mesure en degrés de cet angle choisie au départ ;
- changer la mesure de l'angle aigu à l'aide du déplacement du curseur, puis faire observer de nouveau le quotient précédent avec le même procédé que précédemment ;
- émettre une conjecture.

2. Avec papier-crayon et droite graduée

- Placer trois points O, A, B non alignés et tracer les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ de même origine O de façon que l'angle $\widehat{AOB}$ formé par ces deux demi-droites soit un angle aigu ;
- placer un point M sur la demi-droite $[OA)$ et tracer la droite perpendiculaire à la demi-droite $[OB)$ passant par le point M, elle coupe la demi-droite $[OB)$ en un point M' ;
- mesurer les longueurs OM et OM', puis calculer le quotient $\frac{OM'}{OM}$;
- même procédé que précédemment en choisissant deux autres points N et N' situés respectivement sur $[OA)$ et sur $[OB)$ où le point N est distinct du point M, mesurer les longueurs ON et ON', puis calculer le quotient $\frac{ON'}{ON}$;
- même procédé que précédemment en choisissant de nouveau deux autres points P et P' situés respectivement sur $[OA)$ et sur $[OB)$ où le point P est

distinct des points M et N, mesurer les longueurs OP et OP', puis calculer le quotient $\frac{OP'}{OP}$;
- conjecturer une propriété sur les trois quotients expérimentés.

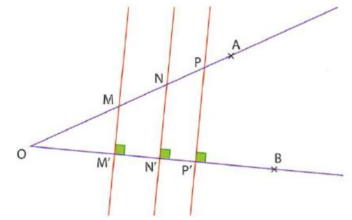


Figure 27 : Extrait de l'activité du manuel Myriade 2011, p. 268

Preuve mathématique :

Soient deux triangles rectangles ayant un angle aigu commun dont le sommet est aligné avec les deux sommets de l'angle droit, et ayant les deux hypoténuses de même support.

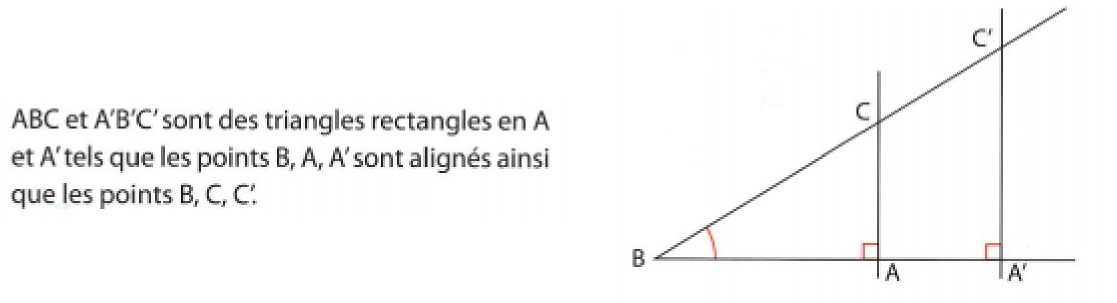


Figure 28 : Extrait de l'activité 2 du manuel Transmath 2011, p. 250

La figure donnée étant une figure-clé du théorème de Thalès, commencer par prouver/justifier mathématiquement que l'on peut appliquer le théorème de Thalès, écrire alors les trois rapports égaux, puis choisir deux rapports égaux convenables afin d'en déduire les deux rapports égaux demandés à l'aide de l'égalité des produits en croix.

Conclure en disant que le quotient commun est appelé le « cosinus » de l'angle aigu étudié, ce qui est institutionnalisé dans la partie Cours, comme suit :

*Le **cosinus d'un angle aigu** d'un triangle rectangle* est le « quotient » de la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu par la longueur de l'*hypoténuse*.

Remarque : La preuve que le rapport/quotient considéré est indépendant du côté de projection n'est jamais faite. Cela se justifie si on parle d'angle d'un triangle rectangle mais pas d'angle tout cours comme dans l'activité introductrice.

Pour amener à définir et à caractériser le « cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle », il faut définir les objets d'étude conjoints comme « côté adjacent à un angle aigu », « encadrement du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ».

- Définition du ***côté adjacent à un angle aigu*** dans un triangle rectangle :
  - Dans un triangle rectangle, le côté de l'angle aigu qui n'est pas l'*hypoténuse* est appelé le ***côté adjacent à l'angle aigu***.
  - Dans un triangle rectangle, le ***côté adjacent à un angle aigu*** relie les sommets de l'angle aigu et de l'angle droit.

➢ Encadrement du ***cosinus d'un angle aigu*** dans un triangle rectangle :
Dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est toujours le plus grand côté ; et par conséquent, la longueur du côté adjacent d'un angle aigu est strictement inférieure à celle de l'hypoténuse, et le quotient $\frac{longueur\ du\ \text{côté}\ adjacent\ \text{à}\ un\ angle\ aigu}{longueur\ de\ l'hypot\text{é}nuse}$ est strictement inférieur à 1. De plus, la longueur d'un côté du triangle est toujours strictement positive ; en déduire alors que le *cosinus d'un angle aigu est strictement encadré par* 0 *et* 1.

3.1.1.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
4e	θ_{hypo} ; $\theta_{Th.Pyth}$; θ_{AngTr}	$\theta_{\text{cos}AngTrR}$; $\theta_{\text{côté}Adj}$; $\theta_{enc\text{cos}AngTrR}$; $\theta_{\text{cos}Cal}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$

Tableau 6 : θ_i évoqué(s) en 4e

θ_{hypo} : Définition – Dans un triangle rectangle, *l'hypoténuse* est le côté opposé à l'angle droit.

$\theta_{\text{côté}Adj}$: Définition – Dans un triangle rectangle, le côté d'un angle aigu qui n'est pas l'hypoténuse est appelé *le côté adjacent à l'angle aigu*.

$\theta_{\text{cos}AngTrR}$: Définition – *Le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle* est le quotient de la longueur du côté adjacent à l'angle aigu par la longueur de l'hypoténuse.

$\theta_{enc\text{cos}AngTrR}$: Propriété d'encadrement du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle – Le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle est un nombre strictement positif compris entre 0 et 1.

$\theta_{\text{cos}Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée d'un cosinus.

$\theta_{\text{Arccos}Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée de la mesure en degrés d'un angle dont on connaît le cosinus.

$\theta_{Th.Pyth}$: Théorème de Pythagore – Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de son hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs de ses deux autres côtés.

θ_{AngTr} : Propriété – La somme des mesures des trois angles dans un triangle : Dans un triangle, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

- Types de tâches

Remarque : Nous avons fait nos interrogations sur T_0 (voir p. 70). T_0 est un type de tâches à finalité clairement didactique, si nous pouvons avoir un doute, c'est sur le fait que ce soit un type mathématique. Les T_1, T_2 et T_3 sont les trois types principaux pour le thème d'étude « Cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ». Nous avons donc en total quatre types de tâches pour ce thème d'étude en 4e.

- T_0 : Écrire le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.
- T_1 : Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

- T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

- Techniques et Technologies associées
Éléments techniques pour T_0 :
T_0 : Écrire le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.
  - $\tau_{0,1}$: Dans un triangle rectangle, repérer l'angle aigu dont on va écrire le cosinus, et contextualiser dans le triangle rectangle considéré le vocabulaire relatif aux deux côtés de cet angle aigu ; puis utiliser la définition du cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle.

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{côté}Adj}$; θ_{hypo}

Éléments techniques pour T_1 :
T_1 : Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Il y a deux cas possibles :
Premier cas : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu.*
  - $\tau_{1,1}$: Utiliser la calculatrice en effectuant les étapes suivantes :
    - mettre la calculatrice en mode « Degré » ;
    - utiliser la touche « cos », puis taper la mesure et presser la touche « Entrer ».

    ($\theta_{\cos Cal}$)

Deuxième cas : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer le cosinus, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle*.
  - $\tau_{1,2}$: *Connaissant les longueurs des côtés de l'angle aigu (la longueur du côté adjacent à l'angle aigu et celle de l'hypoténuse)* : utiliser la définition du cosinus, reporter les données numériques dans l'égalité, puis utiliser la calculatrice pour finir.
    ($\theta_{\cos AngTrR}$)
  - $\tau_{1,3}$: *Connaissant les longueurs des deux côtés de l'angle droit* : commencer par calculer la longueur de l'hypoténuse à l'aide du théorème de Pythagore, puis utiliser $\tau_{1,2}$ pour finir.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$)
  - $\tau_{1,4}$: *Connaissant les longueurs de deux des côtés qui ne sont pas le côté adjacent à l'angle aigu* : commencer par calculer la longueur du côté adjacent à l'angle aigu à l'aide du théorème de Pythagore, puis utiliser $\tau_{1,2}$ pour finir.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$

Éléments techniques pour T_2 :
T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Il y a deux cas possibles :
Premier cas : connaissant *le cosinus de l'angle aigu* :

- $\tau_{2,1}$: Utiliser la calculatrice en commençant par la mettre en mode « Degré », puis utiliser la fonction « $\cos^{-1}$ » (ou « Arccos » ou « Acs ») pour trouver la valeur approchée par défaut, au degré près, de la mesure de l'angle aigu.
  ($\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)

Remarque : La technique $\tau_{2,1}$ est toujours valable pour accomplir le type de tâches plus précis suivant : « Déterminer, si possible, la mesure x d'un angle aigu par défaut, au degré près, sachant que $\cos x = a$ où a est un nombre, à l'aide de la calculatrice ».

Deuxième cas : à l'aide de *l'information dans le triangle rectangle* :

- $\tau_{2,2}$: *Connaissant la mesure d'un des deux angles aigus du triangle rectangle*, utiliser la propriété de la somme des mesures des angles d'un triangle pour trouver la mesure de l'autre angle aigu.
  (θ_{AngTr})
- $\tau_{2,3}$: *Connaissant la longueur du côté adjacent à l'angle aigu et celle de l'hypoténuse*, utiliser $\tau_{1,2}$, puis $\tau_{2,1}$ pour finir.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau_{2,4}$: *Connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit*, utiliser $\tau_{1,3}$, puis $\tau_{2,1}$ pour finir.
  ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau_{2,5}$: *Connaissant les longueurs de deux des côtés qui ne sont pas le côté adjacent à l'angle aigu*,
  - $\tau_{2,5,1}$: Utiliser $\tau_{1,4}$, puis $\tau_{2,1}$ pour finir.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
  - $\tau_{2,5,2}$: Utiliser $\tau_{2,3}$ pour trouver la mesure d'un angle aigu lié aux données, puis $\tau_{2,2}$ pour trouver la mesure approchée de l'angle aigu cherché.
    ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; θ_{AngTr})

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; θ_{AngTr} ; $\theta_{Th.Pyth}$

Éléments techniques pour T_3 :
T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.
Penser à exploiter la définition du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle dans le cas où on connaît deux des trois éléments : la mesure de l'angle aigu ou la valeur de son cosinus, la longueur du côté adjacent à l'angle aigu et la longueur de l'hypoténuse.
Il y a trois cas possibles pour accomplir le type de tâches T_3.
Premier cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse*.

- $\tau_{3,1}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu, commencer par utiliser la définition du cosinus, reporter les données numériques dans l'égalité, en déduire la longueur du côté adjacent à l'angle aigu en fonction du cosinus de l'angle aigu à l'aide de la propriété des produits en croix, et utiliser la calculatrice pour finir.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
- $\tau_{3,2}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur d'un des deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui n'est pas le côté adjacent à l'angle aigu

(autrement dit, calculer la longueur du troisième côté qui n'est pas le côté adjacent à l'angle aigu),

- $\tau_{3,2,1}$: trouver d'abord l'autre angle aigu à l'aide de la propriété de la somme des mesures des angles d'un triangle. Puis, avec l'angle aigu trouvé, on peut maintenant utiliser la définition du cosinus permettant de trouver la longueur du côté cherchée en finissant par $\tau_{3,1}$.
  (θ_{AngTr} ; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
- $\tau_{3,2,2}$: utiliser $\tau_{3,1}$ pour trouver d'abord le côté adjacent à l'angle aigu. Puis, utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur du côté cherchée.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)

<u>Deuxième cas</u> : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté adjacent.*

- $\tau_{3,3}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur de l'*hypoténuse*</u>, commencer par utiliser la définition du cosinus, reporter les données numériques dans l'égalité, en déduire la longueur de l'hypoténuse en fonction du cosinus de l'angle aigu à l'aide de la propriété des produits en croix, et utiliser la calculatrice pour finir.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
- $\tau_{3,4}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur d'un des deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle qui n'est pas le côté adjacent à l'angle aigu</u>,
  - $\tau_{3,4,1}$: commencer par utiliser $\tau_{3,3}$ pour trouver la longueur de l'hypoténuse. Puis, utiliser $\tau_{3,2,1}$ pour trouver la longueur du côté cherchée.
    ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; θ_{AngTr})
  - $\tau_{3,4,2}$: commencer par utiliser $\tau_{3,3}$ pour trouver la longueur de l'hypoténuse. Puis, utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur du côté cherchée.
    ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)

<u>Troisième cas</u> : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur d'un des deux côtés de l'angle droit qui n'est pas le côté adjacent à l'angle aigu.*

- $\tau_{3,5}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur de l'*hypoténuse*</u>, commencer par trouver l'autre angle aigu à l'aide de la propriété de la somme des mesures des angles d'un triangle. Puis, avec l'angle aigu trouvé, utiliser $\tau_{3,3}$ pour finir.
  (θ_{AngTr} ; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
- $\tau_{3,6}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu</u>,
  - $\tau_{3,6,1}$: commencer par utiliser $\tau_{3,5}$ pour trouver la longueur de l'hypoténuse. Puis, utiliser $\tau_{3,1}$ pour finir.
    (θ_{AngTr} ; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
  - $\tau_{3,6,2}$: commencer par utiliser $\tau_{3,5}$ pour trouver la longueur de l'hypoténuse. Puis, utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur du côté adjacent à l'angle aigu.
    (θ_{AngTr} ; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)

Éléments technologiques :

$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; θ_{AngTr} ; $\theta_{Th.Pyth}$

3.1.1.2.3. Points de réflexions et commentaires

La notion de cosinus d'un angle aigu est introduite par une activité approche composée généralement de deux parties : Observation expérimentale (avec un logiciel de géométrie ou avec papier-crayon) et Preuve mathématique. L'objectif de l'activité vise à découvrir sur le fait que le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle est un quotient des longueurs de deux des trois côtés du triangle rectangle qui sont aussi les deux côtés de l'angle aigu, et que ce quotient ne dépend pas des dimensions du triangle rectangle mais qu'il ne dépend que l'angle aigu.

Certains manuels attirent l'attention sur :

1. les valeurs du cosinus d'un angle, en proposant d'utiliser la calculatrice pour déterminer, si c'est possible, la mesure en degrés d'un angle dont le cosinus est supérieur à 1, (manuel Triangle 2011, pp. 242 et 248 ; manuel Myriade 2011, p. 274).
2. une relation liée aux deux angles aigus complémentaires dans un triangle rectangle par le fait que la somme des carrés des cosinus des angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 1. Pour cela, des auteurs proposent dans la partie « Exercices et problèmes » de prouver mathématiquement ou d'émettre en tant que conjecture à l'aide d'un logiciel. (manuel Myriade 2011, p. 280)
3. la corrélation entre un angle aigu et son cosinus dans un triangle rectangle : plus la mesure d'un angle aigu est grande, plus la valeur de son cosinus est petite.
4. x désignant la mesure en degrés d'un angle aigu. Par exemple, on peut rencontrer, dans les parties « Activités » et « Exercices », la tâche suivante : « Déterminer, si possible, un nombre x, la mesure en degrés d'un angle, qui vérifie $\cos x = a$, a étant un nombre donné » (manuel Triangle – Hatier 2011, pp. 242 et 248).

3.1.2. Trigonométrie en 3e

La trigonométrie en 3e ayant pour thème : « Triangle rectangle, relations trigonométriques » est classée dans le domaine « Géométrie ».

3.1.2.1. ***Extrait du B.O. spécial numéro 6 du 28/08/2008***

Connaissances	**Capacités**	**Commentaires**
3.1. Figures planes Triangle rectangle, relations trigonométriques	- Connaître et utiliser les relations entre le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu et les longueurs de deux des côtés d'un triangle rectangle. - Déterminer à l'aide de la calculatrice, des valeurs approchées : • du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu donné ; • de l'angle aigu dont on connaît le cosinus, le sinus ou la tangente.	La définition du cosinus a été vue en classe de quatrième. Le sinus et la tangente d'un angle aigu sont introduits comme rapports de longueurs. Les formules suivantes sont à démontrer : $\cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A} = 1$ et $\tan\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$. La seule unité utilisée est le degré décimal.

3.1.2.2. ***Extrait des manuels (2008-2012)***

Liste des manuels étudiés :

1. TRIANGLE – Édition Hatier 2012 (Chapitre 12, pp. 229-250) ;
2. TRANSMATH – Édition Nathan 2008 (Chapitre 11, pp. 200-219) ;
3. Myriade – Édition Bordas 2012 (Chapitre 12, pp. 254-275).

3.1.2.2.1. Liste des objets de savoir visés

- Cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu
    - Définitions : cosinus, ***sinus, tangente d'un angle aigu***.
    - Propriétés : encadrement du cosinus et celui du sinus ; relation entre le sinus et le cosinus liés à deux angles aigus complémentaires du triangle rectangle : « le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre ».
- Relations trigonométriques
    - Propriétés : $\cos^2\hat{A} + \sin^2\hat{A} = 1$ et $\tan\hat{A} = \frac{\sin\hat{A}}{\cos\hat{A}}$, avec $\hat{A}$ un angle aigu.
- Avec une calculatrice
    - Il y a un procédé pour trouver « une valeur approchée du sinus ou de la tangente d'un angle aigu donné en degrés ».
    - Il y a un procédé pour trouver « une valeur approchée de la mesure d'un angle en degrés dont le sinus ou la tangente est donné ».

Nous traitons deux nouveaux objets de savoir principaux visés : « Sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle » et « Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle », dans les parties « Activités » et « Cours » des manuels. Nous voyons que ce sont des objets directement liés à la notion de cosinus déjà existante. Pour faire découvrir les deux nouvelles notions de trigonométrie du triangle rectangle, les auteurs des manuels proposent, de la même manière qu'en classe de 4^{e}, de :

- étudier le quotient des longueurs de deux des côtés d'un triangle rectangle à travers l'observation/l'expérimentation avec un logiciel de géométrie dynamique,
- donner ensuite une preuve mathématique en exploitant le théorème de Thalès et l'égalité de proportionnalité.

Dans la partie « Cours », les auteurs des manuels citent les nouvelles définitions ci-après :

1. Le ***sinus d'un angle aigu*** d'un triangle rectangle est le quotient de la longueur du *côté opposé* à l'angle par la longueur de l'*hypoténuse*.
2. La ***tangente d'un angle aigu*** *d'un triangle rectangle* est le quotient de la longueur du *côté opposé* à l'angle par la longueur du *côté adjacent* à l'angle.

3.1.2.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
3^{e}	$\theta_{\text{côté}Adj}$; $\theta_{\text{cos}AngTrR}$; $\theta_{enc\text{cos}AngTrR}$; $\theta_{\text{cos}Cal}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$ θ_{hypo} ; $\theta_{Th.Pyth}$; θ_{AngTr}	$\theta_{\text{sin}AngTrR}$; $\theta_{\text{côté}Opp}$; $\theta_{enc\text{sin}AngTrR}$; $\theta_{\text{sin}Cal}$; $\theta_{\text{Arcsin}Cal}$; $\theta_{\text{tan}AngTrR}$; $\theta_{Pr.\text{tan}TrR}$; $\theta_{\text{tan}Cal}$; $\theta_{\text{Arctan}Cal}$; θ_{RFTrR}

<u>*Tableau 7*</u> : θ_i évoqué(s) en 3^{e}

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées en 4e.

$\theta_{\text{côté}Opp}$: <u>Définition</u> – On peut définir *le côté opposé à un angle aigu* dans un triangle rectangle en utilisant les deux méthodes citées ci-après :

1. Dans un triangle rectangle, le côté de l'angle droit qui n'est pas le côté adjacent à un angle aigu est appelé *le côté opposé à l'angle aigu*.
2. Dans un triangle rectangle, le côté de l'angle droit qui est opposé à un angle aigu s'appelle *le côté opposé à l'angle aigu*.

$\theta_{\sin AngTrR}$: <u>Définition</u> – *Le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle* est le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle aigu par la longueur de l'hypoténuse.

$\theta_{\tan AngTrR}$: <u>Définition</u> – *La tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle* est le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle aigu par la longueur du côté adjacent à l'angle aigu.

$\theta_{enc\sin AngTrR}$: Propriété d'encadrement du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle – Le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle est un nombre strictement positif compris entre 0 et 1.

θ_{RFTrR} : <u>Relation fondamentale</u> – Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $\left(\cos \hat{A}\right)^2 + \left(\sin \hat{A}\right)^2 = 1$.

$\theta_{Pr.\tan TrR}$: <u>Propriété</u> – *Relation entre le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle* : Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}}$.

$\theta_{\sin Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée d'un sinus.

$\theta_{\text{Arcsin}Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée de la mesure en degrés d'un angle dont on connaît le sinus.

$\theta_{\tan Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée d'une tangente.

$\theta_{\text{Arctan}Cal}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Degré », permettant de donner une valeur approchée de la mesure en degrés d'un angle dont on connaît la tangente.

- <u>Types de tâches</u>

  Nous trouvons quatre types de tâches analogues à T_0, T_1, T_2, T_3 (vus en 4e) pour le sinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Donc, comme nous l'avons signalé plus haut (voir la section 2.1, p. 68), nous décidons de garder les quatre T de même numérotation mais chaque nouveau T est construit en ajout avec la conjonction « ou ».

  - T_0 : Écrire le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.
  - T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
  - T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
  - T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

- <u>Techniques et Technologies associées</u>

  Éléments techniques pour T_0 :

  T_0 : Écrire le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.

- $\tau_{0,1}$: Dans un triangle rectangle, repérer l'angle aigu dont on va écrire le cosinus, le sinus ou la tangente, contextualiser pour le triangle étudié le vocabulaire relatif aux côtés du triangle rectangle lié à cet angle aigu ; puis utiliser la définition du cosinus ou celle du sinus ou celle de la tangente.

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\text{côté}Adj}$; $\theta_{\text{côté}Opp}$; θ_{hypo}

Éléments techniques pour T_1 :
T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Nous exposons les techniques pour accomplir T_1 où T_1 se subdivise en trois sous-types de tâches. Ici, nous utilisons le terme « cas » pour les distinguer l'un de l'autre.
Premier cas : *Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.*
Dans ce cas, il y a quatre cas possibles :
Cas 1 : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu.*
- $\tau_{1,1}$ (voir T_1 en 4e, p.76)

Cas 2 : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer le cosinus, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle.*
- $\tau_{1,2}$; $\tau_{1,3}$ (voir T_1 en 4e, p. 76)
- $\tau_{1,4}$: *Connaissant la longueur du côté opposé à l'angle aigu et celle de l'hypoténuse* :
  - $\tau_{1,4,1}$: Il s'agit de la technique $\tau_{1,4}$ associée à T_1 vue en 4e.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$)
  - $\tau_{1,4,2}$: Utiliser $\tau_{1,9}$ pour trouver le sinus de l'angle aigu, puis calculer le cosinus à l'aide de la relation fondamentale.
    ($\theta_{\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR})

Cas 3 : *connaissant le sinus de l'angle aigu, on veut calculer son cosinus.*
- $\tau_{1,5}$: Utiliser la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus d'un angle aigu, reporter la valeur du sinus de l'angle aigu dans la formule. En déduire le carré du cosinus de l'angle aigu, puis le cosinus de l'angle aigu à l'aide de la propriété de résolution de l'équation $X^2 = a$ où a est un nombre strictement positif, et X, un nombre strictement compris entre 0 et 1.
  (θ_{RFTrR} ; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau_{1,6}$: Utiliser $\tau_{2,2}$ associé à T_2 (vu en 3e) pour trouver la mesure en degrés de l'angle aigu, puis $\tau_{1,1}$ associé à T_1 (vu en 4e) pour finir.
  ($\theta_{\text{Arcsin}Cal}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)

Cas 4 : *connaissant le sinus et la tangente de l'angle aigu.*
- $\tau_{1,7}$: Utiliser la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu, reporter les données numériques dans la formule, puis utiliser la propriété des produits en croix, et en déduire le cosinus de l'angle aigu à l'aide de la propriété sur « Égalités et opérations » liée à la résolution algébrique d'une équation du 1er degré à une inconnue.
  ($\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Deuxième cas : *Déterminer le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.*
Dans ce cas, il y a quatre cas qui sont analogues respectivement aux quatre sous cas du premier cas exposés précédemment, ainsi que les techniques relatives.

Premier cas – ***Cosinus d'un angle aigu***	Deuxième cas – ***Sinus d'un angle aigu***
Cas 1 : $\tau_{1,1}$ Cas 2 : $\tau_{1,2}$; $\tau_{1,3}$; $\tau_{1,4}$ ($\tau_{1,4,1}$; $\tau_{1,4,2}$) Cas 3 : $\tau_{1,5}$; $\tau_{1,6}$ Cas 4 : $\tau_{1,7}$	Cas 1 : $\tau_{1,8}$ Cas 2 : $\tau_{1,9}$; $\tau_{1,10}$; $\tau_{1,11}$ ($\tau_{1,11,1}$; $\tau_{1,11,2}$) Cas 3 : $\tau_{1,12}$; $\tau_{1,13}$ Cas 4 : $\tau_{1,14}$

Troisième cas : *Déterminer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.*
Dans ce cas, il y a trois cas possibles :
Cas 1 : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,15}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer cos par tan.
  ($\theta_{\tan Cal}$)

Cas 2 : *connaissant le sinus et le cosinus de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,16}$: Utiliser la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle, reporter les données numériques dans l'égalité, puis utiliser la calculatrice pour finir.
  ($\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Cas 3 : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer la tangente, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle.*

- $\tau_{1,17}$: *Connaissant les longueurs des deux côtés de l'angle droit* : utiliser la définition de la tangente, reporter les données numériques dans l'égalité, puis utiliser la calculatrice pour finir.
  ($\theta_{\tan AngTrR}$)
- $\tau_{1,18}$: *Connaissant la longueur d'un des deux côtés de l'angle droit et celle de l'hypoténuse* :
  - $\tau_{1,18,1}$: Commencer par calculer la longueur de l'autre côté de l'angle droit à l'aide du théorème de Pythagore, puis utiliser $\tau_{1,17}$ pour finir.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\tan AngTrR}$)
  - $\tau_{1,18,2}$: *Dans le cas où on connaît le côté adjacent à l'angle aigu* : Utiliser $\tau_{1,11,2}$ puis $\tau_{1,16}$ pour finir.
    ($\theta_{\cos AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$)
  - $\tau_{1,18,3}$: *Dans le cas où on connaît le côté opposé à l'angle aigu* : Utiliser $\tau_{1,4,2}$ puis $\tau_{1,16}$ pour finir.
    ($\theta_{\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Éléments technologiques :
Premier cas : $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arcsin} Cal}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$
Deuxième cas : $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arccos} Cal}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$
Troisième cas : $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Th.Pyth}$

Éléments techniques pour T_2 :
T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Il y a deux cas possibles :

Premier cas : connaissant *le cosinus ou le sinus ou la tangente de l'angle aigu* :

- $\tau_{2,1}$: *Connaissant le cosinus de l'angle aigu*, il s'agit de la technique $\tau_{2,1}$ associée au type de tâches T_2, vue en 4e.
  ($\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau_{2,2}$: *Connaissant le sinus de l'angle aigu*, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{2,1}$ (vue en 4e) dans laquelle il suffit de remplacer $\cos^{-1}$ par $\sin^{-1}$.
  ($\theta_{\mathrm{Arcsin}Cal}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$)
- $\tau_{2,3}$: *Connaissant la tangente de l'angle aigu*, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{2,1}$ (vue en 4e) dans laquelle il suffit de remplacer $\cos^{-1}$ par $\tan^{-1}$.
  ($\theta_{\mathrm{Arctan}Cal}$)

Remarque : Les techniques respectives $\tau_{2,1}$, $\tau_{2,2}$, $\tau_{2,3}$ sont toujours valables pour accomplir le type de tâches plus précis suivant : « Déterminer, si possible, la mesure x d'un angle aigu par défaut, au degré près, sachant que $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ ou $\tan x = a$ où a est un nombre, à l'aide de la calculatrice ».

Deuxième cas : connaissant *les longueurs de deux des côtés du triangle rectangle* :

- $\tau_{2,4}$: *Connaissant les longueurs des côtés de l'angle aigu*, utiliser la définition du cosinus, reporter les données numériques dans l'égalité, et utiliser $\tau_{2,1}$ pour finir.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau_{2,5}$: *Connaissant les longueurs de l'hypoténuse et du côté opposé à l'angle aigu*, utiliser la définition du sinus, reporter les données numériques dans l'égalité, et utiliser $\tau_{2,2}$ pour finir.
  ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arcsin}Cal}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$)
- $\tau_{2,6}$: *Connaissant les longueurs des côtés de l'angle droit*,
  - $\tau_{2,6,1}$: Utiliser la définition de la tangente, reporter les données numériques dans l'égalité, et utiliser $\tau_{2,3}$ pour finir.
    ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arctan}Cal}$)
  - $\tau_{2,6,2}$: Commencer par calculer la longueur de l'hypoténuse à l'aide du théorème de Pythagore, puis utiliser soit $\tau_{2,4}$ soit $\tau_{2,5}$ pour finir.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$) ou ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{Arcsin}Cal}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$)

Éléments technologiques :

$\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$; $\theta_{\mathrm{Arcsin}Cal}$; $\theta_{\mathrm{Arctan}Cal}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$

Éléments techniques pour T_3 :

T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.
Il y a trois cas possibles :

Premier cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse.*

- $\tau_{3,1}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu,
  - $\tau_{3,1,1}$: il s'agit de la technique $\tau_{3,1}$ associée à T_3 vu en 4e.

$(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal})$

- $\tau_{3,1,2}$: commencer par calculer la longueur du côté opposé à l'angle aigu à l'aide de la définition du sinus, puis utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur du côté adjacent à l'angle aigu.
  $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{Th.Pyth})$
- $\tau_{3,1,3}$: commencer par calculer la longueur du côté opposé à l'angle aigu à l'aide de la définition du sinus, puis trouver la longueur du côté cherchée à l'aide de la définition de la tangente et de la propriété des produits en croix.
  $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal})$

- $\tau_{3,2}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur du *côté opposé* à l'angle aigu</u>,
  - $\tau_{3,2,1}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,1,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer les mots : cosinus par sinus et adjacent par opposé.
    $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal})$
    <u>Remarque</u> : il s'agit d'une évolution de la technique $\tau_{3,2,1}$ associée à T_3 vue en 4^e.
  - $\tau_{3,2,2}$: il s'agit de la technique $\tau_{3,2,2}$ associée à T_3 vu en 4^e.
    $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth})$
  - $\tau_{3,2,3}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,1,3}$ dans laquelle il suffit de remplacer les mots : sinus par cosinus et opposé par adjacent.
    $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal})$

<u>Deuxième cas</u> : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté adjacent.*

- $\tau_{3,3}$: Dans le cas où on souhaite <u>calculer la longueur de l'*hypoténuse*</u>,
  - $\tau_{3,3,1}$: il s'agit de la technique $\tau_{3,3}$ associée à T_3 vu en 4^e.
    $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal})$
  - $\tau_{3,3,2}$: commencer par calculer la longueur du côté opposé à l'angle aigu à l'aide de la définition de la tangente, puis utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la longueur de l'hypoténuse.
    $(\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{Th.Pyth})$
  - $\tau_{3,3,3}$: commencer par calculer la longueur du côté opposé à l'angle aigu à l'aide de la définition de la tangente, puis utiliser la définition du sinus pour trouver la longueur de l'hypoténuse.
    $(\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal})$
- $\tau_{3,4}$: Dans le cas où on souhaite calculer <u>la longueur du *côté opposé* à l'angle aigu</u>,
  - $\tau_{3,4,1}$: commencer par utiliser $\tau_{3,3,1}$ pour calculer la longueur de l'hypoténuse, puis trouver la longueur du côté opposé à l'angle aigu à l'aide de la définition du sinus.
    $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal})$
    <u>Remarque</u> : il s'agit d'une évolution de la technique $\tau_{3,4,1}$ associée à T_3 vue en 4^e.

- $\tau_{3,4,2}$: il s'agit de la technique $\tau_{3,4,2}$ associé à T_3 vu en 4e avec l'adaptation technique $\tau_{3,3,1}$ ($\tau_{3,3}$ en 4e devient $\tau_{3,3,1}$ en 3e).
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)
- $\tau_{3,4,3}$: commencer par utiliser la définition de la tangente, reporter les données numériques dans l'égalité, en déduire la longueur du côté opposé à l'angle aigu en fonction de la tangente de l'angle aigu à l'aide de la propriété des produits en croix, et utiliser la calculatrice pour finir.
  ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$)

Troisième cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté opposé.*

- $\tau_{3,5}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur de l'*hypoténuse*,
  - $\tau_{3,5,1}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,3,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer « cosinus » par « sinus ».
    ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$)
    Remarque : il s'agit d'une évolution de la technique $\tau_{3,5}$ associée à T_3 vue en 4e.
  - $\tau_{3,5,2}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,3,2}$ dans laquelle il suffit de remplacer « opposé » par « adjacent ».
    ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)
  - $\tau_{3,5,3}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,3,3}$ dans laquelle il suffit de remplacer les mots : opposé par adjacent, puis sinus par cosinus.
    ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
- $\tau_{3,6}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu,
  - $\tau_{3,6,1}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,4,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer : $\tau_{3,3,1}$ par $\tau_{3,5,1}$, opposé par adjacent, sinus par cosinus.
    ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$)
    Remarque : il s'agit d'une évolution de la technique $\tau_{3,6,1}$ associée à T_3 vue en 4e.
  - $\tau_{3,6,2}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,4,2}$ dans laquelle il suffit de remplacer : $\tau_{3,3,1}$ par $\tau_{3,5,1}$.
    ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{calNumCal}$; $\theta_{Th.Pyth}$)
    Remarque : il s'agit d'une évolution de la technique $\tau_{3,6,2}$ associée à T_3 vue en 4e.
  - $\tau_{3,6,3}$: il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{3,4,3}$ dans laquelle il suffit de remplacer : opposé par adjacent.
    ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{Th.Pyth}$

3.1.2.2.3. Points de réflexions et commentaires

La trigonométrie en 3e est toujours la trigonométrie du triangle rectangle comme en 4e, mais cette fois-ci, on l'étend en intégrant deux nouvelles notions, celle de sinus et celle de tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle, ce qui suppose d'avoir d'abord introduit le terme de « côté opposé à un angle aigu ».

Toujours dans le cadre de l'$OML_{Triangle}$, certains manuels abordent des éléments complémentaires de la technologie de cette $OML_{Triangle}$, quelques rares fois dans le cours, essentiellement comme thème d'exercices : lien entre le cosinus et le sinus liés à deux angles aigus complémentaires du triangle rectangle, formules diverses ($\cos^2\hat{A} - \sin^2\hat{A} = 1 - 2\sin^2\hat{A} = 2\cos^2\hat{A} - 1$; $1 + \tan^2\hat{A} = \frac{1}{\cos^2\hat{A}}$) ; détermination et preuve des valeurs exactes des cosinus et sinus de certains angles remarquables ou pas (cas de 15° par exemple) ; formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de deux côtés du triangle et du sinus de l'angle formé par ces deux côtés, formule d'Al-Kashi. Il s'agit là d'anticipations sur le programme de 1re Scientifique, dont plusieurs sont vues en 10e, de manière plus institutionnalisée, nous le verrons dans la troisième section de ce chapitre.

Certains manuels introduisent la configuration du cercle trigonométrique (rayon unité) dans la partie « Activités », et mettent en évidence le lien entre les rapports trigonométriques et la longueur de certains segments, et aussi, le lien entre l'abscisse et l'ordonnée d'un point du quart du cercle trigonométrique et le cosinus et le sinus d'un angle géométrique, (manuel Diabolo – Hachette 2008, pp. 178-179). Ceci peut être considéré comme une première approche du point du vue de la Seconde. Cependant, dans la mesure où aucun calcul de longueur d'arcs n'est proposé, nous considérons que ce travail reste dans l'$OML_{Triangle}$.

Un autre aspect peut être interprété comme témoignant du même objet. En effet, on peut remarquer certaines variations qui créent un flottement sur l'objet dont on considère les rapports trigonométriques. On rencontre en effet les usages et notations suivantes : $\cos\hat{A}$, $\cos 30^\circ$ et enfin, dans certains manuels (Myriade – Bordas 2012, page 258 ; Triangle – Hatier 2012, page 234), $\cos x$ où x désigne « la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle ». Par exemple, on peut rencontrer, dans les parties « Activités » et « Exercices », la tâche suivante : « Déterminer, si possible, un nombre x, la mesure en degrés d'un angle, qui vérifie $\sin x = a$ ou $\tan x = a$, a étant un nombre donné », (Triangle – Hatier 2012, pp. 232 et 240). Compte tenu des autres usages de la lettre x en algèbre ou sur les fonctions qui commencent à être étudiées en 3e, on ne sait pas si, dans ces formules, x est un nombre réel ou une mesure en degrés comme 15°.

Enfin le point de vue fonctionnel de la Terminale Scientifique est introduit dans des réflexions du cours ou dans des exercices avec un logiciel de géométrie sur les variations du cosinus, du sinus et de la tangente en fonctions de celles de l'angle entre 0° et 90°, (manuel Nouveau Prisme – Berlin 2011, Savoir-faire 3-p. 220).

3.2. Trigonométrie dans le cercle trigonométrique

3.2.1. Trigonométrie en Seconde

La trigonométrie en Seconde est classée dans le domaine « Fonctions ».

3.2.1.1. ***Extrait du B.O. numéro 30 du 23/07/2009***

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
« Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible.

3.2.1.2*. **Extrait des manuels*** (2010-2014)

Liste des manuels étudiés :

1. Odyssée – Édition Hatier 2010 (Chapitre 8, pp. 211-230) ;
2. Math'x – Édition Didier 2010 (Chapitre 6, pp. 151-160) ;
3. Tranmath – Édition Nathan 2010 (Chapitre 12, pp. 248-257) ;
4. Déclic – Édition Hachette 2014 (Chapitre 6, pp. 136-155).

3.2.1.2.1. Liste des objets de savoir visés

- Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique
    - Définition: *Cercle trigonométrique*.
    - Principe de l'enroulement de la droite des réels.

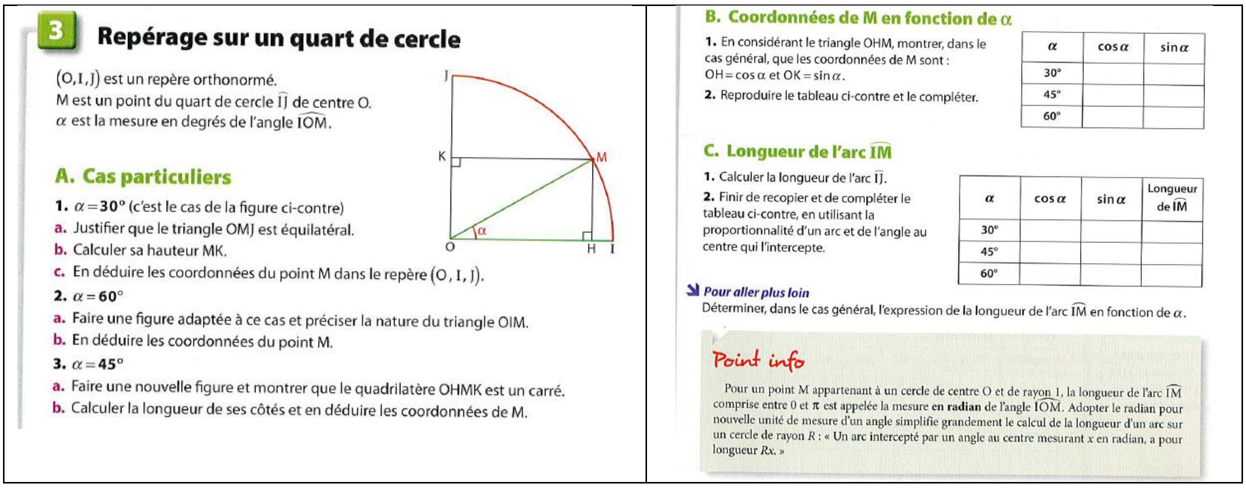
- Cosinus et sinus d'un nombre réel
    - Repérage d'un point du cercle trigonométrique.
    - Définition : ***cosinus et sinus d'un réel***.
    - Propriétés : propriété d'encadrement et relation fondamentale.
    - ***Lien avec la trigonométrie du triangle rectangle*** vue au collège.
    - Valeurs remarquables des cosinus et sinus.

Nous nous intéressons au traitement de l'objet de savoir principal visé : « Cosinus et sinus d'un nombre réel » dans les parties « Activités » et « Cours ».

Deux des quatre manuels étudiés proposent une activité visant à découvrir les notions de cosinus et sinus d'un nombre réel :

Manuel Math'x 2010 : Les auteurs proposent une activité intitulée « Repérage sur un quart de cercle » en précisant l'objectif de l'activité ci-après :

1. Exprimer les coordonnées d'un point M du cercle en fonction de l'angle au centre.
2. Déterminer des valeurs particulières de cosinus et sinus. Faire le lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle.
3. Préparer la définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel.



3 Repérage sur un quart de cercle

(O,I,J) est un repère orthonormé.
M est un point du quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ de centre O.
α est la mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOM}$.

A. Cas particuliers

1. $\alpha = 30°$ (c'est le cas de la figure ci-contre)
a. Justifier que le triangle OMJ est équilatéral.
b. Calculer sa hauteur MK.
c. En déduire les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J).
2. $\alpha = 60°$
a. Faire une figure adaptée à ce cas et préciser la nature du triangle OIM.
b. En déduire les coordonnées du point M.
3. $\alpha = 45°$
a. Faire une nouvelle figure et montrer que le quadrilatère OHMK est un carré.
b. Calculer la longueur de ses côtés et en déduire les coordonnées de M.

B. Coordonnées de M en fonction de α

1. En considérant le triangle OHM, montrer, dans le cas général, que les coordonnées de M sont : $OH = \cos\alpha$ et $OK = \sin\alpha$.
2. Reproduire le tableau ci-contre et le compléter.

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
30°		
45°		
60°		

C. Longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$

1. Calculer la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IJ}$.
2. Finir de recopier et de compléter le tableau ci-contre, en utilisant la proportionnalité d'un arc et de l'angle au centre qui l'intercepte.

α	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	Longueur de $\overset{\frown}{IM}$
30°			
45°			
60°			

Pour aller plus loin
Déterminer, dans le cas général, l'expression de la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ en fonction de α.

Point info

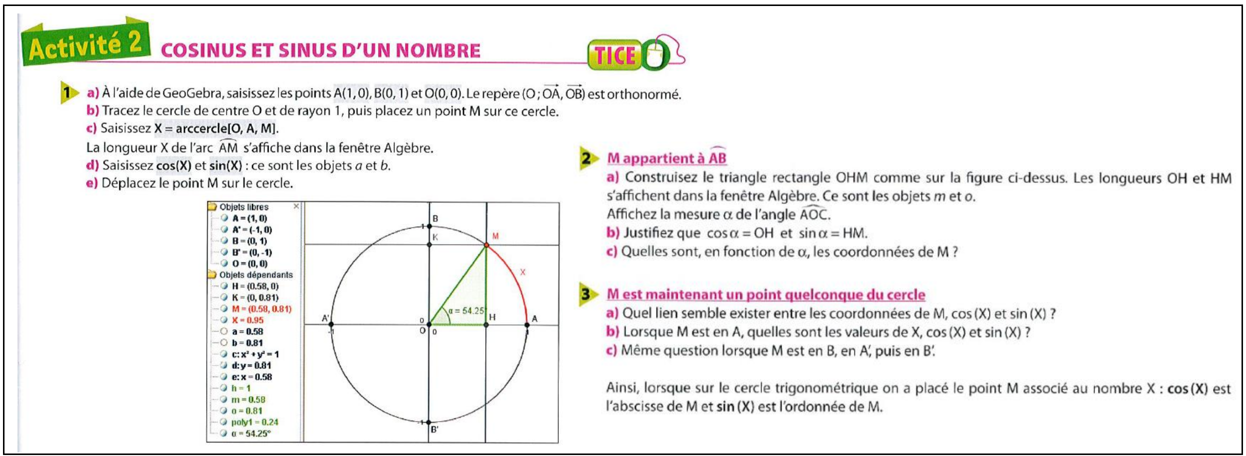
Pour un point M appartenant à un cercle de centre O et de rayon 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ comprise entre 0 et π est appelée la mesure **en radian** de l'angle $\widehat{IOM}$. Adopter le radian pour nouvelle unité de mesure d'un angle simplifie grandement le calcul de la longueur d'un arc sur un cercle de rayon R : « Un arc intercepté par un angle au centre mesurant x en radian, a pour longueur Rx. »

Figure 29 : Activité 3 – manuel Math'x d'édition Didier 2010, p. 153

Dans cette activité, apparaissent des objets nouveaux : un quart du cercle unité dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, un angle au centre $\widehat{IOM}$, les coordonnées d'un point M du cercle, la longueur de l'arc de cercle IM intercepté par l'angle au centre $\widehat{IOM}$. L'activité consiste à faire réactiver les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle, vues au collège, dans le quart du cercle unité de centre O l'origine du repère, en enchaînant avec un angle au centre $\widehat{IOM}$ interceptant l'arc de cercle IM et les coordonnées du point M.

Elle vise à découvrir que l'abscisse et l'ordonnée du point M du cercle unité sont respectivement le cosinus et le sinus de l'angle au centre $\widehat{IOM}$, puis à déterminer la longueur de l'arc de cercle IM correspondant à l'angle au centre.

<u>Manuel Transmath 2010</u> : Les auteurs proposent une activité intitulée « Cosinus et sinus d'un nombre » à l'aide du logiciel GeoGebra comme support instrumental.



Activité 2 COSINUS ET SINUS D'UN NOMBRE TICE

1 a) À l'aide de GeoGebra, saisissez les points A(1, 0), B(0, 1) et O(0, 0). Le repère $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est orthonormé.
b) Tracez le cercle de centre O et de rayon 1, puis placez un point M sur ce cercle.
c) Saisissez **X = arccercle[O, A, M]**.
La longueur X de l'arc $\widehat{AM}$ s'affiche dans la fenêtre Algèbre.
d) Saisissez **cos(X)** et **sin(X)** : ce sont les objets *a* et *b*.
e) Déplacez le point M sur le cercle.

2 M appartient à $\widehat{AB}$
a) Construisez le triangle rectangle OHM comme sur la figure ci-dessus. Les longueurs OH et HM s'affichent dans la fenêtre Algèbre. Ce sont les objets *m* et *o*.
Affichez la mesure α de l'angle $\widehat{AOC}$.
b) Justifiez que $\cos\alpha = OH$ et $\sin\alpha = HM$.
c) Quelles sont, en fonction de α, les coordonnées de M ?

3 M est maintenant un point quelconque du cercle
a) Quel lien semble exister entre les coordonnées de M, cos (X) et sin (X) ?
b) Lorsque M est en A, quelles sont les valeurs de X, cos (X) et sin (X) ?
c) Même question lorsque M est en B, en A', puis en B'.

Ainsi, lorsque sur le cercle trigonométrique on a placé le point M associé au nombre X : **cos (X)** est l'abscisse de M et **sin (X)** est l'ordonnée de M.

<u>Figure 30</u> : Activité 2 – manuel Transmath d'édition Nathan 2010, p. 249

Cette activité consiste en une approche géométrique et fonctionnelle dans le domaine « Géométrie repérée ». Elle vise à conjecturer que le cosinus et le sinus d'un nombre réel X sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M du cercle trigonométrique associé au nombre réel X, où X désigne la longueur de l'arc de cercle AM.

Tout est programmé par le logiciel GeoGebra, par exemple, l'arc de cercle AM est représenté par X tel que X soit défini par $X = \text{arccercle}[O, A, M]$. Lorsque l'on déplace, dans n'importe quel sens, le point M sur le cercle, X représente toujours l'arc de cercle AM de telle sorte que M se déplace dans le sens antihoraire, d'une part et d'autre part, dans la fenêtre Algèbre, les objets a et b désignant respectivement $\cos(X)$ et $\sin(X)$ s'affichent clairement leurs valeurs qui sont l'abscisse et l'ordonnée du point M ; à remarquer le manuel n'a prévenu aucun procédé concernant le déplacement du point M. Dans la phase 2 de l'activité, le manuel fait découvrir le lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle, en restreignant le point M situé sur l'arc de cercle AB dans le quart du cercle ; et le manuel n'attire pas l'attention dans le cas où M est en A ou en B. Dans la phase 3, le point M est un point quelconque du cercle, cela revient à ce qui s'est passé dans la phase 1 à la question 1.e. Dans l'ensemble, il semble que le manuel ait la conscience que l'élève va faire déplacer le point M seulement dans le sens antihoraire et qu'il verrait seulement que $\cos(X)$ et $\sin(X)$ sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M sans prendre en compte le déplacement du point M dans quel sens (y compris la longueur X de l'arc AM affichée dans la fenêtre Algèbre).

L'activité 3 du manuel Math'x 2010 ancre les connaissances mathématiques mieux que l'activité 2 du manuel Transmath 2010. En effet :

- Le manuel Math'x base sur la trigonométrie du triangle rectangle dans le quart du cercle et fait la mettre en fonctionnement pour viser conformément au contrat en mathématique les objets d'étude de base : angle au centre, lien entre les coordonnées d'un point du cercle associé à l'angle au centre et le cosinus et le sinus de l'angle au centre, longueur de l'arc intercepté par l'angle.
- Le manuel Transmath aborde par les objets programmés, et tout de suite, par le cosinus et le sinus d'un nombre réel, puis faire découvrir et conjecturer le cosinus et le sinus d'un nombre réel comme étant l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle unité

grâce à l'observation de l'affichage des valeurs dans la fenêtre Algèbre. Il ne se focalise pas sur la réactivation de la trigonométrie du triangle rectangle pour orienter vers les objets d'études visés. N'apparaît pas le lien entre un angle au centre et longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre.

Dans la partie « Cours » des manuels, on définit ***le cosinus et le sinus d'un nombre réel*** :

Soient x un nombre réel et M son point image dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique.
Le **cosinus du nombre réel** $\boldsymbol{x}$ est l'abscisse du point M ; cette valeur se note $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$.
Le **sinus du nombre réel** $\boldsymbol{x}$ est l'ordonnée du point M ; cette valeur se note $\mathbf{sin}\,\boldsymbol{x}$.

Comment faire le lien avec les cosinus et sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle (vues au Collège) ?

Soient x un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et M son point image dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. Le point C est le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses, et le point S, celui du point M sur l'axe des ordonnées.

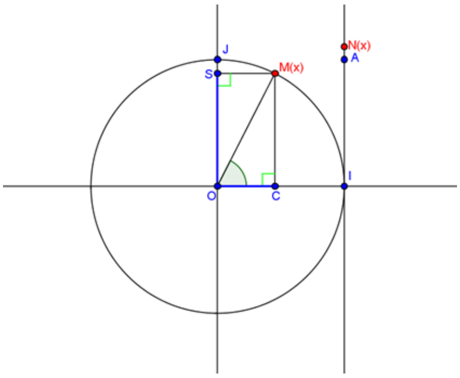


Figure 31 : Lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle

- Lire le signe de $\cos x$ et celui de $\sin x$;
- Donner les coordonnées du point C et celles du point S ;
- Déterminer $\sin\widehat{COM}$ et $\cos\widehat{COM}$ dans le triangle COM rectangle en C ;
- En utilisant le fait que ***la longueur du rayon*** $OM = 1$, vérifier que : $\sin\widehat{COM} = \sin x$ et que $\cos\widehat{COM} = \cos x$.

Remarque : Concernant les valeurs de x, manuel Transmath 2010 indique que $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, manuel Odyssée, x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, et deux autres manuels étudiés, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Aucun manuel étudié n'attire l'attention sur le fait que les formules faisant intervenir côté adjacent et côté opposé ne s'appliquent pas à l'angle nul ni à l'angle droit.

3.2.1.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
2^{de}	θ_{PC} ; $\theta_{Pr.Sym}$; $\theta_{ptC\&D}$	$\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{TvrCSréel}$; $\theta_{\mathrm{CS}Cal(\mathrm{rad})}$; $\theta_{encCSRéelC}$; $\theta_{RFréel}$; $\theta_{\mathrm{ArcCS}Cal(\mathrm{rad})}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$ (1^{re} S) ; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$ (1^{re} S)

Tableau 8 : θ_i évoqué(s) en Seconde

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées au collège.

$\theta_{lArc\&mAng}$: La proportionnalité entre *la mesure de la longueur d'un arc de cercle* et *la mesure de l'angle au centre* correspondant.

$\theta_{EnrDréelsC}$: *Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique* : Dans un repère orthonormé $(O\,; I\,, J)$, on considère le cercle trigonométrique, et la droite des réels qui est tangente au cercle trigonométrique en I et qui est orientée par le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées du repère. Au nombre réel x, on associe sur la droite des réels le point N d'abscisse x. Dans l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique, le point N correspond à un unique point M du cercle qui est appelé image du nombre réel x.

- Si $x \geq 0$, le point M associé à x est l'extrémité du chemin de longueur x parcouru sur le cercle dans le sens direct à partir de l'origine I du cercle ; et
  si $x \leq 0$, le point M associé à x est l'extrémité du chemin de longueur $-x$ parcouru sur le cercle dans le sens indirect à partir de l'origine I du cercle.
- Si $x \in [0\,; 2\pi[$, x est égal à la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité M.
  La longueur de cet arc de cercle IM est, dans ce cas, proportionnelle à la mesure (en degrés) de l'angle $\widehat{IOM}$.
- Le point M du cercle trigonométrique est associé à une infinité de nombres réels de la forme $x + 2k\pi$ où k est un nombre entier relatif.

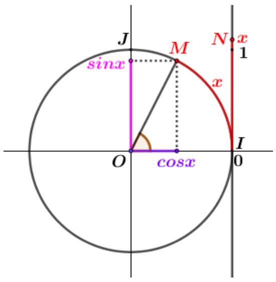
$\theta_{\text{CS}RéelC}$: <u>Définition</u> – Soit x un nombre réel. Soit M le point du cercle trigonométrique associé à ce nombre réel x dans l'enroulement de la droite des réels, ***le cosinus du nombre réel*** x, noté $\cos x$, est ***l'abscisse du point*** M, et ***le sinus du nombre réel*** x, noté $\sin x$, ***l'ordonnée du point*** M.

$\theta_{enc\text{CS}RéelC}$: <u>Propriétés d'encadrement</u> – Le cosinus et le sinus d'un nombre réel sont un nombre réel compris entre -1 et 1. Autrement dit, pour tout nombre réel x, on a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.

$\theta_{RFréel}$: <u>Propriété</u> – *Relation fondamentale* : Pour tout nombre réel x, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

$\theta_{Tvr\text{CS}réel}$: Tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus de $0\,; \frac{\pi}{6}\,; \frac{\pi}{4}\,; \frac{\pi}{3}\,; \frac{\pi}{2}$.

angle $\widehat{IOM}$	0°	30°	45°	60°	90°
nombre réel x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



<u>Tableau 9</u> : Valeurs remarquables du cosinus et du sinus

$\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Radian », permettant de donner une valeur approchée d'un cosinus et d'un sinus.

$\theta_{\text{ArcCS}Cal(\text{rad})}$: Fonctions de la calculatrice en mode « Radian », une valeur approchée d'un nombre réel connaissant son cosinus ou son sinus.

θ_{PC} : <u>Propriété</u> – Le périmètre d'un cercle de rayon R est $2\pi R$.

$\theta_{Pr.Sym}$: <u>Propriétés</u> – Soient deux points et un repère orthonormé du plan :

- Si ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées.
- Si ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées, ils ont des abscisses opposées et la même ordonnée.
- Si ces deux points sont symétriques par rapport à l'origine du repère, ils ont des abscisses opposées et des ordonnées opposées.

$\theta_{ptC\&D}$: <u>Propriété</u> – Position et Intersection d'un cercle et une droite.

$\theta_{For.add\mathrm{CS}}$: <u>Formules</u> d'addition des cosinus et sinus – Quels que soient les nombres réels a et b, on a :

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b \ ;$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a.$$

$\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$: <u>Formules</u> de duplication des cosinus et sinus – Quel que soit le nombre réel a, on a :

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a\,;$$
$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$

- <u>Types de tâches</u>

  Nous avons ici neuf nouveaux T. Nous les numérotons à la suite des T déterminés dans l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{Triangle}}$.
  - T_7 : Calculer la longueur d'un arc de cercle trigonométrique intercepté par l'angle au centre dont la mesure est donnée en degrés.
  - T_8 : Déterminer, en degrés, la mesure de l'angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur donnée.
  - T_9 : Déterminer/Placer le point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel, dans l'enroulement de la droite des réels.
  - T_{10} : Déterminer un nombre réel associé à un point du cercle trigonométrique dans l'enroulement de la droite des réels.
  - T_{11} : Dire si deux réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique.
  - T_{12} : Préciser le quadrant auquel appartient le point associé à un nombre réel donné sur le cercle trigonométrique.
  - T_{13} : Donner/préciser le signe du cosinus et/ou du sinus d'un nombre réel.
  - T_{14} : Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel.
  - T_{15} : Trouver un nombre réel x vérifiant $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.

- <u>Techniques et Technologies associées</u>

  Éléments techniques pour T_7 :

  T_7 : Calculer la longueur d'un arc de cercle intercepté par l'angle au centre dont la mesure est donnée en degrés.
  - $\tau_{7,1}$: Utiliser la proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure de l'angle au centre intercepté par cet arc de cercle, sachant que le cercle de rayon R est de longueur $2\pi R$, et que le périmètre de ce cercle correspond à un angle au centre de 360°. Fabriquer le tableau de proportionnalité suivant :

Mesure de la longueur de l'arc de cercle	$2\pi R$	l
Mesure de l'angle en degrés	360	α

<u>Tableau 10</u> : Proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en degrés de l'angle au centre intercepté

Écrire deux rapports égaux, reporter les données numériques dans l'égalité des rapports, en déduire l, la longueur de l'arc de cercle cherchée, à l'aide de la propriété des produits en croix.
Notons que l'on peut aussi effectuer d'abord le calcul littéral avant de remplacer par les valeurs numériques.
Remarque : On peut remplacer le cercle par un demi-cercle en utilisant 180 à la place de 360.

Éléments technologiques :
θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$

Éléments techniques pour T_8 :
T_8 : Déterminer, en degrés, la mesure de l'angle au centre interceptant un arc de cercle de longueur donnée.

- $\tau_{8,1}$: Utiliser la proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure de l'angle au centre intercepté par cet arc de cercle, en fabriquant le tableau de proportionnalité (voir *Tableau 10*).
  Écrire deux rapports égaux, reporter les données numériques dans l'égalité des rapports, en déduire α, la mesure de l'angle au centre cherchée, à l'aide de la propriété des produits en croix.
  Mêmes notation et remarque que précédemment.

Éléments technologiques :
θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$

Éléments techniques pour T_9 :
T_9 : Déterminer/Placer le point M du cercle trigonométrique associé à un nombre réel x dans l'enroulement de la droite des réels, dans le repère orthonormé direct $(O\,; I, J)$ du plan.
Commencer par vérifier si le nombre réel x donné a une valeur absolue inférieure à π, puis mettre en œuvre l'une des deux techniques ci-après :

- $\tau_{9,1}$: Dans le cas où $|x| \leq \pi$, ($x \in [0\,;\,\pi]$ ou $x \in [-\pi\,;0]$) :
  - $\tau_{9,1,1}$: Utiliser $\tau_{8,1}$ associé à T_8 avec l'adaptation de rayon unité, en considérant $l = |x|$ pour trouver la mesure approchée de l'angle au centre correspondant, puis conformément au principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique : si $x \geq 0$, représenter l'angle au centre à l'aide du rapporteur dans le demi-plan supérieur et dans le demi-plan inférieur si $x \leq 0$.
    (θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$)
  - $\tau_{9,1,2}$: Il s'agit d'une construction géométrique à l'aide du raisonnement géométrique, du support instrumental comme le compas et l'équerre, et en conformité avec le principe de l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique.
    Cas 1 : Dans le cas particulier où $x \in \left\{0\,; \frac{\pi}{6}\,; \frac{\pi}{4}\,; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\,; \pi\right\}$. Par exemple, pour $x = \frac{\pi}{6}$, c'est un sixième de demi-tour du cercle ou bien c'est un tiers du quart de tour du cercle, alors le point M se situe dans le premier quadrant et il est l'intersection entre le cercle trigonométrique et la médiatrice de $[OJ]$, tel que le triangle OMJ soit équilatéral.

Cas 2 : Dans le cas où x est l'opposé de t sachant que t est une des valeurs remarquables indiquées précédemment dans le « Cas 1 », utiliser le procédé convenable décrit dans le « Cas 1 » puis la propriété de la symétrie par rapport l'axe des abscisses pour finir. Par exemple, le point M associé au nombre réel $-\frac{\pi}{6}$ est le symétrique du point image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$ (opération réalisée dans le « Cas 1 ») par rapport à l'axe des abscisses.

Cas 3 : Dans le cas où x peut s'écrire sous la forme $\pi - t$ sachant que t est une des valeurs remarquables indiquées précédemment dans le « Cas 1 », il s'agit du procédé analogue à celui décrit dans le « Cas 2 » dans lequel il suffit de remplacer « l'axe des abscisses » par « l'axe des ordonnées ». Par exemple, le point M associé au nombre réel $\frac{5\pi}{6}$ est le symétrique du point image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$ (opération réalisée dans le « Cas 1 ») par rapport à l'axe des ordonnées.

Cas 4 : Dans le cas où x peut s'écrire sous la forme $-\pi + t$ sachant que t est une des valeurs remarquables indiquées précédemment dans le « Cas 1 », il s'agit du procédé analogue à celui décrit dans le « Cas 2 » dans lequel il suffit de remplacer « l'axe des abscisses » par « l'origine du repère ». Par exemple, le point M associé au nombre réel $-\frac{5\pi}{6}$ est le symétrique du point image du nombre réel $\frac{\pi}{6}$ (opération réalisée dans le « Cas 1 ») par rapport à l'origine du repère.

(θ_{PC} ; $\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{Pr.Sym}$)

- $\tau_{9,2}$: Dans le cas où $|x| > \pi$, rechercher le nombre entier de tours effectués dans l'enroulement de la droite des réels sachant qu'un tour de cercle trigonométrique a pour longueur 2π, c'est commencer par transformer le nombre réel x donné, à l'aide d'une division euclidienne, sous forme $t + k \times 2\pi$ où $t \in [0 ; \pi]$ ou $t \in [-\pi ; 0]$, et k, un entier relatif. La valeur absolue de l'entier relatif k représente le nombre de tours complets effectués dans l'enroulement de la droite des réels. Le point M associé au nombre réel x, à placer sur le cercle trigonométrique, coïncide avec le point associé au réel a en utilisant $\tau_{9,1,1}$ ou $\tau_{9,1,2}$ pour finir.

  D'ailleurs, pour transformer x sous forme $t + k \times 2\pi$, on considère que x est initialement donné plutôt sous forme $\frac{p\pi}{q}$ où p est un entier relatif et q, un entier naturel, telle que $|p| > q$. Il y a deux cas :

  Cas 1 : Dans le cas où $|p|$ est un multiple de q,

  1. si le quotient $\frac{|p|}{q}$ est pair, alors $\frac{p\pi}{q} = k \times 2\pi$ et le point M se situe donc en I ;
  2. si le quotient $\frac{|p|}{q}$ est impair, alors $\frac{p\pi}{q} = \pi + k_1 \times 2\pi$ ($k_1 > 0$ pour $p > 0$) ou $\frac{p\pi}{q} = -\pi + k_2 \times 2\pi$ ($k_2 < 0$ pour $p < 0$), et le point M se situe donc en K où le point K est diamétralement opposé à I.

  Cas 2 : Dans le cas où $|p|$ n'est pas un multiple de q, effectuer les étapes indiquées ci-après :

  1. chercher deux multiples consécutifs positifs de q où la valeur absolue de p est comprise entre ces deux multiples ;

2. choisir le multiple qui a pour quotient un nombre pair dans la division par q ;
3. *Important* ici, à partir de maintenant, le signe du multiple choisi est celui de l'entier relatif p qui est positif ou négatif. Dans la suite, ce multiple choisi, y compris le signe est noté m ;
4. Écrire alors $p = m + r$ où r est un entier relatif et où $0 \leq |r| < q$; ensuite, remplacer p par $m + r$ dans le quotient $\frac{p\pi}{q}$, puis finir les opérations à l'aide des propriétés : $a(b + c) = ab + ac$ et $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Exemple 1 : $x = \frac{22\pi}{3}$	Exemple 2 : $x = -\frac{27\pi}{4}$
$p = 22, q = 3$ 1. $7 \times 3 \leq \lvert 22 \rvert \leq 8 \times 3$; 2. le multiple choisi est 8×3 ; 3. comme $p > 0$, alors $m = 8 \times 3$; 4. $22 = 8 \times 3 - 2$, avec $r = -2$; $x = \frac{(8\times3-2)\pi}{3} = 8\pi - \frac{2\pi}{3}$, donc : $x = -\frac{2\pi}{3} + 4 \times 2\pi$	$p = -27, q = 4$ 1. $6 \times 4 \leq \lvert -27 \rvert \leq 7 \times 4$; 2. le multiple choisi est 6×4 ; 3. comme $p < 0$, alors $m = -6 \times 4$; 4. $-27 = -6 \times 4 - 3$, avec $r = -3$; $x = \frac{(-6\times4-3)\pi}{4} = -6\pi - \frac{3\pi}{4}$, donc : $x = -\frac{3\pi}{4} + (-3) \times 2\pi$

$(\theta_{PC}\ ;\ \theta_{lArc\&mAng}\ ;\ \theta_{EnrDréelsC})$ ou $(\theta_{PC}\ ;\ \theta_{EnrDréelsC}\ ;\ \theta_{Pr.Sym})$

Éléments technologiques :
$\theta_{PC}\ ;\ \theta_{lArc\&mAng}\ ;\ \theta_{EnrDréelsC}\ ;\ \theta_{Pr.Sym}$

Éléments techniques pour T_{10} :
T_{10} : Déterminer un nombre réel associé au point M du cercle trigonométrique dans l'enroulement de la droite des réels, dans un repère orthonormé $(O\ ; I\ , J)$.

- $\tau_{10,1}$: Commencer par repérer graphiquement le point M du cercle trigonométrique, puis à l'aide du rapporteur, mesurer en degrés la mesure de l'angle au centre intercepté par l'arc de cercle IM tel que l'angle $\widehat{IOM}$ soit un angle saillant (où I est l'origine du cercle trigonométrique) ou trouver la mesure de l'angle au centre à l'aide de la figure graphique donnée et du raisonnement géométrique. Par exemple, selon l'énoncé de la *Figure 38* avec colonne de gauche, on obtient $\widehat{IOA} = 45^{\circ}$ par le fait que le point A se situe sur la diagonale $[OR]$ qui est la bissectrice de l'angle droit $\widehat{IOJ}$ dans le carré $OIRJ$.
  Utiliser $\tau_{7,1}$ associée à T_7 avec l'adaptation au cercle de rayon unité pour trouver la longueur de l'arc de cercle IM. En conformité avec le principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, en déduire alors une mesure de la longueur de l'arc de cercle trouvée ; et cette mesure est le nombre réel cherché.
  Remarquons que l'on peut donner un nombre réel que l'on veut en lien avec la mesure de longueur de l'arc de cercle trouvée précédemment conformément au principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique. De plus, cette technique $\tau_{10,1}$ est aussi valable pour quelques types de tâches ci-après :
  - Donner tous les nombres réels, compris dans un intervalle donné, associés à un point du cercle trigonométrique.

- Trouver tous les réels associés à un point du cercle trigonométrique connaissant l'un de ces réels.

Éléments technologiques :
θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$

Éléments techniques pour T_{11} :
T_{11} : Dire si deux nombres réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique.

- $\tau_{11,1}$: Commencer par calculer la distance entre les deux nombres réels sur la droite des réels. Si cette distance est égale à un nombre entier de fois 2π, conclure alors que les deux nombres réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique. Sinon, les deux nombres n'ont pas le même point image sur le cercle trigonométrique.

Éléments technologiques :
$\theta_{EnrDréelsC}$; θ_{PC}

Éléments techniques pour T_{12} :
T_{12} : Préciser le quadrant auquel appartient le point associé à un nombre réel donné sur le cercle trigonométrique.

- $\tau_{12,1}$: Commencer par placer le point M, image du nombre réel x donné, sur le cercle trigonométrique en utilisant $\tau_{9,1}$ ou $\tau_{9,2}$ associée à T_9. À l'aide de la lecture graphique de la position du point M sur le cercle, préciser alors le quadrant auquel appartient le point M.

Éléments technologiques :
θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{Pr.Sym}$

Éléments techniques pour T_{13} :
T_{13} : Donner/préciser le signe du cosinus et/ou du sinus d'un nombre réel.

- $\tau_{13,1}$: Utiliser $\tau_{12,1}$ associée à T_{12}, puis lire graphiquement le signe du cosinus et/ou du sinus du nombre réel à l'aide des définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel dans l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique.
  Précisons que le quadrant auquel appartient le point image associé au nombre réel x indique le signe de l'abscisse et celui de l'ordonnée de ce point image.

Éléments technologiques :
θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{Pr.Sym}$; θ_{Qplan} ; $\theta_{\mathrm{CSRéelC}}$

Éléments techniques pour T_{14} :
T_{14} : Déterminer le cosinus ou le sinus d'un nombre réel.
Il y a quatre cas possibles.
<u>Premier cas</u> : ***avec calcul****, connaissant la valeur de ce nombre réel.*

- $\tau_{14,1}$: Si ce nombre réel donné est une des valeurs remarquables (0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$), utiliser le tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus pour donner les valeurs exactes du cosinus ou du sinus de ce nombre réel.

$(\theta_{Tvr\text{CS}réel})$

- $\tau_{14,2}$: Si ce nombre réel donné est un nombre réel que l'on peut transformer sous forme $t + k \times 2\pi$ où t est une des valeurs remarquables et k, un entier relatif, utiliser la propriété avec les tours dans l'enroulement de la droite des réels, puis utiliser $\tau_{14,1}$ pour finir.
  $(\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel})$
- $\tau_{14,3}$: Utiliser la calculatrice en mode « Radian » pour trouver une valeur approchée du cosinus ou du sinus de ce nombre réel.
  $(\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})})$

Deuxième cas : ***lecture graphique***, à l'aide du point du cercle trigonométrique qui est le point image associé au nombre réel dont on va déterminer le cosinus ou le sinus.

- $\tau_{14,4}$: Dans le cas où on connaît les coordonnées du point image M associé au nombre réel x, exploiter la définition du cosinus ou celle du sinus d'un nombre réel.
  $(\theta_{\text{CS}RéelC})$
- $\tau_{14,5}$: Déterminer graphiquement le cosinus ou le sinus d'un nombre réel x associé au point M déjà placé sur le cercle trigonométrique à partir du point M' du cercle associé à une des valeurs remarquables, c'est trouver un lien géométrique entre les positions des points M et M' sur le cercle trigonométrique et utiliser les valeurs remarquables des cosinus et sinus de 0 ; $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$.
    - Si M est le symétrique du point M' par rapport à l'axe des abscisses (O, I), en déduire le cosinus ou le sinus du nombre réel x à l'aide de la propriété de deux points dans un repère du plan, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
    - Si M est le symétrique du point M' par rapport à l'axe des ordonnées (O, J), en déduire le cosinus ou le sinus du nombre réel x à l'aide de la propriété de deux points dans un repère du plan, symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
    - Si M est le symétrique du point M' par rapport à l'origine O du repère orthonormé, en déduire le cosinus ou le sinus du nombre réel x à l'aide de la propriété de deux points dans un repère du plan, symétriques par rapport à l'origine du repère.

  $(\theta_{\text{CS}RéelC}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$; $\theta_{Pr.Sym})$

Troisième cas : déterminer le cosinus (ou le sinus) d'un nombre réel connaissant son sinus (ou son cosinus).
Dans ce cas, il y a deux cas possibles :
Cas 1 : *connaissant le sinus du nombre réel x, on veut déterminer son cosinus.*

- $\tau_{14,6}$: Utiliser la relation fondamentale entre cosinus et sinus : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$. Connaissant le sinus, reporter la valeur numérique du sinus donné dans la relation fondamentale, trouver alors $(\cos x)^2$ puis $\cos x$ à l'aide de la propriété de résolution de l'équation $X^2 = a$ où a est un nombre positif.
  Remarquer que :
    - concernant la technique, on peut écrire $(\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$ avant de remplacer $\sin x$ par la valeur numérique du sinus ;

- il est préférable d'utiliser $(\cos x)^2$ au lieu de $\cos^2 x$ afin d'éviter des erreurs possibles pendant le calcul ;
- les valeurs trouvées du cosinus doivent vérifier l'encadrement : $-1 \leq \cos x \leq 1$.

($\theta_{RFréel}$; $\theta_{enc\text{CS}RéelC}$)

- $\tau_{14,7}$: Si l'on restreint x dans un intervalle permettant d'en déduire le signe du cosinus du nombre réel x en utilisant la technique $\tau_{13,1}$ associée à T_{13}, on trouvera alors, avec la technique $\tau_{14,6}$, un seul cosinus vérifiant les conditions données.
  ($\theta_{RFréel}$; $\theta_{enc\text{CS}RéelC}$)

Cas 2 : *connaissant le cosinus du nombre réel x, on veut calculer son sinus.*

- $\tau_{14,8}$: Il s'agit de la technique analogue à $\tau_{14,6}$ dans laquelle il suffit d'échanger les mots sinus et cosinus ainsi que leurs représentants.
  ($\theta_{RFréel}$; $\theta_{enc\text{CS}RéelC}$)
- $\tau_{14,9}$: Il s'agit de la technique analogue à $\tau_{14,7}$ dans laquelle il suffit de remplacer « cosinus » par « sinus » et la technique $\tau_{14,6}$ par sa technique analogue $\tau_{14,8}$.
  ($\theta_{RFréel}$; $\theta_{enc\text{CS}RéelC}$)

Quatrième cas (1re Scientifique) : déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un nombre réel en utilisant les formules de trigonométrie.
Ici, les formules de trigonométrie désignent soit les *formules d'addition des cosinus et sinus* soit les *formules de duplication des cosinus et sinus*. Nous donnons plutôt les techniques très utiles ci-après :

- $\tau_{14,10}$: Dans le cas où le nombre réel dont on déterminera le cosinus et/ou le sinus peut s'écrire sous forme d'une somme ou d'une différence de deux nombres réels remarquables, utiliser alors les formules d'addition des cosinus et sinus convenables pour accomplir ce type de tâches T_{14}.
  Par exemple : on souhaite calculer $\cos\frac{\pi}{12}$; comme $\frac{\pi}{12}$ peut se décomposer en $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ (ou en $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$), donc on exploitera la formule $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
  ($\theta_{For.add}\text{CS}$)
- $\tau_{14,11}$: Dans le cas où le nombre réel dont on déterminera le cosinus et/ou le sinus est le double ou la moitié d'un nombre réel remarquable, utiliser alors les formules de duplication des cosinus et sinus convenables pour accomplir ce type de tâches T_{14}.
  Par exemple : on souhaite calculer $\cos\frac{\pi}{8}$; comme $\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$ ou simplement $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, donc on exploitera la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ où a désigne $\frac{\pi}{8}$.
  ($\theta_{For.dup}\text{CS}$; $\theta_{enc\text{CS}RéelC}$)

Remarquons que les techniques $\tau_{14,10}$ et $\tau_{14,11}$ associées à T_{14} sont aussi celles à compléter pour accomplir le type de tâches T_{19} vu précédemment dans le thème « Trigonométrie » de 1re Scientifique. Il s'agit des techniques s'adaptant au nouvel objet d'étude (T_{14}-nombre réel vers T_{19}-angle orienté liant à ses mesures en radians).

Éléments technologiques :

Seconde : $\theta_{EnrDréelsC}$; $\theta_{Tvr\mathrm{CS}réel}$; $\theta_{\mathrm{CS}Cal(\mathrm{rad})}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{Pr.Sym}$; $\theta_{RFréel}$; $\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$
1re Scientifique : $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$

Éléments techniques pour T_{15} :
T_{15} : Trouver un nombre réel x vérifiant $\cos x = a$ ou $\sin x = a$.
Premier cas : *connaissant* $\cos x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$.

- $\tau_{15,1}$: ***À l'aide de la calculatrice***, commencer par mettre la calculatrice en mode « Radian », puis utiliser la fonction « $\cos^{-1}$ » ou « Arccos » ou « Acs » pour trouver une valeur approchée du nombre réel x.
  ($\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\mathrm{ArcCS}Cal(\mathrm{rad})}$)
- $\tau_{15,2}$: Commencer par tracer le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan, puis la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de l'axe des abscisses d'abscisse a. Cette droite parallèle coupe le cercle trigonométrique en deux points M et M' qui sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (O, I). Il y a alors deux valeurs possibles de x qui sont associées respectivement aux points images M et M'. La suite de cette technique se poursuit ci-après pour trouver une des deux valeurs possibles de x :
  - Dans le cas où la valeur de a donnée est une des valeurs remarquables du cosinus figurant dans le tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus, exploiter ce tableau des valeurs remarquables pour donner la valeur exacte de x associée à son image M.
  - Si ce n'est pas le cas précédent, mesurer, à l'aide du rapporteur, la mesure en degrés d'un des deux angles au centre $\widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM'}$, puis utiliser $\tau_{7,1}$ associée à T_7 pour trouver la longueur de l'arc de cercle intercepté. Et, donner un nombre réel x vérifiant $\cos x = a$ en conformité avec le principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique.

  Remarquons que si l'on souhaite donner tous les nombres réels x possibles, utiliser $\tau_{7,1}$ associée à T_7 pour trouver les longueurs des arcs de cercle IM et IM' après avoir mesuré en degrés les mesures des angles au centre $\widehat{IOM}$ et $\widehat{IOM'}$ à l'aide du rapporteur, puis utiliser le principe de l'enroulement de la droite des réels pour finir.
  ($\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{ptC\&D}$; $\theta_{Tvr\mathrm{CS}réel}$; θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$)

Deuxième cas : *connaissant* $\sin x = a$, avec $-1 \leq a \leq 1$.

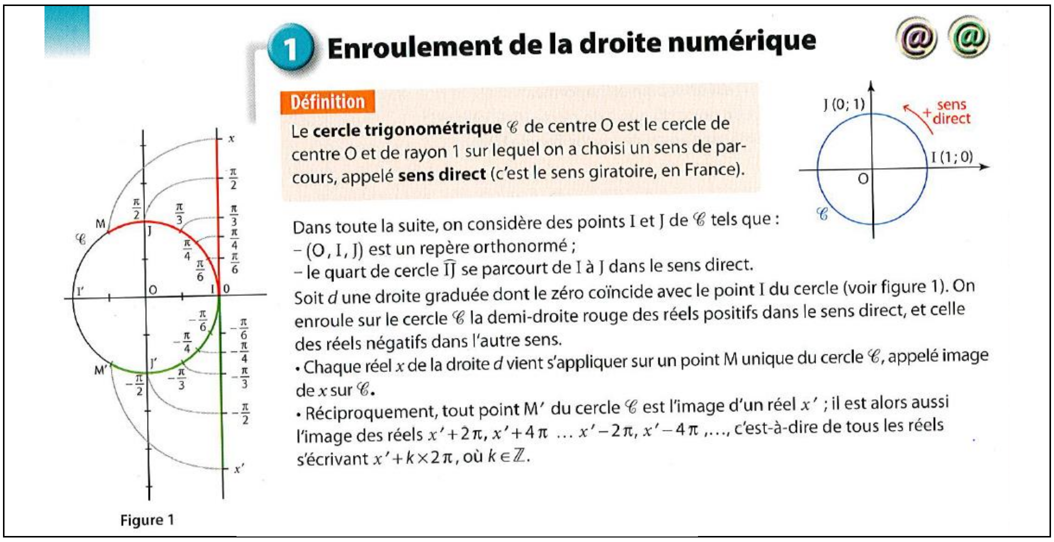
- $\tau_{15,3}$: Il s'agit de la technique analogue à $\tau_{15,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer la fonction « $\cos^{-1}$ » par « $\sin^{-1}$ ».
  ($\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\mathrm{ArcCS}Cal(\mathrm{rad})}$)
- $\tau_{15,4}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{15,2}$ dans laquelle il suffit d'échanger « l'axe des ordonnées » et « l'axe des abscisses », puis de remplacer « ordonnée » par « abscisse » et « $\cos x$ » par « $\sin x$ ». ($\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{ptC\&D}$; $\theta_{TvrCSréel}$; θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\mathrm{ArcCS}Cal(\mathrm{rad})}$; $\theta_{ptC\&D}$; $\theta_{Tvr\mathrm{CS}réel}$; θ_{PC} ; $\theta_{lArc\&mAng}$; $\theta_{EnrDréelsC}$

3.2.1.2.3. Points de réflexion et commentaires

1. Nous nous intéressons à l'existence de deux termes utilisés par des manuels en lien avec le programme de Seconde au sujet de « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique :
   - **Enroulement de la droite numérique** (ou de la droite des réels) avec deux registres parallèles (l'un contre l'autre) : registre de langage et registre graphique avec choix de position de la droite numérique par rapport à la position du cercle trigonométrique, afin de décrire aussi clairement que possible ce concept visé.

     (Manuel Odyssée 2010, Manuel Math'x 2010, Manuel Déclic 2014)



1 Enroulement de la droite numérique

Définition

Le **cercle trigonométrique** $\mathscr{C}$ de centre O est le cercle de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un sens de parcours, appelé **sens direct** (c'est le sens giratoire, en France).

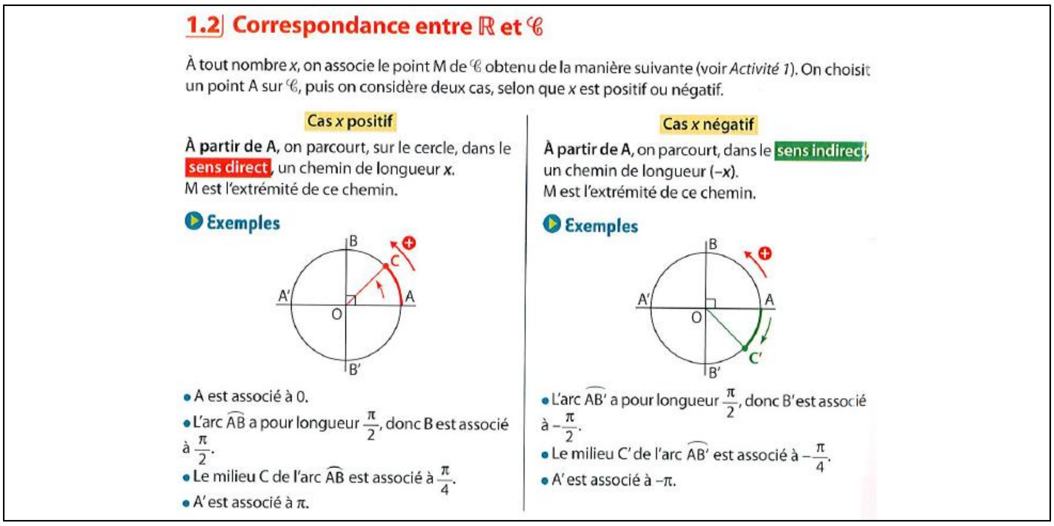
Dans toute la suite, on considère des points I et J de $\mathscr{C}$ tels que :
– (O, I, J) est un repère orthonormé ;
– le quart de cercle $\overset{\frown}{IJ}$ se parcourt de I à J dans le sens direct.

Soit d une droite graduée dont le zéro coïncide avec le point I du cercle (voir figure 1). On enroule sur le cercle $\mathscr{C}$ la demi-droite rouge des réels positifs dans le sens direct, et celle des réels négatifs dans l'autre sens.
• Chaque réel x de la droite d vient s'appliquer sur un point M unique du cercle $\mathscr{C}$, appelé image de x sur $\mathscr{C}$.
• Réciproquement, tout point M′ du cercle $\mathscr{C}$ est l'image d'un réel x' ; il est alors aussi l'image des réels $x'+2\pi$, $x'+4\pi$ … $x'-2\pi$, $x'-4\pi$,…, c'est-à-dire de tous les réels s'écrivant $x'+k\times 2\pi$, où $k\in\mathbb{Z}$.

Figure 32 : Extrait du manuel Math'x 2010, p. 154

   - **Correspondance entre $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$** où $\mathscr{C}$ désigne le cercle trigonométrique : la droite numérique est sous-entendue, commencer par définir les deux sens de parcours possibles du cercle trigonométrique, par choisir ensuite l'origine du cercle trigonométrique. À partir de l'origine du cercle, faire parcourir sur le cercle trigonométrique, par un point mobile, un chemin de longueur x (cas $x \geq 0$) dans le sens direct, et un chemin de longueur $-x$ (cas $x \leq 0$) dans le sens indirect. À la fin du parcours, le mobile s'arrête en M qui est l'extrémité de ce chemin, on convient d'associer le point M au nombre x.

     (Manuel Transmath 2010 : Partie « Activités » à la page 248 et Partie « Cours » à la page 250)



1.2 Correspondance entre $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$

À tout nombre x, on associe le point M de $\mathscr{C}$ obtenu de la manière suivante (voir *Activité 1*). On choisit un point A sur $\mathscr{C}$, puis on considère deux cas, selon que x est positif ou négatif.

Cas x positif

À partir de A, on parcourt, sur le cercle, dans le **sens direct**, un chemin de longueur x.
M est l'extrémité de ce chemin.

Exemples

- A est associé à 0.
- L'arc $\widehat{AB}$ a pour longueur $\frac{\pi}{2}$, donc B est associé à $\frac{\pi}{2}$.
- Le milieu C de l'arc $\widehat{AB}$ est associé à $\frac{\pi}{4}$.
- A' est associé à π.

Cas x négatif

À partir de A, on parcourt, dans le **sens indirect**, un chemin de longueur $(-x)$.
M est l'extrémité de ce chemin.

Exemples

- L'arc $\widehat{AB'}$ a pour longueur $\frac{\pi}{2}$, donc B' est associé à $-\frac{\pi}{2}$.
- Le milieu C' de l'arc $\widehat{AB'}$ est associé à $-\frac{\pi}{4}$.
- A' est associé à $-\pi$.

Figure 33 : Extrait du manuel Transmath 2010, p. 250

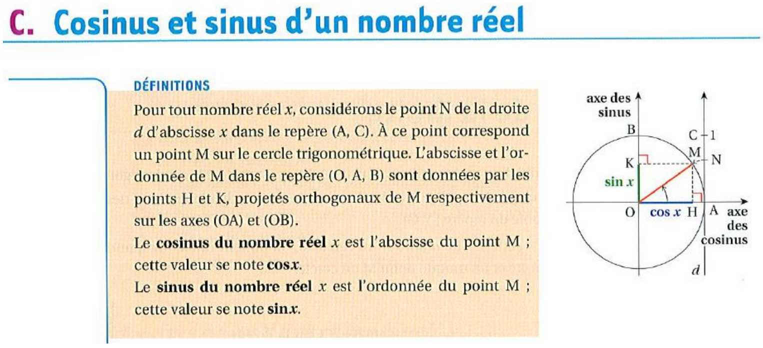
Pour amener à définir « l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique », les auteurs des manuels proposent certaines activités dont les objectifs sont de réactiver et de découvrir quelques concepts de base liés à celui de l'enroulement de la droite des réels, avec les tâches ci-après :

- Calculer la longueur d'un arc de cercle, avec propos d'utiliser la propriété de proportionnalité admise entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en degré de l'angle géométrique au centre qu'il intercepte.
- *Parcourir* un cercle (trigonométrique) ou déterminer des longueurs de *parcours* sur la circonférence d'un cercle.
- Associer un point à un réel, associer des réels à un point.

Lors de l'introduction de la notion d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, les auteurs des manuels font remarquer que :

- à chaque point de la droite des réels, on associe *un point, et un seul*, du cercle trigonométrique (apparaît « *la notion de fonction d'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique* » et implicitement « *les notions de fonctions cosinus et sinus* ») ;
- à chaque point du cercle trigonométrique, on peut associer *une infinité de points* de la droite des réels.

Remarquons que seul le manuel Odyssée 2010 indique une flèche de codage à l'angle au centre dans la figure qui accompagne le texte décrivant les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel dans la partie « Cours », (voir *Figure 34* ci-dessous).



C. Cosinus et sinus d'un nombre réel

DÉFINITIONS

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite d d'abscisse x dans le repère (A, C). À ce point correspond un point M sur le cercle trigonométrique. L'abscisse et l'ordonnée de M dans le repère (O, A, B) sont données par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les axes (OA) et (OB).

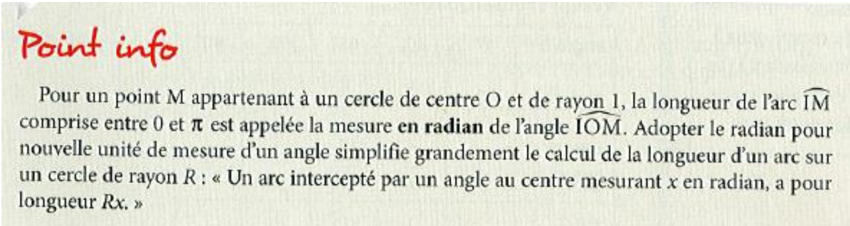
Le **cosinus du nombre réel** x est l'abscisse du point M ; cette valeur se note **cos**x.

Le **sinus du nombre réel** x est l'ordonnée du point M ; cette valeur se note **sin**x.

Figure 34 : Extrait du manuel Odyssée 2010, p. 214

Il serait possible que cette flèche indique le sens de l'enroulement de la droite d des réels partant du point A autour du cercle trigonométrique. Pourquoi les auteurs du manuel Odyssée font-ils ce choix ?
Pour les autres manuels de Seconde, le type de codage sans flèche d'un angle au centre interceptant un arc de cercle désigne l'angle géométrique au centre $\widehat{AOM}$.

2. Bien que la **notion de radian** ne soit pas exigible dans le programme de Seconde, trois des quatre manuels étudiés (Manuel Math'x 2010, Manuel Transmath 2010, Manuel Déclic 2014) intègrent « la notion de *mesure en radian d'un angle* au centre du cercle » sans définir « le radian ». On définit ainsi : « L'arc de cercle trigonométrique d'origine I et d'extrémité M, point image d'un nombre réel x dans l'enroulement de la droite des réels autour du cercle, a pour longueur x comprise entre 0 et π, alors x est aussi la *mesure en radian de l'angle* au centre du cercle $\widehat{IOM}$ ».
   - Manuel Math'x 2010 : Dans la partie « Activités », il s'agit d'un « Point info » donné à la fin de l'activité 3 intitulé : Repérage sur un quart de cercle, à la page 153.

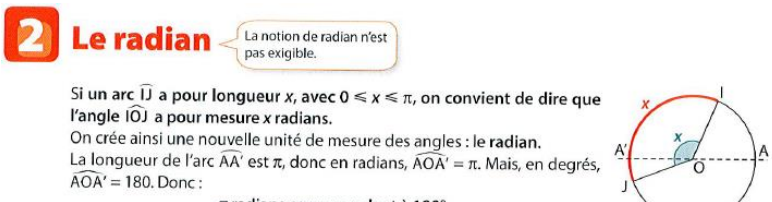


Point info

Pour un point M appartenant à un cercle de centre O et de rayon 1, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$ comprise entre 0 et π est appelée la mesure **en radian** de l'angle $\widehat{IOM}$. Adopter le radian pour nouvelle unité de mesure d'un angle simplifie grandement le calcul de la longueur d'un arc sur un cercle de rayon R : « Un arc intercepté par un angle au centre mesurant x en radian, a pour longueur Rx. »

Figure 35 : Extrait du manuel Math'x 2010, p. 153

   Remarquons que cet énoncé (*Figure 35*) ne met pas en évidence ce résultat, ce n'est pas un théorème parce que cette notion n'est pas au programme.
   - Manuel Transmath 2010 : Dans la partie « Cours », deux objets de savoir sont présentés : *mesure en radian d'un angle au centre du cercle* et *proportionnalité entre mesures d'un angle en degrés et en radians*.



2 Le radian

La notion de radian n'est pas exigible.

Si un arc $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur x, avec $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on convient de dire que l'angle $\widehat{IOJ}$ a pour mesure x radians.

On crée ainsi une nouvelle unité de mesure des angles : **le radian.**

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ est π, donc en radians, $\widehat{AOA'} = \pi$. Mais, en degrés, $\widehat{AOA'} = 180$. Donc :

π radians correspondent à 180°.

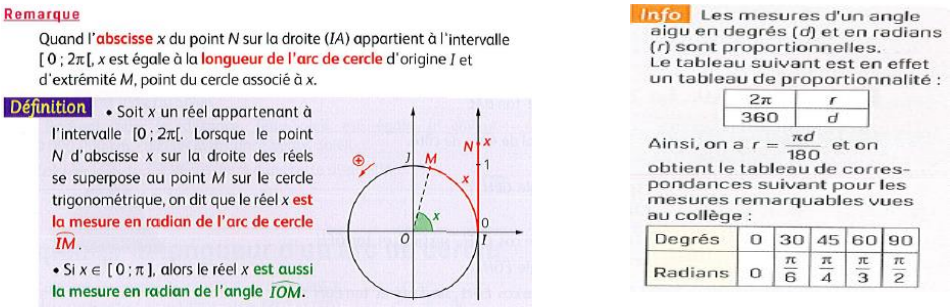
Les mesures en radians sont proportionnelles aux mesures en degrés.

D'où le tableau de proportionnalité dans lequel d est la mesure en degrés et α la mesure en radians. D'où aussi la formule : $180 \times \alpha = \pi \times d$.

180	d
π	α

Figure 36 : Extrait du manuel Transmath 2010, p. 251

   - Manuel Déclic 2014 : Dans la partie « Cours », les mêmes objets de savoir que dans le manuel Transmath 2010 apparaissent mais à deux moments distincts : *mesure en radian d'un angle au centre du cercle* (dans la partie « Cours » à la page 140) et *proportionnalité entre mesures d'un angle en degrés et en radians* (dans la partie « Savoir Faire » comme *Info* à la page 141).



Remarque

Quand l'**abscisse** x du point N sur la droite (IA) appartient à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$, x est égale à la **longueur de l'arc de cercle** d'origine I et d'extrémité M, point du cercle associé à x.

Définition • Soit x un réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$. Lorsque le point N d'abscisse x sur la droite des réels se superpose au point M sur le cercle trigonométrique, on dit que le réel x **est la mesure en radian de l'arc de cercle** $\widehat{IM}$.

• Si $x \in [0 ; \pi]$, alors le réel x **est aussi la mesure en radian de l'angle** $\widehat{IOM}$.

Info Les mesures d'un angle aigu en degrés (d) et en radians (r) sont proportionnelles. Le tableau suivant est en effet un tableau de proportionnalité :

2π	r
360	d

Ainsi, on a $r = \frac{\pi d}{180}$ et on obtient le tableau de correspondances suivant pour les mesures remarquables vues au collège :

Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

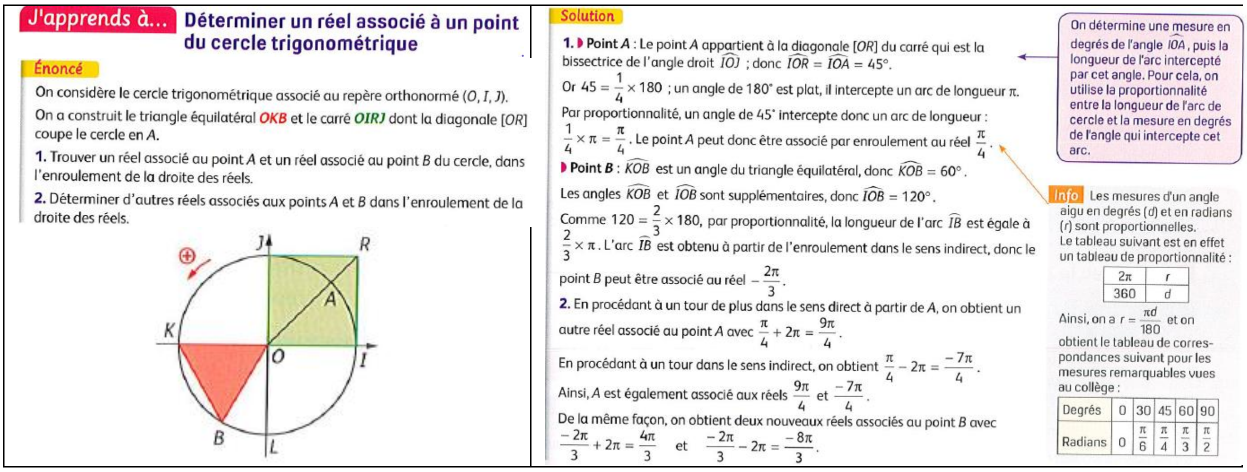
Figure 37 : Extrait du manuel Déclic 2014, p. 140

Seul le manuel Déclic 2014 (page 140) donne, dans la partie « Cours », la définition d'un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ associé au point image M du cercle trigonométrique comme étant « la ***mesure en radian de l'arc de cercle*** IM », (Voir l'extrait de gauche juste ci-dessus, ce qui est noté en rouge).

Les auteurs veulent-ils dire que l'arc de cercle IM a pour mesure de longueur x dans l'unité de longueur OI, le nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$? Si c'est le cas, il n'y a pas lieu de parler d'une nouvelle unité de longueur, le radian.

L'élève de Seconde semble éprouver des difficultés à s'approprier ce concept de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique car l'objet x à définir n'est pas clair d'une part, et d'autre part, la notion de fonction d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique est implicite. C'est tôt d'ajouter ici, en plus, le concept de la mesure en radian d'un angle géométrique sans définir d'abord « **le radian** » comme étant la nouvelle unité de mesure de l'angle géométrique. **Aucun manuel ne définit *une mesure de la longueur d'un arc de cercle,* et dans ce concept de l'enroulement, l'objet x désigne une des mesures de la longueur de l'arc de cercle**.

Nous donnons un exemple qui complique l'appropriation l'objet x visé, qui est un nombre réel dans l'enroulement, chez l'élève dans la partie « Savoir-faire » du manuel Déclic 2014, (voir *Figure 38* ci-dessous).



J'apprends à... Déterminer un réel associé à un point du cercle trigonométrique

Énoncé

On considère le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé (O, I, J).

On a construit le triangle équilatéral OKB et le carré $OIRJ$ dont la diagonale $[OR]$ coupe le cercle en A.

1. Trouver un réel associé au point A et un réel associé au point B du cercle, dans l'enroulement de la droite des réels.

2. Déterminer d'autres réels associés aux points A et B dans l'enroulement de la droite des réels.

Solution

1. Point A : Le point A appartient à la diagonale $[OR]$ du carré qui est la bissectrice de l'angle droit $\widehat{IOJ}$; donc $\widehat{IOR} = \widehat{IOA} = 45°$.

Or $45 = \frac{1}{4} \times 180$; un angle de 180° est plat, il intercepte un arc de longueur π.

Par proportionnalité, un angle de 45° intercepte donc un arc de longueur : $\frac{1}{4} \times \pi = \frac{\pi}{4}$. Le point A peut donc être associé par enroulement au réel $\frac{\pi}{4}$.

Point B : $\widehat{KOB}$ est un angle du triangle équilatéral, donc $\widehat{KOB} = 60°$.

Les angles $\widehat{KOB}$ et $\widehat{IOB}$ sont supplémentaires, donc $\widehat{IOB} = 120°$.

Comme $120 = \frac{2}{3} \times 180$, par proportionnalité, la longueur de l'arc $\widehat{IB}$ est égale à $\frac{2}{3} \times \pi$. L'arc $\widehat{IB}$ est obtenu à partir de l'enroulement dans le sens indirect, donc le point B peut être associé au réel $-\frac{2\pi}{3}$.

2. En procédant à un tour de plus dans le sens direct à partir de A, on obtient un autre réel associé au point A avec $\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$.

En procédant à un tour dans le sens indirect, on obtient $\frac{\pi}{4} - 2\pi = \frac{-7\pi}{4}$.

Ainsi, A est également associé aux réels $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{-7\pi}{4}$.

De la même façon, on obtient deux nouveaux réels associés au point B avec $\frac{-2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$ et $\frac{-2\pi}{3} - 2\pi = \frac{-8\pi}{3}$.

On détermine une mesure en degrés de l'angle $\widehat{IOA}$, puis la longueur de l'arc intercepté par cet angle. Pour cela, on utilise la proportionnalité entre la longueur de l'arc de cercle et la mesure en degrés de l'angle qui intercepte cet arc.

Info Les mesures d'un angle aigu en degrés (d) et en radians (r) sont proportionnelles. Le tableau suivant est en effet un tableau de proportionnalité :

2π	r
360	d

Ainsi, on a $r = \frac{\pi d}{180}$ et on obtient le tableau de correspondances suivant pour les mesures remarquables vues au collège :

Degrés	0	30	45	60	90
Radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Figure 38 : Énoncé accompagné par la solution (Savoir-faire) - Extrait du manuel Déclic 2014, p. 141

Les deux indications d'aide (ou méthode de support) situées contre la « Solution » sont-elles avantageuses pour l'élève ? Pour la première indication (en haut), c'est oui ; mais ce ne l'est pas pour la deuxième indication (en bas) avec la flèche vers le nombre réel $\frac{\pi}{4}$ dans l'enroulement de la droite des réels. Cette deuxième indication complique certainement l'appropriation du concept de l'enroulement. Dans la réflexion de l'élève, quel sens l'élève donne-t-il à $\frac{\pi}{4}$ lorsqu'il suit l'« Info » ?

3.

Seul le manuel Odyssée 2010 parle du point sur le cercle trigonométrique correspondant à un angle de mesure négative en degrés, à la page 217 par exemple (voir *Figure 39* ci-contre).

Les autres manuels ne parlent que d'angles géométriques et que du point image associé à un nombre réel.

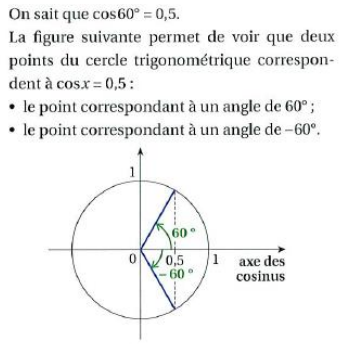
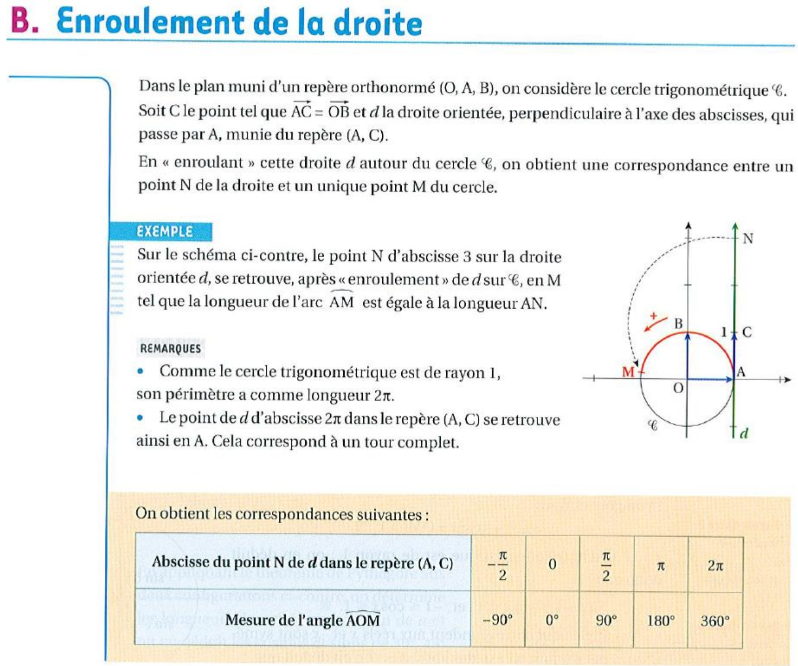

On sait que $\cos 60° = 0{,}5$.
La figure suivante permet de voir que deux points du cercle trigonométrique correspondent à $\cos x = 0{,}5$:
• le point correspondant à un angle de 60° ;
• le point correspondant à un angle de −60°.

Figure 39 : Angle de mesure négative en degrés

Remarquons que le manuel Odyssée 2010 n'intègre pas dans ce thème d'étude la mesure en radian d'un angle géométrique au centre interceptant un arc de cercle comme les trois autres manuels étudiés, et qu'à ce sujet, il suit bien le programme. Cependant, ce manuel cite, dans la sous-section « Enroulement de la droite », la mesure négative en degrés de l'angle géométrique au centre. Il ne donne des précisons que dans le cas où on enroule la droite des réels dans le sens direct (sans discours accompagnateur) indiqué par un schéma puis il cite une remarque avec une ambiguïté lors de la lecture des notes entre les parenthèses dans les deux exemples de cette remarque.


B. Enroulement de la droite

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, A, B), on considère le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Soit C le point tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ et d la droite orientée, perpendiculaire à l'axe des abscisses, qui passe par A, munie du repère (A, C).
En « enroulant » cette droite d autour du cercle $\mathscr{C}$, on obtient une correspondance entre un point N de la droite et un unique point M du cercle.

EXEMPLE
Sur le schéma ci-contre, le point N d'abscisse 3 sur la droite orientée d, se retrouve, après « enroulement » de d sur $\mathscr{C}$, en M tel que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est égale à la longueur AN.

REMARQUES
• Comme le cercle trigonométrique est de rayon 1, son périmètre a comme longueur 2π.
• Le point de d d'abscisse 2π dans le repère (A, C) se retrouve ainsi en A. Cela correspond à un tour complet.

On obtient les correspondances suivantes :

Abscisse du point N de d dans le repère (A, C)	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure de l'angle $\widehat{AOM}$	−90°	0°	90°	180°	360°

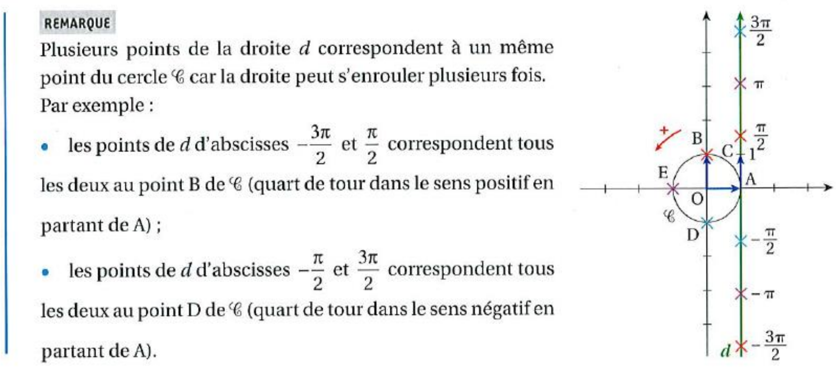
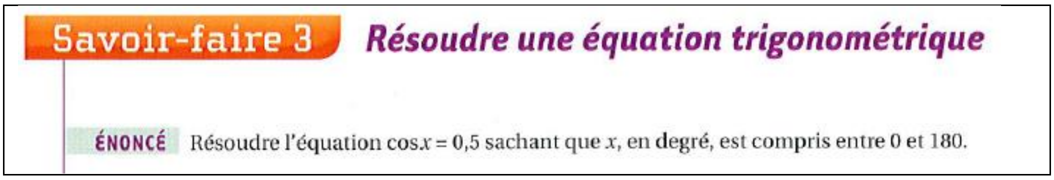

REMARQUE
Plusieurs points de la droite d correspondent à un même point du cercle $\mathscr{C}$ car la droite peut s'enrouler plusieurs fois.
Par exemple :
• les points de d d'abscisses $-\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point B de $\mathscr{C}$ (quart de tour dans le sens positif en partant de A) ;
• les points de d d'abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point D de $\mathscr{C}$ (quart de tour dans le sens négatif en partant de A).

Figure 40 : Enroulement de la droite – manuel Odyssée 2010, pp. 213-214

4. Dans la partie « Cours », nous remarquons qu'il y a consensus entre les manuels de Seconde à citer seulement deux propriétés (encadrement et relation fondamentale) ci-après :
   - Pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
   - Pour tout nombre réel x, $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$.

   Pourtant, nous rencontrons certaines propriétés supplémentaires proposées ci-après :
   - Pour tout nombre réel x, $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.
     (Odyssée 2010 (p. 214) ; Symbole 2010 (p. 272) ; Hyperbole 2009 (p. 128))
   - Pour tout nombre réel x, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.
     (Symbole 2010 (p. 272) ; Hyperbole 2009 (p. 126))
   - Pour tout nombre réel x, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, avec k un entier relatif.
     (Symbole 2010 (p. 272))

   Nous trouvons qu'il semble tôt de citer ces propriétés supplémentaires mentionnées ci-dessus bien qu'elles soient les conséquences immédiates de deux concepts visés : le principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique et les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel. Il serait préférable que l'élève maîtrise et adapte sa réflexion cognitive en réactivant, tout seul, ces deux concepts visés avec lesquels il est capable de justifier le raisonnement mathématique.
5. Nous rencontrons dans la partie « Savoir-faire » un type de tâches : « Résoudre une équation d'inconnue x sous forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ » dans deux manuels de Seconde que nous allons décrire ci-après :
   - Le manuel Symbole 2010 propose de déterminer les solutions réelles des équations sous forme $\cos x = a$ et $\sin x = a$ à la page 273, en précisant d'abord l'objectif sur une capacité de « ***Déterminer un réel correspondant à une valeur remarquable de sinus ou de cosinus*** ».
   - Le manuel Odyssée 2010 propose de résoudre une équation trigonométrique sous forme $\cos x = a$ ou $\sin x = a$ avec x un nombre en degrés compris entre 0 et 180 (en donnant « Méthode » de résolution).


Savoir-faire 3 Résoudre une équation trigonométrique

ÉNONCÉ Résoudre l'équation $\cos x = 0{,}5$ sachant que x, en degré, est compris entre 0 et 180.

Figure 41 : Énoncé du Savoir-faire 3 – manuel Odyssée 2010, p. 217

Chez le manuel Symbole 2010, nous trouvons que les méthodes données dans la « Solution » ont bien exploité les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel et le principe de l'enroulement de la droite des réels. Mais, chez le manuel Odyssée 2010, il y a deux choses à remarquer :

1. dans l'énoncé, x désigne un nombre en degrés compris entre 0 et 180, donc x est bien un nombre réel ;
2. dans la « Solution », apparaît la phrase : « le point correspondant à un angle de -60° ».

Or, dans l'enseignement français actuel du secondaire, il n'y a plus de concept sur les mesures négatives en degrés d'angles géométriques.

Quelle est l'idée des auteurs du manuel Odyssée 2010 en lien avec les concepts du cosinus et du sinus d'un nombre réel ?

6. Les auteurs des manuels proposent de :
   - Découvrir l'utilisation de la trigonométrie en géométrie dans la partie « Savoir-faire » : il s'agit d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. On propose de calculer la mesure en degrés d'un angle au centre interceptant l'arc de cercle constitué par deux sommets consécutifs du pentagone régulier, puis de déduire le sinus de cet angle connaissant son cosinus (ici, 72°).
   (Manuel Symbole 2010, p. 274)
   - Calculer les valeurs exactes de $\sin\frac{\pi}{12}$ (ou $\sin 15^\circ$) et $\cos\frac{\pi}{12}$ (ou $\cos 15^\circ$) à partir d'un exercice guidé, dans la partie « Exercices ».
   (Manuel Déclic 2014, p. 152 ; Manuel Math'x 2010, p. 160 ; Manuel Hyperbole 2009, p. 139)
   - Faire réfléchir l'élève : a-t-on l'égalité $\sin(2 \times 15^\circ) = 2 \times \sin 15^\circ$? En proposant de vérifier si elle est vraie ou fausse avec un exercice guidé, dans la partie « Exercices ».
   (Manuel Math'x 2010, p. 160)
7. Remarque :
   - la fonction Arccos (ou Acs) retourne un réel compris entre 0 et π (la fonction réciproque de la fonction cos) ; elle est définie, continue, et strictement décroissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$;
   - la fonction Arcsin (ou Asn) retourne un réel compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (la fonction réciproque de la fonction sin), elle est définie, continue, et strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;1]$.

3.2.2. Trigonométrie en Première Scientifique

La trigonométrie en 1re Scientifique est classée dans le domaine « Géométrie ».

3.2.2.1. ***Extrait du B. O. numéro 9 du 30/09/2010***

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Trigonométrie Cercle trigonométrique. Radian. Mesure d'un angle orienté, mesure principale.	Utiliser le cercle trigonométrique, notamment pour : - déterminer les cosinus et sinus d'angles associés ; - résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations d'inconnue x : $\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$.	L'étude des fonctions cosinus et sinus n'est pas attendue dans le programme.

3.2.2.2. ***Extrait des manuels*** (2011)

Liste des manuels étudiés :
1. Odyssée – Édition Hatier 2011 (Chapitre 6, pp. 198-227) ;
2. Math'x – Édition didier 2011 (Chapitre 11, pp. 285-308) ;
3. Transmath – Édition Nathan 2011 (Chapitre 8, pp. 191-212).

3.2.2.2.1. <u>Liste des objets de savoir visés</u>

- <u>Cercle trigonométrique. Radian</u>
  - Définition : *Cercle trigonométrique*.
  - Propriété : Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique.

Si le point M du cercle trigonométrique est associé à un nombre réel x de la droite des réels, alors les nombres réels associés au point M sont ceux de la forme $x + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif.

- Définition : ***Le radian***, *une nouvelle unité de mesure d'angles*.

▪ Mesures d'un angle orienté – Propriétés des angles orientés

- Définition : Les mesures en radians d'un angle orienté.
- Propriétés : Propriétés des angles orientés (de deux vecteurs *colinéaires*, *orthogonaux*), ***relation de Chasles***, et conséquences de la relation de Chasles.
- Définition : ***Mesure principale d'un angle orienté***.
- Définition : ***Cosinus et sinus d'un angle orienté***. Propriété d'encadrement – propriété fondamentale – propriété avec les tours dans l'enroulement de la droite des réels.

▪ Trigonométrie (ou Calculs trigonométriques)

- Définition : Angles associés.
- Propriétés : Cosinus et sinus d'angles associés (angles opposés, angles supplémentaires, angles de différence π, angles complémentaires, et angles de différence $\frac{\pi}{2}$).
- Propriétés : Équations trigonométriques ($\cos x = \cos a$ et $\sin x = \sin a$)

Nous nous intéressons au traitement des objets principaux de savoir visés : « Le radian », « Mesures d'un angle orienté de deux vecteurs », « Cosinus et sinus d'un angle orienté », dans les parties « Activités » et « Cours ».

Les trois manuels étudiés proposent chacun une activité visant à faire découvrir « le radian » :
Chez Odyssée 2011 : il s'agit d'une activité liée à la pêche consistant à réinvestir sur l'*enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique* et à découvrir la *définition du radian* que les auteurs ont indiqué avant d'aborder le texte de l'activité. On suppose que le fil de pêche conditionné en bobines de $5\ m$ s'enroule de manière constante sur une autre bobine B de rayon $1\ dm$ pour contrôler qualité et longueur du fil. On demande d'abord de trouver le nombre de tours sur la bobine B avec une longueur de fil donnée ($1\ dm$, $1\ m$, $5\ dm$), en donnant les réponses en valeur exacte puis en valeur approchée ; puis on demande de trouver la longueur, en dm, de fil enroulé sur B pour faire un seul tour, en constatant que l'on a enroulé exactement un nombre entier de tours sur B avec tout le fil d'une des bobines fabriquées, trouver alors la longueur de la partie enroulée sachant qu'elle est comprise entre deux valeurs de longueurs données.
Nous voyons que cette activité sert plutôt à réactiver les connaissances apprises en Seconde sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1) : lien entre le nombre de tours et la longueur correspondante.

Chez Math'x 2011 : il s'agit d'une activité intitulée : Une nouvelle unité de mesure des angles. Cette activité consiste à réactiver les connaissances antérieures sur : placement des points images associés aux nombres réels remarquables (0, π/2, π, π/6, π/4, π/3) sur le cercle trigonométrique de centre O l'origine d'un repère orthonormé dans le plan orienté, longueurs des arcs de cercle, mesures en degrés des angles au centre interceptant respectivement les arcs de cercle. L'activité se poursuit avec la question : *Ces longueurs d'arcs et mesures des angles au centre sont-elles proportionnelles ?* Puis, elle se poursuit en annonçant son objectif : *D'où l'idée de prendre, comme* **nouvelle unité de mesure d'un angle***, la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon* **1**. On finit par demander de donner les mesures des angles au centre dans cette nouvelle unité appelée « **radian** ».

Il nous semble que l'idée d'introduire la nouvelle unité de mesure d'un angle « le radian » soit justifiée par le fait que *la mesure en radians d'un angle au centre s'exprime par le* <u>*même nombre*</u> *que la longueur de l'arc de cercle de rayon* 1 *intercepté par cet angle*. Il y a aussi l'idée que c'est indépendant de l'unité de longueur choisie, mais cela reste implicite.

<u>Chez Transmath 2011</u> : il s'agit d'une activité consistant à découvrir « Le radian » de manière concrète, déjà programmée par le logiciel GeoGebra. L'activité commence par faire reproduire la figure modèle. Dans cette activité, l représente la *longueur de l'arc de cercle* AM où M parcourt le demi-cercle de rayon 1 et où A est l'origine du cercle trigonométrique ; et α représente d'abord la *mesure en degrés de l'angle au centre* $\widehat{AOM}$. On propose de **déplacer sur le cercle le point mobile M de manière à avoir $l = 1$** (la longueur l s'affiche dans la fenêtre algèbre), puis si c'est bien dans ce cas, choisir l'unité « radian » et lire la mesure affichée de α ; on énonce tout de suite : « ***Un angle de* 1 *radian est un angle interceptant, sur un cercle de rayon* 1*, un arc de longueur* 1** ». L'activité finit par demander de déplacer M en C (le point du demi-cercle diamétralement opposé au point A), de lire la valeur affichée pour l et de donner la valeur de α en radians.

Dans la partie « Cours » des manuels, on définit une nouvelle unité de mesure d'angles « le radian », noté rad, comme ci-après :

<u>Définition 1</u> : Un angle de ***1 radian*** est un angle au centre interceptant, sur le cercle trigonométrique, un arc de longueur égale au rayon du cercle (ou ***Le radian*** est la mesure de l'angle géométrique au centre interceptant un arc de cercle de longueur 1 sur le cercle trigonométrique).

<u>Définition 2</u> : On appelle ***radian*** la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon R du cercle.

<u>Remarque</u> : Seul le manuel Odyssée 2011fait une remarque que la définition d'un angle de « 1 radian » ne dépend pas du rayon de l'arc, puis il cite une propriété sur *la relation entre la longueur d'un arc de cercle, la mesure en radians de l'angle qui intercepte l'arc de cercle et le rayon du cercle*.

Quelle est l'unité de mesure des angles orientés ?

Il y a consensus entre les manuels de 1re Scientifique sur la définition des mesures d'un angle orienté ***en radians*** : l'unité de mesure des angles orientés est ***le radian*** mais pas *le degré*.

Quelle est la relation entre mesure d'angles en degrés et en radians ?

Les mesures d'un angle *en degrés* d'une part et *en radians* d'autre part sont proportionnelles. Avec consensus entre les manuels de 1re Scientifique, à partir du tableau de proportionnalité des mesures sachant que π radians correspondent à 180°, on déduit la formule : $180 \times \alpha = \pi \times d$ où α est la mesure d'angle en radians et d, celle de l'angle en degrés.

Pour le cas où $\alpha = 1$, un angle de 1 radian a alors pour mesure en degrés : $\frac{180}{\pi} \approx 57{,}30^\circ$.

Comment définir un angle orienté de deux vecteurs ? Et, ses mesures ?

Il y a consensus entre les manuels de 1re Scientifique sur le fait de ne pas donner la <u>définition d'un angle orienté de deux vecteurs</u>. Seul le manuel Odyssée 2011 fait, dans la partie « Cours » une allusion à l'identification à travers la notion d'angle orienté des deux mouvements circulaires de sens contraire partant d'un même point origine et se terminant à un même point extrémité, une identification qui efface la différence entre deux objets distingués en géométrie élémentaire, angle saillant/angle rentrant. Comme on le voit ci-dessous, cette allusion se cantonne dans le registre graphique, elle n'est accompagnée d'aucun discours explicatif, (voir *Figure 42*).

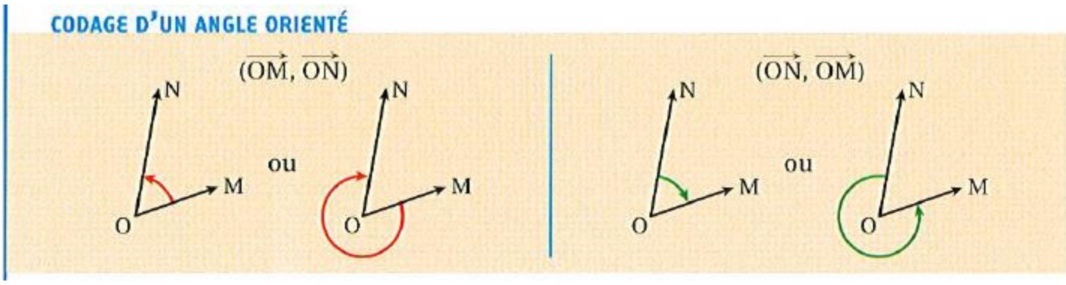
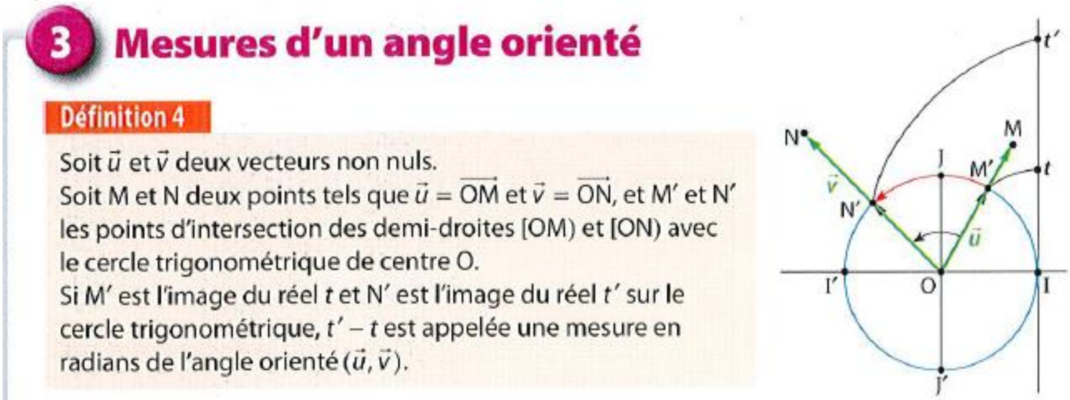


Figure 42 : Codage d'un angle orienté – Extrait du manuel Odyssée 2011, p. 203

Remarquons qu'ici, on retrouve des notions traitées dans la sous-section 3.2 du chapitre 3.

La plupart des manuels de 1re Scientifique proposent la définition des mesures d'un angle orienté de deux vecteurs non nuls comme indiqué dans l'extrait ci-après, (voir *Figure 43*).


3 Mesures d'un angle orienté

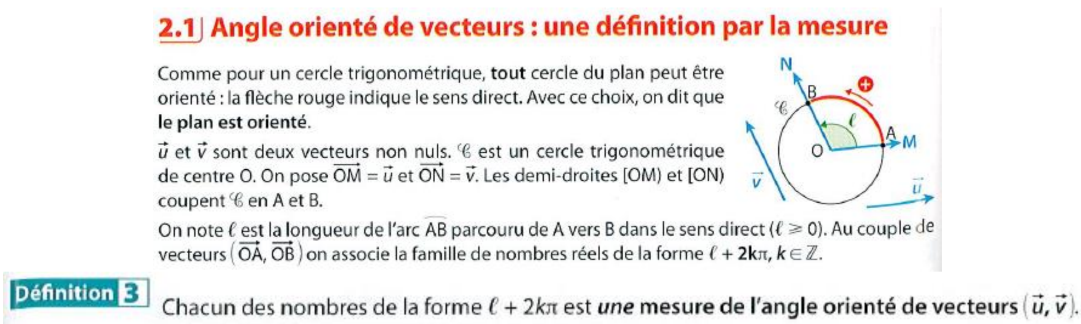
Définition 4

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls.
Soit M et N deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$, et M′ et N′ les points d'intersection des demi-droites [OM) et [ON) avec le cercle trigonométrique de centre O.
Si M′ est l'image du réel *t* et N′ est l'image du réel *t*′ sur le cercle trigonométrique, *t*′ – *t* est appelée une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Figure 43 : Mesures d'un angle orienté – Extrait du manuel Math'x 2011, p. 290

Remarquons qu'ici, il s'agit d'un morphisme reliant les deux sections 3.1 et 3.2 du chapitre 3.

Seul se distingue le manuel Transmath 2011. Nous rappelons que le manuel de Seconde de la même collection se distingue lui aussi des autres en introduisant dans la partie « Cours » la correspondance entre ℝ et le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ où la droite numérique est sous-entendue (voir la sous-section 3.2.1.2.3, pp. 100-101).

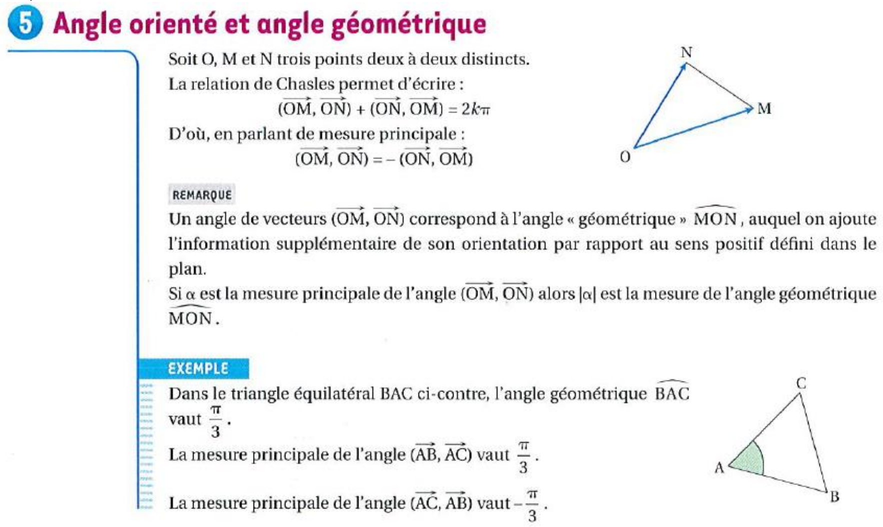

2.1 Angle orienté de vecteurs : une définition par la mesure

Comme pour un cercle trigonométrique, **tout** cercle du plan peut être orienté : la flèche rouge indique le sens direct. Avec ce choix, on dit que **le plan est orienté**.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls. $\mathscr{C}$ est un cercle trigonométrique de centre O. On pose $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. Les demi-droites [OM) et [ON) coupent $\mathscr{C}$ en A et B.
On note ℓ est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ parcouru de A vers B dans le sens direct ($\ell \geqslant 0$). Au couple de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ on associe la famille de nombres réels de la forme $\ell + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 3 Chacun des nombres de la forme $\ell + 2k\pi$ est ***une* mesure de l'angle orienté de vecteurs** $(\vec{u}, \vec{v})$.

Figure 44 : Angle orienté de vecteurs – Extrait du manuel Transmath 2011, pp. 194-195

Quel est le lien entre « angle orienté » et « angle géométrique » ?
Parmi les trois manuels étudiés, seul le manuel Odyssée 2011 décrit, dans la partie « Cours », une section intitulée : « Angle orienté et angle géométrique » (voir *Figure 45*).



5 Angle orienté et angle géométrique

Soit O, M et N trois points deux à deux distincts.
La relation de Chasles permet d'écrire :
$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) + (\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM}) = 2k\pi$
D'où, en parlant de mesure principale :
$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = -(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OM})$

REMARQUE
Un angle de vecteurs $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ correspond à l'angle « géométrique » $\widehat{MON}$, auquel on ajoute l'information supplémentaire de son orientation par rapport au sens positif défini dans le plan.
Si α est la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ alors $|\alpha|$ est la mesure de l'angle géométrique $\widehat{MON}$.

EXEMPLE
Dans le triangle équilatéral BAC ci-contre, l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ vaut $\frac{\pi}{3}$.
La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vaut $\frac{\pi}{3}$.
La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$ vaut $-\frac{\pi}{3}$.

<u>*Figure 45*</u> : Angle orienté et angle géométrique – Extrait du manuel Odyssée 2011, p. 204

Mais pour les autres manuels, c'est juste une remarque après avoir défini « la mesure principale d'un angle orienté » comme suit :

> Si M, O, N sont trois points distincts, $\widehat{MON} = |\alpha|$, où α est la mesure principale de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$; (Manuel Math'x 2011, page 290).

<u>Remarque</u> : Les auteurs du manuel Déclic 2015 définissent d'abord « mesures d'un angle orienté », puis « le radian » : Soit le point M du cercle trigonométrique, image du nombre réel 1 dans l'enroulement de la droite des réels ; une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est ***1 radian***, (I est l'origine du cercle trigonométrique).

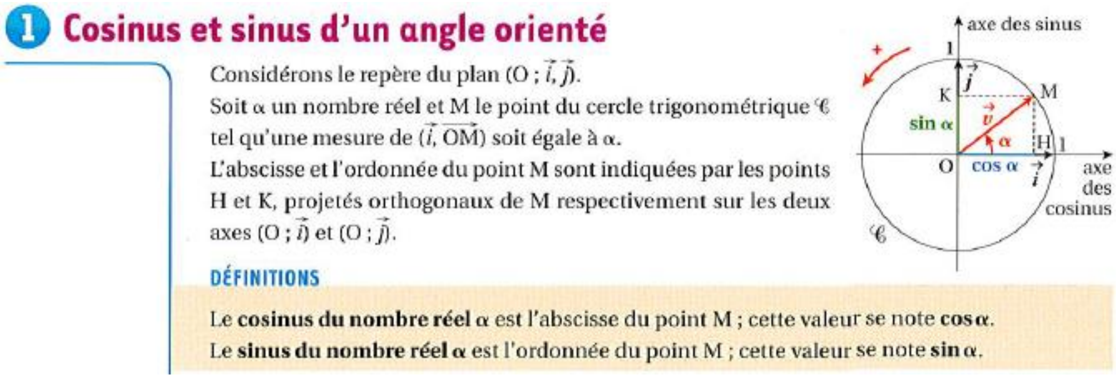
*Comment définir **les cosinus et sinus d'un angle orienté** ?*
<u>Définition</u> : Le cosinus (ou le sinus) d'un angle orienté est le cosinus (ou le sinus) de l'une de ses mesures *en radians*.

Avant de définir les « cosinus et sinus d'un angle orienté », il s'agit de présenter les différentes façons permettant de mener à les définir dans la partie « Cours » :

- Chez Odyssée 2011, dans la sous-section « Cosinus et sinus d'un angle orienté » de la section « Cosinus et sinus d'un angle » à la page 205 (voir *Figure 46*), les auteurs commencent par considérer le repère du plan $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ accompagné par une figure graphique, puis introduisent α, un nombre réel, et M le point du cercle trigonométrique tel qu'une *mesure* de $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ soit égale à α. Ils citent alors les définitions des cosinus et sinus du nombre réel α. Il s'agit exactement des définitions déjà vues en Seconde : « Cosinus et sinus d'un nombre réel ».
- Chez Math'x 2011, dans la sous-section « A. Définitions et propriétés » de la section « Cosinus et sinus d'un réel et d'un angle orienté » à la page 292 (voir *Figure 47*), les auteurs commencent par donner de nouveau les définitions des cosinus et sinus d'un nombre réel vues en Seconde, accompagnées par une figure graphique dans laquelle il s'agit d'un codage qui traduit que ce nombre

réel représente aussi une mesure en radians d'angle orienté. Il n'y a pas de discours disant que ce nombre réel représente aussi une mesure en radians d'angle orienté.

- Chez Transmath 2011, les auteurs proposent les définitions des cosinus et sinus d'un angle orienté après avoir défini les mesures en radians d'un angle orienté et la mesure principale d'un angle orienté de vecteurs dans la section « Angle orienté d'un couple de vecteurs » aux pages 194-195. En ce qui concerne les « Cosinus et sinus d'un réel », les auteurs les rappellent dans la partie « Rappels » à la page 192.



1 Cosinus et sinus d'un angle orienté

Considérons le repère du plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
Soit α un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tel qu'une mesure de $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$ soit égale à α.
L'abscisse et l'ordonnée du point M sont indiquées par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les deux axes $(O\,;\vec{i})$ et $(O\,;\vec{j})$.

DÉFINITIONS

Le **cosinus du nombre réel** α est l'abscisse du point M ; cette valeur se note **cos** α.
Le **sinus du nombre réel** α est l'ordonnée du point M ; cette valeur se note **sin** α.

Figure 46 : Extrait du manuel Odyssée 2011, p. 205

A. Définitions et propriétés

Définition 6

Soit M l'image d'un réel t sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.
Le cosinus de t, noté cos t, est l'abscisse de M et le sinus de t, noté sin t, est l'ordonnée de M.

Figure 47 : Extrait du manuel Math'x 2011, p. 292

Nous remarquons que chez Odyssée 2011, dans le texte, il manque « en radians » à la deuxième phrase (voir *Figure 46*) dans laquelle il faut préciser ainsi : « une *mesure en radians* de $(\vec{\imath},\overrightarrow{OM})$ soit égale à α » car le texte ne dit pas que M est le point image du nombre réel α dans l'enroulement de la droite des réels et qu'il n'y a pas la droite des réels affichée dans la figure donnée ; sinon, il semble que les auteurs veuillent nous dire que si on parle d'une mesure d'un angle orienté alors cette mesure de l'angle orienté est exprimée en radians.

Nous constatons que :

1. lors de l'introduction du **radian** comme l'unité de mesure d'angle et lors de la définition des mesures en radians d'un angle orienté centré à l'origine du repère orthonormé direct du plan à partir du principe d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, un nombre réel x représente à la fois la longueur d'un arc de cercle trigonométrique et la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle trigonométrique ; autrement dit, ce x représente deux objets d'étude différents. Mais, nous voyons que dès lors que l'on peut parler de mesures d'angles orientés, le point de vue « enroulement et longueur d'arc » disparaît, en particulier tous les éléments du registre graphique de l'enroulement

introduit en Seconde ; le cercle trigonométrique demeure mais lié aux angles au centre (voir *Figure 46*).
2. le manuel Odyssée 2011 et le manuel Math'x 2011 présentent « le cosinus et le sinus d'un angle orienté » de manière similaire, mais leurs registres graphiques présentés se différencient par un manque de la « droite numérique » chez Odyssée (voir *Figure 46*).
3. le manuel Transmath 2011 semble faire le pari que l'élève de 1re Scientifique suive sans souci par le fait que les mesures en radians d'angles orientés sont des nombres réels décrivant la droite numérique visés en Seconde (Rappelons que la droite numérique est sous-entendue dans le manuel Transmath 2010, voir *Figure 33*). Or les mesures d'angles en degrés ou en radians sont bien sûr des nombres réels ; si on demande à l'élève de donner la valeur de $\sin 90$, va-t-il donner la valeur de $\sin 90^{\circ}$ ou celle de $\sin(90 \text{ rad})$?

3.2.2.2.2. <u>Organisation mathématique</u>

- <u>Technologies</u>

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
1re S	$\theta_{\text{CSRéel}C}$; $\theta_{enc\text{CSRéel}C}$; $\theta_{\text{ArcCS}Cal(\text{rad})}$; $\theta_{Tvr\text{CSréel}}$; $\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})}$	$\theta_{pmesAngle}$; $\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{Pr.mesAngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{Pr.AngOr}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$; ; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{\text{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\text{cos}EqTrigo}$; $\theta_{\text{sin}EqTrigo}$

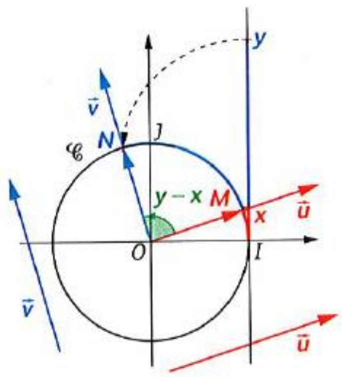
<u>*Tableau 11*</u> : θ_i évoqué(s) en 1re Scientifique

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées au collège et en Seconde.

$\theta_{pmesAngle}$: Proportionnalité des mesures d'un même angle géométrique ayant pour mesure d° ou α rad, sachant que 360° correspond à 2π rad : $\frac{360}{2\pi} = \frac{d}{\alpha}$.

$\theta_{mesAngOr}$: <u>Définition</u> – *Mesures en radians d'un angle orienté* de deux vecteurs.

Dans le plan orienté, soit $(O\,; I, J)$ un repère orthonormé. On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, puis M et N les points du cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{u}$, puis $\overrightarrow{ON}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires et de même sens. Si M et N sont les points images respectifs des nombres réels x et y dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle $\mathscr{C}$, alors $y - x$ est appelée une mesure en radians de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.



<u>*Figure 48*</u> : Figure extraite du manuel Déclic 2015, p. 212

$\theta_{Pr.mesAngOr}$: <u>Propriété</u> des mesures en radians d'un même angle orienté connaissant une de ses mesures : Si α est une mesure en radians d'un angle orienté, les autres mesures en radians de cet angle orienté sont égales à $\alpha + k2\pi$ avec k entier relatif quelconque.

$\theta_{mpAngOr}$: Définition de *la mesure principale d'un angle orienté* : Parmi toutes les mesures en radians d'un angle orienté, une seule appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$; elle est appelée la mesure principale de cet angle orienté.

$\theta_{def\mathrm{CS}AngOr}$: Définition – Le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures.

$\theta_{\mathrm{CS}mes\widehat{m}AngOr}$: Propriété des mesures ayant pour différence un multiple de 2π – Pour tout nombre réel x et pour tout entier relatif k, on a :

$$\cos(x + k2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x + k2\pi) = \sin x.$$

$\theta_{Pr.AngOr}$: Propriétés des angles orientés (angles orientés formés par deux vecteurs non nuls colinéaires soit de même sens soit de sens contraires ; la relation de Chasles et ses conséquences).

$\theta_{\mathrm{CS}AngAs}$: Propriétés des cosinus et sinus d'angles associés (pour les cinq couples d'angles associés : angles opposés, angles supplémentaires, angles complémentaires, angles de différence π ; angles de différence $\frac{\pi}{2}$).

$\theta_{\cos EqTrigo}$: Propriété – L'équation $\cos x = \cos\alpha$ a pour solutions les nombres réels $x = \alpha + k2\pi$ et $x = -\alpha + k'2\pi$ où $k \in Z$ et $k' \in Z$.

$\theta_{\sin EqTrigo}$: Propriété – L'équation $\sin x = \sin\alpha$ a pour solutions les nombres réels $x = \alpha + k2\pi$ et $x = \pi - \alpha + k'2\pi$ où $k \in Z$ et $k' \in Z$.

- Types de tâches
  - T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.
  - T_{17} : Déterminer géométriquement une mesure d'un angle orienté de deux vecteurs dans le plan orienté.
  - T_{18} : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure α (en radians).
  - T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté.
  - T_{20} : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$(, puis dans $\mathbb{R}$,) une équation trigonométrique d'inconnue x : $\cos x = a$ ou $\sin x = b$.

- Techniques et Technologies associées

Éléments techniques pour T_{16} :

T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.

- $\tau_{16,1}$: Exploiter la proportionnalité des mesures d'un même angle géométrique ayant pour mesure d° ou α rad, sachant que 360° correspond à 2π rad, autrement dit, exploiter le tableau de proportionnalité ci-dessous et écrire deux rapports égaux.

Mesure en degrés	360	d
Mesure en radians	2π	α

Tableau 12 : Proportionnalité des mesures d'un même angle géométrique

1. $\tau_{16,1,1}$: *Convertir de radians en degrés* : reporter la valeur numérique donnée de α dans l'égalité des rapports, puis en déduire la valeur numérique de d à l'aide de la propriété des produits en croix.
2. $\tau_{16,1,2}$: *Convertir de degrés en radians* : reporter la valeur numérique donnée de d dans l'égalité des rapports, puis en déduire la valeur numérique de α à l'aide de la propriété des produits en croix.

Remarquons que les auteurs des manuels de 1[re] Scientifique proposent d'utiliser la proportionnalité des mesures d'un même angle géométrique, en utilisant plutôt l'égalité entre 180° et π rad.

Éléments technologiques :
$\theta_{pmesAngle}$

Éléments techniques pour T_{17} :
T_{17} : Déterminer géométriquement une mesure d'un angle orienté de deux vecteurs dans le plan orienté.

- $\tau_{17,1}$: Pour déterminer géométriquement une mesure d'un angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$, commencer par vérifier si les représentants des vecteurs ont la même origine, sinon commencer par écrire des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine à l'aide des propriétés des vecteurs et des propriétés des angles orientés (ou bien les retracer à partir d'une même origine à l'aide des propriétés des vecteurs). Puis déterminer l'angle géométrique saillant et finir par tenir compte de l'orientation.
  Remarquons que pour des tâches plus compliquées, il faut penser à décomposer, si possible, en utilisant notamment la relation de Chasles puis effectuer des opérations à l'aide des propriétés des angles orientés convenables et/ou des définitions des vecteurs égaux et/ou des vecteurs opposés afin de faire apparaître des angles orientés dont on connaît les mesures.

Éléments technologiques :
$\theta_{Pr.AngOr}$

Éléments techniques pour T_{18} :
T_{18} : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure α (en radians).

- $\tau_{18,1}$: Transformer le nombre réel α sous forme $\beta + k \times 2\pi$, autrement dit, chercher à écrire : $\alpha = \beta + k \times 2\pi$ où $\beta \in]-\pi\,;\,\pi]$ et k est un entier relatif. Finir par conclure que β est alors la mesure principale de cet angle orienté.
  Remarquons qu'en ce qui concerne le procédé de transformation, il y a deux méthodes possibles :
  - Soit, il s'agit du même procédé en quatre étapes donné dans la technique $\tau_{9,2}$ associée au type de tâches T_9 vu en Seconde.
  - Soit, exploiter le système d'inégalités $-\pi < \beta \leq \pi$, puis remplacer β par $\alpha - k \times 2\pi$ et reporter la valeur de α dans ce système, ensuite encadrer k à l'aide des propriétés de l'ordre et des opérations (ordre et addition ou soustraction ; ordre et multiplication ou division) et en déduire l'entier relatif k. Trouver enfin β en remplaçant la valeur de k trouvée dans $\alpha - k \times 2\pi$ puis réduire cette somme pour finir.

  Remarquons qu'en pratique, le premier procédé est préférable.

Éléments technologiques :
$\theta_{Pr.mpAngOr}$

Éléments techniques pour T_{19} :
T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté de deux vecteurs.
Il y a deux cas à distinguer ci-après :

Premier cas : *Dans le cas où on connaît une mesure α en radians de l'angle orienté de deux vecteurs.*

- $\tau_{19,1}$: Si la mesure α donnée est une des valeurs remarquables, commencer par exploiter la définition du cosinus et du sinus d'un angle orienté, puis utiliser $\tau_{14,1}$ associé à T_{14} pour finir.
  ($\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$)
- $\tau_{19,2}$: Si la mesure α donnée peut être transformée sous forme $\beta + k \times 2\pi$, commencer par exploiter la définition du cosinus et/ou du sinus d'un angle orienté, puis utiliser $\tau_{18,1}$ associé à T_{18}, ensuite exploiter la propriété des mesures ayant pour différence un multiple de 2π d'un même angle orienté (et des propriétés des cosinus et sinus d'angles associés pour accomplir les tâches plus compliquées). Finir par utiliser $\tau_{14,1}$ associé à T_{14}.
  ($\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\text{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$)
- $\tau_{19,3}$: Commencer par exploiter la définition du cosinus et du sinus d'un angle orienté, puis utiliser $\tau_{14,3}$ associé à T_{14} pour finir.
  ($\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})}$)

Deuxième cas : *Dans le cas où on ne connaît pas une mesure en radians de l'angle orienté de deux vecteurs.*

Cas 1 : on connaît *les coordonnées du point M du cercle trigonométrique qui détermine l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ dans un repère orthonormé direct $(O\,; I, J)$ du plan.*

- $\tau_{19,4}$: Exploiter les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel et la définition des mesures en radians d'un angle orienté de deux vecteurs, puis utiliser la définition du cosinus et du sinus d'un angle orienté pour finir.
  ($\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{\text{CS}RéelC}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$)
  Remarque : $\tau_{19,4}$ est une technique similaire à la technique $\tau_{14,4}$. Nous pouvons dire plutôt que la technique $\tau_{19,4}$ est la suite de la technique $\tau_{14,4}$ dans laquelle il faut compléter la phase qui est justifiée par $\theta_{def\text{CS}AngOr}$ pour valider le cosinus et le sinus de l'angle orienté.

Cas 2 : on connaît *l'information géométrique sur la position des deux vecteurs dans le plan orienté.*

- $\tau_{19,5}$: Commencer par utiliser $\tau_{17,1}$ associé à T_{17} puis exploiter la définition du cosinus et du sinus d'un angle orienté (et des propriétés des cosinus et/ou sinus d'angles associés pour accomplir les tâches plus compliquées). Utiliser soit $\tau_{19,1}$ soit $\tau_{19,2}$ soit $\tau_{19,3}$ pour finir.
  ($\theta_{Pr.AngOr}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$)
  ou ($\theta_{Pr.AngOr}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\text{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$)
  ou ($\theta_{Pr.AngOr}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{Pr.AngOr}$; $\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{\text{CS}RéelC}$; $\theta_{def\text{CS}AngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{\text{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{Tvr\text{CS}réel}$; $\theta_{\text{CS}Cal(\text{rad})}$

Éléments techniques pour T_{20} :

T_{20} : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$(, puis dans $\mathbb{R}$,) une équation trigonométrique d'inconnue x : $\cos x = a$ ou $\sin x = b$, en utilisant le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(O; I, J)$.
<u>Premier cas</u> : Résolution de l'équation $\cos x = a$ où $|a| \leq 1$:

- $\tau_{20,1}$: *Cas de résolution de l'équation* $\cos x = a$ *où* $|a|$ *est une des valeurs remarquables et* $|a| \leq 1$:
  1. $\tau_{20,1,1}$: commencer par repérer sur le cercle trigonométrique deux points M et M' dont l'abscisse est a, déterminer les mesures principales respectives des angles orientés $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}\right)$ et finir par en déduire l'ensemble des solutions dans $]-\pi\,;\,\pi]$(, puis dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la propriété des mesures d'un même angle orienté connaissant une de ses mesures).
     ($\theta_{\text{CS}Réel C}$; $\theta_{enc\text{CS}Réel C}$; $\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{Pr.mesAngOr}$)
  2. $\tau_{20,1,2}$: commencer par ramener l'équation initiale sous forme $\cos x = \cos\alpha$ puis exploiter la propriété des solutions générales de ce type d'équation et finir par donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi\,;\,\pi]$.
     ($\theta_{\text{CS}Réel C}$; $\theta_{enc\text{CS}Réel C}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{\cos EqTrigo}$; $\theta_{mpAngOr}$)

<u>Deuxième cas</u> : Résolution de l'équation $\sin x = b$ où $|b| \leq 1$:
Dans ce cas, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{20,1}$, notée $\tau_{20,2}$.

Éléments technologiques :
$\theta_{\text{CS}Réel C}$; $\theta_{enc\text{CS}Réel C}$; $\theta_{\text{ArcCS}Cal(\text{rad})}$; $\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\text{CS}AngAs}$; $\theta_{Pr.mesAngOr}$; $\theta_{\cos EqTrigo}$; $\theta_{\sin EqTrigo}$
<u>Remarque</u> : Nous ajoutons deux techniques analogues $\tau_{20,3}$ (Premier cas) et $\tau_{20,4}$ (Deuxième cas), et elles ne sont pas sollicitées dans des manuels.

3.2.2.2.3. <u>Points de réflexions et commentaires</u>

1. Dans la partie « Cours », la plupart des manuels de 1re Scientifique (y compris les trois manuels étudiés) fait le <u>choix</u> de :
   - Utiliser les représentants littéraux de manière diverse pour désigner deux nombres réels de la droite des réels dans l'enroulement lorsque l'on définit une/des mesure(s) d'angle orienté de deux vecteurs : soit n_1 et n_2 chez Odyssée 2011, soit t_1 et t_2 chez Math'x 2011, soit x et y chez Déclic 2015.
   - Utiliser α pour représenter une des mesures d'un angle orienté de deux vecteurs lorsque l'on donne <u>la propriété des mesures en radians d'un même angle orienté connaissant une de ses mesures</u>.

   Nous trouvons que l'utilisation des représentants littéraux pour désigner un nombre réel (ou bien une mesure en radians d'angle orienté) n'est pas stable dans tout le chapitre de chaque manuel étudié de 1re Scientifique.

2. Nous faisons une remarque, dans les rubriques 1 et 2 dans la partie « Cours » du manuel Transmath 2011, concernant la définition d'un angle de 1 radian avec un cercle quelconque (rubrique 1, voir *Figure 49* ci-dessous) et la définition des mesures en radians d'angles orientés avec le cercle trigonométrique (rubrique 2, voir *Figure 44*).

1.2 Le radian, une nouvelle unité de mesure d'angles

Sur un cercle trigonométrique, si un arc $\overset{\frown}{IJ}$ a pour longueur x avec $0 \leqslant x \leqslant \pi$, on convient de dire que l'angle géométrique $\widehat{IOJ}$ a pour mesure x radians.

On crée ainsi une nouvelle unité de mesure d'angles, **le radian**, noté **rad**.

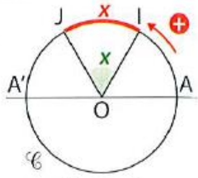


Figure 1

Définition 2 Un angle de **1 radian** est un angle interceptant, sur un cercle, un arc de longueur égale au rayon du cercle.

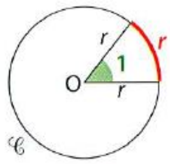


Figure 2

Relation entre radians et degrés

- Sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ (figure 1) la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AA'}$ est π donc, en radians, $\widehat{AOA'} = \pi$. Mais en degrés, $\widehat{AOA'} = 180°$, donc π radians correspond à 180°.

Figure 49 : Extrait du manuel Transmath 2011, p. 194

Dans la *Figure 49*, le manuel Transmath 2011 donne la définition d'un angle de 1 radian avec un cercle de rayon r mais dans la *Figure 44*, il définit les mesures en radians d'un angle orienté dans le cercle trigonométrique (rayon 1). Remarquons que :

- ce manuel ne donne pas la relation entre la longueur d'un arc de cercle, la mesure en radians de l'angle orienté qui intercepte l'arc de cercle et le rayon du cercle ; et
- il n'attire pas l'attention de l'élève sur le fait qu'une telle figure accompagnant son texte est seulement valable avec le cercle trigonométrique, mais pas avec un cercle de rayon non unitaire.

Il serait possible que l'élève de 1re Scientifique fasse une confusion entre la longueur d'un arc de cercle et une mesure en radians de l'angle orienté qui intercepte l'arc de cercle en se référant de manière fausse à la figure donnée par le manuel quand il travaille avec un cercle non unité.

3. Il y a différents choix pour introduire des concepts visés, nous trouvons que :
   - Dans la plupart des manuels de 1re Scientifique, les auteurs intègrent de nouveau, en les abordant dans la partie « Cours » les connaissances vues en Seconde : « Cercle trigonométrique », « Enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique » et « Cosinus et sinus d'un nombre réel ».
   - Il y a consensus entre les manuels de 1re Scientifique sur le choix des concepts visés uniquement avec le cercle trigonométrique (rayon 1) :
     - position de la droite numérique par rapport à la position du cercle trigonométrique,
     - définition du point du cercle trigonométrique associé à un nombre réel par l'enroulement de la droite numérique,
     - définition d'une mesure en radians d'un angle orienté en lien avec le principe d'enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique,
     - à partir du principe de l'enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique jusqu'à la définition d'une mesure en radians d'un angle orienté, tout découle parfaitement. Aucun risque qu'**un nombre réel** x associé à un unique point M du cercle trigonométrique par l'enroulement de la droite numérique dans le repère orthonormé $(O\,;\,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ du plan orienté, représente à la fois :
       - l'abscisse d'un point de la droite numérique,

- une mesure de la longueur de l'arc de cercle IM,
- une mesure en radians de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires dans l'ordre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$.

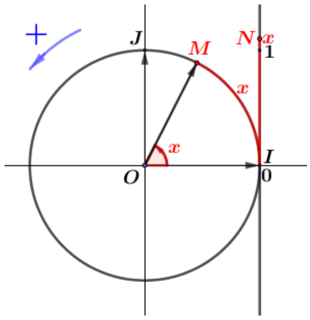


Figure 50 : Différentes utilisations du signe x (cf. *Figure 47*)

Que se passe-t-il si l'élève de 1re Scientifique travaille avec un cercle non unité dans le cadre de la géométrie repérée ? Aucun manuel étudié n'attire pas l'attention de l'élève sur cette question.
Le manuel Odyssée 2011 parle, dans le cadre géométrique, de la relation entre la longueur d'un arc de cercle, la mesure en radians de l'angle qui intercepte l'arc de cercle et le rayon du cercle. Mais, il ne traite pas cette relation dans le cadre de la géométrie repérée pour expliciter le fait que dans un cercle non unité dont le centre est à l'origine d'un repère orthonormé du plan, en supposant ici : $OI = OJ = R$ (unités de longueur), la longueur de l'arc de cercle IM et la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ ne sont pas dénotées par un même nombre réel : si la longueur de l'arc de cercle $IM = x$ (unités de longueur) alors une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est x/R. Nous traiterons la relation indiquée précédemment dans le chapitre 5.

4. Dans les parties « Savoir-faire » et « Exercices », nous nous intéressons à citer les propos des manuels ci-après :
   - Résoudre une équation trigonométrique du second degré de variable x de types :
     1. $aX^2 + bX + c = 0$ où X représente $\cos x$ ou $\sin x$ et où a, b, c sont des nombres réels ;

Manuels	Savoir Faire	Exercices
Odyssée 2011	$2\cos^2 x + 2\sqrt{2}\cos x + 1 = 0$ $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$ (page 211)	N° 42 à la page 221
Déclic 2015	$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ (page 219)	N° 120, 121, 121 à la page 229

     2. $aX^2 + c = 0$ où X représente $\cos x$ ou $\sin x$ et où a, c sont des nombres réels.

     (Dans la partie « Exercices » : manuel Odyssée 2011 – p. 221, manuel Déclic 2015 – p. 229, manuel Transmath – p. 210)
   - Résoudre une équation trigonométrique de variable x du type :
     $(aX + b)(cX + d) = 0$ où X représente $\cos x$ et/ou $\sin x$.
     (Dans la partie « Exercices » : manuel Déclic 2015 – p. 229)
   - Résoudre une équation trigonométrique de variable t du type : $a\cos t + b\sin t = c$ où a, b, c sont des nombres réels.

(manuel Math'x 2011 : Partie « Savoir Faire » - p. 295, Partie « Exercice » - pp. 302-303)

- Résoudre une équation trigonométrique sous forme $\sin u = \sin a$ ou $\cos u = \cos a$, où u est une fonction affine de variable x et a, un nombre réel.
  (manuel Transmath 2011 : Partie « Exercice » - p. 210)
- Définir « la tangente d'un angle orienté », dans la partie « Exercices », comme « Info », puis proposer des exercices à faire avec la tangente des angles orientés et la tangente des angles associés.
  (manuel Déclic 2015, p. 228)

3.2.2*. Applications du « Produit scalaire dans le plan »

3.2.2*.1. ***Extrait du B.O. numéro 9 du 30/09/2010***

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Applications du produit scalaire : - calculs d'angles et de longueurs ; - formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus.	Démontrer que : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	La relation de Chasles pour les angles orientés est admise.

3.2.2*.2. ***Extrait des manuels*** (2011)

Liste des manuels étudiés :

1. Odyssée – Édition Hatier 2011 (Une partie du Chapitre 8 : « Produit scalaire », pp. 235-236 + 238 + 243 + 261 + 365) ;
2. Math'x – Édition didier 2011 (Une partie du Chapitre 12 : « Produit scalaire », pp. 316 + 320 + 321 + 332-333) ;
3. Transmath – Édition Nathan 2011 (Chapitre 10 : « Produit scalaire : applications », pp. 239-264).

3.2.2*.2.1. <u>Liste des objets de savoir visés</u>

- <u>Calculs d'angles et de longueurs</u>
  - Théorème : Théorème d'Al-Kashi ou de Pythagore généralisé.

- <u>Formules de trigonométrie</u>
  - Propriétés : *Formules d'addition du cosinus et du sinus*.
  - Propriétés : *Formules de duplication du cosinus et du sinus*.

Nous traitons dans les parties « Activités » et « Cours » deux objets principaux de savoir visés : « Théorème de Pythagore généralisé » et « Formules d'addition du cosinus et du sinus ».

Parmi les trois manuels étudiés, seul le manuel Transmath 2011 propose deux activités d'approche pour préparer respectivement les deux objets de savoir indiqués précédemment.

<u>En ce qui concerne une approche du Théorème de Pythagore généralisé</u>, ce manuel propose une activité intitulée « Calculer dans un triangle » consistant en deux exemples de calcul dans un triangle en indiquant, dans l'ordre, les étapes à effectuer.

- L'exemple 1 consiste à construire un triangle <u>connaissant deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés</u>, puis à trouver la *longueur du côté* « manquant » à partir du développement du carré d'une différence de deux vecteurs proposés, à effectuer et ensuite à trouver le *cosinus d'un des angles* « manquants » et à en déduire la *mesure en degrés de l'angle*.

- L'exemple 2 consiste à construire un triangle connaissant ses trois côtés, puis à vérifier la valeur du *cosinus d'un angle* du triangle donné à partir du développement du carré d'une différence de deux vecteurs proposés, à effectuer, et ensuite, finir par en déduire la *mesure en degrés de cet angle*.

En ce qui concerne une approche des formules d'addition du cosinus et du sinus, ce manuel propose une activité intitulée « Calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ » consistant à exploiter le principe d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, la relation de Chasles pour trouver la mesure en radians de l'angle étudié, les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel (ou bien d'un angle orienté), et le produit scalaire de deux vecteurs proposés, à effectuer avec deux méthodes différentes.
Remarquons que cette activité, étant un cas particulier, sera généralisée par la formule d'addition : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, dans la partie « Cours ».

Dans la partie « Cours » des manuels, la relation généralisée de Pythagore ou la formule d'Al-Kashi est annoncée ainsi :

Théorème de Pythagore généralisé
(ou ***Théorème d'Al-Kashi***) :
Dans tout triangle ABC, on a :
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$

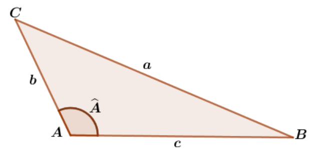


Figure 51 : Théorème de Pythagore généralisé

3.2.2*.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
1re S	$\theta_{\text{cos}Cal}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$; $\theta_{enccosAngTr}$	$\theta_{Th.PythG}$

Tableau 13 : θ_i évoqué(s) en 1re Scientifique, relié(s) aux applications du produit scalaire dans le plan

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées antérieurement.
$\theta_{Th.PythG}$: Théorème de Pythagore généralisé (ou Théorème d'Al-Kashi) – Dans tout triangle ABC, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$, (voir *Figure 51*).
$\theta_{enccosAngTr}$: Propriété d'encadrement du cosinus d'un angle dans un triangle :

- Le cosinus d'un angle aigu dans un triangle est un nombre positif compris entre 0 et 1.
- Le cosinus d'un angle obtus dans un triangle est un nombre négatif compris entre -1 et 0.

- Types de tâches proposés

Nous numérotons les trois nouveaux T à la suite de la numérotation des T déterminés dans la trigonométrie du triangle rectangle vue en 3e, ($\text{OML}_{\text{Triangle}}$).

- T_4 : Calculer le cosinus d'un angle dans un triangle.
- T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.
- T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

- <u>Techniques et Technologies associées</u>

Éléments techniques pour T_4 :

T_4 : Calculer le cosinus d'un angle dans un triangle.

- $\tau_{4,1}$: *Dans le cas où on connaît les longueurs des trois côtés du triangle*, exploiter le théorème de Pythagore généralisé, reporter les valeurs numériques données dans l'égalité et finir par en déduire le cosinus de l'angle cherché.

Éléments technologiques :

$\theta_{Th.PythG}$

Éléments techniques pour T_5 :

T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.

- $\tau_{5,1}$: *Dans le cas où on connaît les longueurs des trois côtés du triangle*, utiliser la technique $\tau_{4,1}$ associée à T_4 précédent pour trouver le cosinus de l'angle. Finir par utiliser la technique $\tau_{2,1}$ associée à T_2 (vue en 4e et en 3e).

Éléments technologiques :

$\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$

Éléments techniques pour T_6 :

T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

- $\tau_{6,1}$: *Dans le cas où on connaît deux côtés du triangle et l'angle déterminé par ces deux côtés*, appliquer le théorème de Pythagore généralisé, reporter les valeurs numériques données dans l'égalité, en déduire le carré du troisième côté du triangle et finir par trouver la longueur de ce côté à l'aide de la résolution de l'équation du type $X^2 = a$ où a est un nombre positif, en sachant que X, qui représente la longueur du côté cherché, désigne un nombre positif.

Éléments technologiques :

θ_{ThPytG} ; $\theta_{\mathrm{cos}Cal}$

3.2.2*.2.3. <u>Points de réflexions et commentaires</u>

1. Le programme 2010 vise les objets de savoir liés aux concepts de la trigonométrie à l'aide des applications du produit scalaire dans le plan. Pour répondre au programme concernant l'utilité des calculs d'angles et de longueurs dans un triangle, les manuels de 1re Scientifique proposent avec consensus dans la partie « Cours » deux théorèmes : *Théorème de la médiane* et *Théorème de Pythagore généralisé* (ou Formule des cosinus). Donc, avec le contenu du programme, on ne trouve plus toutes les relations métriques dans un triangle.

Cependant, les trois manuels étudiés font découvrir « la formule des sinus » ou « la relation entre les côtés et les angles d'un triangle » soit dans la partie « Cours » (manuel Math'x 2011 - p. 320) soit dans la partie « Exercices » (manuel Math'x 2011 - p. 339 ; manuel Odyssée 2011 - p. 265 ; manuel Transmath 2011 - p. 257). Remarquons que pour arriver à la formule des sinus, cela nécessite d'abord une formule d'aire d'un triangle en fonction de deux côtés et de l'angle formé par ces deux côtés.

Nous rencontrons, dans la partie « Cours » du manuel Hyperbole 2011 à la page 234, une sous-section intitulée : « Relations métriques dans un triangle » qui contient les trois propriétés y compris les démonstrations :

- Théorème d'Al-Kashi

- Propriété de l'aire d'un triangle (l'aire d'un triangle est la moitié du produit des longueurs de deux côtés du triangle par le sinus de l'angle formé par ces côtés) : Dan un triangle ABC, son aire S est $S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$.
- Formule des sinus : Dans un triangle ABC, on a $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{2S}{abc}$.

Donc, selon les manuels de 1re Scientifique, les relations géométriques étudiées s'en tiennent aux applications du produit scalaire dans le plan ou vont au-delà avec une partie souvent intitulée « Relations métriques dans le triangle » dans laquelle sont abordées des relations utilisant le sinus d'un angle (aire d'un triangle, formule des sinus).

Remarque : Deux manuels proposent de découvrir la « formule de Héron » dans un triangle quelconque : On considère un triangle ABC tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, et on note S son aire et p son demi-périmètre. On a alors : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. (Manuel Math'x 2011 – exo 144, p. 338 et Manuel Hyperbole 2011 – exo 76, p. 249)

2. Seul le manuel Math'x 2011 propose, dans la partie « Cours » du chapitre 11 intitulé : « Trigonométrie », les formules d'addition et de duplication accompagnées par les démonstrations presque complètes (page 294), en admettant à cet instant la formule d'addition principale $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$. Les auteurs proposent de voir la démonstration de cette formule d'addition dans le chapitre 12 intitulé : « Produit scalaire » à la page 320.

3.3. Fonctions trigonométriques en Terminale Scientifique

Le chapitre « Fonctions sinus et cosinus » est classé dans le domaine « Analyse », en Terminale Scientifique.

3.3.1. ***Extrait du B. O. numéro 8 du 13/10/2011***

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	- Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. - Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. - Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.

3.3.2. ***Extrait des manuels*** (2012)

Liste des manuels étudiés :

1. Odyssée – Édition Hatier 2012 (Chapitre 4, pp. 138-197) ;

2. Math'x – Édition didier 2012 (Chapitre 5, pp. 135-158) ;
3. Transmath – Édition Nathan 2012 (Chapitre 6, pp. 166-189) ;
4. Hyperbole – Édition Nathan 2012 (Chapitre 7, pp. 163-196).

3.3.2.1. Listes des objets de savoir visés

- Fonctions cosinus et sinus

  Définitions et propriétés :
  - Définitions : fonction cosinus – fonction sinus.
  - Propriétés : dérivées des fonctions cosinus et sinus.
  - Propriétés : parité – périodicité.

  Variations et représentations graphiques :
  - Variations des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$;
  - Construire les courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, puis les obtenir sur l'intervalle $[-\pi\,;0]$ à l'aide de la propriété de parité et les prolonger dans $\mathbb{R}$ par la translation de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$ à l'aide de la propriété de périodicité.

Nous nous intéressons au traitement des objets de savoir principaux visés, dans les parties « Activités » et « Cours », dans le thème d'étude « Fonctions sinus et cosinus » : Approche des fonctions sinus et cosinus et leurs variations, Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus, Parité et Périodicité des fonctions sinus et cosinus.

1. Approche des fonctions sinus et cosinus et leurs variations :

Des manuels de Terminale Scientifique proposent dans la partie « Activités » de découvrir expérimentalement les fonctions sinus et cosinus et leurs variations :

- **Par l'observation sur le cercle trigonométrique** :
  1. À l'aide du logiciel de géométrie dynamique :
     - construire la figure ;
     - créer un curseur t où $\begin{cases} t \in [0\,;\,\pi] \\ t \in [0\,;2\pi] \\ t \in [-3\pi\,;3\pi] \end{cases}$;
     - créer un point M du cercle trigonométrique en saisissant soit ses coordonnées cartésiennes $M(\cos t\,;\,\sin t)$, soit ses coordonnées polaires $M(1\,;t)$;
     - choisir comme unité d'angle le radian, afficher la mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ (manuel Math'x 2012, p. 136 ; manuel Transmath 2012, p. 168)

     Remarque : Trois des quatre manuels étudiés proposent une activité avec GeoGebra afin de découvrir les fonctions sinus et cosinus dans cet ordre. Seul le manuel Hyperbole 2012 (p. 175) se concentre sur les connaissances vues en Seconde basées sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique ; ce manuel ne parle pas d'angle ni de mesure en radians d'angle dans l'activité proposée visant à découvrir les fonctions sinus et cosinus.
  2. Observation/expérimentation
     - Comment varie l'ordonnée du point M ?

       En déduire le tableau de variations sur l'intervalle étudié de la fonction sinus, notée $\sin : t \mapsto \sin(t)$.

       Créer le point $N(t\,;\,\sin t)$, faire afficher sa trace puis vérifier la cohérence entre la courbe obtenue et le tableau de variations précédent.

- Procéder de façon analogue pour faire découvrir la fonction cosinus et son sens de variations ; ou bien en continuant cette activité par la question : comment doit-on définir le point N pour que le logiciel trace la courbe représentative de la fonction cosinus ?

- **Avec papier-crayon** :
  1. À l'aide du tableau des valeurs remarquables des cosinus et sinus en étendant aux valeurs : $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{6}$; π.
     Noter x la mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où I est l'origine du cercle trigonométrique et M, le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel x de la droite des réels.
  2. Observation/expérimentation
     - Comment varient les valeurs de $\sin x$ lorsque le point M se déplace dans le premier quadrant, dans le deuxième quadrant, dans le troisième quadrant et enfin dans le quatrième quadrant ?
     - Comment varient les valeurs de $\cos x$ lorsque le point M se déplace dans le premier quadrant, dans le deuxième quadrant, dans le troisième quadrant et pour finir dans le quatrième quadrant ?

     Remarque : Un des quatre manuels étudiés propose une activité avec papier-crayon (Manuel Odyssée 2012, p. 140)

Dans la partie « Cours », on définit les fonctions cosinus et sinus comme indiqué ci-après :

Définition 1 : Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ où I est l'origine du cercle trigonométrique et M, le point du cercle trigonométrique associé au nombre réel x dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle.
- La fonction qui à tout nombre réel x associe l'abscisse du point M est *la fonction cosinus*, notée cos. Ainsi, $x \mapsto \cos x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction qui à tout nombre réel x associe l'ordonnée du point M est *la fonction sinus*, notée sin. Ainsi, $x \mapsto \sin x$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Définition 2 :
- *La fonction sinus* est la fonction qui, à tout réel x, associe $\sin(x)$.
- *La fonction cosinus* est la fonction qui, à tout réel x, associe $\cos(x)$.

(Manuel Indice 2016, page 82)

Définition 3 :
- La fonction $x \mapsto \sin x$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée *la fonction sinus* et notée sin.
- La fonction $x \mapsto \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée *la fonction cosinus* et notée cos.

(Manuel Hyperbole 2012, page 176)

Nous rencontrons alors deux façons de présenter les définitions des fonctions cosinus et sinus :

1. Première façon : elle consiste en une introduction d'un texte accompagné par une figure décrivant l'ensemble des objets de savoir liés à l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan (vu en Seconde) et à l'introduction d'une mesure x en radians de l'angle orienté $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM})$ (vue en 1re Scientifique), où M est le point image du nombre réel x dans l'enroulement de la droite numérique. Puis, on donne les définitions des fonctions cosinus et sinus comme « Définition 1 » indiquée ci-dessus.

(Manuel Odyssée 2012, page 141 ; Manuel Math'x 2012, page 138 ; Manuel Déclic 2012, page 94 ; Manuel Transmath 2012, page 170 – remarquons que dans ce manuel la droite numérique ne figure pas dans la figure graphique donnée)

2. <u>Seconde façon</u> : elle consiste tout de suite en une présentation des définitions des fonctions sinus et cosinus comme « Définition 2 » et « Définition 3 » indiquées ci-dessus.

   (Manuel Indice 2016, page 82 ; Manuel Hyperbole 2012, page 176)

La « Définition 1 » nous suggère qu'il serait possible que :

- soit, on ignore ce qui a été fait en Seconde et on éprouve le besoin de redéfinir le cosinus et le sinus d'un nombre réel ;
- soit, on complète par rapport aux deux autres définitions pour bien caractériser les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle x.

Les « Définition 2 » et « Définition 3 » nous indiquent qu'il serait possible que :

- soit, on considère que ces définitions sont assez complètes en termes de fonction à définir et qu'à ce niveau, il n'est pas nécessaire de redéfinir le cosinus et le sinus d'un nombre réel ;
- soit, elles ne font pas apparaître *une caractérisation véritable du sinus et du cosinus d'un nombre réel* car nous pouvons nous demander : quelle est la signification de « $\sin x$ » et celle de « $\cos x$ » ? Et dans ce cas, il nous faut aller chercher les définitions du sinus et du cosinus d'un nombre réel en Seconde ou en 1re Scientifique.

Le manuel Hyperbole 2012 expose dans la partie « Cours » séparément : « Étude de la fonction sinus » puis « Étude de la fonction cosinus ». Chaque étude est composée de trois étapes dans l'ordre : Étude sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$; Courbe représentative sur $[-\pi\,;\,\pi]$; Courbe représentative de la fonction étudiée. Nous résumons l'étude des variations de la fonction sinus (ou cosinus) sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ donnée par ce manuel:

- donner la dérivée de la fonction sinus (ou cosinus) étudiée ;
- lire le signe de cette dérivée sur le cercle trigonométrique ;
- établir le tableau de variations de la fonction sinus (ou cosinus) sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

2. <u>Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus</u> :

Nous rencontrons trois façons de présenter la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus dans les parties « Activités » et « Cours », dans les quatre manuels étudiés.

<u>Première façon</u> : il s'agit d'une méthode de présentation propre au manuel Hyperbole 2012 (Activité 2 - p. 175, Cours - p. 176). Commencer par faire découvrir dans la partie « Activités » la dérivabilité en 0 de la fonction sinus en faisant chercher d'abord l'encadrement $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ puis $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ à partir de la configuration géométrique avec arguments géométriques, puis utiliser le théorème des limites d'encadrement (ou théorème des gendarmes) pour trouver la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ et utiliser la définition du nombre dérivé pour finir. Remarquons que le manuel Hyperbole ne propose pas de montrer d'abord que la fonction cosinus est continue en 0, ou bien, que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$, avant de proposer d'utiliser le théorème des gendarmes.

Dans la partie « Cours », il s'agit d'une section intitulée « Dérivabilité des fonctions sin et cos » qui est composée de deux sous-sections : « Dérivabilité de la fonction sinus » et « Dérivabilité de la fonction cosinus ».

- La première sous-section consiste en deux propriétés dans l'ordre accompagnées par la démonstration : la dérivabilité en 0 de la fonction sinus, puis la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction sinus.

- La deuxième sous-section consiste en une propriété de la dérivabilité de la fonction cosinus, accompagnée par une démonstration dans laquelle on utilise la dérivabilité sur ℝ de la fonction sinus pour en déduire la dérivabilité sur ℝ de la fonction $x \mapsto \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, on calcule la dérivée de cette dernière fonction et on en déduit la dérivabilité sur ℝ de la fonction cosinus et sa dérivée pour finir.

Deuxième façon : il s'agit d'une méthode de présentation propre au manuel Odyssée 2012 (Cours – pp. 143-144 ; Exercices : exo 43 – p. 155, exo 33 – p. 153). Ce manuel ne propose aucune activité d'approche concernant la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus. On commence directement par la partie « Cours ». Il s'agit d'une section intitulée « Dérivées des fonctions cosinus et sinus » qui est composée de deux sous-sections dans l'ordre : « Nombres dérivés en 0 des fonctions cosinus et sinus » et « Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus ».

- La première sous-section consiste en les propriétés de dérivabilité en 0 de la fonction cosinus et de son nombre dérivé en 0, puis de dérivabilité en 0 de la fonction sinus et de son nombre dérivé en 0. Cependant, dans la démonstration on commence par démontrer la dérivabilité en 0 de la fonction sinus, puis la dérivabilité en 0 de la fonction cosinus mais pour cette dernière, c'est à la charge du lecteur d'effectuer l'exercice 33 (consistant à montrer que la fonction cosinus est continue en 0, puis dérivable en 0 que l'on donnera son nombre dérivé en 0). En ce qui concerne la démonstration donnée par le manuel sur la dérivabilité en 0 de la fonction sinus, il y a une partie facultative. Le manuel propose au lecteur d'effectuer l'exercice 43 à la page155 dont l'objectif est de démontrer que pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$ (1).
  Nous précisons ici les étapes du procédé données par le manuel Odyssée 2012 dans la démonstration de la dérivabilité en 0 de la fonction sinus :
  - montrer que la fonction sinus est continue en 0 (en considérant d'abord que pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$) ;
  - montrer que la fonction sinus est dérivable en 0, de nombre dérivée 1 (en exploitant (1) amenant au système d'inégalités $0 < \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ pour $0 < x < \frac{\pi}{2}$, puis montrer que $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ à l'aide de la continuité de la fonction sinus en 0).
- La seconde sous-section consiste en un théorème portant dans l'ordre sur la dérivabilité sur ℝ de la fonction cosinus et sur la dérivabilité sur ℝ de la fonction sinus. Et dans cette sous-section, la démonstration est donnée dans l'ordre et elle nécessite l'utilisation de la dérivabilité en 0 des fonctions sinus et cosinus de manière conjointe.

Troisième façon : il s'agit d'une autre présentation utilisée par les manuels Math'x 2012 (Cours – p. 138) et Transmath 2012 (Cours – p. 171). Les deux manuels ne proposent aucune activité d'approche concernant la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus. Commencer par admettre un(e) théorème/propriété affirmant : Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur ℝ, et pour tout nombre réel x, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$; puis par citer le/la théorème/propriété suivant(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et le/la démontrer en utilisant le/la théorème/propriété admis(e) précédemment.

Les deux premières façons montrent la nécessité de la *dérivabilité en* 0 *de la fonction sinus et/ou de la fonction cosinus* et des *formules d'addition et/ou de duplication* pour démontrer la dérivabilité sur ℝ de la fonction sinus. La première méthode de présentation dans le manuel Hyperbole 2012 prouve que la dérivabilité en 0 de la fonction sinus suffit pour démontrer la dérivabilité sur ℝ des fonctions sinus et cosinus dans cet ordre (la continuité est implicite).

Alors que la deuxième méthode de présentation dans le manuel Odyssée 2012 prouve le besoin de la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus de manière conjointe pour démontrer la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions sinus et cosinus (la continuité en 0 des fonctions sinus et cosinus est explicite dans la démonstration de la dérivabilité de la fonction sinus en 0). D'ailleurs, la troisième méthode de présentation dans les deux autres manuels étudiés est une présentation « de manière inverse » par rapport aux deux premières façons.

3. Parité et périodicité des fonctions sinus et cosinus :
Nous rencontrons trois façons de présenter la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus dans la partie « Cours », dans les quatre manuels étudiés.
Première façon : il s'agit de la présentation faite dans les manuels Transmath 2012 (p. 170) et Hyperbole 2012 (pp. 178 et 180). Cette première façon consiste à définir de manière spécifique pour les fonctions cosinus et sinus leurs parité et périodicité, accompagnées par l'interprétation graphique.
Cette première présentation indique que l'on ne spécifie que les propriétés propres aux fonctions cosinus et sinus mais ce n'est pas ouvert pour trouver la parité et/ou la périodicité d'une fonction quelconque ni d'une fonction trigonométrique comme $x \mapsto \sin(2x)$ par exemple. Remarquons que les manuels n'évoquent pas qu'il puisse y avoir plusieurs périodes. Il serait possible que l'on puisse dire que -2π est aussi une période de la fonction cosinus par exemple, car pour tout nombre réel x, $\cos\big(x + (-2\pi)\big) = \cos x$.
Deuxième façon : il s'agit de la présentation exposée dans le manuel Math'x 2012 (p. 140). Cette deuxième façon consiste à aborder l'étude par la première façon indiquée précédemment, puis à citer une généralisation des définitions de la parité et de la périodicité d'une fonction.
Voici un extrait du manuel Math'x 2012 dans lequel, il y a une erreur graphique sur une période schématisée par le vecteur de translation $2\pi\vec{\imath}$ qui est représenté par le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ (ici, le point M' a été mal placé sur la courbe).

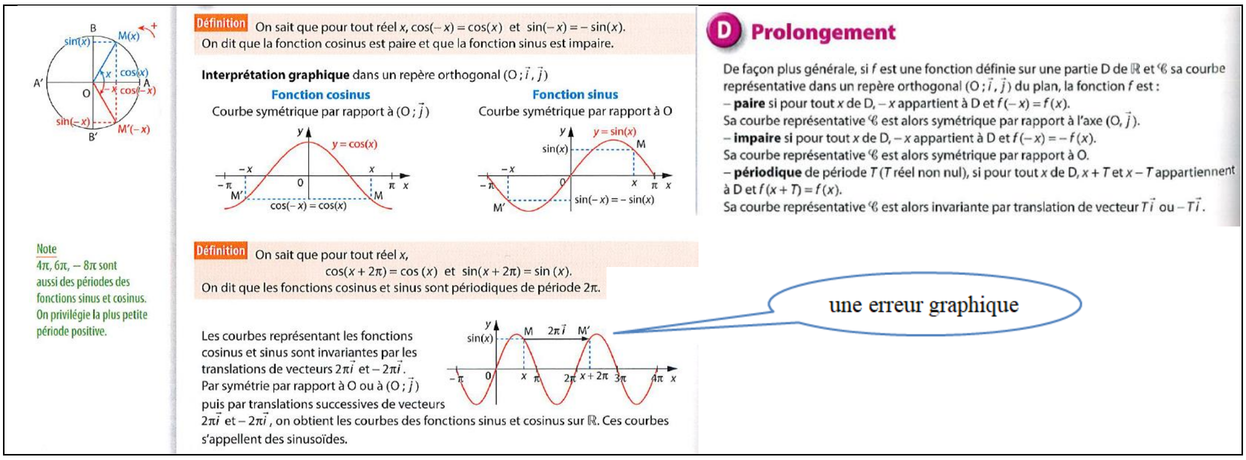


Figure 52 : Parité et périodicité – Extrait du manuel Math'x 2012, p. 140

Troisième façon : il s'agit d'une méthode de présentation figurant dans le manuel Odyssée 2012 (pp. 142-143). Cette troisième façon consiste à citer d'abord les définitions générales de la périodicité et de la parité d'une fonction (fonction paire et fonction impaire) dans cet ordre, puis après chaque définition, les propriétés respectives de la périodicité et de la parité pour les fonctions cosinus et sinus et les démontrer.

Nous précisons de nouveau que le terme de parité et les concepts de la parité et de la périodicité d'une fonction sont rencontrés pour la première fois dans le thème « Fonctions sinus et cosinus ».

3.3.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
Terminale Scientifique	$\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$ $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{\nearrow f-d}$	$\theta_{périf}$; $\theta_{Pr.périf}$; θ_{parif} ; $\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$

Tableau 14 : θ_i évoqué(s) en Terminale Scientifique

Nous ne présentons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été exposées précédemment.

$\theta_{périf}$: Définition – *Périodicité d'une fonction*

Une fonction f est périodique s'il existe un nombre réel strictement positif T tel que, pour tout nombre réel x de l'ensemble de définition de f, $x+T$ et $x-T$ appartiennent à cet ensemble de définition, et si on a : $f(x+T)=f(x)$. T est une période de la fonction f.

$\theta_{Pr.périf}$: Propriété – *Périodicité d'une fonction*

Si la courbe représentative d'une fonction f est invariante par la translation de vecteur $T\vec{\imath}$ (T un nombre réel positif non nul), alors la fonction f est périodique de période T.

θ_{parif} : Définitions – *Parité d'une fonction*

1. Une fonction f est paire si pour tout nombre réel x de l'ensemble de définition de f, $-x$ appartient à cet ensemble de définition, et $f(-x)=f(x)$.
2. Une fonction f est impaire si pour tout nombre réel x de l'ensemble de définition de f, $-x$ appartient à cet ensemble de définition, et $f(-x)=-f(x)$.

$\theta_{Pr.parif}$: Propriétés – Parité d'une fonction

1. Si la courbe représentative d'une fonction f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal du plan, alors la fonction f est paire.
2. Si la courbe représentative d'une fonction f est symétrique par rapport à l'origine du repère dans un repère orthogonal du plan, alors la fonction f est impaire.

$\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$: Propriété – *Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus*

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel x, on a : $\cos'(x)=-\sin(x)$ et $\sin'(x)=\cos(x)$.

$\theta_{Th.G-d}$: Théorèmes généraux sur la dérivabilité – règles de dérivation.

$\theta_{\nearrow f-d}$: Propriétés sur la monotonie d'une fonction liée à la dérivation.

- Types de tâches

Nous étudions les parties « Savoir-faire » et « Exercices » pour savoir quels types de fonctions trigonométriques sont proposés par les manuels étudiés au sujet de l'étude d'une fonction trigonométrique. Cela nous permet de déterminer les types de tâches dans l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$ existants dans des manuels ainsi que les techniques associées que nous allons présenter ci-dessous. Nous remarquons que :

1. il s'agit plutôt de l'étude d'une fonction trigonométrique définie sur un intervalle donné ou sur $\mathbb{R}$ (par exemple, des polynômes en $\cos x$ ou $\sin x$).
2. dans les quatre manuels étudiés, apparaît l'étude de la fonction tangente dans la partie « Exercices » avec des questions guidées :

- Les manuels Math'x 2012 (p. 155)), Hyperbole 2012 (p. 194) et Odyssée 2012 (p. 160) proposent d'étudier la fonction tangente sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Les manuels Hyperbole et Odyssée vont un peu plus loin, en demandant de déterminer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}, x<\frac{\pi}{2}} \tan x$ (et de donner une interprétation graphique de ce résultat pour Odyssée).
- Le manuel Transmath 2012 (p. 180) propose une activité de recherche pour étudier les propriétés de la fonction tangente. Cette activité est composée de deux parties : A. Approche graphique et B. Généralisation. Dans la partie B à la question 3, ce manuel demande de prouver que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec k un nombre entier relatif) est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

Le terme « asymptote verticale » apparaît explicitement dans le manuel Transmath, mais dans les manuels Hyperbole et Odyssée, c'est à la charge de l'élève d'interpréter graphiquement le résultat de la limite à gauche de $\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$.

Seul le manuel Odyssée 2012 propose, en plus de l'étude de la fonction tangente, comme l'étude de la fonction $x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x}$ où la fonction cotangente est sous-entendue, mais ce manuel propose juste de l'étudier sur l'intervalle $]0\ ;\ \pi[$, (exercice n° 57, p. 157).

3. Seuls deux manuels étudiés (Odyssée 2012 avec 4 exercices et Transmath 2012, 1 exercice) proposent un/des exercice(s) dans le(s)quel(s) ils demandent de montrer la dérivabilité d'une fonction étudiée en un point et/ou sur son ensemble de définition.

4. Dans les quatre manuels étudiés, apparaissent d'autres fonctions diverses et compliquées comme par exemple, $x \mapsto (2 + \cos(x))e^{1-x}$ ou $x \mapsto e^{-\cos(x)}$ (Manuel Transmath 2012, p. 187), mais il ne s'agit pas tout à fait de l'étude entière d'une fonction.

6. Apparaît, dans la partie « Exercices » des quatre manuels étudiés, le calcul de limites en exploitant $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et le nombre dérivé d'une fonction en un point.

Nous repérons six types de tâches et nous numérotons à la suite des T vus dans $\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$ en 1re Scientifique : T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25}, T_{26}. Précisons que T_{26} est la réunion des cinq types de tâches qui le précède dans cet ordre.

- T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{23} : Étudier la dérivabilité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et calculer sa fonction dérivée.
- T_{24} : Étudier les variations d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et établir le tableau de variations de la fonction.
- T_{25} : Construire la représentation graphique d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.

- Techniques et Technologies associées

Éléments techniques pour T_{21} :

T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.

Nous distinguons les deux cas suivants :

Cas 1 : *Par lecture graphique* dans le cas où la fonction trigonométrique f donnée est définie par graphique.

- $\tau_{21,1}$: Constater que la courbe représentative de la fonction f semble être invariante par translations de vecteur $T\vec{\imath}$ où T est un nombre réel strictement positif et conclure que la fonction f est périodique de période T.
  ($\theta_{Pr.périf}$)
- $\tau_{21,2}$: Repérer deux points de la courbe représentative de la fonction f ayant même ordonnée. Appeler T la différence de leurs abscisses. Vérifier que pour d'autres couples de points d'abscisse x et $x+T$ les ordonnées sont les mêmes. Si ce procédé semble bien « fonctionner », conclure que la fonction f semble être périodique de période T.
  ($\theta_{Pr.périf}$)

Cas 2 : *Par preuve* dans le cas où la fonction trigonométrique f donnée est définie par son expression algébrique/littérale.

- $\tau_{21,3}$: Commencer par préciser qu'il existe un nombre réel strictement positif T tel que pour tout nombre réel x de l'ensemble de définition de f, $x+T$ appartienne à cet ensemble de définition, puis prouver que $f(x+T)=f(x)$.
  ($\theta_{périf}$)

Éléments technologiques :

$\theta_{périf}$; $\theta_{Pr.périf}$

Éléments techniques pour T_{22} :

T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.

Nous distinguons les deux cas suivants :

Cas 1 : *Par lecture graphique* dans le cas où la fonction trigonométrique f donnée est définie par graphique.

- $\tau_{22,1}$: Considérer un point de la courbe représentative de la fonction f et son symétrique par rapport à l'axe des ordonnées ou par rapport à l'origine O du repère. Puis, vérifier si ce symétrique appartient aussi à la courbe. Si la réponse est positive, recommencer avec d'autres points de la courbe, et conclure.
  ($\theta_{Pr.parif}$)
- $\tau_{22,2}$: Repérer d'abord un couple de points de la courbe représentative de la fonction f ayant des abscisses opposées et remarquer graphiquement qu'ils ont la même ordonnée (ou qu'ils ont des ordonnées opposées). Si oui, recommencer avec quelques autres couples de points de la courbe. Et, si ce procédé semble bien « fonctionner », conclure que la fonction f semble être paire (ou impaire).
  (θ_{parif})

Cas 2 : *Par preuve* dans le cas où la fonction trigonométrique f donnée est définie par son expression algébrique/littérale.

- $\tau_{22,3}$: Préciser d'abord si pour tout nombre réel x de l'ensemble de définition de la fonction f, il existe $-x$ appartenant à cet ensemble de définition, puis calculer algébriquement $f(-x)$, et conclure selon les cas suivants :
  - Si $f(-x) = f(x)$ (ou si $f(-x) - f(x) = 0$), alors en déduire que la fonction f est paire.
  - Si $f(-x) = -f(x)$ (ou si $f(-x) + f(x) = 0$), alors en déduire que la fonction f est impaire.

  (θ_{parif})

Éléments technologiques :
θ_{parif} ; $\theta_{Pr.parif}$

Éléments techniques pour T_{23} :
T_{23} : Étudier la dérivabilité d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble d'étude et calculer sa fonction dérivée.

- $\tau_{23,1}$: Commencer par calculer le taux d'accroissement de la fonction f entre deux nombres a et $a + h$ (ou entre a et x), avec a un nombre réel quelconque de l'ensemble de définition de f. Étudier la limite du taux d'accroissement lorsque h tend vers zéro (ou x tend vers a) ; dans tous les cas, cette limite est sous forme indéterminée $\frac{0}{0}$. À partir de cette étape, pour lever l'indétermination, exploiter si possible les formules d'addition et/ou de duplication (et la dérivabilité de la fonction sinus (ou cosinus) en 0, dans le cas où les fonctions sinus et cosinus sont déjà étudiées dans le cours). Après avoir étudié cette limite, regarder le(s) résultat(s) obtenu(s) et conclure si la fonction est dérivable sur son ensemble d'étude, à l'aide de la définition de la notion de fonction dérivable et de nombre dérivé d'une fonction en un point.

  Remarquons que dans le cas où l'ensemble de définition de f est un intervalle fermé en a, on n'étudiera qu'une limite à gauche ou à droite selon le cas.
  ($\theta_{For.add}$CS ; $\theta_{For.dup}$CS)
- $\tau_{23,2}$: Sachant que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et connaissant leurs dérivées, appliquer les règles de dérivation.
  ($\theta_{Pr.df}$CS ; $\theta_{Th.G-d}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{For.add}$CS ; $\theta_{For.dup}$CS ; $\theta_{Pr.df}$CS ; $\theta_{Th.G-d}$

Éléments techniques pour T_{24} :
T_{24} : Étudier les variations (liées à la dérivabilité) d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble d'étude I et établir le tableau de variations de la fonction f.
Étudier les variations d'une fonction f sur I, à l'aide de sa fonction dérivée f', consiste à étudier le signe de f' sur I. Nous présentons une technique $\tau_{24,1}$ composée par les deux étapes suivantes :
<u>Étape 1</u> : Étudier les variations (liées à la dérivabilité) de la fonction f sur l'ensemble d'étude I.

- $\tau_{24,1,1}$: Sachant que la fonction f est dérivable sur son ensemble de définition et donc sur son ensemble d'étude, et connaissant l'expression algébrique de sa dérivée f'. Vérifier alors la nature de cette expression algébrique de f', par exemple, c'est soit une constante, soit une expression littérale (pouvant être transformée) sous forme $aX + b$ (avec $a \neq 0$ et $X \in \{\cos x\,;\ \sin x\}$), soit une expression littérale (pouvant être transformée) sous forme $aX^2 + bX + c$ (avec $a \neq 0$ et $X \in \{\cos x\,;\ \sin x\}$). Trouver si possible toutes les racines de f' en commençant par déterminer les nombres réels x de I tels que $f'(x) = 0$; puis étudier le signe de $f'(x)$ sur I à l'aide soit de la règle du signe du binôme, soit de la règle du signe du trinôme, soit d'une étude séparée des signes de chaque facteur, soit des caractéristiques particulières de la fonction cosinus et/ou de la fonction sinus (à l'aide de la lecture graphique sur le cercle trigonométrique ou sur la représentation graphique de la fonction cosinus et/ou de la fonction sinus).

Remarquons que l'on pourrait construire le tableau de signe de f' formé par deux lignes : ligne de la variable x et ligne du signe de $f'(x)$, (à préciser que la construction de ce tableau n'est pas obligatoire et qu'elle dépend de la complexité pour déterminer le signe de f' sur I). Lors de la construction du tableau de signe, la création de la ligne de la variable x au départ est importante : il faut bien repérer d'abord toutes les valeurs clefs de x y compris toutes les racines de f' sur I, les valeurs de x où $f(x)$ n'est pas définie et les valeurs d'extrémité (des sous-ensembles) de I ; puis classer/ordonner ces valeurs clefs de x en ordre croissant.

En déduire alors les variations de la fonction f sur des sous-ensembles ordonnés bien précis de I et les extremums locaux à l'aide des règles du signe de la dérivée liées à la dérivabilité d'une fonction.

($\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$)

<u>Étape 2</u> : Établir le tableau de variations de la fonction f sur I.

- $\tau_{24,1,2}$: C'est la suite de la technique $\tau_{f24,1,1}$. Le tableau de variations de la fonction f sur I est composé des trois lignes dans l'ordre du haut vers le bas : ligne de la variable x, ligne du signe (y compris la nullité) de f', ligne de l'interprétation de la monotonie de f sur la partition de I. Remarquons que dans le cas où l'on a déjà construit le tableau du signe de f' dans la technique $\tau_{f24,1,1}$, il suffit d'ajouter la troisième ligne consistant en la ligne de l'interprétation de la monotonie de f et finir par intégrer les extrema s'il y en a. Si le tableau de signe de f' n'a pas encore été construit dans la technique $\tau_{f24,1}$, la première étape consiste en la réalisation de la ligne de la variable x indiquée précédemment dans la technique $\tau_{f24,1,1}$. Puis, remplir, à la deuxième ligne du tableau de variations, le signe de f' dans toutes les colonnes déterminées à la première ligne. Ensuite, interpréter, à la troisième ligne du tableau de variations, la monotonie de la fonction f suivant le signe de f' obtenu à la deuxième ligne, et finir par intégrer les extrema s'il y en a.

  ($\theta_{\nearrow f-d}$)

Éléments technologiques :

$\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$

Éléments techniques pour T_{25} :

T_{25} : Construire la représentation graphique d'une fonction f sur son ensemble de définition.

Remarquons que T_{25} est la suite des types de tâches T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24} dans cet ordre, donc les techniques que nous allons exposer ci-dessous sont la suite des techniques exposées précédemment, notamment la suite de l'étape $\tau_{24,1,2}$ de la technique $\tau_{24,1}$ associée à T_{24}. L'information issue des tâches des quatre premiers types de tâches réalisées précédemment est indispensable pour les étapes à suivre dans la construction de la représentation graphique de la fonction f sur son ensemble de définition. Cependant, nous ne présentons pas de manière détaillée les « petites étapes » dans cette construction, par exemple, commencer par tracer un repère orthonormé (ou orthogonal), les points d'extrema local, etc.

Nous distinguons les deux cas ci-après :

<u>Premier cas</u> : La fonction f est non-périodique.

- $\tau_{25,1}$: *Dans le cas où la fonction f n'est ni paire ni impaire*. Dans ce cas, l'ensemble d'étude I indiqué précédemment dans l'exposé des techniques associées à T_{24} est l'ensemble de définition de la fonction f sans tenir compte de la restriction. Il s'agit d'une interprétation graphique à partir du tableau de variations de la fonction f avec l'étape $\tau_{24,1,2}$ de la technique $\tau_{24,1}$ associée à T_{24}.
- $\tau_{25,2}$: *Dans le cas où la fonction f est paire* (ou *impaire*). Dans ce cas, l'ensemble d'étude I indiqué précédemment dans l'exposé des techniques associées à T_{24} est la moitié de l'ensemble de définition de la fonction f. Construire d'abord la représentation graphique de la fonction f sur l'ensemble d'étude à partir du tableau de variations de la fonction f avec l'étape $\tau_{24,1,2}$ de la technique $\tau_{24,1}$ associée à T_{24}, puis compléter sur l'ensemble de définition de cette fonction à l'aide des propriétés de la parité.
  ($\theta_{Pr.parif}$)

<u>Deuxième cas</u> : La fonction f est périodique.

- $\tau_{25,3}$: *Dans le cas où la fonction f n'est ni paire ni impaire*. Dans ce cas, l'ensemble d'étude I indiqué précédemment dans l'exposé des techniques associées à T_{24} est en général soit $[0\,;T]$ soit $\left[-\frac{T}{2}\,;\,\frac{T}{2}\right]$ où T est un nombre réel positif non nul appelé période de la fonction f. Commencer par construire la représentation graphique de la fonction f à partir du tableau de variations de la fonction f avec l'étape $\tau_{24,1,2}$ de la technique $\tau_{24,1}$ associée à T_{24}, puis compléter sur l'ensemble de définition de cette fonction par translations de vecteur $T\vec{\imath}$ à l'aide des propriétés de la périodicité.
  ($\theta_{Pr.périf}$)
- $\tau_{25,4}$: *Dans le cas où la fonction f est paire* (ou *impaire*). Dans ce cas, l'ensemble d'étude I indiqué précédemment dans l'exposé des techniques associées à T_{24} est en général $\left[0\,;\frac{T}{2}\right]$ où T est un nombre réel positif non nul appelé période de la fonction f. Commencer par construire la représentation

graphique de la fonction f à partir du tableau de variations de la fonction f avec l'étape $\tau_{24,1,2}$ de la technique $\tau_{24,1}$ associée à T_{24}, puis compléter sur l'ensemble de définition de cette fonction à l'aide des propriétés de la parité, puis par translations de vecteur $T\vec{\imath}$ à l'aide des propriétés de la périodicité.
($\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.périf}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.périf}$

Éléments techniques pour T_{26} :
T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.
T_{26} consiste en la réunion des cinq types de tâches T_{21}, T_{22}, T_{23}, T_{24}, T_{25} précédents. Pour réaliser T_{26}, il faut accomplir ces cinq T dans l'ordre.
Considérer que l'on connaît l'expression algébrique de la fonction f sur un ensemble d'étude donné. Nous présenterons les techniques les plus rencontrées en pratique ci-après :
Premier cas : La fonction f est non-périodique.

- $\tau_{26,1}$: *Dans le cas où la fonction f n'est ni paire ni impaire*. Il s'agit d'effectuer dans l'ordre les techniques : $\tau_{23,2}$, $\tau_{24,1}$, $\tau_{25,1}$.
($\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$)
- $\tau_{26,2}$: *Dans le cas où la fonction f est paire* (*ou impaire*). Il s'agit d'effectuer dans l'ordre les techniques : $\tau_{22,2}$, $\tau_{23,2}$, $\tau_{24,1}$, $\tau_{25,2}$.
(θ_{parif} ; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$; $\theta_{Pr.parif}$)

Deuxième cas : La fonction f est périodique.

- $\tau_{26,3}$: *Dans le cas où la fonction f n'est ni paire ni impaire*. Il s'agit d'effectuer dans l'ordre les techniques : $\tau_{21,2}$, $\tau_{23,2}$, $\tau_{24,1}$, $\tau_{25,3}$.
($\theta_{périf}$; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$; $\theta_{Pr.périf}$)
- $\tau_{26,4}$: *Dans le cas où la fonction f est paire* (*ou impaire*). Il s'agit d'effectuer dans l'ordre les techniques : $\tau_{21,2}$, $\tau_{22,2}$, $\tau_{23,2}$, $\tau_{24,1}$, $\tau_{25,4}$.
($\theta_{périf}$; θ_{parif} ; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$; $\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.périf}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{périf}$; $\theta_{Pr.périf}$; θ_{parif} ; $\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.add\mathrm{CS}}$; $\theta_{For.dup\mathrm{CS}}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{\nearrow f-d}$

3.3.2.3. Points de réflexions et commentaires

1. Trois des manuels étudiés font découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus, dans cet ordre, à l'aide d'une activité d'approche dans laquelle il s'agit d'un passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle x (ou t), où la variable x (ou t) est considérée d'abord comme un nombre réel associé au point image M du cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct du plan, puis à une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Lors de ce passage, la variable x (ou t) représente une mesure en radians de l'angle

orienté dans le cadre de la géométrie repérée et cette variable représente un nombre réel qui est l'abscisse du point décrivant la courbe représentative de la fonction sinus/cosinus dans le cadre de l'analyse. Cela montre l'importance du rôle de « radian » lors de ce passage.

Le manuel Hyperbole 2012 propose une activité d'approche semblable à la précédente, mais ce manuel ne parle que de ce qui concerne les connaissances sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vues en Seconde.

Donc, un des quatre manuels étudiés fait découvrir les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle en se basant seulement sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique.

<u>Remarque</u> : il y a consensus entre les quatre manuels étudiés de faire découvrir dans l'ordre dans une même activité d'approche : la notion de fonction sinus, puis celle de fonction cosinus. Il semble que ce choix soit motivé par l'objet $\sin x$ qui est <u>l'ordonnée</u> du point image M dans le cadre de la géométrie repérée et qui est aussi <u>l'ordonnée</u> du point décrivant la courbe de la fonction sinus dans le cadre de l'analyse (ou avec une autre interprétation possible : ce choix est motivé pour des raisons linguistiques), (cf. Demir & Heck, 2013). L'idée de ce choix est de se familiariser aussi bien que possible avec les nouvelles notions visées lors du passage du cadre de la géométrie repérée vers le cadre de l'analyse.

2. Avec le traitement sur la dérivabilité des fonctions sinus et cosinus (voir la sous-section 3.3.2.1, pp. 125-127), la formule $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ est explicitement dans le programme, mais pas la formule $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$. Donc, pour la deuxième formule, avant de l'utiliser il est nécessaire de la justifier à l'aide de la dérivabilité en 0 de la fonction cosinus grâce à sa dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

3. Parmi les quatre manuels étudiés, seuls deux manuels (Hyperbole 2012, pp. 178 et 180 ; Transmath 2012, p. 171) exposent dans la partie « Cours » l'étude des fonctions cosinus et sinus mais de manières différentes :
   - Dans le manuel Hyperbole 2012 : il s'agit de trois étapes dans l'ordre : 1. Étude sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$, 2. Courbe représentative sur $[-\pi;\,\pi]$, 3. Courbe représentative de la fonction étudiée complète.
     Ici, le manuel ne donne aucune raison concernant les étapes dans l'étude de la fonction sinus (ou cosinus) au sujet de l'ensemble d'étude $[0\,;\,\pi]$.
   - Dans le manuel Transmath 2012 : il s'agit d'une présentation d'étude des fonctions sinus et cosinus de manière parallèle avec trois étapes : Dérivées, Tableaux de variation sur $]-\pi\,;\,\pi]$ et Coubes représentatives complètes.
     Ici, le manuel indique la raison pour laquelle il suffit d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle d'amplitude 2π, et on choisit l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$ centré en 0.

   Les deux autres manuels (Odyssée 2012, p. 144 et Math'x 2012, p. 138) ne le font pas, mais donnent juste les tableaux de variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$ ainsi que les graphiques correspondants.

   Remarquons que trois des quatre manuels étudiés proposent dans la partie « Savoir-faire » d'étudier une fonction trigonométrique.
   (manuel Odyssée 2012, p. 147 ; manuel Math'x 2012, p. 139 ; manuel Transmath 2012, p. 172)

4. Les manuels Transmath 2012 et Hyperbole 2012 ne spécifient que les propriétés propres à la parité et à la périodicité pour les fonctions cosinus et sinus dans la partie

« Cours » (voir p. 59). Nous remarquons que le manuel Hyperbole ne propose, dans la partie « Savoir-faire », aucun exercice visant à mettre en œuvre la parité et la périodicité pour une fonction trigonométrique alors que, dans la même partie, le manuel Transmath les met en œuvre dans un exercice résolu à la page 172, en en profitant pour donner dans la partie Méthode (située contre la partie Solution) une propriété qui permet de dire qu'une fonction est paire mais ne donne pas la technologie pour une fonction impaire ni celle pour une fonction périodique. Cependant, les deux manuels proposent dans la partie « Exercices » des exercices dans lesquels on demande de montrer/vérifier qu'une fonction comportant $\cos x$ et/ou $\sin x$ est paire/impaire et/ou périodique (Manuel Hyperbole 2012 : Exercices n° 52 – p. 186, n° 77 – p. 191 ; Manuel Transmath 2012 : Exercices n° 58 – p. 184, n° 71 – p. 187). Nous pouvons dire que dans certains manuels, il manque dans l'institutionnalisation les technologies sur la parité et la périodicité pour une fonction quelconque.

5. Nous rencontrons dans la partie « Cours » d'autres manuels (manuel Transmath 2012, p. 171 ; manuel Symbole 2012, p. 242 ; manuel Déclic 2012, p. 96) un paragraphe portant sur la dérivée de la composée de la fonction $x \mapsto ax + b$ suivie de la fonction sinus et sur la dérivée de la composée de la fonction $x \mapsto ax + b$ suivie de la fonction cosinus.
6. Les fonctions sinus et cosinus – leurs caractéristiques :
    - être définies, (continues) et dérivables sur $\mathbb{R}$;
    - être impaires/paires ;
    - être périodiques (de période 2π) ;
    - (ne pas avoir de limite en l'infini).

3.4. Vision globale

La trigonométrie du triangle rectangle ($OML_{TriangleR}$), liée aux objets cosinus et sinus, est introduite en 4^e (cosinus d'un angle aigu) et en 3^e (sinus d'un angle aigu). Le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle sont définis comme le quotient des longueurs de deux des côtés du triangle rectangle. Ce quotient ne dépend pas des dimensions du triangle rectangle, il ne dépend que de l'angle aigu (voir la sous-section 1.2.4 du chapitre 3). Au collège, il semble que les manuels ne distinguent pas les cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle des cosinus et sinus de la mesure en degrés de l'angle. À l'aide de la calculatrice en mode « Degré », on détermine, par exemple, une valeur approchée du cosinus d'un angle aigu donné : cela signifie que le cosinus de l'angle est le cosinus de la mesure de l'angle ; et cela n'est pas explicité. Nous pouvons dire que les manuels ne font pas attention à cette connaissance du fait qu'il y a une seule mesure pour un angle géométrique.

En Seconde, on introduit la notion de cosinus et sinus d'un nombre réel ($OML_{CTrigoCSréel}$) qui est un nouvel objet d'étude, dans le domaine « Fonctions » dans lequel les termes « fonctions cosinus et sinus » sont sous-entendus. On commence par faire la correspondance entre la mesure en degrés d'un angle géométrique au centre qui intercepte un arc de cercle trigonométrique et la longueur de l'arc de cercle, puis on introduit le principe d'enroulement en utilisant la notion de radian sans le dire. En effet, « la droite numérique enroulée sur le cercle trigonométrique » et « les axes des abscisses et des ordonnées dans un repère orthonormé direct du plan » ont la même *unité de longueur* ; et donc, *la circonférence du cercle trigonométrique a pour unité de longueur le rayon du cercle trigonométrique* (rappelons que la notion de radian est introduite en 1re Scientifique).

Concernant la proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en degrés de l'angle intercepté par l'arc de cercle, aucun manuel ne précise que l'on applique seulement la formule de cette proportionnalité sous la condition que la mesure en degrés de l'angle soit comprise entre 0° et 360° (rappelons que la circonférence du cercle trigonométrique a pour mesure 2π unités de longueur). Puis avec le principe de l'enroulement, on étudie deux cas :

1. l'enroulement dans le sens positif (le sens antihoraire) ;
2. l'enroulement dans le sens négatif (le sens horaire).

À partir du principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on définit alors le cosinus et le sinus d'un nombre réel comme étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M (voir section 2 du chapitre 3). Remarquons que, dès que la correspondance entre « angle » et « longueur d'arc » est faite, on parle seulement de cosinus et de sinus d'un nombre réel qui est l'abscisse d'un point de la droite numérique dans l'enroulement, en évitant de parler de cosinus et de sinus d'un angle dont la mesure est en degrés.

Nous pouvons penser qu'il y a une difficulté pour l'élève à assimiler les objets de savoir visés avec l'enroulement dès deux tours, avec l'utilisation implicite des mesures de la longueur d'arc de cercle, et que l'élève aurait une difficulté à distinguer le cercle trigonométrique de la droite numérique dans l'enroulement (voir chapitre 4, cf. Bloch, 2009).

Remarquons qu'en ce qui concerne la proposition du programme de Seconde consistant à « faire le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° » et à « faire le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège », aucun manuel étudié n'attire l'attention sur le fait que les formules faisant intervenir les côtés opposé et adjacent ne s'appliquent ni à l'angle droit ni à l'angle nul.

En 1re Scientifique, on introduit la notion de radian, celle de mesures en radians d'angles orientés et celle de cosinus et sinus d'un angle orienté de deux vecteurs ($OML_{CTrigoCSAngOr}$) comme étant le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures. Les manuels définissent les mesures en radians d'un angle orienté à l'aide du principe de l'enroulement de la droite numérique vu en Seconde, et, un angle orienté de deux vecteurs semble être défini par ses mesures en radians. Dans le programme du secondaire français, il n'y a plus la définition d'un angle orienté de deux vecteurs comme étant identifiable à une rotation vectorielle (voir la section 1.2 du chapitre 3).

Remarquons que :

- dès lors que l'on peut parler de mesures en radians d'angles orientés, le point de vue « enroulement » et « longueur d'arcs de cercle » disparaît, en particulier tous les éléments du registre graphique de l'enroulement introduits en Seconde. Il semble que les manuels fassent le pari que l'élève ait bien assimilé et retenu les connaissances visées en Seconde et soit capable de les réinvestir en 1re Scientifique, dans le registre graphique malgré l'absence de la droite numérique.
- on parle plutôt de cosinus et de sinus d'une mesure (en radians) d'angles orientés (autrement dit, on se focalise sur le cosinus et le sinus d'un nombre réel) et on évite de parler du cosinus et du sinus d'un angle orienté.

En 1re Scientifique, on introduit aussi la trigonométrie dans un triangle quelconque ($OML_{TriangleQ}$) via la formule d'Al-Kashi à l'aide des applications du produit scalaire dans le plan. Cette fois-ci, c'est une extension de la trigonométrie du triangle rectangle et on en revient à travailler avec un angle géométrique dont la mesure est, en degrés, comprise entre 0° et 180°.

Nous faisons l'hypothèse que le concept d'angle n'est pas facile à appréhender :

- *angle géométrique* ($\mathrm{OML}_{\mathrm{Triangle}}$) consistant en une section du plan délimitée par les deux côtés de l'angle (deux demi-droites de même origine). Les élèves travaillent habituellement dès le début du collège avec les angles géométriques dont la mesure est en degrés (on peut mesurer l'angle à l'aide du rapporteur).
- *angle orienté* ($\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$) consistant en une rotation vectorielle (la définition par les rotations vectorielles vues dans la section 1 du chapitre 3 est totalement absente dans les manuels de 1re Scientifique). Rappelons que la notion de radian est introduite en 1re Scientifique (le radian est une nouvelle unité de mesure d'angles) et qu'un angle orienté de deux vecteurs semble être défini par ses mesures en radians. Toutes les mesures en radians d'un angle orienté diffèrent d'un multiple de 2π.

Il serait possible que dans l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$, l'élève voie un angle orienté de deux vecteurs comme étant un angle géométrique. Si c'est le cas, l'élève peut avoir des difficultés à s'approprier ce qu'est un angle orienté de deux vecteurs ainsi que toutes ses mesures en radians (autrement dit, la notion de périodicité), (voir Exercice III.1 du chapitre 4 ; cf. Bloch, 2009 ; cf. Kamber & Takci, 2018).

Nous faisons l'hypothèse que l'élève voit plutôt la longueur d'un arc de cercle (ou l'ouverture de l'angle ou angle géométrique) au lieu des mesures de longueur de l'arc de cercle (ou la droite numérique dans l'enroulement autour du cercle trigonométrique) ; autrement dit, l'élève a un problème de perception de l'orientation d'un angle orienté par rapport à un angle géométrique.

Nous discutons maintenant sur la relation entre « la longueur d'un arc de cercle » et « la mesure en radians de l'angle qui intercepte l'arc de cercle » dans un cercle de rayon non unitaire. Rappelons que seul le manuel Odyssée 2011 en parle dans le cadre géométrique. Mais, le manuel ne traite pas cette relation, dans le cadre de la géométrie repérée, avec un cercle non unité dont le centre est à l'origine d'un repère orthonormé du plan. Nous pouvons nous demander si l'élève de 1re Scientifique peuvent mettre en fonctionnement cette connaissance, dans le cadre de la géométrie repérée, en travaillant avec un cercle de rayon R. Nous traiterons dans le chapitre 5 si l'élève de Terminale Scientifique sera capable de donner, dans le quart de cercle non unité, l'abscisse et l'ordonnée du point image d'un nombre réel dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle, en fonction de ce nombre réel et le rayon du cercle.

En Terminale Scientifique, on introduit et définit les fonctions sinus et cosinus ($\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$) dans le domaine « Analyse ». Lors de l'introduction via le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle, on se base plutôt sur les mesures en radians d'angles orientés (voir la sous-section 3.3.2.3, pp. 134-135). Pour les deux fonctions, on étudie leurs caractéristiques : définies, (continues), dérivables sur $\mathbb{R}$, impaire(s)/paire(s), périodiques de période 2π. Cependant, les manuels de Terminale Scientifique semblent ne pas se focaliser sur la notion de périodicité lors de la découverte de ces deux fonctions via une activité d'approche. Il serait mieux que les manuels intègrent simultanément la notion de périodicité. Parce que cela est important dans la compréhension des élèves de Terminale Scientifique sur les objets de savoir visés (les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle dans le domaine « Analyse ») qui ne sont pas simples à appréhender dès la Seconde (le cosinus et le sinus d'un nombre réel dans le domaine « Géométrie analytique », vus en Seconde et revus en 1re Scientifique).

Remarquons qu'aucun manuel de mathématiques du secondaire n'attire l'attention sur le fait que, par exemple, les fonctions $\sin_{\mathrm{deg}} x$ et $\sin_{\mathrm{rad}} x$, correspondant au sinus d'un angle mesurant respectivement x degrés et x radians, ne sont pas la même (cf. Tanguay, 2010 ; cf. Groupe didactique des mathématiques *IREM* d'Aquitaine, 2016).

4. Étude du curriculum cambodgien

4.1. Introduction

Dans l'enseignement des mathématiques dans le secondaire au Cambodge, on n'utilise que les manuels officiels élaborés par l'Éducation Nationale du pays. Remarquons que ces manuels officiels recouvrent les programmes d'étude officiels.

En lien avec notre projet de thèse, nous nous intéressons uniquement au secondaire (lycée) dans cet enseignement des mathématiques parce que la trigonométrie est totalement absente du collège. Il s'agit de trois niveaux de classe ; dans chaque niveau de classe, il y a deux manuels de mathématiques officiels, nommés tome 1 et tome 2 :

- 10e (classe de Seconde) : c'est une classe générale pour tous les élèves, (tombe 1 et tome 2).
- 11e (classe de 1re) : il y a deux niveaux chez les élèves – 1). *niveau normal* (niveau non scientifique) avec seulement le tome 1 ; 2). *niveau scientifique* avec les deux tomes (tombe 1 et tombe 2).
- 12e (classe terminale) : même stratégie de partage des élèves et même structure d'utilisation des manuels.

Nous présentons ci-dessous une table d'étude des mathématiques au lycée en Khmer, suivie par une traduction en Français, selon le nouveau programme du projet de l'Éducation Nationale intitulé « Développement des apprentissages dans le secondaire 2005-2009 », mise en œuvre à partir de l'année scolaire 2008-2009, inchangée jusqu'à présent :

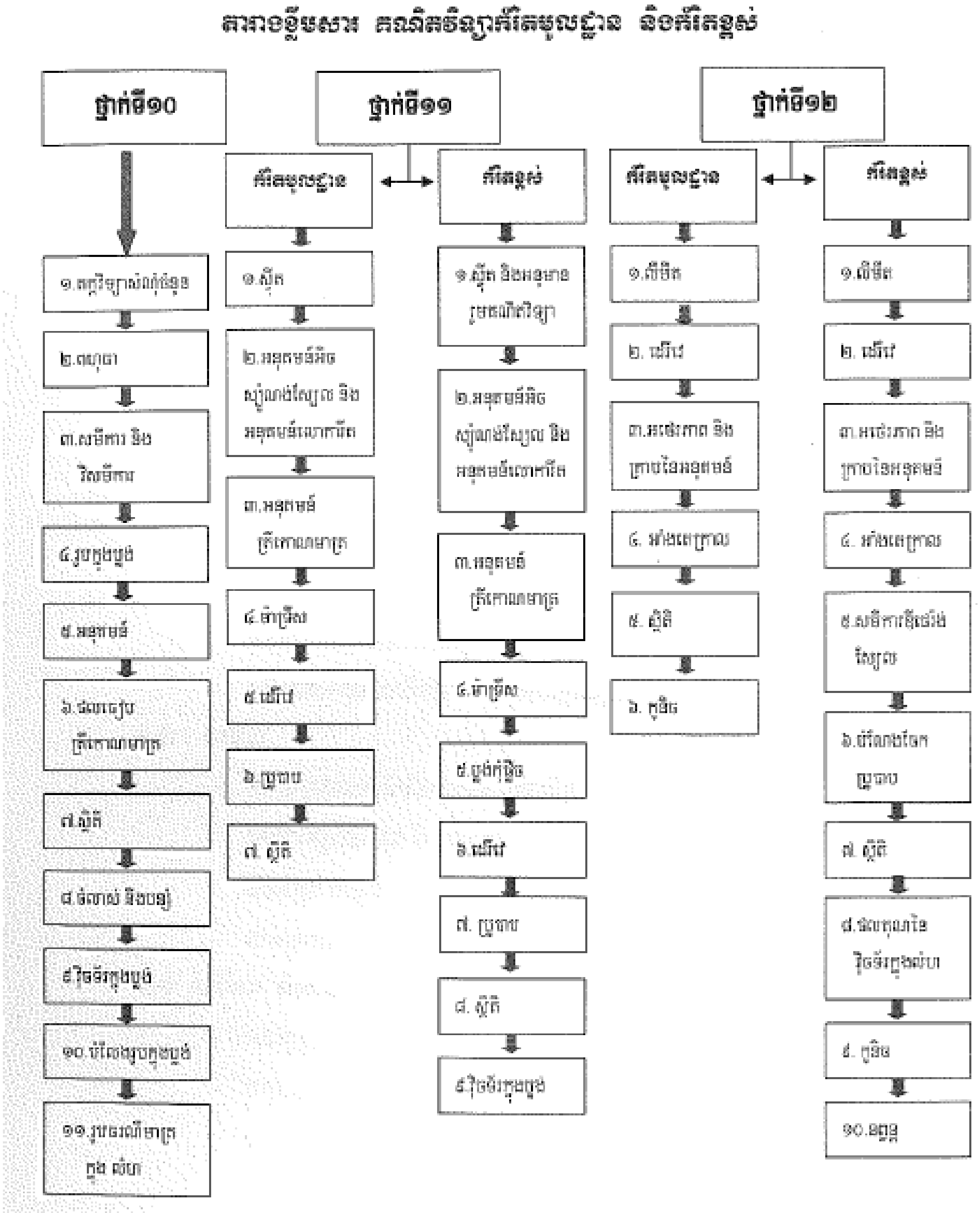


Tableau 15 : Table d'étude des mathématiques au lycée (en Khmer)

Table des matières – Mathématiques du niveau non scientifique et du niveau scientifique

Classe 10e (classe 2de)	Classe 11e (classe 1re) – niveau non scientifique	Classe 11e (classe 1re) – niveau scientifique	Classe 12e (classe Terminale) – niveau non scientifique	Classe 12e (classe Terminale) – niveau scientifique
1. Logique – Ensembles et nombres	1. Suites	1. Suites et raisonnement par récurrence	1. Limites	1. Limites
2. Polynômes	2. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes	2. Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes	2. Dérivation	2. Dérivation
3. Equations et inéquations	3. Fonctions trigonométriques	3. Fonctions trigonométriques	3. Variations et graphe d'une fonction	3. Variations et graphe d'une fonction
4. Géométrie dans le plan	4. Matrices	4. Matrices	4. Intégration	4. Intégration
5. Fonctions	5. Dérivation	5. Nombres complexes	5. Statistique	5. Equations différentielles
6. Rapports trigonométriques	6. Probabilités	6. Dérivation	6. Coniques	6. Distribution des probabilités
7. Statistique	7. Statistique	7. Probabilités		7. Statistique
8. Permutation et combinaison		8. Statistique		8. Produit vectoriel de deux vecteurs dans l'espace
9. Vecteurs dans le plan		9. Vecteurs dans l'espace		9. Coniques
10. Transformation des figures dans le plan				10. Arithmétiques
11. Géométrie dans l'espace				

Tableau 16 : Table d'étude des mathématiques au lycée (traduite en Français)

Structure générale de chaque chapitre des différents tomes

Chaque tome se décompose en chapitres et chaque chapitre est composé d'une ou plusieurs leçon(s). Au début de chaque chapitre, il y a une petite introduction générale (une demi-page environ) accompagnée par un dessin (soit une image liée au(x) concept(s) visé(s), soit un portrait d'un savant en mathématiques) et chaque chapitre se termine par une ou deux pages d'exercices intitulées « exercices du chapitre ».

Chaque leçon se décompose en trois parties : « cours », « résumé du cours » et « exercices ». Concernant l'organisation de la partie « cours », il s'agit plutôt d'une présentation des concepts de manière descriptive :

- soit par une observation expérimentale ;
- soit par la donnée d'un ou deux exemples avant de définir (ou théoriser) un concept ou une notion visé(e) ;

- soit par l'énoncé d'une définition (ou d'un théorème) ayant pour but de préciser un concept ou une notion visé(e).

Puis suivent un ou deux exemples d'application et pour finir quelques exercices d'application.

Trigonométrie et Fonctions trigonométriques

La trigonométrie est introduite en classe de 10^{e}, et les notions de fonctions trigonométriques, en classe de 11^{e}. En ce qui concerne les fonctions trigonométriques, nous ne nous intéressons qu'à l'étude des fonctions sinus et cosinus, car dans notre travail de recherche, nous nous focalisons sur les objets cosinus et sinus et c'est aussi cohérent avec notre étude faite dans la partie française.

Remarquons que dans ce nouveau programme, on propose d'utiliser plutôt un langage mathématique discursif, le formalisme symbolique n'est pas employé. On ne trouve plus dans les manuels de mathématiques actuels, par exemple : les symboles mathématiques comme (AB), $[AB]$ qui désignent respectivement la droite (AB), le segment $[AB]$; on ne voit que la présentation avec le langage discursif sans parenthèse ni crochets, c'est-à-dire, la droite *AB* et le segment *AB*.

Dans la suite, nous abordons successivement les trois institutions (ou classe par classe), en présentant dans l'ordre les différentes leçons de chaque niveau.

4.2. Trigonométrie en 10^{e} (Seconde en France)

En classe de 10^{e}, la trigonométrie est abordée sous le terme de « rapports trigonométriques » qui est le titre du chapitre 6 du tome 2 (pp. 1-32). Ce chapitre 6 se décompose en deux leçons : Leçon 1 intitulée « Rapports trigonométriques », (pp. 2-17) et Leçon 2 intitulée « Application des rapports trigonométriques », (pp. 18-29).

4.2.1. Leçon 1 : Rapports trigonométriques

Dans cette leçon, il s'agit de deux thèmes de trigonométrie : trigonométrie dans un triangle rectangle et trigonométrie dans un cercle de rayon r quelconque (y compris la trigonométrie dans un cercle unité). (voir le texte traduit de la leçon dans l'annexe n°2, pp. 383-391)

4.2.1.1. <u>Liste des objets de savoir visés</u>

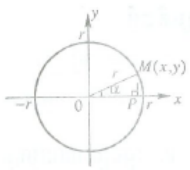
- Tangente, sinus et cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle
  - Définitions : tangente, sinus, cosinus d'un angle aigu.
- Valeurs des rapports trigonométriques pour les angles en degrés : 30°, 45°, 60°
- Relations entre les rapports trigonométriques (avec démonstration)
  - Relation entre tangente, sinus et cosinus d'un angle aigu A : $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$.
  - Relation entre sinus et cosinus d'un angle aigu A : $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.
  - Relation entre tangente et cosinus d'un angle aigu A : $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$.
  - Rapports trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- Extension des rapports trigonométriques

- Calcul des rapports trigonométriques d'un angle dont la mesure en degrés est comprise entre 0 et 180 dans un cercle de rayon r, à l'aide des coordonnées du point du cercle associé à l'angle.
    - Déterminer les rapports trigonométriques d'un angle obtus
- Cercle trigonométrique
    - Coordonnées d'un point du cercle trigonométrique
    - Valeur de la tangente d'un angle dans un cercle trigonométrique
    - Valeurs des rapports trigonométriques des angles 0°, 90°, 180°
    - Tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables
    - Observation : si $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ alors $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin\alpha \leq 1$
- Rapports trigonométriques de l'angle $(180^{\circ} - \alpha)$

Remarque : il s'agit d'une extension des rapports trigonométriques d'un angle obtus dont la mesure α en degrés est comprise entre 0 et 180, ***sans la notion d'angle orienté***. En faisant une *observation* dans le premier quadrant d'un cercle de rayon r quelconque les formules des cosinus, sinus et tangente d'un angle aigu du triangle rectangle et à partir de celles-ci, en faisant un lien avec les coordonnées d'un point M du cercle dans le demi-plan supérieur (le manuel ne dit rien sur la position du point M du cercle dans le plan), on généralise alors celles des cosinus, sinus et tangente d'un angle obtus connaissant les coordonnées du point M du cercle et le rayon de ce cercle : Si le point M a pour les coordonnées (x, y) alors $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$. Notons qu'il n'y a pas de registre de langage discursif et mathématique mais qu'il y a clairement un registre graphique qui indique que M est un point du cercle de manière que l'axe des abscisses des x positifs et le rayon du cercle $[OM]$ dans cet ordre déterminent un angle de mesure α (en degrés).

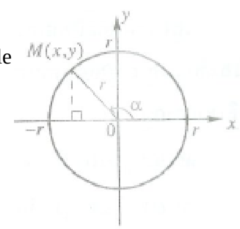
Il s'agit d'un extrait du manuel (tome 2, p. 11) pour éclairer la notation ci-dessus :

D'après les définitions des rapports trigonométriques dans le triangle rectangle OMP, on a :
$\cos\alpha = \frac{OP}{OM}$, $\sin\alpha = \frac{MP}{OM}$, $\tan\alpha = \frac{MP}{OP}$.
Si le point M a pour coordonnées (x, y) alors
$\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.



Par cette propriété, on va déterminer les rapports trigonométriques de l'angle α où $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$. Dans un repère de coordonnées, on trace un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point du cercle tel que OM associé à l'axe des abscisses des x positifs détermine un angle obtus α. On voit que le point M se situe dans cette région ayant pour abscisse un nombre négatif x et pour ordonnée un nombre positif y :

donc $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$, $\tan\alpha < 0$.



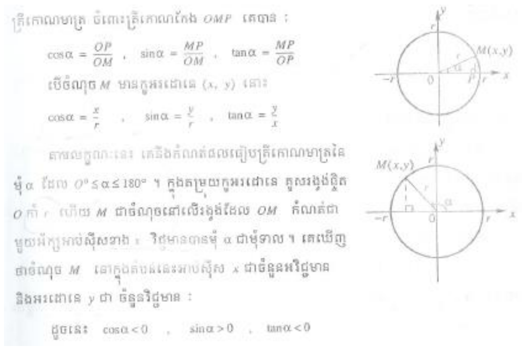


Figure 53 : Rapports trigonométriques d'un angle dont la mesure est comprise entre 0 et 180 degré(s)

Nous traitons maintenant les trois objets de savoirs principaux visés : Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle, Sinus et cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

1. La tangente d'un angle aigu du triangle rectangle

Le manuel commence par faire découvrir la notion de tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle à partir d'une observation expérimentale dont la tâche est : « déterminer la hauteur du support (ou du pied) du drapeau situé dans l'école ». Sans suggérer des questions menant à la réponse posée, le manuel décrit immédiatement une technique pour accomplir cette tâche à l'aide d'un triangle auxiliaire et à l'aide du premier cas des triangles semblables. Puis, le manuel lance une remarque et définit tout de suite la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sans définir d'abord le côté opposé à l'angle ni le côté adjacent à l'angle. Voici l'extrait du manuel à la page 3 (voir l'annexe n° 2, p. 384) :

- On remarque que le rapport $\frac{BC}{AC}$ est déterminé, il suffit juste de connaître le point A et la mesure de l'angle A.
- Le rapport $\frac{BC}{AC}$ entre la longueur du côté opposé et celle du côté adjacent à l'angle A est appelé la tangente de l'angle A.

Définition : Dans un triangle rectangle si A est la mesure d'un angle[2] aigu alors la tangente de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle A et celle du côté adjacent à l'angle A.

(figure) $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$ ou $a = b.\tan A$

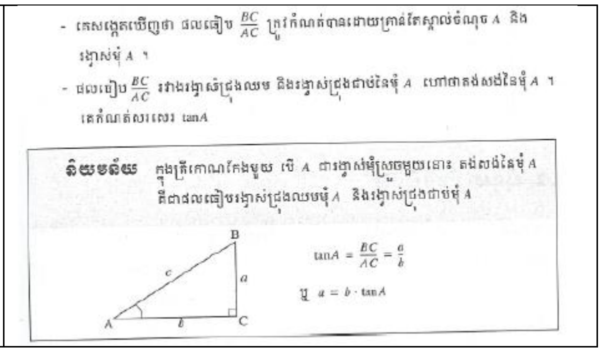


Figure 54 : Tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle

2. Le sinus et le cosinus d'un angle aigu du triangle rectangle

Le manuel commence par faire découvrir les notions de sinus et de cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle à partir d'un exemple en lien avec la notion de tangente visée précédemment dans un triangle rectangle dont la tâche est : « trouver un rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse ». Cet exemple consiste d'abord à « déterminer deux autres côtés d'un triangle rectangle connaissant la longueur d'un des côtés de l'angle droit et la tangente d'un angle aigu ». Le manuel donne la solution dans l'ordre ci-après :

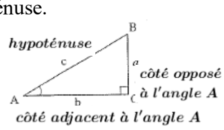
1. exploiter la définition de la tangente d'un angle aigu pour trouver la longueur du côté opposé à l'angle aigu, puis, le théorème de Pythagore pour trouver la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle connaissant les deux côtés de l'angle droit ;
2. trouver les deux rapports : l'un entre le côté opposé à l'angle aigu et l'hypoténuse, et, l'autre entre le côté adjacent à l'angle aigu et l'hypoténuse.

Puis, le manuel nomme ces deux rapports et cite les définitions du sinus et du cosinus d'un angle aigu du triangle rectangle. Voici l'extrait du manuel à la page 5 (voir l'annexe n° 2, p. 385) :

Définition : Dans un triangle rectangle, si A est la mesure d'un angle aigu alors :
- le sinus de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle A et l'hypoténuse.
- le cosinus de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle A et l'hypoténuse.

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ ou $a = c.\sin A$

$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ou $b = c.\cos A$



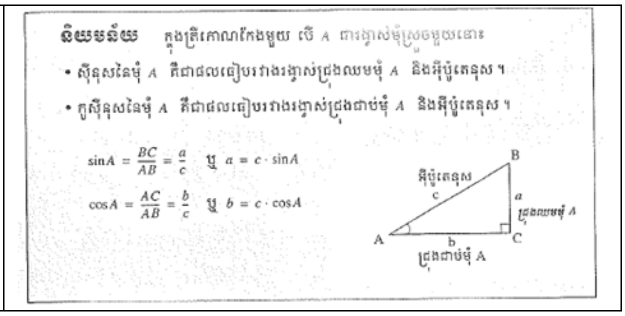


Figure 55 : Sinus et cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Le manuel ne vise pas à faire découvrir le fait que la tangente, le cosinus ou le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle est un quotient des longueurs de deux des trois côtés du triangle rectangle, et que ce quotient ne dépend pas des dimensions du triangle rectangle mais qu'il ne dépend que l'angle aigu.

4.2.1.2. Organisation mathématique

Comme nous avons commencé par l'analyse des programmes et des manuels de mathématiques français, alors dans la suite, nous nous inspirons des trois OM locales existantes dans l'institution française ; et pour les types de tâches T rencontrés dans l'institution cambodgienne et non dans l'institution française, nous numéroterons l'indice à la suite de la dernière numérotation d'indice des T rencontrés dans l'institution française.

En 10^e au Cambodge, la trigonométrie du triangle rectangle est décrite par les trois objets de savoir : le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle, comme ceux en 3^e en France. Donc, en ce qui concerne la numérotation des techniques τ, nous utilisons les τ rencontrées dans l'institution française comme des τ de base et nous les gardons. Nous ajoutons les nouvelles techniques rencontrées dans l'institution cambodgienne mais pas dans l'institution française, et nous les numérotons dans l'ordre à partir de la dernière numérotation des τ vue en 3^e. Par exemple, la dernière technique associée à T_1 en 3^e (en France) est $\tau_{1,18}$, donc pour la première nouvelle technique associée à T_1 en 10^e (au Cambodge) sera $\tau_{1,19}$.

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
10^e (Leçon 1)	θ_{hypo} ; $\theta_{Th.Pyth}$; θ_{AngTr}	$\theta_{\mathrm{cos}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{côté}Adj}$; $\theta_{enc\mathrm{cos}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{sin}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{côté}Opp}$; $\theta_{enc\mathrm{sin}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{tan}AngTrR}$; $\theta_{Pr.\mathrm{tan}TrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$; $\theta_{AngCompCST-Cercle}$; $\theta_{AngSuppCST-Cercle}$; $\theta_{\mathrm{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{TvrCST-Cm10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$; $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR-adap}$

Tableau 17 : θ_i évoqué(s) en 10^e (Cm) – Leçon 1 du chapitre 6 (tome 2)

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées dans l'institution française.

$\theta_{table-Trigo}$: Discours accompagnant la technique permettant de donner, à l'aide de la table de trigonométrie, une valeur approchée d'un rapport trigonométrique (cosinus, sinus ou tangente) d'un angle dont la mesure en degrés est inférieure à 45°, et inversement.

Remarquons que la table de trigonométrie donnée par le manuel tome 2 de 10^e est une table dont les mesures en degrés des angles ont un écart de 1°.

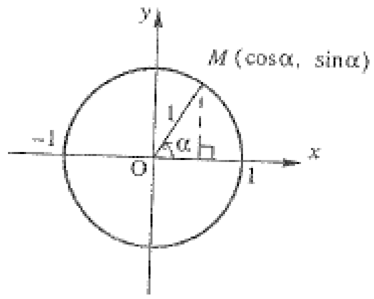
$\theta_{AngCompTrR}$: Propriétés des rapports trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

$\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$: Propriété – *Relation entre le cosinus et la tangente d'un angle aigu* dans un triangle rectangle : Pour tout angle aigu $\hat{A}$, $1+\tan^2\hat{A}=\frac{1}{\cos^2\hat{A}}$.

Remarque : En France, cette propriété n'est pas attendue en classe de 3[e] ; pourtant, les auteurs de certains manuels proposent dans la partie « Exercices » de démontrer que $1+\tan^2\hat{A}=\frac{1}{\cos^2\hat{A}}$.

$\theta_{\mathrm{CS}mesAngCtrigo}$: Définition – le cosinus et le sinus d'un angle aigu/obtus avec la liaison de l'extension des rapports trigonométriques dans le cercle trigonométrique.

Un cercle ayant son centre à l'origine d'un repère de coordonnées et ayant pour rayon 1 unité est appelé cercle unité ou cercle trigonométrique.
M ayant pour coordonnées (x, y) se situe sur le cercle unité.
Le rayon OM et l'axe des abscisses de la partie des x positifs déterminent un angle α dont le sens est opposé à celui des aiguilles de l'horloge.
On a : $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.
Donc sur le cercle trigonométrique, le point M a pour les coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.
(voir l'annexe n° 2, p. 388)



$\theta_{AngSuppCST-Cercle}$: Propriétés des rapports trigonométriques de l'angle $(180^\circ-\alpha)$.

$\theta_{AngCompCST-Cercle}$: Propriétés des rapports trigonométriques de l'angle $(90^\circ-\alpha)$.

$\theta_{encCSAng-Cm10e}$: Si $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$, alors $-1 \le \cos\alpha \le 1$ et $0 \le \sin\alpha \le 1$.

$\theta_{TvrCST-Cm10e}$: Tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables :

Tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables

តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

(infini)

Tableau 18 : Valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables

$\theta_{RFTrR-adap}$: C'est la technologie θ_{RFTrR} adaptée à l'extension des rapports trigonométriques dans le cercle trigonométrique. En fait, il s'agit de la technique $\theta_{RFréel}$ vue en Seconde en France.

$\theta_{Pr.tanTrR-adap}$: C'est la technologie $\theta_{Pr.tanTrR}$ adaptée à l'extension des rapports trigonométriques dans le cercle trigonométrique.

$\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR-adap}$: C'est la technologie $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR}$ adaptée à l'extension des rapports trigonométriques dans le cercle trigonométrique.

<u>Remarque</u> : les technologies $\theta_{RFTrR-adap}$, $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$ et $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR-adap}$ sont implicites dans le manuel parce que le manuel n'a pas cité ces trois savoirs comme des propriétés/formules. Le manuel propose un exercice d'application dans la partie « Cours », comme indiqué dans l'extrait du manuel (voir l'annexe n° 2, p. 389) ci-après :

Application : Dans le cercle trigonométrique, vérifier les relations suivantes :

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 2. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, 3. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

<u>Figure 56</u> : Relations des apports trigonométriques d'un angle dont la mesure est comprise entre 0 et 180 degré(s)

En plus, ces trois formules apparaissent dans la suite du cours quand le manuel en a besoin pour justifier les méthodes données pour certains exemples (voir l'annexe n° 2, p. 390). Mais, ces trois formules n'apparaissent pas dans la liste du résumé de la leçon (voir l'annexe n° 2, p. 390).

- <u>Types de tâches</u>

Nous rencontrons trois types de tâches T_1, T_2 et T_3 (déjà vus dans la partie française) reliés avec la trigonométrie dans le triangle rectangle, et, deux nouveaux types de tâches (notés T_{27}, T_{28}) reliés à l'extension des rapports trigonométriques dans un cercle qui n'est pas attendue dans le programme français du secondaire.

Trigonométrie dans le triangle rectangle :

- T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
- T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

Extension des rapports trigonométriques dans un cercle – rapports trigonométriques d'un angle dont la mesure $\boldsymbol{\alpha}$ en degrés est comprise entre 0 et 180 :

- T_{27} : Calculer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle α aigu/obtus.
- T_{28} : Déterminer les mesures en degrés d'un angle α où $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ vérifiant $\sin\alpha = a$ (où le nombre a, étant compris entre 0 et 1, désigne une des valeurs remarquables du sinus d'un angle).

- <u>Techniques et Technologies associées</u>

Éléments techniques pour T_1 :

T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

<u>Premier cas</u> : *Déterminer le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.*

Il y a cinq cas possibles :

<u>Cas 1</u> : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,19}$: on distingue deux cas :
  1. $\tau_{1,19,1}$: *dans le cas où cette mesure est inférieure ou égale à* 45°, utiliser la table de trigonométrie pour donner la valeur approchée du cosinus de l'angle aigu.
     ($\theta_{table-Trigo}$)
  2. $\tau_{1,19,2}$: *dans le cas où cette mesure est supérieure à* 45°, utiliser la propriété des rapports trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu dans un triangle rectangle et finir par utiliser la table de trigonométrie.
     ($\theta_{AngCompTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$)
- $\tau_{1,20}$: (pas donné par le manuel) commencer par construire d'abord un triangle rectangle dont un des deux angles aigus est l'angle ayant la mesure α degrés à l'aide d'un rapporteur. Mesurer à l'aide de la droite graduée les longueurs des deux côtés de l'angle aigu de mesure α, puis utiliser $\tau_{1,2}$ pour finir.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$)

Remarquons que :

- on n'incite pas à utiliser la technique $\tau_{1,1}$ (voir p. 82) dans ce manuel cambodgien. Et, les techniques $\tau_{1,1}$ et $\tau_{1,19}$ sont correspondantes à notre sens car il s'agit de techniques presque identiques qui se différencient juste à la dernière étape du procédé par l'outil instrumental utilisé : *la calculatrice* pour $\tau_{1,1}$ et *la table de trigonométrie* pour $\tau_{1,19}$.
- $\tau_{1,20}$ est une technique analogue à la technique $\tau_{1,25}$ donnée par le manuel cambodgien. Cette technique $\tau_{1,20}$ est aussi rencontrée dans des manuels français de 4e pour accomplir des tâches dans une activité d'approche durant le moment de la première rencontre, par exemple, à découvrir la notion de cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

Cas 2 : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer le cosinus, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle*.

- $\tau_{1,2}$ (voir T_1 en 3e, p. 82).
  ($\theta_{\cos AngTrR}$)
- $\tau_{1,3}$ (voir T_1 en 3e, p. 82).
  ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$)
- $\tau_{1,4}$ ($\tau_{1,4,1}$; $\tau_{1,4,2}$), (voir T_1 en 3e, p. 82).
  ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$) ; ($\theta_{\cos AngTrR}$; θ_{RFTrR})

Remarquons que la valeur du cosinus de l'angle qui est donnée est plutôt la valeur exacte sous forme d'un quotient simplifié et sans radical au dénominateur. Il semble qu'on n'incite pas à utiliser la calculatrice dans le manuel cambodgien.

Cas 3 : *connaissant le sinus de l'angle aigu, on veut calculer son cosinus*.

- $\tau_{1,5}$ (voir T_1 en 3e, p. 82).
  (θ_{RFTrR} ; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
  Remarquons que l'on n'incite pas à utiliser $\tau_{1,6}$ (voir p. 82) dans le manuel cambodgien.

Cas 4 : *connaissant le sinus et la tangente de l'angle aigu*.

- $\tau_{1,7}$ (voir T_1 en 3e, p. 82)
  $(\theta_{Pr.\text{tan}TrR})$

Cas 5 : *connaissant la tangente de l'angle aigu*.

- $\tau_{1,21}$: Utiliser la relation entre le cosinus et la tangente d'un angle aigu, reporter la valeur de la tangente de l'angle aigu dans la formule. En déduire le carré du cosinus de l'angle aigu, puis le cosinus de l'angle aigu à l'aide de la propriété de résolution de l'équation $X^2 = a$ où a est un nombre strictement positif, et X, un nombre strictement positif.
  $(\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR})$

Deuxième cas : *Déterminer le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle*.
Il y a quatre cas possibles qui sont les analogues des quatre cas du premier cas :
Cas 1 : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu*.

- $\tau_{1,22}$: On distingue deux cas :
  1. $\tau_{1,22,1}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,19,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer cosinus par sinus.
     $(\theta_{table-Trigo})$
  2. $\tau_{1,22,2}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,19,2}$.
     $(\theta_{AngCompTrR}$; $\theta_{table-Trigo})$
- $\tau_{1,23}$: (pas donné par le manuel) Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,20}$ dans laquelle il suffit de remplacer : « les longueurs des deux côtés de l'angle aigu » par « la longueur de l'hypoténuse et celle du côté opposé à l'angle aigu », puis $\tau_{1,2}$ par $\tau_{1,9}$.
  $(\theta_{\text{sin}AngTrR})$
  Remarquons que :
  - la technique $\tau_{1,8}$ (voir p. 83) n'est pas sollicitée par le manuel cambodgien. Les techniques $\tau_{1,8}$ et $\tau_{1,22}$ sont correspondantes.
  - $\tau_{1,23}$ est une technique analogue à la technique $\tau_{1,25}$ donnée par le manuel cambodgien.

Cas 2 : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer le sinus, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle*.

- $\tau_{1,9}$ (voir T_1 en 3e, p. 83).
  $(\theta_{\text{sin}AngTrR})$
- $\tau_{1,10}$ (voir T_1 en 3e, p. 83).
  $(\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\text{sin}AngTrR})$
- $\tau_{1,11}$ ($\tau_{1,11,1}$; $\tau_{1,11,2}$), (voir T_1 en 3e, p. 83).
  $(\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\text{sin}AngTrR})$; $(\theta_{\text{cos}AngTrR}$; $\theta_{RFTrR})$

Cas 3 : *connaissant le cosinus de l'angle aigu, on veut calculer son sinus*.

- $\tau_{1,12}$ (voir T_1 en 3e, p. 83).
  $(\theta_{RFTrR}$; $\theta_{enc\text{sin}AngTrR})$

D'ailleurs, $\tau_{1,13}$ (voir p. 83) n'est pas sollicité par le manuel cambodgien.

Cas 4 : *connaissant le cosinus et la tangente de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,14}$ (voir T_1 en 3e, p. 83).
  ($\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Troisième cas : *Déterminer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.*
Il y a quatre cas possibles :

Cas 1 : *connaissant la mesure en degrés de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,24}$: On distingue deux cas :
  1. $\tau_{1,24,1}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,19,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer « le cosinus » par « la tangente ».
     ($\theta_{table-Trigo}$)
  2. $\tau_{1,24,2}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,19,2}$.
     ($\theta_{AngCompTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$)
- $\tau_{1,25}$: (donné par le manuel) Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,20}$ dans laquelle il suffit de remplacer : « les longueurs des deux côtés de l'angle aigu de mesure α » par « les longueurs des deux côtés de l'angle droit », puis $\tau_{1,2}$ par $\tau_{1,17}$.
  ($\theta_{\tan AngTrR}$)
  Remarquons que la technique $\tau_{1,15}$ (voir p. 83) n'est pas sollicitée par le manuel cambodgien.

Cas 2 : *connaissant le sinus et le cosinus de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,16}$ (voir T_1, p. 83).
  ($\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Cas 3 : on ne connaît pas la mesure de l'angle aigu dont on veut calculer la tangente, mais on utilise *l'information concernant les côtés du triangle rectangle.*

- $\tau_{1,17}$ (voir T_1, p. 83).
  ($\theta_{\tan AngTrR}$)
- $\tau_{1,18}$ ($\tau_{1,18,1}$; $\tau_{1,18,2}$; $\tau_{1,18,3}$), (voir T_1, p. 83).
  ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\tan AngTrR}$) ; ($\theta_{\cos AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$) ; ($\theta_{\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$)

Cas 4 : *connaissant le cosinus de l'angle aigu.*

- $\tau_{1,26}$: Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{1,21}$ dans laquelle il suffit d'échanger « le cosinus » et « la tangente ».
  ($\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$)

Éléments technologiques :

Premier cas : $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$

Deuxième cas : $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$

Troisième cas : $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\tan Cal}$; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$

Éléments techniques pour T_2 :
T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
Il y a deux cas possibles :
Premier cas : connaissant *le cosinus, le sinus ou la tangente de l'angle aigu* :

- $\tau'_{2,1}$: *Connaissant le cosinus de l'angle aigu*, il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,1}$. Ici, la technique $\tau'_{2,1}$ consiste en la lecture de la table de trigonométrie pour donner la valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle aigu.
  ($\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
- $\tau'_{2,2}$: *Connaissant le sinus de l'angle aigu*, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau'_{2,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer : $\tau_{2,1}$ par $\tau_{2,2}$, puis $\tau'_{2,1}$ par $\tau'_{2,2}$.
  ($\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
- $\tau'_{2,3}$: *Connaissant la tangente de l'angle aigu*, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau'_{2,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer : $\tau_{2,1}$ par $\tau_{2,3}$, puis $\tau'_{2,1}$ par $\tau'_{2,3}$.
  ($\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))

Deuxième cas : connaissant *les longueurs de deux des côtés du triangle rectangle* :

- $\tau'_{2,4}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,4}$ dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{2,1}$ par $\tau'_{2,1}$.
  ($\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$) ; $\theta_{enc\cos AngTrR}$)
- $\tau'_{2,5}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,5}$ dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{2,2}$ par $\tau'_{2,2}$.
  ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$) ; $\theta_{enc\sin AngTrR}$)
- $\tau'_{2,6}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,6}$.
  - $\tau'_{2,6,1}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,6,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{2,3}$ par $\tau'_{2,3}$.
    ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
  - $\tau'_{2,6,2}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{2,6,2}$ dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{2,4}$ par $\tau'_{2,4}$, puis $\tau_{2,5}$ par $\tau'_{2,5}$.
    ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$) ; $\theta_{enc\cos AngTrR}$) ou ($\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$) ; $\theta_{enc\sin AngTrR}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$)

Éléments techniques pour T_3 :

T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

Il y a trois cas possibles :

Premier cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de l'hypoténuse.*

- $\tau'_{3,1}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu,
  - $\tau'_{3,1,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,1,1}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,1,2}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,1,2}$. $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR})$; $\theta_{Th.Pyth})$
  - $\tau'_{3,1,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,1,3}$. $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
- $\tau'_{3,2}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté opposé* à l'angle aigu,
  - $\tau'_{3,2,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,2,1}$. $(\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,2,2}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,2,2}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR})$; $\theta_{Th.Pyth})$
  - $\tau'_{3,2,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,2,3}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$

Deuxième cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté adjacent.*

- $\tau'_{3,3}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur de l'*hypoténuse*,
  - $\tau'_{3,3,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,3,1}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,3,2}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,3,2}$. $(\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,3,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,3,3}$. $(\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
- $\tau'_{3,4}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté opposé* à l'angle aigu,
  - $\tau'_{3,4,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,4,1}$. $(\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,4,2}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,4,2}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$
  - $\tau'_{3,4,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,4,3}$. $(\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}))$

Troisième cas : *Connaissant la mesure d'un angle aigu et la longueur de son côté opposé.*

- $\tau'_{3,5}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur de l'*hypoténuse*,

- $\tau'_{3,5,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,5,1}$. ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
- $\tau'_{3,5,2}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,5,2}$. ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
- $\tau'_{3,5,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,5,3}$. ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))

- $\tau'_{3,6}$: Dans le cas où on souhaite calculer la longueur du *côté adjacent* à l'angle aigu,
  - $\tau'_{3,6,1}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,6,1}$. ($\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
  - $\tau'_{3,6,2}$: il s'agit de la technique correspondante à la technique $\tau_{3,6,2}$. ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))
  - $\tau'_{3,6,3}$: il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{3,6,3}$. ($\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$))

Éléments technologiques :
$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$; $\theta_{table-Trigo}$; ($\theta_{AngCompTrR}$)

Éléments techniques pour T_{27} :
T_{27} : Calculer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle α aigu/obtus.
Remarquons d'abord que les techniques que nous exposerons sont adaptées aux concepts donnés dans le cours du manuel et que ces techniques ne sont valables que dans la restriction du cours et celle des **mesures en degrés** *de l'angle compris entre* 0 *et* 180 *(correspondant à la restriction du point M du cercle trigonométrique dans le demi-plan supérieur, associé à l'angle).*
Nous distinguons les deux cas ci-après :
Premier cas : *Connaissant la mesure de l'angle α*, il y a deux cas à distinguer :
Cas 1 : Dans le cas où l'angle α est un des angles remarquables.

- $\tau_{27,1}$: Dans le cas où $\alpha \in \{0^\circ ; 30^\circ ; 45^\circ ; 60^\circ ; 90^\circ ; 120^\circ ; 135^\circ ; 150^\circ ; 180^\circ\}$, utiliser le tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables pour donner le cosinus ou le sinus ou la tangente de l'angle α. ($\theta_{TvrCST-Cm10e}$, voir *Tableau 16*)

Cas 2 : Dans le cas où l'angle α n'est pas un des angles remarquables.

- $\tau_{27,2}$: Dans le cas où l'angle α a une mesure inférieure à 45°, utiliser la table de trigonométrie pour donner la valeur approchée du cosinus de l'angle. (Il s'agit d'une union des techniques $\tau_{1,19,1}$, $\tau_{1,22,1}$, $\tau_{1,24,1}$ associées à T_1, avec une adaptation d'extension de la trigonométrie dans un cercle.)
  ($\theta_{table-Trigo}$)
- $\tau_{27,3}$: Dans le cas où l'angle α a une mesure supérieure à 45°, distinguer deux cas dans la suite de cette technique :
  1. $\tau_{27,3,1}$: si l'angle α est un angle aigu, exploiter la propriété des rapports trigonométriques de l'angle $(90^\circ - \alpha)$, puis utiliser $\tau_{27,2}$ pour finir. (Il

s'agit d'une union des techniques $\tau_{1,19,2}$, $\tau_{1,22,2}$, $\tau_{1,24,2}$ associées à T_1, avec une adaptation d'extension de la trigonométrie dans un cercle)
($\theta_{AngCompCST-Cercle}$; $\theta_{table-Trigo}$)

2. $\tau_{27,3,2}$: si l'angle α est un angle obtus, exploiter la propriété des rapports trigonométriques de l'angle $(180^{\circ} - \alpha)$, puis utiliser soit $\tau_{27,2}$ soit $\tau_{27,3,1}$ pour finir.
($\theta_{AngSuppCST-Cercle}$; ($\theta_{AngCompCST-Cercle}$) ; $\theta_{table-Trigo}$)

Deuxième cas : *On ne connaît pas la mesure de l'angle α mais on connaît soit le cosinus de l'angle α soit le sinus de l'angle α soit la tangente de l'angle α, et on sait que la mesure en degrés de l'angle α vérifie* : $0^{\circ} \leq \alpha \leq 90^{\circ}$ ou $90^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ ou $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$. Nous distinguons les trois cas suivants :

Cas 1 : *connaissant le cosinus de l'angle α* : $\cos\alpha = a$ avec $-1 \leq a \leq 1$, on va calculer le sinus et la tangente de l'angle.

- $\tau_{27,4}$: Cas $a \in \{-1\,;0\,;1\}$, en déduire la position du point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α, en vérifiant avec la condition initiale sur la mesure de l'angle α. Puis, lire graphiquement l'ordonnée du point M ; et cette ordonnée est la valeur du sinus de l'angle. Exploiter la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente pour trouver la tangente de l'angle.
($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)
- $\tau_{27,5}$: Cas $0 < a < 1$, en déduire immédiatement que $\cos\alpha > 0$. Avec la condition initiale sur la mesure de l'angle α et à l'aide de la définition du cosinus de l'angle vue dans le cours, en déduire que le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est dans le premier quadrant du plan. En déduire ensuite que le signe du sinus de l'angle est positif. Exploiter la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus pour trouver la valeur positive du sinus de l'angle, puis la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente pour trouver la tangente de l'angle.
($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)
- $\tau_{27,6}$: Cas $-1 < a < 0$, en déduire immédiatement que $\cos\alpha < 0$. Avec la condition initiale sur la mesure de l'angle α et à l'aide de la définition du cosinus de l'angle vue dans le cours, en déduire que le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est dans le deuxième quadrant du plan. En déduire ensuite que le signe du sinus de l'angle est positif. Exploiter la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus pour trouver la valeur positive du sinus de l'angle, puis la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente pour trouver la tangente de l'angle.
($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-camb10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)

Cas 2 : *connaissant le sinus de l'angle α* : $\sin\alpha = a$ avec $0 \leq a \leq 1$, on va calculer le cosinus et la tangente de l'angle.

- $\tau_{27,7}$: Cas $a \in \{0\,;1\}$, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{27,4}$ dans laquelle il suffit de remplacer : ordonnée par abscisse, sinus par cosinus. ($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)
- $\tau_{27,8}$: Cas $0 < a < 1$, en déduire immédiatement que $\sin\alpha > 0$. Avec la condition initiale sur la mesure de l'angle α et à l'aide de la définition du sinus de l'angle vue dans le cours, en déduire que :
  1. $\tau_{27,8,1}$: pour $0^{\circ} \leq \alpha \leq 90^{\circ}$, le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est dans le premier quadrant du plan. En déduire ensuite que le signe du cosinus de l'angle est positif. Exploiter la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus pour trouver la valeur positive du cosinus de l'angle, puis la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente pour trouver la tangente de l'angle.
  2. $\tau_{27,8,2}$: pour $90^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est dans le deuxième quadrant du plan. En déduire ensuite que le signe du cosinus de l'angle est négatif. Exploiter la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus pour trouver la valeur négative du cosinus de l'angle, puis la relation entre le sinus, le cosinus et la tangente pour trouver la tangente de l'angle
  3. $\tau_{27,8,3}$: pour $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est dans l'un des deux premiers quadrants du plan. Pour cela, il y a deux valeurs possibles du cosinus vérifiant la condition initiale sur la mesure de l'angle α. Dans la suite de cette technique, distinguer deux cas en utilisant dans l'ordre les techniques $\tau_{27,8,1}$ et $\tau_{27,8,2}$.

  ($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-camb10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)

<u>Cas 3</u> : *connaissant la tangente de l'angle* α : $\tan\alpha = a$, on va calculer le cosinus et le sinus de l'angle.

- $\tau_{27,9}$: Cas $a = 0$, le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle de mesure α degrés est à l'origine du cercle trigonométrique. Puis, lire graphiquement l'abscisse et l'ordonnée du point M. En déduire alors le cosinus et le sinus de l'angle à l'aide des définitions du cosinus et du sinus de l'angle. ($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-cam10e}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)
- $\tau_{27,10}$: Cas $a < 0$, en déduire immédiatement que $\tan\alpha < 0$. En déduire ensuite que le cosinus et le sinus de l'angle ont les signes opposés, à l'aide de la relation entre le cosinus, le sinus et la tangente de l'angle. Avec la condition initiale sur la mesure de l'angle α, le point M du cercle trigonométrique associé à l'angle α est obligatoirement dans le deuxième quadrant du plan. Dans ce cas, on a alors $\cos\alpha < 0$ et $\sin\alpha > 0$. Exploiter d'abord la relation entre le cosinus et la tangente de l'angle pour trouver la valeur négative du cosinus de l'angle. Utiliser la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus pour trouver la valeur positive du sinus de l'angle.

($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-cam10e}$; $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR-adap}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)

- $\tau_{27,11}$: Cas $a > 0$, il s'agit de la technique similaire à la technique $\tau_{27,10}$ dans laquelle il suffit de remplacer : « $\tan\alpha < 0$ » par « $\tan\alpha > 0$ », « les signes opposés » par « le même signe », « le deuxième quadrant » par « le premier quadrant », « $\cos\alpha < 0$ » par « $\cos\alpha > 0$ », « la valeur négative du cosinus » par « la valeur positive du cosinus ».
  ($\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$)

<u>Remarque</u> : Selon deux exemples donnés dans le manuel à la page 15 (voir l'annexe n° 2, p. 390), la technologie reliée aux quadrants du plan est implicite.

Éléments technologiques :
$\theta_{\text{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-Cm10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$; $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR-adap}$

Éléments techniques pour T_{28} :
T_{28} : Déterminer les mesures en degrés d'un angle α où $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ vérifiant $\sin\alpha = a$ (où le nombre a, étant compris entre 0 et 1, désigne une des valeurs remarquables du sinus d'un angle).

- $\tau_{28,1}$: *En liaison avec la lecture sur le cercle trigonométrique*, commencer par tracer le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé du plan, puis la parallèle à l'axe des abscisses passant par le point de l'axe des ordonnées d'ordonnée a. Cette droite parallèle coupe le cercle trigonométrique en deux points M et M' qui sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Utiliser la relation fondamentale entre le cosinus et le sinus d'un angle, reporter la valeur de $\sin\alpha$ dans la formule ; en déduire le carré de $\cos\alpha$ puis $\cos\alpha$ à l'aide de la propriété de résolution de l'équation $X^2 = a$ où a est un nombre strictement positif, et X, un nombre compris entre -1 et 1. Préciser les coordonnées des points M et M', en déduire alors les valeurs des mesures en degrés de l'angle α (à l'aide du tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables dont les mesures sont comprises entre 0° et 180°).

<u>Remarque</u> : Dans la technique $\tau_{28,1}$, l'étape initiale avec le cercle trigonométrique sert simplement pour la conviction de visualisation, puis l'étape suivante sert à trouver les abscisses respectives des points M et M' avec les calculs algébriques, et, la dernière étape sert à préciser les mesures convenables des angles solutions. Concernant cette dernière étape, l'idée du manuel est de préciser les coordonnées des points M et M' puis d'en déduire les valeurs des mesures des angles solutions. Cette étape est, à notre avis, issue plutôt d'une justification mathématique utilisant *la définition de l'argument d'un nombre complexe*. Remarquons qu'au Cambodge, le thème « Nombres complexes » est au programme de la 12$^{\text{e}}$.

Éléments technologiques :

$\theta_{RFAngTrR-adap}$; $\theta_{encCSAng-cam10e}$; $\theta_{TvrCST-cam10e}$

3.2.1.3. Points de réflexion et commentaires

- Le manuel propose des exemples et des exercices d'application (correspondant à la partie « savoir-faire » dans des manuels français) après avoir défini les nouveaux concepts visés.
- Le manuel utilise plutôt les termes « rapports trigonométriques » qui désignent la tangente, le sinus et le cosinus d'un angle.
- Le manuel ne propose pas d'utiliser la ***calculatrice*** dans la partie « cours » et « savoir-faire » pour donner la mesure d'un angle connaissant soit sa tangente soit son sinus soit son cosinus. Dans un tel cas, il propose soit de mesurer l'angle à l'aide d'un rapporteur après avoir construit/reconstruit correctement la/les figure(s) données à l'aide de la droite graduée, soit de donner la mesure de l'angle à l'aide de la lecture d'une table de trigonométrie donnant les rapports trigonométriques des angles en degrés de 0° à 45°.

  Concernant la table de trigonométrie donnée, le manuel propose de faire penser à utiliser les propriétés des rapports trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu dans un triangle rectangle pour trouver les rapports trigonométriques d'un angle aigu dont la mesure est supérieure à 45°. Remarquons qu'il n'y a pas de techniques d'interpolation pour déterminer des valeurs approchées des angles entre 0° et 45° n'apparaissant pas dans la table de trigonométrie.

  Voici un extrait de la table de trigonométrie donnée vers la fin de ce manuel tome 2 (pp. 207-208) :

តារាងនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ (Table de trigonométrie)

ដឺក្រេ	រ៉ាដ្យង់	sin	cos	tan	cot
0°	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	—
1°	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.29
2°	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.64
3°	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.08
4°	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.30
5°	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.43
6°	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.514
7°	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.144
8°	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.115
9°	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.314
10°	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.671
11°	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.145
12°	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.705
13°	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.331
14°	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.011
15°	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.732
16°	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.487
17°	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.271
18°	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.078
19°	0.3316	0.3226	0.9455	0.3443	2.904
20°	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.747
21°	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.605
22°	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.475
		cos	sin	cot	tan

207

ដឺក្រេ	រ៉ាដ្យង់	sin	cos	tan	cot
23°	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.356
24°	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.246
25°	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.145
26°	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.050
27°	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.963
28°	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.881
29°	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.804
30°	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.732
31°	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.664
32°	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.600
33°	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.540
34°	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.483
35°	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.428
36°	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.376
37°	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.327
38°	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.280
39°	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.235
40°	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.192
41°	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.150
42°	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.111
43°	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.072
44°	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.036
45°	0.7854	0.7071	0.7071	1.000	1.000
		cos	sin	cot	tan

208

<u>*Tableau 19*</u> : Table de trigonométrie

  Nous remarquons que dans cette table de trigonométrie, figure la colonne des valeurs des cotangentes bien qu'il n'existe pas encore la notion de cotangente en 10^e^.

- Il semble que le manuel indique sur les figures données un codage mathématique pour désigner plutôt que l'objet « angle » visé en 10^e^ est déterminé, dans le sens antihoraire, par l'axe des abscisses de la partie des x positifs et par le rayon OM, (voir *Figure 57*).

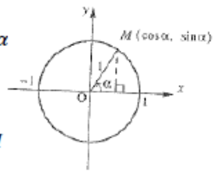
B. Cercle trigonométrique

Un cercle ayant son centre à l'origine d'un repère de coordonnées et ayant pour rayon 1 unité est appelé cercle unité ou cercle trigonométrique[9].

M ayant pour coordonnées (x, y) se situe sur le cercle unité

Le rayon OM et l'axe des abscisses de la partie des x positifs déterminent un angle[7] α dans dont le sens est opposé à celui des aiguilles de l'horloge.

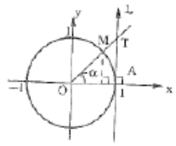
On a : $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.



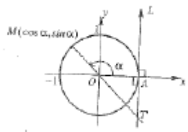
Donc sur le cercle trigonométrique, le point M a pour coordonnées[10] $(\cos\alpha , \sin\alpha)$.

- Valeur de la tangente d'un angle[11] α dans le cercle trigonométrique :

Tracer un droite AL tangente au cercle en $A(1,0)$.



- Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$: la droite OM coupe la droite AL en T dans la partie positive, on a : $\tan\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$.
- Si $\alpha = 90^\circ$: la droite OM est parallèle à la droite AL, donc il n'y a aucune valeur de tangente de l'angle 90°.
- Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$: la droite OM coupe la droite AL en T' dans la partie négative, on a : $\tan\alpha = AT'$[12].



Remarque : - l'axe des abscisses est appelé axe des cosinus ;
- l'axe des ordonnées est appelé axe des sinus ;
- l'axe (AL) est appelé axe des tangentes.

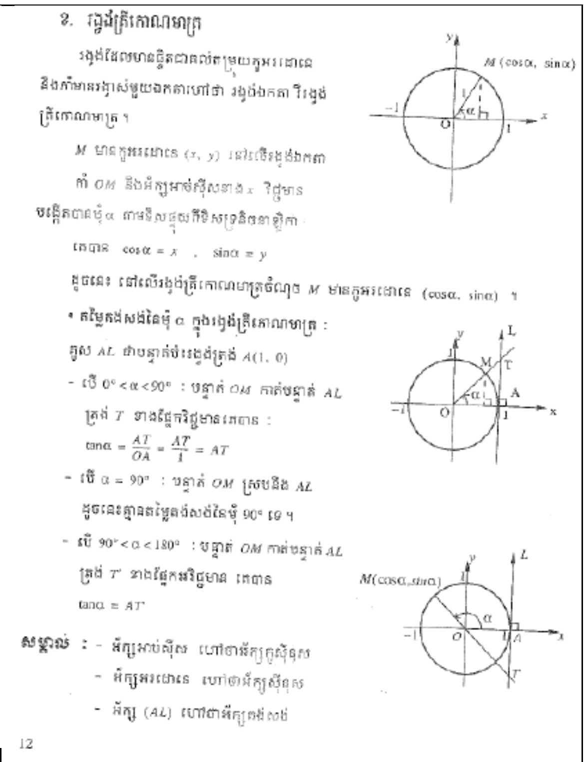


Figure 57 : Objet « angle » déterminé en 10^e^ (voir l'annexe n° 2, p. 388)

- Le manuel donne une méthode pour trouver, à l'aide des coordonnées d'un point situé sur un cercle quelconque, dont le centre est l'origine d'un repère orthonormé, les rapports trigonométriques d'un angle obtus. Il s'agit plutôt d'une méthode expérimentale, c'est-à-dire que, dans la démonstration, il y a un mélange de techniques théoriques mathématiques et d'observation des positions particulières sur la figure tracée/donnée. Par exemple : Exemple 1 (chapitre 6, leçon 1 - page 11) : si $\alpha = 120^\circ$ et si le rayon $r = 2$ unités de longueur, montrer que M a pour coordonnées $(-1, \sqrt{3})$ puis calculer les rapports trigonométriques de l'angle 120°.

Exemple 1 : Si $\alpha = 120^\circ$, rayon $r = 2$ unités. Montrer que M a pour coordonnées $(-1 , \sqrt{3})$ puis calculer les rapports trigonométriques de l'angle 120°.

Réponse : OMP étant un triangle rectangle en P a $\widehat{MOP} = 60^\circ$.

On obtient $OP = OM.\cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$MP = OM.\sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Comme P est situé à gauche de l'origine O alors on a : $M(-1 , \sqrt{3})$.

$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$.

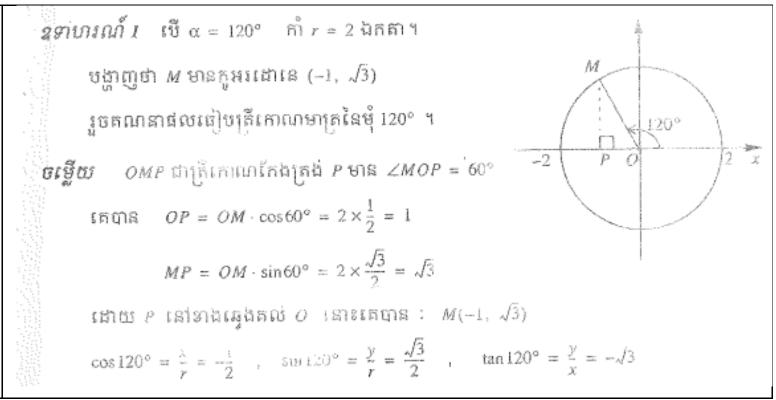


Figure 58 : Rapports trigonométriques d'un angle obtus, reliés aux coordonnées d'un point de cercle associé à l'angle (voir l'annexe n° 2, p. 388)

- Le manuel propose d’étudier seulement les rapports trigonométriques des angles en degrés de 0° à 180°.
- Le manuel donne la définition du cercle trigonométrique accompagnée d’une figure située à droite : « un cercle ayant son centre à l’origine d’un repère de coordonnées et ayant pour rayon 1 unité est appelé cercle unité ou cercle trigonométrique ». À cette définition, il manque l’orientation positive du plan.
- Dans la section de l’extension des rapports trigonométriques dans le cercle trigonométrique, le manuel ne définit/généralise pas les trois relations entre les rapports trigonométriques (entre le sinus, le cosinus et/ou la tangente d’un angle), mais il propose un exercice d’application dont le but est de vérifier dans le cercle trigonométrique que ces trois relations sont toujours valables pour un angle α dont les mesures sont comprises entre 0° et 180°.

4.2.2. Leçon 2 : Application des rapports trigonométriques

Dans cette leçon, il s’agit d’une extension de la trigonométrie dans un triangle quelconque. L’objet d’étude est de résoudre un triangle (calculs de longueurs et d’angles dans un triangle quelconque).

4.2.2.1. <u>Liste des objets de savoirs visés</u>

- Théorème des sinus
- Théorème des cosinus
- Aire d’un triangle
  - Calcul de l’aire d’un triangle connaissant un angle et les deux côtés de l’angle
  - Calcul de l’aire d’un triangle connaissant les trois côtés (formule de Héron)

(Le théorème des sinus et les deux formules de l’aire du triangle ne sont pas attendus dans les programmes français actuels.)

Nous nous intéressons au traitement des trois objets de savoir visés : Théorème des sinus, Théorème des cosinus et Formule de Héron.

1. <u>Théorème des sinus</u>

On commence par l’énoncé :

Soit un cercle de centre O et de rayon R circonscrit à un triangle ABC. On note A, B et C étant les mesures respectives des angles A, B et C. On note a, b et c étant les longueurs des côtés opposés respectifs aux angles des sommets A, B et C. Si on connaît la mesure de l’angle A et le rayon R alors on va montrer que $\frac{a}{sinA} = 2R$.	**2. 1 ទ្រឹស្តីបទស៊ីនុស** **Théorème des sinus** រង្វង់មួយមានផ្ចិត O កាំ R ចារឹកក្រៅត្រីកោណ ABC ។ តាង A, B និង C ជារង្វាស់មុំ A មុំ B និងមុំ C រៀងគ្នា។ តាង a, b និង c ជារង្វាស់ជ្រុងដែលឈមរៀងគ្នានឹងមុំកំពូល A, B និង C ។ បើស្គាល់រង្វាស់មុំ A និងកាំ R នោះគេនឹងបង្ហាញឲ្យឃើញថា : $\frac{a}{\sin A} = 2R$

<u>Figure 59</u> : Théorème des sinus – extrait du manuel tome 2 de 10^{e}, p. 18

Puis, on démontre géométriquement, à l’aide de la définition du sinus dans un triangle rectangle, de la propriété des angles inscrits dans un cercle qui interceptent un même arc et de la propriété des rapports trigonométriques de l'angle supplémentaire d'un angle aigu, que cette égalité est valide dans les trois cas suivants :

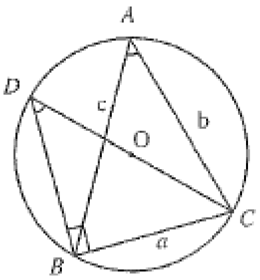
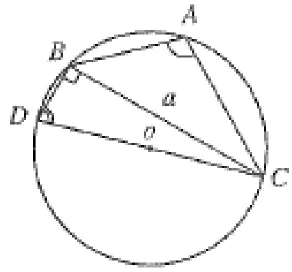
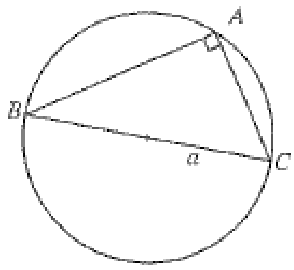
Cas où A est un angle aigu	Cas où A est un angle obtus	Cas où A est un angle droit
		

Figure 60 : Trois cas d'angles à étudier – extrait du manuel tome 2 de 10e, pp. 18-19

De la même manière que précédemment pour l'angle B et pour l'angle C. On généralise alors :

Théorème des sinus : Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle de rayon R, on a : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Remarquons que dans les trois manuels de mathématiques français de 1re Scientifique étudiés, les auteurs font découvrir la **formule des sinus** : $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \left(= \frac{2S}{abc}\right)$ où S est l'aire du triangle, dans la partie « Exercices », avec une autre technique en lien avec la ***formule de l'aire d'un triangle*** connaissant deux des trois côtés et l'angle formé par ces deux côtés. Dans le manuel cambodgien, on retrouve, dans un deuxième temps après avoir introduit la ***formule de l'aire d'un triangle*** (même formule indiquée précédemment), cette formule précédente de « manière inverse », c'est la formule : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S}$ (mais on ne précise pas qu'il s'agit aussi d'une formule des sinus).

2. <u>Théorème des cosinus</u>

On commence par l'énoncé :

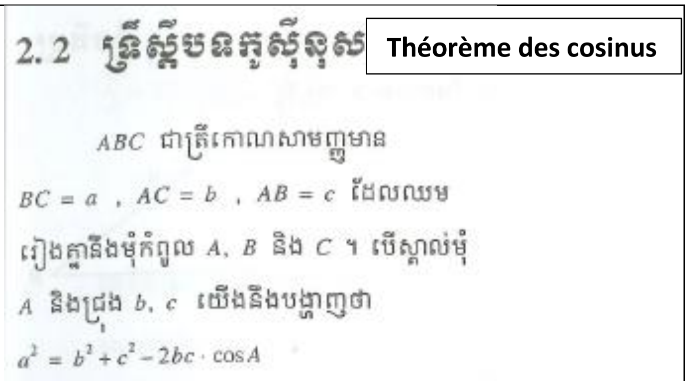
Soit ABC un triangle quelconque tel que $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ qui sont respectivement opposés aux angles au sommet A, B et C. Si on connaît l'angle A et les côtés b, c on va démontrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.	

Figure 61 : Théorème des cosinus – extrait du manuel tome 2 de 10e, p. 21

Puis, on la démontre géométriquement, à l'aide des définitions du sinus et du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle, de la propriété des rapports trigonométriques de l'angle supplémentaire d'un angle aigu et du théorème de Pythagore. Cette formule est valide dans les trois cas suivants :

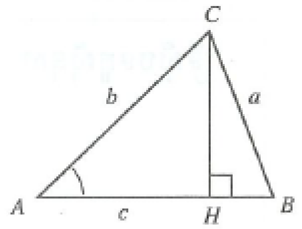
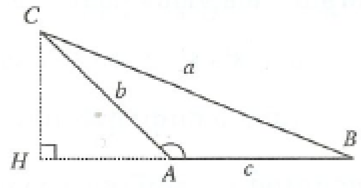
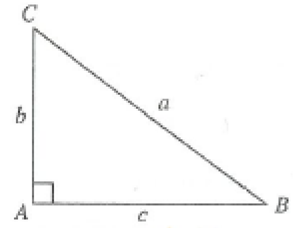
<table>
<tr><td>Cas où A, B, C sont les angles aigus</td><td>Cas où A est un angle obtus</td><td>Cas où A est un angle droit</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Figure 62 : Trois cas d'angles à étudier – extrait du manuel tome 2 de 10e, pp. 21-22

De la même manière que précédemment, on obtient : $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$ et $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$. On généralise alors :

Théorème des cosinus : Soit ABC un triangle, on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Remarquons que dans les trois manuels de mathématiques français de 1re Scientifique étudiés, les auteurs font découvrir la formule des cosinus (ou le théorème de Pythagore généralisé) avec la démonstration à l'aide du produit scalaire de deux vecteurs non nuls.

Nous voyons qu'il s'agit de deux techniques différentes pour introduire et justifier la formule des cosinus dans des manuels français et cambodgien.

3. Formule de Héron

On commence par une introduction comme suit : Dans un triangle ABC, si on connaît $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ alors l'aire S du triangle peut être calculée en fonction des trois côtés.

Sans tarder, on donne tout de suite une démonstration algébrique, à l'aide de la formule de l'aire d'un triangle en fonction de deux côtés et de l'angle formé par ces deux côtés (vue précédemment dans la même leçon), de la relation fondamentale entre sinus et cosinus, et, de la formule du demi-périmètre d'un triangle, amenant à une formule nommée « formule de Héron » :

Formule de Héron : Si a, b, c sont les côtés d'un triangle et p est son demi-périmètre, alors son aire est $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Remarquons que dans deux manuels de mathématiques français de 1re Scientifique, les auteurs proposent de découvrir la « formule de Héron » dans la partie « Exercices » (manuel Math'x 2011 et manuel Hyberbole 2011). Concernant la technique menant à cette formule dans des manuels français et cambodgien, les technologies pour justifier la technique sont les mêmes sauf le processus d'étude : du côté français, on propose des indications/questions successives amenant à la démonstration de la formule visée, alors que du côté cambodgien, on décrit la démonstration sans prévoir l'objet d'étude visé.

4.2.2.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
10e (Leçon 2)	$\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{table-Trigo}$; θ_{AngTr}	$\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{For.AireTr}$; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.\sin-bis}$; $\theta_{For.Héron}$

Tableau 20 : θ_i évoqué(s) en 10e (Cm) – Leçon 2 du chapitre 6 (tome 2)

$\theta_{For.AireTr}$: Propriété de l'aire d'un triangle en fonction de deux côtés et de l'angle formé par ces deux côtés.

$\theta_{For.sin}$: Propriété – On considère un triangle ABC tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, et on note S son aire. On a alors : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = \frac{abc}{2S}$.

$\theta_{For.\sin-bis}$: Propriété – On considère un triangle ABC, inscrit dans un cercle de rayon R, tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On a alors : $\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.

$\theta_{For.Héron}$: Propriété – On considère un triangle ABC tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, et on note S son aire et p son demi-périmètre. On a alors : $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

- Types de tâches

Nous retrouvons trois types de tâche : T_4, T_5 et T_6 ($OML_{Triangle}$).

- T_4 : Calculer le cosinus (ou le sinus) d'un angle dans un triangle.
- T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.
- T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

- Techniques et Technologies associées

Nous voulons préciser que dans la suite de notre présentation sur les techniques exposées ci-après, nous sortons un peu de notre méthodologie indiquée dans le chapitre 1. En effet, les exemples donnés dans le manuel sont plutôt une application immédiate des formules institutionnalisées et nous ne voyons pas de manière enthousiaste l'utilité de la formule des cosinus, de celle des sinus et de celle de Héron dans le but de résoudre un triangle. Nous souhaitons alors approfondir cette étude pour expliciter l'utilité de ces formules. En ce qui concerne le type de tâches T_4, nous mettons ou le sinus entre parenthèses parce que le manuel ne sollicite aucune technique pour trouver le sinus d'un angle saillant dans un triangle dans la partie « Cours ».

Éléments techniques pour T_4 :

T_4 : Calculer le cosinus (ou le sinus) d'un angle dans un triangle.

Nous distinguons deux cas ci-après :

Premier cas : *Calculer le cosinus d'un angle dans un triangle.*

- $\tau_{4,1}$ (voir 1re Scientifique, p. 121)
  ($\theta_{Th.PythG}$)

Deuxième cas : *Calculer le sinus d'un angle dans un triangle.*

Cas 1 : *Dans le cas où on connaît les longueurs des trois côtés du triangle.*

- $\tau_{4,2}$: (pas donnée par le manuel) Commencer par utiliser $\tau_{4,1}$ pour trouver le cosinus de l'angle, puis exploiter la relation fondamentale pour trouver le sinus de l'angle.
  ($\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{RFTrR-adap}$)
- $\tau_{4,3}$: (pas donnée par le manuel) Commencer par calculer l'aire du triangle à l'aide de la formule de Héron. Puis, exploiter la formule des sinus en choisissant deux des quatre rapports égaux convenables, en déduire le sinus de l'angle cherché à l'aide du produit en croix.
  ($\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$)

Cas 2 : *Dans le cas où on connaît deux côtés du triangle et l'aire du triangle.*
- $\tau_{4,4}$: (pas donnée par le manuel) Exploiter la formule d'aire d'un triangle en fonction de deux côtés et l'angle formé par ces deux côtés, puis en déduire le sinus de l'angle à l'aide de la propriété sur « Égalités et opérations ».
  ($\theta_{For.AireTr}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.AireTr}$

Éléments techniques pour T_5 :
T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.
Nous distinguons deux cas ci-après :
Premier cas : *Dans le cas où on connaît les longueurs des trois côtés du triangle.*
- $\tau'_{5,1}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{5,1}$ (voir 1re Scientifique, p. 121) dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{2,1}$ par $\tau'_{2,1}$.
  ($\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{table-Trigo}$)
- $\tau_{5,2}$: (pas donnée par le manuel) Commencer par utiliser la technique $\tau_{4,3}$ associée à T_4 pour trouver le sinus de l'angle. Puis, utiliser la technique $\tau'_{2,2}$ associée à T_2 pour finir.
  ($\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{table-Trigo}$)

Deuxième cas : *Dans le cas où on connaît deux côtés du triangle et l'aire du triangle.*
- $\tau_{5,3}$: (pas donnée par le manuel) Il s'agit de la technique similaire à la technique $\tau_{5,2}$ dans laquelle il suffit de remplacer $\tau_{4,3}$ par $\tau_{4,4}$.
  ($\theta_{For.AireTr}$; $\theta_{table-Trigo}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{Th.PythG}$; $\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.AireTr}$; $\theta_{table-Trigo}$

Éléments techniques T_6 :
T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.
- $\tau'_{6,1}$: Il s'agit de la technique correspondant à la technique $\tau_{6,1}$ (voir 1re Scientifique, p. 121).
  ($\theta_{Th.PytG}$; $\theta_{table-Trigo}$)
  Remarquons que les techniques $\tau'_{6,1}$ et $\tau_{6,1}$ diffèrent par l'outil instrumental permettant de donner la valeur approchée du cosinus de l'angle.
- $\tau_{6,2}$: *Dans le cas où on connaît deux angles du triangle et un côté du triangle joignant les sommets de ces deux angles*, on va calculer la longueur d'un des deux côtés manquant du triangle. Commencer par calculer la mesure de l'angle

manquant du triangle à l'aide de propriété de la somme des mesures des angles d'un triangle. Puis, exploiter la formule des sinus en choisissant deux des quatre rapports égaux convenables, en déduire la longueur du côté cherchée à l'aide du produit en croix.
(θ_{AngTr} ; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{table-Trigo}$)

- $\tau_{6,3}$: *Dans le cas où on connaît un angle du triangle et le rayon du cercle circonscrit au triangle*, on va calculer la longueur du côté du triangle étant opposé à l'angle. Exploiter la formule des sinus-bis en choisissant deux des quatre rapports égaux convenables, reporter les valeurs numériques connues dans l'égalité des rapports choisie, en déduire alors la longueur du côté cherchée à l'aide du produit en croix.
($\theta_{For.\sin-bis}$; $\theta_{table-Trigo}$)

Éléments technologiques :
$\theta_{Th.PytG}$; θ_{AngTr} ; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.\sin-bis}$; $\theta_{table-Trigo}$

4.2.2.3. Points de réflexion et commentaires

Nous voyons qu'il s'agit des techniques différentes pour introduire et justifier la formule des sinus et la formule des cosinus dans des manuels français et dans le manuel cambodgien.
Remarquons que le théorème de la médiane n'est pas attendu dans le programme cambodgien.

4.3. Fonctions trigonométriques en 11^e^ (1^re^ Scientifique en France)

Les notions de fonctions trigonométriques sont introduites en 11e, dans le manuel « tome 1 ». Le chapitre 3 du manuel étant intitulé « Fonctions trigonométriques » se décompose en trois leçons :

- Leçon 1 intitulée « Fonctions trigonométriques » ;
- Leçon 2 intitulée « Formules trigonométriques » ;
- Leçon 3 intitulée « Equations et inéquations trigonométriques ».

Dans le tome 2, il y a un chapitre 3 intitulé « Equations et inéquations trigonométriques » contenant une unique leçon avec le même titre. À noter que la leçon 1 du chapitre 3 dans ce tome 2 est le complément des contenus mathématiques de la leçon 3 du chapitre 3 dans le tome 1, c'est-à-dire qu'il s'agit d'équations et inéquations trigonométriques avec un plus grand degré de difficultés.
Nous nous intéressons seulement à la leçon 1 du chapitre 3 située dans le tome 1 (voir le texte traduit de la leçon dans l'annexe n° 2, pp. 394-404). De plus, nous nous appuyons tout particulièrement sur seule l'étude des fonctions sinus et cosinus.

4.3.1. Leçon 1 : Fonctions trigonométriques

Dans cette leçon, les auteurs indiquent trois objets d'étude :

- Convertir « un angle » de degrés en radians et de radians en degrés.
- Utiliser les propriétés des angles associés pour calculer les « fonctions trigonométriques ».
- Construire les graphiques des fonctions trigonométriques.

Les termes « fonctions trigonométriques » désignent les sinus, cosinus, tangente et cotangente d'un angle orienté dont les mesures sont soit en degrés soit en radians. Puis, dans la section 4 de la leçon 1, intitulée « Étude des fonctions trigonométriques », on parle des fonctions trigonométriques des nombres réels : il s'agit d'une étude des fonctions trigonométriques (qui sont simplement les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente) sur $\mathbb{R}$.

4.3.1.1. Liste des objets de savoir visés (telle que présentée est dans le manuel)

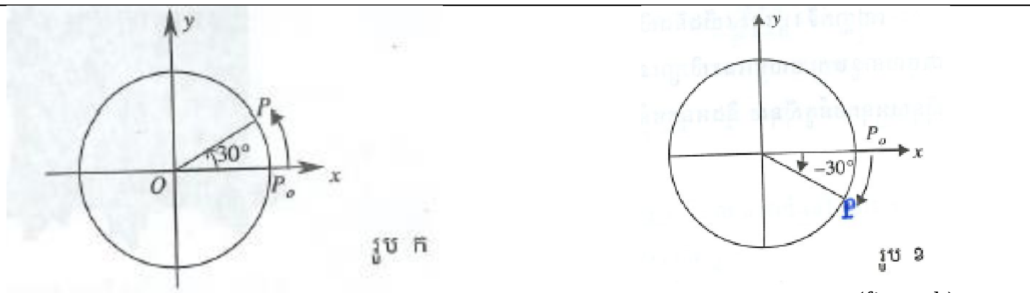
- Mesures d'un angle
  - Détermination d'un angle orienté
  - Mesures d'un angle en radians
- Fonctions trigonométriques
  - Sinus, cosinus, tangente et cotangente
  - Signe des fonctions trigonométriques
- Propriétés des fonctions trigonométriques
  - Relations importantes :
    $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$; $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$.
  - Fonctions trigonométriques des angles θ et $\theta + 2k\pi$
  - Angles associés :
    angles opposés, angles complémentaires, angles supplémentaires, angles de différence π, angles de différence $\frac{\pi}{2}$.
- Étude des fonctions trigonométriques
  - Variations et représentation graphique de la fonction $y = \sin x$
  - Variations et représentation graphique de la fonction $y = \cos x$
  - Variations et représentation graphique de la fonction $y = \tan x$
  - Variations et représentation graphique de la fonction $y = \cot x$

Nous nous centrons sur les objets de savoir principaux visés : « Angle orienté de deux vecteurs », « Radian » et « Fonctions sinus et cosinus ».

1. Angle orienté de deux vecteurs

Le manuel ne définit pas clairement « un angle orienté de deux vecteurs ». Il décrit « un angle orienté de deux vecteurs » dans le contenu d'un exemple 1 à la page 68 (voir l'annexe n° 2, p. 394) :

> Dans le cercle trigonométrique, on utilise des vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ pour déterminer un angle. $\overrightarrow{OP_0}$ étant un vecteur fixé situé du côté des positifs de l'axe $\overrightarrow{Ox}$, est appelé vecteur origine. $\overrightarrow{OP}$ étant un vecteur mobile tournant autour de l'origine du repère est appelé vecteur extrémité.



(figure a) (figure b)

Figure 63 : Angles orientés de deux vecteurs – extrait du manuel tome 1 de 11e, p. 70

> Les vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ forment alors un angle de la manière suivante :

- Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne dans le sens antihoraire, l'angle formé est un angle positif. (figure a) $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = 30^\circ$.
- Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne dans le sens horaire, l'angle formé est un angle négatif. (figure b) $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = -30^\circ$.

Nous remarquons que le manuel ne distingue pas un angle orienté de ses mesures, et que la présentation du concept d'un angle orienté est plus une approche physique que mathématique, et, qu'il donne incorrectement cette définition.

En effet, en lien avec l'étude épistémologique et mathématique, les notions d'*angle orienté positif* et d'*angle orienté négatif* n'existent pas. On ne définit qu'un angle orienté (ici, un angle orienté de deux vecteurs, (voir la sous-section 1.2.2 du chapitre 3)) et ses mesures soit en degrés soit en radians. Comme tout angle orienté a une infinité de mesures (positives et négatives), la définition donnée n'est pas correcte.

Dans la suite de la partie Cours, le manuel fait la remarque suivante : les angles α et $\alpha + 360^\circ$ ont des mesures différentes mais ils ont le même vecteur origine et le même vecteur extrémité. Cette remarque n'indique pas clairement le fait que α et $\alpha + 360^\circ$ désignent deux mesures d'un même angle orienté. Il semble que le manuel ait probablement une difficulté à distinguer un angle orienté de ses mesures car l'angle α et l'angle $\alpha + 360^\circ$ sont le même angle α.

2. <u>Radian</u>

Avant de définir « le radian », le manuel donne d'abord un exemple en disant que « *dans un cercle, un angle au centre en degrés n'a aucune relation avec la longueur de l'arc intercepté* ». Pour cette raison, il dit que l'on crée une nouvelle unité de mesure d'angles ayant une relation avec la longueur de l'arc intercepté. (voir l'annexe n° 2, p. 395)

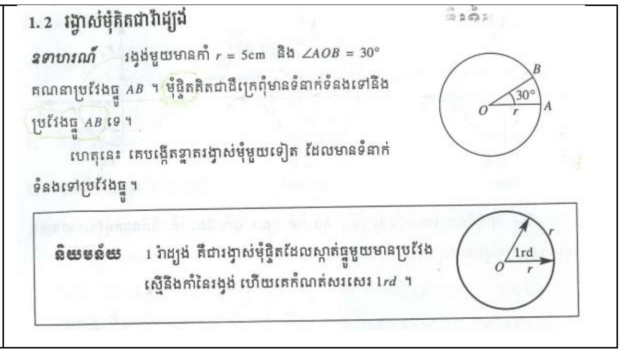
Le manuel donne l'affirmation (que nous avons précédemment soulignée en italique) fausse puisqu'il y a une relation de proportionnalité entre les deux grandeurs mentionnées.

1.2 Mesures d'un angle en radians

Exemple : Soit un cercle ayant pour rayon $r = 5\ cm$ et $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Calculer la longueur de l'arc AB. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ en degrés n'a aucune relation avec la longueur de l'arc AB.

C'est pourquoi on crée une nouvelle unité de mesure d'angles ayant une relation avec la longueur de l'arc intercepté.

Définition : 1 radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égale égale au rayon du cercle et on note 1 rd.


1.2 រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់

ឧទាហរណ៍ រង្វង់មួយមានកាំ $r = 5cm$ និង $\angle AOB = 30^\circ$ គណនាប្រវែងធ្នូ AB ។ មុំផ្ចិតគិតជាដឺក្រេពុំមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងប្រវែងធ្នូ AB ទេ ។

ហេតុនេះ គេបង្កើតខ្នាតរង្វាស់មុំមួយទៀត ដែលមានទំនាក់ទំនងទៅប្រវែងធ្នូ ។

និយមន័យ 1 រ៉ាដ្យង់ គឺជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់ ហើយគេកំណត់សរសេរ 1rd ។

<u>Figure 64</u> : Le radian – extrait du manuel tome 1 de 11e, p. 70

3. <u>Fonctions sinus et cosinus</u>

Nous ne trouvons pas les définitions des fonctions sinus et cosinus (ni celles des fonctions tangente et cotangente) dans ce manuel.

- Dans la section « Fonctions trigonométriques » à la page 71 (voir l'annexe n° 2, p. 396), le manuel donne surtout une généralité, après avoir décrit sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un angle orienté θ illustré par une figure située à droite, comme suit : « sinus, cosinus, tangente et cotangente sont les fonctions trigonométriques ». Ici, il s'agit des fonctions trigonométriques d'un angle orienté et non des fonctions trigonométriques d'un nombre réel. En plus, il y a une ambiguïté dans cet extrait car le manuel ne précise pas que θ est une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$ et qu'il n'indique que ce registre symbolique $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$.

Dans le cercle trigonométrique de centre *O* et de rayon *r*, soit *P* un point du cercle ayant pour coordonnées $P(x; y)$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$. Soient P' le projeté orthogonal de *P* sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$ et *Q* celui de *P* sur l'axe $\overrightarrow{y'y}$. On obtient :

$\sin\theta = \frac{OQ}{OP} = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{OP'}{OP} = \frac{x}{r}$,

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{y}{x}$, $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{x}{y}$.

$\boxed{En\ général : on\ obtient\ sinus, cosinus, tangente, cotangente\ qui\ sont\ les\ fonctions\ trigonométriques.}$

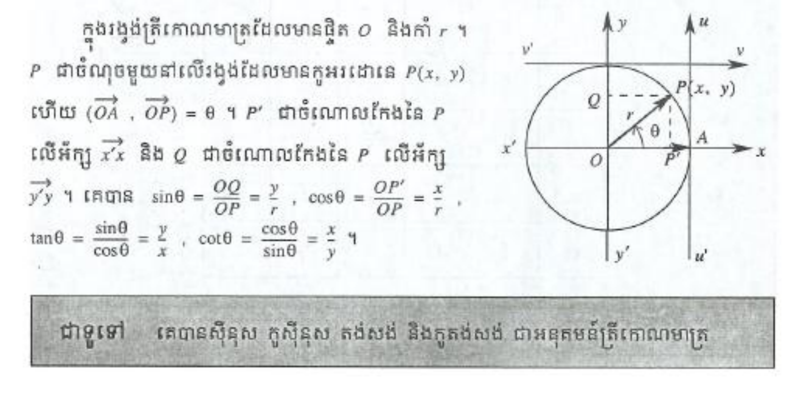


Figure 65 : Fonctions trigonométriques – extrait du manuel tome 1 de 11e, p. 71

- Dans la section « Étude des fonctions trigonométriques » à la page 79 (voir l'annexe n° 2, p. 400), le manuel ne décrit que les fonctions sinus et cosinus définies sur $\mathbb{R}$ sans justification.

Remarques :

1. *Variations d'une fonction trigonométrique (fonction sinus ou fonction cosinus) sur l'intervalle* $[0; \pi]$: La monotonie de la fonction trigonométrique étudiée est obtenue par la lecture graphique directe sur le cercle trigonométrique. Le tableau de variations sur l'intervalle $[0; \pi]$ est établi sans marquer la ligne du signe de la dérivée de la fonction trigonométrique.
   Remarquons que « la notion de dérivation des fonctions trigonométriques » sera introduite en classe de 12e (voir la sous-section 4.4), dans la leçon 1 du chapitre 2 intitulé : Dérivation des fonctions du manuel tome 1 – sous-section 3.1 : Dérivées des fonctions sinus et cosinus (pp. 46-48).

2. *Périodicité et Parité* : Le manuel donne la définition de la périodicité d'une fonction (juste un discours mathématique sans l'interprétation graphique), puis celles de la parité d'une fonction (paire/impaire) et leurs propriétés (juste un discours sans l'illustration graphique) dans cet ordre. (voir l'annexe n° 2, p. 400)

4.3.1.2. Organisation mathématique

- Technologies

Éléments technologiques θ_i		
Niveau	***Savoirs antérieurs***	***Savoirs visés***
11e	θ_{ku} ; $\theta_{\mathrm{Var}-fcomp}$; $\theta_{Courbe-transVectH}$; $\theta_{Courbe-transVectV}$	$\theta_{pmesAngle}$; $\theta_{\frown\text{à}Unité}$; $\theta_{TvrCSréel}$; $\theta_{\mathrm{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}AngAs}$; θ_{parif} ; $\theta_{périf}$; $\theta_{Pr.periode\mathrm{CS}(ax)}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{def\mathrm{CS}AngOr}$

Tableau 21 : θ_i évoqué(s) en 11e (Cm) – Leçon 1 du chapitre 3 (tome 1)

Nous n'exposons ci-dessous que les nouvelles technologies qui n'ont pas encore été rencontrées précédemment.

$\theta_{\frown\text{à}Unité}$: Retour à l'unité à l'aide de proportionnalité avec $1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$ et $1\ rd = \frac{\pi}{180}$.

θ_{ku} : Propriété – Soit u une fonction monotone sur un intervalle I et k un nombre réel non nul. La fonction définie sur l'intervalle I par $x \mapsto ku(x)$:

- a même sens de variation que u sur I si $k > 0$;
- a le sens de variation contraire à celui de u sur I si $k < 0$.

(vue en 1[re] Scientifique)

$\theta_{Pr.periode\mathrm{CS}(ax)}$: Propriété – Les fonctions $x \mapsto \cos(ax)$ et $x \mapsto \sin(ax)$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.

$\theta_{\mathrm{Var}-fcomp}$: Théorème – Une fonction composée : Soient f une fonction définie et monotone sur un intervalle I et g une fonction définie et monotone sur un intervalle J contenant l'image de I par f.

- Si f et g varient dans le même sens, respectivement sur I et sur J, alors $g \circ f$ est croissante sur I.
- Si f et g varient en sens contraires, respectivement sur I et sur J, alors $g \circ f$ est décroissante sur I.

$\theta_{Courbe-transVectH}$: Propriété – Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x + a)$ où $a \in \mathbb{R}^*$, alors la courbe représentative de la fonction g s'obtient en translatant celle de la fonction f par le vecteur $-a\vec{\imath}$.

$\theta_{Courbe-transVectV}$: Propriété – Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x, $g(x) = f(x) + a$ où $a \in \mathbb{R}^*$, alors la courbe représentative de la fonction g s'obtient en translatant celle de la fonction f par le vecteur $a\vec{\jmath}$.

Remarque : Les technologies $\theta_{Courbe-transVectH}$ et $\theta_{Courbe-transVectV}$ sont les technologies génériques/exploitables de celles vues dans un cours précédent (Leçon 1 du chapitre 2 intitulé : Fonctions exponentielles et fonctions logarithmiques (de base a où $a > 0$ et $a \neq 1$), dans le manuel tome 2) ; il s'agit d'une généralité d'une observation expérimentale à partir de quelques exemples : tables des valeurs et graphiques. Nous reformulons les phrases initiales à la française pour rendre intelligible.

- Types de tâches :

Nous rencontrons deux types de tâches (T_{16}, T_{19}) reliés à l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$ et cinq types de tâches reliés à l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$ dont trois (T_{21}, T_{22}, T_{22}) sont vus dans la partie française ; donc deux nouveaux types tâches supplémentaires sont nommés T_{29} et T_{30}.

Trigonométrie dans le cercle trigonométrique :

- T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.
- T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté.

Fonctions trigonométriques :

- T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
- T_{29} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la fonction cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin(x + a)$ (ou $y = \cos(x + a)$) où a est un nombre réel non nul.

- T_{30} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin x + a$ (ou $y = \cos x + a$) où a est un nombre réel non nul.

- <u>Techniques et Technologies associées</u>

  Éléments techniques pour T_{16} :

  T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.

  - $\tau'_{16,1,1}$: *Convertir de radians en degrés* : donner la mesure de l'angle en degrés, qui est égale à $\frac{180^\circ}{\pi} \times la\ mesure\ donnée\ de\ l'angle\ en\ radians,$ et, finir par une simplification numérique possible.
  - $\tau'_{16,1,2}$: *Convertir de degrés en radians* : donner la mesure de l'angle en radians, qui est égale à $\frac{\pi}{180} \times la\ mesure\ donnée\ de\ l'angle\ en\ degrés,$ et, finir par une simplification numérique possible.

    Remarquons que les techniques $\tau'_{16,1,1}$ et $\tau'_{16,1,2}$ sont correspondantes aux techniques $\tau_{16,1,1}$ et $\tau_{16,1,2}$ (voir la sous-section 3.2.2.2.2, pp. 113-114).

  Éléments technologiques :

  $\theta_{pmesAngle}$; $\theta_{\curvearrowleft \text{à}Unité}$

  Éléments techniques pour T_{19} :

  T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté.

  Il y a deux cas à distinguer ci-après :

  <u>Premier cas</u> : *Dans le cas où on connaît une mesure α en radians de l'angle orienté de deux vecteurs.*

  - $\tau'_{19,1}$: Si la mesure α en radians donnée est une des valeurs remarquables ($\alpha \in \left\{0\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right\}$), utiliser le tableau des valeurs des fonctions trigonométriques des angles de mesures remarquables pour donner les valeurs exactes du cosinus ou du sinus de l'angle orienté de mesure α.

    Remarquons que « *le tableau des valeurs des fonctions trigonométriques des angles de mesures remarquables pour donner les valeurs exactes du cosinus ou du sinus de l'angle orienté de mesure α* » est exactement « le tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus de $0\ ;\ \frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{3}\ ;\ \frac{\pi}{2}$ (vu en Seconde en France) ». Ce qui est en plus dans le tableau du côté cambodgien, ce sont des valeurs de la tangente et de la cotangente, (voir l'annexe n° 2, p. 397).

    ($\theta_{defCSAngOr}$; $\theta_{TvrCSréel}$)
  - $\tau'_{19,2}$: Si la mesure α en radians donnée peut se transformer sous la forme $\beta + k \times 2\pi$ où $\beta \in \left]-\pi\ ;\ \pi\right]$, exploiter la propriété des mesures ayant pour différence un multiple de 2π d'un même angle orienté (et des propriétés des cosinus et sinus d'angles associés pour accomplir les tâches plus compliquées). Utiliser $\tau'_{19,1}$ pour finir.

    ($\theta_{defCSAngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{CSmes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{CSAngAs}$; $\theta_{TvrCSréel}$)

Deuxième cas : *Dans le cas où on ne connaît pas une mesure en radians de l'angle orienté de deux vecteurs mais on connait les coordonnées du point M du cercle de rayon r et de centre l'origine du repère orthonormé direct $(O\,;I,J)$ du plan, où ce point M détermine l'angle orienté $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM})$.*

- $\tau'_{19,4}$: Exploiter la définition du cosinus et du sinus de l'angle orienté. $(\theta_{def\mathrm{CS}AngOr})$

Remarques :

1. Les techniques $\tau'_{19,1}$, $\tau'_{19,2}$, $\tau'_{19,4}$ sont les techniques correspondantes respectives aux technique $\tau_{19,1}$, $\tau_{19,2}$, $\tau_{19,4}$ (vues en 1re Scientifique, p. 115). Nous vous rappelons que dans l'institution cambodgienne, il n'y a pas encore la notion de principe de l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, ni celles de cosinus et de sinus d'un nombre réel définies en Seconde en France.
2. Il n'existe pas la notion de mesure principale d'un angle orienté ($\theta_{mpAngOr}$) dans l'institution cambodgienne ; pourtant, en pratique, on utilise cette notion sans la savoir.
3. La technologie $\theta_{defCSAngOr}$ est implicite dans le manuel cambodgien. (voir l'annexe n° 2, pp. 394-395)

Éléments technologiques :

$\theta_{def\mathrm{CS}AngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}AngAs}$; $\theta_{TvrCSréel}$

Éléments techniques pour T_{21} :

T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.

- $\tau_{21,2}$ (voir la sous-section 3.3.2.2, p. 130)

Éléments technologiques :

$\theta_{périf}$

Éléments techniques pour T_{22} :

T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.

- $\tau_{22,2}$ (voir la sous-section 3.3.2.2, p. 130)

Éléments technologiques :

θ_{parif}

Éléments techniques pour T_{26} :

T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique f sur son ensemble de définition.

- $\tau_{26,5}$: *Dans le cas où la fonction f est définie par son expression algébrique du type :* $f(x) = a\sin x$ (ou $f(x) = a\cos x$) avec a un nombre réel non nul :
  La fonction f étudiée a même ensemble de définition, période et parité que la fonction sinus (ou la fonction cosinus) ; il s'agit donc du même procédé pour limiter l'ensemble d'étude comme le cas d'étudier la fonction sinus (ou la

fonction cosinus). Mais, les variations de la fonction f dépendent au signe du nombre réel a.

1. $\tau_{26,5,1}$: *Cas* $a > 0$, la fonction f a même sens de variations que la fonction sinus (ou la fonction cosinus) sur l'ensemble de définition tout entier, donc sur l'ensemble d'étude. Construire alors le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle de l'ensemble d'étude à l'aide du celui de la fonction sinus (ou celui de la fonction cosinus). Construire la courbe représentative de f sur son ensemble de définition, en inspirant le procédé de la construction de celle de la fonction sinus (ou celle de la fonction cosinus), vu en cours : tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle de l'ensemble d'étude à l'aide de son tableau de variations, puis la compléter sur l'intervalle d'une période T à l'aide de la propriété de la parité et finir par la compléter entièrement à l'aide de la propriété de la périodicité avec les translations de vecteur $T\vec{\imath}$.
   $(\theta_{ku}$; $\theta_{périf}$; $\theta_{parif})$

2. $\tau_{26,5,2}$ (pas donné par le manuel) : *Cas* $a < 0$, il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{26,5,1}$ dans laquelle il suffit de remplacer le début de la première phrase disant « la fonction f a même sens de variations que la fonction sinus (ou la fonction cosinus) » par « la fonction f a le sens de variations contraire que celui de la fonction sinus (ou celui de la fonction cosinus) ».
   $(\theta_{ku}$; $\theta_{périf}$; $\theta_{parif})$

- $\tau_{26,6}$ (pas donné par le manuel) : *Dans le cas où la fonction f est définie par son expression algébrique du type* : $f(x) = \sin(ax)$ avec a un nombre réel strictement positif :
  La fonction f étudiée a même ensemble de définition que la fonction sinus. Justifier que la fonction f est impaire à l'aide de la propriété de la parité et de celui des angles associés, puis qu'elle est périodique de période $T = \frac{2\pi}{a}$ à l'aide de la propriété de la périodicité. Limiter l'ensemble de l'étude à l'aide de la propriété de périodicité et de celle de parité ; ici, l'ensemble de l'étude de f est l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{a}\right]$.
  Construire le tableau de variations de f sur cet intervalle à l'aide de celui de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ correspondant, en repérant les valeurs principales de x correspondantes dans l'ordre : $0\ ;\ \frac{1}{a} \times \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{a}$.
  Comme la fonction $x \mapsto ax$ (avec $a > 0$) est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ ou simplement sur $[0\,;\,\pi]$, donc la fonction f a même sens de variations que la fonction sinus sur l'ensemble d'étude correspondant.
  Tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{a}\right]$ à partir de son tableau de variations, puis la compléter sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{a}\ ;\ \frac{\pi}{a}\right]$ à l'aide de la propriété de parité, et, finir par la compléter entièrement sur l'ensemble de définition à l'aide de la propriété de la périodicité avec les translations de vecteur $T\vec{\imath}$.

($\theta_{Pr.\text{période}CS(ax)}$; $\theta_{p\acute{e}rif}$; θ_{parif} ; $\theta_{\text{CS}AngleAs}$; $\theta_{\text{Var}-fcomp}$)

- $\tau_{26,7}$ (pas donné par le manuel) : *Dans le cas où la fonction f est définit par son expression algébrique du type* : $f(x) = \cos(ax)$ avec a un nombre réel strictement positif :

  Il s'agit de la technique analogue à la technique $\tau_{26,6}$ dans laquelle il suffit de remplacer : « fonction sinus » par « fonction cosinus », « impaire » par « paire », « dans l'ordre : 0 ; $\frac{1}{a} \times \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{a}$ » par « dans l'ordre : 0 ; $\frac{\pi}{a}$ ».

  ($\theta_{Pr.\text{période}CS(ax)}$; $\theta_{p\acute{e}rif}$; θ_{parif} ; $\theta_{\text{CS}AngleAs}$; $\theta_{\text{Var}-fcomp}$)

Éléments technologiques :

$\theta_{p\acute{e}rif}$; θ_{parif} ; θ_{ku} ; $\theta_{Pr.\text{période}CS(ax)}$; $\theta_{\text{CS}AngleAs}$; $\theta_{\text{Var}-fcomp}$

Remarque : Les techniques $\tau_{26,6}$ et $\tau_{26,7}$ n'ont pas données par le manuel. Nous donnons ces deux techniques, dans le cas où a est un nombre réel strictement positif, pour accomplir le type de tâches T_{26} qui est proposé, dans la partie « Cours », par le manuel concernant deux exercices d'application (Application 1 à la page 82 et Application à la page 83, voir l'annexe n° 2, pp. 401-402). Pour justifier ces deux techniques, il nous faut inévitablement la technologie $\theta_{\text{Var}-fcomp}$ (la propriété des variations d'une fonction composée) qui est hors du programme cambodgien. Précisons que la notion de fonction composée est introduite en 12^{e} (Chapitre 1 – Leçon 1 pp. 9-10 – manuel tome 1), mais qu'il n'y a aucune propriété des variations d'une fonction composée.

Éléments techniques pour T_{29} :

T_{29} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la fonction cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin(x + a)$ (ou $y = \cos(x + a)$) où a est un nombre réel non nul.

- $\tau_{29,1}$: Construire d'abord la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la fonction cosinus), et, celle de la fonction $y = \sin(x + a)$ (ou $y = \cos(x + a)$) est obtenue par la translation du vecteur $-a\vec{\imath}$.

Éléments technologiques :

$\theta_{Courbe-transVectH}$

Éléments techniques pour T_{30} :

T_{30} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin x + a$ (ou $y = \cos x + a$) où a est un nombre réel non nul.

- $\tau_{30,1}$: Construire d'abord la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la fonction cosinus), et, celle de la fonction $y = \sin x + a$ (ou $y = \cos x + a$) est obtenue par la translation du vecteur $a\vec{\jmath}$.

Éléments technologiques :

$\theta_{Courbe-transVectV}$

4.3.1.3. Points de réflexion et commentaires

- En classe de 10e, il n'y a pas de notion de cotangente d'un angle du triangle rectangle ni celle de cotangente d'un angle obtus dans la partie « Extension des rapports trigonométriques ». Les auteurs des manuels en classe 11e appliquent brutalement cette notion de cotangente dans la section « Fonctions trigonométriques » sans la définir. Donc, à ce niveau 11e, les fonctions trigonométriques désignent les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente.

- Après avoir introduit la notion de radian et après un processus d'appropriation de la conversion d'une mesure d'angle de degrés en radians et inversement, il y a dans la suite du cours manipulation des deux unités des mesures d'angle : degré et radian, sauf à partir de la section 4 de cours : « Étude des fonctions trigonométriques ».
  Par exemple, dans la sous-section intitulée « Signe des fonctions trigonométrique » aux pages 72-73, le manuel donne un exemple : Calculer $\cos 120^{\circ}$, $\sin(-60^{\circ})$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{6}$. Remarquons que le manuel ne distingue pas $\sin(-60^{\circ})$ de $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.
  Dans la suite du cours à la section 4, le manuel ne parle que les fonctions trigonométriques des nombres réels. Il semble que dans cette leçon 1, tout se fonctionne bien sans incidence, par exemple, sur le cosinus et le sinus d'une mesure d'angle sans précision l'unité de mesure : $\sin(-60) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$? Nous ne trouvons aucun discours du manuel sur les valeurs de la variable réelle x, autrement dit, nous ne voyons rien sur le passage du cosinus et du sinus d'un angle orienté (ou bien le passage du cosinus et du sinus d'une mesure en radians d'un angle orienté) vers les fonctions cosinus et sinus. Et encore moins sur ce qui se passe avec les mesures en degré.

- ***La relation de Chasles*** est implicite dans le programme cambodgien et le manuel l'utilise sans le dire. Par exemple, pour une présentation menant à la formule d'addition du cosinus : $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, à l'aide de la relation de Chasles et à l'aide du produit scalaire du deux vecteurs dans le plan, à la page 88 dans la leçon 2 du chapitre 3 (en 11e).
  Dans le cours de la leçon 1 du chapitre 3, lors de la présentation de la notion d'angle orienté, il y a deux exercices résolus dont l'objectif est de déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$ vérifiant des conditions sur le vecteur mobile $\overrightarrow{OP}$ (ou le vecteur extrémité) tournant autour de l'origine du repère ; et apparaît l'approche de la relation de Chasles pour la première rencontre. Le manuel n'explicite pas cette relation de Chasles dans la suite du cours et dans la leçon 2 qui suit. Voici un extrait du manuel tome 1 de 11e à la page 69 (voir l'annexe n° 2, p. 395)

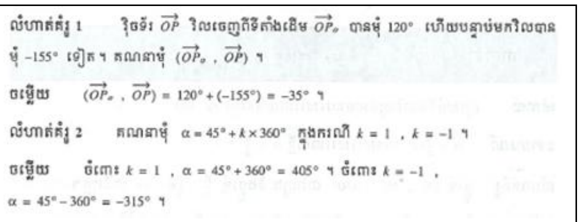
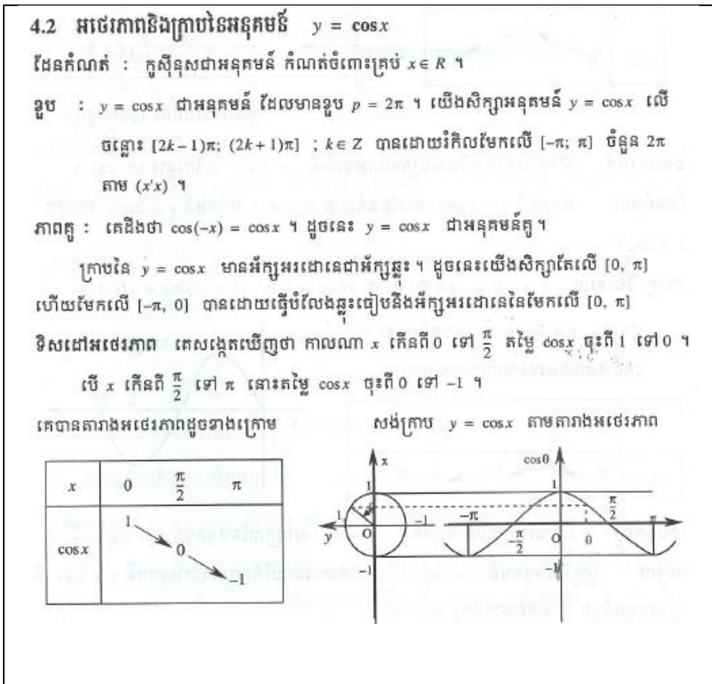
Exercice résolu 1 : Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne en partant de sa position initiale $\overrightarrow{OP_0}$ et détermine un angle de 120° puis un autre angle de -155°. Calculer l'angle $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$. **Réponse** : $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = 120^{\circ} + (-155^{\circ}) = -35^{\circ}$. **Exercice résolu 2** : Calculer l'angle $\alpha = 45^{\circ} + k \times 360^{\circ}$ dans les cas : $k = 1, k = -1$. **Réponse** : Pour $k = 1$, $\alpha = 45^{\circ} + 360^{\circ} = 405^{\circ}$. Pour $k = -1$, $\alpha = 45^{\circ} - 360^{\circ} = -315^{\circ}$.	

Figure 66 : Approche de la relation de Chasles pour la première rencontre

- Dans la section « Étude des fonctions trigonométriques », les auteurs donnent d'abord une méthode générale pour étudier les fonctions trigonométriques, en indiquant trois étapes :
  a. Ensemble de définition (des quatre fonctions trigonométriques) ;
  b. Périodicité (définition générale de la périodicité d'une fonction) ;
  c. Parité (définition générale de la parité d'une fonction quelle qu'elle soit).
  Puis ils décrivent quatre sous-sections intitulées « Variations et représentation graphique de la fonction … ».
  Nous nous intéressons aux deux premières sous-sections : « Variations et représentation graphique de la fonction sinus » et « Variations et représentation graphique de la fonction cosinus ».
  Il s'agit d'un extrait dans la partie « Cours » – sous-section 4.2. Variations et représentation graphique de la fonction cosinus (voir l'annexe n° 2, p. 401).
  (Remarquons que c'est le même procédé que pour l'étude de la fonction sinus, située dans la sous-section 4.1.)



x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	0	-1

4.2 Variations et représentation graphique de la fonction $y = \cos x$

Ensemble de définition : cosinus est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Périodicité : $y = \cos x$ est une fonction périodique de période $p = 2\pi$. Nous étudions la fonction $y = \cos x$ sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ et traçons sa courbe représentative sur cet intervalle. Sa courbe représentative sur l'intervalle $[(2k-1)\pi ; (2k+1)\pi] ; k \in \mathbb{Z}$, est obtenue par translations de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ de la branche de la courbe représentative sur $[-\pi ; \pi]$.

Parité : sachant que $\cos(-x) = \cos x$, donc $y = \cos x$ est une fonction paire.
La courbe représentative de $y = \cos x$ a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Donc, nous ne l'étudions que sur l'intervalle $[0 ; \pi]$ et la branche de sa courbe représentative sur $[-\pi ; 0]$ est obtenue par la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées de celle sur $[0 ; \pi]$.

Sens de variations : remarquant que lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les valeurs de $\cos x$ décroissent de 1 à 0. Si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π alors les valeurs de $\cos x$ décroissent de 0 à -1 .

Figure 67 : Variations et représentation graphique de la fonction cosinus

Remarquons que dans le secondaire au Cambodge :

1. dans le curriculum de mathématiques, il n'y a pas de concept des cosinus et sinus d'un nombre réel par l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique (en France, ce concept est introduit en classe de 2^{de}, correspondant à la classe de 10^{e} au Cambodge).
2. il n'y a pas encore d'utilisation des logiciels dans les écoles publiques. En classe, les élèves travaillent comme depuis toujours sur papier et avec crayons.

Nous remarquons que le manuel illustre le passage du concept du cosinus d'un angle orienté dont les mesures sont en radians (en géométrie analytique) à celui de la fonction cosinus (en analyse) par deux graphiques côte à côte : cercle trigonométrique à gauche et graphique de la fonction cosinus à droite. Nous pouvons penser que ceci est une bonne illustration de la transition entre ces deux concepts. Mais dans quelle mesure est-ce suffisant ?

- Il s'agit d'une première rencontre du concept de la périodicité. Le manuel ne donne que la définition de la périodicité avec un discours purement mathématique contenant les expressions algébriques. Il n'interprète pas graphiquement pour mieux comprendre le sens de cette définition, d'une part et d'autre part, il ne montre pas, par exemple, l'allure de la courbe représentative de la fonction cosinus sur plusieurs périodes (voir *Figure 67*).
  Remarquons que toute la leçon, le manuel ne construit que la courbe représentative d'une fonction trigonométrique sur un intervalle de longueur d'une période, mais pas sur l'ensemble de définition bien que dans un exemple ou un exercice résolu le manuel soi-même demande de construire sur l'ensemble de définition tout entier. Que le manuel en pense-t-il ? Donc, pour construire complètement, par exemple, la courbe représentative de la fonction cosinus, c'est à la charge de l'enseignant.

4.4. Fonctions trigonométriques en 12^{e} : Limites et Dérivabilité

4.4.1. **Limite d'une fonction trigonométrique**

La notion de limite d'une fonction trigonométrique est introduite en 12^{e} (Terminale Scientifique en France) dans le thème d'étude « Limite d'une fonction » qui est le titre de la leçon 1 du chapitre 1 dans le manuel tome 1 de 12^{e}. « Limite d'une fonction trigonométrique » est classée comme étant une des trois sous-sections de la section « Limite d'une fonction non algébrique » de cette leçon 1. En ce qui concerne la sous-section « Limite d'une fonction trigonométrique », on définit deux propriétés (une généralité et un théorème), (voir *Figure 68*).

Concernant le théorème indiqué précédemment, le manuel tome 1 propose une démonstration géométrico-analytique pour montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Il s'agit d'une méthode similaire reliée à l'activité 2 du manuel Hyperbole 2012, (voir la sous-section 3.3.2.1, p. 125) ; mais ce n'est pas de même manière de mise en fonctionnement : du côté français, on propose comme une activité à découvrir alors que du côté cambodgien, on dénonce un théorème et on donne directement une démonstration. Pour montrer que $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$, le manuel tome 1 propose une démonstration avec le calcul formel à l'aide de la formule $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Remarquons que dans la sous-section « Limite d'une fonction trigonométrique », le signe x représente d'abord « angle » puis « mesure d'angle en radians » ou « mesure d'arc de cercle en radians », (voir *Figure 68*). Il semble qu'il y ait une ambiguïté sur les objets mathématiques représentés par le signe x chez le manuel tome 1. Concernant « mesure d'arc de cercle en radians », il y a un même problème chez le manuel Déclic 2014 de Seconde (voir la sous-section 3.2.1.2.3, p. 103).

5. Limite d'une fonction non algébrique

5.1. Limite d'une fonction trigonométrique

Exemple 1 : Soit le cercle trigonométrique comme étant la figure à droite, on constate que :

- Lorsque l'angle x tend vers 0 alors $\sin x$ tend vers zéro.
- Lorsque l'angle x tend vers 0 alors $\cos x$ tend vers 1.
- Lorsque l'angle x tend vers 0 alors $\tan x$ tend vers zéro.

On écrit : $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$, $\lim_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim_{x\to 0}\tan x = 0$.

En général : si a est un nombre réel de l'ensemble de définition d'une fonction trigonométrique donnée, on a $\lim_{x\to 0}\sin x = \sin a$, $\lim_{x\to 0}\cos x = \cos a$, $\lim_{x\to 0}\tan x = \tan a$.

Théorème : Si x est une mesure d'angle ou d'arc de cercle en radians, alors on a :

a. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ b. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$

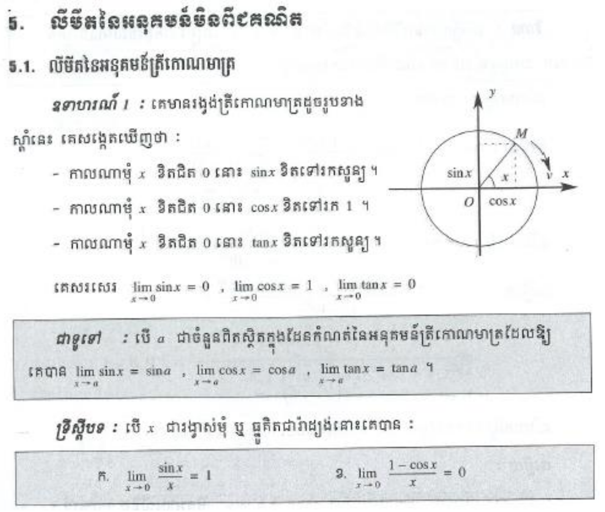


Figure 68 : Limite d'une fonction trigonométrique – extrait du manuel tome 1 de 12e, p. 16

4.4.2. **Dérivée d'une fonction trigonométrique**

La notion de dérivabilité d'une fonction trigonométrique est introduite en 12e dans le thème d'étude « Dérivée d'une fonction » qui est le titre de la leçon 1 du chapitre 2 dans le manuel tome 1 de 12e. « Dérivée d'une fonction trigonométrique » est classée comme étant une des sections de cette leçon 1. Cette section est décomposée en deux sous-sections : 1. Dérivées des fonctions sinus et cosinus ; 1. Dérivées des fonctions tangente et cotangente.

Nous présentons principalement la sous-section « Dérivées des fonctions sinus et cosinus ». Le manuel aborde par deux exemples consécutifs avec le calcul formel pour exposer directement et succinctement que $\sin'(x) = \cos x$ et $\cos'(x) = -\sin x$. Puis, il expose un troisième exemple consistant à calculer y' sachant que $y = \sin(x^2 - 3)$. Sans tarder, il dénonce les quatre formules suivantes :

En général : Si $y = \sin x$ alors $y' = \cos x$;
si $y = \cos x$ alors $y' = -\sin x$;
si $y = \sin u$ alors $y' = u'\cos u$;
si $y = \cos u$ alors $y' = u'\sin u$.

Remarquons que le manuel fait aucun lien entre la dérivabilité de la fonction sinus en 0 et $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (resp. la dérivabilité de la fonction cosinus en 0 et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$).

Nous voulons préciser que « Limite d'une fonction trigonométrique » et « Dérivées des fonctions sinus et cosinus » ne servent que pour le calcul formel dans le programme cambodgien du secondaire. L'étude d'une fonction trigonométrique est rencontrée une seule fois en 11e, reliée à une étude des fonctions trigonométriques simples, par exemple : la fonction sinus, la fonction cosinus (voir la section 4.3 précédente).

5. Comparaison de l'organisation mathématique entre les deux institutions française et cambodgienne

Il y a trois niveaux (la 10e, la 11e et la 12e) du côté cambodgien, et du côté français, cinq niveaux dès la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique, nous faisons une comparaison de l'OM en découpant en trois temps suivant les trois OM locales existantes déterminées précédemment. Dans la comparaison de l'OM, nous distinguons deux cas : « Types de tâches communs rencontrés dans des manuels » et « Types de tâches non communs rencontrés dans des manuels ». Précisons que du côté cambodgien, nous ne présentons que les OM déterminées en 10e et 11e, reliés principalement dans notre travail de recherche.

5.1. $\text{OML}_{\text{Triangle}}$

Nous distinguons deux cas : la trigonométrie dans le triangle rectangle (abrégée $\text{OML}_{\text{TriangleR}}$) (vue en 4e et en 3e-Fr ; en 10e-Cm) et la trigonométrie dans un triangle quelconque (abrégée $\text{OML}_{\text{TriangleQ}}$) (vue en 1re Scientifique-Fr ; en 10e-Cm).

5.1.1. $\text{OML}_{\text{TriangleR}}$ – Institution française (la 4e et la 3e) *vs.* Institution cambodgienne (la 10e)

Nous repérons d'abord les types de tâches rencontrés dans des manuels français et cambodgiens.

> T_0 : Écrire le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle sous forme du rapport des longueurs de deux des côtés du triangle.
>
> T_1 : Déterminer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
>
> T_2 : Déterminer la mesure en degrés d'un angle aigu dans un triangle rectangle.
>
> T_3 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle connaissant la mesure en degrés d'un angle aigu et la longueur d'un côté.

Cas 1 : Types de tâches communs rencontrés dans des manuels

T_i	τ_i communs	τ_i non communs		θ_i communs	θ_i non communs	
		France (4e et 3e)	Cambodge (10e)		France (4e et 3e)	Cambodge (10e)
T_1	$\tau_{1,2}$; $\tau_{1,3}$; $\tau_{1,4}$ ($\tau_{1,4,1}$; $\tau_{1,4,2}$) ; $\tau_{1,5}$; $\tau_{1,7}$; $\tau_{1,9}$; $\tau_{1,10}$; $\tau_{1,11}$ ($\tau_{1,11,1}$; $\tau_{1,11,2}$) ; $\tau_{1,12}$; $\tau_{1,14}$; $\tau_{1,16}$; $\tau_{1,17}$; $\tau_{1,18}$ ($\tau_{1,18,1}$; $\tau_{1,18,2}$;	$\tau_{1,1}$; $\tau_{1,6}$; $\tau_{1,8}$; $\tau_{1,13}$; $\tau_{1,15}$	$\tau_{1,19}$ ($\tau_{1,19,1}$; $\tau_{1,19,2}$) ; $\tau_{1,20}$; $\tau_{1,21}$; $\tau_{1,22}$ ($\tau_{1,22,1}$; $\tau_{1,22,2}$) ; $\tau_{1,23}$; $\tau_{1,24}$ ($\tau_{1,24,1}$; $\tau_{1,24,2}$) ; $\tau_{1,25}$; $\tau_{1,26}$	$\theta_{\cos AngTrR}$; $\theta_{enc\cos AngTrR}$; $\theta_{\sin AngTrR}$; $\theta_{enc\sin AngTrR}$; $\theta_{\tan AngTrR}$; θ_{RFTrR} ; $\theta_{Pr.\tan TrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$	$\theta_{\cos Cal}$; $\theta_{\text{Arccos}Cal}$ $\theta_{\sin Cal}$; $\theta_{\text{Arcsin}Cal}$; $\theta_{\tan Cal}$	$\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$; $\theta_{Pr.\text{CT}AngTrR}$

	$\tau_{1,18,3})$					
T_2		$\tau_{2,1}$; $\tau_{2,2}$; $\tau_{2,3}$; $\tau_{2,4}$; $\tau_{2,5}$; $\tau_{2,6}$ $(\tau_{2,6,1}$; $\tau_{2,6,2})$	$\tau'_{2,1}$; $\tau'_{2,2}$; $\tau'_{2,3}$; $\tau'_{2,4}$; $\tau'_{2,5}$; $\tau'_{2,6}$ $(\tau'_{2,6,1}$; $\tau'_{2,6,2})$	$\theta_{\mathrm{cos}AngTrR}$; $\theta_{enc\mathrm{cos}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{sin}AngTrR}$; $\theta_{enc\mathrm{sin}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{tan}AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$	$\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$; $\theta_{\mathrm{Arcsin}Cal}$; $\theta_{\mathrm{Arctan}Cal}$	$\theta_{table-Trigo}$; $\theta_{AngCompTrR}$
T_3		$\tau_{3,1}$ $(\tau_{3,1,1}$; $\tau_{3,1,2}$; $\tau_{3,1,3})$; $\tau_{3,2}$ $(\tau_{3,2,1}$; $\tau_{3,2,2}$; $\tau_{3,2,3})$; $\tau_{3,3}$ $(\tau_{3,3,1}$; $\tau_{3,3,2}$; $\tau_{3,3,3})$; $\tau_{3,4}$ $(\tau_{3,4,1}$; $\tau_{3,4,2}$; $\tau_{3,4,3})$; $\tau_{3,5}$ $(\tau_{3,5,1}$; $\tau_{3,5,2}$; $\tau_{3,5,3})$; $\tau_{3,6}$ $(\tau_{3,6,1}$; $\tau_{3,6,2}$; $\tau_{3,6,3})$	$\tau'_{3,1}$ $(\tau'_{3,1,1}$; $\tau'_{3,1,2}$; $\tau'_{3,1,3})$; $\tau'_{3,2}$ $(\tau'_{3,2,1}$; $\tau'_{3,2,2}$; $\tau'_{3,2,3})$; $\tau'_{3,3}$ $(\tau'_{3,3,1}$; $\tau'_{3,3,2}$; $\tau'_{3,3,3})$; $\tau'_{3,4}$ $(\tau'_{3,4,1}$; $\tau'_{3,4,2}$; $\tau'_{3,4,3})$; $\tau'_{3,5}$ $(\tau'_{3,5,1}$; $\tau'_{3,5,2}$; $\tau'_{3,5,3})$; $\tau'_{3,6}$ $(\tau'_{3,6,1}$; $\tau'_{3,6,2}$; $\tau'_{3,6,3})$	$\theta_{\mathrm{cos}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{sin}AngTrR}$; $\theta_{\mathrm{tan}AngTrR}$; $\theta_{Th.Pyth}$	$\theta_{\mathrm{cos}Cal}$; $\theta_{\mathrm{sin}Cal}$; $\theta_{\mathrm{tan}Cal}$	$\theta_{table-Trigo}$; $(\theta_{AngCompTrR}$ $)$

Tableau 22 : OM avec les types de tâches communs (Fr 4e et 3e *vs*.Cm 10e)

Dans les deux institutions française et cambodgienne, concernant la trigonométrie dans le triangle rectangle, il y a deux remarques à noter tout particulièrement concernant quelques concepts supplémentaires liés aux concepts principaux :

Première remarque : c'est le support instrumental (en France : ***la calculatrice*** *vs.* au Cambodge : ***la table de trigonométrie***) qui sert pour :

1. donner une valeur approchée du cosinus, du sinus ou de la tangente d'un angle aigu dont on connaît la mesure en degrés ;

2. donner une valeur approchée de la mesure en degrés de l'angle aigu connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente.

Deuxième remarque : il y a deux propriétés qui ne sont pas attendues en 3e en France, mais elles sont en 10e au Cambodge : $\theta_{AngCompTrR}$ et $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$. Nous remarquons que $\theta_{AngCompTrR}$ sert pour justifier les techniques afin d'accomplir les deux types de tâches indiqués précédemment dans le cas où la mesure de l'angle aigu est supérieur à 45° car la table de trigonométrie donnée par le manuel cambodgien est restreinte aux mesures en degrés d'angles compris entre 0 et 45. Remarquons que la méthode d'interpolation pour les mesures en degrés d'angles non entières n'est pas attendue au programme cambodgien. Donc, du côté cambodgien, avec la table de trigonométrie, seuls le cosinus, le sinus ou la tangente d'un angle aigu dont la mesure en degrés est entière peut être calculé/donné approximativement.
En ce qui concerne $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR}$, c'est un objet d'étude en plus décrivant la relation entre le cosinus et la tangente d'un même angle aigu.

Les deux remarques précédentes indiquent les raisons pour lesquelles il y a des τ non communes et des θ justifiant les τ non communes.

Pour T_1 : dans les deux institutions, il y a peu de techniques différentes associées à T_1 causées par les raisons indiquées précédemment. Nous constatons que les techniques principales associées à T_1 sont presque les mêmes procédés à institutionnaliser.

Pour T_2 : dans les deux institutions, toutes les techniques associées à T_2 sont presque identiques mais nous ne pouvons dire qu'elles sont les mêmes car elles sont conclues par des supports instrumentaux : *la calculatrice* (du côté français) *vs. la table de trigonométrie* (du côté cambodgien). Nous considérons que ces techniques rencontrées dans les deux institutions sont deux à deux correspondantes, par exemple : $\tau_{2,1}$ et $\tau'_{2,1}$.

Pour T_3 : même remarque que celle pour T_2 précédemment.

Cas 2 : Types de tâches non communs rencontrés dans des manuels
Il y a un type de tâches qui est sollicité dans des manuels français mais pas dans le manuel cambodgien : T_0.

5.1.2. OML$_{\mathbf{TriangleQ}}$ – Institution française (la 1re Scientifique) *vs.* Institution cambodgienne (la 10e)

Nous repérons d'abord les types de tâches rencontrés dans des manuels français et cambodgiens.

T_4 : Calculer le cosinus (ou le sinus) d'un angle dans un triangle.
T_5 : Calculer la mesure d'un angle dans un triangle.
T_6 : Calculer la longueur d'un côté d'un triangle.

Cas 1 : Types de tâches communs rencontrés dans des manuels

T_i	τ_i communs	τ_i non communs		θ_i communs	θ_i non communs	
		France (1re S)	Cambodge (10e)		France (1re S)	Cambodge (10e)
T_4	$\tau_{4,1}$		($\tau_{4,2}$; $\tau_{4,3}$; $\tau_{4,4}$)	$\theta_{Th.PythG}$		$\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$;

						$\theta_{For.AireTr}$
T_5		$\tau_{5,1}$	$\tau'_{5,1}$; $(\tau_{5,2}$; $\tau_{5,3})$	$\theta_{Th.PythG}$	$\theta_{\mathrm{Arccos}Cal}$	$\theta_{For.Héron}$; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.AireTr}$; $\theta_{table-Trigo}$
T_6		$\tau_{6,1}$	$\tau'_{6,1}$; $\tau_{6,2}$; $\tau_{6,3}$	θ_{ThPytG}	$\theta_{\mathrm{cos}Cal}$	θ_{AngTr} ; $\theta_{For.\sin}$; $\theta_{For.\sin-bis}$; $\theta_{table-Trigo}$

Tableau 23 : OM avec les types de tâches communs (Fr 1re Scientifique *vs.* Cm 10e)

Pour T_4 : la technique $\tau_{4,1}$ est sollicitée dans des manuels français et cambodgien pour trouver le cosinus d'un angle saillant.

Pour T_5 : les techniques $\tau_{5,1}$ et $\tau'_{5,1}$ sont correspondantes et elles diffèrent par l'outil instrumental permettant de donner la valeur approchée de la mesure d'un angle connaissant son cosinus.

Pour T_6 : même remarque que précédemment pour les techniques $\tau_{6,1}$ et $\tau'_{6,1}$.

Nous remarquons que du côté cambodgien, bien que toutes relations métriques dans un triangle soient présentes dans le programme, les techniques $\tau_{4,2}$, $\tau_{4,3}$, $\tau_{4,4}$ associées à T_4 ne sont pas sollicitées dans le manuel cambodgien pour trouver le sinus d'un angle saillant, non plus les techniques $\tau_{5,2}$, $\tau_{5,3}$ associées à T_5. Il semble que le manuel cambodgien ne vise pas à mettre, de manière pertinente, en fonctionnement les concepts institutionnalisés.

Remarque : il n'y a pas le Cas 2 consistant en « Types de tâches non communs rencontrés dans des manuels ».

5.2. OML$_{\mathrm{CTrigo}}$

Dans le programme français, concernant la trigonométrie du cercle trigonométrique, il s'agit de deux objets d'étude différents visés : « Cosinus et sinus d'un nombre réel » et « Cosinus et sinus d'un angle orienté ». Nous distinguons alors deux cas :

1. OML$_{\mathrm{CTrigo}}$ décrivant la trigonométrie dans le cercle trigonométrique en liaison avec les ***concepts du cosinus et du sinus d'un nombre réel*** liés à l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique (abrégée OML$_{\mathrm{CTrigoCSréel}}$) (vue en Seconde-Fr ; non attendue dans le programme cambodgien du secondaire) ; et
2. OML$_{\mathrm{CTrigo}}$ décrivant la trigonométrie dans le cercle trigonométrique en liaison avec les ***concepts du cosinus et du sinus d'un angle orienté*** (abrégée OML$_{\mathrm{CTrigoCSAngOr}}$) (vue en 1re Scientifique-Fr ; en 11e-Cm).

5.2.1. OML$_{\mathrm{CTrigoCSréel}}$ – Institution française (la Seconde) *vs.* Institution cambodgienne (aucune classe)

Comme dans le programme cambodgien, les concepts du cosinus et du sinus d'un nombre réel liés à l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique ne sont pas attendus, nous ne pouvons mener à bien une comparaison ici.

Pourtant, comme nous avons classé deux techniques $\tau_{14,10}$ et $\tau_{14,11}$, dans lesquelles on utilise les formules d'addition et/ou les formules de duplication, (rencontrées en 1re Scientifique dans le thème d'étude : Application du produit scalaire dans le plan) associées à T_{14} (vu déjà une fois en Seconde), (rappelons que T_{14} consiste à « Déterminer le cosinus et le sinus d'un nombre réel », voir la sous-section 3.2.1.2.2, pp. 97-99). Nous voulons préciser ici que ces

deux techniques indiquées précédemment seront rencontrées en 11e au Cambodge. Remarquons que nous n'avons pas étudié la leçon 2 du chapitre 3 du manuel tome 1 de 11e, consacrant aux formules trigonométriques, et que nous avons fait un résumé sur les formules trigonométriques citées par le manuel (voir l'annexe n° 2, p. 408).
Précisons que seules les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus sont attendues dans le curriculum français.

5.2.2. OML$_{\mathbf{CTrigoCSAngOr}}$ – Institution française (la 1re Scientifique) *vs.* Institution cambodgienne (la 10e et la 11e)

Nous repérons d'abord les types de tâches rencontrés dans des manuels français et cambodgiens.

T_{16} : Convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement.
T_{17} : Déterminer géométriquement une mesure d'un angle orienté de deux vecteurs dans le plan orienté.
T_{18} : Déterminer la mesure principale d'un angle orienté de mesure α (en radians).
T_{19} : Déterminer le cosinus et/ou le sinus d'un angle orienté.
T_{20} : Résoudre dans $]-\pi\,;\,\pi]$(, puis dans $\mathbb{R}$,) une équation trigonométrique d'inconnue x : $\cos x = a$ ou $\sin x = b$.
T_{27} : Calculer le cosinus ou le sinus ou la tangente d'un angle α aigu/obtus.
T_{28} : Déterminer les mesures en degrés d'un angle α où $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ vérifiant $\sin \alpha = a$ (où le nombre a, étant compris entre 0 et 1, désigne une des valeurs remarquables du sinus d'un angle).

Cas 1 : Types de tâches communs rencontrés dans des manuels

T_i	τ_i communs	τ_i non communs		θ_i communs	θ_i non communs	
		France (1re S)	Cambodge (11e)		France (1re S)	Cambodge (11e)
T_{16}		$\tau_{16,1}$ $(\tau_{16,1,1}$; $\tau_{16,1,2})$	$\tau'_{16,1,1}$; $\tau'_{16,1,2}$		$\theta_{pmesAngle}$	$\theta_{\frown\text{à}Unité}$;
T_{19}		$\tau_{19,1}$; $\tau_{19,2}$; $\tau_{19,3}$; $\tau_{19,4}$; $\tau_{19,5}$	$\tau'_{19,1}$; $\tau'_{19,2}$; $\tau'_{19,4}$	$\theta_{def\mathrm{CS}AngOr}$; $\theta_{mpAngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}mes\widehat{m}AngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}AngAs}$; $\theta_{TvrCSréel}$	$\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\mathrm{CS}Cal(\mathrm{rad})}$; $\theta_{Pr.AngOr}$	
T_{20}	$\tau_{20,1,2}$; $\tau_{20,2,2}$	$\tau_{20,1,1}$; $\tau_{20,2,1}$		$\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{enc\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\cos EqTrigo}$; $\theta_{\sin EqTrigo}$; $\theta_{\mathrm{CS}AngAs}$; $\theta_{mpAngOr}$	$\theta_{mesAngOr}$; $\theta_{Pr.mesAngOr}$	

Tableau 24 : OM avec les types de tâches communs (Fr 1re Scientifique *vs.* Cm 11e)

Pour T_{16} : les techniques pour l'accomplir sont presque identiques mais du côté cambodgien, la technologie $\theta_{pmesAngle}$ n'est pas explicite dans l'utilisation pour justifier les deux techniques $\tau'_{16,1,1}$ et $\tau'_{16,1,2}$. Ces deux techniques sont justifiées par la technologie $\theta_{\frown\text{à}Unité}$ dont elles sont une application immédiate. Nous disons que les techniques $\tau'_{16,1,1}$ et $\tau'_{16,1,2}$

correspondent respectivement aux techniques $\tau_{16,1,1}$ et $\tau_{16,1,2}$. Précisons que les manuels français sollicitent d'aborder par utiliser $\theta_{pmesAngle}$ et le manuel cambodgien sollicite d'utiliser $\theta_{\curvearrowleft \text{à}Unit\acute{e}}$ sans aborder par $\theta_{pmesAngle}$.

Pour T_{19} : nous avons fait des remarques à la page 166. La technique $\tau_{19,3}$ n'est pas sollicitée par le manuel cambodgien. Nous voulons préciser en plus que ***la relation de Chasles*** est implicite dans le programme cambodgien, (voir la sous-section 4.3.1.3, p. 173). Donc, la technique $\tau_{19,5}$ n'apparaît pas dans le manuel cambodgien.
Pour T_{20} : dans le manuel cambodgien, les technologies $\theta_{\mathrm{CS}R\acute{e}elC}$, $\theta_{encCSR\acute{e}elC}$ ne sont pas explicitent et la technologie $\theta_{mpAngOr}$ n'est pas attendue. Du côté cambodgien, il s'agit plutôt des concepts du cosinus et du sinus d'une mesure (en radians) d'un angle orienté (vus en 11^e^) car les concepts du cosinus et du sinus d'un nombre réel définis en Seconde en France, en reliant à l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, n'existent pas dans le programme cambodgien. D'ailleurs, nous n'avons pas présenté la leçon 3 du chapitre 3 du manuel tome 1 cambodgien ; cette leçon 3 consacre aux équations et inéquations trigonométriques.

Cas 2 : Types de tâches non communs rencontrés dans des manuels

France (1re Scientifique)			Cambodge (10e)		
T_i	τ_i	θ_i	T_i	τ_i	θ_i
T_{17}	$\tau_{17,1}$	$\theta_{Pr.AngOr}$	T_{27}	$\tau_{27,1}$; $\tau_{27,2}$; $\tau_{27,3}$ ($\tau_{27,3,1}$; $\tau_{27,3,2}$) $\tau_{27,4}$; $\tau_{27,5}$; $\tau_{27,6}$ $\tau_{27,7}$; $\tau_{27,8}$ ($\tau_{27,8,1}$; $\tau_{27,8,2}$; $\tau_{27,8,3}$) $\tau_{27,9}$; $\tau_{27,10}$; $\tau_{27,11}$	$\theta_{\mathrm{CS}mesAngCtrigo}$; $\theta_{encCSAng-cm10e}$; $\theta_{RFTrR-adap}$; $\theta_{Pr.tanTrR-adap}$; $\theta_{Pr.\mathrm{CT}AngTrR-adap}$
T_{18}	$\tau_{18,1}$	$\theta_{Pr.mpAngOr}$	T_{28}	$\tau_{28,1}$	$\theta_{RFAngTrR-adap}$; $\theta_{encCSAng-cm10e}$; $\theta_{TvrCST-cm10e}$

Tableau 25 : OM avec les types de tâches non communs (Fr 1re Scientifique *vs.* Cm 10e)

Les types de tâches T_{17} et T_{18} ne sont pas sollicités par le manuel cambodgien car la relation de Chasles (voir la sous-section 4.3.1.3, p. 173) et la notion de mesure principale de l'angle orienté (voir Remarque 2, p. 170) ne sont pas attendues dans le programme cambodgien.
D'ailleurs, les types de tâches T_{27} et T_{28} ne sont que rencontrés dans le manuel cambodgien de 10e lors de l'introduction de l'extension des rapports trigonométriques d'un angle aigu/obtus de mesure α degrés compris entre 0° et 180°, mais sans la notion d'angle orienté. Et, dans l'institution française, l'extension de la trigonométrie du triangle rectangle n'est pas présentée de cette manière ; et précisons que la trigonométrie dans un triangle quelconque (via la formule d'Al-Kashi) est une extension de la trigonométrie du triangle rectangle et celle-ci est aussi visée dans le programme cambodgien en 10e (en utilisant différemment les technologies à la justifier).

5.3. OML$_{\text{FoncTrigo}}$ – Institution française (Terminale Scientifique) *vs.* Institution cambodgienne (la 11e)

Nous repérons d'abord les types de tâches rencontrés dans des manuels français et cambodgiens.

> T_{21} : Étudier la périodicité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
> T_{22} : Étudier la parité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
> T_{23} : Étudier la dérivabilité d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et calculer sa fonction dérivée.
> T_{24} : Étudier les variations d'une fonction trigonométrique sur son ensemble d'étude et établir le tableau de variations de la fonction.
> T_{25} : Construire la représentation graphique d'une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
> T_{26} : Étudier une fonction trigonométrique sur son ensemble de définition.
> T_{29} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la fonction cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin(x + a)$ (ou $y = \cos(x + a)$) où a est un nombre réel non nul.
> T_{30} : En utilisant la courbe représentative de la fonction sinus (ou de la cosinus), construire celle de fonction du type : $y = \sin x + a$ (ou $y = \cos x + a$) où a est un nombre réel non nul.

<u>Cas 1</u> : Types de tâches communs rencontrés dans des manuels

T_i	τ_i communs	τ_i non communs		θ_i communs	θ_i non communs	
		France (TermS)	Cambodge (11e)		France (TermS)	Cambodge (11e)
T_{21}	$\tau_{21,2}$	$\tau_{21,1}$		$\theta_{périf}$	$\theta_{Pr.périf}$	
T_{22}	$\tau_{22,2}$	$\tau_{22,1}$		θ_{parif}	$\theta_{Pr.parif}$	
T_{26}		$\tau_{26,1}$; $\tau_{26,2}$; $\tau_{26,3}$; $\tau_{26,4}$	$\tau_{26,5,1}$	$\theta_{périf}$; θ_{parif}	$\theta_{Pr.périf}$; $\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$	θ_{ku}

<u>*Tableau 26*</u> : OM avec les types de tâches communs (Fr Terminale Scientifique *vs.* Cm 11e)

Les techniques $\tau_{21,1}$ et $\tau_{22,1}$, associées respectivement à T_{21} et à T_{22}, ne sont pas sollicitées par le manuel cambodgien. Rappelons que ces deux techniques consistent en un travail graphique en exploitant l'interprétation graphique reliant respectivement à la périodicité et à la parité d'une fonction.

Pour T_{26} : les techniques $\tau_{26,1}$, $\tau_{26,2}$, $\tau_{26,3}$, $\tau_{26,4}$ ne sont pas attendues dans les deux manuels cambodgiens de 11e ni dans le programme actuel du secondaire au Cambodge (cependant, on les trouvera dans le manuel cambodgien tome 2 de 12e, mais hors du programme). Seule la technique $\tau_{26,5,1}$ est sollicitée par le manuel cambodgien. Dans l'étude de l'OM des manuels cambodgiens, nous ajoutons les techniques $\tau_{26,5,2}$, $\tau_{26,6}$ et $\tau_{26,7}$ en faisant une remarque dans la sous-section 4.3.1.2 (p. 172). Nous pouvons dire que le programme cambodgien du secondaire ne vise pas de manière pertinente ce qui concerne les objets de savoir visés depuis la 10e.

Nous pouvons dire qu'en ce qui concerne l'étude des fonctions trigonométriques dans le secondaire cambodgien actuel, il ne s'agit pas d'une étude complète/générale sur une fonction trigonométrique. Le manuel cambodgien vise principalement à découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus.

<u>Cas 2</u> : Types de tâches non communs dans des manuels

France (Terminale Scientifique)			Cambodge (11e)		
T_i	τ_i	θ_i	T_i	τ_i	θ_i
T_{23}	$\tau_{23,1}$; $\tau_{23,2}$	$\theta_{For.addCS}$; $\theta_{For.dupCS}$; $\theta_{Pr.df\mathrm{CS}}$; $\theta_{Th.G-d}$	T_{29}	$\tau_{29,1}$	$\theta_{Courbe-transVectH}$
T_{24}	$\tau_{24,1}$ ($\tau_{24,1,1}$; $\tau_{24,1,2}$)	$\theta_{For.addCS}$; $\theta_{For.dupCS}$; $\theta_{\mathrm{CS}RéelC}$; $\theta_{\nearrow f-d}$	T_{30}	$\tau_{30,1}$	$\theta_{Courbe-transVectV}$
T_{25}	$\tau_{25,1}$; $\tau_{25,2}$; $\tau_{25,3}$; $\tau_{25,4}$	$\theta_{Pr.parif}$; $\theta_{Pr.périf}$			

<u>Tableau 27</u> : OM avec les types de tâches non communs (Fr Terminale Scientifique *vs.* Cm 11e)

Remarquons que les notions de dérivation des fonctions trigonométriques sont au programme cambodgien de 12e (voir la section 4.4.2, p. 176), mais qu'ils ne servent pas pour l'étude des fonctions trigonométriques qui sont hors du programme. Les techniques $\tau_{23,1}$ et $\tau_{23,2}$ associées à T_{23} seront sollicitées par le manuel de 12e, ainsi que les technologies indiquées dans le *Tableau 25* précédent. Cependant, les types de tâches T_{24} et T_{25} ne seront pas rencontrés dans l'institution cambodgienne du secondaire.
Les types de tâches T_{29} et T_{30} ne sont pas sollicités par des manuels français. Pourtant, le manuel Hyperbole 2012 propose, dans la partie « Savoir-faire » à la page 81, un exercice résolu à reconnaître une translation ; l'objectif de cet exercice est de démontrer que la courbe représentative de la fonction sinus et l'image de celle de la fonction cosinus par la translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$.

6. Conclusion

Dans l'institution française, on vise institutionnellement, en Terminale Scientifique, les fonctions sinus et cosinus, dans le domaine « Analyse », en étudiant leurs caractéristiques : définies, (continues), dérivables sur ℝ, impaires/paires, périodiques de période 2π (et sans limite en l'infini) ; alors que dans l'institution cambodgienne, les caractéristiques des fonctions sinus et cosinus visées en 11e ne sont pas complètes, il manque : la dérivabilité, la continuité (la continuité d'une fonction et la dérivabilité d'une fonction trigonométrique sont au programme de 12e ; rappelons que l'étude d'une fonction trigonométrique ne sera pas reprise en 12e bien qu'à ce niveau on vise la limite d'une fonction trigonométrique et la dérivabilité d'une fonction trigonométrique) (voir la section 4.4).
Le passage de la trigonométrie dans un triangle vers la trigonométrie dans le cercle trigonométrique, puis vers les fonctions cosinus et sinus n'est pas du tout simple car il y a un changement de cadres d'étude, un changement d'objets d'étude (grandeur – mesures de grandeur – nombre réel), les mêmes signes « cos » et « sin » qui sont utilisés pour désigner les objets cosinus et sinus visant des objets d'étude différents :

1. cosinus et sinus dans l'$OML_{Triangle}$ ($OML_{TriangleR}$ vue en 4^{e}, 3^{e}-Fr, en 10^{e}-Cm ; $OML_{TriangleQ}$ vue en 1re Scientifique-Fr, en 10^{e}-Cm) dans le domaine « Géométrie »,
2. cosinus et sinus dans l'OML_{CTrigo} ($OML_{CTrigoCSréel}$ vue en Seconde-Fr, non attendue dans le programme Cm ; $OML_{CTrigoCSAngOr}$ vue en 1re Scientifique-Fr, en 11^{e}-Cm) dans le domaine « Géométrie repérée »,
3. cosinus et sinus dans l'$OML_{FoncTrigo}$ dans le domaine « Analyse » (Terminale Scientifique-Fr, 11^{e}-Cm).

L'articulation des objets de savoir visés dans ce passage n'est d'une part pas explicitée et d'autre part, « le radian » considéré comme l'unité de mesure d'angle fonctionne parfaitement dans le cercle trigonométrique car il permet de ne pas distinguer la longueur d'un arc de cercle trigonométrique de la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte l'arc de cercle trigonométrique. Précisons que dans l'institution française, il semble qu'il y ait consensus entre les manuels de Seconde et de 1re Scientifique. On vise les objets cosinus et sinus et les objets principaux qui les accompagnent, notamment le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct du plan, sous conditions que « les axes des abscisses et des ordonnées dans un repère orthonormé direct du plan », « la droite numérique enroulée sur le cercle trigonométrique » et « les arcs de cercle trigonométrique » aient la même *unité de longueur*, (voir *Figure 50*). Puis en Terminale Scientifique, on introduit la notion de fonctions sinus et cosinus dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse » à partir des objets cosinus et sinus vus en Seconde et/ou en 1re Scientifique.
Dans l'institution française, les manuels de Terminale Scientifique proposent chacun une activité d'approche dans laquelle apparaît le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle dans cet ordre. Rappelons-le (voir la sous-section 3.3.2.3, pp. 134-135) : un des quatre manuels étudiés fait découvrir les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle x en se basant seulement sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, et les trois autres manuels se basent plutôt sur les mesures en radians d'un angle orienté. Donc, la plupart des manuels de Terminale Scientifique mettent en évidence l'importance du rôle du « radian » lors du passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique dans le cadre de la géométrie repérée vers les fonctions sinus et cosinus dans le cadre de l'analyse : x représente deux objets différents lors de ce passage. Nous voyons que l'objet x visé dans le thème « Fonctions sinus et cosinus » en Terminale Scientifique désigne, lors du parcours d'étude depuis la Seconde, à la fois : l'abscisse de la droite des réels en position verticale, la mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique, la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte l'arc de cercle trigonométrique, l'abscisse du point qui décrit la courbe représentative de la fonction sinus/cosinus ; et, tout fonctionne parfaitement grâce au concept de radian et au cercle trigonométrique (rayon unité).
Dans l'institution cambodgienne, le manuel de 11^{e} ne définit pas clairement les fonctions sinus et cosinus, il mentionne seulement que les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$. Pourtant, lors de l'étude de variation de la fonction sinus/cosinus sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, le manuel indique le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers la fonction sinus/cosinus d'une variable réelle x, où x désigne une mesure en radians d'un angle orienté dans le cadre de la géométrie repérée, et aussi, un nombre réel qui est l'abscisse du point décrivant la courbe représentative de la fonction sinus/cosinus dans le cadre de l'analyse. Remarquons que l'articulation des objets de savoir visés entre la trigonométrie dans le cercle trigonométrique se basant sur les angles et les fonctions sinus et cosinus n'est presque nulle part explicitée.
Cependant, la plupart des manuels français de Terminale Scientifique et le manuel cambodgien de 11^{e} ont présenté le même passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle, en se basant sur les

mesures en radians d'angles orientés. Précisons que lors de ce passage, les variations de la fonction sinus (resp. cosinus) sont caractérisées de manière différente : du côté français, on interprète la monotonie de la fonction étudiée à partir de sa fonction dérivée (voir la sous-section 3.3.2.3, p. 135) alors que du côté cambodgien, on lit directement la monotonie de la fonction étudiée à partir de ce qui se passe sur le cercle trigonométrique (voir *Figure 67*).

Nous présentons ci-dessous un schéma illustrant l'étude de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans les institutions française et cambodgienne.

Trigonométrie dans un triangle ($OML_{Triangle}$) - Domaine Géométrie

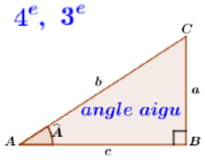
En France

En 4ᵉ et en 3ᵉ, utiliser la calculatrice pour déterminer une valeur approchée :
- du cosinus d'un angle aigu donné;
- de la mesure de l'angle aigu dont le cosinus est donné.

En 1ʳᵉ Scientifique, la formule d'Al-Kashi est visée à l'aide des applications du produit scalaire dans le plan.
Remarquons qu'il s'agit de techniques différentes pour introduire et pour justifier cette formule dans des manuels français et dans le manuel cambodgien.

$OML_{TriangleR}$

4^e, 3^e — 10^e



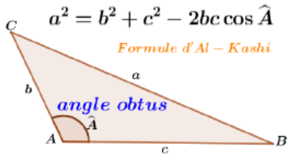
$$\cos\widehat{A} = \frac{c}{b}$$
$$\sin\widehat{A} = \frac{a}{b}$$
$$\cos^2\widehat{A} + \sin^2\widehat{A} = 1$$

$OML_{TriangleQ}$

$1^{re}S$ — 10^e

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$

Formule d'Al – Kashi



Au Cambodge

En 10ᵉ, concernant l'$OML_{TriangleR}$, utiliser la table de trigonométrie avec les même objectifs visés qu'en France.
En 10ᵉ, concernant l'$OML_{TriangleQ}$, la formule d'Al-Kashi est visée à l'aide des définitions du sinus et du cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle, de la propriété des rapports trigonométriques de l'angle supplémentaire d'un angle aigu et du théorème de Pythagore.
D'autres formules visées en 10ᵉ sont la formule des sinus, une formule de l'aire d'un triangle (l'aire d'un triangle est la moitié du produit des longueurs de deux côtés du triangle par le sinus de l'angle formé par ces côtés), la formule de Héron.

Trigonométrie dans le cercle trigonométrique (OML_{CTrigo}) - Domaine Géométrie repérée

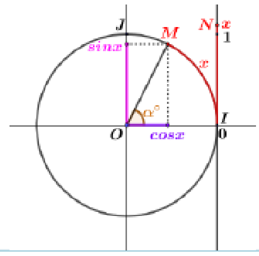
En France

En Seconde, on commence par définir un principe de l'enroulement de droite numérique sur le cercle trigonométrique. Puis, on définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel reliés à ce principe de l'enroulement.

En 1ʳᵉ Scientifique, on commence par définir des mesures d'angle orienté à partir du principe d'enroulement de la droite numérique visé en Seconde, puis on introduit le cosinus et le sinus de l'angle orienté comme étant le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures. Remarquons que dès lors que l'on peut parler de mesures en radians d'angles orientés, le point de vue « enroulement » et « longueur d'arcs de cercle » disparaît, en particulier tous les éléments du registre graphique de l'enroulement introduits en Seconde.

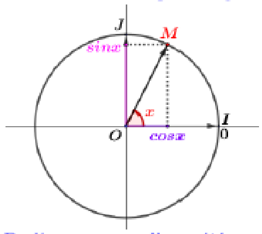
$OML_{CTrigoCSréel}$

2^{de}



$OML_{CTrigoCSAngOr}$

$1^{re}S$ — 11^e



Radian : nouvelle unité de mesure des angles

Au Cambodge

L'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique n'est pas attendu dans le programme du secondaire cambodgien. Donc, il n'y a pas de concept des cosinus et sinus d'un nombre réel par l'enroulement de la droite numérique.

En 10ᵉ, il y a une extension des rapports trigonométriques d'un angle obtus dont la mesure en degrés de l'angle est comprise entre 0 et 180, sans la notion d'angle orienté. Et cette extension n'est pas attendue dans le programme du secondaire français.

En 11ᵉ, la présentation du concept d'un angle orienté est plus une approche physique que mathématique. Remarquons que le manuel ne distingue pas un angle orienté de ses mesures.

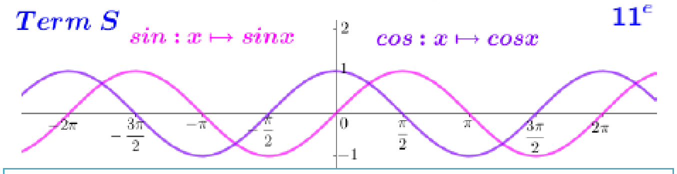
Fonctions sinus et cosinus ($OML_{FoncTrigo}$) - Domaine Analyse

En France

En Terminale Scientifique, pour les fonctions sinus et cosinus on étudie leurs caractéristiques : définies, (continues), dérivables sur $\mathbb{R}$, impaires/paires, périodiques de période 2π. Il y a une étude trigonométrique complète. Mais, ce n'est pas le cas pour le Cambodge.

Term S — 11^e

$\sin : x \mapsto \sin x$ — $\cos : x \mapsto \cos x$



Le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle se base sur les mesures en radians d'un angle orienté. Les variations de la fonction sinus (resp. cosinus) sont caractérisées de manière différente en lien avec l'interprétation de la monotonie de la fonction étudiée : à l'aide de sa fonction dérivée (France) *vs.* à l'aide de la lecture graphique directe sur le cercle trigonométrique (Cambodge).

Au Cambodge

En 11ᵉ, les fonctions sinus et cosinus sont étudiées de manière incomplète, en raison de la non utilisation de la dérivabilité.
La dérivée d'une fonction trigonométrique est au programme de 12ᵉ.
Il n'y a pas d'interprétation graphique concernant le concept de la périodicité défini formellement.

Figure 69 : La trigonométrie et les fonctions sinus et cosinus étudiées dans les institutions française et cambodgienne

Chapitre 3 : **Définitions mathématiques des fonctions cosinus et sinus**

Suite à l'étude des programmes et des manuels dans les deux institutions française et cambodgienne au chapitre 2 précédent, nous menons une étude mathématique consistant à rassembler dans une organisation théorique les éléments de savoirs nécessaires pour donner une construction mathématiquement rigoureuse des ***fonctions cosinus et sinus*** avec deux approches : *approche géométrique par les rotations* et *approche analytique par l'exponentielle*. Nous choisissons, en lien avec notre recherche de thèse, ces deux introductions des fonctions trigonométriques bien que d'autres existent comme par exemple à partir de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
L'objectif de cette étude mathématique est de réaliser complètement notre MER qui est l'union des trois OML existantes déterminées à partir de l'étude des manuels du secondaire et de l'étude mathématique.

1. Fonctions cosinus et sinus d'un angle orienté

1.1. Isométries vectorielles d'un espace euclidien de dimension finie

Rappels – *définitions d'un produit scalaire et d'une norme* :

Définition 1.1.1 : Un *produit scalaire* sur un espace vectoriel réel E est une forme bilinéaire-symétrique-définie-positive, c'est-à-dire une application notée

$$\begin{array}{rcl} \langle .,. \rangle : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \langle u,v \rangle \end{array}$$

- bilinéaire par rapport à u et v,
- symétrique : pour tous les vecteurs u et v de E, $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$
- définie positive : pour tout vecteur u de E, on ait $\langle u,u \rangle \geq 0$, l'égalité $\langle u,u \rangle = 0$ ayant lieu si et seulement si $u = 0$.

Définition 1.1.2 : On appelle *norme* sur un espace vectoriel réel E toute application notée $\| . \| : E \to \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $(u,v) \in E^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $\|u\| = 0$ équivaut à $u = 0$,
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$,
- $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Dans la suite, E est un espace euclidien de dimension finie, c'est-à-dire un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire, noté $\langle .,. \rangle$. Il est naturellement muni de la norme associée au produit scalaire, notée $\| . \|$, définie pour tout $u \in E$ par $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle}$. Un vecteur $u \in E$ est dit unitaire si et seulement si $\|u\| = 1$.
Soit f un endomorphisme de cet espace euclidien E ; on note : $f \in End(E)$.

Proposition 1.1.1 : Soit $f \in End(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a). Pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \|u\|$, (f conserve la norme).
b). Pour tout $(u,v) \in E^2$, $\langle f(u), f(v) \rangle = \langle u,v \rangle$, ($f$ conserve le produit scalaire).

c). Pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, son image par f est une base orthonormée.

d). Pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, la matrice de f dans cette base est une matrice orthogonale. (Rappels : une matrice carrée A est dite orthogonale lorsque qu'elle vérifie $A\ {}^tA = {}^tAA = I$.)

Démonstration

a). implique b)., en effet :

On suppose que f conserve la norme.

Pour tout $(u,v) \in E^2$, $\langle f(u), f(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|f(u)+f(v)\|^2 - \|f(u)-f(v)\|^2)$

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|f(u+v)\|^2 - \|f(u-v)\|^2) \qquad (f \in End(E))$$

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) \qquad (f \text{ conserve la norme})$$

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle$$

Donc f conserve le produit scalaire.

Notons que l'on se restreint, dans la suite de cette démonstration, à la dimension 2 pour alléger les notations car les démonstrations sont similaires en toute dimension finie.

b). implique c)., en effet :

On considère $\mathfrak{B} = (i,j)$ une base orthonormée de E. On va montrer que $\big(f(i), f(j)\big)$ est aussi une base orthonormée de E.

On suppose que f conserve le produit scalaire. On a alors $\langle f(i), f(j)\rangle = \langle i, j\rangle$.

Comme $\mathfrak{B} = (i,j)$ une base orthonormée de E, on obtient : $\|i\| = \|j\| = 1$ et $\langle i, j\rangle = 0$.

On a : $\|f(i)\|^2 = \langle f(i), f(i)\rangle = \langle i, i\rangle = \|i\|^2 = 1$, donc $\|f(i)\| = 1$ (idem. pour j, on a $\|f(j)\| = 1$).

On en déduit que : $\|f(i)\| = \|f(j)\| = 1$ et $\langle f(i), f(j)\rangle = 0$.

On suppose qu'il existe α, β de $\mathbb{R}$ tels que $\alpha f(i) + \beta f(j) = 0$, (1).

(1) implique $\begin{cases} \langle \big(\alpha f(i) + \beta f(j)\big), f(i)\rangle = 0 \\ \langle \big(\alpha f(i) + \beta f(j)\big), f(j)\rangle = 0 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} \alpha\langle f(i), f(i)\rangle + \beta\langle f(j), f(i)\rangle = 0 \\ \alpha\langle f(i), f(j)\rangle + \beta\langle f(i), f(j)\rangle = 0 \end{cases}$, donc $\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$. Alors, $\big(f(i), f(j)\big)$ est libre.

Par conséquent, $\big(f(i), f(j)\big)$ est une base orthonormée de E.

Ainsi pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, son image par f est une base orthonormée. Ceci exprime que toute isométrie vectorielle transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

c). implique d)., en effet :

On suppose que pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, son image par f est une base orthonormée.

On considère $f(i) = ai + bj$ et $f(j) = ci + dj$ avec $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

Comme $\big(f(i), f(j)\big)$ est une base orthonormée de E, on a alors $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$ et $ac + bd = 0$.

On note que A est la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$. On a $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et ${}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Montrer que A est une matrice orthogonale, c'est montrer que ${}^tAA = I_2$.

On a ${}^tAA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

Ainsi pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, la matrice A de f dans cette base est une matrice orthogonale.

d). implique a)., en effet :
On suppose que pour une base orthonormée $\mathfrak{B}$, la matrice de f dans cette base est une matrice orthogonale.
Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de f dans la base orthonormée $\mathfrak{B}$.
On a alors $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$.
Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in E$, on a $f(u) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$.
On obtient :

$$\|f(u)\|^2 = (ax + cy)^2 + (bx + dy)^2 = (a^2 + b^2)x^2 + (c^2 + d^2)y^2 + 2xy(ac + bd)$$
$$\|f(u)\|^2 = x^2 + y^2 = \|u\|^2$$

On en déduit que pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \|u\|$.
Ainsi les assertions a), b), c) et d) sont équivalentes. □
Remarque : d) implique a) n'utilise la propriété que pour une base orthonormée.

Définition 1.1.3 : Une isométrie vectorielle est un élément $f \in End(E)$ qui conserve la norme, c'est-à-dire, pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \|u\|$.

Proposition 1.1.2 : Soient $f, g \in End(E)$.

1. Si f est une isométrie vectorielle de E alors f est une bijection de E dans E.
2. Si f et g sont deux isométries vectorielles de E alors $g \circ f$ est une isométrie vectorielle de E.
3. Si f est une isométrie vectorielle de E alors f^{-1} est une isométrie vectorielle de E.

Démonstration
1. Si f est une isométrie vectorielle de E alors pour tout $u \in E$, $\|f(u)\| = \|u\|$.
Si $f(u) = 0$ alors $\|f(u)\| = 0$, donc $\|u\| = 0$ implique $u = 0$, on obtient : $Ker(f) = \{0\}$. Par conséquent, f est une bijection de E dans E.

2. Soient f et g deux isométries vectorielles de l'espace euclidien E.
Rappelons que $g \circ f \in End(E)$ puisque f et g sont deux endomorphismes de E.
Pour tout $u \in E$, $\|g \circ f(u)\| = \|g(f(u))\| = \|f(u)\| = \|u\|$, (une isométrie vectorielle conserve la norme).
Donc $g \circ f$ est une isométrie vectorielle de E.
3. Rappelons que $f^{-1} \in End(E)$ que puisque $f \in End(E)$ et grâce à 1. de cette proposition 1.1.2.
Soit $u \in E$, on a $\|f^{-1}(u)\| = \|f(f^{-1}(u))\| = \|u\|$. Donc f^{-1} est une isométrie vectorielle de E. □

Définition 1.1.4 : L'ensemble des isométries vectorielles de l'espace euclidien E forme un groupe qui est appelé groupe orthogonal de E par la loi $\circ$, on le note $(O(E), \circ)$. Ses éléments sont appelés les « transformations orthogonales » de E.

Proposition 1.1.3 : $f \in O(E)$ implique $\det(f) = \pm 1$. On note $\varepsilon = \det(f) = \pm 1$.

Démonstration
Soient $\mathfrak{B}$ une base orthonormée de E et A la matrice de f dans cette base $\mathfrak{B}$ de E.
Montrer que $\det(f) = \pm 1$, c'est montrer que $\det(A) = \pm 1$.
Si $f \in O(E)$ alors ${}^tAA = I$.
On a $\det({}^tAA) = \det(A) \times \det({}^tA) = \det(A) \times \det(A) = \det^2(A)$.
Comme $\det({}^tAA) = \det(I) = 1$, alors $\det^2(A) = 1$, donc $\det(A) = \pm 1$. □

Définition 1.1.5 : On appelle isométrie vectorielle positive (ou directe) une isométrie vectorielle de déterminant $+1$. L'ensemble des isométries vectorielles positives de l'espace euclidien E est appelé « groupe spécial orthogonal de E », noté $SO(E)$ ou $O^+(E)$.

Proposition 1.1.4 : L'ensemble $(SO(E),\circ)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(O(E),\circ)$.

Démonstration
Pour tous f, g de $SO(E)$, on a : $\det(g \circ f) = \det(g)\det(f) = 1 \times 1 = 1$, donc $g \circ f \in$ SO(E) (i.e. *la composée de deux isométries vectorielles positives est une isométrie vectorielle positive*).
Pour tout f de $SO(E)$, on a : $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)} = \frac{1}{1} = 1$, donc $f^{-1} \in SO(E)$ (i.e. *l'inverse de toute isométrie vectorielle positive est positive*). □

1.2. Cas de la dimension 2

Dans cette section, E est un espace euclidien de dimension 2.

Définition 1.2.1 : Le groupe $SO(E)$ est appelé ensemble des **rotations vectorielles** du plan euclidien E.

1.2.1. Propriétés des rotations de dimension 2

Proposition 1.2.1.1 : Soit $f \in End(E)$. Si $\mathfrak{B}$ est une base orthonormée de E alors $f \in O(E)$ équivaut à la matrice A de f dans la base $\mathfrak{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $\varepsilon = det(f) = \pm 1$.

Démonstration
Dans une base orthonormée $\mathfrak{B}$ de E, soit la matrice A de f dans cette base : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Si $f \in O(E)$ alors on a : $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$ et aussi $ad - bc = \pm 1 = \varepsilon$ (proposition 1.1.3)

Le système : $\begin{cases} ac + bd = 0 \\ ad - bc = \varepsilon \end{cases}$ donne $\begin{cases} abc + b^2 d = 0 \\ a^2 d - abc = \varepsilon a \end{cases}$ et $\begin{cases} a^2 c \ + abd = 0 \\ -abd + b^2 c = \varepsilon \times (-b) \end{cases}$ puis on additionne membre à membre, on obtient alors $d(a^2 + b^2) = \varepsilon a$ et $c(a^2 + b^2) = -\varepsilon b$. Donc $d = \varepsilon a$ et $c = -\varepsilon b$.

2. Si la matrice A de f dans une base $\mathfrak{B}$ est de la forme $A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ alors $f \in O(E)$ car les éléments de la matrice A vérifient $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ (-\varepsilon b)^2 + (\varepsilon a)^2 = 1 \\ a \times (-\varepsilon b) + b \times (\varepsilon a) = 0 \end{cases}$.

Donc $f \in O(E)$ équivaut à $A = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ (par la proposition 1.1.1). □

De la proposition 1.2.1.1 résulte le fait qu'il y a deux types de matrices possibles : $A_1 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$ et $A_{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.
Le calcul du déterminant dans chaque cas montre que la première forme correspond aux isométries vectorielles positives ($\varepsilon = 1$) et la seconde aux isométries vectorielles négatives ($\varepsilon = -1$).
La forme de la matrice d'une isométrie orthogonale dans une base orthonormée ne dépend pas de la base choisie mais seulement du déterminant donc du caractère positif ou négatif de l'isométrie.
Remarque : a et $|b|$ ne dépendent que de f car le polynôme caractéristique de f est $P_f(X) = (a - X)^2 + b^2 = (a - X - ib)(a - X + ib) = \big(X - (a + ib)\big)\big(X - (a - ib)\big)$ qui a pour racines $a \pm ib$ (avec $\mathrm{Tr}(f) = 2a$ et $b^2 = 1 - \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(f)^2$).

Proposition 1.2.1.2 : L'ensemble des rotations vectorielles du plan vectoriel E est muni de la structure de groupe commutatif par la loi $\circ$ de composition des applications.

Démonstration
D'après la proposition 1.1.4, $(SO(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(O(E), \circ)$, donc il est un groupe. $(SO(E), \circ)$ est en plus commutatif (notons que la commutativité est fausse en dimension supérieure à 3). En effet :
Soient f et f' deux isométries vectorielles de $SO(E)$ dans une même base orthonormée $\mathfrak{B}$ de E.

Soient A la matrice de f dans la base $\mathfrak{B}$ telle que $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, A' la matrice de f' dans cette base est telle que $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$ avec $a'^2 + b'^2 = 1$.

On a $A \times A' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$

et $A' \times A = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$.

On en déduit que $A \times A' = A' \times A$, donc $f \circ f' = f' \circ f$. □

Proposition 1.2.1.3 : Pour tout couple (u, v) de vecteurs unitaires de E, il existe une et une seule rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = v$, (c'est-à-dire, f envoie u sur v).

Démonstration

Soient u et v deux vecteurs unitaires de E. Soit w un vecteur unitaire de E tel que le couple (u, w) forme une base orthonormée de E. Soit $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dans la base (u, w). On a $a^2 + b^2 = 1$ puisque v est un vecteur unitaire.
On considère f la rotation de matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (u, w). D'après sa matrice, f est une rotation (voir Proposition 1.2.1.1) et $f(u) = v$. Ceci prouve l'existence de f.
Soit f une rotation transformant u en v. Puisque c'est une rotation, sa matrice dans la base (u, w) est déterminée par sa première colonne. Or cette première colonne est déterminée par $f(u) = v$. Elle est donc formée à partir des coordonnées de v. Donc f est unique.
Ainsi pour tout couple (u, v) de vecteurs unitaires de E, il existe une et une seule rotation f de $SO(E)$ qui envoie u sur v. □

1.2.2. Angles orientés de vecteurs unitaires

Définition – proposition 1.2.2.1 : On définit une relation sur les couples de vecteurs unitaires de E par $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$ si et seulement si il existe une rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$. $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

Démonstration
Soit U l'ensemble des vecteurs unitaires.
$\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $U \times U$. En effet :
1. Il est évident que $\mathcal{R}$ est réflexive car l'identité est une rotation.
2. Si $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$, il existe f de $SO(E)$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$, on a alors $f^{-1}(u') = u$ et $f^{-1}(v') = v$ et comme f^{-1} est une rotation (proposition 1.1.2), donc $(u', v')\mathcal{R}(u, v)$. Ainsi $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. Si $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$, il existe f de $SO(E)$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$, et, si $(u', v')\mathcal{R}(u'', v'')$, il existe f' de $SO(E)$ telle que $f'(u') = u''$ et $f'(v') = v''$.
On obtient : $u'' = f'\big(f(u)\big) = f' \circ f(u)$ et $v'' = f'\big(f(v)\big) = f' \circ f(v)$. Comme $f' \circ f$ est aussi une rotation vectorielle (proposition 1.1.2), il existe alors $f'' = f' \circ f$ de $SO(E)$ telle que $f''(u) = u''$ et $f''(v) = v''$, donc $(u, v)\mathcal{R}(u'', v'')$. Ainsi $\mathcal{R}$ est transitive. □

Définition 1.2.2.2 : On appelle angle orienté de vecteurs unitaires u et v de E, noté $(\widehat{u, v})$, la classe d'équivalence d'un couple (u, v) pour $\mathcal{R}$.
On appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles orientés de vecteurs, avec $\mathcal{A} = U \times U/\mathcal{R}$.

Remarques :

1. L'égalité de deux angles orientés $(\widehat{u, v}) = (\widehat{u', v'})$ équivaut à $(u, v)\mathcal{R}(u', v')$, c'est-à-dire que les couples de vecteurs unitaires (u, u') et (v, v') déterminent la même rotation vectorielle.
2. On parle d'angle orienté pour distinguer $(\widehat{u, v})$ et $(\widehat{v, u})$ (sauf dans le cas où $v = u$ et où $v = -u$) ; ceci n'a rien à voir avec une quelconque orientation du plan, notion qui d'ailleurs n'est pas encore définie.

Proposition 1.2.2.2 : Si u et v sont deux vecteurs unitaires de E alors $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$ équivaut à $f_{u,v} = f_{u',v'}$ où $f_{u,v}$ est la rotation qui envoie u sur v, autrement dit c'est la même rotation qui transforme u en v et u' en v'.

Démonstration
1). Si $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$ alors $f_{u,v} = f_{u',v'}$. En effet :
On suppose que $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$; alors il existe une rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.
On a $f_{u,v}(u') = f_{u,v}(f(u)) = f\left(f_{u,v}(u)\right) = f(v) = v'$, (car f et $f_{u,v}$ commutent, proposition 1.2.1.2).
2). Si $f_{u,v} = f_{u',v'}$ alors $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$. En effet :
On considère la rotation f de $SO(E)$ définie par $f(u) = u'$.
On a $f(v) = f\left(f_{u,v}(u)\right) = f_{u,v}(f(u)) = f_{u,v}(u') = f_{u',v'}(u') = v'$, (car f et $f_{u,v}$ commutent et car $f_{u,v} = f_{u',v'}$). Ce qui prouve que $\widehat{(u,v)} = \widehat{(u',v')}$. □
Le point 1 de la proposition précédente permet de définir une application associant à un angle orienté, autrement dit à une classe d'équivalence, une rotation puisque la rotation f associée à un représentant ne dépend pas du représentant de la classe choisi. Elle permet aussi de parler de l'angle orienté d'une rotation.

Corollaire 1.2.2.1 : L'application qui à $\widehat{(u,v)}$ de $\mathcal{A}$ associe l'unique rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = v$ est une bijection.
La démonstration est immédiate. En effet, cette application est surjective par le fait que pour toute rotation f de $SO(E)$ le couple $(u, f(u))$ est un couple de vecteurs unitaires, f sera donc l'image de l'angle orienté $\widehat{(u,f(u))}$ associé à ce couple ; et, elle est injective par le fait que si une rotation vectorielle de $SO(E)$ transforme u en v et u' en v', alors par le point 2 de la proposition 1.2.2.2, les deux couples de vecteurs unitaires (u,v) et (u',v') donnent le même angle orienté. □

Définition 1.2.2.3 : L'angle orienté $\widehat{(u,v)}$, associé à la rotation vectorielle f qui envoie u sur v, est appelé « angle de la rotation f ».

Les propositions précédentes permettent de définir une somme sur $\mathcal{A}$ qui le munit d'une structure de groupe abélien, par une loi de composition interne, nommée addition des angles et notée $+$.

Définition 1.2.2.4 : Soient $\widehat{\theta_1}$ et $\widehat{\theta_2}$ deux angles orientés de $\mathcal{A}$ et f_1 et f_2 les rotations de (SO(E), $\circ$) associées. La somme $\widehat{\theta_1} + \widehat{\theta_2}$ est l'angle orienté associé à $f_2 \circ f_1$.

Corollaire 1.2.2.2 : $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif dont l'élément neutre est l'angle $\widehat{(u,u)}$ correspondant à la rotation identité, appelé l'angle nul et que l'on note $\hat{\nu}$.

La démonstration est immédiate. En effet, $SO(E)$ est un groupe commutatif, et, le corollaire 1.2.2.1 indique que la bijection, qui à $\widehat{(u,v)}$ de $\mathcal{A}$ associe l'unique rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = v$, munit d'une structure de groupe par une loi de composition interne $+$. À la rotation identique de matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, élément neutre pour la loi $\circ$ dans $SO(E)$, correspond dans $\mathcal{A}$ l'angle nul $\hat{\nu}$. □

<u>Définition 1.2.2.5</u> : L'angle de deux vecteurs formant une base orthonormée de E est appelé « angle droit », noté $\hat{\delta}$.

<u>Définition 1.2.2.6</u> : Si u est un vecteur unitaire de E alors l'angle orienté $(\widehat{u,-u})$ ne dépend pas de u et est appelé « angle plat » qui est égal à $2\hat{\delta}$.

Il est en effet à remarquer que la rotation associée à $\hat{\delta}$ a pour matrice dans une base orthonormée $\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$. Ainsi, la rotation associée à $2\hat{\delta}$ a pour matrice son carré qui est $\begin{pmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ qui envoie tout vecteur unitaire u sur $-u$.

<u>Remarque</u> : On peut aussi définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}'$ sur les couples de vecteurs unitaires de E par $(u,v)\mathcal{R}'(u',v')$ si et seulement si il existe une rotation f de $SO(E)$ telle que $f(u) = v$ et $f(u') = v'$. Puis, on définit la classe d'équivalence d'un couple (u,v) de vecteurs unitaires de E pour $\mathcal{R}'$ comme étant l'angle orienté de vecteurs unitaires u et v de E.
En effet : pour tout couple de vecteurs unitaires u et v de E, $(u,v)\mathcal{R}(u',v')$ équivaut à $(u,v)\mathcal{R}'(u',v')$, avec pour preuve la démonstration suivante :
$(u,v)\mathcal{R}(u',v')$ si et seulement si il existe f de $SO(E)$ telle que $f(u) = u'$ et $f(v) = v'$.
$(u,v)\mathcal{R}'(u',v')$ si et seulement si il existe f' de $SO(E)$ telle que $f'(u) = v$ et $f'(u') = v'$.
$(u,v)\mathcal{R}(u',v')$ implique $(u,v)\mathcal{R}'(u',v')$, c'est déjà démontré (le point 1 de la proposition 1.2.2.2).
$(u,v)\mathcal{R}'(u',v')$ implique $(u,v)\mathcal{R}(u',v')$ parce que : on considère la rotation f définie par $f(u) = u'$, et on va montrer que $f(v) = v'$.
On a : $f(v) = f\big(f'(u)\big) = f'\big(f(u)\big) = f'(u') = v'$, (car f et f' commutent).

1.2.3. Orientations de l'espace euclidien E et mesure des angles orientés

<u>Définition 1.2.3.1</u> : Soient (i,j) et (i',j') deux bases orthonormées de E, soit f l'isométrie vectorielle de E qui transforme (i,j) en (i',j').

- Si l'isométrie f est de déterminant 1, on dit que les bases (i,j) et (i',j') sont de même orientation.
- Si l'isométrie f est de déterminant -1, on dit que les bases (i,j) et (i',j') sont d'orientations contraires.

<u>Proposition 1.2.3.2</u> : La relation « avoir même orientation » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées.

La démonstration est immédiate. En effet, la relation considérée est :

- réflexive car l'application Id_E est une rotation vectorielle ;
- symétrique car l'application inverse d'une rotation vectorielle est une rotation vectorielle (proposition 1.1.4) ;

- transitive car la composée de deux rotations vectorielles est une rotation vectorielle (proposition 1.1.4). □

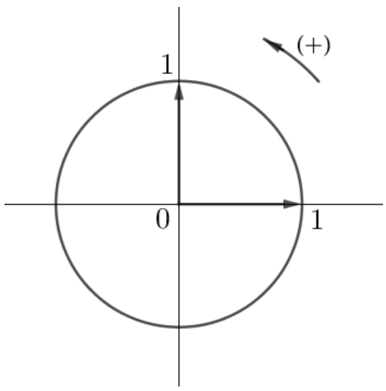
<u>Proposition 1.2.3.3</u> : Soit (i, j) une base orthonormée de E. Toute base orthonormée de E est soit de même orientation que (i, j) soit de même orientation que $(i, -j)$.

Démonstration
Soit (i, j) une base orthonormée de E.
Soit (i', j') une base orthonormée quelconque de E telle que $i' = ai + bj$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Alors, j' étant un vecteur unitaire appartient à la droite vectorielle engendrée par $(-bi + aj)$; donc, $j' = \varepsilon(-bi + aj)$ avec $\varepsilon = \pm 1$, (proposition 1.2.1.1).
Si f_1 est l'isométrie qui transforme la base (i, j) en (i', j'), alors, $f_1(i) = ai + bj$ et $f_1(j) = \varepsilon(-bi + aj)$, d'où $\mathcal{M}_{(i,j)}(f_1) = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon b \\ b & \varepsilon a \end{pmatrix}$ et $\det(f_1) = \varepsilon$.
Si f_2 est l'isométrie qui transforme la base (i, j) en $(i', -j')$, alors, $f_2(i) = ai + bj$ et $f_2(j) = -\varepsilon(-bi + aj)$, d'où $M_{(i,j)}(f_2) = \begin{pmatrix} a & \varepsilon b \\ b & -\varepsilon a \end{pmatrix}$ et $\det(f_2) = -\varepsilon$.
Donc :
- si $\varepsilon = 1$, alors la base (i', j') est de même orientation que la base (i, j) ;
- si $\varepsilon = -1$, alors la base (i', j') est de même orientation que la base $(i, -j)$.

Ainsi, toute base orthonormée de E est soit de même sens que (i, j) soit de même sens que $(i, -j)$. □

Par conséquent, il n'existe que deux classes d'équivalence sur l'ensemble des bases orthonormées de E : la classe de (i, j) et celle de $(i, -j)$.

Orienter l'espace vectoriel euclidien E de dimension 2 c'est choisir arbitrairement l'une de ces deux classes de base orthonormée, toutes les bases de cette classe sont directes. Les autres sont dites indirectes.
Dans le cas du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ l'orientation directe du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ est, par convention, l'orientation antihoraire définie comme la classe de la base orthonormée $\{(1,0)\,;\,(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.



<u>Figure 70</u> : Orientation directe du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$

Proposition 1.2.3.4 : Soient $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ deux bases orthonormées dans la même classe d'orientation de E. Soit f une rotation vectorielle de E dont la matrice dans la base $\mathfrak{B}$ de E est $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{\mathfrak{B}} & -b_{\mathfrak{B}} \\ b_{\mathfrak{B}} & a_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ avec ${a_{\mathfrak{B}}}^2 + {b_{\mathfrak{B}}}^2 = 1$. On a : $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(f) = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}(f)$.

Démonstration

Dans une base orthonormée $\mathfrak{B}$ de E, la matrice de la rotation vectorielle f de E est $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(f) = \begin{pmatrix} a_{\mathfrak{B}} & -b_{\mathfrak{B}} \\ b_{\mathfrak{B}} & a_{\mathfrak{B}} \end{pmatrix}$ avec ${a_{\mathfrak{B}}}^2 + {b_{\mathfrak{B}}}^2 = 1$.

Soit g un endomorphisme de E qui envoie la base $\mathfrak{B}$ sur la base $\mathfrak{B}'$. On a :

$\mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}(f) = [\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(g)]^{-1}\mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(f)M_{\mathfrak{B}}(g) = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(g^{-1}fg)$.

Comme $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'$ sont deux bases orthonormées dans la même classe d'orientation de E, alors $g \in SO(E)$. On a donc $g^{-1}fg = g^{-1}gf = f$ car le groupe $SO(E)$ est un groupe commutatif (proposition 1.2.1.2).

On obtient alors : $\mathcal{M}_{\mathfrak{B}'}(f) = \mathcal{M}_{\mathfrak{B}}(f)$. □

Par conséquent : $a_{\mathfrak{B}} = a_{\mathfrak{B}'}$ et $b_{\mathfrak{B}} = b_{\mathfrak{B}'}$. Ainsi, ces nombres, notés a et b, ne dépendent que de f dans la même classe d'orientation de E. (Rappelons que a et $|b|$ ne dépendent que de f.)

Définition 1.2.3.3 : Soit (i, j) une base orthonormée directe de l'espace euclidien orienté E et soit f une rotation vectorielle de $SO(E)$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$, la matrice de la rotation f dans cette base, on a donc $f(i) = ai + bj$. On appelle :

- nombre a le cosinus de la rotation f ou le cosinus de l'angle orienté $(\widehat{\imath, f(\imath)})$, noté $\cos f$ ou $\cos(\widehat{\imath, f(\imath)})$; $\cos f = < i, f(i) >$.
- nombre b le sinus de la rotation f ou le sinus de l'angle orienté $(\widehat{\imath, f(\imath)})$, noté $\sin f$ ou $\sin(\widehat{\imath, f(\imath)})$; $\sin f = < j, f(i) >$.

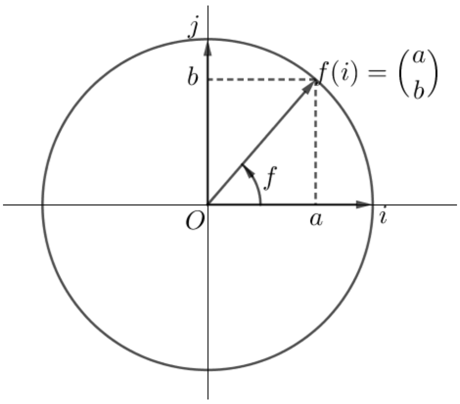


Figure 71 : Le cosinus et le sinus d'une rotation (le cosinus et le sinus d'un angle orienté)

Proposition 1.2.3.5 : Soit (i, j) une base orthonormée directe de l'espace euclidien orienté E et soient f et f' deux rotations vectorielles de $SO(E)$.

1). $\cos f^{-1} = \cos f$ et $\sin f^{-1} = -\sin f$.

2). $(\cos f)^2 + (\sin f)^2 = 1$.

3). $\cos(f \circ f') = \cos f \cos f' - \sin f \sin f'$ et $\sin(f \circ f') = \sin f \cos f' + \sin f' \cos f$.

Démonstration

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, avec $a^2 + b^2 = 1$, la matrice de la rotation f dans la base (i, j) de E.

1). La matrice de la rotation f^{-1}, l'inverse de la rotation f dans la base (i, j) de E, est $A^{-1} = {}^tA = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, (puisque $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et ${}^tAA = I_2$). On obtient : $\cos f^{-1} = a$ et $\sin f^{-1} = -b$.

Comme $\cos f = a$ et $\sin f = b$, (définition 1.2.3.3).

Donc, on en déduit que : $\cos f^{-1} = \cos f$ et $\sin f^{-1} = -\sin f$.

2). Puisque $a^2 + b^2 = 1$, donc on a : $(\cos f)^2 + (\sin f)^2 = 1$.

3). Soit $A' = \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix}$, avec $a'^2 + b'^2 = 1$, la matrice de la rotation f' dans la base (i, j) de E.

Comme $A \times A' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' & -(ab' + a'b) \\ ab' + a'b & aa' - bb' \end{pmatrix}$. On obtient alors : $\cos(f \circ f') = aa' - bb'$ et $\sin(f \circ f') = ab' + a'b = ba' + b'a$.

On en déduit que : $\cos(f \circ f') = \cos f \cos f' - \sin f \sin f'$ et $\sin(f \circ f') = \sin f \cos f' + \sin f' \cos f$. □

<u>Proposition 1.2.3.6</u> : Soient $\hat{\theta}$ et $\widehat{\theta'}$ deux angles orientés de $(\mathcal{A}, +)$.

1). $\cos(-\hat{\theta}) = \cos(\hat{\theta})$ et $\sin(-\hat{\theta}) = -\sin(\hat{\theta})$.

2). $(\cos \hat{\theta})^2 + (\sin \hat{\theta})^2 = 1$.

3). $\cos(\hat{\theta} + \widehat{\theta'}) = \cos \hat{\theta} \cos \widehat{\theta'} - \sin \hat{\theta} \sin \widehat{\theta'}$ et $\sin(\hat{\theta} + \widehat{\theta'}) = \sin \hat{\theta} \cos \widehat{\theta'} - \sin \hat{\theta} \cos \widehat{\theta'}$.

La démonstration est immédiate à partir du corollaire 1.2.2.1 et la proposition 1.2.3.5 précédentes.

Remarquons dans le cas particulier concernant le cosinus et le sinus de l'angle droit, ceux de l'angle nul et ceux de l'angle plat :

$\cos(\hat{\delta}) = 0$, $\sin(\hat{\delta}) = 1$ car la rotation associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\cos(\hat{\nu}) = 1$, $\sin(\hat{\nu}) = 0$ car la rotation associée a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\cos(2\hat{\delta}) = -1$, $\sin(2\hat{\delta}) = 0$ car la rotation associée a pour matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

<u>Corollaire 1.2.3.1</u> : Pour tout angle orienté $\hat{\theta}$, on a :

$\cos(2\hat{\delta} - \hat{\theta}) = -\cos(\hat{\theta})$ et $\sin(\widehat{2\delta} - \hat{\theta}) = \sin(\hat{\theta})$;

$\cos(\hat{\delta} - \hat{\theta}) = \sin(\hat{\theta})$ et $\sin(\hat{\delta} - \hat{\theta}) = \cos(\hat{\theta})$.

La démonstration est immédiate. Exploiter les 3), 1) de la proposition 1.2.3.6 et le cosinus et le sinus de l'angle plat pour $\cos(2\hat{\delta} - \hat{\theta})$ et $\sin(\widehat{2\delta} - \hat{\theta})$, puis le cosinus et le sinus de l'angle droit pour $\cos(\hat{\delta} - \hat{\theta})$ et $\sin(\hat{\delta} - \hat{\theta})$. □

1.2.4. Lien avec la géométrie affine euclidienne

Nous cherchons maintenant à faire un lien entre le cosinus et le sinus d'angles aigu et obtus, et les rapports de longueur dans le triangle rectangle, (comme vus dans l'enseignement de la trigonométrie du secondaire en France et au Cambodge).

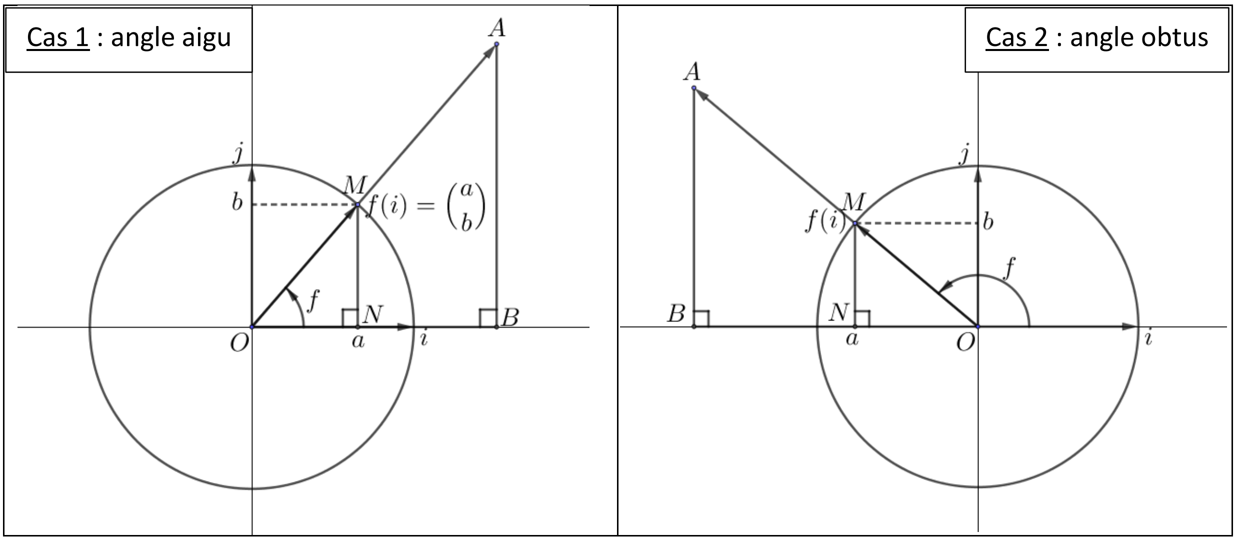


Figure 72 : Le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle

Dans une base orthonormée directe (i, j) du plan, soit f une rotation vectorielle du plan dont la matrice dans la base (i, j) est $\mathcal{M}_{(i,j)}(f) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Soient deux points M et A du plan tels que $\overrightarrow{OM} = f(i)$ et $\overrightarrow{OA} = \lambda f(i)$ avec λ un nombre réel strictement positif. Soient N et B les projetés orthogonaux respectifs des points M et A sur l'axe des abscisses. M a donc pour coordonnées $(a\,; b) = (\cos f\,;\, \sin f)$. On suppose que $b = \sin f > 0$. (Voir *Figure 72* ci-dessus.)

On définit l'angle géométrique $\hat{\theta} = \widehat{(\imath, f(\imath))}$.

1. L'angle $\hat{\theta}$ est appelé « angle aigu » dans le cas où la première composante de $f(i)$ est positive : $a = \cos\hat{\theta} > 0$.
2. L'angle $\hat{\theta}$ est appelé « angle obtus » dans le cas où la première composante de $f(i)$ est négative : $a = \cos\hat{\theta} < 0$.
3. On rappelle que $a = \cos\hat{\theta} = 0$ est le cas de l'angle droit $\hat{\delta}$.

<u>Cas 1</u> : $a > 0$, l'angle $\hat{\theta}$ correspond à l'angle aigu $\widehat{BOA}$ de l'enseignement secondaire, (voir *Figure 72* avec la colonne de gauche).

Sachant que $f(i) = \binom{a}{b}$ et $\overrightarrow{OM} = f(i)$, $\overrightarrow{OA} = \lambda f(i)$ avec $\lambda > 0$, alors M a pour coordonnées $(a\,;\, b)$ et est situé sur le cercle trigonométrique, et le point A appartient à la demi-droite $[OM)$.

D'après la définition 1.2.3.3, on a : $\cos\hat{\theta} = a$ et $\sin\hat{\theta} = b$. On peut écrire : $\cos\hat{\theta} = \frac{a}{1} = \frac{ON}{OM}$ et $\sin\hat{\theta} = \frac{b}{1} = \frac{MN}{OM}$ ($a > 0$ et $b > 0$). On applique le théorème de Thalès (admis) dans le triangle OAB, on a $\frac{ON}{OM} = \frac{OB}{OA} = \frac{MN}{AB}$. On en déduit que $\cos\hat{\theta} = \frac{ON}{OM} = \frac{OB}{OA}$ et $\sin\hat{\theta} = \frac{MN}{OM} = \frac{OB}{OA}$ (on retrouve $\cos\widehat{BOA}$ et $\sin\widehat{BOA}$ des manuels du secondaire).

Cas 2 : $a < 0$, l'angle $\hat{\theta}$ correspond au supplémentaire de l'angle aigu $\widehat{BOA}$ du secondaire, (voir *Figure 72* avec la colonne de droite).

En procédant comme précédemment, on a $\cos \hat{\theta} = \frac{-ON}{OM} = \frac{-OB}{OA}$ $(a < 0)$ et $\sin \hat{\theta} = \frac{MN}{OM} = \frac{OB}{OA}$ $(b > 0)$. En notant $\widehat{\theta'} = 2\hat{\delta} - \hat{\theta}$ (le supplémentaire de $\hat{\theta}$) qui correspond à la rotation g, on a retrouve à nouveau les formule du secondaire : $\cos \widehat{\theta'} = \frac{ON}{OM} = \frac{OB}{OA}$ et $\sin \widehat{\theta'} = \frac{MN}{OM} = \frac{OB}{OA}$ (correspondant à $\cos \widehat{BOA}$ et $\sin \widehat{BOA}$ des manuels du secondaire).

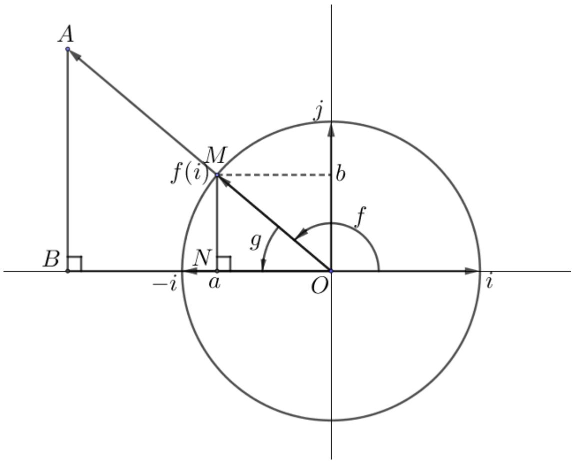


Figure 73 : L'angle plat composé par deux rotations vectorielles du plan

Le cas 1 prouve que le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle, qui sont définis, dans les manuels de mathématiques correspondant au programme actuel du secondaire, comme le quotient des longueurs de deux des côtés du triangle rectangle (voir chapitre 2), sont cohérents avec le cosinus et le sinus d'un angle orienté qui est conforme visuellement à un angle aigu. Le cas 2 prouve qu'un angle obtus a un cosinus négatif et un sinus positif.

1.2.5. La question de la mesure des angles

Notons qu'une demande dans (Chevallard & Bosch, 2001) pour mesurer les grandeurs est d'avoir une relation d'ordre compatible avec l'addition. Or, avec la présente construction, nous ne disposons pas de cette relation. En effet, on souhaiterait poser $\hat{\delta} > \hat{v}$, mais on a $4\hat{\delta} = \hat{v}$.

De plus, la demande de fractionnement (Chevallard & Bosch, 2001 ; Rouche, 1994) n'est pas simple à réaliser. Si l'on choisit un angle unité, il est nécessaire de le fractionner pour tenter de mesurer 'tous les angles'. Cela revient à chercher les racines *n*-ièmes de la rotation associée, mais il n'y a pas unicité (il faudrait une relation d'ordre compatible avec la somme des angles pour identifier le 'bon' angle).

On peut en revanche s'appuyer sur les fractionnements en puissances de deux : $\frac{1}{2}(\widehat{\imath, u}) = (\widehat{\imath, w})$ où w est le vecteur unitaire $\frac{i+u}{\|i+u\|}$ (w dirige la diagonale du parallélogramme construit sur i et u). Les formules d'addition permettent en effet de montrer que $(\widehat{\imath, w}) = (\widehat{w, u})$. Il faudrait toutefois distinguer les cas des sinus positif et négatif. On pourrait ainsi mesurer des angles avec des mesures du type $\frac{K}{2^n}$. Mais pour poursuivre la construction par densité, il est nécessaire de définir une topologie.

Une autre possibilité est d'utiliser la bijection entre les angles et les points du cercle unité (ou les vecteurs unitaires). Cela confère à l'ensemble des vecteurs unitaires (ou points du cercle) une structure de groupe abélien. On peut alors associer à chaque angle la longueur de l'arc de cercle correspondant (on admet l'existence de ces longueurs et le fait que la longueur du cercle est 2π). On dispose alors d'une mesure (en radian) des angles dans le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Nous y reviendrons en section 3.

2. Fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle

2.1. Fonction exponentielle complexe

Rappel – Définition 2.1.1 – *somme d'une série entière* : Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et z une variable complexe. On appelle série entière toute série $\sum a_n z^n$. La somme est la fonction qui à tout complexe z tel que $\sum a_n z^n$ converge, associe $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Remarque : La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge absolument et a un rayon de convergence infini. En effet :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que $u_n = \frac{z^n}{n!}$.

On a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{z^n}\right| = \frac{1}{n+1}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. D'après la règle de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge absolument et a un rayon de convergence infini.

Définition 2.1.2 : Soit z un nombre complexe. On appelle *fonction exponentielle complexe*, notée exp, la fonction somme de la série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ ayant un rayon de convergence infini :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

Remarque : La fonction exponentielle complexe est de classe C^∞.

Proposition 2.1.1 : Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.

Démonstration

Pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, les séries $\sum \frac{z_1^n}{n!}$ et $\sum \frac{z_2^n}{n!}$ convergent absolument, respectivement vers $\exp(z_1)$ et $\exp(z_2)$. En plus, d'après le Théorème dû à Cauchy, le produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries converge absolument vers $\exp(z_1)\exp(z_2)$, on a, pour tout nombre naturel n, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \exp(z_1)\exp(z_2)$, où $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!} \times \frac{z_2^{(n-k)}}{(n-k)!}$.

Pour tout nombre naturel n, on peut écrire : $w_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{(n-k)} = \frac{1}{n!}(z_1 + z_2)^n$.

D'où, $\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = \exp(z_1 + z_2)$.

Par conséquent, $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$. □

Proposition 2.1.2 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z) \neq 0$ et $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.

Démonstration
Par définition, $\exp(0) = 1$.
D'après la proposition 2.1.1, on a : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z)\exp(-z) = \exp(z - z) = \exp(0) = 1$.
Ceci implique $\exp(z) \neq 0$. On en déduit ensuite que $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$. □

Proposition 2.1.3 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$.

Démonstration
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\exp'(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \exp(z)$.
Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$. □

Proposition 2.1.4 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$.

Démonstration
Comme la conjugaison complexe est une application $\mathbb{R}$-linéaire, elle est donc continue.
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{m\leq n} \frac{z^m}{m!}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{m\leq n} \frac{(\overline{z})^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\overline{z})^n}{n!} = \exp(\overline{z})$. □

Proposition 2.1.5 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = 1$ équivaut à $z \in i\mathbb{R}$.

Démonstration
Pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$|\exp(z)|^2 = \exp(z)\overline{\exp(z)} = \exp(z)\exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z}) = \exp\big(2\mathrm{Re}(z)\big) = \big(\exp\big(\mathrm{Re}(z)\big)\big)^2$.
Comme $|\exp(z)| > 0$ et $\exp\big(\mathrm{Re}(z)\big) > 0$, on obtient alors $|\exp(z)| = \exp\big(\mathrm{Re}(z)\big)$.
Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = 1$ équivaut à $\exp\big(\mathrm{Re}(z)\big) = 1$ équivaut à $\mathrm{Re}(z) = 0$.
Donc, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\exp(z)| = 1$ équivaut à $z \in i\mathbb{R}$. □
Ainsi la proposition 2.1.5 exprime que pour tout nombre réel x, $|\exp(ix)| = 1$.

Corolaire 2.1.1 : Soit $z \in \mathbb{C}$ et soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z = x + iy$, on a : $|\exp(z)| = \exp(x)$.

La démonstration est immédiate. En effet : pour tout $z \in \mathbb{C}$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$: $|\exp(z)| = |\exp(x)\exp(iy)| = |\exp(x)||\exp(iy)| = \exp(x)$. □

Les propositions 2.1.1 et 2.1.2 indiquent que la fonction exponentielle complexe est un morphisme du groupe additif $\mathbb{C}$ vers le groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$.

Proposition 2.1.6 : Le morphisme $\exp : (\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \times)$ est surjectif.

Démonstration

Nous prouvons la surjectivité du morphisme exp en distinguant deux cas ci-après.
<u>Cas 1</u> : $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$
Soit f l'application de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre réel t de $[0;1]$, associe $1-t+tz_0$. f est à valeur dans $[1;z_0]$, continue, dérivable, à dérivée continue, et ne prend donc jamais la valeur 0.
Soit g l'application de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre réel t de $[0;1]$, associe $\int_0^t \frac{f'(u)}{f(u)}du$.
Comme la fonction $u \mapsto \frac{f'(u)}{f(u)}$ est définie et continue, g est dérivable et de dérivée $g'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}$. On a aussi $f(t)g'(t) = f'(t)$ pour tout t de $[0;1]$.
Soit h l'application de $[0;1]$ dans $\mathbb{C}$, qui à tout nombre réel t de $[0;1]$, associe $f(t)\exp\bigl(-g(t)\bigr)$. h est donc constante sur $[0;1]$ car pour tout t de $[0;1]$, $h'(t) = f'(t)\exp\bigl(-g(t)\bigr) - f(t)g'(t)\exp\bigl(-g(t)\bigr) = 0$.
Comme $h(0) = 1 \times \exp(0) = 1$, on en déduit alors pour tout t de $[0;1]$, $h(t) = 1$, et, $f(t) = \exp\bigl(g(t)\bigr)$.
En particulier, pour $t = 1$, $f(1)\exp\bigl(-g(1)\bigr) = 1$ et donc $\exp\bigl(g(1)\bigr) = z_0$.

<u>Cas 2</u> : $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$
Si $z_0 \in \mathbb{R}_-^*$, alors $-z_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et il existe u dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\exp(u) = -z_0$ (cas 1).
Par ailleurs, i appartient à $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-^*$ donc (cas 1), il existe v dans $\mathbb{C}^*$ tel que $\exp(v) = i$ et donc $\exp(2v) = i \times i = -1$. Ainsi, on a $\exp(u+2v) = (-z_0) \times (-1) = z_0$. □

2.2. Restriction de la fonction exponentielle complexe à $\mathbb{R}$
De la définition 2.1.2, des propositions 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.3 et le corolaire 2.1.1 découlent la fonction exponentielle réelle, par la restriction à $\mathbb{R}$, avec ses propriétés.
Cette fonction exponentielle réelle est de classe C^∞ et à tout nombre réel x, associe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est positive strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a : $\exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$; $\exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$. En effet :
Pour tout nombre réel x, $\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$
Pour $x \geq 0$, on a alors $\exp(x) \geq 1$.
Pour $x \leq 0$, on a $-x \geq 0$, donc $\exp(-x) \geq 1$. Or, $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$, on en déduit alors $0 < \exp(x) \leq 1$.
Par conséquent, pour tout nombre réel x, $\exp(x) > 0$.
Comme pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$, donc $\exp'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, ce qui exprime que la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour $x \geq 0$, pour tout nombre entier naturel n, $\exp(x) \geq \frac{x^n}{n!}$. Comme $\frac{x^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on obtient alors $\exp(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Or $\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)}$, d'où $\exp(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.

De tout cela en résulte que la fonction exponentielle $x \mapsto \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est positive, continue, strictement croissante et définit ainsi une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2.3. Cercle unité dans $\mathbb{C}$

Soit U l'ensemble des nombres complexes de module 1.

<u>Proposition 2.3.1</u> : Soit φ l'application du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe multiplicatif $(U, \times)$, qui à tout nombre réel x associe $\exp(ix)$. φ est un morphisme continu surjectif.

Démonstration

L'application φ est un morphisme de groupes parce que : quels que soient les nombres réels x et y, on a $\varphi(x + y) = \exp(ix + iy) = \exp(ix) \times \exp(iy) = \varphi(x) \times \varphi(y)$.

Comme la fonction exponentielle $z \mapsto \exp(z)$ est continue sur tout $\mathbb{C}$ (propriété sur la série convergente ayant un rayon de convergence infini), l'application $\varphi : x \mapsto \exp(ix)$ est alors continue sur $\mathbb{R}$ par restriction.

φ est surjectif, en effet :

Soit $u \in U$, par surjectivité de exp sur $\mathbb{C}^*$, il existe z de $\mathbb{C}$ tel que $\exp(z) = u$, (proposition 2.1.6). La proposition 2.1.5 dit : pour tout z de $\mathbb{C}$, $|\exp(z)| = 1$ équivaut à $z \in i\mathbb{R}$. Donc, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $z = ix$ et donc $u = \exp(ix)$. Ainsi $u \in Im(\varphi)$. □

<u>Proposition 2.3.2</u> : Le noyau de l'application φ définie ci-dessus est un sous-groupe de la forme $a\mathbb{Z}$ où a est un nombre réel positif non nul. Le morphisme φ est a-périodique.

Démonstration

La propriété des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$ indique que $Ker(\varphi)$ est : soit partout dense dans $\mathbb{R}$, soit sous forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \geq 0$.

$Ker(\varphi)$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$ car sinon, par continuité, pour tout nombre réel x, $\varphi(x) = 1$, ce qui est impossible car φ est surjective.

Donc, il existe $a \geq 0$ tel que $Ker(\varphi) = a\mathbb{Z}$.

Si $a = 0$, alors $Ker(\varphi)$ est réduit à 0. Le morphisme φ est alors injectif, donc φ est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans le groupe $(U, \times)$ car φ est surjectif d'après la proposition 2.2.1. Si φ est un isomorphisme continu alors $\mathbb{R}$ et U sont homéomorphes (même structure topologique). Ce n'est pas possible car, par exemple, U privé d'un point est connexe alors que $\mathbb{R}$ privé d'un point n'est pas connexe.

Donc $Ker(\varphi) = a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Par définition, a est le plus petit nombre réel strictement positif tel que $\exp(ia) = 1$. Pour tout nombre réel x, on a : $\varphi(x + a) = \exp(ix + ia) = \exp(ix) \times \exp(ia) = \exp(ix) = \varphi(x)$. Le morphisme φ est donc périodique de période a. □

Par conséquent, $\exp(iak) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

<u>Définition 2.3.1</u> : On définit le nombre π par $\pi = \frac{a}{2}$ pour a défini ci-dessus.

<u>Corollaire 2.3.1</u> : La fonction exponentielle complexe est périodique de période $2i\pi$.

La démonstration est immédiate, en effet :

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\exp(z+2i\pi) = \exp(z)\exp(2i\pi) = \exp(z) \times 1 = \exp(z)$. □

Proposition 2.3.3 : $\exp(i\pi) = -1$.

Démonstration
On pose $z = \exp(i\pi)$. On a alors $z^2 = \exp(2i\pi)$. Comme $\exp(2i\pi) = 1$, on obtient $z^2 = 1$, donc $z = 1$ ou $z = -1$. Si $z = 1$ alors $Ker(\varphi)$ contient $\pi\mathbb{Z}$. Or $Ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$ (proposition 2.3.2), donc $z = 1$ est impossible.
Par conséquent, $z = -1$, donc $\exp(i\pi) = -1$. □

Proposition 2.3.4 : Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un nombre réel θ tel que $z = |z|\exp(i\theta)$; θ étant défini modulo 2π.

Démonstration
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, z peut s'écrire : $z = |z| \times \frac{z}{|z|}$. Or, $\frac{z}{|z|} \in U$ car $\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$.
Alors, il existe un nombre réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \exp(i\theta)$. Donc, $z = |z|\exp(i\theta)$.
De plus, θ est bien défini modulo 2π car $\theta \mapsto \exp(i\theta)$ est 2π-périodique (proposition 2.3.2). □

Définition 2.3.2 : Tout nombre complexe z non nul s'écrit sous la forme $z = |z|\exp(i\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$. $z = |z|\exp(i\theta)$ est appelé la forme polaire de z. θ est défini modulo 2π et la classe de θ est notée par $\tilde{\theta}$. $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est appelé l'argument de z et noté $Arg(z)$.

2.4. Fonction cosinus et sinus d'une variable réelle

Proposition 2.4.1 : Pour tout nombre réel x, pour tout nombre entier naturel n, $\exp(ix) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$.

La démonstration est immédiate. En effet, pour tout nombre réel x, $\exp(ix) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(ix)^n}{n!}$ qui peut s'écrire en somme $\left(\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right)$. □

Définition 2.4.1 : Les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle x à valeurs dans $\mathbb{R}$, notées respectivement $\cos(x)$ et $\sin(x)$, sont définies comme suit : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Remarque : Pour tout nombre réel x, $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$. Ceci exprime que les fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle x sont définies comme étant respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $\exp(ix)$, notées $\mathrm{Re}(\exp(ix))$ et $\mathrm{Im}(\exp(ix))$.

Remarquons que les fonctions cosinus et sinus peuvent être définies sur $\mathbb{C}$ tout entier : $\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, avec $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$.

Proposition 2.4.2 : Les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ convergent et elles ont un rayon de convergence infini. Les fonction cosinus et sinus sont donc définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout nombre réel x, $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Soient deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $b_n = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

On a $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \times \frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\right| = \left|\frac{-1}{(2n+1)(2n+2)} x^2\right| = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

et $\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right| = \left|(-1)^{n+1} \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \times \frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\right| = \left|\frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} x^2\right| = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} x^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, on en déduit que les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes et ont un rayon de convergence infini.

Ainsi les fonctions cosinus et sinus convergent et elles ont un rayon de convergence infini.

Par conséquent, les fonctions cosinus et sinus sont continues sur $\mathbb{R}$, et elles sont de classe C^∞.

□

Proposition 2.4.3 : Pour tout nombre réel x, les relations (1) et (2) ci-dessous sont équivalentes.

$$(1) \begin{cases} \cos(x) = \frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix)] \\ \text{et} \\ \sin(x) = \frac{1}{2i}[\exp(ix) - \exp(-ix)] \end{cases} \qquad (2)\ \exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

Démonstration

(1) implique (2), en effet, en remarquant que

$$\cos(x) + i\sin(x) = \frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix) + \exp(ix) - \exp(-ix)] = \exp(ix)$$

(2) implique (1), en effet, en remarquant que $\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x)$, on a :

$$\begin{cases} \exp(ix) + \exp(-ix) = \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x) \\ \exp(ix) - \exp(-ix) = \cos(x) + i\sin(x) - \cos(x) + i\sin(x) = 2i\sin(x) \end{cases}$$

□

Proposition 2.4.4 : Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

Démonstration

C'est immédiat par (1) de la proposition 2.4.3 car $x \mapsto \exp(ix)$ et $x \mapsto \exp(-ix)$ sont 2π-périodiques. □

Proposition 2.4.5 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

Démonstration

D'après la proposition 2.1.3, on a aussi pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$.

Pour tout nombre réel x, on a $\exp'(ix) = i\exp(ix)$.

Comme $\exp'(ix) = \cos'(x) + i\sin'(x)$ et

comme $i\exp(ix) = i(\cos(x) + i\sin(x)) = -\sin(x) + i\cos(x)$.
Par conséquent, $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. □

Proposition 2.4.6 : Pour tout nombre réel x, $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$.

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = \frac{1}{2}[\exp(ix) + \exp(-ix)]$ et $\sin(x) = \frac{1}{2i}[\exp(ix) - \exp(-ix)]$.
On obtient :

$$\begin{cases} |\cos(x)| = \frac{1}{2}|\exp(ix) + \exp(-ix)| \leq \frac{1}{2}(|\exp(ix)| + |\exp(-ix)|) = 1 \\ |\sin(x)| = \frac{1}{2|i|}|\exp(ix) - \exp(-ix)| \leq \frac{1}{2}(|\exp(ix)| + |\exp(-ix)|) = 1 \end{cases}$$

(car $|i| = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\exp(ix)| = 1$, $|\exp(-ix)| = 1$)
Donc pour tout nombre réel x, $|\cos(x)| \leq 1$ et $|\sin(x)| \leq 1$. □

Proposition 2.4.7 :
1). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.
2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
3). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
et $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

Démonstration
1). D'après la proposition 2.4.3, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-ix) = \cos(x) - i\sin(x)$.
Comme $\exp(-ix) = \cos(-x) + i\sin(-x)$.
On en déduit que $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

2). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\exp(ix)| = 1$, d'où $|\exp(ix)|^2 = 1$ soit $\exp(ix)\overline{\exp(ix)} = 1$ soit $\exp(ix)\exp(\overline{ix}) = 1$ soit $\exp(ix)\exp(-ix) = 1$

$$(\cos(x) + i\sin(x))(\cos(x) - i\sin(x)) = 1$$
$$(\cos(x))^2 - (i\sin(x))^2 = 1$$
$$(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1 \qquad (i^2 = -1)$$

3). Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\exp\big(i(x + y)\big) = \exp(ix)\exp(iy)$.
Comme $\exp\big(i(x + y)\big) = \cos(x + y) + i\sin(x + y)$
et $\exp(ix)\exp(iy) = (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))$
$\exp(ix)\exp(iy) = (\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)) + i(\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x))$
On en déduit que : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
et $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$. □

Corollaire 2.4.1 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp\big(i(\pi - x)\big) = -1 \times \exp(-ix) = -(\cos(x) - i\sin(x)) = -\cos(x) + i\sin(x)$, ($\exp(i\pi) = -1$ avec la proposition 2.2.3).
Comme $\exp\big(i(\pi - x)\big) = \cos(\pi - x) + i\sin(\pi - x)$.
On en déduit donc que $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$. □

Proposition 2.4.8 : $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$ et $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i$.

Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.
On a $\exp(0) = 1$ soit $\exp(i0) = 1$ soit $\cos(0) + i\sin(0) = 1$, donc $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$.
On a $\exp(i\pi) = -1$ soit $\cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1$, donc $\cos(\pi) = -1$ et $\sin(\pi) = 0$.
Or $\exp(i\pi) = -1$ soit $\exp\left(2 \times i\frac{\pi}{2}\right) = i^2$ soit $\exp^2\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i^2$, donc $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = \pm i$.
On en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pm 1$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction cosinus est continue et $|\cos(x)| \leq 1$. On en déduit que $\cos(x) \geq 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. En effet, s'il existe $t \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\cos(t) = 0$, cela implique que $\sin(t) = \pm 1$ et donc $\exp(it) = \pm i$, ce qui est impossible avec l'injectivité de φ sur $[0\,;2\pi[$ puisque $\left\{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right);\ \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right\} = \{-i; i\}$.
Comme pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos(x)$, d'où $\sin'(x) \geq 0$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Donc, la fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Puisque $\sin(0) = 0$, on obtient alors $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$.
Par conséquent, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$ est impossible. Donc, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.
On en déduit que $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right) = i$.
On a $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 - i = -i$.
Donc $\exp\left(-i\frac{\pi}{2}\right) = -i$. □

Corollaire 2.4.2 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$.
Démonstration
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = i\exp(-ix) = i(\cos x - i\sin x) = i\cos x + \sin x$.
Comme $\exp\left(i\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
On en déduit donc que : $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$. □

Désormais, on connaît les variations de cos et sin sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. On obtient les variations sur $[0\,;\pi]$ avec le corollaire 2.4.1, puis sur $[-\pi\,;\pi]$ par parité avec 1) de la proposition 2.4.7, et, enfin sur $\mathbb{R}$ par périodicité.

Graphiques des fonctions cosinus et sinus

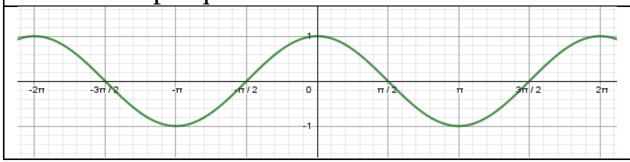
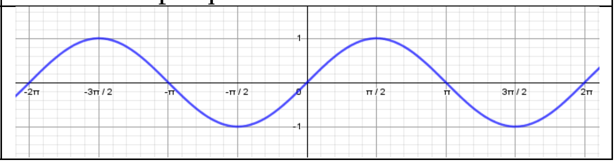
Graphique de la fonction cosinus	Graphique de la fonction sinus
	

Figure 74 : Représentation graphique des fonctions cosinus et sinus

3. Longueur d'un arc de cercle – Enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

Dans toute la section 3, on considère le plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ étant muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$[7], et le plan vectoriel euclidien E associé, muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Rappelons que :

- l'application qui, au point $P(x\,; y)$, associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe du point P, est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$;
- l'application qui, au vecteur $v(x\,; y)$, associe le nombre complexe $z = x + iy$, affixe du vecteur v, est une bijection de E sur $\mathbb{C}$.

3.1. Longueur d'un arc

Rappels :

On appelle arc paramétré du plan un sous-ensemble γ du plan tel qu'il existe un intervalle I de $\mathbb{R}$ et une fonction f de I sur $\mathbb{C}$, tel que γ soit l'ensemble[8] des points d'affixe $f(t)$, t décrivant I. γ est alors noté $\gamma = (I, f)$.

Définition 3.1.1 : On définit $\gamma_{a,b} = \{f(t) \in \mathbb{C} | t \in [a\,; b]\}$ un arc paramétré entre a et b $(a < b)$. On considère l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans l'arc $\gamma_{a,b}$, c'est-à-dire des longueurs des lignes polygonales dont les extrémités sont les points d'affixe $f(t_i)$ où $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b$ est une subdivision de $[a\,; b]$.[9]

Si cet ensemble possède une borne supérieure, on dit que $\gamma_{a,b}$ est rectifiable et de longueur cette borne supérieure. Cette longueur est alors notée $l(\gamma_{a,b})$.

Proposition 3.1.1 (admis) : Soit $\gamma_{a,b} = ([a\,; b], f)$ un arc paramétré de classe C^1, c'est-à-dire que f est de classe C^1 $(a < b)$. Alors γ est rectifiable, et la longueur de l'arc paramétré est la valeur de l'intégrale suivante : $l(\gamma_{a,b}) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$. (Voir par exemple Ramis, Deschamps & Odoux, 1989, pp. 89-95)

Rappelons la définition 2.4.1 exprimant que pour tout nombre réel x, $\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Soit M le point d'affixe $\varphi(x) = \exp(ix)$, donc les coordonnées du point M sont $(\cos(x)\,;\ \sin(x))$.

Soit φ la fonction qui à tout nombre réel x associe $\exp(ix)$ à valeurs dans l'ensemble des nombres complexes. Cette fonction permet de paramétrer tous les arcs du cercle unité du plan. Il faut bien noter que plusieurs paramétrages sont possibles pour le même arc de cercle, en faisant varier l'intervalle I, en fonction de $Ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$. En particulier, dès que l'intervalle

---

[7] On remarque que contrairement à ce que nous avons fait précédemment (première partie de ce chapitre), nous revenons à la notation vectorielle pour les vecteurs de base du plan, ceci pour éviter la confusion avec le nombre complexe i.

[8] En fait, il faudrait distinguer l'arc paramétré γ qui est une application de I dans le plan de son support qui est l'ensemble image. Un même sous-ensemble peut avoir plusieurs paramétrisation.

[9] Comme il est d'usage dans les mathématiques universitaires, le terme « longueur » est utilisé pour désigner un nombre réel, c'est-à-dire une mesure. « Grandeur » et « mesure de grandeur » ne sont pas différenciés.

I est de longueur supérieure à 2π, le support de l'arc paramétré obtenu est le cercle tout entier, dont une partie au moins est obtenue plusieurs fois.

Proposition 3.1.2 : Soit M le point d'affixe $\exp(ix)$. La longueur (algébrique) de l'arc de cercle unité de paramétrage $([0\,;x],\varphi)$ est $\int_0^x \|\varphi'(t)\|dt = x$. En particulier, le cercle unité a une longueur égale à 2π.

La démonstration est immédiate avec la formule de la proposition 3.1.1, et, le fait que $\exp(ix)$ est de module 1.

Remarque : Cette paramétrisation du cercle trigonométrique est une paramétrisation normale car φ est dérivable et pour tout x de $\mathbb{R}$, $|\varphi'(x)| = 1$. Cela veut dire que les distances dans l'ensemble de départ et celles dans l'ensemble d'arrivée sont identiques : $|\varphi(x) - \varphi(y)| = |x - y|$. Par ailleurs, un théorème permet d'affirmer que deux paramétrisations normales d'un même arc diffèrent uniquement par le signe et l'origine, autrement dit, pour le cercle, une paramétrisation normale est de la forme $\pm\varphi + \text{Cte}$.

3.2. Interprétation de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique

Rappelons (proposition 2.3.1) que l'application φ du groupe additif $(\mathbb{R},+)$ vers le groupe multiplicatif $(U,\times)$, qui à tout nombre réel x associe $\exp(ix)$, est un morphisme continu surjectif.

Cette proposition 2.3.1 interprète la notion d'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, introduit en Seconde dans l'institution du secondaire français actuelle. L'idée est la suivante : on considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Le groupe $(\mathbb{R},+)$ est représenté par la droite numérique d, munie d'une origine I (avec I tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{\imath}$) et d'un vecteur unitaire $\vec{\jmath}$. Et, le groupe $(U,\times)$ est représenté par le cercle unité $\mathscr{C}$, muni d'une origine I. (Voir *Figure 75*).

Notons qu'ici il n'y a pas de quotient par $2\pi\mathbb{Z}$, tous les tours sont comptabilisés.

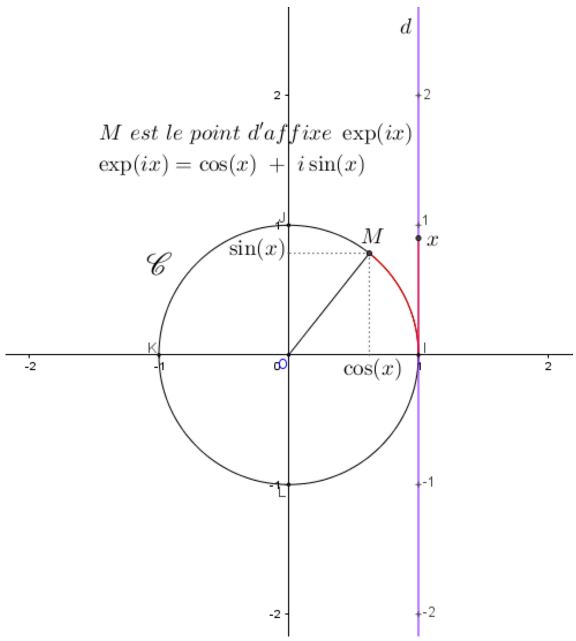


Figure 75 : Représentants des groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(U,\times)$ liés au principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique vu en Seconde

3.3. Angle et mesures d'angle

Rappelons que $\mathcal{A}$ est l'ensemble des angles orientés de vecteurs unitaires.

Comme $Ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}$ et que φ est surjective sur le cercle unité, on définit une application ϕ de $(\mathcal{A},+)$ vers $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},+)$, qui à tout angle $\hat{\theta}$ de $\mathcal{A}$, associe $\tilde{x}$, classe de x dans $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, où x est tel que $\exp(ix)$ soit l'affixe du vecteur $\vec{u}$, où $\vec{u}$ est tel que $(\widehat{\vec{\imath},\vec{u}}) = \hat{\theta}$.
On va prouver que ϕ est un isomorphisme.

Soient $\hat{\theta} = (\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$, $\hat{\theta'} = (\widehat{\vec{\imath},\overrightarrow{u'}})$. Soient x et x' tels que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ aient pour affixes respectifs $\exp(ix)$ et $\exp(ix')$. La rotation vectorielle f associée à $\hat{\theta}$ a donc pour matrice, dans la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan vectoriel euclidien, $\mathcal{M}_{(\vec{\imath},\vec{\jmath})}(f) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$. On a donc $f(\vec{\imath}) = \vec{u}$.
On cherche donc à identifier $\hat{\theta} + \hat{\theta'} = (\widehat{\vec{\imath},\vec{w}})$ où $\vec{w} = f(\overrightarrow{u'})$.
On a alors $\vec{w} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x' \\ \sin x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \cos x' - \sin x \sin x' \\ \sin x \cos x' + \cos x \sin x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+x') \\ \sin(x+x') \end{pmatrix}$, et donc $\vec{w}$ a pour affixe $\exp(i(x+x'))$.
On en déduit que $\phi(\hat{\theta} + \hat{\theta'}) = \widetilde{x+x'} = \tilde{x} + \tilde{x'} = \phi(\hat{\theta}) + \phi(\hat{\theta'})$. D'où ϕ est un morphisme.
Supposons que $\phi(\hat{\theta}) = \tilde{0}$. Comme $\hat{\theta} = (\widehat{\vec{\imath},\vec{u}})$ où $\vec{u}$ a pour affixe $\exp(ix)$, $\phi(\hat{\theta}) = \tilde{0}$ implique que $\vec{u}$ a pour affixe $\exp(i0) = 1$. D'où $Ker(\phi)$ réduit à l'angle nul. ϕ est donc injective, la surjectivité étant évidente, par conséquent : ϕ est un isomorphisme de groupe additif.

<u>Remarque</u> : $\phi(\hat{\nu}) = \tilde{0}$ puisque $1 = \exp(i0)$; $\phi(2\hat{\delta}) = \tilde{\pi}$ puisque $-1 = \exp(i\pi)$; $\phi(\hat{\delta}) = \frac{\tilde{\pi}}{2}$ puisque $i = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$.

Cet isomorphisme permet aussi de définir une mesure sur les angles qui est à valeur dans le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Cette mesure est particulière à deux titres : d'une part elle n'est pas à valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$ comme la plupart des grandeurs usuelles et, d'autre part, elle est définie par l'intermédiaire d'une autre grandeur, qui est la longueur, ce qui est peu commun (citons toutefois le temps qui est mesuré par des variations d'espace).

Conclusion

Rappelons que :

- la section 1 consiste en une approche géométrique dans laquelle on définit la notion d'angle orienté de vecteurs ainsi que le cosinus et le sinus d'un angle orienté (ou une rotation vectorielle), (notés respectivement par $\cos_{(1)}$ et $\sin_{(1)}$) ;
- la section 2 consiste en une approche analytique dans laquelle on définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel ou bien des fonctions cosinus et sinus d'une variable réelle, (notés respectivement par $\cos_{(2)}$ et $\sin_{(2)}$) ; cette approche produit également une paramétrisation du cercle unité ;

- la section 3 s'appuie sur cette paramétrisation pour mesurer les angles orientés d'une part, et d'autre part, pour mettre ces mesures en relation avec la mesure de la longueur des arcs de cercle.

Comme on l'a vu au cours des sections 1 et 2, les deux types des fonctions ont exactement les mêmes propriétés et la section 3 nous prouve que pour tout nombre réel x : $\cos_{(2)}(x) = \cos_{(1)}(\phi^{-1}(\tilde{x})$ et $\sin_{(2)}(x) = \sin_{(1)}(\phi^{-1}(\tilde{x})$.
Mais, $\cos_{(1)}$ et $\cos_{(2)}$ (resp. $\sin_{(1)}$ et $\sin_{(2)}$) ne désignent pas les mêmes fonctions car les variables sont des objets mathématiques différents. On voit également que la relation, qui n'est pas une identification, n'est pas triviale.
Dans l'enseignement de la trigonométrie du secondaire actuel, on travaille avec les mêmes signes cos et sin pour représenter les objets mathématiques différents concernant le cosinus et le sinus, ce qui peut mener à des écritures du types $\cos(\theta) = \cos(x)$ où θ est un angle, et x, un nombre réel. Une confusion des objets en jeu peut émerger, sans compter que x peut désigner différents objets mathématiques (cf. chapitre 2).
Bien entendu, la notion de quotient est particulièrement abstraite. Néanmoins, il est à noter que dans le thème de cette thèse, le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ a une représentation géométrique simple puisqu'il s'agit du cercle unité. Ainsi, on pourrait introduire les notations $\cos(M)$ et $\sin(M)$ pour un point M du cercle. Cet intermédiaire, entre angle orienté et nombre réel, pourrait être intéressant pour l'enseignement.
Sans parler des quotients qui sont d'un niveau d'abstraction vraisemblablement trop élevé pour le secondaire, il nous semble qu'il y a matière à éclaircissement en distinguant les différents objets et que sans cet éclaircissement il y a un risque de confusion. Nous faisons également l'hypothèse que la théorie que nous venons de développer devrait être étudiée par les étudiants se destinant à l'enseignement secondaire des mathématiques. On a vu dans l'analyse des manuels que leurs auteurs n'avaient pas forcément une claire conscience de l'organisation mathématique en jeu, les liens entre les différentes OML ou entre certains objets d'une même OML leur restant obscurs. À notre sens, la théorie présentée ici propose une structuration régionale (au sens donné à ce terme dans la TAD) susceptible de construire une vision cohérente utile aux enseignants.
On peut également se questionner sur l'utilité de l'appui sur l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ pour l'étude de l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$. Nous y reviendrons en conclusion.

Chapitre IV : Un questionnaire pour savoir ce qu'ont appris les élèves

1. Introduction

Dans l'enseignement de mathématiques dans le secondaire en France, on intègre au fur et à mesure les notions de trigonométrie et celles de fonctions sinus et cosinus depuis la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique. L'étude de la praxéologie mathématique des programmes et des manuels dans le chapitre 2, nous mènes à nous focaliser sur les trois OML existantes déterminées :

(1) $OML_{Triangle}$, (en 4e, en 3e, en 1re Scientifique) ;
(2) OML_{CTrigo}, (en Seconde, en 1re Scientifique) ;
(3) $OML_{FoncTrigo}$, (en Terminale Scientifique).

Nous savons qu'il y a inévitablement un problème d'articulation de ces praxéologies mathématiques ; les travaux dont nous avons rendu compte dans notre présentation de l'état de l'art l'ont montré. L'étude réalisée dans le chapitre 2 a également mis en évidence que certains changements de rapports au savoir restent implicites dans les manuels étudiés. Durant les cinq dernières années du secondaire, les mêmes termes « cosinus » et « sinus » et les mêmes signes « cos » et « sin » sont utilisés pour désigner des objets d'étude différents mais ayant un lien très fort entre eux :

- cosinus et sinus d'un angle géométrique aigu ou obtus ;
- cosinus et sinus d'un nombre réel ;
- cosinus et sinus d'un angle orienté de deux vecteurs.

De la Seconde à la 1re Scientifique, au regard de l'étude des manuels, nous remarquons qu'à partir du principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique jusqu'à la définition des mesures en radians d'un angle orienté de deux vecteurs, la notation x désigne à la fois, et sans contradiction (voir *Figure 47*, Math'x 2011-p. 292 - chapitre 2), l'abscisse du point de l'axe numérique porté par la tangente en I au cercle trigonométrique, une mesure de la longueur de l'arc de cercle IM et une mesure en radians de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires dans l'ordre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$, (voir *Figure 50* du chapitre 2 que l'on rappelle ci-dessous).

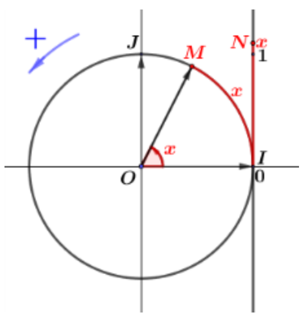


Figure 50 (du chapitre 2) : Différentes utilisations du signe x (cf. *Figure 47*)

Les fonctions sinus et cosinus sont introduites en Terminale Scientifique à l'aide des objets de savoir sur le cercle trigonométrique vus en Seconde et en 1re Scientifique. Notons que lors du passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle x, selon les propos des manuels de Terminale Scientifique, coexistent deux cadres analytiques dans lesquels :

1. D'une part, le signe x est mobilisé, dans le cadre de la géométrie repérée, en 1re Scientifique, par les trois objets d'étude indiqués précédemment. Puis en Terminale Scientifique, dans le cadre de l'analyse, le *non-ostensif* représenté par x change de nature, puisque x représente usuellement un nombre réel qui est l'abscisse, sur l'axe des abscisses $(x'Ox)$, du point décrivant la courbe représentative de la fonction sinus/cosinus.
2. Et d'autre part, le signe $\cos x$ (resp. $\sin x$) représente dans le premier cadre (l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point image associé à x dans l'enroulement et dans le deuxième cadre (l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$) l'ordonnée du point qui décrit la courbe représentative de la fonction cosinus (resp. la fonction sinus) d'abscisse x.

La deuxième question de notre recherche « QR2 » est, rappelons-le : ***Qu'est-ce que les élèves ont appris dans l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus à travers les principaux cadres (géométrique, géométrie-repérée, fonctionnel) ? Quelles sont les difficultés des élèves, en particulier relativement à l'articulation des différentes OML sur le sinus et le cosinus ?*** Pour l'aborder, nous avons élaboré un questionnaire dont l'objectif est de tester les connaissances acquises par les élèves au cours des cinq dernières années du secondaire sur la trigonométrie et plus spécifiquement les fonctions sinus et cosinus en Terminale Scientifique. Nous souhaitons aussi repérer les difficultés, attendues ou non, des élèves en Terminale Scientifique sur ces savoirs. Ce questionnaire comporte six questions sous forme d'exercices, concernant principalement le passage des cosinus et sinus d'un angle dans le triangle aux cosinus et sinus d'un nombre réel dans le cercle trigonométrique ainsi que certaines propriétés de la fonction sinus/cosinus (en particulier, parité et périodicité). L'étude praxéologique présentée dans le chapitre 2, avec les types de tâches clefs repérés, nous a aidée à affiner le choix de ces exercices.

En ce qui concerne l'analyse du questionnaire, nous choisissons la *Double Approche didactique et ergonomique* (DA dans la suite) (Robert, 2008 ; Robert et Rogalski, 2002) qui nous fournit des outils fins d'analyse des tâches pour l'analyse *a priori* et l'analyse *a posteriori* sur les connaissances en jeu. Nous étudions les *adaptations des connaissances* et nous repérons particulièrement les connaissances qui interviennent dans notre questionnaire au niveau *disponible*. Cela nous permet de mener une réflexion cognitive sur le questionnaire et sur ce que les élèves ont appris, notamment en termes de connaissances disponibles.
Remarquons qu'en ce qui concerne le questionnaire, nous considérons dans nos analyses qu'il s'agit d'un test posé en Terminale Scientifique en dehors du contexte d'un chapitre particulier ; ce questionnaire a deux versions semblables A et B afin d'éviter d'éventuelles communications entre élèves assis côte à côte lors de la passation du questionnaire.

L'analyse *a posteriori* du questionnaire nous permet de voir clairement, d'une part, l'intérêt potentiel des trois premières questions I, II, III.1 correspondant respectivement aux trois OML déterminées dans le chapitre 2, et d'autre part, les difficultés des élèves sur la mise en fonctionnement de leurs connaissances apprises sur les cosinus et sinus d'un angle et sur les cosinus et sinus d'un nombre réel dans des cadres géométrique et/ou fonctionnel. Nous

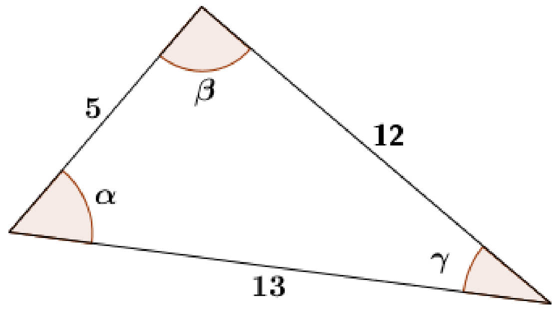
faisons le choix de nous concentrer sur la question des transitions entre les trois OML plus que sur l'enseignement des fonctions. Donc, dans le corps de la thèse, nous n'exposons que les analyses *a priori* (version A) et *a posteriori* (versions A et B) des trois premières questions I, II, III.1 du questionnaire.
Nous présentons des résolutions de ces trois premières questions, le reste figurant dans l'annexe n° 3, pp. 410-425.

2. Choix et objectifs du questionnaire

Nous exposons maintenant les intentions didactiques qui ont guidé l'élaboration du questionnaire pour les trois premières questions I, II, III.1 ; nous explicitons les choix réalisés et leurs raisons d'être. Dans la suite, nous présentons seulement les énoncés de la version A ; les deux versions A et B figurent dans l'annexe n° 3, pp. 410-412.

Question I : elle porte sur l'$OML_{Triangle}$ dans le cadre géométrique du domaine « Géométrie ». Elle consiste à déterminer numériquement les valeurs du cosinus et du sinus d'un angle dans un triangle (rectangle) dont on connaît les longueurs des trois côtés.

On considère un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives 5, 12 et 13 comme indiqué dans la figure ci-dessous. Donner les valeurs des cosinus et sinus de α, de β et de γ où α, β et γ sont les angles indiqués du triangle, en justifiant votre réponse.



$\cos\alpha = \ldots$ $\quad$ $\sin\alpha = \ldots$

$\cos\beta = \ldots$ $\quad$ $\sin\beta = \ldots$

$\cos\gamma = \ldots$ $\quad$ $\sin\gamma = \ldots$

Figure 76 : Énoncé de la question I, version A (en version B : les longueurs des côtés sont 7, 24, 25)

Nous souhaitons tester les savoirs appris sur « le cosinus et le sinus d'un angle géométrique » (vus 1re Scientifique et/ou en 3e) et voir comment l'élève adapte ses connaissances pour accomplir les tâches auxquelles il est confronté. Pour cela, nous demandons de ***calculer le cosinus et le sinus des trois angles d'un triangle*** dont on connaît les mesures des trois côtés. Dans le cadre de la trigonométrie d'un triangle quelconque, plusieurs techniques ont été enseignées en 1re Scientifique, notamment la formule d'Al-Kashi pour le calcul du cosinus. Mais les mesures ont été choisies de façon à ce que le triangle soit rectangle. Ceci permet de tester quelles connaissances sont disponibles pour l'élève de Terminale Scientifique pour les angles aigus : *Trigonométrie dans un triangle* avec la formule d'Al-Kashi (vue en 1re Scientifique) ou *Trigonométrie dans le triangle rectangle* (vue en 4e et 3e) ? Nous pourrons aussi voir quelle est sa démarche pour donner le cosinus et le sinus de l'angle droit : de quelles OML ($OML_{TriangleR}$ ou $OML_{TriangleQ}$ ou OML_{CTrigo}) les connaissances évoquées relèvent-elles?

Précisons quelques choix sur la donnée de l'énoncé.

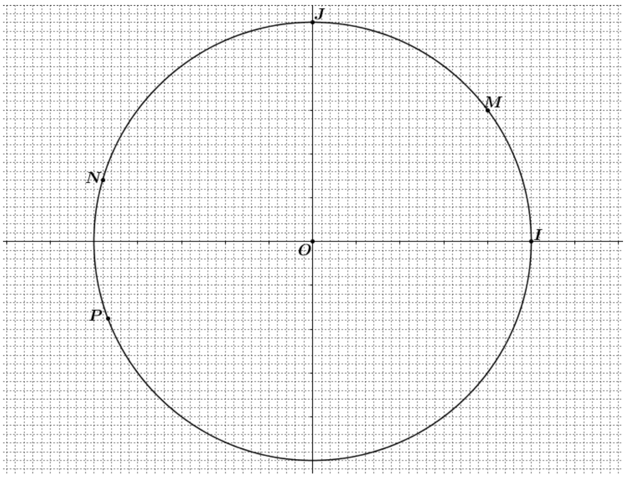
- La figure représente *un triangle rectangle* parce que nous nous focalisons sur la mise en fonctionnement des connaissances sur « le cosinus et le sinus d'un angle » ; nous avons donc choisi de fournir un élément susceptible de convoquer la trigonométrie du collège.

- Les lettres désignant les trois angles du triangle sont familières (ici, les trois premières lettres de l'alphabet grec en minuscules), elles sont attribuées de manière à ce que la deuxième lettre de l'alphabet désigne l'angle droit. La disposition graphique des égalités à trous pousse à ne traiter cet angle que dans un deuxième temps.

Dans le cas où l'élève réactive la trigonométrie dans le triangle rectangle au collège, nous voulons voir s'il justifie mathématiquement la nature du triangle donné. Par ailleurs, nous cherchons aussi à voir si un élève qui aurait utilisé la formule d'Al-Kashi pour les deux premiers cosinus, prendrait conscience que l'angle β est droit et changerait de stratégie pour le dernier angle.

<u>Question II</u> : elle porte sur l'OML_{CTrigo} dans le cadre de la géométrie-analytique du domaine « Géométrie repérée ». Elle consiste à déterminer le cosinus et le sinus d'un angle orienté connaissant les coordonnées du point du cercle trigonométrique (rayon unité) associé à l'angle orienté.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;I,J)$. On considère $M\left(\frac{4}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$ et $N\left(-\frac{24}{25}\,;\,\frac{7}{25}\right)$ deux points du cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1).



1. On note $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)=\alpha$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$, ainsi que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}\right)=\beta$. Donner les cosinus et sinus de α et β :

$\cos\alpha=\cdots$ $\qquad\sin\alpha=\cdots$

$\cos\beta=\cdots$ $\qquad\sin\beta=\cdots$

2. On considère maintenant P le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}\right)=\alpha+\beta$.
   a. Exprimer les coordonnées du point P en fonction de α et β.
   b. Calculer les coordonnées du point P.

<u>Figure 77</u> : Énoncé de la question II, version A (en version B : $A\left(\frac{5}{13}\,;\,\frac{12}{13}\right)$, $B\left(-\frac{3}{5}\,;\,\frac{4}{5}\right)$, C est à la place du point P)

Nous souhaitons tester les savoir appris sur « le cosinus et le sinus d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires » (vus en 1re Scientifique) en relation avec la trigonométrie du cercle trigonométrique abordée en Seconde.

Nous avons choisi de fournir le graphique donné contenant le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct du plan. Cet ostensif graphique est un support instrumental qui évoque le cadre de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique, en réactivant le cosinus et le sinus d'un angle orienté. On peut supposer qu'il contribue à convoquer l'OML correspondante à la place des élèves.
Concernant le choix pour des angles orientés :

- à la <u>question 1</u>, nous considérons deux angles orientés, l'un est « aigu » et l'autre, « obtus » (ici, nous supposons que l'élève mettra plutôt un codage sur la figure donnée dans le sens antihoraire pour représenter[10] un angle orienté). Ces angles sont définis par l'intermédiaire de deux points déjà placés sur le cercle trigonométrique et de coordonnées fournis par l'énoncé. Nous faisons l'hypothèse que l'élève mobilisera *l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus* pour donner le cosinus et le sinus des angles orientés. Si ce n'est pas le cas, nous voulons savoir s'il exploite :
    - des connaissances vues au collège : pour l'angle aigu α, les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle conviennent toujours, mais pas pour l'angle obtus β. Dans ce cas, nous sommes intéressés par une/des stratégie(s) adoptées par l'élève pour réaliser la tâche avec cet angle obtus : l'élève se situera-t-il dans l'OML_{Triangle} ou dans l'OML_{CTrigo} ?
    - ou bien, d'autres connaissances, par exemple, des propriétés des nombres complexes (vues en Terminale Scientifique), et si c'est le cas, l'élève doit penser que α et β représentent des mesures en radians des angles orientés donnés et non ces angles orientés en tant que tels.
- à la <u>question 2.a</u>, nous définissons le point du cercle trigonométrique déterminé par une relation angulaire : $\left(\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OP}\right) = \alpha + \beta$, somme considérée au sens de la relation de Chasles (qui est sous-entendue dans ce contexte car notre objectif ici n'est pas la relation de Chasles). Le point est positionné sur la figure mais ses coordonnées ne sont pas données. Nous voulons savoir si l'élève met en fonctionnement la relation entre coordonnées cartésiennes et cosinus et sinus de l'angle pour cette fois donner les coordonnées en fonction de la mesure de l'angle. Dans la mesure où il s'agit d'utiliser la relation en sens inverse de ce qui est attendu dans la question 1, il est possible qu'un élève ne donne aucune réponse à cette question 2.a tout en réussissant à accomplir la tâche à la question 1 à l'aide de la relation attendue.
  Il est également envisageable qu'un élève qui a résolu la question 1 pour l'angle aigu grâce à des connaissances de collège, observe sur les résultats qu'il a trouvés que les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle orienté sont exactement l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique associé à l'angle orienté et à partir de là utilise cette relation pour l'angle obtus puis dans la question 2.a.
- à la <u>question 2.b</u>, c'est une tâche qui fait suite à la tâche de la question 2.a précédente. Nous voulons ici savoir si l'élève exploite les formules d'addition du cosinus et du

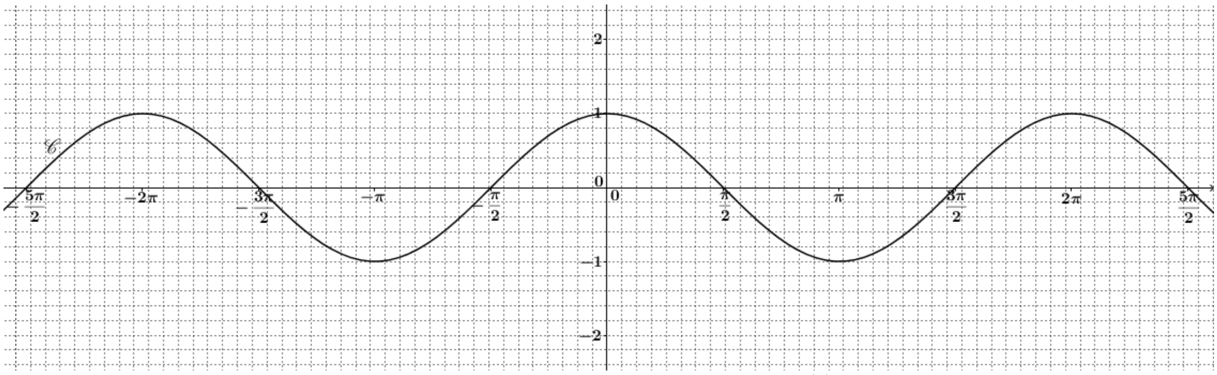
[10] Il y a deux façons possibles pour mettre un codage représentant un angle orienté : soit dans le sens antihoraire (ou sens positif) soit dans le sens horaire (ou sens négatif) du vecteur origine vers le vecteur extrémité.

sinus pour donner numériquement les coordonnées du troisième point. Applique-t-il à tort la linéarité aux fonctions cosinus et sinus ?

Par ailleurs, nous avons choisi de fournir un quadrillage en tant qu'aide à la réflexion au cas où l'élève ne réactiverait pas dans un premier temps l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus. Nous voulons savoir si l'élève donne, à l'aide de la lecture graphique avec comptage des carreaux du quadrillage, les valeurs approchées des coordonnées du troisième point à la question 2.b, dans le cas où il ne reconnaît pas les formules d'addition du cosinus et du sinus (vues en 1re Scientifique).

<u>Question III.1</u> : elle porte sur l'$OML_{FoncTrigo}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ». Elle consiste en un travail à deux dimensions : d'une part, sur la courbe fournie dans l'énoncé représentant la fonction cosinus/sinus dans le registre graphique, d'autre part, dans le cadre géométrico-fonctionnel, sur les propriétés des points du graphe de la fonction considérée et la traduction dans ce cadre de la périodicité de cette fonction. *La périodicité est la connaissance centrale* dans cette question III.1.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction cosinus.



1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point A.
   b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point B.
   c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.
   d. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point D d'abscisse $-\frac{589\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de D.

<u>Figure 78</u> : Énoncé de la question III.1, version A (en version B : fonction sinus ; les points A, B, C, D de la version A sont respectivement remplacés par les points M, N, P, Q, avec M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$, N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$, P d'abscisse $\frac{5+3\times2018}{3}\pi$, Q d'abscisse $-\frac{295\pi}{3}$)

Nous souhaitons tester les savoirs appris sur le cosinus (ou le sinus) d'un nombre réel vu en Seconde adapté au contexte fonctionnel rencontré en Terminale Scientifique, abordé par deux types de tâches relevant de l'$OML_{FoncTrigo}$ et donc non abordé en Seconde :

1. identifier l'existence et la non existence d'un point sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans le cadre géométrico-fonctionnel ;

2. déterminer s'il est possible ou non de placer un point sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans un graphique donné.

Remarquons que ces deux types de tâches, non mentionnés dans la liste des T de l'OML (voir chapitre 2, pp. 68-72), consistent à tester la disponibilité des connaissances de l'élève de Terminale Scientifique, relatives au lien entre la fonction cosinus (ou sinus) et sa courbe représentative, et à l'interprétation graphique d'un point sur une courbe. Ces connaissances sont les connaissances de base dans le cadre géométrico-fonctionnel avec registre graphique.

Reconnaissons que la rédaction de la question n'est pas sans ambiguïté dans la mesure où nous n'avons pas clairement précisé si la notation $\mathscr{C}$ désigne la représentation graphique en tant qu'ensemble des points dont l'abscisse décrit l'ensemble de définition ou le tracé graphique fourni dans l'énoncé. Nous nous situons en cela dans le cadre du contrat didactique usuel. Nous faisons l'hypothèse que pour les tâches définies par le verbe « Placer », les élèves se réfèreront au tracé graphique et que pour la question relative à l'ordonnée, ils feront la différence entre l'existence du point de la courbe-graphe et l'impossibilité de le placer sur la courbe-tracé graphique.

Mais l'essentiel dans les questions 1.a, 1.c et 1.d, concerne les connaissances de l'élève sur la périodicité des fonctions trigonométriques et leur capacité à faire la différence entre l'origine de cette propriété correspondant à l'identité des points du cercle images par enroulement de deux réels de différence un multiple de 2π et sa traduction sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) (vue en Terminale Scientifique). L'objectif est de savoir si l'élève arrive à différencier les points correspondants sur la représentation graphique.

Dans cette question III.1, nous faisons travailler les élèves sur trois nombres de différence $2k\pi$ (k un entier relatif) : nous choisissons les nombres qui peuvent s'écrire sous forme $x_0 + 2k\pi$ où x_0 est un nombre ($\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{3}$) dont le cosinus et le sinus sont des valeurs remarquables (vus en Seconde). Si nous avions choisi des réels non multiples de π, les élèves n'auraient pas pu associer facilement un point du cercle trigonométrique au nombre en question. Ceci aurait limité le potentiel révélateur de notre outil relativement aux difficultés des élèves concernant l'articulation des $\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ et $\text{OML}_{\text{Ctrigo}}$.

Pour le choix des trois nombres de différence $2k\pi$, l'important est le choix du nombre de départ, $\frac{11\pi}{6}$ pour la fonction cosinus ($\frac{5\pi}{3}$ pour la fonction sinus). Pourquoi ce nombre choisi n'était-il pas $\frac{\pi}{6}$ ni $-\frac{\pi}{6}$, par exemple ? Nous éliminons ces deux derniers nombres car leurs valeurs absolues sont inférieures à 1. En effet, le même nombre sert pour les questions 1.a et 1.b, comme abscisse dans la première et comme ordonnée dans la deuxième dans laquelle nous attendons une justification de l'élève sur la non existence sur la courbe représentative de la fonction cosinus (idem pour sinus) d'un point dont l'ordonnée est le nombre considéré. Par ailleurs, nous voulons éviter d'interroger les élèves sur une des valeurs remarquables correspondant à la mesure principale d'un angle orienté. Les nombres $\frac{11\pi}{6}$ et $-\frac{\pi}{6}$ représentent deux des mesures en radians du même angle orienté $-\frac{\pi}{6}\ rad$, et les points images associés respectivement à ces deux nombres sont confondus sur le cercle trigonométrique. Nous voulons savoir comment l'élève interprète ces deux nombres dans le registre graphique pour la fonction cosinus (idem pour sinus) dans le cadre fonctionnel. $\frac{11\pi}{6}$ est un nombre inférieur à 2π, il est facile à situer sur le cercle trigonométrique grâce à l'égalité $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$. Le deuxième nombre x_2 choisi est donné sous forme d'un multiple rationnel de π dont le numérateur est décomposé en une somme qui devrait permettre à l'élève de mettre sans difficulté x_2 sous la forme $x_1 + 2k\pi$ où x_1 représente le premier nombre cité précédemment, à l'aide de la propriété : $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Le troisième nombre choisi est un nombre sous forme d'un quotient dont le numérateur est un multiple entier de π ; c'est à la charge de l'élève de le transformer sous la forme $x_1 + 2k'\pi$. Notons que les questions 1.a, 1.c, 1.d sont des tâches similaires mais avec un niveau de difficulté croissant et ce pour deux raisons.

D'une part, pour le premier point, l'élève peut effectivement accomplir l'ensemble du travail dans le registre graphique puisqu'il appartient au tronçon de courbe fourni comme ostensif représentant la fonction considérée. Ce n'est pas le cas des deux autres pour lesquels la propriété de périodicité et sa traduction ostensive littérale doit obligatoirement être mobilisée. D'autre part, comme on l'a vu précédemment, le travail numérique à accomplir sur l'abscisse est de plus en plus important.

Nous avons fait le choix de fournir un quadrillage, un repère orthonormé du plan dans lequel des valeurs particulières, comme 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, $\frac{5\pi}{2}$ et leurs opposées, figurent sur l'axe des abscisses, puis des nombres entiers comme 0, 1, 2 et leurs opposés figurent sur l'axe des ordonnées. Il s'agit ici d'un support matériel pour la réflexion, par exemple en comptant des carreaux du quadrillage.

Remarque : Il est possible que certains élèves utilisent des valeurs approchées des abscisses pour accomplir les tâches demandées. Dans ce cas, ils ne devraient pas identifier deux des nombres impliqués et les associer au même point du cercle trigonométrique ou au même angle orienté. Ceci devrait limiter les réponses erronées que nous prévoyons. Les réponses erronées aux questions 1.a, 1.c et 1.d envisageables, il serait possible que l'élève utilise les valeurs approchées de ces nombres indiqués précédemment juste pour repérer un point associé sur la courbe donnée par exemple. Si dans la réflexion, le cercle trigonométrique domine des connaissances vues dans le cadre fonctionnel et l'élève lui-même, peut avoir un doute ou faire une confusion entre un angle orienté et ses mesures en radians ; alors dans ce cas, l'élève pourrait placer sur la courbe, par exemple, le point d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ à la place du point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$.

3. Analyse *a priori* du questionnaire

Nous voulons préciser que le questionnaire a été élaboré dans le contexte français, et que nous mettons en œuvre ce questionnaire au Cambodge avec adaptation à la situation sur le terrain.
Pour chaque question, les tâches seront *non simples* et *non isolées* pour la raison suivante :

- elles ne sont pas isolées car la trigonométrie toute entière fait intervenir des objets différents ;

- ensuite elles ne sont simples que si des indices très forts disent à l'élève dans quelle OML il doit se situer. Les travaux dont nous rendons compte montrent de manière récurrente les difficultés des élèves à se situer dans la bonne OML.

De ce fait, ce n'est pas la catégorisation simple/non simple, isolée/non isolée qui nous intéresse mais l'analyse cognitive en termes d'adaptations.

Dans le corps de notre analyse *a priori*, nous ne redisons pas à chaque fois « tâche non simple et non isolée » dans chaque stratégie exposée. Concernant la mise en fonctionnement des connaissances mobilisables et disponibles, nous n'explicitons cette distinction que pour les connaissances qui sont au centre de la thèse, telles que *la formule d'Al-Kashi* ($OML_{Triangle}$), *l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus* (OML_{CTrigo}). Les hypothèses qui sont émises sont relatives à un niveau et à un contexte d'enseignement.

Nous exposons maintenant stratégie par stratégie l'analyse *a priori* des trois premières questions de la version A du questionnaire.

Remarques : Toutes les stratégies possibles visées correspondent seulement aux niveaux du secondaire. En effet, ce questionnaire ne s'adresse qu'aux élèves de Terminale Scientifique (en France) et à ceux en 11^e et 12^e (au Cambodge).

Dans la suite, France est abrégée par Fr, et Cambodge, par Cm.

3.1. Exercice I A

L'exercice I en version A (voir *Figure 76*) porte sur la ***trigonométrie dans un triangle*** correspondant à l'$OML_{Triangle}$.

Objectif : Donner numériquement les valeurs des cosinus et sinus d'un angle d'un triangle (rectangle) dont on connaît les longueurs des trois côtés.

La figure donnée est l'information supplémentaire à l'énoncé, ici : l'indication des angles. La forme du triangle donné peut faire penser à un triangle rectangle dans lequel on peut donner les cosinus et sinus d'un angle aigu à l'aide de leurs définitions.

Dans la suite de l'analyse, nous notons CD pour « connaissance disponible » et CM pour « connaissance mobilisable ». Par exemple, suite à la réflexion précédente sur la figure qui accompagne le texte, nous considèrerons que les connaissances liées à la trigonométrie du triangle rectangle interviennent au niveau CM car nous faisons l'hypothèse que la vue du triangle rectangle convoque les savoirs liés à cette configuration.

Puisque les longueurs des trois côtés du triangle sont connues, il y a plusieurs stratégies réalisables pour accomplir la tâche demandée.

Notons d'abord que la question I du questionnaire consiste en une répétition de la même sous-tâche (calcul du cosinus et du sinus d'un angle, et éventuellement, en un enchainement de sous-tâches (pour calculer le sinus à partir du cosinus et pour traiter le troisième angle dans le cas du triangle rectangle).

Stratégie 1 : Elle commence par utiliser la réciproque du théorème de Pythagore pour montrer que le triangle donné est rectangle. Il y a deux stratégies réalisables indiquées ci-après.

Stratégie 1.1 : Il y a deux étapes. Utiliser la réciproque du théorème de Pythagore (4^e Fr, 9^e Cm) pour montrer que le triangle donné est un triangle rectangle. Puis, appliquer :

- a. les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu du triangle rectangle (CM pour la reconnaissance des formules à appliquer mais CD pour les formules exactes dans l'application – 3^{e} Fr, 10^{e} Cm) pour trouver indépendamment $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$. Il y a des reconnaissances partielles des modalités d'application des connaissances.
- b. la propriété des cosinus et sinus de l'angle droit (CD car il faut sortir de l'$OML_{Triangle}$ et se situer dans l'OML_{CTrigo} – Seconde ou 1re Scientifique Fr, 11^{e} Cm) pour déterminer $\cos\beta$ et $\sin\beta$. Il y a des reconnaissances partielles des modalités d'application des connaissances.
- c. les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu du triangle rectangle (CM) pour trouver $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$; puis utiliser la propriété du lien entre le sinus et le cosinus liés à deux angles complémentaires[11] du triangle rectangle (CM – 10^{e} Cm) afin d'en déduire les valeurs de $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$. Ou bien, il serait possible d'exploiter d'abord la définition du cosinus d'un angle aigu du triangle rectangle (CM) pour trouver $\cos\alpha$ et $\cos\gamma$, ensuite la propriété du lien entre le sinus et le cosinus liés à deux angles complémentaires du triangle rectangle (CM) afin d'en déduire les valeurs de $\sin\alpha$ et $\sin\gamma$.

Les questions que l'on se pose : L'élève justifie-t-il mathématiquement la nature du triangle donné avant d'exploiter le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ? Comment l'élève justifie-t-il sa démarche pour trouver les valeurs des cosinus et sinus de l'angle droit ? Utilise-t-il l'unité de mesure de l'angle droit « en degrés » ou « en radians » ?

Erreurs possibles de l'élève : l'inversion entre côté adjacent et côté opposé à un angle dans un triangle rectangle ; l'inversion/la confusion entre cosinus et sinus (erreurs dans l'application des formules).

<u>Stratégie 1.2</u> : Utiliser d'abord la réciproque du théorème de Pythagore pour justifier que le triangle donné est rectangle, puis exploiter deux propriétés du produit scalaire de deux vecteurs (CD – vues en 1re Scientifique Fr, en 10^{e} Cm) : expression avec normes et cosinus et expression avec projeté orthogonal pour trouver indépendamment $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – appliquer la relation fondamentale (CD – 3^{e} Fr, 10^{e} Cm) pour trouver respectivement $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ connaissant leurs cosinus. Il y a l'introduction d'étapes dans la résolution.

Les questions que l'on se pose : mêmes questions que pour la stratégie 1.1 ; en plus, est-ce que l'élève réactive le produit scalaire et la projection orthogonale ?

Erreurs possibles de l'élève : erreurs dans l'application de la formule ; erreurs dans le calcul numérique ; erreurs dans la transposition de termes dans une égalité.

On aurait pu avoir une stratégie 2 composée par deux sous-stratégies : Stratégie 2.1 consistant à utiliser la formule des cosinus (ou la formule d'Al-Kashi) (1re Scientifique Fr, 10^{e} Cm) et Stratégie 2.2 consistant à utiliser la formule des sinus[12] (10^{e} Cm). Aucun élève cambodgien n'a utilisé la formule des sinus, nous faisons le choix de donner seulement la Stratégie 2.1 que nous nommons simplement « Stratégie 2 ». Dans cette Stratégie 2, nous faisons l'hypothèse que la formule d'Al-Kashi intervient au niveau CD malgré l'ostensif graphique, dans la

[11] Cette propriété n'est pas attendue dans le programme français au collège.
[12] La formule des sinus n'est pas attendue dans le programme du secondaire français.

mesure où la forme du triangle donné (visualisation, c'est un triangle rectangle) convoque à nos yeux plutôt les formules du cosinus et du sinus dans le triangle rectangle, plus simple d'utilisation que la formule d'Al-Kashi pour les cosinus qui doit ensuite être accompagnée par la relation fondamentale pour les sinus.

Stratégie 2 : Il s'agit de deux tâches liées, consistant à trouver d'abord les cosinus en appliquant la formule d'Al-Kashi (CD – 1re Scientifique Fr, 10e Cm) puis les sinus à l'aide de la relation fondamentale (CD).

Il s'agit d'une *tâche non simple* pour trouver le cosinus d'un angle du triangle : reconnaissance des modalités d'application des connaissances – utiliser la formule d'Al-Kashi, en déduire la valeur du cosinus de l'angle.

Pour trouver le sinus de l'angle, il faut introduire des étapes et aussi mélanger deux cadres (numérique et algébrique) – transformation sous forme d'une équation du type $x^2 = a$, détermination du signe du sinus de l'angle et en déduction de sa valeur.

Remarquons qu'il y a une autre façon de déterminer $\sin\beta$ après avoir trouvé que $\cos\beta = 0$. Ici, comme β est un angle d'un triangle, il existe donc un unique angle (ayant la mesure comprise entre 0 et 180 degrés ou comprise entre 0 et π radians) dont le cosinus est nul, et cet angle est un angle droit. On peut en déduire que le sinus de β est celui de l'angle droit.

Les questions que l'on se pose : Quelle est la réaction de l'élève lorsqu'il trouve que $\cos\beta = 0$ avec la stratégie 2 ? À ce moment-là, arrive-t-il à penser que β est un angle droit ? Et, continue-t-il à calculer $\cos\gamma$ à l'aide de la formule d'Al-Kashi ou change-t-il d'avis en déduisant que le triangle donné est rectangle afin de déterminer, avec la stratégie 1.1, le sinus de l'angle β puis les cosinus et sinus de l'angle γ pour finir ?

Erreurs possibles de l'élève : erreurs dans l'application de la formule, dans la transformation algébrique, dans le calcul numérique.

Prévision globale : Nous attendons la stratégie 2 parce que l'ostensif graphique évoque plutôt la formule d'Al-Kashi qui est au programme en 1re Scientifique Fr et en 10e Cm, il s'est écoulé seulement 1 an pour l'élève en Terminale Scientifique Fr et pour l'élève en 11e Cm (2 ans pour l'élève en 12e Cm). Mais si la trigonométrie dans le triangle rectangle est mieux maîtrisée, alors la stratégie 1.1 est plus fréquemment utilisée que la stratégie 1.2 et la stratégie 2 parce que la forme de la figure donnée convoque visuellement la nature du triangle donné et que l'exploitation du cosinus et du sinus des angles aigus dans un triangle rectangle et du cosinus et du sinus de l'angle droit est plus simple et plus directe. Comme l'élève est au niveau « terminale », nous n'attendons pas que les valeurs des cosinus et sinus données soient des valeurs approchées mais des valeurs exactes. Nous faisons l'hypothèse que le cosinus et le sinus de l'angle droit ne posent aucun problème pour l'élève en Terminale Scientifique.

3.2. Exercice II A

L'exercice II en version A (voir *Figure 77*) porte sur la ***trigonométrie dans le cercle trigonométrique*** correspondant à l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$.

Objectifs : Reconnaître le cosinus et le sinus d'un angle orienté définis dans le cercle trigonométrique, dans le cadre de la géométrie repérée. Donner les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique et exploiter les formules d'addition du cosinus et du sinus.

Rappelons que les manuels de 1re Scientifique (édité en 2011) correspondant au programme 2010 commencent par définir les mesures d'un angle orienté par l'enroulement[13] de la droite des réels sur le cercle trigonométrique, puis le cosinus et le sinus d'un angle orienté comme le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures.

Question 1. Exploiter l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus (CM – 1re Scientifique Fr, 11e Cm). Il s'agit d'une *tâche simple et isolée* car il s'agit d'une application directe de la définition du cosinus et du sinus d'un angle orienté vue dans l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$ de 1re Scientifique (par exemple, manuel Math'x 2011, p. 292), malgré le fait que α et β désignent les angles orientés et non les mesures en radians d'angles orientés.

Les questions que l'on se pose : comme $M(a\,;b)$ est un point du cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct $(O;I,J)$ du plan et comme α désigne l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM})$, l'élève donne-t-il alors : $\cos\alpha = a$ et $\sin\alpha = b$? Sinon, comment l'élève exprime-t-il sa démarche de calcul du cosinus et du sinus d'un angle orienté, surtout pour le cas de l'angle obtus β ?

Erreurs possibles de l'élève : inversion sinus/cosinus.

Remarquons que dans le cas où l'élève ne reconnaît pas « l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus », il y a d'autres stratégies possibles pour déterminer les cosinus et sinus de l'angle α et de l'angle β :

- soit utiliser les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle (CD – 3e Fr, 10e Cm) pour donner le cosinus et le sinus de l'angle α, puis appliquer soit la formule $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ (1re Scientifique Fr, 10e Cm) soit la formule d'Al-Kashi (CD – 1re Scientifique Fr, 10e Cm) pour donner le cosinus de l'angle β, et finir par appliquer la relation fondamentale (CD – Seconde Fr, 11e Cm) pour donner le sinus de l'angle β (*peu attendu*). On relève les adaptations suivantes : construction supplémentaire, sur le graphique donné, qui permet de trouver un triangle convenable dans lequel on détermine le cosinus et le sinus d'un angle souhaité ; calcul du produit scalaire de deux vecteurs du plan à l'aide de l'expression analytique, calcul de IN ou IN^2 à l'aide de la formule de la norme d'un vecteur ou de la formule du carré de la norme d'un vecteur) ; introduction d'étapes dans le raisonnement ; mélange des cadres géométrique, algébrique et numérique.
- soit exploiter les relations permettant de passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à une forme trigonométrique et inversement (Terminale Scientifique Fr, 12e Cm) (*peu attendu*). La mise en œuvre suppose plusieurs adaptations : mélange de deux cadres (Géométrie repérée et Géométrie analytique des nombres complexes) et l'introduction d'étapes : par exemple, considérer d'abord le point $M(a\,;b)$ donné comme « point image » du nombre complexe $z = a + ib$ puis utiliser le lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires du point M et finir par en déduire les cosinus et sinus de l'angle α qui sont ceux d'un argument de z.

[13] Le principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique n'existe pas dans le programme cambodgien du secondaire.

Question 2.a. Exploiter l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide des cosinus et sinus (CM). Il s'agit d'une *tâche simple et isolée* car c'est une application directe comme à la question 1 (le point P est déjà placé sur le cercle trigonométrique et l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP})$ est donné).
Dans cette question 2.a, nous ne parlons pas de cosinus ni de sinus mais nous attendons que l'élève mette en évidence que les coordonnées du point P sont le cosinus et le sinus de l'angle orienté que détermine le point P. Nous faisons l'hypothèse qu'avec la question 1 sur la mise en fonctionnement de la connaissance « expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus », l'élève saura répondre. Pour la question 1 et la question 2.a, il y a deux sens *aller-retour* dans l'application de la connaissance mentionnée : *aller* (pour la question 1) et *retour* (pour la question 2.a).

Les questions que l'on se pose : les mêmes qu'en 1.

Erreurs possibles de l'élève : inversion sinus/cosinus.

Question 2.b. :

Stratégie 1 : Envisager de répondre par *travail graphique* avec le support instrumental : le quadrillage (comptage du nombre de carreaux). Ici, $P\left(-\frac{23,5}{25}\ ;\ -\frac{9}{25}\right)$ ou $P(-0,94\ ;\ -0,36)$. Il s'agit d'une *tâche simple et isolée*.
Remarquons qu'il serait possible que $y_P \approx -\frac{9}{25} = -0,36$ et qu'il n'est pas facile de donner graphiquement une valeur approchée de x_P. Il serait possible que l'on ait $x_P \approx -0,93$ dans le cas où on considère que $y_P \approx -0,36$ et on calcule numériquement x_P avec $x_P \approx -\sqrt{1-(-0,36)^2} = -\sqrt{1-0,1296} = -\sqrt{0,8704} \approx -0,93$.
Nous n'attendons pas cette stratégie 1 puisque nous demandons de « calculer … ».

Stratégie 2 : Envisager de répondre via *l'utilisation des commandes de la calculatrice* comme support instrumental : calculer des valeurs approchées de α, de β et de $\alpha + \beta$ puis des valeurs approchées de $\cos(\alpha+\beta)$ et de $\sin(\alpha+\beta)$. Ici, $P(-0,936\ ;\ -0,352)$. Il s'agit d'une *tâche non simple* – introduction d'étapes : calculer une valeur approchée de l'angle α à partir soit de son cosinus soit de son sinus à l'aide soit de la fonction $\cos^{-1}$ soit de la fonction $\sin^{-1}$ (faire attention au résultat automatique en vérifiant la position de l'angle dans le graphique) ainsi que celle de l'angle β, puis une valeur approchée de l'angle $(\alpha+\beta)$, et finir par utiliser les fonctions cosinus et sinus.
Stratégie 3 : Utiliser les formules d'addition du cosinus et du sinus (CD – 1re Scientifique Fr, 11e Cm). Au niveau des adaptations, on trouve l'utilisation des résultats des questions précédentes et contextualisation des formules d'addition du cosinus et du sinus.

Les questions que l'on se pose : l'élève utilise-t-il les formules d'addition du cosinus et du sinus ?

Erreurs possibles de l'élève : erreurs dans l'application des formules surtout avec des signes, dans le calcul numérique ; dans l'application à tort de la linéarité aux fonctions cosinus et sinus.

Remarque : il y a une autre stratégie possible à l'aide des propriétés des nombres complexes (vues en Terminale Scientifique Fr) (*peu attendue*). Reconnaître que l'on peut utiliser la formule[14] $e^{a+b} = e^a \times e^b$, les formes exponentielle, algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe de module 1, la propriété de deux nombres complexes égaux. Dans cette stratégie, il faut introduire des intermédiaires (trois nombres complexes z_P, z_M, z_N) et des étapes : montrer d'abord que l'affixe du point P est le produit des affixes des points M et N, déterminer la forme algébrique de z_P, écrire z_P sous forme trigonométrique, en déduire les valeurs des cosinus et sinus de l'angle $(\alpha + \beta)$ et conclure quant aux coordonnées du point P.

Prévision globale : Nous attendons que l'élève réactive, aux questions 1 et 2.a, « l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus » grâce aux ostensifs discursifs et à l'ostensif graphique. Parmi les trois stratégies indiquées précédemment à la question 2.b, nous attendons la stratégie 3 parce que c'est la seule qui soit conforme au contrat didactique, les deux autres utilisant des valeurs approchées déterminées soit sur l'ostensif graphique soit par utilisation d'une calculatrice, avec report des valeurs trouvées dans une première étape.

3.3. Exercice III.1 A

L'exercice III.1 en version A (voir *Figure 78*) porte sur l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ dans le cadre fonctionnel du domaine « Analyse ».

Nous voulons préciser d'abord que, dans les manuels officiels de mathématiques cambodgiens, la lecture graphique dans le registre graphique du cadre fonctionnel n'est pas sollicitée. La plupart des élèves cambodgiens ont certainement des difficultés pour le travail graphique. Rappelons-nous que notre questionnaire a été élaboré dans le cadre institutionnel français. Nous faisons l'hypothèse que les tâches demandées par l'exercice III.1 A posent donc une difficulté particulière aux élèves cambodgiens.

Objectif : Exploiter la courbe représentative de la fonction cosinus et la périodicité d'une fonction.

Question 1.a. :

Placer le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ sur la courbe $\mathscr{C}$ est une tâche réalisable : reconnaître l'existence d'un point d'une courbe en la justifiant à l'aide de l'ensemble de définition d'une fonction (Seconde Fr, 10^{e} Cm) et du graphique donné. Il s'agit d'une *tâche simple et isolée* mais le repérage du nombre $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des abscisses peut peut-être poser problème.

Pour donner la valeur exacte de l'ordonnée du point A : appliquer la propriété d'un point d'une courbe (Seconde Fr, 10^{e} Cm), celle de la périodicité de la fonction cosinus (CD – Terminale Scientifique Fr, 11^{e} Cm) et celle de la parité de la fonction cosinus (CD – Terminale Scientifique Fr, 11^{e} Cm). Il faut introduire une étape dans le calcul – transformation du nombre réel sous forme $\alpha + k \times 2\pi$ avec $\alpha \in]-\pi\,;\,\pi]$, application des propriétés du cosinus qui conviennent successivement.

Remarquons qu'il y a plusieurs autres manières possibles pour donner une valeur approchée de l'ordonnée du point A : soit la lecture graphique à l'aide du quadrillage après avoir repéré

[14] La forme exponentielle d'un nombre complexe n'est pas attendue dans le programme cambodgien du secondaire.

le point A sur la courbe $\mathscr{C}$, soit l'utilisation de la calculatrice pour donner directement la valeur approchée de $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, soit la lecture sur le cercle trigonométrique (peu attendue) après avoir repéré l'image associée au nombre réel $\frac{11\pi}{6}$. Dans les deuxième et troisième stratégies, il faut introduire une étape en traduisant d'abord mathématiquement l'ordonnée du point A situé sur la courbe représentative de la fonction cosinus, puis changer de cadre pour la technique liée au cercle trigonométrique.

Les questions que l'on se pose : comment l'élève justifie-t-il l'existence d'un point sur la courbe représentative de la fonction cosinus ? Comment repère-t-il un point d'une courbe donnée connaissant son abscisse ? Reconnaît-il que l'ordonnée du point A est $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$? Donne-t-il la valeur exacte du cosinus du nombre réel $\frac{11\pi}{6}$?

Dans le cas où l'élève utilise la calculatrice pour donner directement une valeur approchée de $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$, pense-t-il à se situer d'abord en mode « Radian » ?

Comment l'élève repère-t-il $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des abscisses ? À l'aide du quadrillage et de la calculatrice $\left(\frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76\right)$ ou à l'aide de la droite graduée avec l'exploitation du théorème de Thalès (peu attendue) ?

Erreurs possibles de l'élève : ne pas penser à justifier l'existence du point A sur la courbe $\mathscr{C}$, erreurs dans l'application des formules, confusion des valeurs du cosinus et du sinus du nombre réel $\frac{\pi}{6}$: par exemple, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Utiliser la périodicité pour placer à tort sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$.

<u>Question 1.b</u>. : Placer le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ sur la courbe $\mathscr{C}$ est une tâche impossible : reconnaître la non existence d'un point sur une courbe en la justifiant à l'aide de l'ensemble des images d'une fonction sur son ensemble de définition (Seconde Fr, 10^{e} Cm). Il s'agit de mettre en relations deux propriétés : la fonction cosinus définie sur $\mathbb{R}$ et bornée, l'ordonnée d'un point de sa courbe représentative étant comprise entre -1 et 1.

Les questions que l'on se pose : l'élève justifie-t-il, avec raisonnement mathématique, la non existence du point B sur la courbe $\mathscr{C}$?

Erreurs possibles de l'élève : utilisation de la périodicité pour placer à tort sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ au point d'ordonnée $-\frac{\pi}{6}$, inversion antécédent/image.

Remarquons qu'il y a d'autres manières possibles pour justifier la non existence du point B sur la courbe $\mathscr{C}$. Les voici :

- soit, on ne peut pas repérer $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des ordonnées à cause du graphique donné (une justification graphique) ;
- soit, prolonger l'axe des ordonnées, repérer $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des ordonnées, la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $\left(0\,;\frac{11\pi}{6}\right)$ ne coupe pas la courbe $\mathscr{C}$ (une justification graphique).

Question 1.c. : Placer le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ sur la partie de la courbe $\mathscr{C}$ fournie par le graphique est une tâche impossible. Pour le justifier l'élève doit seulement mobiliser la caractérisation de l'ensemble des points d'abscisse donnée.

Comparer les ordonnées de A et de C :
Dans un premier temps, l'élève doit différencier l'existence d'un point de la courbe-graphe, justifiée à partir de l'ensemble de définition de la fonction de l'impossibilité de le placer sur la courbe-dessin fournie. Puis il devra utiliser la propriété d'un point d'une courbe (Seconde Fr, 10^{e} Cm) pour exprimer l'ordonnée demandée, ceci représente dans toutes les stratégies qui suivent une étape de raisonnement.
Stratégie 1 : Utiliser la calculatrice pour donner une valeur approchée des ordonnées à comparer. Une telle comparaison de deux nombres décimaux (résultats obtenus à l'aide de la calculatrice) ne peut aboutir qu'à une conjecture : les points C et A ont la même ordonnée. Nous la considérons mathématiquement incomplète.

Stratégie 2 : Exploiter la *périodicité d'une fonction* (CM – Terminale Scientifique Fr, 11^{e} Cm). Dans cette stratégie 2, nous faisons l'hypothèse que la périodicité d'une fonction intervient au niveau CM car l'abscisse du point C est donnée sous forme d'un quotient permettant visuellement de faire penser à la périodicité.
Nous distinguons deux sous-stratégies possibles :

- Stratégie 2.1 : Utiliser la propriété relative à l'ordonnée d'un point d'une courbe et la périodicité de la fonction cosinus (CM). Des étapes doivent être introduites dans le calcul – transformation du nombre réel donné sous forme $\alpha + k \times 2\pi$, application des propriétés du cosinus d'un nombre réel qui conviennent, successivement.
- Stratégie 2.2 : Exploiter la propriété d'un point d'une courbe et la périodicité d'une fonction (CM) qui est reliée à l'interprétation graphique sur le fait que si les abscisses de deux points de la courbe diffèrent d'un multiple entier de la période T (un nombre strictement positif), alors l'un est l'image de l'autre par la translation de vecteur $(k \times T)\vec{\imath}$, avec k un nombre entier relatif.

Remarquons que les stratégies 2.1 et 2.2 sont très proches et qu'elles se différencient par l'interprétation de la périodicité : pour 2.1, application des propriétés du cosinus d'un nombre réel (vue en Seconde-Fr) ou application des propriétés du cosinus des mesures en radians d'angle orienté (vue en 11^{e}-Cm) dans le registre formel ; ou bien, pour 2.2, utilisation de la périodicité via l'interprétation graphique avec translation de vecteur à préciser dans le cadre fonctionnel (vue en Terminale Scientifique Fr).

Les questions que l'on se pose : l'élève justifie-t-il l'existence du point C ? Comment ? Comment justifie-t-il l'impossibilité de pouvoir repérer ce point sur le graphique donné ? Traduit-il l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction cosinus en $\cos(a)$? Donne-t-il la valeur exacte du cosinus du nombre réel $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$? Exploite-t-il la propriété de la périodicité d'une fonction ?

Erreurs possibles de l'élève : erreurs numériques dans le calcul ; erreurs numériques affichées à la calculatrice ; confusion angle/mesures d'angle, par exemple, il apparaît peut-être l'égalité $\frac{11\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$.

En ce qui concerne les deux stratégies : nous n'attendons pas la stratégie 1 car elle est peu conforme au contrat didactique. Nous attendons la sous-stratégie 2.2 car elle est plus simple et plus efficace, à l'aide de l'utilisation de la périodicité via l'interprétation graphique avec translation de vecteur à préciser pour comparer les ordonnées de deux points de la courbe de la fonction cosinus (ou sinus) : l'initiative dans cette stratégie est de voir la différence entre les abscisses des deux points dans le cas où il s'agit d'un multiple de 2π. Et, nous nous attendons à ce que la sous-stratégie 2.1 soit plus utilisée que la sous-stratégie 2.2, dans la mesure où l'élève s'habitue plutôt au calcul formel et algébrique avec le registre formel.
Mais dans le cas où la périodicité d'une fonction n'est ni une CM ni une CD alors nous pouvons nous attendre à la stratégie 1.

Question 1.d. : Même analyse qu'à la question « 1.c. » portant sur le placement du point D d'abscisse $-\frac{589\pi}{6}$ sur la courbe $\mathscr{C}$ donnée.

Comparer les ordonnées de A et de D :
Stratégie 1 : Même analyse qu'à la question « 1.c. » pour Stratégie 1.

Stratégie 2 : Exploiter la *périodicité d'une fonction* (CD – Terminale Scientifique Fr, 11^{e} Cm). Nous distinguons deux sous-stratégies possibles :

- Stratégie 2.1 : Analyse similaire à la question « 1.c. » pour Stratégie 2.1 dans laquelle on remplace CM par CD concernant la périodicité d'une fonction.
  Précisons que l'idée de transformer le nombre réel $-\frac{589\pi}{6}$ sous la forme $\alpha + k \times 2\pi$ (par exemple : $\alpha = \frac{11\pi}{6}$ et $k = -50$) est à l'initiative de l'élève.
- Stratégie 2.2 : Analyse similaire à la question « 1.c. » pour Stratégie 2.2 dans laquelle on remplace CM par CD concernant la périodicité d'une fonction.

Même remarque qu'à la question « 1.c » pour les stratégies 2.1 et 2.2.

Les questions que l'on se pose : même attente qu'à la question « 1.c. ». De plus, il y a un niveau de difficulté croissant : dans la question « 1.d. », l'élève doit transformer, sans l'aide du contexte comme à la question « 1.c. », l'abscisse du point D sous la forme $\alpha + k \times 2\pi$ avec k entier relatif lorsqu'il utilise la stratégie 2.1. L'élève se familiarise-t-il avec la transformation d'un nombre réel sous la forme indiquée précédemment sans difficulté dans le calcul numérique, et ensuite, sait il appliquer les propriétés du cosinus d'un nombre réel ?

Erreurs possibles de l'élève : mêmes erreurs qu'à la question « 1.c. ».

Prévision globale : L'élève mettra en fonctionnement les connaissances sur l'existence et la non existence d'un point sur une courbe connaissant son abscisse ou son ordonnée. Il pourra traduire l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction cosinus en $\cos(a)$. Il exploitera la propriété de la périodicité, plutôt avec le registre formel.

4. Mise en œuvre et Analyse *a posteriori*

4.1. En France : Mise en œuvre dans deux classes de Terminale Scientifique

4.1.1. Modalité et contexte

Nous faisons passer, en mars 2016, le questionnaire dans deux classes de Terminale Scientifique de deux lycées :

- Lycée Merkaz Hatorah Filles au Raincy (noté L1) – une classe de Terminale Scientifique composée de 14 élèves (2 absentes) – date et durée de passation : le 17 mars 2016 et 55 minutes ;
- Lycée Sainte Louise à Paris (noté L2) – une classe de Terminale Scientifique composée de 30 élèves (2 absentes) – date et durée de passation : le 31 mars 2016 et 50 minutes.

L1 et L2 sont deux écoles privées (L1-école juive ; L2-école catholique).
Les élèves de L2 sont issus de familles favorisées (en moyenne, plutôt milieu moyennement aisé). Il s'agit d'une classe ordinaire (à part 2 ou 3 élèves bons, les autres sont très moyens voire faibles). Remarquons qu'en 2015-2016, c'est la 1ère année de terminale du lycée et la première promotion de baccalauréat de ce lycée.
Même si nous n'avons pas les informations pour L1, nous pouvons faire l'hypothèse qu'il s'agit plutôt d'une bonne classe de Terminale Scientifique (cf. classement académie Créteil) et que L2 est une classe meilleure que la moyenne des classes de Terminale Scientifique.

Avant la passation du questionnaire, les élèves ont étudié les suites, les limites de fonctions et la continuité (théorème des valeurs intermédiaires), la dérivabilité, les fonctions sinus et cosinus, les nombres complexes (forme algébrique et forme trigonométrique d'un nombre complexe, pas encore forme exponentielle).

Il y a au total 40 copies d'élèves (L1 : 12 copies et L2 : 28 copies). Nous signalons que les copies des élèves sont notées sous forme L1E…A, L1E…B, L2E…A et L2E…B (L : lycée, E : élève, A : version A, B : version B).

L'analyse *a posteriori* du questionnaire comporte deux étapes afin d'étudier les productions des élèves.

- La première étape consiste à repérer des erreurs des élèves et à les classer selon des grands types récurrents. Nous avons ainsi défini quatre grands types d'erreurs possibles.
- La seconde étape consiste à :
    - Identifier les stratégies utilisées par les élèves par rapport à nos stratégies prévues, comparer les erreurs commises aux types d'erreurs précédemment définis et enfin repérer les difficultés rencontrées par les élèves.
    - Interpréter les difficultés et les erreurs, attendues ou non, des élèves en Terminale Scientifique, en lien avec les praxéologies mathématiques décrivant les savoirs enseignés, proposés par le programme et par des manuels au sujet des trois thèmes importants liés à notre question de recherche : 1. Trigonométrie du triangle ($OML_{Triangle}$), 2. Trigonométrie du cercle trigonométrique (OML_{CTrigo}) et 3. Fonctions sinus et cosinus ($OML_{FoncTrigo}$).
    - Émettre, pour chaque exercice I, II et III.1 du questionnaire, une conclusion sur la mise en fonctionnement des connaissances des élèves.

Nous exposons maintenant l'analyse *a posteriori* du questionnaire pour les trois premiers exercices I, II et III.1.

4.1.2. Types d'erreurs

Nous commençons par repérer quatre grands **types d'erreurs** (abrégés TE) faites par les élèves, en dépouillant les réponses des élèves au questionnaire : nous rencontrons « **TE1** », « **TE2** », « **TE3** » dans l'exercice I, « **TE2** » dans l'exercice II, et « **TE4** » dans l'exercice III.1.

Plus précisément, TE1 et TE2 sont deux types d'erreurs généraux, et TE3 est un type d'erreurs qui concerne la détermination des valeurs des « **cosinus et sinus de l'angle droit** » ***du triangle rectangle*** dans le cadre géométrique. Il rassemble cinq sous-types d'erreurs correspondant à des techniques erronées différentes.

TE1. « Confusion entre les valeurs des ***cosinus et sinus d'un angle*** et la valeur de l'angle »

Les élèves mobilisent correctement, par exemple, la définition du cosinus d'un angle aigu du triangle rectangle mais ils ne s'arrêtent pas là, ils continuent à mettre le signe « $=$ » et ils finissent par une valeur approchée de l'angle soit *en degrés* soit *en radians*, obtenue en utilisant la fonction $\cos^{-1}$ de la **calculatrice** en mode « Degré » ou en mode « Radian ».

Par exemple : $\cos\alpha = \frac{5}{13} = 67{,}4$ (avec ou non le signe « $^\circ$ » signifiant que la mesure de l'angle alpha obtenue est en degrés) ; $\cos\alpha = \frac{5}{13} = 1{,}18$ avec la calculatrice en mode « Radian ».

TE2. « Confusion des valeurs des ***cosinus et sinus d'un angle*** avec des valeurs des ***cosinus et sinus d'un nombre réel*** »

Les élèves mobilisent correctement la définition du cosinus (ou du sinus) d'un angle aigu du triangle rectangle. Ils ne s'arrêtent pas au nombre réel c ainsi obtenu ; grâce à la **calculatrice,** soit en mode *Degré* soit en mode *Radian*, ils déterminent une valeur approchée du cosinus (ou du sinus) du nombre c. C'est le résultat de ce calcul qu'ils considèrent comme étant la valeur du cosinus de l'angle aigu. En résumé, dans ce cas, le résultat final est en fait une valeur approchée du « cosinus du ***cosinus de l'angle*** ».

Par exemple : $\cos\alpha = \frac{5}{13} = 0{,}99$ avec la calculatrice en mode « Degré » ;

$\cos\alpha = \frac{5}{13} = 0{,}93$ avec la calculatrice en mode « Radian ».

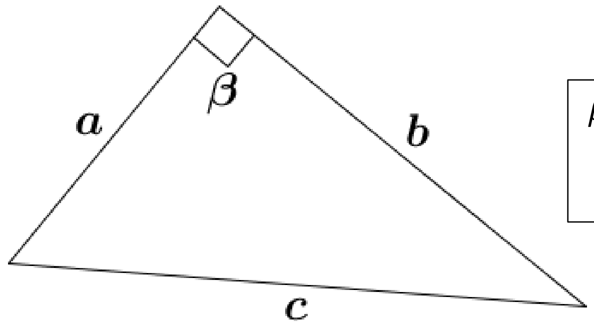
On notera l'utilisation du signe $=$ pour la seconde étape, l'élève égale le réel et son cosinus.

TE3. « Stratégies imaginées par certains élèves pour donner les valeurs des **cosinus et sinus de l'angle droit *du triangle rectangle*** »

Pour donner les valeurs exactes du cosinus et du sinus de l'angle droit dans une telle situation, il s'agit d'un changement d'OML (l'OML$_{\text{Triangle}}$ vers l'OML$_{\text{CTrigo}}$).

Il semble que les élèves ne se rappellent plus que les valeurs des cosinus et sinus de l'angle droit figurent dans le tableau des valeurs particulières appris en Seconde ni que la trigonométrie du triangle rectangle permet seulement de calculer le cosinus et le sinus d'un angle aigu dont la mesure en degrés est strictement comprise entre 0 et 90 degré(s). Ils tentent alors de déterminer les valeurs cherchées en restant dans l'OML$_{\text{Triangle}}$.

Nous présentons ci-dessous les cinq stratégies erronées rencontrées : TE3A, TE3B, TE3C, TE3D, TE3E (voir *Figure 79*).



β est l'angle droit du triangle rectangle

$0 < a < b$

Figure 79 : Schéma pour faciliter la lecture des TE3 suivant les catégories A, B, C, D et E.

Pour les quatre premières catégories, l'élève s'inspire des définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle. Pour ce faire, il cherche à utiliser pour l'angle droit les notions de côté adjacent et côté opposé en oubliant le fait qu'elles ne sont utilisées que dans le cas d'*un angle aigu dans un triangle rectangle*. Ceci le conduisant à des difficultés (l'existence de deux côtés adjacents et la coïncidence entre hypoténuse et côté opposé), il adapte les définitions qu'il connaît.

Dans TE3A et TE3B, l'élève conserve la mesure de l'hypoténuse au dénominateur pour cosinus et sinus, l'encadrement du cosinus et du sinus dans $[0\,;1]$ étant de ce fait conservé.

TE3A. « Appliquer les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle à l'angle droit »

Le cosinus de l'angle droit *est le quotient de la longueur d'un des côtés de l'angle droit par la longueur de l'hypoténuse* : $\cos\beta = \frac{a}{c}$ ou $\cos\beta = \frac{b}{c}$.

Le sinus de l'angle droit *est le quotient de la longueur du côté opposé à l'angle droit par la longueur de l'hypoténuse* : $\sin\beta = \frac{c}{c}\ (= 1)$. Cette valeur 1 est la réponse correcte mais elle est obtenue par un procédé erroné.

Dans ce cas, l'élève fait un choix sur le côté adjacent à l'angle droit, soit a, soit b, il admet que le côté opposé est l'hypoténuse. Ce n'est pas le cas pour TE3B. Peut-être gêné par la coïncidence des mesures pour le sinus, l'élève modifie les formules de façon à ce que les trois côtés du triangle apparaissent dans les formules. Deux variantes apparaissent.

TE3B. « Définir les ***cosinus et sinus de l'angle droit*** du triangle rectangle comme suit :

le cosinus de l'angle droit est le quotient de la *longueur du côté le plus court (resp. le plus long) de l'angle droit* par la *longueur de l'hypoténuse* : $\cos\beta = \frac{a}{c}$;

le sinus de l'angle droit est le quotient de la *longueur du côté le plus long (resp. le plus court) de l'angle droit* par la *longueur de l'hypoténuse* : $\sin\beta = \frac{b}{c}$ »

Notons que la relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$ est maintenue, ce n'est pas le cas pour TE3A.

Pour TE3C, l'élève retient que le dénominateur des deux formules utilisées pour les angles aigus est la mesure du côté le plus long de cet angle, ce qui donne les définitions suivantes :

TE3C. « Définir les ***cosinus et sinus de l'angle droit*** du triangle rectangle en imitant les formules des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle comme : $\cos\beta = \frac{a}{b}$ et $\sin\beta = \frac{c}{b}$ »

Dans ce cas, il semble que l'élève considère que le côté le plus le long de l'angle droit β joue le rôle de l'*hypoténuse*, le côté le plus petit de l'angle droit β celui du *côté adjacent* et l'hypoténuse du triangle rectangle celui de *côté opposé*.

On obtient ainsi une valeur du sinus strictement supérieure à 1. Ceci peut conduire certains élèves à rejeter le choix du numérateur c pour le sinus, ce qui aboutit à TE3D.

TE3D. « Définir les ***cosinus et sinus de l'angle droit*** dont les côtés ont pour longueurs a, b (avec $a < b$) du triangle rectangle comme le quotient $\frac{a}{b}$ » c'est-à-dire que « $\cos\beta = \frac{a}{b}$ et même $\sin\beta = \frac{a}{b}$ »

Signalons que nous ne rencontrons pas TE3D seul : il y a un autre type d'erreurs utilisé simultanément, par exemple, soit « TE3D et TE1 » soit « TE3D et TE2 », ce qui empêche l'élève de constater l'égalité du sinus et du cosinus.

TE3E. « Utiliser la calculatrice en mode « Radian » pour donner les valeurs des ***cosinus et sinus de l'angle droit*** dont la mesure est de 90°» ou bien « Donner les valeurs des cosinus et sinus du nombre réel 90 »

Il semble que les élèves savent que l'angle droit mesure 90°, mais ils ne font pas attention à mettre d'abord la **calculatrice** en mode *Degré* et la laisse mode en *Radian*. Ils donnent alors les valeurs approchées des « cosinus et sinus du nombre réel 90 ».

C'est-à-dire : $\cos(90) \approx -0{,}45$ et $\sin(90) \approx 0{,}89$.

TE4. « Confusion entre **angles** (ou points sur le cercle trigonométrique) et **nombres réels** de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus) »

Il semble que l'élève pense que deux points de la courbe représentative de la fonction cosinus (ou celle de la fonction sinus) ayant pour abscisses deux nombres réels de différence $2k\pi$ (k un entier relatif) sont confondus. Par exemple, il place, sur la courbe représentative de la fonction cosinus, le point d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ au point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$. Ce type d'erreur semble manifester une confusion entre deux applications appliquées à un nombre réel x, considéré comme abscisse sur un axe : celle qui à x associe par enroulement un point du cercle trigonométrique relevant de l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$, celle qui à x associe le point du plan (ou de coordonnées $(x, \cos x$ ou $\sin x)$, relevant de l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$.

4.1.3. Exercice I

Il y a 37 élèves qui utilisent la stratégie 1.1 (relation dans le triangle rectangle). 22 justifient mathématiquement que le triangle donné est un triangle rectangle avant de donner les valeurs des cosinus et sinus, 15 autres les donnent directement sans justifier la nature du triangle donné). 1 élève qui utilise la stratégie 2 (formule d'Al-Kashi), et 2 élèves qui ne font pas cet exercice (voir *Tableau 31*).

Nous remarquons que :

- 30 élèves sur 37 justifiant ou non la nature du triangle donné, reconnaissent bien les formules des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle, en les énonçant de manière discursive. 1 élève (L2E15B) fait une confusion entre cos et sin, 6 autres ne fournissent aucune formule générale, pas même sous une forme mnémotechnique comme « SOH CAH TOA ».
- 1 élève utilise la formule d'Al-Kashi et la relation fondamentale mais il commet une erreur dans la transformation algébrique, (L2E18B).

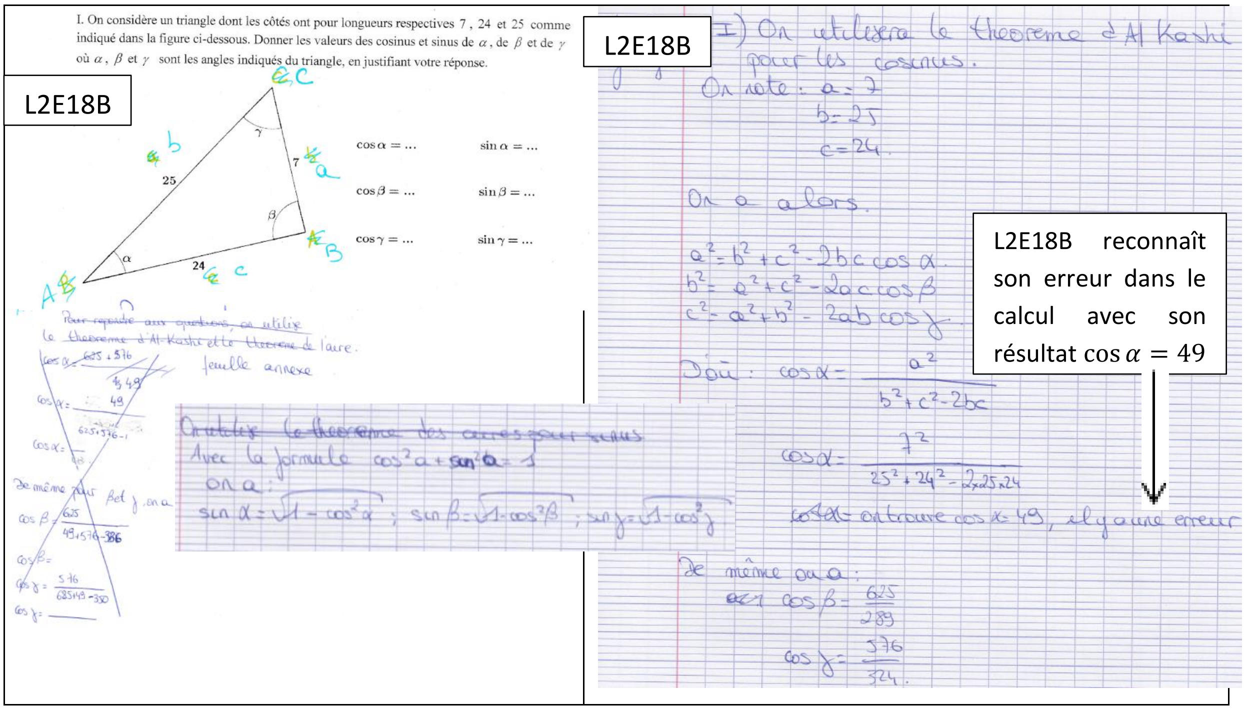


Figure 80 : Exploitation de la formule d'Al-Kashi avec erreur

Dans la suite, nous détaillons les types d'erreurs rencontrés dans les productions des élèves et ce en deux étapes : cosinus et sinus d'un angle aigu puis cosinus et sinus de l'angle droit.

Cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle : TE1. – TE2.

	TE1	TE2	Autre	NR	RC	Total
Angle α	5	9	4	0	19 (16(ve)+3(va))	37
Angle γ	5	9	4	1	18 (14(ve)+4(va))	37

(NR : non réponse ; RC : réponse correcte ; ve : valeur exacte ; va : valeur approchée)

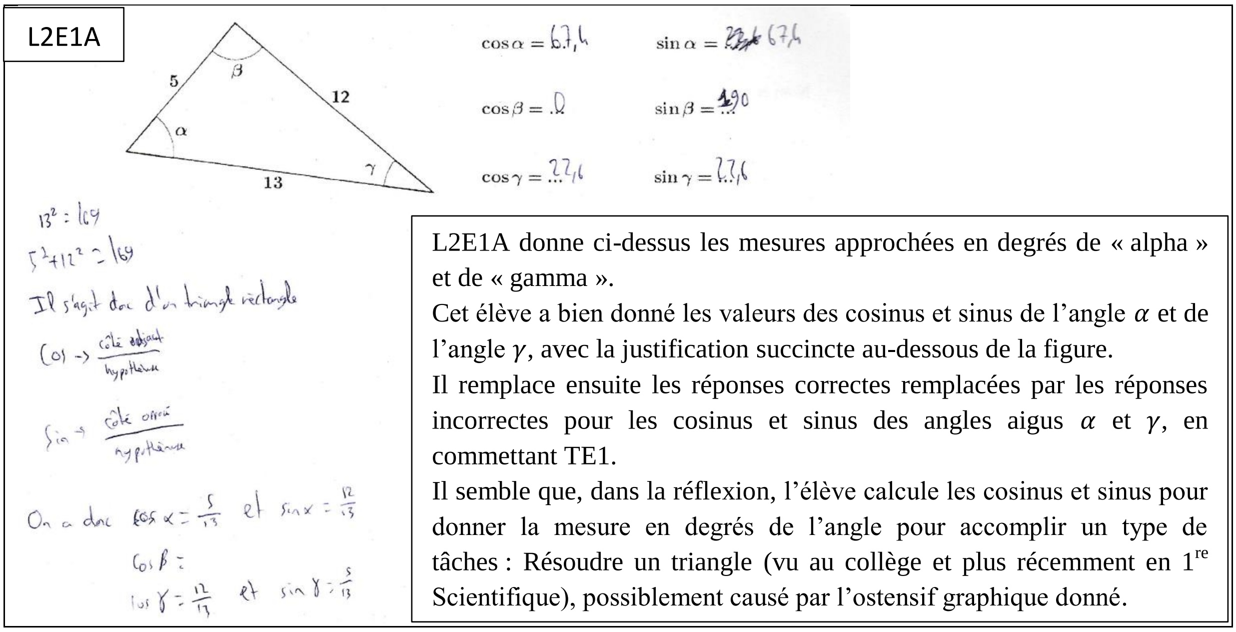
Tableau 28 : Répartition des erreurs concernant les cosinus et sinus d'un angle aigu par Stratégie 1.1

Les 5 élèves qui commettent TE1 pour l'angle α sont les mêmes qui le font pour l'angle γ (idem pour les 9 élèves commettant TE2 et pour les 4 élèves classés dans Autre).

Précisons que « Autre » » regroupe les types d'erreurs suivants : erreur dans l'emplacement des valeurs numériques, inversion cos/sin, confusion des côté adjacent et côté opposé à un angle aigu dans le triangle rectangle, erreur commise par inattention (voir *Figure 81*).

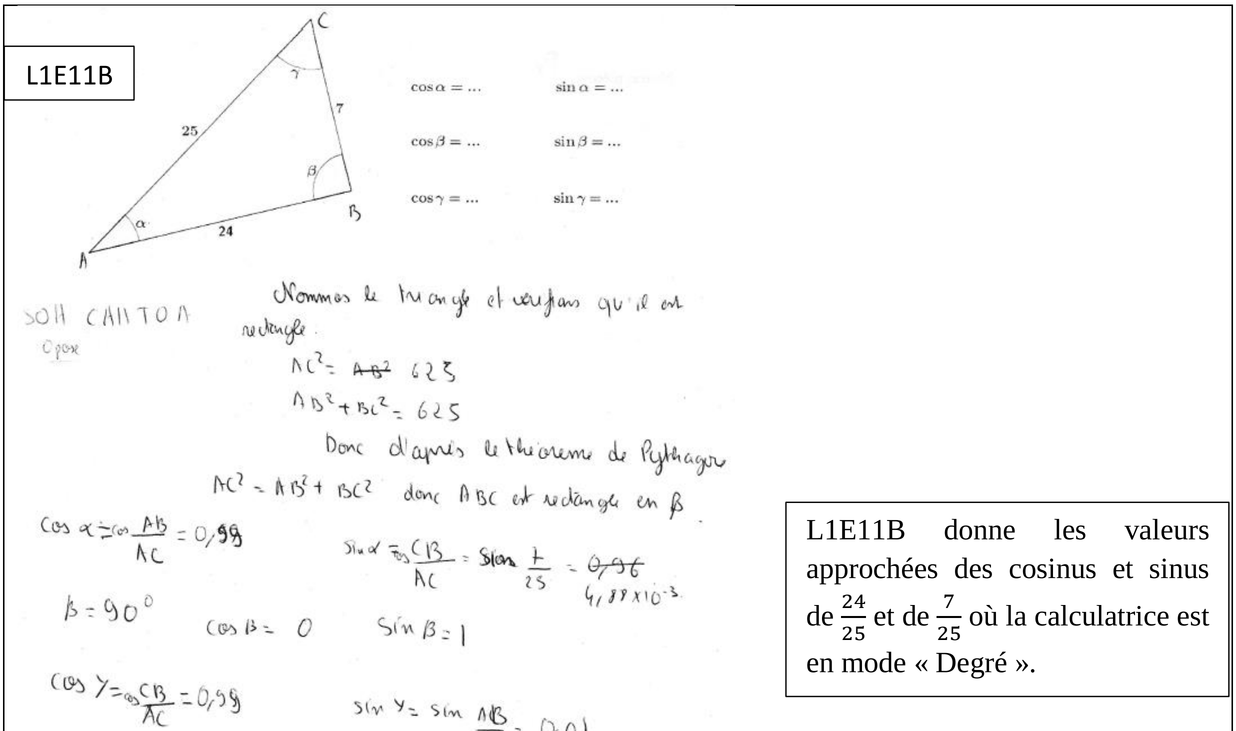
Figure 81 : Erreur commise par inattention par l’élève L2E26B sur l’angle γ

Nous donnons ci-dessous deux élèves qui commettent TE1 (L2E1A) et TE2 (L1E11B) :



L2E1A donne ci-dessus les mesures approchées en degrés de « alpha » et de « gamma ».
Cet élève a bien donné les valeurs des cosinus et sinus de l’angle α et de l’angle γ, avec la justification succincte au-dessous de la figure.
Il remplace ensuite les réponses correctes remplacées par les réponses incorrectes pour les cosinus et sinus des angles aigus α et γ, en commettant TE1.
Il semble que, dans la réflexion, l’élève calcule les cosinus et sinus pour donner la mesure en degrés de l’angle pour accomplir un type de tâches : Résoudre un triangle (vu au collège et plus récemment en 1re Scientifique), possiblement causé par l’ostensif graphique donné.

Figure 82 : **TE1** – cosinus et sinus des angles aigus



L1E11B donne les valeurs approchées des cosinus et sinus de $\frac{24}{25}$ et de $\frac{7}{25}$ où la calculatrice est en mode « Degré ».

Figure 83 : **TE2** – cosinus et sinus des angles aigus

Nous remarquons que parmi les 9 élèves qui ont commis TE2, 7 ont donné explicitement le cosinus et le sinus d'un angle aigu du triangle rectangle sous forme de quotient.

Cosinus et sinus de l'angle droit : TE3 (TE3A ; TE3B ; TE3C ; TE3D ; TE3E)

	TE3A	TE3B	TE3C	TE3D	TE3E	NR	RC	Total
$\cos\beta$	5	5	2	1	2	9	13	37
$\sin\beta$	8	5	1	1	3	8	11	37

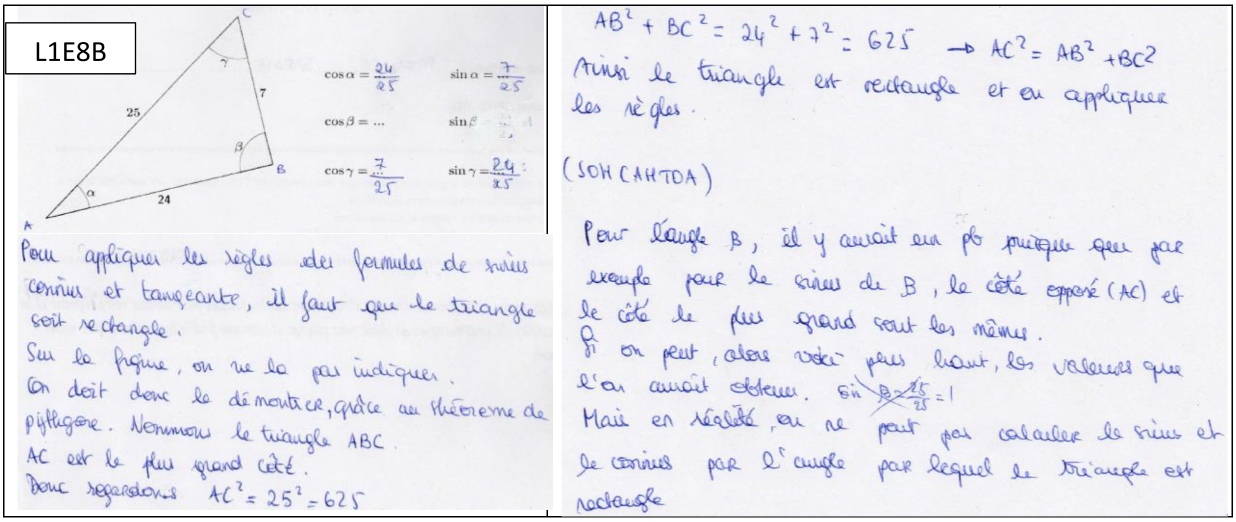
(NR : non réponse ; RC : réponse correcte)

<u>*Tableau 29*</u> : Répartitions des erreurs (TE3) concernant le cosinus et le sinus de l'angle droit

Nous remarquons que :

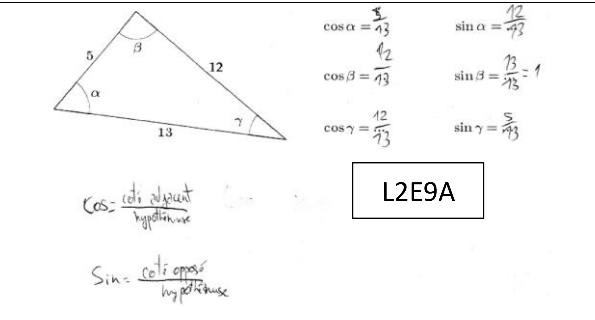
- un tiers des élèves environ mobilisent correctement les cosinus et sinus de l'angle droit, (voir par exemple *Figure 83* – L1E11B).
- près d'un quart des élèves ne répondent pas. Parmi eux, une seule (L1E8B) justifie par une affirmation dans laquelle elle ne donne pas le cosinus et le sinus de l'angle droit β ($OML_{TriangleR}$), (voir *Figure 84*).
- 15 élèves commettent TE3 pour $\cos\beta$, et 18 élèves dont les 15 élèves indiqués précédemment, commettent TE3 pour $\sin\beta$, (voir *Figure 91*).

Nous présentons ci-dessous des extraits des productions d'élèves particulièrement intéressantes :



<u>*Figure 84*</u> : Formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ne s'appliquent pas à l'angle droit

L1E8B reconnaît que les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ne s'appliquent pas à l'angle droit. Mais elle ne sort pas du cadre des savoirs appris au collège. Elle ne réactive pas dans ce contexte précis les savoirs appris en Seconde ou en 1re Scientifique pour donner les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle droit. Pourtant, dans la question II qui, elle, se situe dans le contexte du cercle trigonométrique, on peut noter qu'elle utilise, avec une inversion, les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle droit dans l'OML_{CTrigo}, (voir *Figure 96*).



L2E9A et L2E19B commettent TE3A pour donner les cosinus et sinus l'angle droit β.

L2E19B reconnaît bien que l'angle droit a pour mesure 90° (indiquée sur la figure) et pour mesure $\frac{\pi}{2}$ radians (indiquée dans une réponse fausse donnée pour $\cos\beta$).

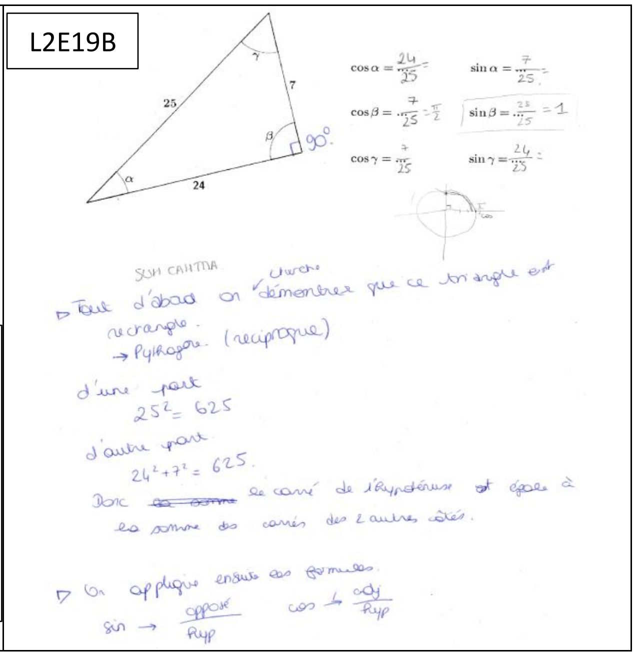
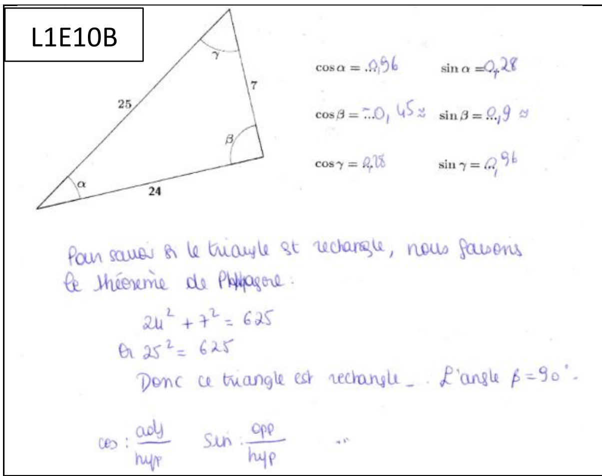


Figure 85 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3A**

L2E9A choisit le côté le plus long de l'angle droit comme côté adjacent à l'angle droit et L2E19B choisit le côté le plus petit. Il semble que certains élèves, L2E26B par exemple (voir *Figure 81*) ne se décident pas à effectuer un tel choix et donc laissent un trou pour le numérateur du rapport.



Cet élève reconnaît la mesure en degrés de l'angle droit. Il semble qu'il utilise la calculatrice en mode « Radian » : $\cos\beta = \cos(90) = -0{,}45$; $\sin\beta = \sin(90) = 0{,}9$, sans avoir conscience que la mesure qu'il utilise est en degré.

On peut se demander s'il se rend compte qu'il a obtenu une valeur négative. On ne sait pas ce qu'il en pense. En tout cas, cela ne le conduit pas à invalider cette réponse.

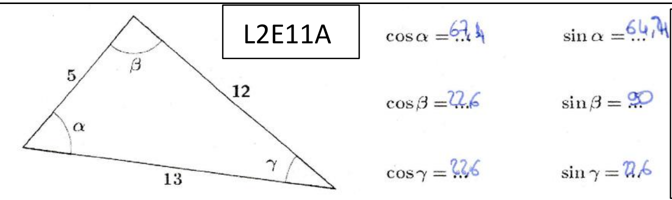
Figure 86 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3E**

Parmi les 18 élèves qui ont commis TE3, 6 commettent en même temps : soit TE1 soit TE2, (voir *Tableau 30* ci-dessous).

	TE3A + TE1	TE3A + TE2	TE3B + TE2	TE3C + TE2	TE3D + TE1	TE3	TE1	TE2
$\cos\beta$	1	1	1	1	1	15	2	3
$\sin\beta$	2	1	1	0	1	18	3	2

Tableau 30 : **TE3** accompagné par **TE1** ou **TE2**

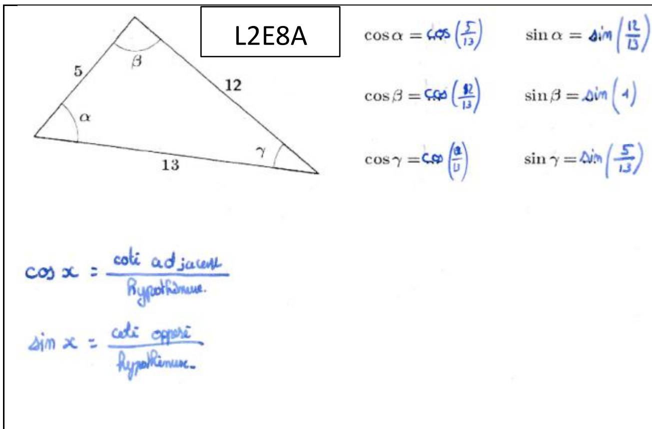
Nous présentons ci-dessous quelques extraits des productions de ces élèves :



Il semble que L2E11A effectue deux étapes : $\cos\beta = \frac{12}{13}$ et $\sin\beta = \frac{13}{13} = 1$ puis finit par les valeurs données dans sa preuve avec calculatrice en mode « Degré ».

Figure 87 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3A** et **TE1**

Pour L2E1A (voir *Figure 82*) et L2E11A (voir *Figure 87* ci-dessus), on pourrait supposer d'après le traitement appliqué aux deux angles aigus, qu'ils pensent à donner, à l'aide de la calculatrice en mode « Degré », des valeurs approchées des mesures des trois angles du triangle donné (Résolution de triangles). Toutefois, ces deux élèves n'ont pas réagi lorsqu'ils ont obtenu des valeurs différentes pour $\cos\beta$ et pour $\sin\beta$, cela laisse planer un doute sur notre interprétation.



L2E8A ne reconnaît pas *le cosinus et le sinus de l'angle droit*, mais il reconnaît les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle (cf. son rappel des formules notées au-dessous de la figure). Dans ces formules apparaît $\boldsymbol{x}$. À partir des réponses erronées qui donne, on peut penser que, pour lui, $\boldsymbol{x}$ désigne un nombre réel, par exemple $\frac{5}{13}$. On pourrait voir dans cette erreur une ***influence des concepts de fonctions sinus et cosinus sur les concepts de trigonométrie vus antérieurement***, influence qui conduit l'élève à commettre TE2.

Figure 88 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3A** et **TE2**

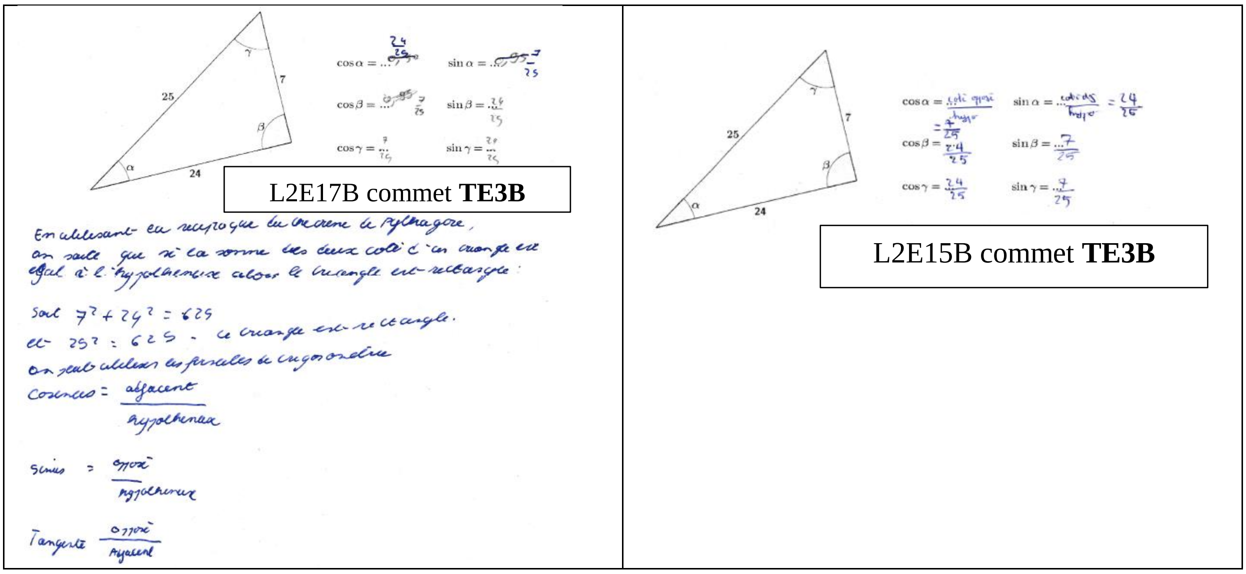


Figure 89 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3B**

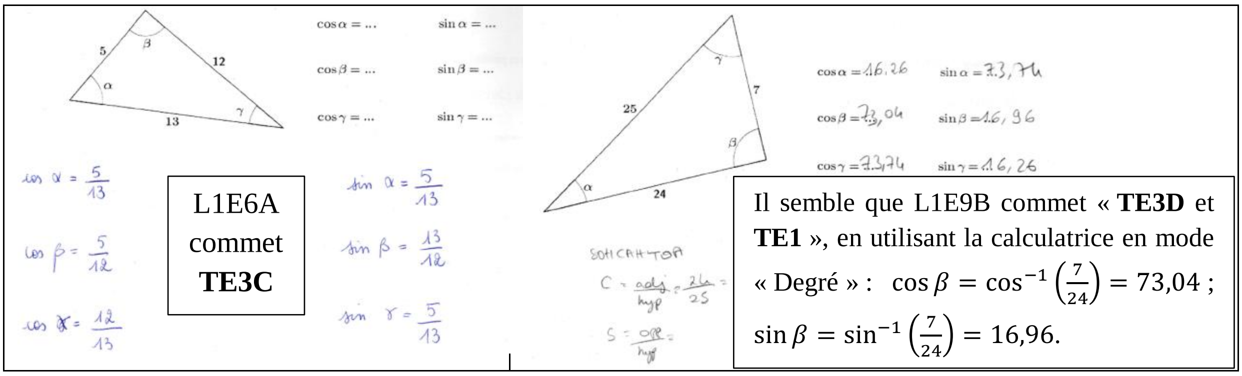


Figure 90 : Cosinus et sinus de l'angle droit adoptés avec **TE3C** et **TE3D** + **TE1**

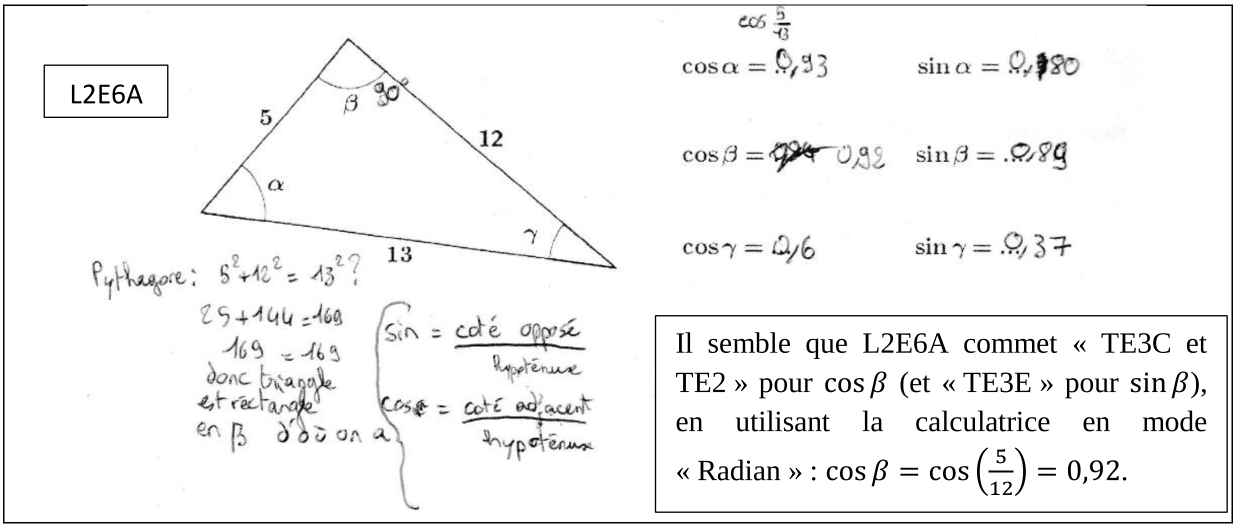
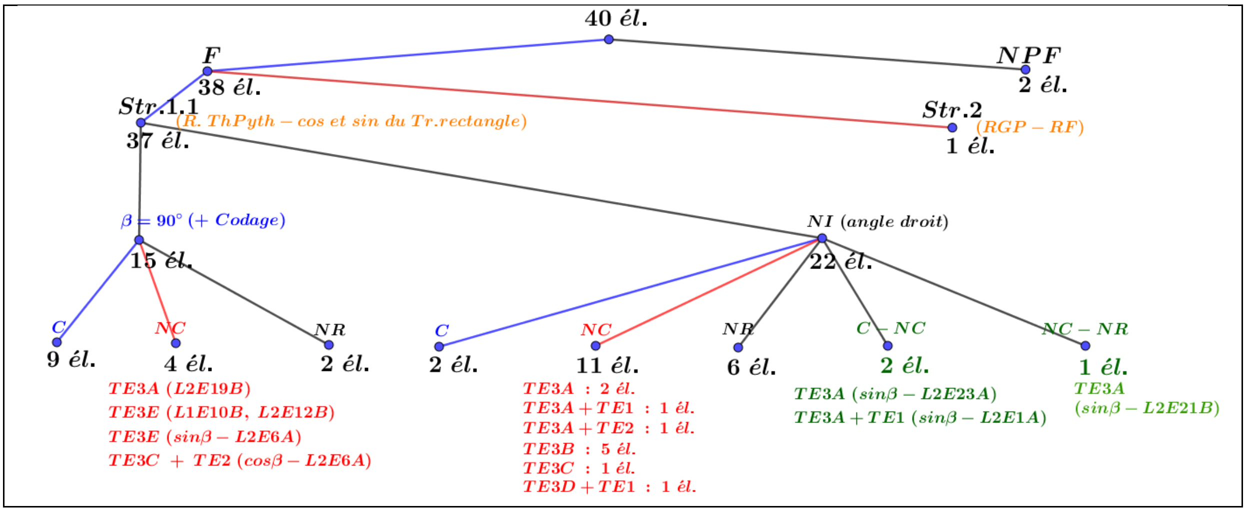


Figure 91 : Cosinus de l'angle droit adopté avec **TE3C** et **TE2**

Nous présentons ci-après un schéma (voir *Tableau 31*) qui décrit la répartition des élèves en deux niveaux, d'abord selon leurs réponses pour le calcul du cosinus et sinus des deux angles aigus, puis en les distinguant selon le traitement du cas de l'angle droit.



(F : a fait ; NPF : n'a pas fait ; Str : Stratégie ; R.ThPyth : réciproque du théorème de Pythagore ; Tr.rectangle : triangle rectangle ; RGP : relation généralisée de Pythagore ; RF : relation fondamentale ; él. : élève(s) ; NI : non indication de l'angle droit ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse)

Tableau 31 : Cosinus et sinus de l'angle droit du triangle rectangle – **TE3**

Ce schéma nous permet d'avoir l'information sur l'angle droit et la répartition des types d'erreurs commis par les élèves, de façon plus claire. Par exemple, 15 élèves sur 37 qui utilisent la stratégie 1.1 précisent la mesure en degrés de l'angle droit et/ou le codage désignant l'angle droit, et parmi ces 15 élèves : 9 reconnaissent le cosinus et le sinus de l'angle droit, 4 commettent TE3 et 2 ne donnent aucune réponse.

Synthèse du dépouillement de l'exercice I

Le dépouillement de l'exercice I nous montre que :

- les définitions des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle semblent être connues par les élèves dont une forte proportion les mobilisent sans autre indice que la figure fournie mais ils les maîtrisent mal ;
- dans cet exercice, la relation généralisée de Pythagore ($OML_{TriangleQ}$ – 1re Scientifique) n'est pas mobilisée. Il semble que cette connaissance ne soit pas assez maîtrisée par l'élève, reliée à un type de tâches « calculer le cosinus d'un angle d'un triangle ».
  Il est difficile d'en conclure qu'elle n'est définitivement pas disponible pour ces élèves de Terminale Scientifique ; en effet, dans cet exercice particulier, ils disposent pour les deux angles aigus α et γ d'une technique plus simple et plus rapide, l'$OML_{TriangleR}$ étant convoquée par la donnée d'un triangle visiblement rectangle. Les élèves étant amenés à établir que l'angle β est droit, il est aussi plus rapide d'utiliser les valeurs remarquables apprises dans l'OML_{CTrigo}.
  D'ailleurs, certains élèves (environ un huitième des élèves) réactivent un type de tâches « Résoudre un triangle » en commettant TE1, sans faire attention à ce que nous leur avons demandé de faire dans l'énoncé ; si c'est le cas, c'est alors un effet de contrat. Ce type de tâches est probablement appelé par la figure et les lettres que ces élèves ont rencontrées en 1re Scientifique. Donc, c'est un élément de complexité : ces élèves ne réactivent pas la relation généralisée de Pythagore mais ils traitent le type de tâches qui lui est associé.
- les cosinus et sinus de l'angle droit pose une difficulté aux élèves. Car la moitié des élèves environ (TE3) ne réactivent pas ce qu'ils ont appris à partir de la Seconde, par exemple : la définition du cosinus et du sinus d'un nombre réel, le tableau des valeurs remarquables du cosinus et du sinus.
  Nous faisons une interprétation de cette difficulté avec deux raisons possibles :
  - C'est, peut-être, la première rencontre, pour l'élève, avec une tâche consistant à déterminer le cosinus et le sinus de l'angle droit dans un triangle rectangle dans le cadre géométrique puisque la trigonométrie du triangle rectangle ($OML_{TriangleR}$) vue au collège ne sert que pour déterminer le cosinus et le sinus d'un angle aigu. Pour accomplir cette tâche, il convient de changer d'OML. Si l'élève n'y pense pas, nous avons vu qu'il peut tenter de traiter la tâche demandée sans sortir de l'$OML_{TriangleR}$: il s'adapte à la situation avec ses propres moyens en commettant par exemple le TE3.
  - Lors du passage de l'$OML_{TriangleR}$ à l'OML_{CTrigo}, les manuels de Seconde étudiés n'attirent pas l'attention sur le fait que les formules vues au collège

faisant intervenir les côtés adjacent et opposé ne s'appliquent pas pour l'angle droit, (voir chapitre 2, p. 90).

- un quart des élèves environ commettent TE2 : ces élèves veulent-ils « calculer les cosinus et sinus d'un angle ou les cosinus et sinus d'un nombre réel » ? Il semble que la nouvelle notion de fonctions sinus et cosinus ($OML_{FoncTrigo}$ – Terminale Scientifique) a une influence sur les connaissances antérieures ($OML_{TriangleR}$ – Collège) chez les élèves au niveau terminale. Nous faisons l'hypothèse que les connaissances antérieures interfèrent avec le point de vue fonctionnel nouveau pour ces élèves, ce qui montre une certaine confusion des savoirs appris sur les thèmes Trigonométrie (de la 4e à la 1re Scientifique) et Fonctions sinus et cosinus (Terminale Scientifique).

4.1.4. Exercice II

11 élèves sur 40 ne font pas cet exercice. Parmi les 29 élèves qui le font, 8 élèves font la question « 2.a », dont 3 donnent la réponse correcte. Deux de ces trois élèves utilisent correctement les formules d'addition du cosinus et du sinus à la question « 2.b », ils sont les seuls de l'échantillon à traiter correctement cette question. (voir *Tableau 32* ci-dessous)

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td>NPF</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q1 (29 élèves) : cosinus et sinus de α (angle aigu) et de β (angle obtus) dans cet ordre</td><td rowspan="12">11</td></tr>
<tr><td>(C ; C)</td><td>13 (11 : coordonnées ; 2 : nombres complexes)</td></tr>
<tr><td>(NC ; NC)</td><td>8 (3 : TE2 ; 1 : relation dans  ; Autre : 4)</td></tr>
<tr><td>(C ; NC)</td><td>3 (relation dans )</td></tr>
<tr><td>(C ; NR)</td><td>1 (relation dans )</td></tr>
<tr><td>(NC ; NR)</td><td>4 (Autre)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q2 : Q2.a et Q2.b dans cet ordre</td></tr>
<tr><td>(C ; C)</td><td>2 (Stratégie 3 – formules d'addition du cosinus et du sinus)</td></tr>
<tr><td>(NC ; NC)</td><td>4 (3 : linéarité des fonctions cosinus et sinus)</td></tr>
<tr><td>(C ; NR)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(NC ; NR)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(NR ; NR)</td><td>21</td></tr>
</table>

(Q : Question ; C : correct ; NC : non correct ; NR : non réponse ; NPF : n'a pas fait)

Tableau 32 : Effectif réparti suivant les questions

Dans *Tableau 32*, à la question 1, par exemple (C ; NC) signifie : c'est, dans l'ordre, correct pour les cosinus et sinus de l'angle α et non correct pour ceux de l'angle β. À la question 2, par exemple, (NC ; NR) signifie : c'est, dans l'ordre, non correct pour Q2.a et non réponse pour Q2.b.

Pour la question 1, le *Tableau 32* montre que 17 élèves traitent correctement le cas de l'angle aigu et qu'ils ne sont plus que 13 à le faire pour l'angle obtus. Nous nous intéressons maintenant aux erreurs des élèves qui se trompent pour l'un ou l'autre angle.

Types d'erreurs des élèves (TE) : TE2

	cos et sin d'un angle orienté	TE2	Autre				NR	RC	Total
			a.	b.	c.	d.			
Q1	α	3	3	1	0	5	0	17	29
	β	3	3	1	3	2	4	13	29

(NR : non réponse ; RC : réponse correcte ; Autre a., b., c. et d. : voir ci-dessous)

Tableau 33 : **TE** repérés – Question 1

Dans *Tableau 33*, les 3 élèves qui commettent TE2 pour l'angle α sont les mêmes élèves qui le font pour l'angle β. Parmi ces 3, 2 (L2E8A, L2E25B) ont déjà commis TE2 dans l'exercice I et 1 (L2E17B) a donné la bonne réponse pour les cosinus et sinus des angles aigus dans le triangle rectangle.

Rappelons que TE2 consiste à confondre les valeurs des ***cosinus et sinus d'un angle*** avec des *cosinus et sinus d'un nombre réel*. Nous la rencontrons dans cette question sous une forme adaptée au cadre de la géométrie repérée. Ici, l'élève reconnaît dans un premier temps que le cosinus et le sinus de l'angle orienté sont l'abscisse x et l'ordonnée y du point du cercle trigonométrique qui détermine cet angle. Puis, dans un deuxième temps, il donne $\cos(x)$ et $\sin(y)$ comme les résultats finaux, (voir *Figure 92* ci-dessous).

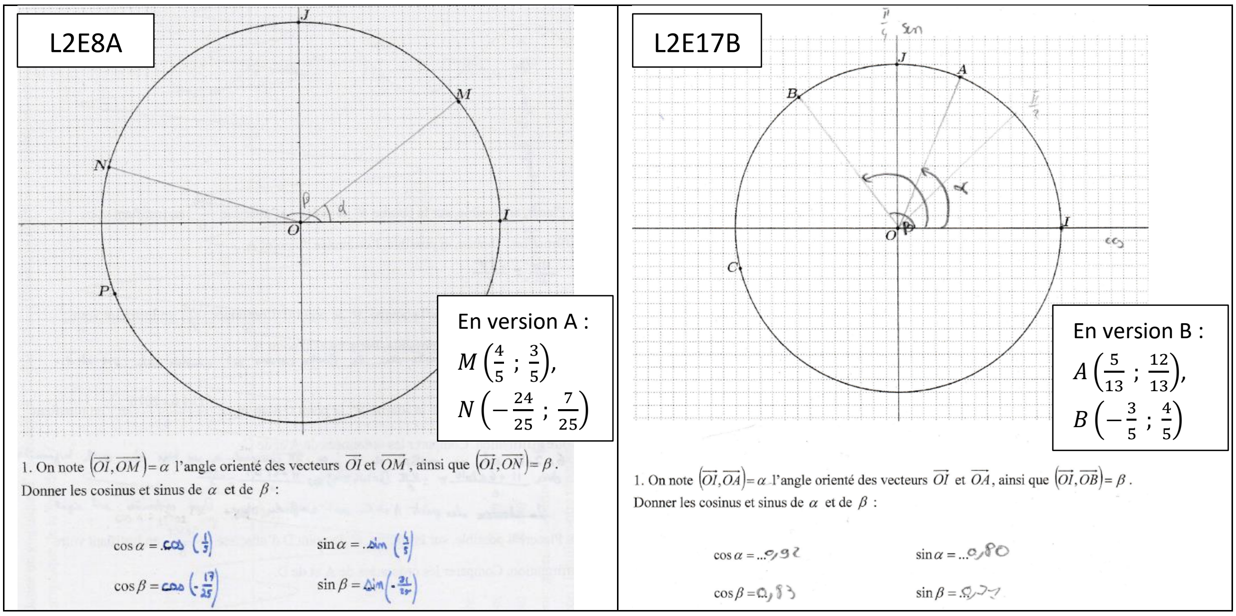


Figure 92 : **TE2** dans le cadre « géométrie repérée »

Dans cette *Figure 92* : L2E8A et L2E17B repèrent correctement avec un codage les angles α et β. L2E8A a fait une double erreur : 1. Inversion abscisse ↔ ordonnée avec un mauvais repérage des valeurs numériques, 2. TE2. L2E17B a commis TE2 ; ici, il a directement donné les réponses finales erronées sous forme de valeurs approchées du cosinus et du sinus d'un nombre réel, en utilisant la calculatrice en mode « Radian » : par exemple, $\cos\alpha =$

$\cos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 0{,}92$ et $\sin\alpha = \sin\left(\frac{12}{13}\right) \approx 0{,}80$. Rappelons que dans *Tableau 33* précédent, nous indiquons trois élèves qui ont commis TE2. Dans l'exercice II, la stratégie adoptée par le troisième élève (L2E25B) est la même que celle de L2E17B.

La catégorie « Autre » (*Tableau 33*) désigne les types d'erreurs proposés par les élèves comme suit :

a. Dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;I,J)$, on considère $M(a\,;b)$ un point du cercle trigonométrique et α l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$, on a alors :
soit $\cos\alpha = OM$ et $\sin\alpha = IM$ (L2E4A) ;
soit $\cos\alpha = OM$ et $\sin\alpha = OM$ (L1E12B) ;
soit $\cos\alpha = \frac{a}{b}$ et $\sin\alpha = \frac{b}{a}$ (L2E21B).
(3 élèves : L1E12B ; L2E4A ; L2E21B)

b. Appliquer les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu du triangle rectangle dans un triangle quelconque afin de donner les cosinus et sinus d'un angle de ce triangle en définissant le côté opposé à l'angle dont les côtés sont les rayons du cercle trigonométrique comme étant l'hypoténuse, (voir *Figure 93*). (1 élève : L2E15B)

c. Dans le cas où l'angle est obtus correspondant au point N qui se situe dans le deuxième quadrant, l'élève tend :
   - soit à écrire cet angle obtus comme somme de deux angles puis appliquer les formules d'addition du cosinus et du sinus avec les erreurs comme $\cos(p+q) = \cos p + \cos q$ et $\sin(p+q) = \sin p + \sin q$;
   (1 élève : L1E8B, voir *Figure 96*)
   - soit à travailler dans un triangle rectangle afin d'utiliser les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu du triangle rectangle avec des erreurs, comme, par exemple, repérer faussement l'angle, écrire le cosinus de l'angle comme rapport métrique des longueurs et donner la valeur négative à ce rapport pour finir (voir *Figure 94*). (2 élèves : L1E7A ; L2E5A)

d. Erreurs que nous n'arrivons pas à identifier.
(5 élèves : L1E1A ; L1E2A ; L1E10B ; L2E19B ; L2E24B)

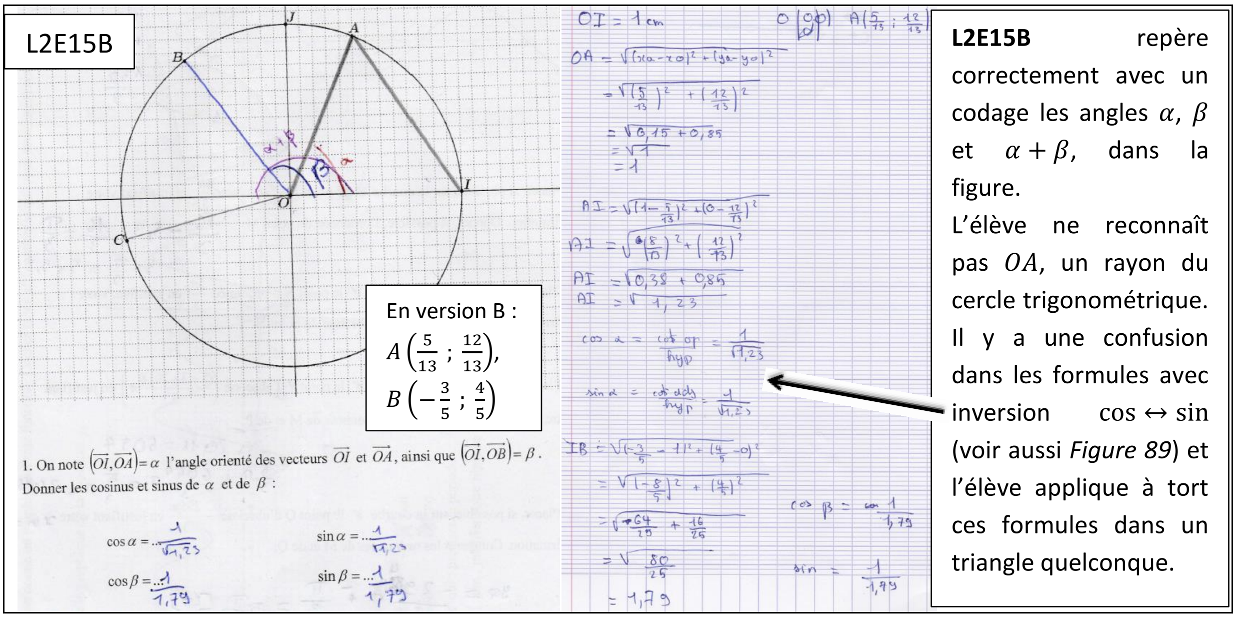


Figure 93 : **Autre.b** - Application à tort des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle dans un triangle quelconque

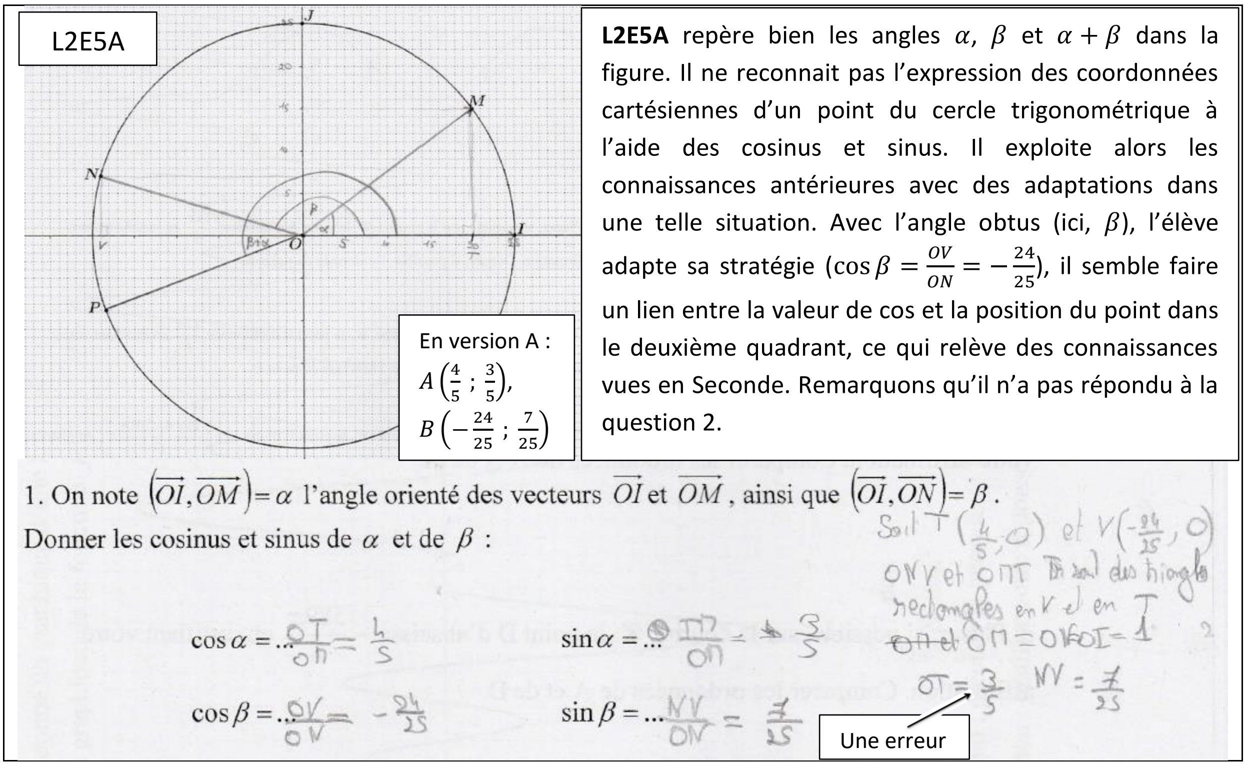


Figure 94 : **Autre.c**

Nous nous intéressons maintenant aux réponses correctes.

À la question 1 (voir *Tableau 34*) – 17 élèves sur 29 donnent correctement les valeurs des cosinus et sinus de l'angle α. Parmi les 17 élèves :

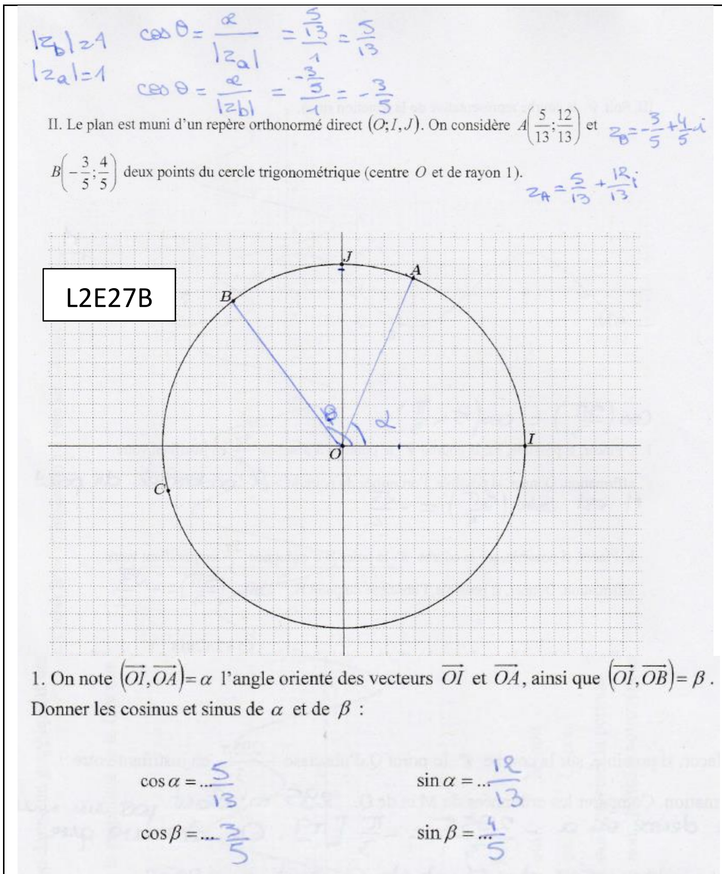
- 11 élèves reconnaissent « le cosinus et le sinus de l'angle α comme l'abscisse et l'ordonnée du point M » où $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \alpha$ dans un repère orthonormé direct $(O\,; I, J)$ du plan ;

- 2 élèves (L2E26B ; L2E27B – voir *Figure 95*) exploitent les propriétés des nombres complexes (affixe d'un point du plan, forme algébrique d'un nombre complexe, détermination d'un argument d'un nombre complexe) ;
- 4 élèves utilisent les connaissances antérieures vues en 4^e et 3^e, ce qui suppose qu'ils ajoutent des tracés et notations complémentaires pour faire apparaître un triangle rectangle.

13 (11 + 2) parmi ces 17 élèves donnent aussi correctement, avec la même stratégie, les valeurs des cosinus et sinus de l'angle β. En revanche les 4 élèves (L2E5A ; L1E3A ; L1E7A ; L1E8B), qui utilisent « les définitions du cosinus et du sinus d'un angle aigu du triangle rectangle » pour donner les cosinus et sinus de l'angle α, rencontrent des difficultés pour conclure dans le cas de l'angle β (angle obtus) :

- l'élève L1E3A ne répond pas,
- l'élève L2E5A semble solliciter implicitement un lien entre la position du point et le signe du cosinus (cf. *Figure 94*),
- l'élève L1E7A adopte une stratégie similaire à celle de L2E5A mais elle ne pense pas au signe du cosinus (autrement, elle se situe totalement dans l'OML$_{\text{TriangleR}}$, il semble qu'elle n'ait pas l'idée comme L2E5A qui s'adapte à la situation en faisant un lien entre la position du point et le signe du cosinus ; précisons que le cosinus β de l'élève L1E7A est $\frac{24}{25}$),
- l'élève L1E8B adapte sa stratégie avec la relation de Chasles, (voir *Figure 96*).

Remarquons que ces quatre élèves n'ont pas répondu à la question 2.



L2E27B a laissé la trace qui indique qu'il a exploité les propriétés des nombres complexes. Il a supposé que les points A et B sont les images de nombres complexes de module 1 car ce sont des points du cercle trigonométrique.

Connaissant les coordonnées de ces points images A et B, l'élève a donné leurs affixes respectives z_A et z_B sous forme algébrique. Selon la trace écrite, il n'a exprimé que son procédé de calcul pour trouver le cosinus des arguments des deux nombres complexes, à l'aide de la définition de l'argument d'un nombre complexe.

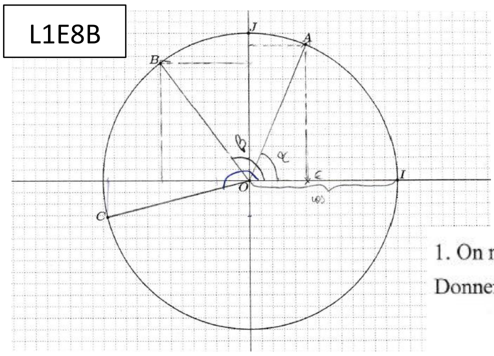
Dans ce procédé, il est obligatoire que l'élève ait supposé que α et β étaient des mesures en radians des angles orientés donnés.

L'élève n'a pas répondu la question 2.

Figure 95 : Exploitation des propriétés des nombres complexes pour la question 1

II. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;I,J)$. On considère $A\left(\frac{5}{13};\frac{12}{13}\right)$ et $B\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$ deux points du cercle trigonométrique (centre O et de rayon 1).

L1E8B



1. On note $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)=\alpha$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA}$, ainsi que $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)=\beta$.
Donner les cosinus et sinus de α et de β :

$\cos\alpha = \frac{OE}{OA} = \frac{\frac{5}{13}}{1} = \frac{5}{13}$ $\quad$ $\sin\alpha = \frac{AE}{OA} = \frac{\frac{12}{13}}{1} = \frac{12}{13}$

$\cos\beta = \cos\widehat{JOI} + \cos\widehat{BOJ} = 1 + \frac{\frac{4}{5}}{1} = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}$ $\quad$ $\sin\beta = \sin\widehat{JOI} + \sin\widehat{BOJ} = 0 + \frac{-\frac{3}{5}}{1} = -\frac{3}{5}$

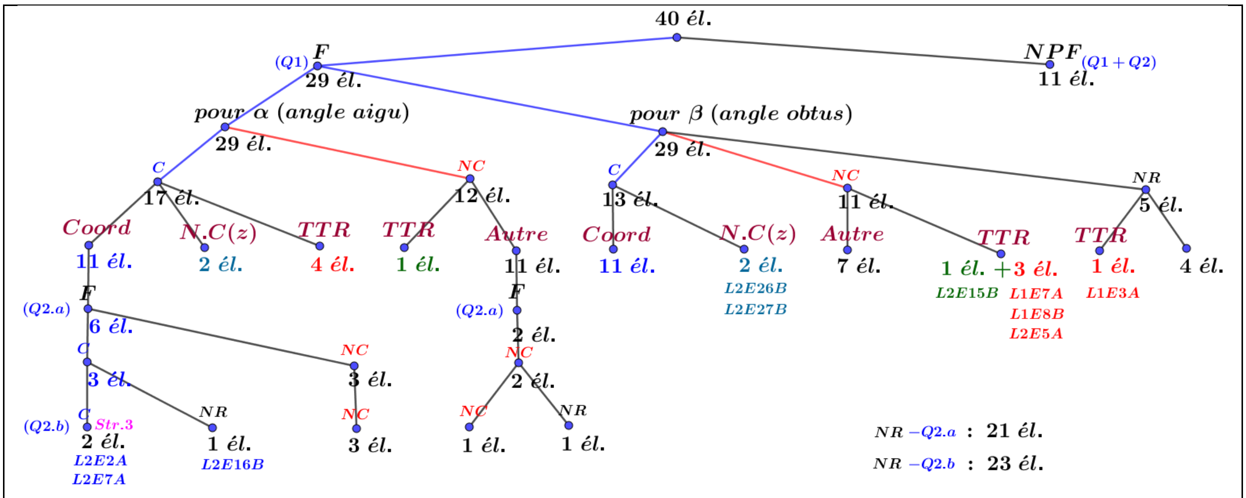
L1E8B a exploité le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle et a appliqué à tort la linéarité des fonctions cosinus et sinus.

L'élève reconnaît, avec inversion cos ↔ sin, les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle droit ($\cos\widehat{JOI} = 1$ et $\sin\widehat{JOI} = 0$). Mais, ce n'est pas le cas à l'exercice I (voir *Figure 84*).

L'élève n'a pas répondu la question 2.

Figure 96 : Stratégie non réussie pour l'angle obtus β

À la question 2 (voir *Tableau 34*) – 8 élèves donnent leurs réponses à la question « 2.a. » : 2 (L2E21B ; L2E25B) issus des 12 élèves qui donnent incorrectement leur réponse à la question 1 et 6 issus des 11 élèves qui reconnaissent à la question 1 « le cosinus et le sinus de l'angle α comme l'abscisse et l'ordonnée du point M ». La moitié de ces 6 élèves (L2E2A ; L2E7A ; L2E16B) donnent la réponse correcte, et l'autre moitié (L1E5A ; L1E11B ; L2E9A) fait des erreurs dans les réponses. Il semble que les trois élèves de la deuxième moitié pensent de même manière fausse, plutôt, à la linéarité de coordonnées comme étant la linéarité des coordonnées d'un vecteur qui est la somme de deux vecteurs, et qu'ils oublient probablement les « formules d'addition du cosinus et du sinus » ; par exemple : les coordonnées du point P données par l'élève L1E5A à la question 2.a sont respectivement $Px(\cos\alpha + \cos\beta)$ et $Py(\sin\alpha + \sin\beta)$, et à la question 2.b, il reporte les valeurs numériques des cosinus et des sinus, trouvées à la question 1, pour déterminer numériquement les coordonnées du point P.
Deux tiers des élèves qui font Q1 ne font pas Q2.



(F : a fait ; NPF : n'a pas fait ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse ; Coord : lien entre les coordonnées et les cos et sin ; N.C(z) : a exploité des propriétés des nombres complexes ; TTR : a exploité la trigonométrie dans le triangle rectangle ; Str : Stratégie)

Tableau 34 : Répartition de l'effectif des productions d'élèves suivant les questions

Synthèse du dépouillement de l'exercice II

Le dépouillement de l'exercice II montre que :

- un quart des élèves environ reconnaît que le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique qui détermine l'angle orienté (OML_{CTrigo}) ;
- un quart des élèves environ utilisent d'autres connaissances : soit la trigonométrie du triangle rectangle au collège ($OML_{TriangleR}$) soit les nombres complexes (vus en Terminale Scientifique), pour accomplir, avec réussite ou échec, les tâches demandées situées dans l'OML_{CTrigo} ;
- la moitié des élèves ne mobilisent ni l'OML_{CTrigo} ni l'$OML_{TriangleR,}$ la moitié d'entre eux n'abordent pas du tout cette question.
- 3 élèves sur 29 se situent dans l'OML_{CTrigo} et dans l'$OML_{FoncTrigo}$ avec une ambiguïté sur les objets cosinus et sinus (voir *Figure 92*), en commettant le TE2.

Nous retenons donc les éléments suivants :

- L'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus semble être peu disponible. Notre analyse *a priori* de la question 1 était donc erronée. Contrairement à ce que nous avions supposé, cette tâche n'est pas simple pour les élèves de Terminale Scientifique interrogés.
- Cette même question montre que la formule d'Al-Kashi n'est pas disponible chez les élèves qui ont convoqué l'$OML_{Triangle}$, même si les triangles qu'ils ont fait apparaître n'étaient pas rectangles. Par contre, la disponibilité des connaissances liées au triangle rectangle est confirmée, même s'il faut introduire des éléments nouveaux pour les utiliser.
- La linéarité sur les fonctions cosinus et sinus est appliquée à tort par certains élèves qui ne pensent pas aux formules d'addition du cosinus et du sinus.

4.1.5. Exercice III.1

4 élèves ne font pas l'exercice III.1.

Avant d'analyser les productions des 36 autres élèves, « question par question », nous présentons d'abord des extraits des productions dans lesquelles apparaît TE4, un type d'erreurs faites par beaucoup d'élèves dans cet exercice III.1.

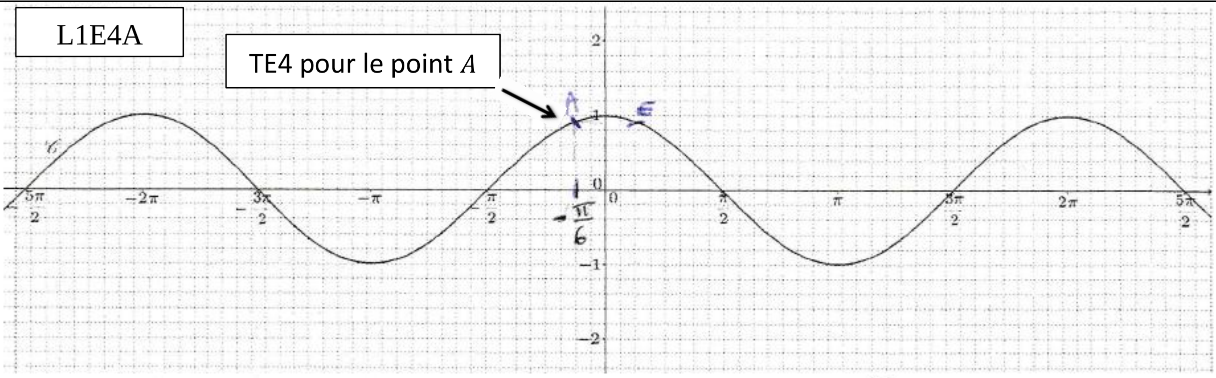
Rappelons-nous que TE4 consiste en une « Confusion entre **angles** (ou points sur le cercle trigonométrique) et **nombres réels** de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus) », (voir la section 1.4.2, p. 235).

12 élèves sur 36 ont commis TE4 (un tiers des élèves) : L1E2A, L1E3A, L1E4A, L1E6A, L1E7A, L1E12B, L2E8A, L2E13B, L2E17B, L2E18B, L2E20B, L2E27B.

Voici quelques extraits portant sur TE4 :

L1E4A

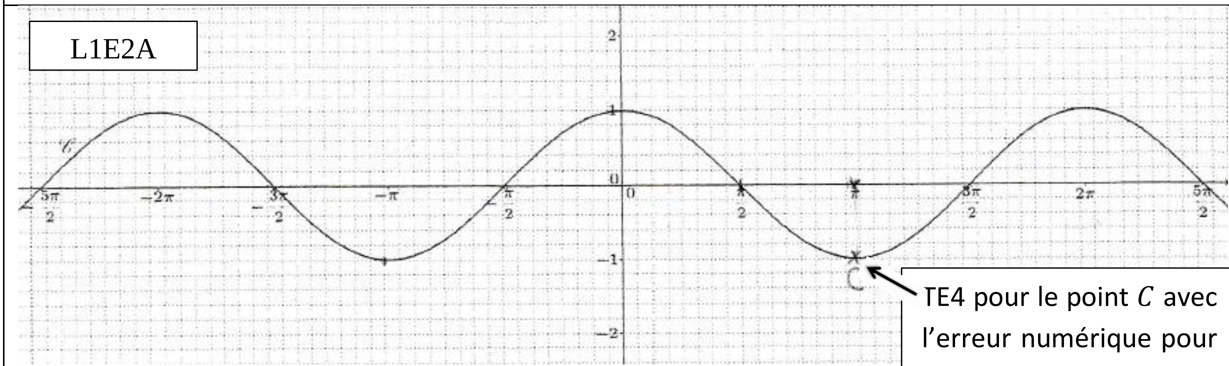
TE4 pour le point A



1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A d'abscisse $\dfrac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point A.

$\frac{11\pi}{6}$ a le même cosinus que $-\frac{\pi}{6}$ $A\left(\frac{11\pi}{6} ; 0{,}85\right)$

L1E2A



TE4 pour le point C avec l'erreur numérique pour l'abscisse de C donnée

1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A d'abscisse $\dfrac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point A.

$\approx 5{,}759$

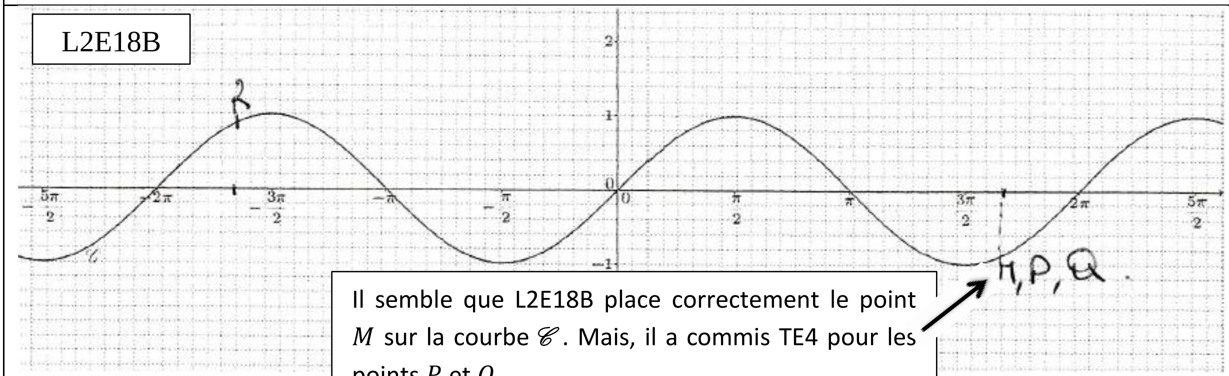
L'ordonnée de A est 1.

L1E2A suite

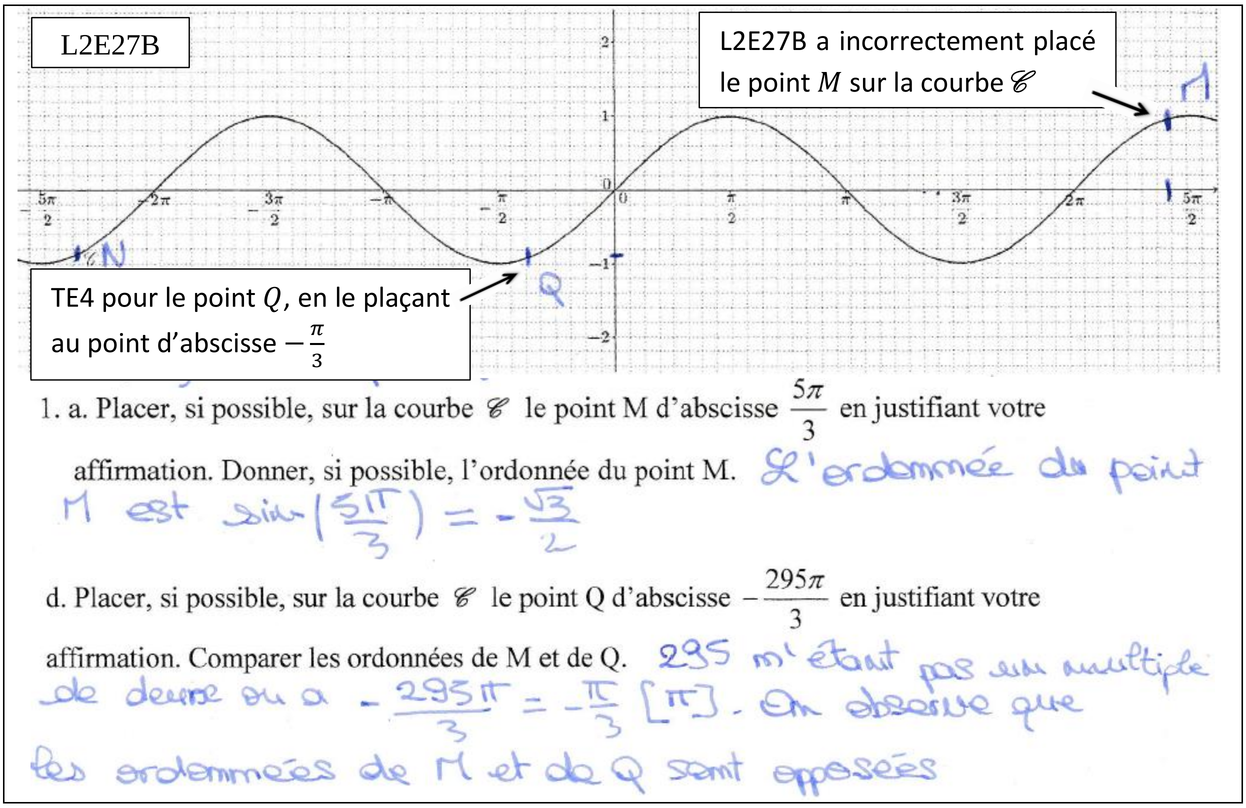
c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\dfrac{11+6\times 2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

$\hookrightarrow 5712\pi$
$= k\pi$

L2E18B



Il semble que L2E18B place correctement le point M sur la courbe $\mathscr{C}$. Mais, il a commis TE4 pour les points P et Q


L2E27B

L2E27B a incorrectement placé le point M sur la courbe $\mathscr{C}$

TE4 pour le point Q, en le plaçant au point d'abscisse $-\frac{\pi}{3}$

1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point M. L'ordonnée du point M est $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point Q d'abscisse $-\frac{295\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de M et de Q. 295 n'étant pas un multiple de deux on a $-\frac{295\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}\ [\pi]$. On observe que les ordonnées de M et de Q sont opposées

Figure 97 : **TE4**

Nous donnons maintenant en détails ce qui concerne les productions des 36 élèves qui ont fait l'exercice III.1.

Question « 1.a. » :

	Pouvoir placer le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$					
	C : 23		NC : 10		A (ou M) non placé sur $\mathscr{C}$: 3	
1.a.	y_A(ou y_M) donné par : LG : 11 Cce (Rad) : 1 VE : 6 (C)	y_A(ou y_M) non donné : 5	y_A(ou y_M) donné par : LG : 5 Cce : 0 VE : 1 (C)	y_A(ou y_M) non donné : 5	y_A(ou y_M) donné par : LG : 0 Cce(Deg) : 1 VE : 0 Autre : 1	y_A(ou y_M) non donné : 1

(C : correct ; NC : non correct ; LG : lecture graphique ; Cce : Calculatrice ; VE : valeur exacte)

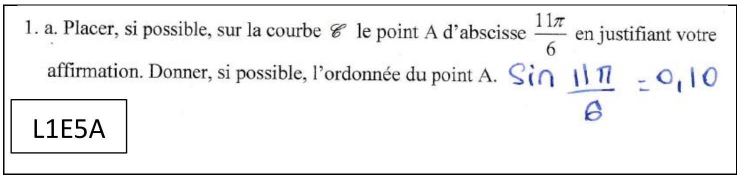
Tableau 35 : Effectif réparti à la question 1.a

Parmi les 36 élèves, 23 semblent placer raisonnablement le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$, 10 placent incorrectement ce point, 1 place ce point sur l'axe des abscisses (L2E16B), 2 autres ne le placent pas (L1E2A, L1E5A). Un quart de ces élèves ne donnent pas l'ordonnée du point A (ou M), la moitié environ donne une valeur approchée de l'ordonnée de ce point à l'aide de la *lecture graphique* ; 2 élèves utilisent la *calculatrice*, dont un ne pense pas à mettre d'abord la calculatrice en mode « Radian ». Seulement 7 élèves donnent la ***valeur exacte*** de l'ordonnée de ce point. 3 élèves sur 36 placent le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$ pour la version A (L1E4A, voir *Figure 97* ; L2E8A - erreur numérique) ou $-\frac{\pi}{3}$ pour la version B (L2E17B).

Nous remarquons que :

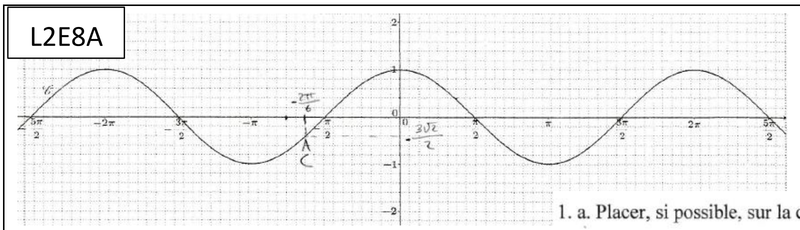
- parmi les 7 élèves qui donnent la valeur exacte de l'ordonnée du point A (ou M) : 2 (L1E6A ; L2E2A) laissent une trace de leur réflexion (mais nous ne voyons pas les opérations relatives au raisonnement mathématique) et 5 donnent directement $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ou $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) sans donner la preuve mathématique. Nous ne savons pas comment ces élèves arrivent à le trouver : lecture sur le cercle trigonométrique en retenant bien la position des points images associés aux nombres réels remarquables et les valeurs remarquables des cosinus et sinus (vu en Seconde) ; image mentale (voir clairement $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$ (ou $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$) et lire graphiquement les cosinus et sinus sur le cercle trigonométrique (ou bien retenir, par exemple, les formules comme $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\cos(-x) = \cos x$)).
- plus précisément, parmi les 27 élèves qui donnent l'ordonnée du point A (ou M), 16 élèves la donnent à l'aide d'une lecture graphique. 10 élèves sur 27 reconnaissent que l'ordonnée du point A (ou M) est $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (ou $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$) : 1 (L1E4A) issu des 16 élèves qui donnent une valeur approchée de l'ordonnée de ce point à l'aide d'une lecture graphique, 2 élèves à l'aide de la calculatrice et 7 élèves qui donnent la valeur exacte de l'ordonnée de ce point.

Voici quelques exemples des extraits sur des erreurs commises par certains élèves.



L1E5A n'a pas placé le point A sur la courbe de la fonction cosinus donnée, et elle a donné la valeur incorrecte de l'ordonnée du point A, avec une double erreur : elle a mal traduit l'ordonnée du point A et utilisé la calculatrice en mode « Degré ».

Figure 98 : Utilisation de la calculatrice en mode « Degré »



L2E8A a d'abord commis une erreur numérique, puis une erreur pour repérer $-\frac{2\pi}{6}$ sur l'axe des abscisses, et pour finir a commis TE4. L'ordonnée du point A étant $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$ est non identifiable.

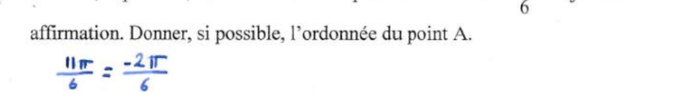
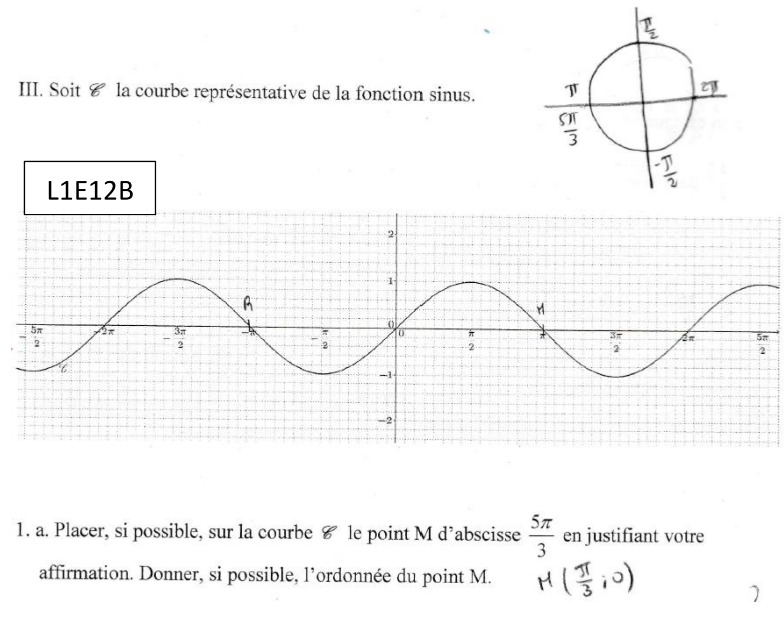


Figure 99 : **TE4** accompagnés par d'autres erreurs à la question 1.a


III. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction sinus.

L1E12B

1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point M. $M\left(\frac{\pi}{3} ; 0\right)$

D'après la représentation d'un cercle trigonométrique produite ci-contre, nous supposons que l'élève **L1E12B** a noté, par exemple, $\frac{\pi}{2}$ à la place du point image associé à ce nombre dans l'enroulement de la droite numérique ou qu'il a remplacé le point du cercle trigonométrique par une/des mesure(s) en radians de l'angle orienté associé à ce point. Il a fait une double erreur : 1. L'angle $\pi\, rd$ (cercle trigonométrique) ayant pour mesures π, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$; 2. Sur la représentation graphique de la fonction sinus, les points d'abscisses respectives π, $\frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ sont confondus. Apparaît alors clairement **TE4** dans la réflexion de l'élève.

Pour la suite de son travail, l'élève a raison pour l'ordonnée de son point M qui a pour valeur 0 (lecture graphique).

Figure 100 : **TE4** avec trace sur le cercle trigonométrique et sur la représentation graphique de la fonction sinus

Question « 1.b. » :

1.b.	B (ou N) placé sur la courbe $\mathscr{C}$: 2	Inexistence du point B (ou N) sur la courbe $\mathscr{C}$: 26		NPF
	1 avec justification non correcte 1 sans justification	Justification correcte : 14 Justification incomplète : 4	Justification non correcte 8 dont 6 sont attendues	8

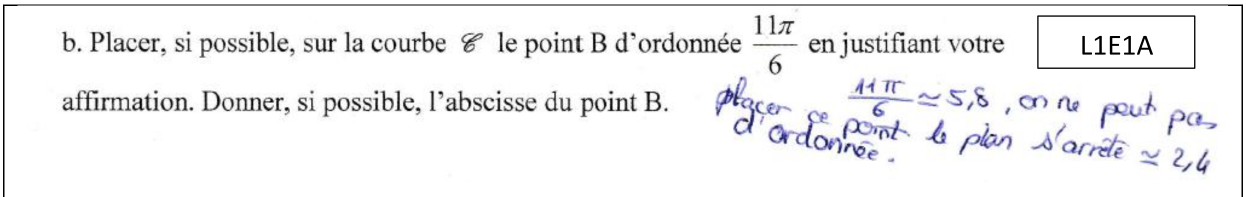
(NPF : n'a pas fait)

Tableau 36 : Effectif réparti à la question 1.b

8 élèves parmi les 36 ne font pas cette question « 1.b. ». Parmi les 28 élèves qui la font, 2 placent le point B (ou N) sur la courbe $\mathscr{C}$ parce qu'ils ne comprennent pas la consigne, par exemple : le point N de L2E16B était le point ayant même abscisse que celle du point M ; et le point N de L2E27B semblerait être le symétrique du point M par rapport à l'origine du repère (voir *Figure 97*). 14 élèves sur 26 justifient mathématiquement et correctement la non existence du point B (ou N) sur la courbe $\mathscr{C}$.

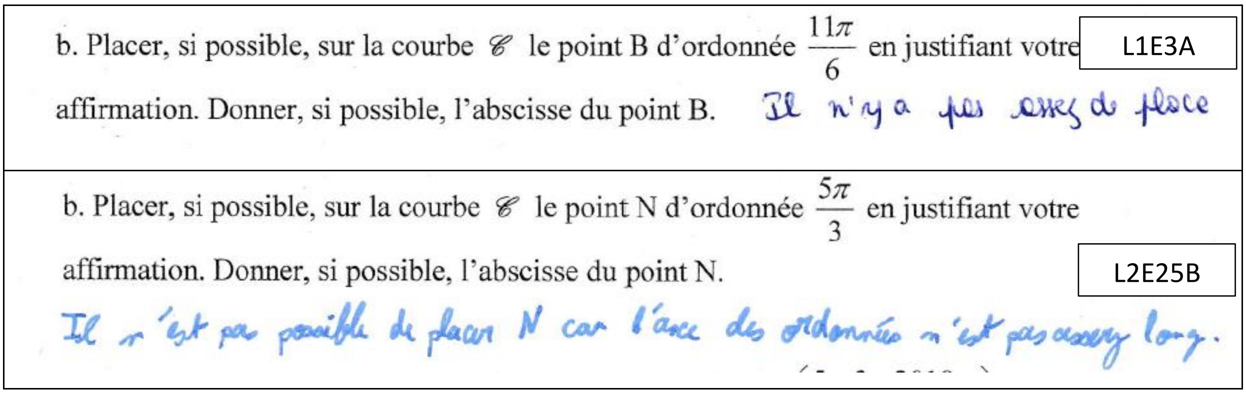
Nous pouvons émettre la conclusion qu'un peu plus d'un tiers des élèves réactivent bien la propriété « pour tout nombre réel x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$ » dans le registre graphique du cadre fonctionnel.

Voici quelques exemples d'extraits concernant des erreurs de certains élèves :


b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point B.

L1E1A

$\frac{11\pi}{6} \simeq 5{,}8$, on ne peut pas placer ce point le plan s'arrête $\simeq 2{,}4$ d'ordonnée.


b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point B. Il n'y a pas assez de place

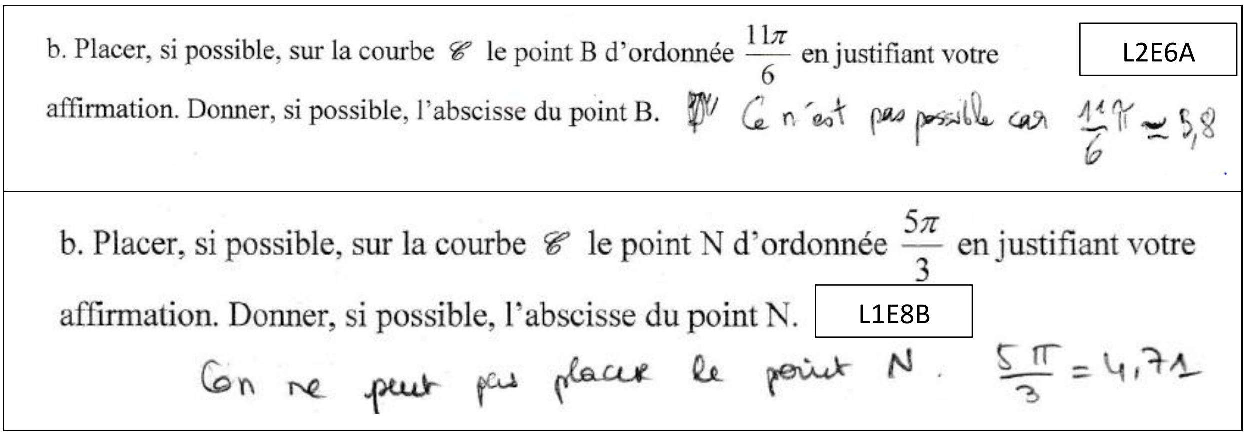
L1E3A

b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point N.

L2E25B

Il n'est pas possible de placer N car l'axe des ordonnées n'est pas assez long.

Figure 101 : Justification incorrecte (on s'y attendait) à la question 1.b


b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point B. Ce n'est pas possible car $\frac{11}{6}\pi \simeq 5,8$

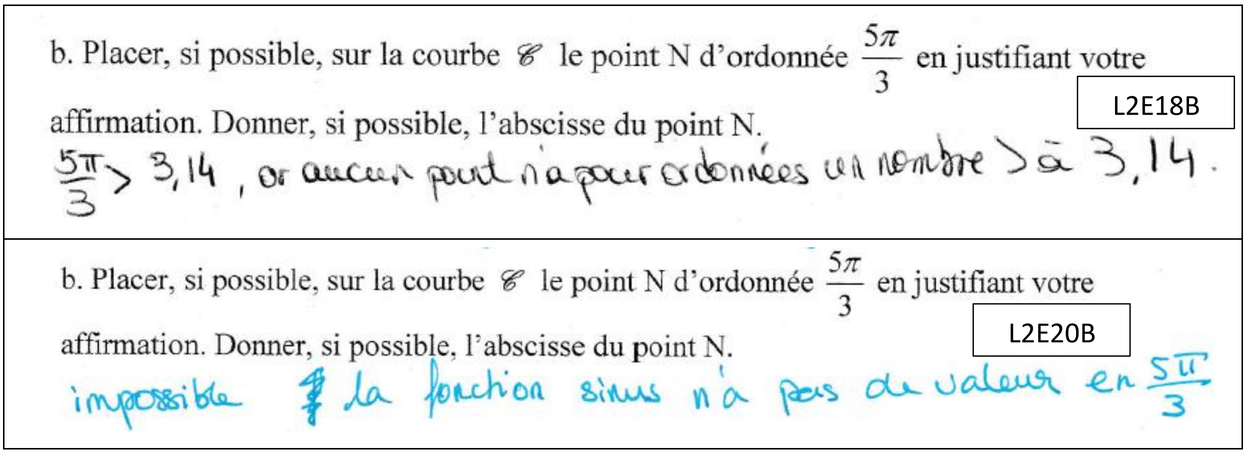
L2E6A

b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point N.

L1E8B

On ne peut pas placer le point N. $\frac{5\pi}{3} = 4,71$

Figure 102 : Justification incomplète à la question 1.b


b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point N.

L2E18B

$\frac{5\pi}{3} > 3,14$, or aucun point n'a pour ordonnées un nombre > à 3,14.

b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point N.

L2E20B

impossible ∄ la fonction sinus n'a pas de valeur en $\frac{5\pi}{3}$

Figure 103 : Justification incorrecte à la question 1.b

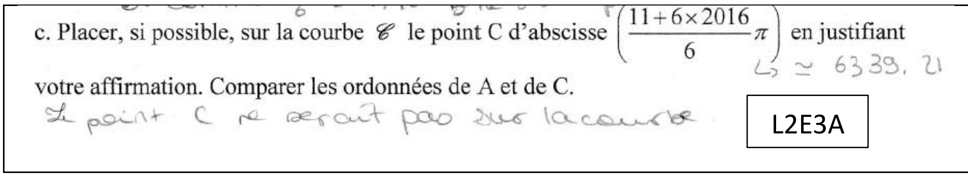
Question « 1.c. » :

1.c.	C (ou P) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$: 21			$C \notin \mathscr{C}$: 1	Aucune réponse : 14
	Pouvoir placer C (ou P) : 6	Ne pas dire si l'on peut placer C (ou P) : 3	Ne pas pouvoir placer C (ou P) et Existence de ce point sur la courbe $\mathscr{C}$: 12		

Tableau 37 : Effectif réparti à la question 1.c

14 élèves sur 36 n'ont pas fait la question « 1.c », et 6 de ces 14 sont issus des 8 élèves qui n'ont pas fait la question « 1.b ». Seul élève L2E3A a dit : « Le point C ne serait pas sur la courbe », sans justification (voir *Figure 104* ci-dessous). Il semble que le point C (ou P) se

situe sur la courbe $\mathscr{C}$ donnée, pour les 21 autres élèves. Ainsi plus de la moitié des élèves ont su s'adapter à l'ambiguïté de la formulation de la question 1.c, ambiguïté que nous avons notée précédemment. On ne peut exclure totalement que les autres élèves aient été perturbés par cette confusion.


c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

$\hookrightarrow \simeq 6339,21$

Le point C ne serait pas sur la courbe

L2E3A

Il semble que **L2E3A** fasse une confusion entre « l'existence du point C sur la courbe » et « l'impossibilité de le placer sur la courbe »

Figure 104 : Existence d'un point sur la courbe ou impossibilité de le placer sur la courbe ?

Nous nous intéressons à la méthode utilisée pour la comparaison des ordonnées des points des points C et A (ou P et M) par les 21 élèves ayant l'idée « C ou P se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ ».

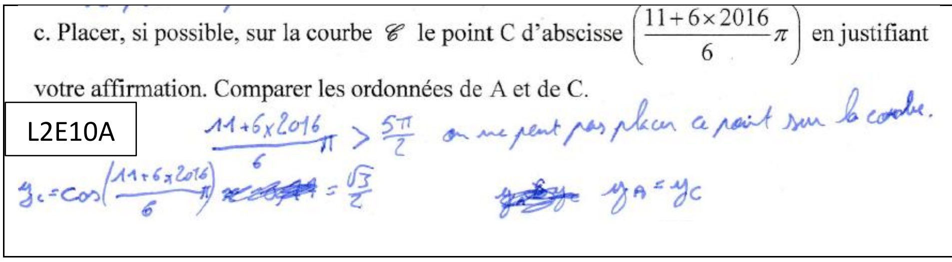
1.c.	$y_C = y_A$ (ou $y_P = y_M$) : 10 dont 5 avec un raisonnement non correct et 1 sans preuve RC : 4 (1 avec Str 2.1 et 3 non prévues)	$y_C \neq y_A$ (ou $y_P \neq y_M$) : 2	Ne pas dire si $y_C = y_A$ ($y_P = y_M$) : 8	Ne pas pouvoir connaître y_C (ou y_P) : 1

(RC : réponse correcte ; Str : Stratégie)

Tableau 38 : Comparaison des ordonnées des points à la question 1.c pour les 21 élèves qui ont l'idée « C ou P se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ »

Il y a des réponses diverses telles que :

- donner la valeur exacte du cosinus d'un nombre réel sans justification comme $\cos\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (L2E10A – voir *Figure 105*) ;
- sans donner la preuve et écrire $y_C = y_A$, (L2E11A) ;
- erreur de signe d'opération dans la preuve, (L2E14B : « comme $\frac{5+3\times2018}{3}\pi = 2k\pi \times \frac{5\pi}{3}$ ») ;
- commettre l'erreur avec l'ostensif scriptural comme $C = A + 2k\pi$, (L1E3A : « $C = A + 2k\pi$, ils ont les mêmes ordonnées ») ; ç'aurait été correct si on avait eu $C = A + 2k\pi\vec{\imath}$.


c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

L2E10A

$\frac{11+6\times2016}{6}\pi > \frac{5\pi}{2}$ on ne peut pas placer ce point sur la courbe.

$y_C = \cos\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $y_A = y_C$

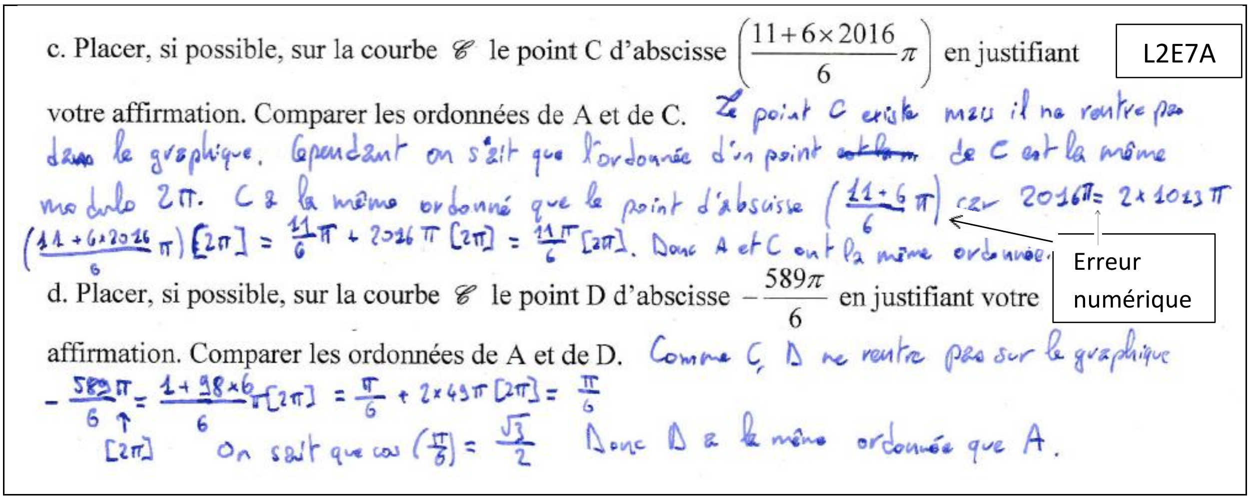
L2E10A a peut-être utilisé la calculatrice avec le calcul formel. Nous considérons plutôt sa réponse donnée pour « $y_C = y_A$ » comme la réponse correcte mais incomplète.

Figure 105 : Calcul formel à la calculatrice ou au brouillon ou de tête

Parmi les 21 élèves :

- 6 placent le point C (ou P) sur la courbe $\mathscr{C}$ à l'intérieur du graphique parce qu'ils commettent plutôt des erreurs numériques dans le calcul et TE4, (L1E3A, L1E6A, L1E7A, L2E8A, L2E18B, L2E20B), (voir *Figure 99* - L2E8A) ;
- 3 ne précisent pas si l'on peut placer le point C (ou P) sur la courbe $\mathscr{C}$, (L2E1A, L2E2A, L2E15B) ;

- 12 affirment que l'on ne peut pas placer le point C (ou P) sur la courbe du fait des limites imposées par « le graphique donné ». 2 élèves (L1E10B, L2E7A – voir *Figure 106*) sur 12 déclarent le mot « l'existence du point C » sans donner la raison.
  Aucun élève ne donne l'explication mathématique justifiant « ***l'existence du point** C* (ou P) ***sur la courbe** $\mathscr{C}$* ». Peut-être, est-ce évident pour l'élève, ou bien, l'élève ne sait pas le justifier.



c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

L2E7A

Le point C existe mais il ne rentre pas dans le graphique. Cependant on sait que l'ordonnée d'un point ~~est la m~~ de C est la même modulo 2π. C a la même ordonné que le point d'abscisse $\left(\frac{11+6}{6}\pi\right)$ car $2016\pi = 2\times1013\pi$
$\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)[2\pi] = \frac{11}{6}\pi + 2016\pi\,[2\pi] = \frac{11\pi}{6}[2\pi]$. Donc A et C ont la même ordonnée.

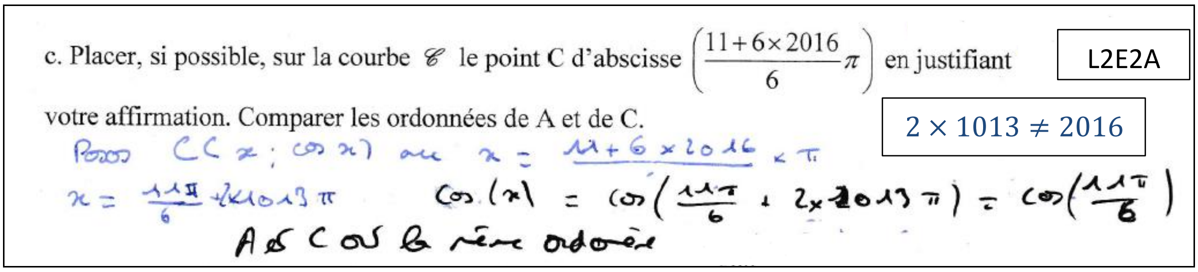
Erreur numérique

d. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point D d'abscisse $-\frac{589\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de D.

Comme C, D ne rentre pas sur le graphique
$-\frac{589\pi}{6} = \frac{1+98\times6}{6}\pi\,[2\pi] = \frac{\pi}{6} + 2\times49\pi\,[2\pi] = \frac{\pi}{6}$ [2π]
On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Donc D a la même ordonnée que A.

Figure 106 : Existence des points C et D sur la courbe à la question 1.c et 1.d

10 élèves sur 21 affirment que $y_C = y_A$ (ou $y_P = y_M$) parmi lesquels un seul élève (L2E2A, *Figure 107*) donne la preuve mathématique attendue (Stratégie 2.1) ; et les 9 autres élèves donnent la preuve incorrecte car comportant une erreur numérique dans le calcul (par exemple, L2E7A – voir *Figure 106*), l'inversion abscisse ↔ ordonnée avec une confusion comme TE4.



c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

L2E2A

$2 \times 1013 \neq 2016$

Posons $C(x ; \cos x)$ avec $x = \frac{11+6\times2016}{6}\times\pi$
$x = \frac{11\pi}{6} + 2\times1013\pi$ $\cos(x) = \cos\left(\frac{11\pi}{6} + 2\times1013\pi\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$
A et C ont la même ordonnée

Figure 107 : Stratégie 2.1 à la question 1.c

2 élèves sur 21 affirment que $y_C \neq y_A$ (ou $y_P \neq y_M$) parce qu'ils commettent soit une erreur numérique dans le calcul (L2E13B) soit une confusion comme TE4 (L1E6A).
8 élèves sur 21 ne précisent pas si $y_C = y_A$ (ou $y_P = y_M$) : 6 ne donnent pas la preuve pour « comparer les ordonnées des points C et A (ou P et M) », 1 (L2E18B) affirme seulement que « M et P sont confondus » avec TE4, 1 (L2E15B) commet l'erreur « inversion abscisse ↔ ordonnée (?) » à la fin de sa preuve, (voir *Figure 108*).

c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point P d'abscisse $\left(\frac{5+3\times 2018}{3}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de M et de P. L2E15B $3\times 2016 = 6054$ $\frac{5}{3}\pi + \frac{6054}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 2018\pi = \frac{5}{3}\pi\,[2\pi]$ $x_M = x_P$ **L2E15B** n'a placé aucun point sur la courbe donnée. Il a correctement repéré $\frac{5\pi}{3}$ sur l'axe des abscisses, et un point correspondant sur la courbe en notant, juste à côté, encore une fois $\frac{5\pi}{3}$ mais pas le point M.	$3\times 2018 = 6054$ C'est correct pour la 2ème ligne. C'est intéressant pour la 3ème ligne : il semble que **L2E15B** aurait voulu exprimer que $y_M = y_P$, au lieu de $x_M = x_P$. Sinon, il a alors commis TE4.

Figure 108 : **TE4** ou non ?

Question « 1.d. » :

1.d.	D (ou Q) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$: 16			$D \notin \mathscr{C}$: 1	Aucune réponse : 19
	Pouvoir placer D (ou Q) : 4	Ne pas dire si l'on peut placer D (ou Q) : 3	Ne pas pouvoir placer D (ou Q) et Existence de ce point sur la courbe $\mathscr{C}$: 9		

Tableau 39 : Effectif réparti à la question 1.d

19 élèves sur 36 ne font pas cette question « 1.d. » : 12 issus des 14 élèves qui ne font pas la question « 1.c. ». L'élève L2E3A dit que « Le point D ne serait pas sur la courbe » sans le justifier (comme à la question « 1.c »).

Les 16 autres élèves semblent être d'accord que le point D (ou Q) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$:

- 4 placent le point D (ou Q) sur la courbe $\mathscr{C}$ à l'intérieur du graphique parce qu'ils commettent plutôt des erreurs numériques dans le calcul, et TE4, (L1E3A, L2E18B, L2E20B, L2E27B) ;
- 3 ne précisent pas si l'on peut placer le point D (ou Q) sur la courbe $\mathscr{C}$, (L2E2A, L2E15B, L2E17B) ;
- 9 affirment que l'on ne peut pas placer le point D (ou Q) sur la courbe du fait des limites imposées par « le graphique donné ». 1 élève (L2E7A) sur 9 déclare « l'existence du point D » sans donner la raison, (voir *Figure 106*).

Nous nous intéressons à la méthode utilisée pour la comparaison des ordonnées des points D et A (ou Q et M) par les 16 élèves ayant l'idée « D ou Q se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ »

1.d.	$y_D = y_A$ (ou $y_Q = y_M$) : 4 (1 avec raisonnement incomplet, 1 avec une erreur numérique, 2 non prévues)	$y_D \neq y_A$ (ou $y_Q \neq y_M$) : 2	Ne pas dire si $y_D = y_A$ ($y_Q = y_M$) : 9	Ne pas pouvoir connaître y_C (ou y_P) : 1

Tableau 40 : Comparaison des ordonnées des points à la question 1.d pour les 16 élèves qui ont l'idée « D ou Q se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ »

Il y a les réponses diverses (nommées « Autre ») suivantes :

- la valeur exacte du cosinus d'un nombre réel sans justification, comme $\cos\left(-\frac{589}{6}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, (L2E10A) ;
- la simple écriture, sans justification, une phrase : « A et D ont les mêmes ordonnées », (L1E3A).

4 élèves sur 16 affirment que $y_D = y_A$ (ou $y_Q = y_M$) et donnent soit une preuve incomplète (L2E2A) soit « Autre » (L1E3A, L2E10A) soit la preuve incorrecte causée par une erreur numérique dans le calcul (L2E7A), (voir *Figure 106*). Deux élèves (L2E2A, L2E7A) exploitent la stratégie 2.1.
2 élèves sur 16 affirment que $y_D \neq y_A$ (ou $y_Q \neq y_M$) : 1 (L1E10B) donne l'affirmation « ils sont différents » sans le justifier et 1 autre (L1E13B) commet une erreur numérique dans le calcul avec la confusion comme TE4.
9 élèves sur 16 ne précisent pas si $y_D = y_A$ (ou $y_Q = y_M$) : 6 ne donnent pas la preuve pour « comparer les ordonnées des points D et A (ou Q et M) », 1 (L2E18B – voir *Figure 97*) affirme seulement que « M, P, Q sont confondus » avec TE4, 1 (L2E15B) commet l'erreur « inversion abscisse ↔ ordonnée », 1 (L2E27B) commet une confusion comme TE4 (voir *Figure 97*).

Nous remarquons que :

- 7 élèves sur les 22 qui font la question « 1.c. » abandonnent la question « 1.d. », et que 2 élèves sur les 14 qui ne font pas la question « 1.c. » font la question « 1.d. ». Dans l'ensemble, la moitié environ des élèves ne répondent pas aux questions « 1.c » et « 1.d ».
- un quart des élèves qui n'ont pas commis TE4 à la question « 1.a » (c'est-à-dire, les 23 élèves qui ont bien placé le point A (ou M) sur la courbe donnée) ont commis TE4 à la question « 1.c » et/ou à la question « 1.d ».

À l'égard des questions « 1.c. » et « 1.d. », nous pouvons faire l'hypothèse suivante :

- il y a peu d'élèves qui arrivent à traduire explicitement l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction cosinus (idem pour la fonction sinus) en $\cos(a)$ (idem $\sin(a)$). Cette connaissance n'est alors pas disponible.
- aucun élève n'exploite explicitement la « propriété géométrique de la périodicité d'une fonction » pour comparer les ordonnées de deux points de la courbe représentative d'une fonction périodique connaissant leurs abscisses. La connaissance sur la propriété géométrique de la périodicité d'une fonction n'est pas disponible.
- un tiers des élèves commettent une confusion avec TE4.

Nous nous demandons alors :

- si les élèves parviennent à maîtriser de manière stable la traduction de l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction f en $f(a)$ où f désigne la fonction cosinus (resp. la fonction sinus) avec la notation cos (resp. sin) (vues en Terminale Scientifique) ;
- si les élèves rencontrent souvent un type de tâches tel que : interpréter géométriquement « deux points de la courbe représentative d'une fonction périodique ayant des abscisses de différence $k \times T$ (où k est un nombre entier relatif, et T, la période de la fonction) dans un repère cartésien $(O\ ;\ \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan » ;
- comment faire pour que les élèves évitent une confusion comme TE4 après l'étude des fonctions sinus et cosinus ?

Synthèse du dépouillement de l'exercice III.1

Le dépouillement de l'exercice III.1 nous montre qu'il y a une instabilité des connaissances apprises dans le cadre fonctionnel (existence ou non d'un point sur la courbe représentative d'une fonction, la possibilité ou non de placer ce point, dont l'ordonnée est l'image d'un antécédent par la fonction, sur le tronçon de cette courbe donnée dans le registre graphique) d'une part, et d'autre part, une confusion des connaissances apprises dans le registre graphique du cadre géométrie-analytique (OML_{CTrigo}) et dans le registre graphique du cadre fonctionnel ($OML_{FoncTrigo}$) (rappelons-nous qu'un tiers des élèves ont commis TE4).

4.1.6. Synthèse du dépouillement des trois premières questions

Nous remarquons d'abord qu'aucun élève n'a fait à la fois les trois premiers exercices I, II, III.1, et que le nombre d'abandons en cours de questions est plus élevé pour l'exercice II (un quart environ des élèves) et pour l'exercice III.1 aux questions « 1.c » et « 1.d » (la moitié environ des élèves).

Dans l'ensemble, la plupart des élèves français ont, d'une part, une difficulté de mise en fonctionnement des connaissances apprises, durant les cinq dernières années du secondaire, sur la trigonométrie (l'$OML_{Triangle}$, l'OML_{CTrigo}) et les fonctions cosinus et sinus (l'$OML_{FoncTrigo}$), et d'autre part, il y a une ambiguïté ou une confusion dans la réactivation de ces connaissances. Or, dans chaque exercice du questionnaire, l'élève doit trouver une OML pertinente parmi les $OML_{Triangle}$, OML_{CTrigo}, $OML_{FoncTrigo}$, pour accomplir une tâche demandée, voire changer d'OML.

Dans l'exercice I, la moitié environ des élèves reconnaissent les connaissances vues dans l'$OML_{TriangleR}$ et les mettent en fonctionnement au niveau disponible, mais l'autre moitié a commis des erreurs : TE1 ou TE2, voire d'autres erreurs non catégorisées. Une difficulté intéressante, chez les élèves de Terminale Scientifique, que nous n'attendions pas dans l'analyse *a priori* du questionnaire, est clairement apparue, c'est que la moitié environ des élèves ont adopté des stratégies personnelles pour tenter de donner, sans succès, le cosinus et le sinus de l'angle droit. Pour nous, le TE3 prouve que l'angle droit pose à l'évidence une difficulté cognitive à certains élèves, causée par un doute ou une ambiguïté sur les connaissances apprises dans l'$OML_{Triangle}$ et dans l'OML_{CTrigo} : connaître « le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le cercle trigonométrique » mais pas « le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le triangle rectangle », c'est par exemple le cas de l'élève L1E8B (voir *Figure 84* et *Figure 96*). Il s'agit d'une séparation des deux OML car l'angle droit dans le triangle rectangle ne se présente pas, d'une certaine manière, comme l'angle droit dans le cercle trigonométrique. Changer d'OML, implique de changer de cadre. Nous faisons l'hypothèse qu'il s'agit d'une difficulté chez certains élèves concernant l'angle droit.

Dans l'exercice II, le nombre d'abandons est le plus élevé par rapport aux deux autres exercices (2 élèves pour l'exercice I, 4 élèves pour l'exercice III.1) ; ici, il y a un quart environ des élèves (11 élèves sur 40) qui ne le font pas. Un tiers environ des élèves (11 élèves sur 29) reconnaissent les connaissances vues dans l'OML_{CTrigo} et les mettent en fonctionnement au niveau mobilisable dans le cas simple (à la question 1) ; et parmi les 11 élèves de ce groupe de 29, seuls trois réactivent ces connaissances et les adaptent avec succès dans le cas plus complexe (à la question 2.a). Cela prouve que « l'expression des coordonnées

cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus » dans l'OML_{CTrigo} est peu disponible pour les élèves en Terminale Scientifique. Précisons que dans l'analyse *a priori*, nous n'attendions pas que cette connaissance relative à l'expression des coordonnées cartésiennes dans l'OML_{CTrigo} pose une difficulté cognitive pour des élèves car c'est plutôt une connaissance évidente évoquée par l'ostensif graphique et les ostensifs scripturaux donnés dans l'énoncé de l'exercice II.
Un quart environ des élèves (7 élèves sur 29) réactivent d'autres connaissances : soit des connaissances anciennes dans l'$OML_{TriangleR}$ (cf. exercice I) (5 élèves) soit des connaissances de l'année dans l'OML des nombres complexes dans le cadre géométrie-analytique (2 élèves). Pour les 5 élèves se situant dans l'$OML_{TriangleR}$, 4 réussissent à accomplir la tâche pour l'angle aigu α, mais pas pour l'angle obtus β ; et ils ne répondent pas à la question 2. Un tiers environ des élèves (9 élèves sur 29) ont plutôt commis des erreurs non identifiables. 3 élèves sur 29 se situent dans l'OML_{CTrigo} et dans l'$OML_{FoncTrigo}$, en commettant le TE2. Dans l'ensemble, trois quart environ des élèves ont des difficultés pour accomplir les tâches demandées sur les objets cosinus et sinus dans l'OML_{CTrigo}. Cela prouve qu'il y a une ambiguïté de compréhension dans l'apprentissage des élèves sur les objets cosinus et sinus dans l'OML_{CTrigo} (rappelons que le cosinus et le sinus d'angles orientés sont vus en 1re Scientifique, donc c'est juste une année avant la passation du questionnaire). Remarquons que dans les trois manuels de 1re Scientifique étudiés répondant au programme 2010, on aborde la définition des mesures en radians d'un angle orienté de deux vecteurs et on ne définit pas explicitement ce qu'est « un angle orienté de deux vecteurs » (l'angle orienté de deux vecteurs semble être défini par ses mesures en radians) ; puis, on définit le cosinus et le sinus d'un angle orienté comme le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures, (voir chapitre 2, pp. 110-111). Donc, il y a une ambiguïté dans la transposition didactique sur l'objet « angle orienté de deux vecteurs » dans l'OM à enseigner (et dans l'OM enseigné).

Dans l'exercice III, à la question 1.a, deux tiers environ des élèves (23 élèves sur 36) semblent placer raisonnablement le point A (ou M) sur la courbe donnée. Parmi les 27 élèves qui donnent l'ordonnée du point A (ou M), 10 élèves reconnaissent que l'ordonnée du point A (ou M) est $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (ou $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$), dont 7 avec la bonne réponse avec la valeur exacte ; et les autres élèves semblent lire graphiquement l'ordonnée du point A (ou M) après l'avoir placé sur la courbe. Dans l'ensemble, un quart des élèves mettent en fonctionnement au niveau disponible la connaissance sur l'image d'un nombre réel a par la fonction cosinus (ou sinus). Ensuite, la moitié environ des élèves ne répondent pas aux questions 1.c et 1.d ; ce nombre d'abandons est important.
Intéressons-nous au TE4 commis par un tiers des élèves dans l'exercice III.1. Ce TE4 prouve d'une part une ambiguïté sur les objets « angle orienté » et « mesures en radians de l'angle orienté » et les nombres réels de différence un multiple de 2π dans l'OML_{CTrigo}, et d'autre part, une confusion entre des objets mathématiques dans l'OML_{CTrigo} et des objets mathématiques dans le registre graphique dans l'$OML_{FoncTrigo}$. Nous pouvons dire que certains élèves de Terminale Scientifique ont du mal à interpréter la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans le registre graphique du cadre fonctionnel et qu'ils commettent une confusion entre « les points dont les abscisses sont des nombres réels de différence un multiple de 2π, situés sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou

sinus) dans l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ » et « les points images associés à ces nombres réels dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ ». Les objets cosinus et sinus dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ (vus en Seconde et en 1$^{\text{re}}$ Scientifique) et dans l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ sont liés très étroitement ; l'élève en Terminale Scientifique reconnaît-il qu'il a étudié implicitement les fonctions cosinus et sinus depuis la Seconde avec les cosinus et sinus de nombres réels ? La réponse est probablement « NON » car dans les deux classes précédentes, le terme « fonction » est sous-entendu et les objets cosinus et sinus sont étudiés dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ dans le domaine « Géométrie repérée », (voir chapitre 2). Rappelons-nous que :

- en Seconde, le terme « fonction » est sous-entendu d'une part, et d'autre part, la relation entre x et $\cos x$ (resp. x et $\sin x$) passe par un intermédiaire qui est le point image de x dans l'enroulement, dans le cadre géométrie-analytique ;
- en 1$^{\text{re}}$ Scientifique, il y a d'autres concepts qui accompagnent les objets de savoir vus en Seconde, comme : « Le radian », « Les mesures en radians d'un angle orienté ». Cette fois, la relation entre x et $\cos x$ (resp. x et $\sin x$) passe par un intermédiaire qui est le point (image de x dans l'enroulement vu en Seconde) du cercle trigonométrique, associé à l'angle orienté de mesure x (radians), dans le cadre géométrie-analytique.
- En Terminale Scientifique, la relation entre x et $\cos x$ (resp. x et $\sin x$) apparaît, dans le registre graphique du cadre fonctionnel, de manière directe sans passer par un intermédiaire. Et, cette fois, les objets cosinus et sinus sont étudiés dans l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ dans le domaine « Analyse ».

TE4 apparu dans l'exercice III.1 (pour un tiers des élèves en Terminale Scientifique) prouve clairement une difficulté que nous interprétons comme un obstacle, mise en évidence, relativement aux connaissances apprises liées aux objets mathématiques dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$ (en Seconde et en 1$^{\text{re}}$ Scientifique) et dans l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ (en Terminale Scientifique). Lors du passage de l'OML$_{\text{CTrigo}}$ vers l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$, il semble que l'élève s'approprie, avec difficulté, ce qu'est x dans le registre graphique de l'OML$_{\text{CTrigo}}$ et dans le registre graphique de l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$, où le *non-ostensif* représenté par x change de nature. Dans l'esprit de l'élève, le signe x désigne-t-il, de manière naturelle, un nombre réel dans les deux OML ?

1. **Concernant le signe $\boldsymbol{x}$** : Dans le registre graphique de l'OML$_{\text{CTrigo}}$ (voir *Figure 76*), l'élève pense-t-il que x désigne une mesure en radians (un nombre réel) d'angles orientés ? un angle orienté ? Et dans le registre graphique de l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$, pense-t-il que x désigne un nombre réel qui est l'abscisse du point décrivant la courbe représentant la fonction cosinus (ou sinus) ?
2. **Concernant un point intermédiaire $\boldsymbol{M}$, point image associé à un nombre réel $\boldsymbol{x}$ dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique dans le registre graphique de l'OML$_{\textbf{CTrigo}}$** (vu en 1$^{\text{re}}$ Scientifique) : tous les points images des nombres réels s'écrivant sous forme $x + 2\pi k$ (k un nombre entier relatif) sont représentés par le même point M (de telle sorte que M désigne à la fois « le point image » associé à un nombre réel x dans l'enroulement et « le point » qui détermine l'angle orienté dont les mesures en radians sont $x + 2\pi k$). Dans ce registre graphique, x désigne à la fois « une mesure de la longueur de l'arc de cercle dans l'enroulement » et « une mesure en radians d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires », par le fait

que « les axes des abscisses et des ordonnées dans un repère orthonormé direct du plan » et « la circonférence du cercle trigonométrique » ont la même *unité de longueur* (en raison du **radian**). Dans ce registre graphique (voir *Figure 47* - manuel Math'x 2011-p.292, dans le chapitre 2), l'élève voit-il que x désigne un des nombres réels de différence un multiple de 2π ou voit-il l'arc de cercle IM dans l'enroulement ou alors voit-il plutôt l'angle orienté associé au point M ?

Ensuite, dans le registre graphique de l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$, l'élève pense-t-il que le point d'abscisse x décrivant la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) a le même rôle que le point intermédiaire M vu dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$? OUI, pour un tiers des élèves qui ont commis TE4 dans l'exercice III.1 du questionnaire. Il semble que ces élèves ont du mal à interpréter ce qui se passe dans l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ en se référant à ce qui se passe dans l'OML$_{\text{CTrigo}}$.

Le passage de l'OML$_{\text{CTrigo}}$ vers l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$ est important à expliciter pour éviter TE4 dans la réflexion de l'élève, à notre avis. Dans les quatre manuels étudiés, ce passage semble peu explicite, (voir chapitre 2, pp. 134-135). Nous faisons l'hypothèse que « le radian » est le pivot de cet obstacle cognitif relativement à l'OML$_{\text{CTrigo}}$ et à l'OML$_{\text{FoncTrigo}}$.

Dans l'ensemble des résultats obtenus aux trois premiers exercices du questionnaire, trois des quatre types d'erreurs telles que TE2 (OML$_{\text{Triangle}}$ et OML$_{\text{FoncTrigo}}$ – Exercice I ; OML$_{\text{CTrigo}}$ et OML$_{\text{FoncTrigo}}$ – Exercice II), TE3 (OML$_{\text{Triangle}}$ et OML$_{\text{CTrigo}}$ – Exercice II) et TE4 (OML$_{\text{FoncTrigo}}$ et OML$_{\text{CTrigo}}$ – Exercice III.1) nous intéressent particulièrement car ce sont les trois types d'erreurs qui permettent de mettre en évidence une ambiguïté ou une confusion entre les objets mathématiques étudiés dans les trois OML chez les élèves d'une part et d'autre part une ambiguïté ou un manque d'articulation entre les trois OML dans les programmes et dans des manuels dans l'institution française.

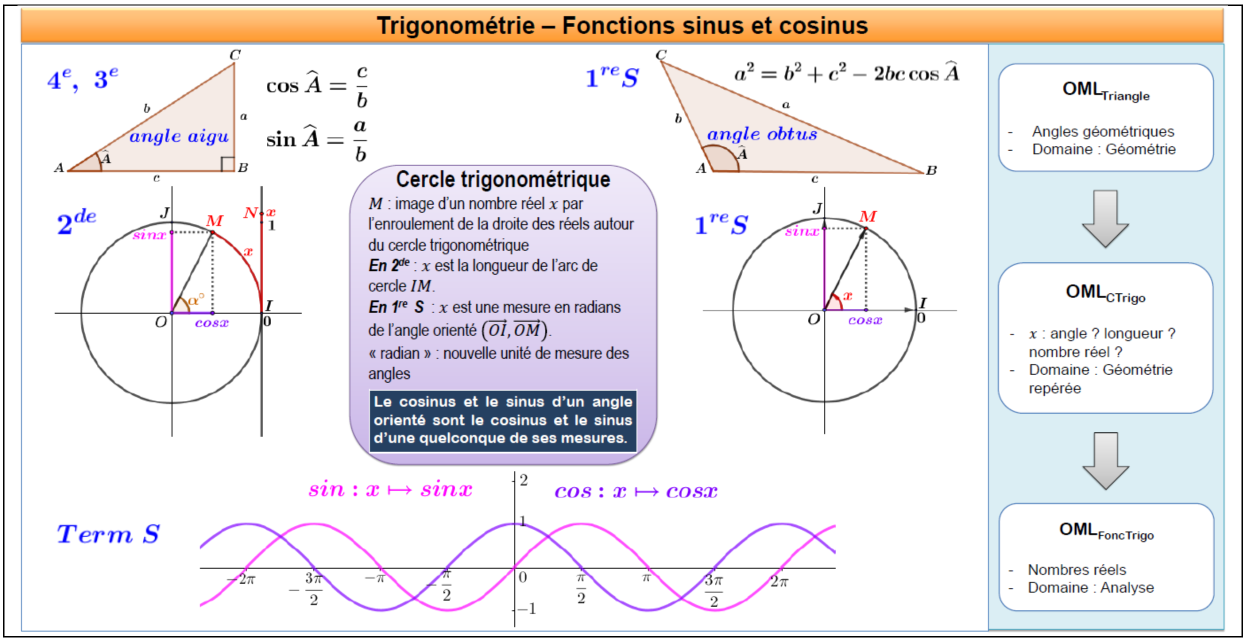


Tableau 41 : Trigonométrie – Fonctions sinus et cosinus dans l'institution française

Grâce aux résultats intéressants obtenus, nous avons exposé et justifié nos raisons de choix didactiques faits pour la réalisation du questionnaire. Nous souhaitons discuter maintenant les

résultats obtenus au questionnaire en lien avec notre étude des manuels (chapitre 2) sur la transposition didactique autour des objets de savoir de la trigonométrie et des fonctions cosinus et sinus du secondaire français, (voir *Tableau 41* ci-dessus).
Nous nous appuyons sur TE3, TE4 et TE2 dans cet ordre.

Pour TE3 : rappelons-nous que TE3 consiste en des « Stratégies imaginées par certains élèves pour donner les valeurs des **cosinus et sinus de l'angle droit *du triangle rectangle*** ». Ce type d'erreurs TE3 est lié aux connaissances apprises de l'$OML_{TriangleR}$ (vues en 4e et en 3e) et de l'OML_{CTrigo} (vues en Seconde et en 1re Scientifique). Nous faisons l'hypothèse qu'il y a une difficulté cognitive chez des élèves sur l'angle droit et que cette difficulté est causée par un manque d'enchaînement des objets de savoir dans les deux OML (vus en 3e et en Seconde). Le programme de Seconde propose de « faire le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° » et de « faire le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège » mais aucun manuel étudié n'attire l'attention sur le fait que les formules faisant intervenir côté opposé et côté adjacent ne s'appliquent pas à l'angle droit (ni à l'angle nul, même si l'on pourrait les considérer comme des cas limites).

Pour TE4 : rappelons-nous que TE4 consiste en une « Confusion entre **angles** (ou un point sur le cercle trigonométrique) et **nombres réels** de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus)». Ce type d'erreurs TE4 est lié aux connaissances apprises de l'$OML_{FoncTrigo}$ (en Terminale Scientifique) et l'OML_{CTrigo} (en Seconde et 1re Scientifique). TE4 prouve que certains élèves de Terminale Scientifique ont du mal à interpréter la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans le registre graphique du cadre fonctionnel et qu'ils commettent une confusion entre « les points dont les abscisses sont des nombres réels de différence un multiple de 2π, situés sur la courbe représentation de la fonction cosinus (ou sinus) dans l'$OML_{FoncTrigo}$ » et « les points images associés à ces nombres réels dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, dans l'OML_{CTrigo} », c'est-à-dire le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour les élèves commettant TE4, nous pouvons interpréter que dans leur réflexion relative à TE4 :

- en ce qui concerne le registre graphique de l'OML_{CTrigo}, ils n'arrivent pas à distinguer le cercle trigonométrique de la droite numérique dans l'enroulement sur le cercle (cf. Bloch, 2009) et ils voient plutôt le cercle trigonométrique – notons qu'il s'agit ici de distinguer $\mathbb{R}$ et son quotient par $2\pi\mathbb{Z}$. Et dans ce cas avec un tel registre, ils voient :
  - d'une part, plutôt un angle orienté (ou un arc de cercle intercepté apparemment par l'angle au centre correspondant à l'angle orienté) mais pas les mesures (en radians) de l'angle orienté, et
  - d'autre part, ils ont du mal à interpréter, sans doute à cause de la notion de quotient sous-jacente, les nombres réels de différence un multiple de 2π, liés avec l'idée de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique lors de la première rencontre avec la notion d'enroulement en Seconde, et lors de la première rencontre avec la notion de mesure en radians d'angles orientés, relatif à la notion de radian en 1re Scientifique.
- en ce qui concerne le registre graphique de l'$OML_{FoncTrigo}$, il semble que les élèves voient plutôt une correspondance entre les nombres réels de différence un multiple de 2π et leur point image intermédiaire associé dans l'enroulement dans l'OML_{CTrigo}

(autrement dit, ils ne retiennent que ce qui se passe, avec une ambiguïté indiquée précédemment, dans le registre graphique de l'OML_{CTrigo}), en considérant de manière fausse que ce point intermédiaire décrit la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus). En plus, ils ont du mal à interpréter ce qu'est cette courbe représentative (ou bien ils n'ont pas fait attention au moment de travailler graphiquement dans l'$OML_{FoncTrigo}$ et à ce moment-là, ils ont plutôt pensé à ce qui se passe dans l'OML_{CTrigo}).

Nous faisons l'hypothèse qu'il y a une difficulté cognitive chez des élèves sur les objets cosinus et sinus dans les deux OML (vus en Seconde, en 1re Scientifique et en Terminale Scientifique – trois années d'étude en fin de cursus).

Pour TE2 : rappelons-nous que TE2 consiste en une « Confusion des valeurs des ***cosinus et sinus d'un angle*** avec des valeurs des ***cosinus et sinus d'un nombre réel*** » ; par exemple, l'élève donne le cosinus du « cosinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle » à la place du cosinus de l'angle aigu. Nous faisons l'hypothèse que dans la réflexion de l'élève, il y a une influence des concepts de fonctions cosinus et sinus sur les concepts de trigonométrie vus antérieurement. En effet, nous pensons que, comme pour les élèves de Terminale Scientifique, c'est l'année d'étude de l'$OML_{FoncTrigo}$, avec le thème « Fonctions sinus et cosinus » pour les élèves de Terminale Scientifique, il est donc possible que certains élèves (ici, environ un quart des élèves pour TE2) ne retiennent que les connaissances reliées avec l'$OML_{FoncTrigo}$. Il ne semble pas que ces élèves oublient les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle (voir *Figure 88*) et les définitions du cosinus et du sinus d'un angle orienté (voir *Figure 92*). Mais dans une telle situation, ils pensent plutôt aux cosinus et sinus d'un nombre réel dans le cadre fonctionnel. Cela est accompagné d'un doute (ou une confusion) relié aux connaissances antérieures, qui incite de manière fausse à donner le cosinus et le sinus du quotient des longueurs des côtés du triangle rectangle ($OML_{TriangleR}$, vue au collège), et aussi, le cosinus et le sinus de l'abscisse et de l'ordonnée d'un point du cercle trigonométrique, associé à l'angle orienté (OML_{CTrigo}, vue en 1re Scientifique). Précisons que dans l'analyse *a priori*, nous n'attendions pas ce TE2 (car la tâche demandée dans l'énoncé est claire avec l'ostensif discursif et les ostensifs scripturaux, voir *Figure 76* et *Figure 77*).

TE3, TE4 et TE2 sont vraiment intéressants dans notre travail de recherche. Nous n'attendions pas dans l'analyse *a priori* du questionnaire, par exemple, TE3 et TE2. Nous prévoyions TE4 mais nous ne pensions pas qu'un nombre aussi important d'élèves l'auraient commis ; ici, rappelons-nous qu'un tiers des élèves ont commis TE4. Et, TE4 est le type d'erreurs le plus important permettant de mettre en évidence une difficulté cognitive chez les élèves concernant les connaissances liées aux objets cosinus et sinus dans l'OML_{CTrigo} et dans l'$OML_{FoncTrigo}$. Il y a certainement des objets d'étude peu (ou pas) explicités dans les programmes et dans les manuels, surtout ceux qui sont reliés à la notion de radian. Et, cela mène vraisemblablement les élèves à commettre TE4.

Nous faisons l'hypothèse que TE3, TE4 et TE2 révèlent une ambiguïté sur les savoirs appris autour des objets mathématiques d'étude relatifs aux objets des cosinus et sinus durant les cinq années en fin de cursus chez les élèves de Terminale Scientifique, et que cette ambiguïté est liée aux savoirs enseignés (sur le terrain avec l'enseignant) et aux savoirs à enseigner (programmes et manuels).

4.2. Au Cambodge : Mise en œuvre dans deux classes de 11^{e} et dans deux classes de 12^{e}

4.2.1. Modalité et contexte

Nous faisons passer, en mars-avril 2017, le questionnaire avec les versions A et B, dans trois classes de 11^{e} de niveau Scientifique (1re Scientifique en France) et dans trois classes de 12^{e} de niveau Scientifique (Terminale Scientifique en France) dans deux des trois lycées situés au centre-ville dans la province de Battambang (Lycée Preah Monivong et Lycée Samdech Euv), puis dans une classe bilingue de 12^{e} du niveau Scientifique au lycée Preah Sisowat dans la Capitale Phnom Penh.

- Dans la 11^{e} de niveau Scientifique : les quatre premiers exercices du questionnaire durant 55 minutes ;
- Dans la 12^{e} de niveau Scientifique : nous posons les cinq premiers exercices du questionnaire durant 55 minutes ;

Nous souhaitions traiter les données des élèves des quatre classes de 12^{e} correspondant à la Terminale Scientifique en France car il semble raisonnable de traiter les données pour le même niveau en fin de cursus. Mais, lors de l'analyse *a posteriori*, nous avons constaté que peu d'élèves ont répondu aux trois premiers exercices du questionnaire et en plus que la plupart des réponses sont des réponses erronées non identifiables. Lorsque nous avons dépouillé les données des élèves de 11^{e}, nous avons trouvé que les réponses données par ces élèves sont plus satisfaisantes que celles des élèves de 12^{e}. Finalement, nous avons décidé de traiter deux classes de 12^{e} et deux classes de 11^{e} où chaque couple des classes 11^{e} et 12^{e} a le même enseignant, dans les deux lycées de la province de Battambang indiqués précédemment. Précisons que pour ces quatre classes, la passation du questionnaire a eu lieu après la mise en œuvre de la situation didactique (chapitre 5), et que les élèves ont déjà eu connaissance du thème de recherche, ce qui est le contraire de ce qui s'est passé en France, les élèves des deux classes de Terminale Scientifique n'ayant pas été informés du thème de recherche à l'avance.

Remarque :

- Le Lycée Preah Monivong (noté L3) est le plus grand et le plus réputé lycée public de la province de Battambang, situé au centre-ville. C'est un bon lycée réputé depuis les années 60-70. Les élèves sont issus de tous les milieux sociaux. Les deux classes (11^{e} et 12^{e}) sont des classes ordinaires.
- Le Lycée Samdech Euv (noté L4) est un lycée public situé aussi en ville. Les élèves sont issus des classes moyennes et pauvres. Les deux classes (11^{e} et 12^{e}) sont des classes ordinaires. Selon l'enseignant, les élèves de 12^{e} de l'année 2016-2017 sont plutôt faibles.

En ce qui concerne l'analyse *a posteriori* du questionnaire, nous suivons la méthode utilisée précédemment du côté français dans la sous-section 4.1.1 (p. 232), avec les mêmes deux étapes. Nous identifions des erreurs commises par les élèves cambodgiens à l'aide des quatre grands TE déterminés du côté français.

Nous exposons maintenant l'analyse *a posteriori* pour les trois premiers exercices I, II et III.1 du questionnaire.

Il y a au total 63 copies d'élèves de 12^{e} et 57 copies d'élèves de 11^{e}.

Nous voudrions d'abord informer le lecteur du fait que la plupart des réponses données par les élèves (surtout les élèves de 12^e) sont des réponses erronées comportant des erreurs diverses et variées, non identifiables.

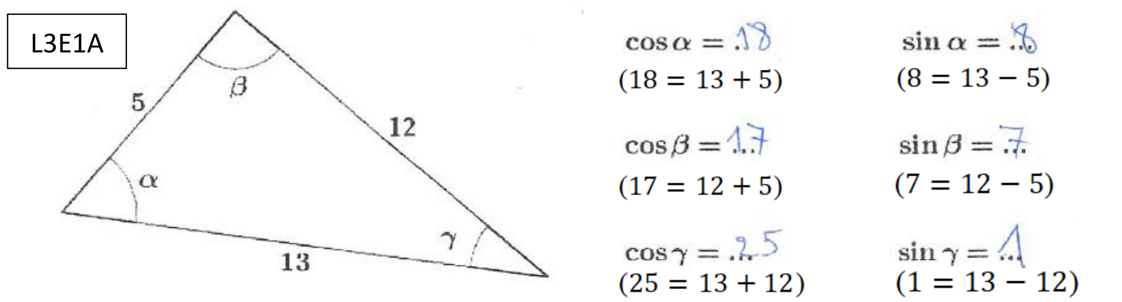
Dans la suite, pour chaque exercice, nous exposons d'abord les productions des élèves de 12^e puis celles des élèves de 11^e. Les copies des élèves de 12^e sont notées sous forme L3E…A, L3E…B, L4E…A et L4E…B, et que celles des élèves de 11^e, sous forme, L3e…A, L3e…B, L4e…A et L4e…B. (L : lycée, E : élève de 12^e, e : élève de 11^e, A : version A, B : version B)

4.2.2. Exercice I

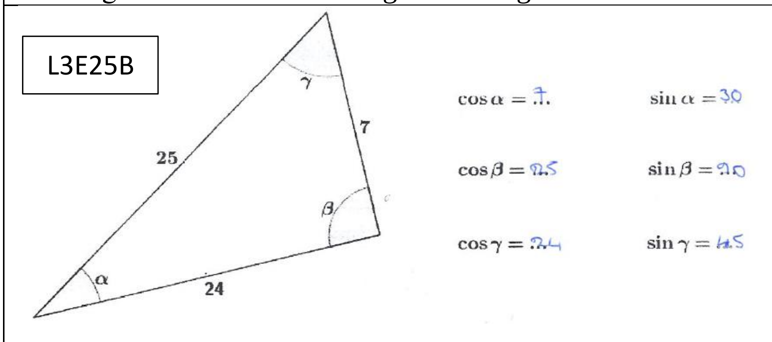
4.2.2.1. **Élèves de 12^e** :

19 élèves sur 63 ne font pas l'exercice I (un tiers des élèves environ). Aucun élève n'utilise la stratégie 2 (le théorème[15] des cosinus). Parmi les 44 élèves qui font cet exercice I :

a. 8 élèves donnent de manières diverses non identifiables, sans justification, les valeurs des cosinus et sinus des angles du triangle sans aucun lien avec la stratégie 1.1. (voir *Figure 109*)



Il semble que le cosinus et le sinus d'un angle soient respectivement la somme et la différence des longueurs des côtés de l'angle du triangle.



Il semble que L3E25B considère d'abord que les angles α, β, γ ont pour mesures remarquables (en degrés) respectivement : 30, 90, 45, et ensuite que le cosinus d'un angle est le côté opposé à l'angle et que le sinus de l'angle est la mesure en degrés de l'angle.

Figure 109 : Réponse de catégorie a. – élèves de 12^e

b. 2 élèves donnent, sans justification, les valeurs des cosinus et sinus des angles du triangle comme étant les longueurs (ordonnées ou non) des côtés du triangle donné. (voir *Figure 110*)

[15] Dans le programme cambodgien de 10^e, on utilise le terme « Théorème des cosinus » qui désigne la « formule d'Al-Kashi ».

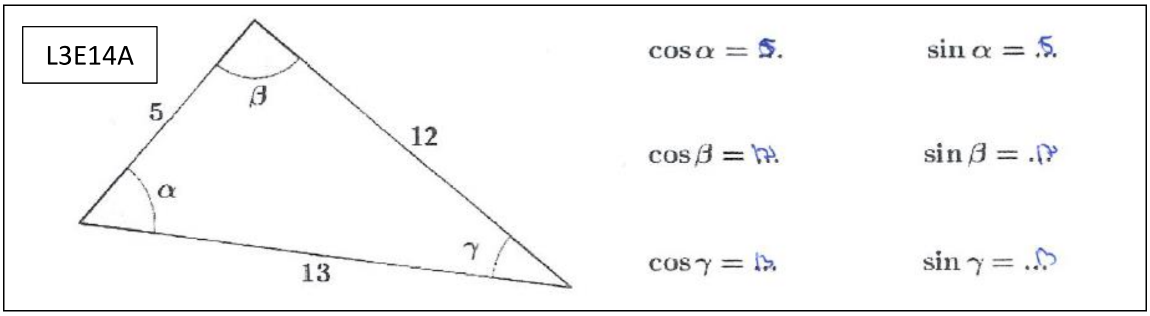


Figure 110 : Réponse de catégorie b. – élève de 12e

c. 4 élèves donnent, sans justification, les valeurs des cosinus et sinus des angles du triangle comme étant les mesures d'angles remarquables en degrés (avec le signe « ° » ou non) (comme L3E25B, *Figure 109*) ; par exemple : 30, 60, 90, 180, 270. L3E18B donne ($\cos\alpha = 30^\circ$; $\cos\beta = 90^\circ$; $\cos\gamma = 60^\circ$) mais il n'a pas donné la valeur du sinus des angles ; L4E2A donne ($\cos\beta = 0$; $\sin\beta = 1$) mais il donne ($\cos\alpha = 90^\circ$; $\sin\alpha = 90^\circ$ et $\cos\gamma = 2\pi$; $\sin\gamma = 2\pi$). Parmi les 4 élèves, 1 (L4E2A) semble reconnaitre le cosinus et le sinus de l'angle droit. (voir *Figure 112*)

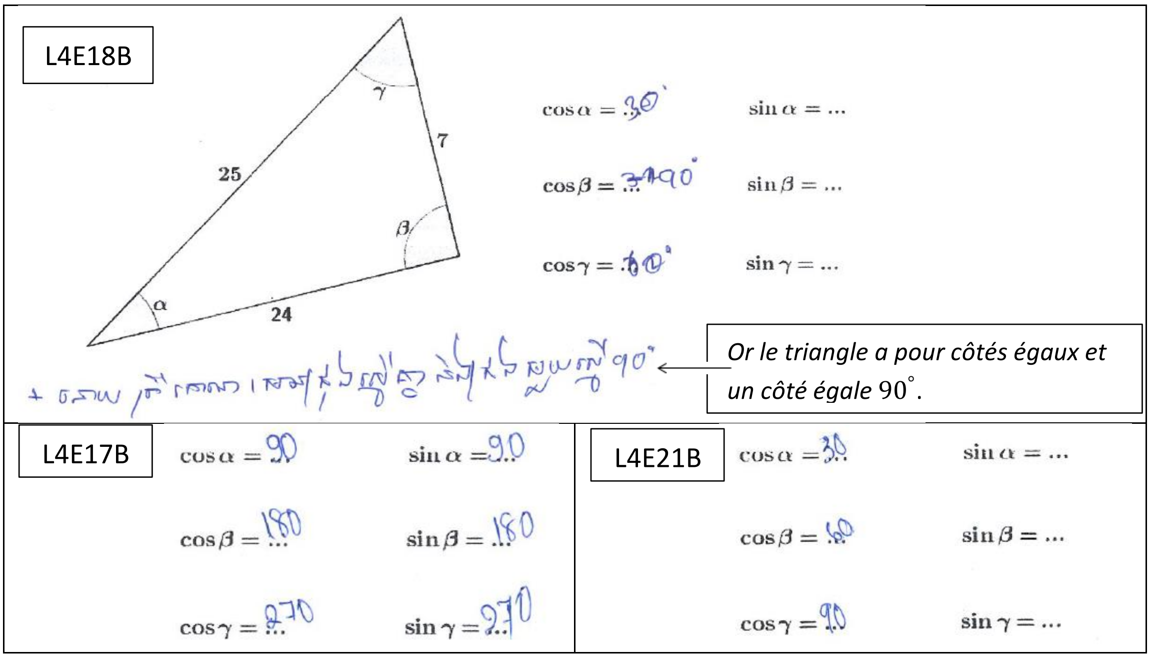


Figure 111 : Réponse de catégorie c. – élèves de 12e

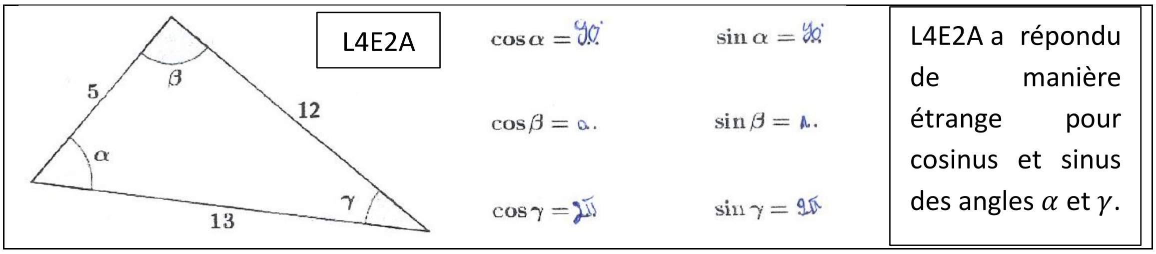
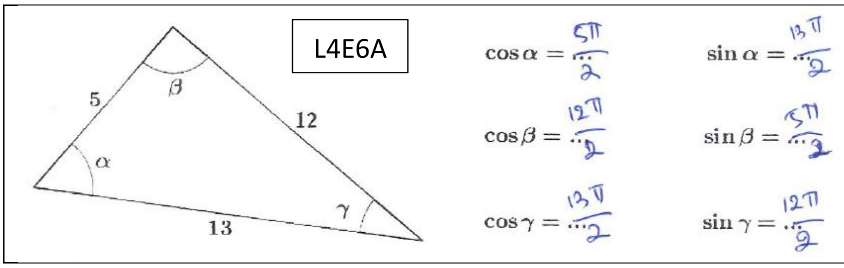


Figure 112 : Réponse de catégorie c. avec bonne réponse pour le cosinus et le sinus de l'angle droit β – élève de 12e

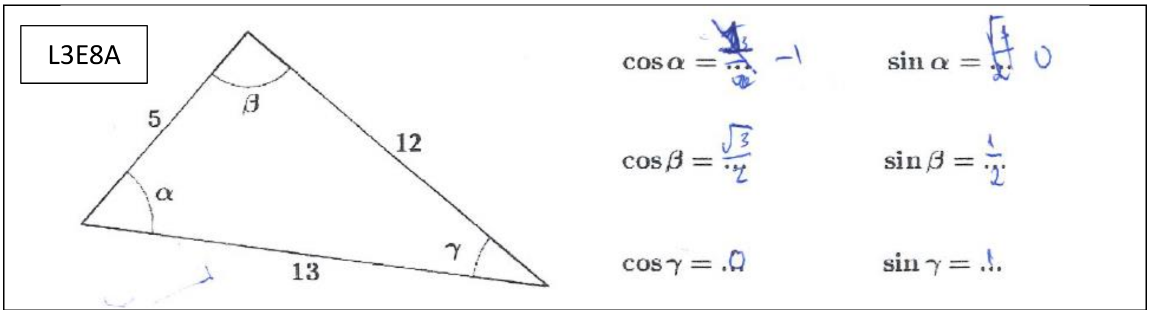
d. 2 élèves donnent, sans justification, les valeurs des cosinus et sinus des angles du triangle, ces valeurs contenant « π » (comme L4E2A, *Figure 112*) sans lien avec les mesures d'angles remarquables en radians. (*Voir Figure 113*)

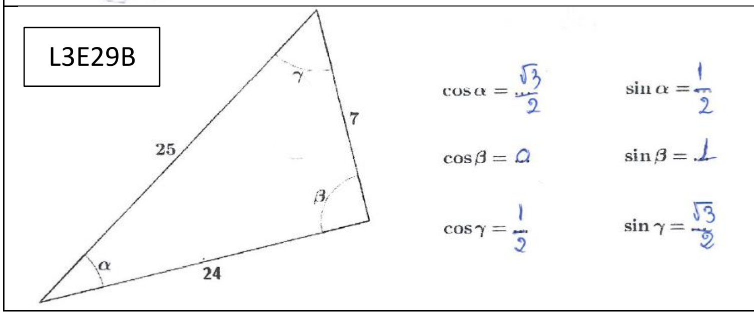


Il semble que le cosinus et le sinus d'un angle sont définis par la multiplication de la longueur d'un des côtés de l'angle par $\frac{\pi}{2}$.

Figure 113 : Réponse de catégorie d. – élèves de 12^e^

e. 6 élèves donnent, sans justification, les valeurs des cosinus et sinus des angles du triangle comme étant plutôt des valeurs exactes des cosinus et sinus des angles remarquables (par exemple : $\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$; -1 ; 0 ; 1). 2 élèves (voir *Figure 114*, L3E29B) sur 6 donnent correctement les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle β mais sans préciser la nature de cet angle d'une quelconque manière (représentation sémiotique mathématique : codage, discours). Parmi les 6 élèves, 2 reconnaissent le cosinus et le sinus de l'angle droit, 1 ne reconnaît que le sinus de l'angle droit, 3 ne les reconnaissent pas.





Il semble que L3E29B considère α et γ comme étant respectivement l'angle 30° et l'angle 60°. Si c'est le cas, il reconnaît bien les valeurs des cosinus et sinus remarquables.

Figure 114 : Réponse de catégorie e. – élèves de 12^e^

Remarque : il semble que certains élèves retiennent les valeurs des cosinus et sinus remarquables comme -1, 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1 mais ils n'ont pas su les utiliser correctement, (par exemple pour le cas de l'élève L3E8A).

f. 8 élèves réécrivent ou alternent les signes « sin » et « cos » sans justification. Remarquons qu'il n'y a aucune réponse correcte du type : $\cos\alpha = \sin\gamma$ et $\cos\gamma = \sin\alpha$, pour les angles aigus α et γ.

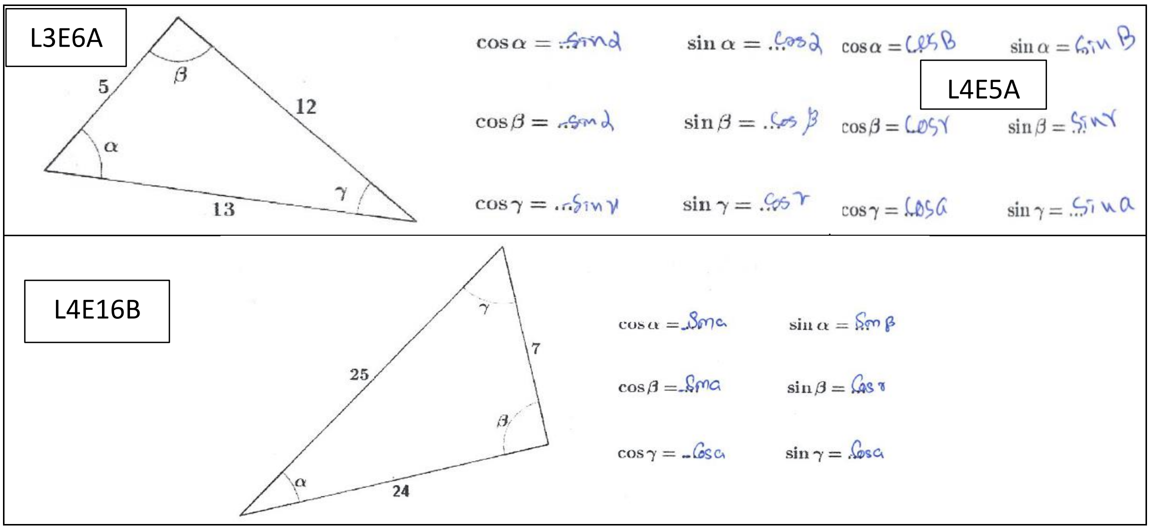


Figure 115 : Réponse de catégorie f. – élèves de 12e

g. 14 élèves utilisent la stratégie 1.1. *sans justifier mathématiquement la nature du triangle* avant de donner les valeurs des cosinus et sinus des trois angles. Seul l'élève L3E33B met un codage qui représente symboliquement l'angle droit sur la figure donnée et il reconnaît la mesure en degrés de l'angle droit dont le sinus vaut 1 mais cet élève ne reconnaît pas le cosinus de l'angle 90°.

Il y a donc 30 élèves (la moitié des élèves environ) dont nous n'arrivons pas à interpréter les réponses, non identifiables (catégories a, b, c, d, e, f).

Dans la suite, nous traitons principalement des productions des 14 élèves de la catégorie g et nous présentons les résultats en deux étapes : 1. Cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ; 2. Cosinus et sinus de l'angle droit du triangle rectangle. Nous ajoutons aussi l'information concernant les autres élèves (issus d'autres catégories indiquées précédemment) qui donnent la bonne réponse pour le cosinus et le sinus de l'angle droit.

Cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle :

	Autre	NR	RNC	RC	Total
Angle α	8	1	10	4	14
Angle γ	8	3	9	3	14

(NR : non réponse ; RNC : réponse non correcte ; RC : réponse correcte, Autre : d'autre type d'erreurs relié à la stratégie 1.1 (voir la section 4.1.3, p. 232))

Tableau 42 : Effectif concernant le cosinus et le sinus d'un angle aigu, pour les 14 élèves qui utilisent la Stratégie 1.1

Remarquons d'abord que ces 14 élèves sont des élèves du lycée 3. Donc, aucun élève du lycée 4 ne réactive la trigonométrie dans le triangle rectangle, vue en 10e.

Seuls deux élèves (L3E33B, L3E36B) donnent la bonne réponse pour les cosinus et sinus des angles aigus α et γ du triangle rectangle. Il y a trois autres élèves qui donnent la bonne réponse soit pour cosinus soit pour sinus.

Aucun élève n'a commis TE1 et TE2.

Cosinus et sinus de l'angle droit :

	14 élèves de catégorie g					1 élève de catégorie c	3 élèves de catégorie e	
	TE3A	TE3C	Autre	NR	RC	RC	RC	NR
$\cos\beta$	1	1	10	2	0	1	2	1
$\sin\beta$	1	0	9	3	1	1	3	0

(NR : non réponse, RC : réponse correcte)

Tableau 43 : Cosinus et sinus de l'angle droit du triangle rectangle – **TE3** – élèves de 12e

Nous précisons que « Autre » représente ici l'ensemble des réponses erronées pour le cosinus et le sinus de l'angle droit adoptés par les élèves de 12e. Nous remarquons que toutes ces réponses erronées ont été données sous forme de quotient de deux des trois côtés du triangle et que ce sont des erreurs adoptées sans régularité identifiable. Plus précisément, nous constatons que les 9 élèves (pour Autre) font partie des 11 élèves qui ont donné les réponses incorrectes pour le cosinus et le sinus des angles aigus, (voir *Figure 116* ci-dessous).

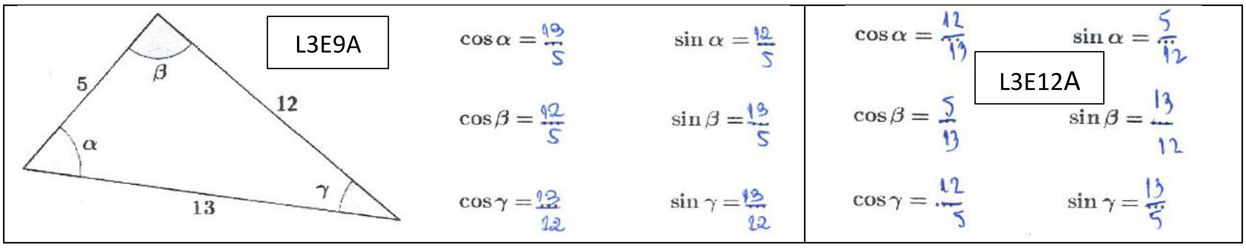
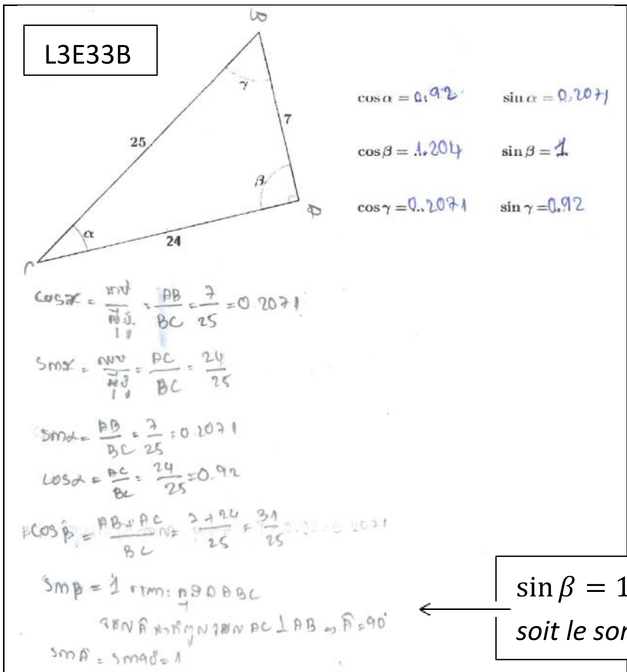
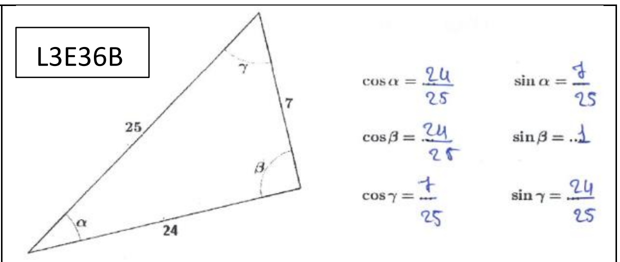


Figure 116 : Cosinus et sinus d'un angle sous forme de quotient adoptés sans régularité

Nous remarquons que parmi les 14 élèves de catégorie g :

- 1 (L3E33B) reconnaît le sinus de l'angle droit (dont la mesure est 90°), mais pas le cosinus de l'angle droit. Elle a adopté une stratégie pour donner la valeur du cosinus de l'angle droit comme étant $\frac{a+b}{c}$ où a et b représentent les longueurs des côtés de l'angle droit, et c, celle de l'hypoténuse, (voir *Figure 117* ci-dessous).
- 1 (L3E36B) a commis TE3A (lui, il n'a pas donné la mesure de l'angle β ni le codage sur la figure), (voir *Figure 117* ci-dessous).





L3E36B donne la bonne réponse pour $\sin\beta$ grâce à sa propre formule adoptée pour le sinus de l'angle avec TE3A. Le 1 obtenu est le résultat du quotient $\frac{25}{25}$.

Mais ce n'est pas le cas pour L3E33B. Lui, il reconnaît la mesure en degrés de l'angle droit et la valeur exacte de l'angle droit.

$\sin\beta = 1$ car dans le triangle ABC tel que $\hat{A}$ soit le sommet avec $AC \perp AB \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$

Figure 117 : La valeur du sinus de l'angle droit est 1, et comment trouver ce 1 ?

Dans l'ensemble, parmi les 44 élèves qui ont fait l'exercice I, 3 élèves reconnaissent le cosinus et le sinus de l'angle droit, et 2 autres, le sinus de l'angle droit mais pas le cosinus de l'angle droit.

4.2.2.2. **Élèves de 11^e**

14 élèves sur 57 n'ont pas fait l'exercice I (un quart des élèves environ). Parmi les 43 élèves qui l'ont fait, il y a 12 élèves qui ont donné des réponses erronées non identifiables que nous avons classées en catégories (a., b., c., d., e., f.) déterminées précédemment pour les élèves de 12^e (voir la sous-section 4.2.2.1) : 6 pour a., 3 pour b., 2 pour e., 1 pour f.

31 élèves utilisent la stratégie 1.1 (5 justifient mathématiquement que le triangle donné est un triangle rectangle avant de donner les valeurs des cosinus et sinus – 26 autres les donnent directement sans justifier la nature du triangle donné). Aucun élève n'utilise la stratégie 2 (la formule des cosinus).

Nous présentons maintenant les résultats obtenus en deux étapes : cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle puis cosinus et sinus de l'angle droit.

Cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle : TE1.

	TE1	Autre	NR	RC	Total
Angle α	3	9	3	20 (17-ve ; 3-va)	31
Angle γ	3	7	3	20 (17-ve ; 3-va)	31

(TE : type d'erreurs ; NR : non réponse ; RC : réponse correcte ; Autre : d'autre type d'erreurs relié à la stratégie 1.1 (voir la section 4.1.3, p. 232) ; ve : valeur exacte ; va : valeur approchée)

Tableau 44 : Effectif concernant les cosinus et sinus d'un angle aigu pour les 31 élèves qui utilisent la Stratégie 1.1

Nous remarquons que :

- Les 5 élèves qui reconnaissent la réciproque du théorème de Pythagore et les cosinus et sinus des angles aigus dans le triangle rectangle ont donné la bonne réponse (4 ve et 1 va).
- Parmi les 26 élèves qui n'ont pas précisé la nature du triangle donné et qui ont directement appliqué les formules des cosinus et sinus des angles aigus dans le triangle rectangle,
    - 10 élèves ont réactivé sans problème les cosinus et sinus des angles aigus ;
    - 16 autres semblent avoir des difficultés dans l'application des formules des cosinus et sinus des angles aigus, avec confusion : 1. côtés opposé/adjacent à l'angle, hypoténuse ; 2. Inversion cosinus/sinus ; 3. Inverse du sinus, inverse du cosinus. Certains élèves ont indiqué les bonnes formules en termes de langage, mais en pratique, ils ont du mal à distinguer le rôle des trois côtés du triangle rectangle.

      Parmi les 16 élèves, 3 élèves ont commis TE1.
        - L'élève L3e18A a donné les mesures approchées des angles α, β et γ à la calculatrice en mode « Degré », par exemple : $\sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 22{,}61^{\circ}$.

Nous avons vérifié avec ses productions dans le brouillon joint. Ses connaissances sur le cosinus et le sinus du triangle rectangle ne sont pas stables (confusion entre cosinus et sinus) : il change la bonne réponse pour le cosinus des angles α et γ en une réponse erronée, en remplaçant « cos » par « sin », puis donne la réponse erronée finale, (voir *Figure 118* ci-dessous).

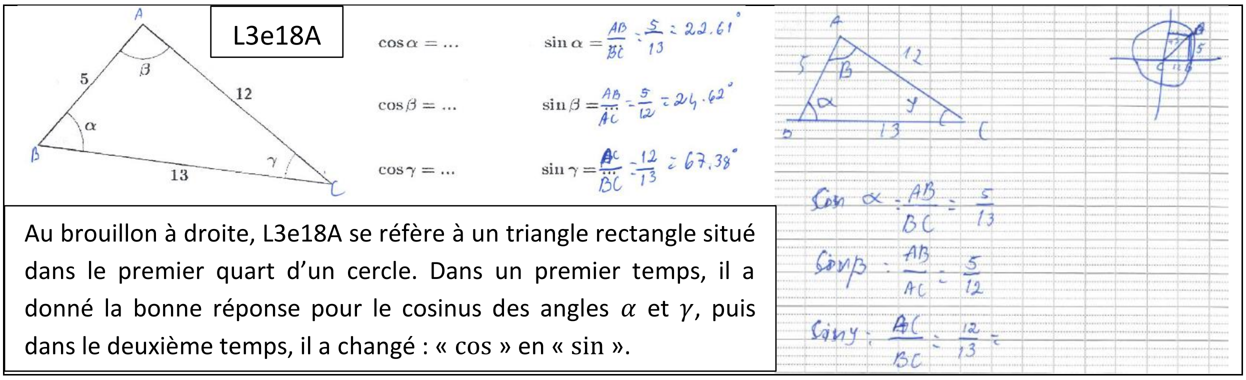


Figure 118 : **TE1** avec confusion entre cosinus et sinus

- Nous considérons que L3e25B, L4e20B ont commis TE1 parce que les valeurs numériques dans leurs réponses finales accompagnées par le signe « ° » ont exprimé que ces élèves ont voulu donner les mesures approchées en degrés des angles du triangle. Ils considèrent que « la valeur approchée du quotient » qui est, par exemple, « le cosinus de l'angle α » est la « mesure en degré de l'angle α » ; autrement dit : ils confondent « cosinus de l'angle » et « mesure de l'angle ». S'il n'y avait pas le signe « ° » dans leurs réponses finales, alors nous penserions que ce sont les bonnes réponses sous forme de valeurs approchées. (voir *Figure 119*)

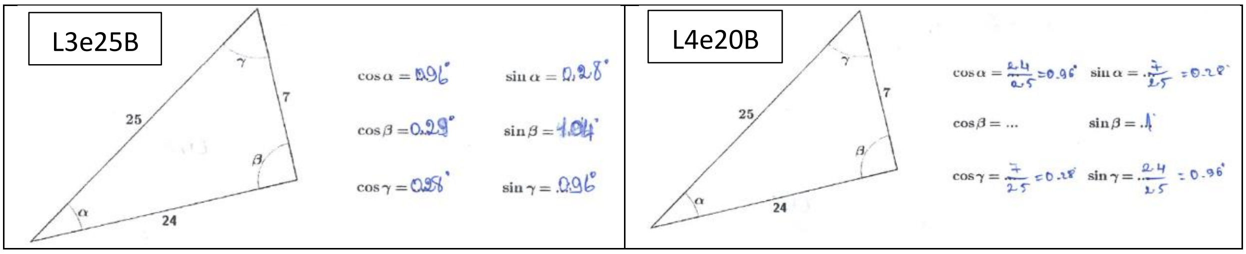


Figure 119 : **TE1** – « valeur approchée du quotient » représente « mesure approchée en degrés de l'angle »

Cosinus et sinus de l'angle droit du triangle rectangle : TE3

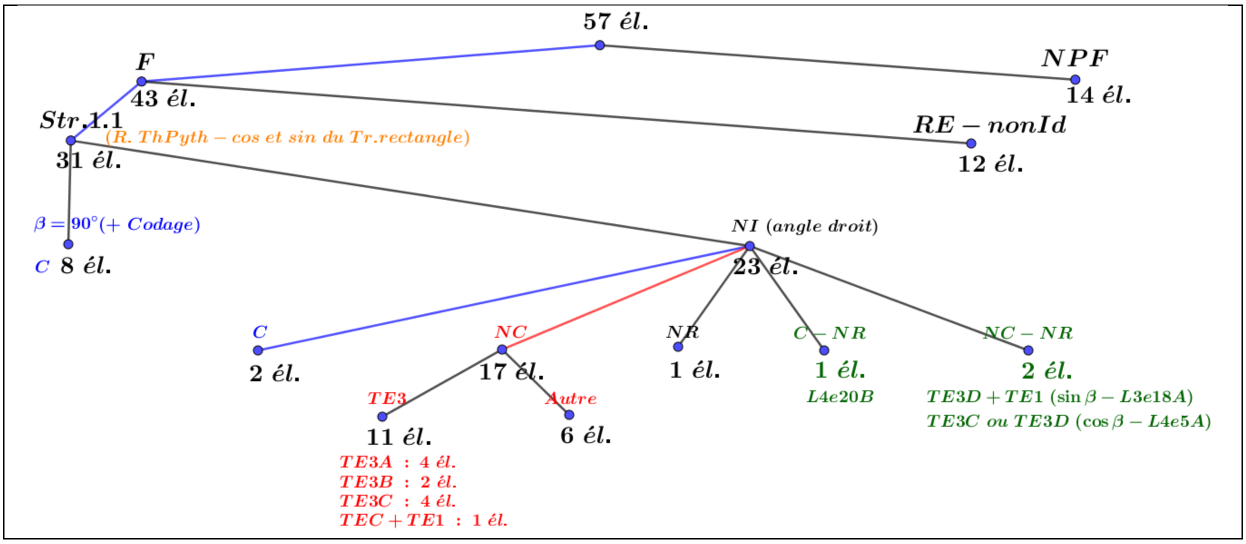
	TE3A	TE3B	TE3C	TE3D	Autre	NR	RC	Total
$\cos\beta$	4	2	6 (dont 1 est accompagné par TE1)	0	6	3	10	31
$\sin\beta$	4	2	5 (dont 1 est accompagné par TE1)	1 (accompagné par TE1)	6	2	11	31

(TE : type d'erreurs ; Autre : d'autres réponses erronées ; NR : non réponse ; RC : réponse correcte)

Tableau 45 : Effectif concernant les cosinus et sinus de l'angle droit pour les 31 élèves qui utilisent la Stratégie 1.1

Remarque : Dans la *Tableau 45*, nous n'avons pas ajouté l'information concernant les 12 élèves ayant donné des réponses erronées non identifiables (catégories a., b., e., f.) que nous avons indiqués au début de la sous-section 4.2.2.2. Parce que ces 12 élèves n'ont pas donné la bonne réponse pour le cosinus et le sinus de l'angle droit.

Nous montrons aussi le schéma ci-dessous pour faciliter la lecture sur la répartition de l'effectif et sur TE3 commis par certains élèves pour tenter sans succès de donner le cosinus et le sinus de l'angle droit, en appliquant à tort les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle. Remarquons que nous n'avons pas fait de schéma similaire pour les élèves de 12e car il y a peu d'informations récoltées.



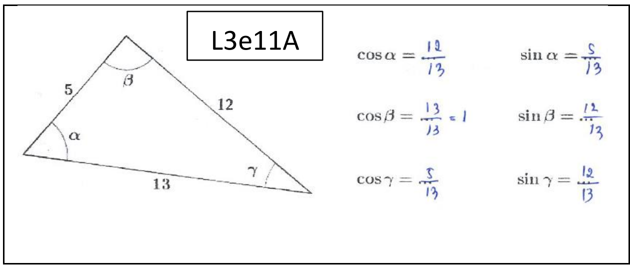
(F : a fait ; NPF : n'a pas fait ; Str : Stratégie ; RE-nonId : réponse erronée non identifiable ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse ; NI : non indication ; TE : Type d'erreurs ; Autre : ensemble des réponses erronées autre que TE3)

Tableau 46 : Cosinus et sinus de l'angle droit du triangle rectangle – **TE3** – élèves de 11e

Nous remarquons que :

- un tiers des 31 élèves mobilisent correctement les cosinus et sinus de l'angle droit ;
- deux tiers de ces 31 élèves environ ont tenté, sans succès, de donner le cosinus et le sinus de l'angle droit du triangle rectangle, et ces élèves sont issus des 23 élèves qui n'ont pas indiqué l'information disant que β est l'angle droit du triangle donné, (voir *Tableau 46* ci-dessus) ;
- parmi les 4 élèves qui ont commis TE3A, 2 (L3e11A et L3e26B) ont fait en plus une erreur avec inversion cosinus et sinus, (voir *Figure 120*) ;
- TE3E n'apparaît pas.

Nous présentons maintenant quelques exemples sur TE3 et Autre :



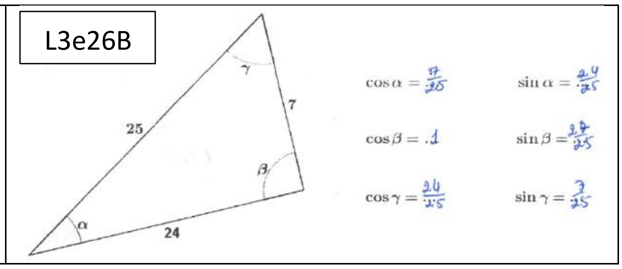


Figure 120 : **TE3A** avec **inversion cosinus et sinus**

Nous considérons que L3e11A et L3e26B ont commis TE3A avec une double erreur : 1. inversion cosinus et sinus, 2. TE3A. En effet, nous détectons les erreurs commises à partir de celles données pour les cosinus et sinus des angles aigus du triangle rectangle.

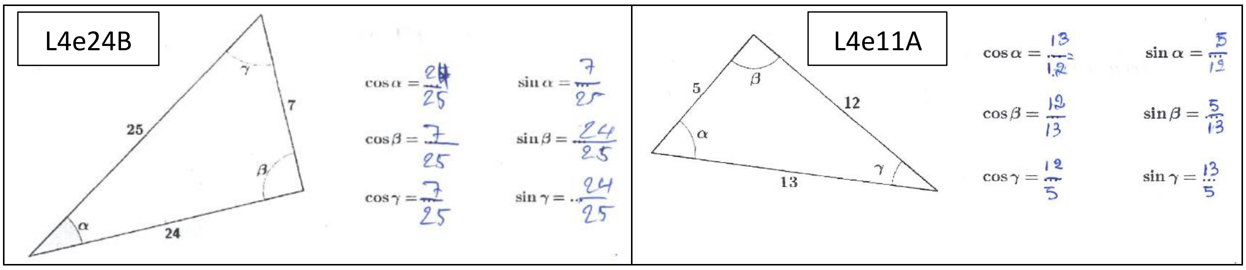


Figure 121 : **TE3B**

Il est clair que L4e24B a commis TE3B.
Mais pour le cas de L4e11A, nous considérons que cet élève ne reconnaît pas l'hypoténuse et qu'il ne distingue pas le côté opposé du côté adjacent à un même angle. Il semble qu'il ait juste donné le cosinus d'un angle (idem pour le sinus) sous forme de quotient de deux des trois longueurs du triangle donné. Dans sa stratégie, qui consiste à remplir les pointillés pour les valeurs des cosinus et sinus des angles α, β et γ, dans cet ordre : il semble qu'il ait d'abord fait un choix pour le dénominateur (ici, le côté opposé à l'angle), puis a alterné les deux côtés de l'angle : l'un pour cosinus et l'autre pour sinus (de manière non régulière). Ceci nous fait douter qu'il ait vraiment commis TE3B (voir la sous-section 4.1.2, p. 234). Remarquons que d'après la stratégie adoptée par L4e11A pour tenter de donner le cosinus et le sinus d'un angle dans le triangle rectangle, il s'agit d'une autre erreur : ici, il choisit de mettre le côté opposé à l'angle au dénominateur du rapport pour le cosinus et le sinus de l'angle mais ce n'est pas de manière régulière identifiable pour son choix concernant le numérateur du rapport (l'un des côtés de l'angle pour cosinus et l'autre pour sinus), (voir *Figure 121*).

D'ailleurs, dans la *Figure 118* : L3e18A a commis TE3D et TE1, et dans la *Figure 119*, L3e25B a commis TE3C et TE1.

Dans la *Figure 122* ci-dessous : L3e17A, L4e6A et L4e10A ont commis « Autre ». L3e17A et L4e6A mobilisent correctement les cosinus et sinus des angles aigus, mais pas L4e10A. Pour ce troisième élève, ses connaissances sur les cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ne sont pas stables. Selon l'information donnée par sa trace écrite sous la figure du triangle donné,

- pour les deux premières lignes : le cosinus d'un angle est le rapport du côté adjacent à l'angle par le côté opposé à l'angle, et le sinus d'un angle, c'est l'inverse du cosinus de l'angle ;
- pour la troisième ligne : ce sont les bonnes formules.

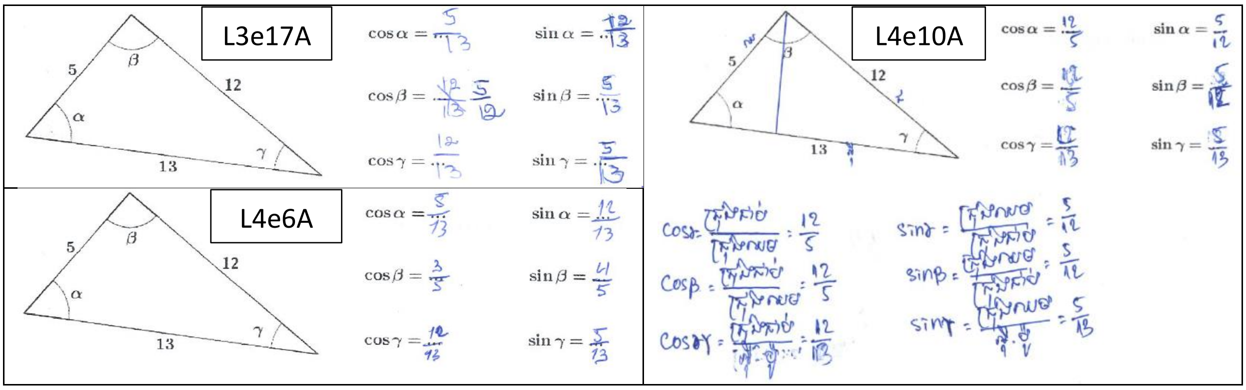


Figure 122 : **Autre**

4.2.2.3. **Synthèse du dépouillement de l'exercice I**

Nous présentons d'abord un récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les catégories des réponses classées, (voir *Tableau 47*).

	a.	b.	c.	d.	e.	f.	Catégories a.-f. au total (réponses non identifiables)	g. (Str 1.1)	NR	Total
12^e	8	2	4	2	6	8	30	14	19	63
11^e	6	3	0	0	2	1	12	31	14	57

(Str : stratégie ; NR : non réponse)

Tableau 47 : Récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les catégories des réponses classées des élèves de 12^e et de 11^e – Exercice I

Rappelons-nous que la trigonométrie du triangle rectangle (l'OML$_{\text{TriangleR}}$) est vue en 10^e, c'est-à-dire une année plus tôt pour l'élève de 11^e et deux années plus tôt pour l'élève de 12^e. Une proportion importante d'élèves n'ont pas fait l'exercice I (un tiers des élèves de 12^e et un quart des élèves de 11^e). A quoi s'ajoute la diversité des erreurs que nous n'avons pas réussi à interpréter (moitié des élèves de 12^e, un quart des élèves de 11^e).

Relativement à la mise en fonctionnement des connaissances apprises dans l'OML$_{\text{TriangleR}}$, nous notons un grand écart entre les deux niveaux de la fin du cursus. En effet :

- La plupart des élèves de 12^e ne réactivent pas la trigonométrie du triangle (OML$_{\text{Triangle}}$). Moins d'un quart d'entre eux mobilisent, avec des difficultés à remarquer tout particulièrement, la trigonométrie dans le triangle rectangle (OML$_{\text{TriangleR}}$). Une raison possible est que ces élèves ont oublié ce qu'ils ont appris deux ans auparavant (autrement dit, ils ne rencontrent plus ces savoirs appris et ils ne les maîtrisent plus).
- La moitié des élèves de 11^e réactivent la trigonométrie dans le triangle rectangle (OML$_{\text{TriangleR}}$) :
  - les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu sont bien réactivées par deux tiers de ces élèves, dont la moitié reconnaît le cosinus et le sinus de l'angle droit ;
  - un tiers de ces élèves environ ont commis TE3.

Nous pouvons émettre la conclusion suivante :

- la trigonométrie dans le triangle rectangle est plus disponible pour l'élève de 11e que pour l'élève de 12e ;
- le théorème des cosinus n'est pas disponible ;
- le cosinus et le sinus de l'angle droit posent une difficulté aux élèves des deux niveaux. Remarquons qu'en ce qui concerne le TE1 (voir *Tableau 44*) et TE2, nous pouvons dire que ces deux types d'erreurs ne sont pas valables pour les élèves cambodgiens car ils n'ont pas assez de connaissances pour les commettre, TE1 et TE2 nécessitant un minimum de connaissances mathématiques.

Dans l'ensemble, les élèves cambodgiens ont mal appliqué les formules du cosinus et du sinus d'un angle dans un triangle rectangle et beaucoup de réponses n'ont pas de rapport avec les connaissances mathématiques apprises.

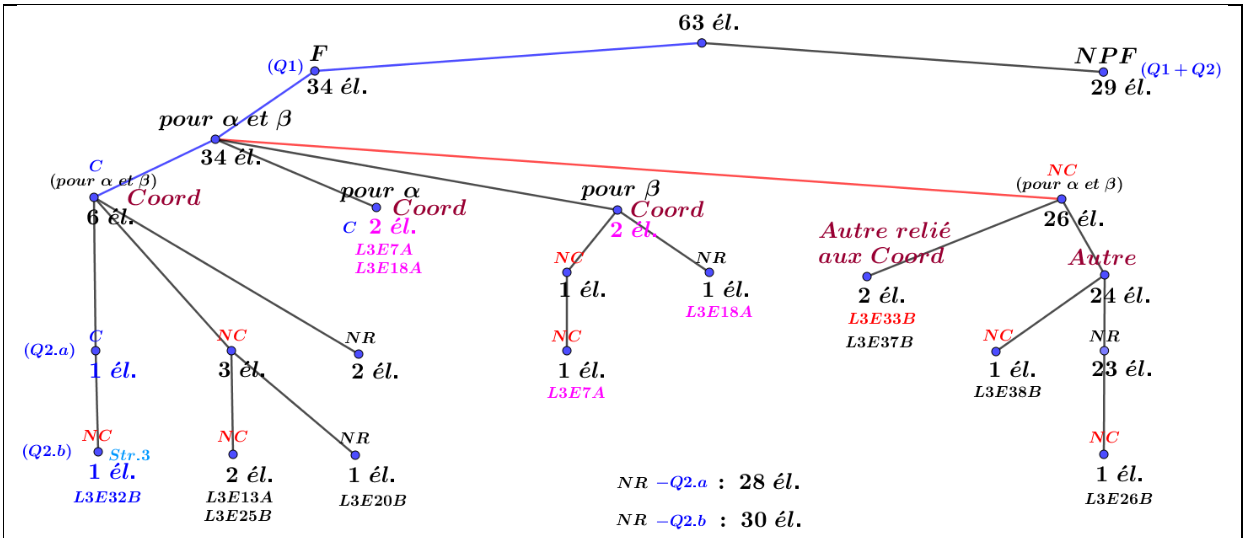
4.2.3. <u>Exercice II</u>

4.2.3.1. **Élèves de 12e**

29 élèves sur 63 ne font pas cet exercice II (la moitié des élèves environ). Parmi les 34 élèves qui le font,

- 26 élèves donnent, à la question 1, des réponses erronées de manière diverse, plutôt non identifiables ; parmi eux, 2 élèves donnent une réponse erronée non identifiable à la question 2.a (L3E38B) et à la question 2.b (L3E26B) ;
- 8 élèves exploitent à la question 1 l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus, ils ne donnent pas tous une réponse correcte ; certains de ces élèves continuent à répondre aux questions 2.a et 2.b.

Nous montrons l'effectif réparti suivant les questions sous forme de schéma, (voir *Tableau 48*), et aussi, sous forme de tableau, (voir *Tableau 49*).



(F : a fait ; NPF : n'a pas fait ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; Coord : lien entre les coordonnées et les cos et sin ; NR : non réponse)

<u>*Tableau 48*</u> : Effectif réparti suivant les questions – élèves de 12e

<table>
<tr><td></td><td></td><td>NPF</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q1 (34 élèves) : cosinus et sinus de α (angle aigu) et de β (angle obtus) dans cet ordre</td><td rowspan="12">29</td></tr>
<tr><td>(C ; C)</td><td>6 (avec les coordonnées)</td></tr>
<tr><td>(NC ; NC)</td><td>26 (2 : avec les coordonnées ; 24 : Autre)</td></tr>
<tr><td>(C ; NC)</td><td>1 (avec les coordonnées)</td></tr>
<tr><td>(C ; NR)</td><td>1 (avec les coordonnées)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Q2 : Q2.a et Q2.b dans cet ordre</td></tr>
<tr><td>(C ; NC)</td><td>1 (linéarité des fonctions cosinus et sinus)</td></tr>
<tr><td>(NC ; NC)</td><td>2</td></tr>
<tr><td>(NC ; NR)</td><td>3</td></tr>
<tr><td>(NR ; NC)</td><td>1</td></tr>
<tr><td>(NR ; NR)</td><td>27</td></tr>
</table>

(Q : Question ; C : correct ; NC : non correct ; NR : non réponse ; NPF : n'a pas fait)

Tableau 49 : Effectif réparti suivant les questions sous forme de tableau – élèves de 12^{e}

Dans *Tableau 49*, à la question 1, par exemple (C ; NC) signifie : c'est, dans l'ordre, correct pour les cosinus et sinus de l'angle α et non correct pour ceux de l'angle β. À la question 2, par exemple, (NC ; NR) signifie : c'est, dans l'ordre, non correct pour Q2.a et non réponse pour Q2.b.

Précisons que dans *Tableau 48* :

- La catégorie « Autre relié aux coordonnées » regroupe les réponses erronées consistant en une utilisation des coordonnées de A et/ou de B (version B) pour répondre mais de manière incorrecte. Deux élèves L3E33B et L3E37B donnent différemment leurs réponses erronées pour le cosinus et le sinus de l'angle α : L3E33B qui a correctement codé les angles α et β dans la figure donnée donne le cosinus et le sinus de l'angle comme l'inverse de l'abscisse du point A du cercle trigonométrique qui détermine l'angle α ; L3E37B qui n'ajoute aucun codage sur la figure donnée donne le cosinus de l'angle α comme étant le cosinus de l'ordonnée du point B du cercle trigonométrique sans lien avec l'angle α, et le sinus de l'angle α comme étant le sinus de l'opposé de l'abscisse de ce point B. L3E33B donne incorrectement le cosinus et le sinus de l'angle β comme étant $\frac{1}{2}$ et 1, et L3E37B ne les a pas donnés. Les deux élèves n'ont pas répondu aux questions 2.a et 2.b.
- Concernant Autre, nous reprenons la catégorie Autre définie dans la partie française (voir p. 245 – il y a Autre.a, Autre.b, Autre.c, Autre.d), nous ajoutons dans la partie cambodgienne Autre.e et Autre.f.

  Dans le *Tableau 48*, il y a 24 élèves sur 34 qui ont commis Autre.d (11 élèves), Autre.e (4 élèves) et Autre.f (9 élèves).

  Autre.d : ce sont des réponses erronées de manière diverse non identifiables. Les 11 élèves n'ont pas répondu aux questions 2.a et 2.b.

Autre.e : les 4 élèves (aucun ajout sur la figure donnée) donnent des mesures des angles remarquables soit en degrés soit en radians à la place des cosinus et sinus ; par exemple, L4E2A : $\cos\alpha = 90^{\circ}$, $\sin\alpha = 90^{\circ}$, $\cos\beta = 45^{\circ}$, $\sin\beta = 45^{\circ}$. Mais, ces réponses erronées ne sont pas les réponses de TE1. Ces élèves n'ont pas répondu aux questions 2.a et 2.b.

Autre.f : ce sont des réponses erronées où l'élève développe une stratégie dans un triangle quelconque (par exemple : des triangles IOM, ION, IOP, NOP, etc.), en s'inspirant à tort du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle. Dans ce type de réponses, l'élève définit le cosinus et le sinus d'un angle comme le rapport de deux des trois côtés du triangle avec un procédé non stable à identifier. Remarquons que Autre.f est proche de Autre.b (voir p. 245).

Nous cherchons à identifier les 8 élèves qui semblent reconnaitre l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus, (voir *Tableau 48*).

- Pour 6 élèves qui ont correctement répondu à la question 1 : 2 (L3E25B-*Figure 123,* L3E13A) ont mis un bon codage pour les angles α et β sur la figure donnée, et les 4 autres n'ont mis aucun codage sur la figure. Puis, pour la question 2, 2 ont abandonné ; 4 ont répondu à la question 2.a ; un seul d'entre eux (L3E32B) a correctement répondu mais il n'a pas réussi à donner une bonne réponse à la question 2.b car il ne reconnait pas les formules d'addition du cosinus et du sinus et a appliqué à tort numériquement la linéarité des fonctions sinus et cosinus, (voir *Figure 123*). Parmi les 3 réponses erronées différentes à la question 2.a, 2 sont non identifiables (L3E13A, L3E20B).

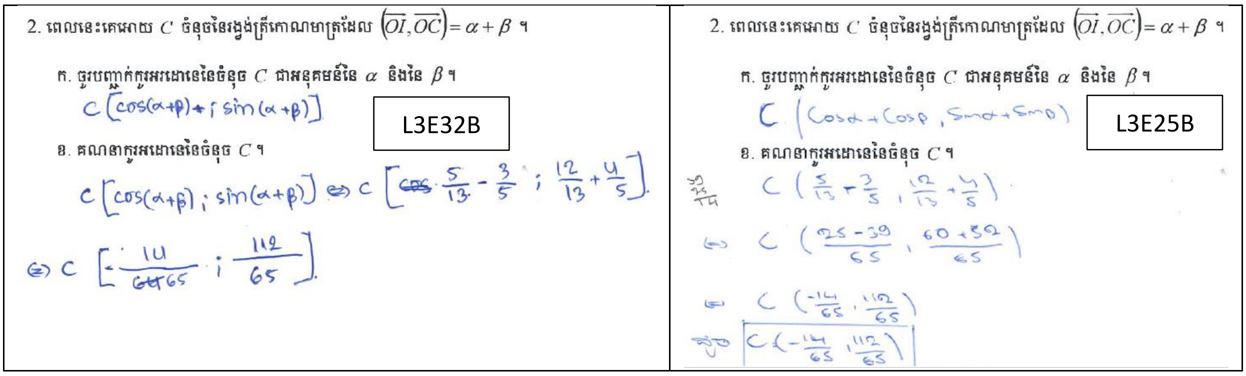


Figure 123 : Appliquer à tort la linéarité des fonctions sinus et cosinus

Dans la *Figure 123,* alors que L3E32B applique explicitement la linéarité à $\cos(\alpha + \beta)$ et à $\sin(\alpha + \beta)$, nous ne pouvons pas en dire autant de L3E25B car il n'écrit pas $\cos(\alpha + \beta)$ ni $\sin(\alpha + \beta)$.

- Pour 2 élèves (L3E7A, L3E18A) qui ont réussi à trouver les cosinus et sinus de l'angle α, ils ont un problème avec l'angle β. En ce qui concerne l'angle β, L3E7A a changé d'idée en échangeant les rôles de l'abscisse et de l'ordonnée (voir *Figure 124*). L3E7A a écrit une phrase répétant de manière fausse la consigne de la question 2.a, et dans ce cas, nous ne la considérons pas comme une réponse à cette question.

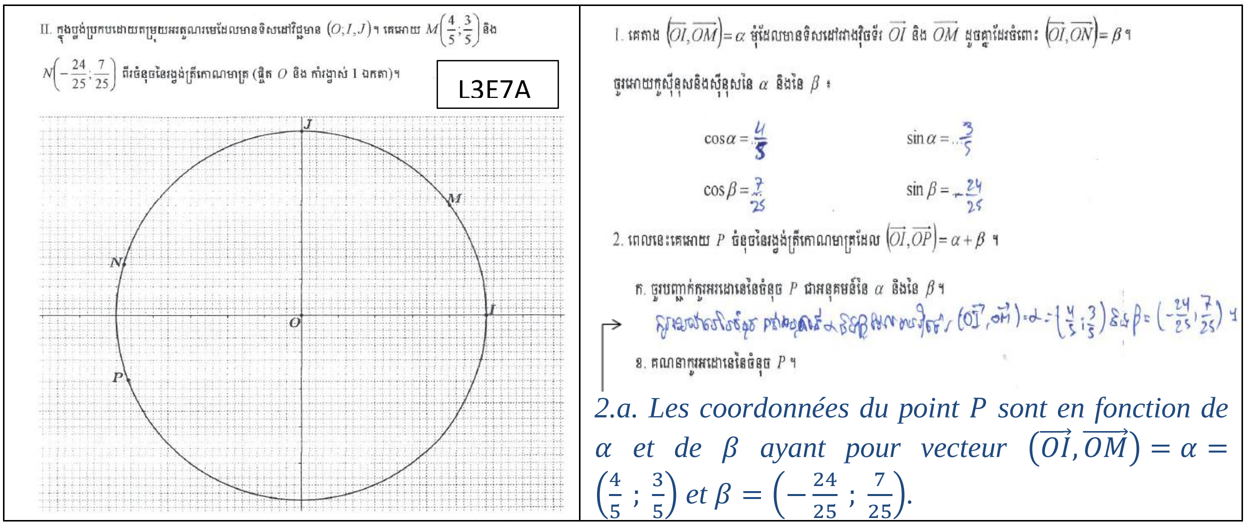


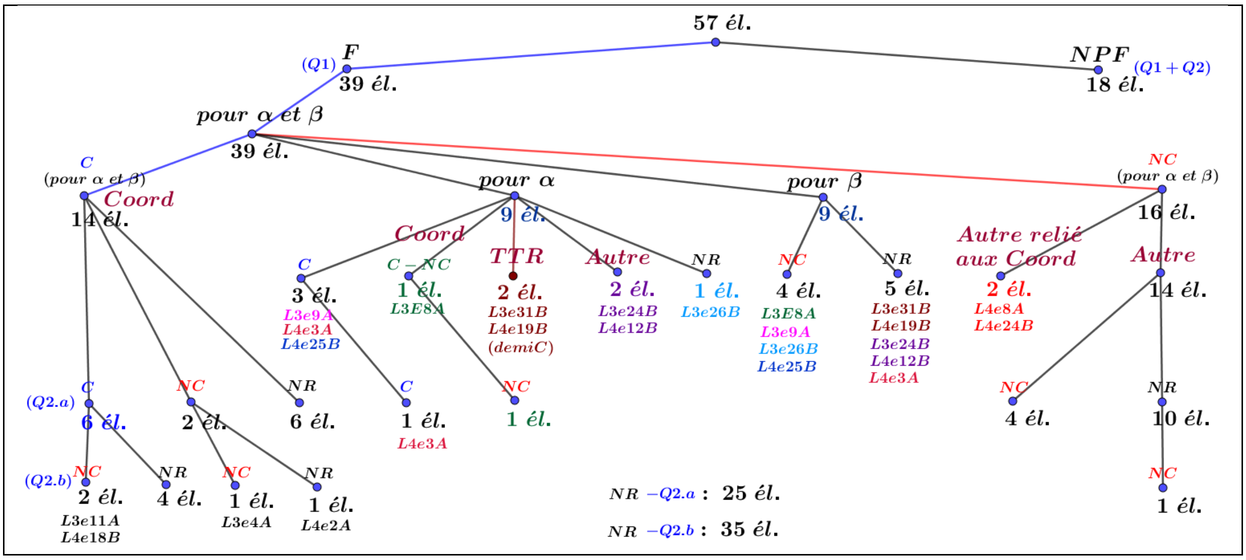
Figure 124 : Instabilité sur le cosinus et le sinus d'un angle orienté, à la question 1

Nous retenons donc que :

- l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus est peu disponible pour des élèves de 12e ;
- les formules d'addition du cosinus et du sinus ne sont pas disponibles pour ces élèves ;
- il y a une confusion sur la linéarité des fonctions cosinus et sinus.

4.2.3.2. **Élèves de 11e**

Nous présentons d'abord l'effectif réparti suivant les questions sous forme de schéma, (voir *Tableau 50*), et aussi, sous forme de tableau, (voir *Tableau 51*) :



(F : a fait ; NPF : n'a pas fait ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse ; TTR : trigonométrie dans le triangle rectangle ; Autre : d'autres réponses erronées)

Tableau 50 : Répartition de l'effectif suivant les questions –élèves de 11e

		NPF
Q1 (39 élèves) : cosinus et sinus de α (angle aigu) et de β (angle obtus) dans cet ordre		18
(C ; C)	14 (avec les coordonnées)	
(NC ; NC)	16 (2 : avec les coordonnées ; 14 : Autre)	
(C ; NC)	2	
(C ; NR)	1	
(C-NC ; NC)	1	
(demiC ; NR)	2 (relation dans  - voir *Figure 125*)	
(NC ; NR)	2 (Autre)	
(NR ; NC)	1	
Q2 : Q2.a et Q2.b dans cet ordre		
(C ; NC)	2	
(NC ; NC)	1	
(C ; NR)	5	
(NC ; NR)	6	
(NR ; NC)	1	
(NR ; NR)	24	

(Q : Question ; C : correct ; NC : non correct ; NR : non réponse ; NPF : n'a pas fait ; C-NC : correct pour cos et non correct pour sin)

Tableau 51 : Effectif réparti suivant les questions sous forme de tableau – élèves de 11^{e}

18 élèves sur 57 n'ont pas fait l'exercice II (un tiers des élèves environ). Parmi les 39 élèves qui l'ont fait :

- 14 ont correctement mobilisé, à la question 1, l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus ;
- 9 semblent avoir eu des difficultés avec des connaissances non stables dans la réflexion sur les cosinus et sinus d'un angle (angle aigu α, angle obtus β) : par exemple,
    - 3 (L3e9A, L4e3A, L4e25B) semblent reconnaître le cosinus et le sinus d'un angle orienté comme étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique qui détermine l'angle orienté, mais avec des difficultés à remarquer, (voir *Figure 126*) ;
    - 2 (L3e31B, L4e19B) ont exploité les cosinus et sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle (vus en 10^{e}), mais ils ont juste donné le cosinus et le sinus de l'angle α (angle aigu) sous forme de quotient de deux des trois côtés du triangle rectangle situé dans le quart du cercle, sans aller jusqu'au bout, (voir *Figure 125*) ;
    - 4 autres ont commis des erreurs de manière diverse.

- 16 ont donné d'autres réponses erronées (2 : avec les coordonnées ; 1 : Autre.a (p. 245) ; 9 : Autre.d (p. 241) ; 4 : Autre.f (p. 278)).

Nous nous focalisons maintenant sur ce qui apparaît important aux questions 2.a et 2.b :

- 2 élèves (L4e4A, L4e18B) reconnaissent les formules d'addition du cosinus et du sinus. L4e4A n'a pas répondu à la question 2.b et L4e18B y a répondu mais il a commis une erreur numérique lors du report des valeurs numériques pour calculer les cosinus, (voir *Figure 127*) ;
- 3 élèves commettent une confusion entre « abscisse » et « longueur » (valeur absolue de l'abscisse), (voir *Figure 128*) ;
- 1 élève (L3e11A) a appliqué, à la question 2.b, à tort, la linéarité aux fonctions cosinus et sinus, (voir *Figure 127*) ; et, 1 élève (L3e4A), à la question 2.a, la linéarité des coordonnées de P.

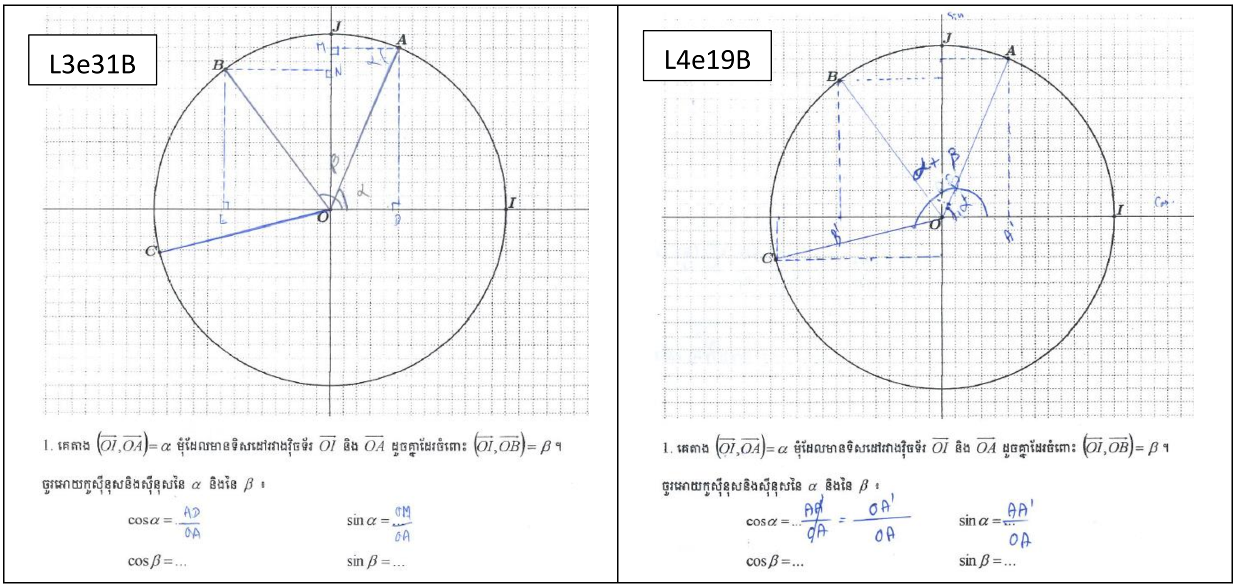
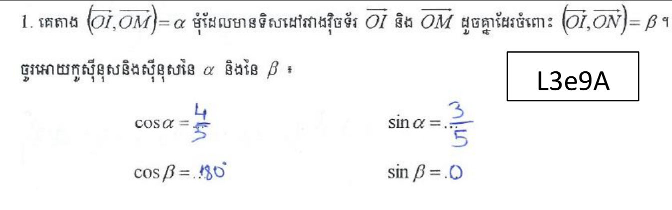


Figure 125 : Exploitation des cosinus et sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle



L3e9A n'a rien codé sur la figure donnée. L'angle β lui a posé une difficulté. Il semble qu'il considère que l'ange β est l'angle plat dont la mesure en degrés est 180°, et que dans un tel cas, son sinus de l'angle β est correct.

Pour L4e3A, d'après sa trace écrite, il semble que dans un premier temps, il ait exploité les cosinus et sinus dans le triangle rectangle HOM, en écrivant par exemple : $\cos\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$ (il a gommé avec la colle blanche et a récrit simplement $\frac{4}{5}$) ; puis dans un deuxième temps, il semble qu'il ait reconnu l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus à la question 2.a, avec une confusion entre « abscisse » et « longueur », (voir *Figure 127*). Il n'a pas répondu aux cosinus et sinus de l'angle β.

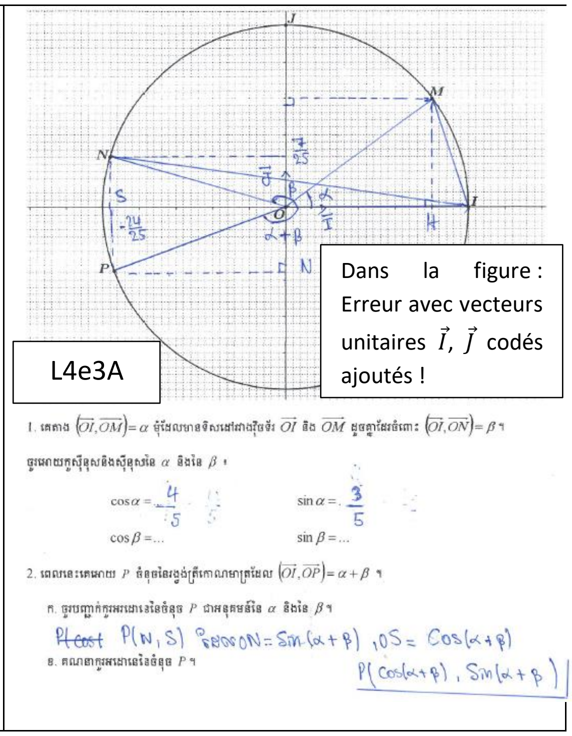
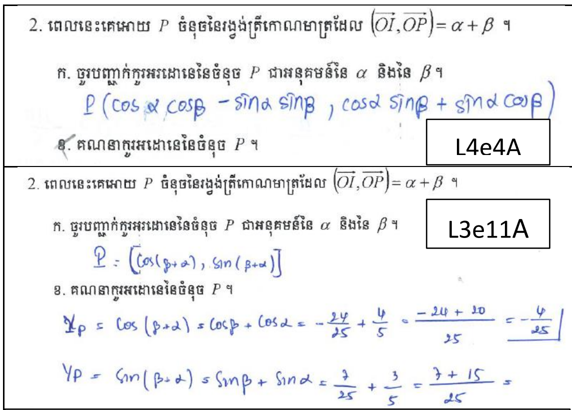


Figure 126 : Difficultés avec « angle obtus β » ?



Nous recopions ici l'opération faite par L4e18B :

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{15}{13}\times -\frac{3}{15}\right) - \left(\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}\right)$$
$$= -\frac{3}{13} - \frac{48}{65} = \frac{-15-48}{65}$$
$$= -\frac{63}{65}$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$
$$= \frac{12}{13}\times -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\times\frac{5}{13}$$
$$= -\frac{36}{65} + \frac{4}{13} = \frac{-36+20}{65}$$
$$= \frac{-16}{65}$$

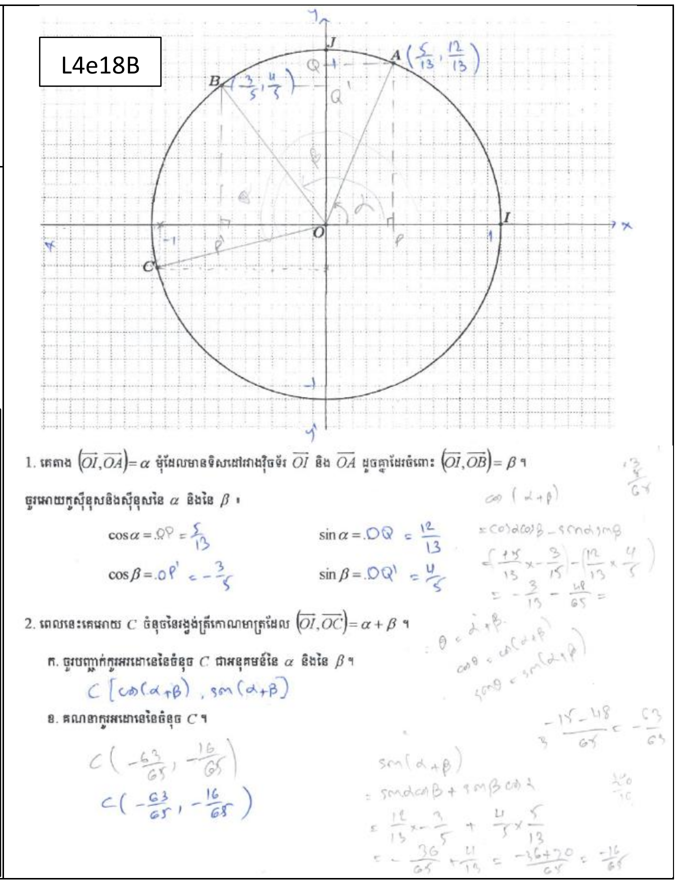
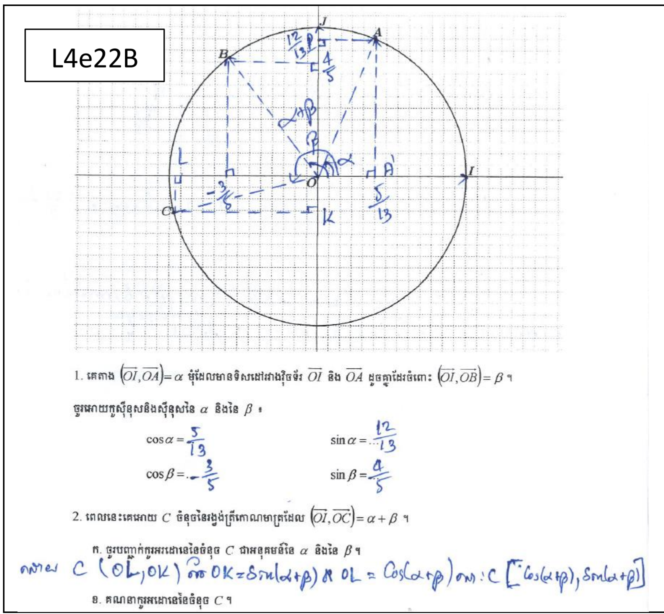


Figure 127 : Utilisation des formules d'addition du cosinus et du sinus – Application à tort de la linéarité aux fonctions cosinus et sinus



Les réponses données par L4e22B et L4e21B sont presque identiques (L4e21B n'a repéré que les angles α et β sur la figure donnée), nous ne montrons que la production de L4e22B.

L4e22B a correctement codé l'angle orienté $\alpha + \beta$, sur la figure donnée. (voir aussi L4e3A, *Figure 126*)

Nous présentons ici, une erreur commune aux trois élèves (L4e3A, L4e21B, L4e22B) : confusion entre « abscisse » et « longueur ». Par exemple, pour L4e22B, il aurait dû écrire : $C(-OL\,;OK)$, $-OL = \cos(\alpha + \beta)$.

Figure 128 : Confusion entre « abscisse » et « longueur »

Dans la suite, nous nous intéressons aux productions de deux élèves L4e13A (voir *Figure 129*), L4e18B (voir *Figure 127*) car ce sont les deux seuls élèves qui ont fait un lien explicite entre les cosinus et sinus et les coordonnées (éventuellement avec confusion abscisse/longueur), à la question 1, par exemple : $\cos\beta = OP' = -\frac{3}{5}$; $\sin\beta = OQ' = \frac{4}{5}$ (L4e18B, voir *Figure 128*). Rappelons-nous que l'angle géométrique obtus β est l'objet crucial de cette question afin de savoir si l'élève exploite convenablement les connaissances apprises concernant les objets mathématiques rencontrés : Trigonométrie dans le triangle rectangle (l'$OML_{TriangleR}$) et/ou Trigonométrie dans le cercle trigonométrique (l'OML_{CTrigo}).

Pour répondre à la question 1, l'élève L4e18B (idem pour l'élève L4e13A, voir *Figure 129*) a d'abord repéré sur la figure donnée les coordonnées des points A et B, et a codé les angles orientés α et β. Puis, il a utilisé les quatre autres points intermédiaires, ici, les projetés orthogonaux des points A et B sur l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Sa trace écrite, donnée à la question 1, nous a fourni une information importante sur les étapes de la stratégie qu'il a développée pour accomplir le type de tâches en jeu. Ce procédé est conforme à la présentation par le manuel cambodgien de 10^{e} concernant le calcul des rapports trigonométriques d'un angle obtus (voir *Figure 58* dans le chapitre 2).

Avec la réponse correcte donnée à la question 2.a, nous pouvons dire que l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus est disponible pour l'élève L4e18B mais que cet élève commet une confusion entre « abscisse » et « longueur ».

Ce ne sont pas les deux seuls qui font la confusion entre « abscisse » et « longueur », d'autres élèves font cette erreur, (voir *Figure 128*). Et cette confusion est apparue parmi les 14 élèves qui ont donné correctement les cosinus et sinus des angles α, β à la question 1, (voir *Tableau 50*).

Remarquons que pour nous, la confusion mentionnée précédemment est une petite erreur ; l'important, c'est que l'élève reconnaisse que le cosinus et le sinus d'un angle orienté sont l'abscisse et l'ordonnée du point du cercle trigonométrique, associé à l'angle orienté. Nous pouvons penser que l'élève s'inspire des connaissances vues en cours et/ou dans le manuel de 10e (voir l'annexe n° 2, p. 388 ou bien voir *Figure 58* dans le chapitre 2).

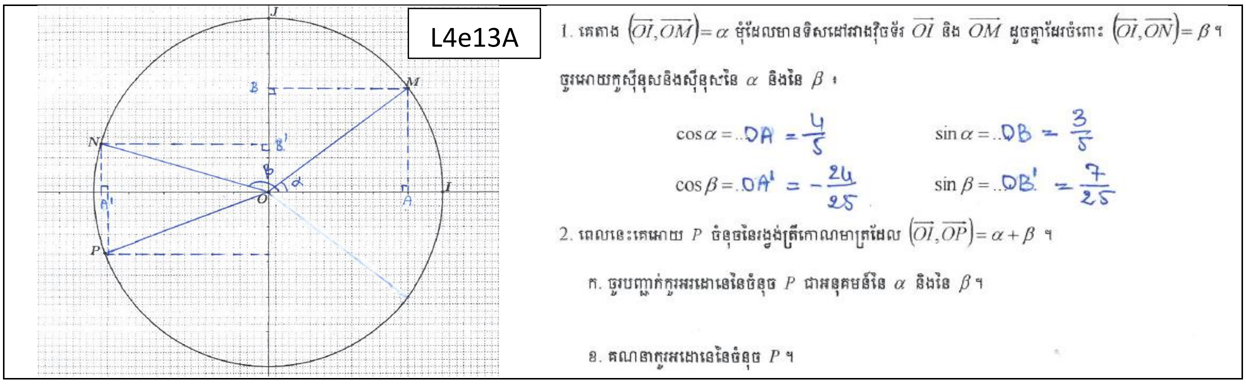


Figure 129 : Exploitation des cosinus et sinus d'un angle : Trigonométrie dans un triangle rectangle ou Trigonométrie dans le cercle trigonométrique ?

Nous pouvons observer que trois élèves cambodgiens (L4e13A-*Figure 129* ; L4e18B-*Figure 127* ; L4e22B-*Figure 128*) et un élève français (L2E5A-*Figure 94*) complètent de la même façon la figure fournie par l'énoncé. Nous faisons l'hypothèse que les ostensifs graphiques ajoutés ne réfèrent pas aux mêmes ostensifs. Les élèves cambodgiens se situent dans l'OML_{CTrigo} avec une confusion entre « abscisse » et « longueur », alors que l'élève français se situe dans l'$OML_{TriangleR}$, avec adaptation des connaissances vues au collège dans une telle situation.

4.2.3.3. **Synthèse du dépouillement de l'exercice II**

Nous présentons d'abord un récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les catégories « Autre » des réponses erronées classées, (voir *Tableau 52*).

	Autre.a	Autre.d	Autre.e	Autre.f	Autre Coord	TTR C – NR	C-NC-NR	NR	C	Total
12e	0	11	4	9	2	0	2	29	6	63
11e	1	9	0	4	2	2	5	18	14	57

(Autre : réponses erronées (a.-d., voir pp. 241 ; e.-f., voir p. 274) ; AutreCoord : Autre relié aux coordonnées ; TTR : trigonométrie dans le triangle rectangle ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse)

Tableau 52 : Récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les catégories des réponses erronées classées dans « Autre » pour les élèves de 12e et de 11e – Exercice II

Rappelons-nous que la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (l'OML_{CTrigo}) est vue en 11e : c'est récent pour l'élève de 11e mais une année est passée pour l'élève de 12e.

Les élèves de 11e réactivent les connaissances apprises dans l'OML_{CTrigo} mieux que ceux de 12e. En effet :

- Environ la moitié des élèves de 12e n'ont pas fait l'exercice II. Parmi les 34 élèves qui l'ont fait, 6 ont mis en fonctionnement l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus (OML_{CTrigo}), 26 ont donné des réponses erronées. Aucun élève n'a exploité la trigonométrie dans le triangle rectangle ($OML_{Triangle}$) pour déterminer le cosinus et le sinus de l'angle aigu α. 1 élève a donné la bonne réponse à la question 2.a mais il a échoué à la question 1.b car il a appliqué à tort la linéarité des fonctions cosinus et sinus.

- Environ un tiers des élèves de 11e n'ont pas fait l'exercice II. Parmi les 39 élèves qui l'ont fait 14 ont mis en fonctionnement l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus (OML_{CTrigo}), 16 ont donné des réponses erronées. La trigonométrie dans le triangle rectangle ($OML_{Triangle}$) a été exploitée par deux élèves de 11e (voir *Figure 125*). 7 élèves ont donné la bonne réponse à la question 2.a. 2 élèves (L4e4A, L4e18B, voir *Figure 127*) ont utilisé les formules d'addition du cosinus et du sinus. 1 élève (L3e11A, voir *Figure 127*) a appliqué à tort la linéarité aux fonctions cosinus et sinus.

Nous pouvons émettre la conclusion suivante :

- l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus est plus disponible pour l'élève de 11e que pour l'élève de 12e ;
- les formules d'addition du cosinus et du sinus sont peu disponibles pour l'élève de 11e et non disponible pour l'élève de 12e.

4.2.4. <u>Exercice III.1</u>

4.2.4.1. **Élève de 12e**

Deux tiers des élèves environ (43 élèves sur 63) ne font pas l'exercice III.1.

Parmi les 20 élèves qui le font, c'est de manière vraiment incomplète :

- 1 (L3E25B) semble placer raisonnablement le point M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$ sur la courbe (voir *Figure 130*) ;
- 3 (L3E12A, L3E32B, L3E36B) placent le point A (ou M) sur l'axe des abscisses, (voir *Figure 131*) ;
- 16 donnent des réponses non identifiables (voir *Figure 132*).

Seul l'élève L3E25B a réussi à placer, de manière correcte, le point M sur la courbe donnée et à donner la réponse correcte pour l'ordonnée (une valeur approchée) de ce point avec la lecture graphique.

Remarquons que la plupart des élèves ont seulement répondu à la question 1.a, de manière incomplète et fausse.

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des productions des élèves.

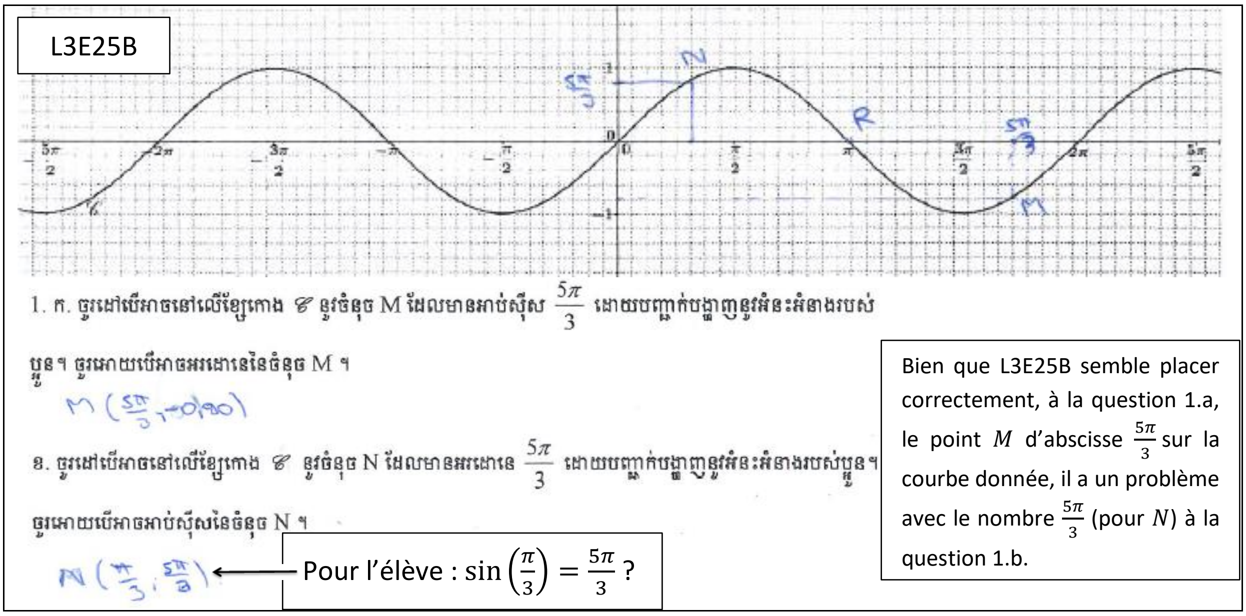
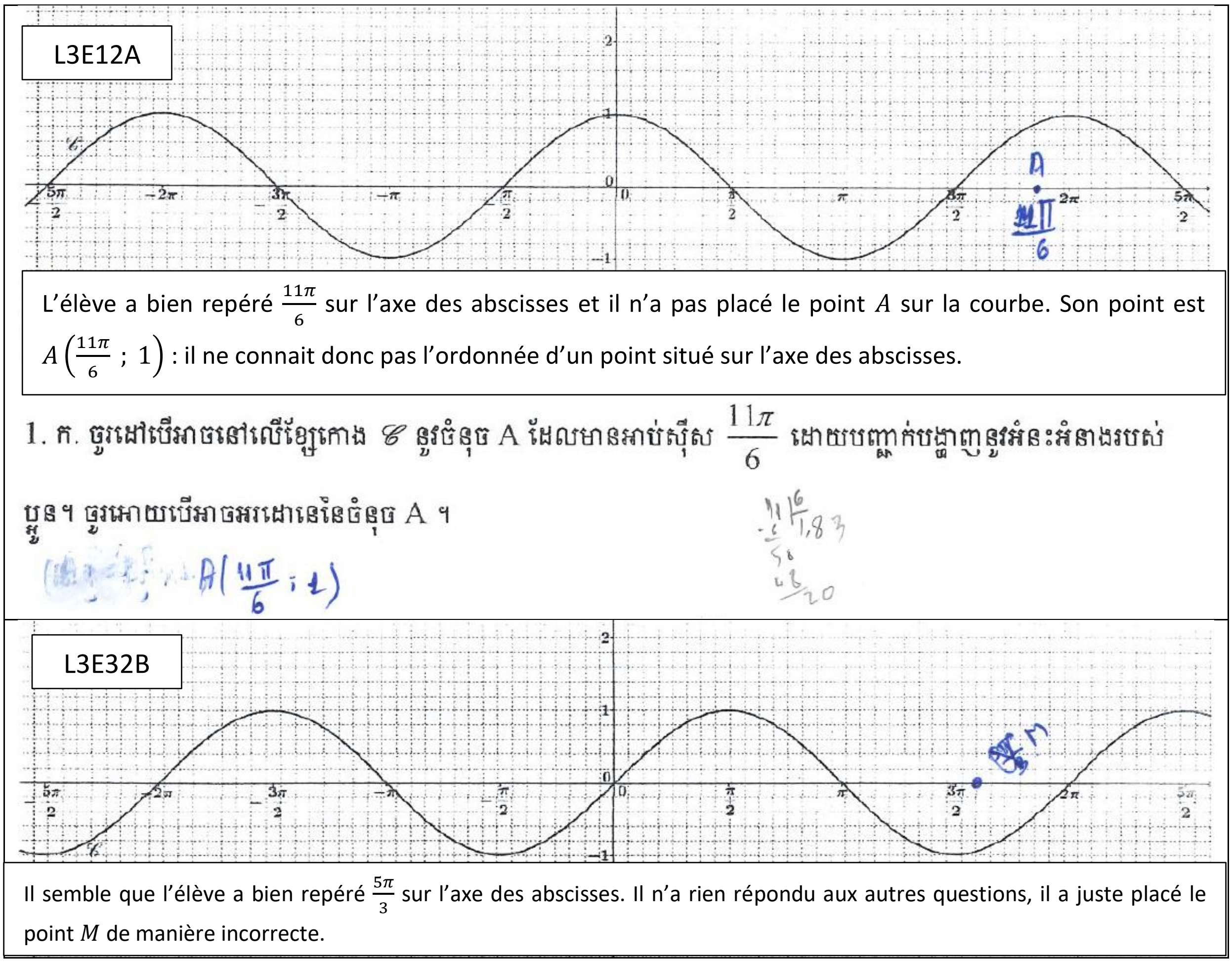
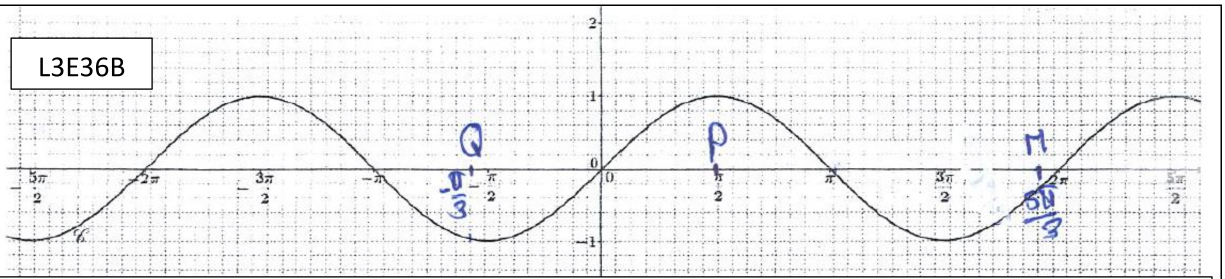


Figure 130 : Production de l'élève L3E25B

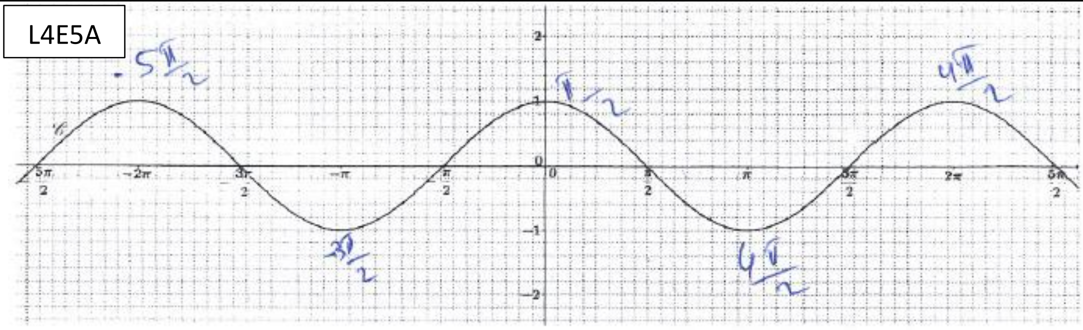




L'élève **L3E36B** n'a pas bien repéré $\frac{5\pi}{3}$ sur l'axe des abscisses où il a placé le point M. Quel sens a-t-il donné à $M = 0{,}3$? Il n'y a aucune trace pour les autres questions. Nous ne trouvons que sa trace donnée dans le graphique.

1. ក. ចូរដៅបើអាចនៅលើខ្សែកោង $\mathscr{C}$ នូវចំនុច M ដែលមានអាប់ស៊ីស $\frac{5\pi}{3}$ ដោយបញ្ជាក់បង្ហាញនូវអំនះអំនាងរបស់ប្អូន។ ចូរអោយបើអាចអរដោនេនៃចំនុច M ។ $M=0.3$

Figure 131 : Placer le point A (ou M) sur l'axe des abscisses – élèves de 12e



1. ក. ចូរដៅបើអាចនៅលើខ្សែកោង $\mathscr{C}$ នូវចំនុច A ដែលមានអាប់ស៊ីស $\frac{11\pi}{6}$ ដោយបញ្ជាក់បង្ហាញនូវអំនះអំនាងរបស់ប្អូន។ ចូរអោយបើអាចអរដោនេនៃចំនុច A ។ $\frac{\pi}{2}$

Car l'ordonnée du point A est égale à $\frac{\pi}{2}$

ខ. ចូរដៅបើអាចនៅលើខ្សែកោង $\mathscr{C}$ នូវចំនុច B ដែលមានអរដោនេ $\frac{11\pi}{6}$ ដោយបញ្ជាក់បង្ហាញនូវអំនះអំនាងរបស់ប្អូន។ ចូរអោយបើអាចអាប់ស៊ីសនៃចំនុច B ។ $-\frac{\pi}{2}$

Car l'ordonnée du point B est égale à $-\frac{\pi}{2}$

គ. ចូរដៅបើអាចនៅលើខ្សែកោង $\mathscr{C}$ នូវចំនុច C ដែលមានអាប់ស៊ីស $\left(\frac{11+6\times 2016}{6}\pi\right)$ ដោយបញ្ជាក់បង្ហាញនូវអំនះអំនាងរបស់ប្អូន។ ចូរប្រៀបធៀបអរដោនេនៃ A និងនៃ C ។ $\frac{\pi}{2}$ $C = \frac{-5\pi}{2}$

Sur la courbe $\mathscr{C}$, le point C a pour abscisse $\frac{\pi}{2}$ et $C = \frac{-5\pi}{2}$

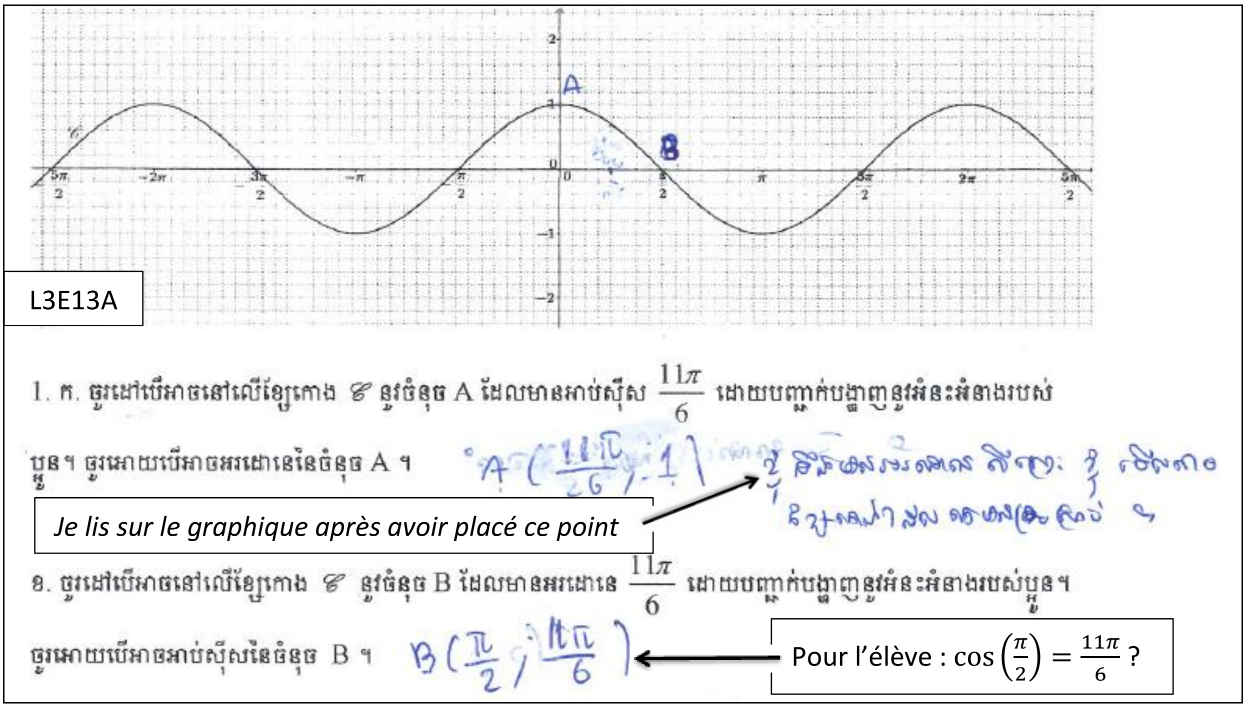


Figure 132 : Réponses non identifiables – élèves de 12^e^

4.2.4.2. **Élève de 11^e^**

Deux tiers des élèves environ (34 élèves sur 57) ne font pas l'exercice III.1.

Parmi les 23 élèves qui le font de manière vraiment incomplète, 3 (L3e5A, L3e8A, L4e23B) ont donné des réponses non identifiables. Nous ne traitons que les 20 autres parmi ces 23 élèves.

Question « 1.a » :

<table>
<tr><td rowspan="3">1.a.</td><td colspan="6">Pouvoir placer le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$</td><td rowspan="3">Ne pas pourvoir placer le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$: 1</td></tr>
<tr><td colspan="2">C : 5</td><td colspan="2">NC : 6</td><td colspan="2">A (ou M) non placé sur $\mathscr{C}$: 8</td></tr>
<tr><td>y_A(ou y_M) donné par :
LG : 1
VE : 1 (C)
NC : 1</td><td>y_A(ou y_M) non donné : 3</td><td>y_A(ou y_M) donné par :
LG : 1
VE : 1 (NC)</td><td>y_A(ou y_M) non donné : 4</td><td>y_A(ou y_M) donné par :
LG : 1</td><td>y_A(ou y_M) non donné : 7</td></tr>
</table>

(C : correct ; NC : non correct ; LG : lecture graphique ; VE : valeur exacte)

Tableau 53 : Effectif réparti à la question 1.a – élèves de 11^e^

Parmi les 20 élèves : 5 semblent placer raisonnablement le point A (ou M) sur la courbe $\mathscr{C}$, 6 placent incorrectement ce point, 8 le placent sur l'axe des abscisses, et 1 (L3e20B) dit que « on ne peut pas placer ce point sur la courbe donnée » sans justification. Seuls deux élèves (L3e4A, L4e1A) ont donné la bonne réponse pour l'ordonnée du point A. Deux élèves (L4e1A, L4e18B) reconnaissent que l'ordonnée du point A (ou M) est $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ (ou $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)$), avec une erreur pour L4e18B (voir *Figure 133*).

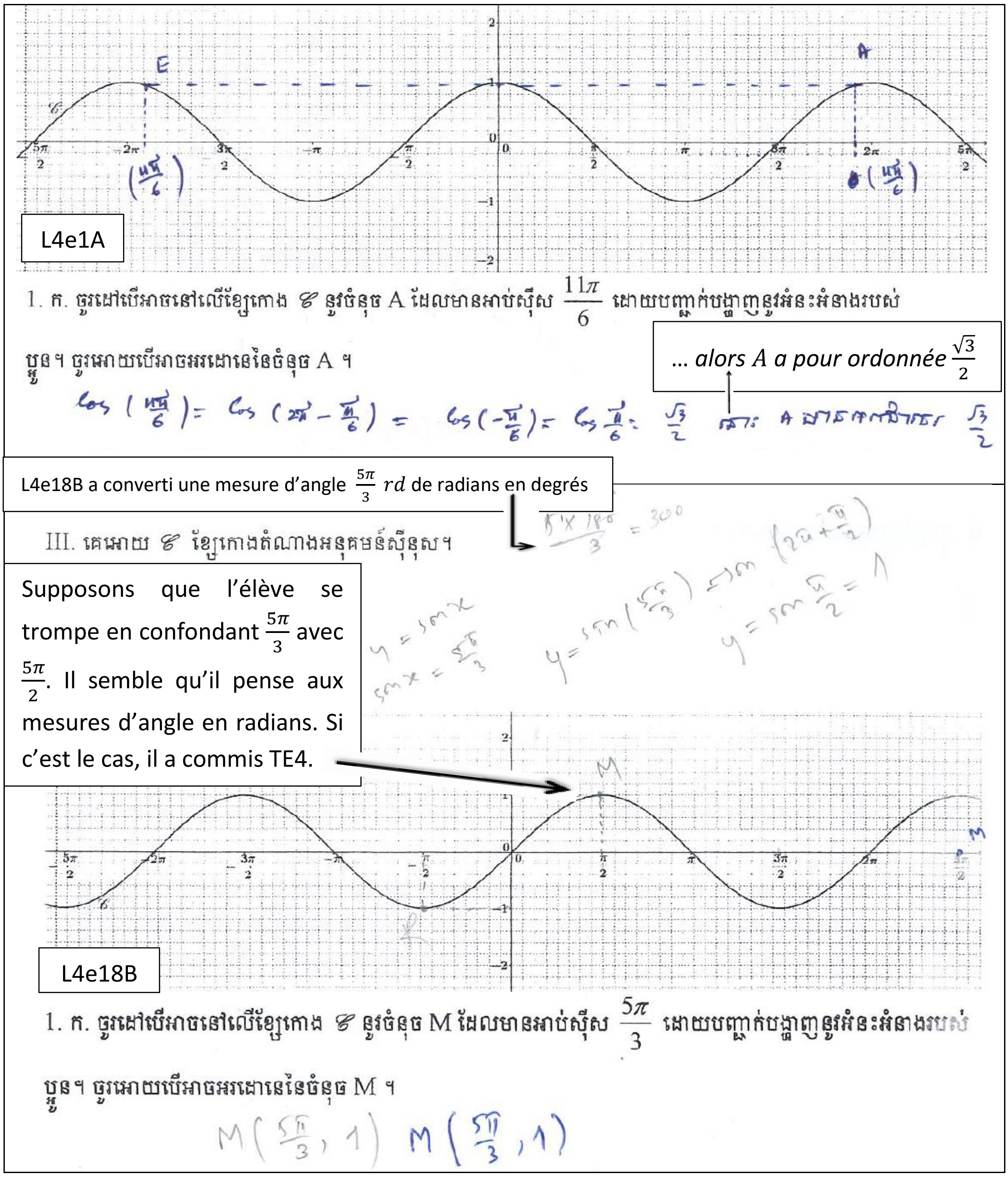


Figure 133 : Ordonnée du point A (ou M) sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) – élèves de 11e

Remarques :

- 8 élèves ont placé le point A (ou M) sur l'axe des abscisses : 5 l'ont placé au point $\left(\frac{11\pi}{6}\,;0\right)$ (ou $\left(\frac{5\pi}{3}\,;0\right)$) ; 1 (L3e9A), au point $(\pi\,;0)$ en justifiant que $\pi = \frac{11\pi}{6}$; 2, ailleurs.
- L'élève L3e10A a placé le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ sur la courbe donnée au point d'abscisse 2π, et il a répondu que le point A avait pour ordonnée 1.
- L'élève L4e18B a placé le point M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$ en deux positions différentes dans le graphique donné : sur l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{5\pi}{2}$, et aussi, sur la courbe

donnée au point $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$. Avec sa trace écrite, il reconnaît que l'ordonnée du point M est sin $\left(\frac{5\pi}{3}\right)$; mais il a fait une erreur numérique dans le calcul et il a trouvé $y_A = 1$, (voir *Figure 133*). Quel sens l'élève a-t-il donné aux points $\left(\frac{5\pi}{3};1\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ sur la courbe de la fonction sinus ? Supposons que dans sa réflexion, $\frac{5\pi}{3}$ « était » $\frac{5\pi}{2}$, cela montre qu'il a commis TE4 parce qu'il a placé son point $M\left(\frac{5\pi}{3};1\right)$ à la place du point $\left(\frac{\pi}{2};1\right)$ sur la courbe.

- L'élève L4e2A a placé le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ sur la courbe au point $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$ et il n'a pas donné l'ordonnée du point A, (voir *Figure 137*).

Question « 1.b » :

1.b.	B (ou N) placé sur la courbe $\mathscr{C}$: 4 (sans justification)	Inexistence du point B (ou N) sur la courbe $\mathscr{C}$: 2	Autre (non attendu) : 6 (avec existence du point B (ou N))	NPF
		Justification comme correcte : 1 Sans justification : 1	Placer B (ou N) sur l'axe des abscisses : 1 Placer B (ou N) sur l'axe des ordonnées : 4 Ne pas placer B (ou N) sur le graphique : 1	8

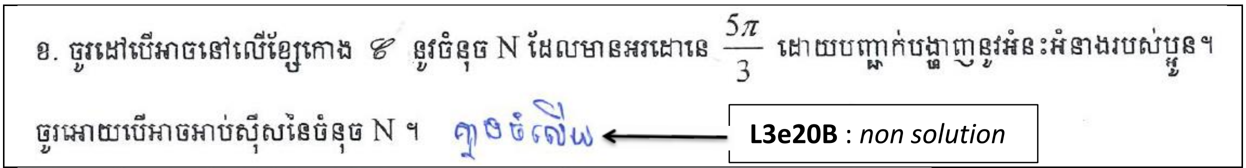
(NPF : n'a pas fait)

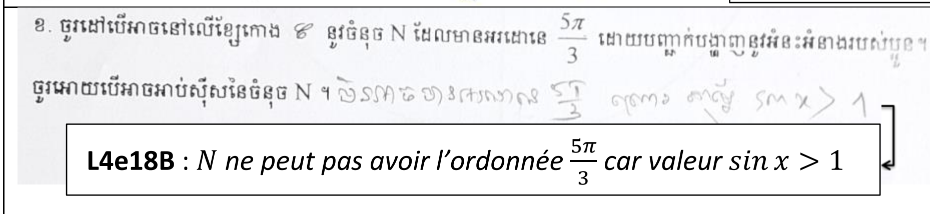
<u>*Tableau 54*</u> : Effectif réparti à la question 1.b – élèves de 11^{e}

8 élèves parmi les 20 ne font pas la question « 1.b ». Parmi les 12 élèves qui la font :

- 2 (L3e20B, L4e18B) pensent à l'inexistence de ce point, (voir *Figure 134*) ;
- 4 placent le point B (ou N) sur la courbe $\mathscr{C}$ sans justification, (voir *Figure 135*) ;
- 1 (L4e19B) place le point N sur l'axe des abscisses, au même point M placé précédemment, en justifiant que : « le point N a pour abscisse $\frac{5\pi}{3}$ alors il est confondu avec le point M » ;
- 3 (L3e2A, L3e31B, L3e32B) le placent sur l'axe des ordonnées en un point dont l'ordonnée est comprise entre 1 et 2, et 1 (L4e22B), en un point dont l'ordonnée est comprise entre -1 et 0, (voir *Figure 136*) ;
- 1 (L4e4A) ne le place pas dans le graphique donné et il a juste répondu à la question 1.b en écrivant : « l'abscisse du point B est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ », sans justification.

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des productions des élèves.





L'élève L4e18B aurait-il voulu dire que sin $x < 1$? Si c'est le cas, sa réponse peut être considérée raisonnable.

Figure 134 : Inexistence du point B (ou N) sur la courbe donnée – élèves de 11e

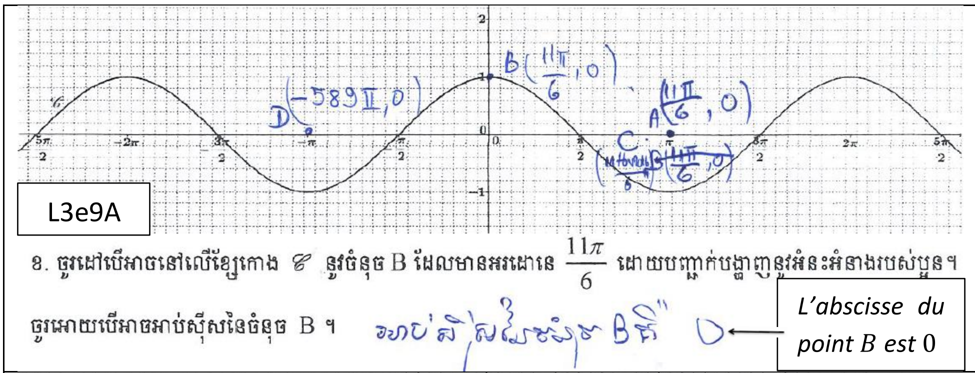
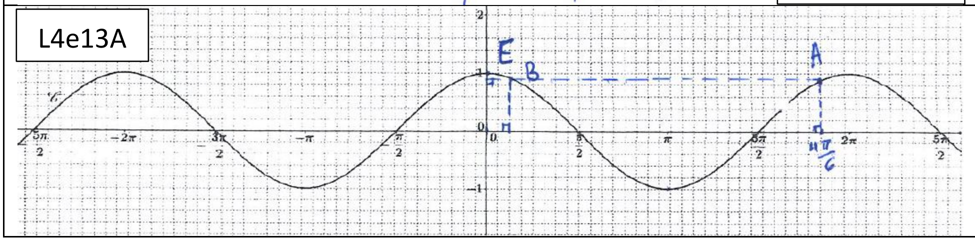
	L'élève **L3e9A** a fait une confusion entre l'abscisse et l'ordonnée de son point B, en inversant 0 et $\frac{11\pi}{6}$. Par ailleurs, il l'a placé au point $(0\,;1)$.
	L'élève **L4e13A** a placé le point B sur la courbe donnée de telle sorte que A et B ait la même ordonnée. Il n'a pas donné de justification ni l'abscisse du point B.

Figure 135 : Pouvoir placer le point B (ou N) sur la courbe donnée – élèves de 11e

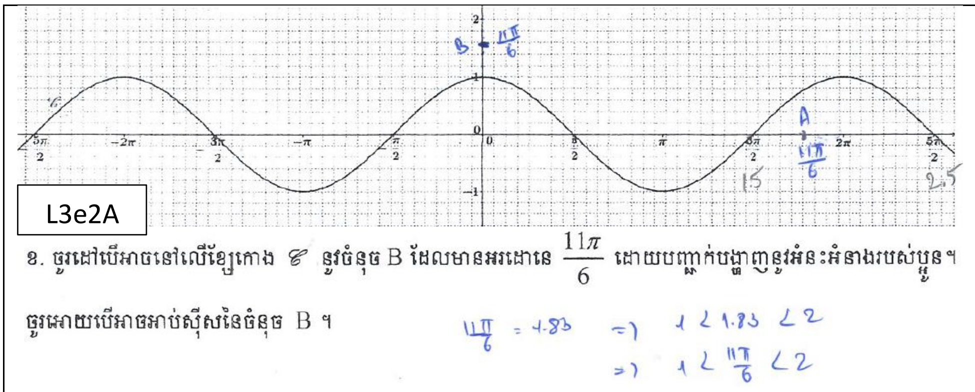
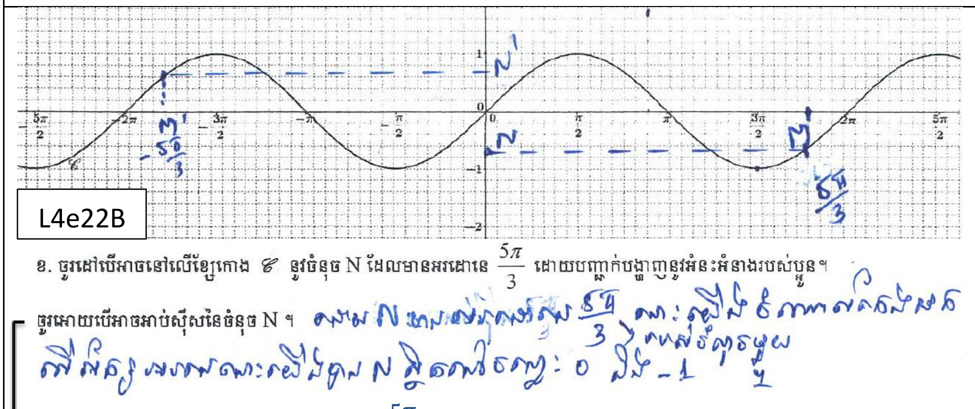
	Il semble que **L3e2A** considère que la mesure de longueur unité de l'axe des abscisses est $\frac{\pi}{2}$; pour lui, $\frac{11\pi}{6} = 1{,}83$. Ce nombre 1,83 est en fait une valeur approchée du quotient $\frac{11}{6}$. À la question 1.b, il n'a pas compris la consigne en plaçant son point B sur l'axe des ordonnées.
 *Comme N a pour ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ alors on projette orthogonalement sur l'axe des ordonnées et on obtient N qui se situe entre 0 et -1.*	Quel sens L4e22B a-t-il donné à $\frac{5\pi}{3}$? pour l'ordonnée d'un point ? Nous n'avons pas compris son affirmation donnée à la question 1.b. Dans le graphique, son point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ a été placé sur l'axe des ordonnées de même ordonnée que le point M qui est d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$. Remarquons que dans l'énoncé, il n'y a ni point M' ni point N'.

Figure 136 : Placer le point B (ou N) sur l'axe des ordonnées – élève de 11e

Question « 1.c » :

1.c.	C (ou P) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$: 5			$C \notin \mathscr{C}$: 1	Aucune réponse : 14
	Pouvoir placer C (ou P) : 4	Ne pas dire si l'on peut placer C (ou P) : 1	Ne pas pouvoir placer C (ou P) et Existence de ce point sur la courbe $\mathscr{C}$: 0		

Tableau 55 : Effectif réparti à la question 1.c – élèves de 11[e]

1.c.	$y_C = y_A$ (ou $y_P = y_M$) : 2 dont 1 avec un raisonnement correct (Stratégie 2.1)	$y_C \neq y_A$ (ou $y_P \neq y_M$) : 0	Ne pas dire si $y_C = y_A$ ($y_P = y_M$) : 4

Tableau 56 : Comparaison des ordonnées des points à la question 1.c pour les 5 élèves qui ont l'idée « C (ou P) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ » - élèves de 11[e]

14 élèves sur 20 ne font pas cette question « 1.c ». Parmi les 6 élèves qui la font :

- 4 placent le point C (ou P) sur la courbe $\mathscr{C}$, dont 3 (L3e20B, L4e4A, L4e18B) commettent TE4 ; remarquons que ces trois élèves précisent que les points A et C (ou, M et P) sont confondus sans le justifier, et qu'ils placent le point C (ou P) à la même position que le point A (ou M) déjà placé précédemment sur la courbe), (voir *Figure 138*). 1 autre élève (L4e2A) place le point C au point $\left(\frac{5\pi}{2} ; 0\right)$ en justifiant incorrectement et de manière incompréhensible (L4e2A : A est l'axe de symétrie de C, où son point A a été placé au point $\left(\frac{\pi}{2} ; 0\right)$), (voir *Figure 137*).
- Seul l'élève L4e1A a correctement répondu à la question en utilisant la stratégie 2.1 attendue. Il n'a pas répondu à une partie de la question 1.c portant sur l'existence du point C et sur l'impossibilité de le placer sur la courbe donnée, (voir *Figure 139*).
- L'élève L3e9A a placé le point C à la même position que le point A sur l'axe des abscisses, et il a répondu que « A et C sont confondus » sans le justifier, (voir *Figure 135*). L'erreur commise par cet élève est causée par une confusion de plusieurs concepts y compris TE4 de manière implicite.

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des productions des élèves.

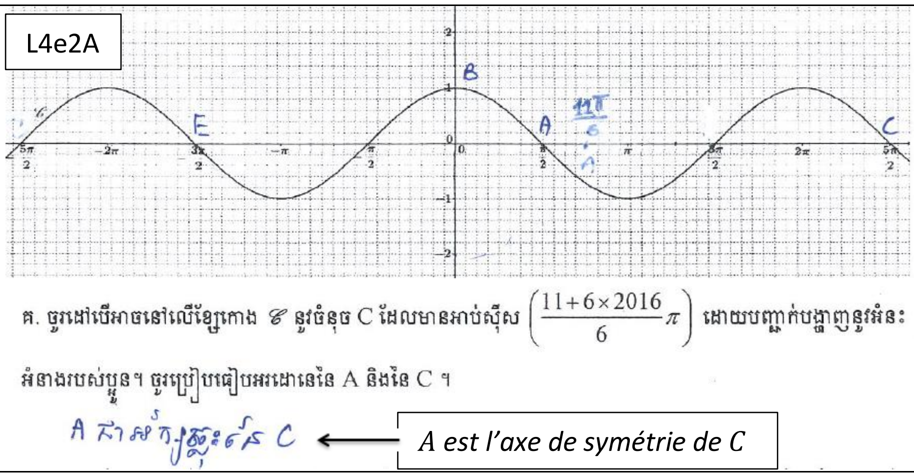
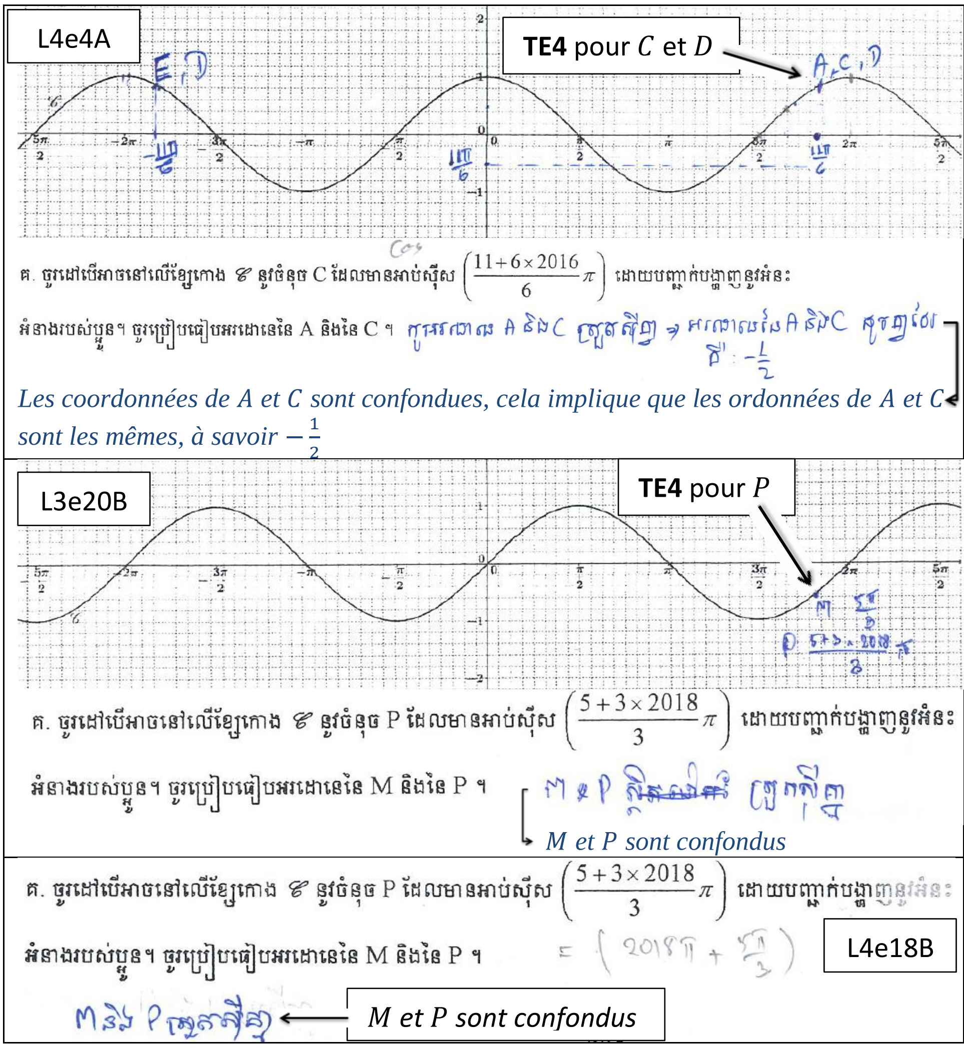


Figure 137 : Placer le point C au point $\left(\frac{5\pi}{2} ; 0\right)$ – élève de 11[e]



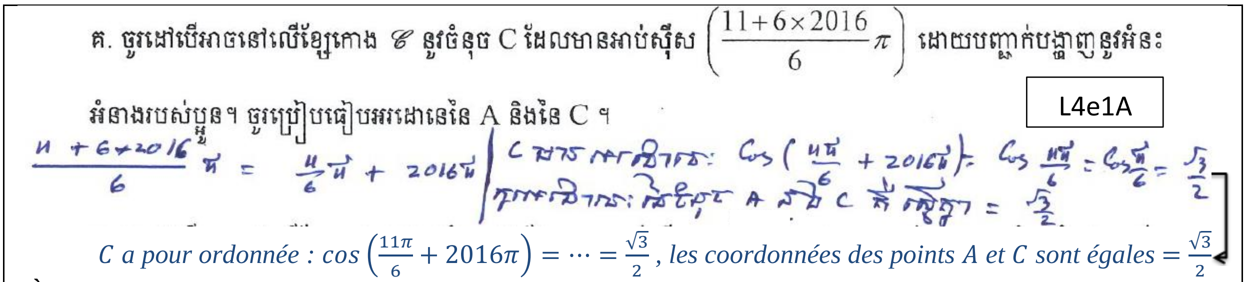
L4e4A a commis TE 4 pour le point C. Comme il a donné une réponse incorrecte pour l'ordonnée du point A à la question 1.a, l'ordonnée du point C donnée n'est pas la bonne.

L3e20B a commis TE4.

Il n'y a pas de brouillon qui nous permettrait savoir la raison pour laquelle L4e4A et L3e20B disent que les points A et C (ou, M et P) sont confondus. Peut-être, est-il visuellement, évident pour eux que x_C (ou x_P) peut s'écrire simplement sous forme $x_C = x_A + 2k\pi$ (ou $x_P = x_M + 2k\pi$), comme L4e18B l'a clairement indiqué.

L4e18B n'a pas placé le point P sur la courbe. Sa transformation de l'abscisse de P est correcte. À notre avis, il a pensé plutôt à ce qui se passe sur le cercle trigonométrique et il a commis TE4.

Figure 138 : **TE4** à la question 1.c – élèves de 11e



(À notre avis, concernant la trace écrite donnée par cet élève à la deuxième ligne à droite, il aurait voulu dire : les ordonnées des points A et C sont égales.)

Figure 139 : **Stratégie 1** attendue, adoptée par l'élève L4e1A, à la question 1.c – élèves de 11e

Question « 1.d » :

1.d.	D (ou Q) se situe sur la courbe $\mathscr{C}$: 4			$D \notin \mathscr{C}$: 1	Aucune réponse : 15
	Pouvoir placer D (ou Q) : 2	Ne pas dire si l'on peut placer D (ou Q) : 1	Ne pas pouvoir placer D (ou Q) et Existence de ce point sur la courbe $\mathscr{C}$: 1		

Tableau 57 : Effectif réparti à la question 1.d – élèves de 11e

1.d	$y_D = y_A$ (ou $y_Q = y_M$) : 2 dont 1 avec raisonnement correct (Stratégie 2.1)	$y_D \neq y_A$ (ou $y_Q \neq y_M$) : 0	Ne pas dire si $y_D = y_A$ ($y_Q = y_M$) : 1	Ne pas comparer y_D et y_A (y_Q et y_M) : 1

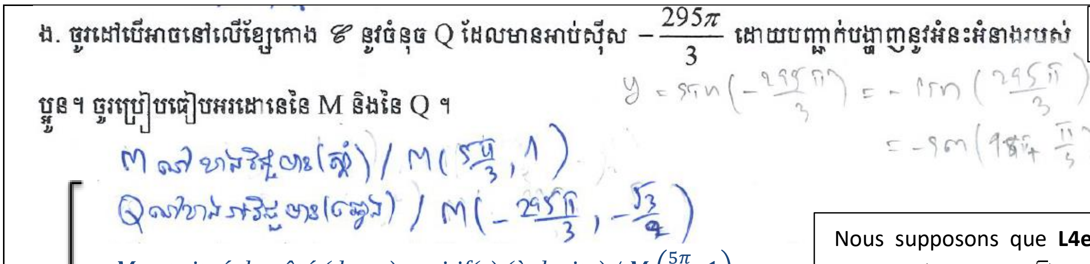
Tableau 58 : Comparaison des ordonnées des points à la question 1.d pour les 4 élèves qui ont l'idée « D ou Q se situe sur la courbe $\mathscr{C}$ »

15 élèves sur 20 ne font pas cette question « 1.d ». Parmi les 5 élèves qui la font :

- 2 (L3e15A, L4e4A) placent le point D sur la courbe $\mathscr{C}$: L2e15A place ce point D sur la courbe donnée « au bout » de cette courbe sans le justifier (remarque : cet élève n'a pas répondu à la question 1.c.) ; L4e4A place ce point D sur la courbe en deux positions, (voir *Figure 138*) et il répond en écrivant seulement : « les ordonnées des points A et D ont la même valeur ».
- 1 (L4e18B) juste indique avec sa trace écrite que le point M est situé du côté des x positifs et le point Q, du côté des x négatifs sans justification. Cet élève a correctement déterminé la valeur exacte de l'ordonnée du point Q en utilisant la stratégie 2.1 (il a bien mobilisé des propriétés du sinus des mesures en radians d'angles orientés), (voir *Figure 140*).
- Seul l'élève L4e1A a fourni une preuve correcte en utilisant la stratégie 2.1 attendue. Il n'a pas répondu à une partie de la question 1.d portant sur l'existence du point D et sur l'impossibilité de le placer sur la courbe donnée, (voir *Figure 140*).
- L'élève L3e9A a placé le point D sur l'axe des abscisses au point $(-\pi\,;0)$, et il a répondu que « A et D ont pour distance de l'un à l'autre 2 tours » sans le justifier, (voir *Figure 135*). Quel sens a-t-il donné à l'expression « 2 tours » par rapport aux positions de A et de D qu'il a placés sur l'axe des abscisses ? À quoi a-t-il pensé en ce qui concerne le terme « tour » ?

Nous présentons ci-dessous quelques extraits des productions des élèves.

L4e18B

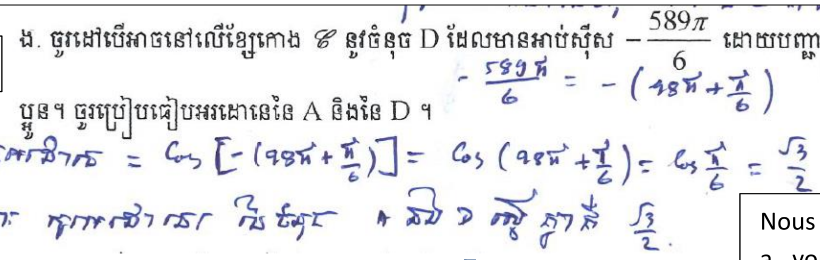


M est situé du côté (des x) positif(s) (à droite) / $M\left(\frac{5\pi}{3}, 1\right)$

Q se situe du côté (des x) négatif(s) (à gauche) / $M\left(-\frac{295\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Nous supposons que **L4e18B** a voulu écrire $Q\left(-\frac{295\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

L4e1A



D a pour coordonnée = $\cos\left[-\left(98\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \cdots = \frac{\sqrt{3}}{2}$

alors les coordonnées des points A et D sont égales, ayant pour valeur $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Nous supposons que **L4e1A** a voulu écrire le terme « ordonnée(s) » au lieu du terme « coordonnée(s) ».

Figure 140 : Réponses à la question 1.d – élèves de 11^e

À la question 1.d, L4e18B n'a pas conclu que les ordonnées des points Q et M ont la même valeur ou non.

À l'égard des questions « 1.c » et « 1.d », nous pouvons émettre la conclusion suivante :

- la plupart des élèves de 11^e ont des difficultés pour le travail graphique.
- la connaissance sur « la traduction de l'ordonnée du point d'abscisse a de la courbe représentative de la fonction cosinus (resp. la fonction sinus) en $\cos(a)$ (resp. $\sin(a)$) » est peu disponible pour les élèves.
- environ deux tiers des élèves qui ont répondu à ces deux questions ont commis TE4.

4.2.4.3. **Synthèse du dépouillement de l'exercice III.1**

Deux tiers des élèves n'ont pas fait l'exercice III.1, et le nombre des élèves de 11^e et de 12^e qui ont abandonné cet exercice III.1 est important. Il y a peu d'écart sur la mise en fonctionnement des connaissances apprises dans le registre graphique du cadre fonctionnel ($OML_{FoncTrigo}$) entre les élèves de 11^e et de 12^e qui l'ont fait ; néanmoins, les élèves de 11^e réactivent mieux ces connaissances que ceux de 12^e. Rappelons-nous que ces connaissances sont vues en 11^e.

Nous avons prévenu dans l'analyse *a priori* du questionnaire que le travail graphique dans le cadre fonctionnel pose une difficulté pour les élèves cambodgiens. Cela explique que la plupart des élèves ont des difficultés à résoudre la tâche demandée à la question 1.a, et il y a une très petite minorité d'élèves qui ont répondu aux questions qui la suivent. La moitié des élèves de 11^e qui ont répondu aux questions 1.c et 1.d, ont commis TE4.

Les difficultés des élèves cambodgiens confrontés au travail graphique dans le cadre fonctionnel sont vraisemblablement causées par le manque de sollicitation des manuels officiels à réaliser de tels travaux graphiques, ce qui empêche de bien le maîtriser. Rappelons que parmi les élèves qui ont fait l'exercice III.1, 3 élèves de 12^e sur 20 et 8 élèves de 11^e sur 20 ont placé, par exemple à la question 1.a, le point A (ou M) sur l'axe des abscisses bien que dans l'énoncé nous proposons clairement de placer, si possible, sur la courbe donnée connaissant son abscisse. Cela n'est pas le cas pour la France, même si 1 élève de Terminale Scientifique sur 36 qui a commis cette même erreur.

Nous pouvons penser que la plupart des élèves cambodgiens ont des difficultés à réaliser un travail graphique dans le cadre fonctionnel concernant les fonctions trigonométriques. Nous faisons l'hypothèse que le travail graphique dans le cadre fonctionel pose une difficulté pour les élèves cambodgiens concernant généralement les fonctions au programme du secondaire.

4.2.5. Synthèse du dépouillement des trois premières questions

Nous présentons d'abord un récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les exercices I, II, III.1.

	Exercice I		Exercice II		Exercice III.1		NR ces trois exercices	Total
	NR	RE (catégories a.-f.)	NR	RE (Autre a.-f. et Coord)	NR	Placer un point d'une courbe proposé sur l'axe des x		
12e	19	30	29	26	43	3 (sur 20)	14	63
11e	14	12	18	16	34	8 (sur 20)	9	57

(NR : non réponse ; RE : réponse erronée ; Coord : lien entre les coordonnées et les cos et sin ; catégories a.-f., pp. 260-264 ; Autre a.-d., pp. 241 et Autre e.-f., p. 274)

Tableau 59 : Effectif réparti suivant les exercices I, II, III.1 concernant l'abandon et des réponses non identifiables – élèves de 12e et de 11e

L'ensemble des résultats du dépouillement du questionnaire révèle bien les difficultés des élèves cambodgiens relatives aux connaissances mathématiques. Le nombre d'abandons en cours de questions est très important d'une part, et d'autre part, parmi les élèves qui y ont répondu, les réponses sont peu identifiables, notamment chez les élèves de 12e (correspondant Terminale Scientifique en France). Il y a peu d'élèves qui ont commis TE1 (Exercice I – 3 élèves de 11e sur 31), TE4 (Exercice III.1 – 4 élèves de 11e sur 20) ; et aucun élève n'a commis TE2, (voir *Tableau 60*). Environ un tiers des élèves de 11e ont commis TE3 (Exercice I – 12 élèves de 11e sur 31). Nous pouvons dire que trois des quatre types d'erreurs ne sont pas valables pour les élèves cambodgiens, avec l'hypothèse qu'ils n'ont pas assez de connaissances pour commettre TE1, TE2 et TE4 qui nécessitent un minimum de connaissances mathématiques. Nous faisons l'hypothèse que l'angle droit (TE3) pose une difficulté pour des élèves cambodgiens.

	Exercice I				Exercice III.1			Total
	NF	F relié à la Str 1.1	TE1	TE3	NF	F	TE4	
12e	19	14	0	2	43	20	0	63
11e	14	31	3	12	34	23 (20 à traiter)	4	57

(NF : non fait ; F : fait ; Str : stratégie)

Tableau 60 : **TE1**, **TE3**, **TE4** apparus dans les exercices I et III.1 – élèves de 12e et de 11e

4.3. Comparaison et conclusion sur le questionnaire

Dans l'ensemble, les élèves cambodgiens ont éprouvé plus de difficultés que les élèves français pour traiter le questionnaire. Du côté cambodgien, le nombre d'abandons en cours de questions est important d'une part, et d'autre part, parmi les élèves qui ont répondu, certains, en nombre non négligeable, ont donné des réponses non identifiables, notamment les élèves de 12e. Du côté français, le nombre d'abandons au milieu des questions est plus faible et il y a peu de réponses non identifiables. Cependant, chez les élèves français comme cambodgiens, se manifestent explicitement d'une part une difficulté à mettre en fonctionnement des connaissances apprises, et d'autre part, une confusion entre des concepts institutionnalisés du secondaire reliés à la trigonométrie et aux fonctions cosinus et sinus. En effet, dans chaque question du questionnaire, l'élève doit trouver une OML pertinente parmi les $OML_{Triangle}$, OML_{CTrigo}, $OML_{FoncTrigo}$, pour accomplir une tâche demandée, voire changer d'OML.

La trigonométrie dans un triangle quelconque ($OML_{TriangleQ}$) est une extension de la trigonométrie dans le triangle rectangle ($OML_{TriangleR}$). Le dépouillement de l'exercice I montre que la trigonométrie dans le triangle rectangle est disponible pour les élèves de Terminale Scientifique (Fr) et pour les élèves de 11^e (Cm), mais pas pour des élèves de 12^e (Cm). *Le cosinus et le sinus de l'angle droit posent une difficulté pour les élèves français et cambodgiens*. Cette difficulté est-elle causée par la tâche demandée dans un tel registre graphique dans lequel ne s'appliquent pas les formules du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle ? Cette tâche révèle explicitement une difficulté à mettre en fonctionnement les connaissances apprises : parmi les élèves ayant répondu à l'exercice I, environ la moitié des élèves français ont commis TE3, et environ un tiers des élèves de 11^e cambodgiens l'ont commis (il n'y a rien à dire pour les élèves de 12^e). Environ un quart des élèves de Terminale Scientifique réactivent les connaissances dans l'OML_{CTrigo}, vues depuis la Seconde en France, et un quart des élèves de 11^e (Cm) réactivent ces connaissances vues en 10^e (angle géométrique dont la mesure en degrés est comprise entre 0 et 180 degré(s)) et vues (angle orienté) dans l'année d'étude au Cambodge, dans une telle situation.

Le dépouillement de l'exercice II montre que le cosinus et le sinus d'un angle orienté (OML_{CTrigo} – vus en 1^{re} Scientifique Fr, en 11^e Cm) sont peu disponibles car un quart des élèves français mettent en fonctionnement l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point à l'aide du cosinus et du sinus, ainsi qu'un quart des élèves cambodgiens de 11^e ; mais cela n'est pas disponible pour les élèves cambodgiens de 12^e. Nous attendions dans l'analyse *a priori* que cette connaissance soit disponible pour tous les élèves. Certains élèves réactivent d'autres connaissances, par exemple : $OML_{TriangleR}$ (vues au collège Fr, en 10^e Cm).

Le dépouillement de l'exercice III.1 montre que dans la réflexion des élèves, il y a un lien entre l'$OML_{FoncTrigo}$ et l'OML_{CTrigo} : il semble que dans la réflexion, l'OML_{CTrigo} soit un instrument de base pour accomplir les tâches demandées dans l'$OML_{FoncTrigo}$, d'une part, et d'autre part, qu'il y ait une ambiguïté chez les élèves sur les objets mathématiques articulés dans l'OML_{CTrigo} : « angle » et « mesures d'angle en radians » (voir la sous-section 4.1.6).
Dans l'OML_{CTrigo}, les nombres réels de différence un multiple de 2π qui sont les mesures d'un même angle orienté ont un même point image sur le cercle trigonométrique, associé à l'angle orienté. Dans l'$OML_{FoncTrigo,}$ dans le registre graphique, ces nombres réels de différence un multiple de 2π sont répartis sur l'axe des abscisses et ont, par la fonction cosinus/sinus, des points images situés en différentes positions sur sa courbe représentative de telle sorte qu'entre deux points images choisis, l'un soit l'image de l'autre par la translation de vecteur $2k\pi\vec{\imath}$ où k est un nombre entier relatif. Nous faisons l'hypothèse que les connaissances mentionnées précédemment ne sont pas assimilées de manière correcte par l'élève : il y a une ambiguïté de compréhension dans l'apprentissage des élèves et nous pouvons penser que certains élèves ont des difficultés à interpréter ces connaissances de l'OML_{CTrigo} en connaissances de l'$OML_{FoncTrigo}$ dans le registre graphique. Nous pouvons penser qu'apparaît cette ambiguïté, reliée avec TE4, pour un tiers des élèves français et environ la moitié des élèves cambodgiens de 11^e, (parmi des élèves qui ont répondu à l'exercice III.1 ; plus précisément aux questions 1.c et 1.d). Relativement aux connaissances mentionnées précédemment, à l'ambiguïté révélée (vis-à-vis du questionnaire) et aux programmes et manuels étudiés (chapitre 2), nous pensons préparer une situation didactique

afin d'expliciter au mieux le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (OML_{CTrigo} – Seconde et 1re Scientifique) vers les fonctions cosinus et sinus ($OML_{FoncTrigo}$ – Terminale Scientifique).

L'apparition du TE2 chez des élèves français à l'exercice I et l'exercice II du questionnaire est à noter (rappelons-nous qu'un quart des élèves français ont commis TE2 consistant en une « Confusion des valeurs des ***cosinus et sinus d'un angle*** avec des valeurs des ***cosinus et sinus d'un nombre réel*** »). Il semble que les connaissances dans l'$OML_{FoncTrigo}$ aient une influence, accompagnée par une ambiguïté, sur celles dans l'$OML_{Triangle}$ et dans l'OML_{CTrigo}, (voir la sous-section 4.1.6). Rappelons-nous que ce TE2 n'apparaît pas chez les élèves cambodgiens (voir la sous-section 4.2.5).

Compte tenu de l'ensemble des résultats obtenus aux trois premiers exercices du questionnaire, trois des quatre types d'erreurs : TE2 ($OML_{Triangle}$ et $OML_{FoncTrigo}$ – OML_{CTrigo} et $OML_{FoncTrigo}$), TE3 ($OML_{Triangle}$ et OML_{CTrigo}) et TE4 ($OML_{FoncTrigo}$ et OML_{CTrigo}) nous intéressent particulièrement car ce sont les trois types d'erreurs qui permettent de mettre en évidence une ambiguïté ou une confusion entre les objets mathématiques étudiés dans les trois OML chez les élèves d'une part et d'autre part une ambiguïté ou un manque d'articulation (ou une articulation implicite) entre les trois OML dans les programmes et les manuels dans les institutions française et cambodgienne du secondaire.

Nous pouvons conclure que les difficultés des élèves, reliées aux savoirs appris sur la trigonométrie ($OML_{Triangle}$ et OML_{CTrigo}) et sur les fonctions sinus et cosinus ($OML_{FoncTrigo}$), proviennent probablement de changements de cadres et d'OML peu (ou pas) explicités. Les objets en jeu seraient peu distingués puisque l'on utilise les mêmes signes : « sin » et « cos ». On peut notamment penser au **radian** : son introduction peu explicitée renforce-t-elle la confusion entre les objets ***angle***, ***mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique*** et ***nombre réel*** ? Nous faisons l'hypothèse que les objets angle, mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique et nombre réel, reliés aux objets cosinus et sinus visés dans le secondaire, ne sont pas explicités de manière rigoureuse dans les programmes et les manuels au lycée, cela en raison de la notion de radian et de la notion d'angles orientés qui sont implicites.

Nous posons la question suivante : peut-on élaborer des situations didactiques pour expliciter les passages entre les différents cadres afin de limiter les confusions ? Nous envisageons alors d'élaborer, dans notre travail de recherche, une situation didactique pour expliciter le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (OML_{CTrigo}) vers les fonctions cosinus et sinus ($OML_{FoncTrigo}$) pour des élèves en Terminale Scientifique, (chapitre5).

Nous interrogeons en particulier les questions cibles suivantes : le passage de la trigonométrie du triangle à la trigonométrie du cercle trigonométrique peut-il être interprété comme une extension ? Comment effectuer le passage crucial de la ***trigonométrie sur le cercle trigonométrique*** (en Seconde et en 1re Scientifique) aux ***fonctions sinus et cosinus*** (en Terminale Scientifique) ?

On pourrait aussi se poser la question de l'existence d'un obstacle didactique provenant de l'appui sur les cosinus et sinus des angles orientés. Nous y reviendrons en conclusion.

Chapitre 5 : **Prélude à une ingénierie didactique**

1. Introduction

Nous avons commencé par étudier le programme d'enseignement de mathématiques, en France, de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire (depuis la 4e jusqu'à la Terminale Scientifique). Puis nous avons élaboré un questionnaire pour des élèves de Terminale Scientifique, et l'avons mis en œuvre en mars 2016 ; nous l'avons aussi fait passer en mars-avril 2017 à des élèves de 11e et de 12e au Cambodge. L'ensemble des résultats du questionnaire nous conduit à concevoir, dans le contexte français, une situation didactique (ou une activité d'approche) afin de faire découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus en Terminale Scientifique, en nous focalisant principalement sur la périodicité.

Les analyses *a priori* et *a posteriori* des réponses au questionnaire, à l'aide des outils d'analyse des tâches de la *Double Approche didactique et ergonomique*, nous conduisent à remarquer particulièrement qu'un tiers des élèves ont commis l'erreur TE4 consistant en une « confusion entre **angles** (ou points sur le cercle trigonométrique) et **nombres réels** de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus) ». Ici, nous voyons qu'il y a une confusion d'appréhension et d'assimilation chez des élèves entre « angle », « mesures d'un angle » et « abscisse » à travers les cinq années d'apprentissage de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus dans le secondaire ; et aussi les conséquences comme le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le triangle rectangle dans le cadre géométrique (voir la section 4.1.3 du chapitre 4, pp. 242-243).

Rappelons d'abord les objets de savoirs importants dans le thème Trigonométrie dans le cercle trigonométrique, vus en Seconde et en 1re Scientifique.

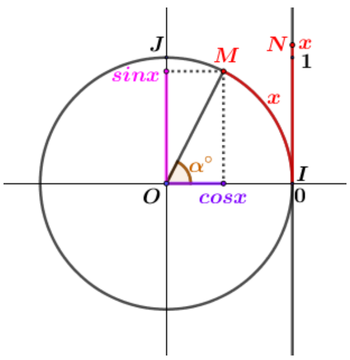
<table>
<tr><td colspan="2">Cosinus et sinus d'un nombre réel ($OML_{CTrigoCSréel}$) en lien avec l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (vus en Seconde), où les notions de fonctions cosinus et sinus sont sous-entendues</td></tr>
<tr><td>
</td><td>x représente l'abscisse d'un point N de la droite numérique $(I\,;\overrightarrow{OJ})$.
Lors de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, le point N correspond à un unique point M du cercle trigonométrique. Ce point M est appelé image du nombre réel x. x représente une mesure de la longueur de l'arc de cercle IM, (notons que l'expression « mesure de la longueur d'un arc de cercle » n'est pas utilisée et que les manuels ne parlent que de « la longueur de l'arc de cercle IM »).
On définit alors :
- le cosinus du nombre réel x, noté $\cos x$, comme étant l'abscisse du point M ;
- le sinus du nombre réel x, noté $\sin x$, comme étant l'ordonnée du point M.</td></tr>
</table>

Figure 141 : Trigonométrie dans le cercle trigonométrique vue en Seconde

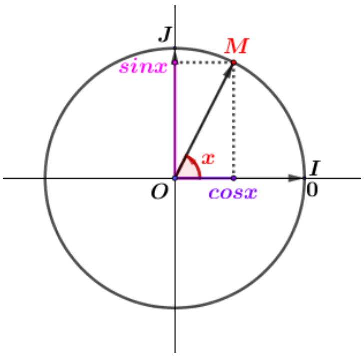
<table>
<tr><th colspan="2">Cosinus et sinus d’un angle orienté de deux vecteurs ($OML_{CTrigoCSAngOr}$) (vus en 1re Scientifique)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>M désigne le point image d’un nombre réel x dans l’enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (vu en Seconde).
x désigne aussi une mesure en radians de l’angle orienté des vecteurs unitaires dans l’ordre $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ (une conséquence issue de la définition des mesures d’un angle orienté de deux vecteurs).
On redonne les définitions du cosinus et du sinus d’un nombre réel x comme ci-après :
- le cosinus du nombre réel x, noté $\cos x$, est l’abscisse du point M ;
- le sinus du nombre réel x, noté $\sin x$, est l’ordonnée du point M.
On définit alors le cosinus et le sinus d’un angle orienté de deux vecteurs comme ci-après :
« Le cosinus et le sinus d’un angle orienté sont le cosinus et le sinus d’une quelconque de ses mesures. »</td></tr>
</table>

Figure 142 : Trigonométrie dans le cercle trigonométrique vue en 1re Scientifique

2. Choix et objectif de la situation didactique

Nous construisons une ingénierie didactique (Artigue, 1989) préliminaire qui est composée de deux situations didactiques enchaînées, la deuxième s’appuyant sur la première :

1. Une situation didactique avec papier-crayon, notée « SD-P ». Cette SD-P se focalise sur les variations de l’abscisse a et celles de l’ordonnée b du point image M sur un cercle $\mathscr{C}$, associé à un nombre réel t par l’enroulement de la droite des réels autour du cercle $\mathscr{C}$.
2. Une situation didactique avec un logiciel géométrique dynamique GeoGebra, notée « SD-G ». Cette SD-G se focalise sur le processus visant à découvrir les propriétés des fonctions cosinus et sinus.

À propos des manuels de Terminale Scientifique (Édition 2012 correspondant au programme 2011), rappelons que les auteurs font découvrir les notions de fonctions sinus et cosinus à partir d’une observation expérimentale sur un cercle trigonométrique dans un registre graphique, soit avec un logiciel de géométrie dynamique soit avec papier-crayon, (voir la sous-section 3.3.2.1 du chapitre2, pp. 123-124). Ils se focalisent plutôt sur l’allure de la courbe représentative (et les variations) de la fonction sinus (et/ou de la fonction cosinus), avec des étapes guidées bien précises. La plupart des manuels font le choix de faire travailler, à l’aide du logiciel GeoGebra, dans une même fenêtre graphique à partir des connaissances anciennes et dans le but d’atteindre les connaissances visées : reconstruction de la figure (cercle trigonométrique et outils nécessaires) et observation expérimentale (allure de la courbe représentative d’une fonction visée).
Nous souhaitons élaborer une activité d’approche plus riche, permettant de nourrir la réflexion de l’élève en Terminale Scientifique et lui permettant de s’approprier les objets d’étude visés, en articulant aussi bien que possible les connaissances anciennes et les connaissances visées (fonction trigonométrique, une sinusoïde, propriétés : périodicité, parité, variations, etc.). Pour cela, nous faisons travailler dans le registre graphique avec les deux fenêtres de graphique, l’une dans le cadre géométrique (cercle), l’autre dans le cadre fonctionnel, disponibles dans GeoGebra. Nous justifierons plus loin les choix faits.

Initialement, nous avons eu l'idée de faire travailler, comme dans la plupart des manuels de Terminale Scientifique, à partir du cercle trigonométrique (rayon 1). Ce que nous souhaitons en plus, c'est faire travailler avec plusieurs tours de déplacement d'un point mobile M sur ce cercle (visant à la notion de périodicité). Ensuite, nous avons réfléchi sur l'étude préalable faite (l'étude praxéologique des programmes et des manuels (chapitre 2), sur les résultats obtenus au questionnaire (chapitre 4)), sur l'étude mathématique (chapitre 3) et sur notre QR4, et nous faisons le choix de travailler avec un cercle de rayon R. Nous souhaitons connaître et nourrir la réflexion de l'élève sur la réactualisation des connaissances apprises, liées à la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (vues en Seconde et en 1re Scientifique), avec l'adaptation des connaissances en jeu à une nouvelle situation consistant à aborder le travail avec un cercle de rayon R avec le même principe d'enroulement de la droite des réels autour du cercle de rayon R que celui de l'enroulement autour du cercle trigonométrique introduit en Seconde. Dans ce but, nous créons un milieu matériel papier-crayon et un milieu matériel constitué par GeoGebra, (Margolinas 1995). Nous abordons la situation didactique avec le milieu matériel papier-crayon en premier puis avec le milieu matériel constitué par GeoGebra parce que :

1. nous souhaitons connaître et nourrir d'abord, dans la SD-P, la réflexion des élèves sur la réactualisation des connaissances apprises liées à la trigonométrie dans le cercle trigonométrique, vues en Seconde et en 1re Scientifique ; remarquons que les connaissances apprises sont séparées dans les classes antérieures, mais qu'ici, les élèves vont assimiler ces connaissances ensemble.
2. le logiciel GeoGebra est programmé et pourrait permettre de diminuer la part nécessaire de réflexion des élèves. Cependant, ce logiciel servira visuellement à vérifier la réflexion faite dans la partie A, et peut-être, à mieux appréhender et à mieux s'approprier le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus grâce à la réflexion en deux temps (papier-crayon puis GeoGebra).

2.1. Pourquoi faisons-nous le choix de travailler avec un cercle de rayon R et non avec le cercle de rayon unitaire ?

Les raisons de notre choix sont les suivantes. Ce choix vise à éclairer le mieux possible les objets de savoir fortement liés et non explicités (mesures de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique, mesures en radians d'un angle orienté de deux vecteurs), vus en Seconde et en 1re Scientifique.

Il y a trois raisons à notre choix de débuter le travail avec un cercle de rayon R :

- *Raison institutionnelle (référence aux programmes en vigueur en France)* : Si nous regardons les objets de savoir visés en Seconde et en 1re Scientifique, les manuels ne proposent que l'étude dans le cercle trigonométrique sans expliciter l'articulation des objets de savoir dans les deux institutions. De plus, nous faisons l'hypothèse que l'introduction de la notion de « radian », peu explicitée, comme étant la nouvelle unité de mesure des angles, renforce la confusion entre les objets **angle**, **mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique** et **nombre réel**.

Rappelons deux choses importantes proposées par des manuels de mathématiques français au lycée :

- La même notation x représente d'abord un **nombre réel** qui est l'abscisse d'un point, de la droite numérique, correspondant à un unique point du cercle trigonométrique dans l'enroulement et une **mesure de la longueur d'un arc de cercle trigonométrique** en Seconde, puis une **mesure en radians d'un angle orienté** en 1re Scientifique, et enfin un **nombre réel** qui est l'abscisse du point décrivant la courbe représentative de la fonction cosinus (resp. sinus) en Terminale Scientifique.
- Deux manuels (Odyssée 2011 et Transmath 2011) définissent le « radian » avec un cercle de rayon R, les autres manuels de 1re Scientifique le faisant dans un cercle unité.

  Cependant, seul le manuel Odyssée 2011 (page 201) précise la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle interceptant cet arc de cercle et le rayon du cercle.

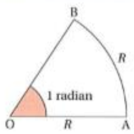
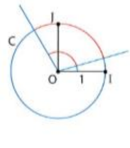
<table>
<tr><th>Extrait du manuel Odyssée 2011 (page 201)</th><th>Extrait du manuel Math'x 2011 (page 288)</th></tr>
<tr><td>DÉFINITION
On appelle radian (symbole : rad) la mesure d'un angle qui intercepte un arc dont la longueur est égale à son rayon R.

</td><td>Définition
Le radian est l'unité de mesure des angles telle que la mesure en radian d'un angle est égale à la longueur de l'arc que cet angle intercepte sur un cercle de rayon 1.
Exemples
Un angle plat mesure π radians ; un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians.

</td></tr>
</table>

Figure 143 : Définitions de « radian » - manuel Odyssée 2011 et manuel Math'x 2011

- *Raison issue des résultats du questionnaire* : Nous insistons tout particulièrement sur un des quatre grands types d'erreurs repérés ayant des incidences sur « grandeur » et « mesures de grandeur » liées notamment au changement des registres graphiques (Cercle trigonométrique *vs*. Courbe représentative de la fonction cosinus ou sinus), commis par un tiers des ***élèves en Terminale Scientifique***, (voir *Figure 97* figurée dans le chapitre 4). Nous souhaitons conduire explicitement les élèves à dissocier les grandeurs « longueur » et « angle », via notre situation didactique.
- *Raison historique* : le concept de sinus se fonde historiquement sur la « trigonométrie dans un cercle de rayon non unitaire ». Remarquons tout particulièrement, que, chez les Indiens, concernant la construction de la table de sinus, Âryabhata (476 ; 550) suppose d'abord que la circonférence et le rayon du cercle sont des grandeurs proportionnelles : le rayon du cercle mesure 3438 unités correspondant à la circonférence du cercle 21600 unités ; l'idée de la notion de « radian » est juste derrière. Avec le concept de radian, on crée une mesure d'angle au centre du cercle à partir de l'*unité de longueur* supposée mesurer aussi la longueur d'arcs du cercle, **l'unité de longueur** étant **le *rayon* du cercle**.

  Voici un extrait portant sur l'approximation du nombre π de la thèse de El Idrissi:

  > Les grandeurs des rayons qui furent utilisés par les Hindous sont de plusieurs ordres, […]. Parmi ces différents choix, le rayon de 3438 unités admet une signification très particulière et témoigne d'une grande originalité.

> En effet, 3438 est une approximation de 3437,7 qui n'est autre que la division de 21600 par 2π, π étant approximativement égal à 3,1416. L'énigme de ce choix disparaît si l'on constate que 21600 est le nombre de minutes contenues dans un cercle (21600 = 360.60). Ceci signifie qu'une unité de mesure quelconque étant choisie, un cercle dont le rayon mesure 3438 unités admet un cercle de 21600 unités. Or, ce choix ne peut être convenable que si l'on considère que la circonférence et le rayon du cercle sont des grandeurs homogènes qui peuvent être mesurées à l'aide de la même unité. Cette démarche est complètement différente de celle de Ptolémée chez qui la circonférence est mesurée en degrés ou en minutes, unité de mesure des arcs de cercle alors que le rayon est mesuré à l'aide d'une unité de mesure de longueurs. (El Idrissi, 1998, page 87)

Nous présentons maintenant les objectifs de la situation didactique :
L'objectif de la SD-P (Partie A) est de ***réactualiser les connaissances acquises sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique*** (vues en Seconde et en 1re Scientifique) qui sont les connaissances de base et les outils indispensables permettant de construire les notions visées, avec ***l'adaptation des connaissances*** en jeu à une nouvelle situation consistant à aborder le travail avec un cercle de rayon R avec le même principe d'enroulement de la droite des réels que celui autour du cercle trigonométrique introduit en Seconde.

L'objectif de la SD-G (Partie B) est de faire ***découvrir les fonctions cosinus et sinus***, à l'aide du logiciel géométrique GeoGebra avec deux fenêtres de graphique (illustrant la transition de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus), y compris la « périodicité », la « parité »[16] et les « variations des fonctions cosinus et sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ ».
Précisons que notre situation didactique prend appui sur la trigonométrie du cercle, sans les angles orientés, en se basant sur le quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ qui est géométriquement représenté par le cercle, pour introduire les notions de fonctions cosinus et sinus.

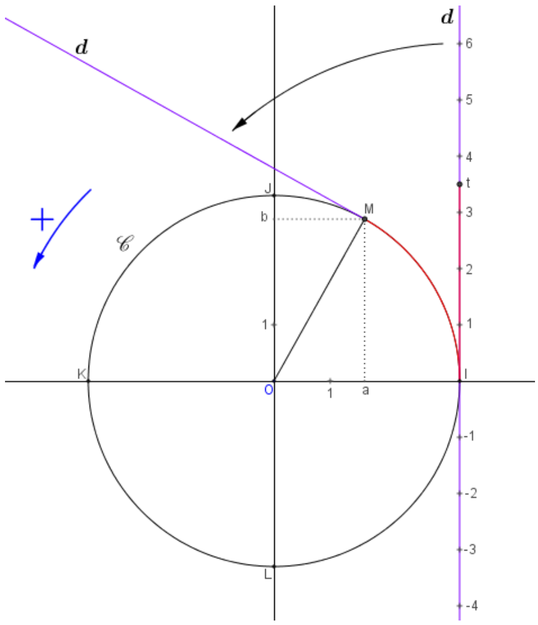
Remarquons que :
- la « périodicité » est un savoir visé en Terminale Scientifique dans la discipline de « mathématiques ».
- « variations des fonctions » est un savoir déjà enseigné dès la Seconde mais il y a, en Terminale Scientifique, une adaptation des connaissances plus élevée suivant la complexité des fonctions étudiées.

2.2. Description de la SD-P – choix didactiques et objectifs

Nous avons créé une figure, à l'aide du logiciel GeoGebra, et un texte décrivant la figure et donnant toute l'information. Nous présentons ci-après notre SD-P toute entière.

[16] La parité ne sera pas discutée dans le cadre de travail de thèse.

Partie A : ***Coordonnées d'un point associé à un nombre réel – lecture graphique sur un cercle***



Dans un repère orthonormé direct d'origine O du plan, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R.
Soit t un nombre réel. On considère le point M image du nombre réel t par l'enroulement de la droite d des réels autour du cercle $\mathscr{C}$. Soient $(a\,;\,b)$ les coordonnées du point M.
À noter que cette droite d est perpendiculaire à l'axe des abscisses au point I et qu'elle est orientée par le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées du repère. (voir la figure ci-contre)

1. Déterminer la longueur d'un tour de déplacement du point M.
Puis, compléter le tableau 1 ci-dessous.
Tableau 1

	1er tour de cercle décrit par le point M				2ème tour de cercle décrit par le point M				3ème tour de cercle décrit par le point M			
M se situe au point	I	J	K	L	I	J	K	L	I	J	K	L
Valeurs exactes de t					$2\pi R$							
Valeur exacte de a												
Valeur exacte de b												

2. Compléter les deux tableaux de variations ci-dessous pour les deux premiers tours.
Variations de a

t	0 $\qquad$ $2\pi R$ $\qquad$ $4\pi R$
a	

Variations de b

t	0 $\qquad$ $2\pi R$ $\qquad$ $4\pi R$
b	

3. Remplir les tableaux de signe de a et de b pour $t \in [0\,;2\pi R]$.

Tableau de signe de a :

t	0 $\qquad$ $2\pi R$
a	

Tableau de signe de b :

t	0 $\qquad$ $2\pi R$
b	

4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Figure 144 : Énoncé de la SD-P

Signalons d'abord notre choix sur l'unité de longueur de telle sorte qu'il y ait une unique unité de longueur pour tout le plan (voir *Figure 144*).

Nous considérons un nombre réel t de la droite des réels d et un point mobile $M(a\,;b)$ d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre O, l'origine d'un repère orthonormé direct du plan, et de rayon R, tel que M soit le point image du nombre réel t dans l'enroulement de la droite des réels autour du cercle $\mathscr{C}$, sans rappeler qu'il s'agit des cosinus et sinus (ici, $a = R\cos(t/R)$ et $b = R\sin(t/R)$). Remarquons que dans cette situation, t désigne la longueur de l'arc IM, d'origine I, dans l'enroulement de la droite numérique dans le sens trigonométrique sur le cercle $\mathscr{C}$.

Nous voulons attirer l'attention sur l'enroulement de la droite des réels d autour du cercle $\mathscr{C}$ (voir *Figure 144*). On vise la correspondance entre un nombre réel t et son point image M qui consiste en un concept relié au quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ (Chapitre 3). Tout est certainement abstrait dans l'idée de l'enroulement de la droite des réels. Nous faisons l'hypothèse que les élèves verront plutôt le point mobile M mais peut-être pas le nombre réel t qui est associé dans l'enroulement à son point image M sur le cercle $\mathscr{C}$. Il est possible que les élèves parlent plutôt du *cosinus du point* M et du *sinus du point* M à la place de l'abscisse et de l'ordonnée de ce point.

Notre objectif principal est de faire étudier a en fonction de t et b en fonction de t, à l'aide du point intermédiaire M. Dans la suite, nous allons expliciter les intentions didactiques et les choix réalisés (voir ci-après aux pages 306-307) :

- *Phase 1* (Question 1 - *Figure 144*) : elle réactive la lecture graphique sur le cercle $\mathscr{C}$, pour les trois premiers tours de déplacement du point M, les coordonnées de M, associée au nombre réel t, aux quatre points fixes spécifiques I, J, K, L du cercle $\mathscr{C}$. Elle vise principalement la notion de périodicité. Nous espérons qu'elle permette d'attirer l'attention des élèves sur le fait que, lorsque le point M parcourt le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens trigonométrique, t prend des valeurs de plus en plus grandes.
  Les connaissances évoquées dans cette phase 1 ont déjà été vues en Seconde, mais cette fois-ci, l'élève va, en autonomie, adapter ses savoirs appris sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique à la lecture graphique sur un cercle de rayon non unitaire.
  Remarquons que dans le « tableau 1 », il existe une indication $2\pi R$ pour une valeur prise par t au deuxième tour de cercle décrit par le point M.
- *Phase 2* (Question 2 - *Figure 144*) : elle met en fonctionnement les variations d'une fonction (connaissances anciennes vues dès la Seconde avec d'autres fonctions) avec une adaptation des connaissances aux variations de a et à celles de b pour les deux premiers tours de déplacement du point M.
  Les connaissances évoquées dans cette phase 2 ont déjà été vues antérieurement. Il ne s'agit pas d'une nouvelle connaissance. Nous disons plutôt qu'il s'agit d'une mise en fonctionnement de connaissances sur les variations, en autonomie de l'élève face à une nouvelle situation.

- *Phase 3* (Question 3 - *Figure 144*) : elle mobilise la lecture graphique et/ou la lecture d'un tableau de variations d'une fonction (connaissances anciennes vues en 1re Scientifique et/ou en Terminale Scientifique) ; ici, la tâche consiste à remplir les tableaux de signes de a et de b pour les valeurs du nombre réel t correspondant au premier tour de déplacement du point M.

  Dans cette phase 3, il ne s'agit pas d'une nouvelle connaissance, mais d'une connaissance à adapter dans une nouvelle situation.
- *Phase 4* (Question 4 - *Figure 144*) : elle est indépendante des trois phases précédentes. Elle vise à mettre en évidence que, dans la situation étudiée, t ne représente pas une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, autrement dit que l'abscisse et l'ordonnée du point M ne sont pas respectivement le cosinus et le sinus du nombre réel t ni $R\cos t$ ni $R\sin t$.

  Les connaissances convoquées dans cette phase 4 ont déjà été vues antérieurement et l'élève doit les enchaîner convenablement pour accomplir la tâche, en supposant qu'il ne connaît pas la propriété de « la relation entre la *longueur d'un arc de cercle*, l'*angle au centre* (dont la mesure est en radians) étant intercepté par l'arc de cercle et le *rayon du cercle* ». L'objectif de la phase 4 est de mettre en évidence « la différenciation entre l'angle au centre et l'arc de cercle ».

Nous précisons maintenant nos choix faits dans la SD-P.

(1) Notre choix de l'indication « $2\pi R$ » qui apparaît dans le « tableau 1 » à la question 1 dans la partie A, (voir *Figure 144*). Pourquoi faisons-nous ce choix ? Et, quel est l'intérêt de cette indication ?

Pour ce choix de l'indication « $2\pi R$ », nous pensons aux deux raisons suivantes :

1. avec l'étude du curriculum du secondaire français, les manuels de Seconde et de 1re Scientifique ne proposent que l'étude de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique, alors en classe, il est probable que l'enseignant procède de même. Si c'est le cas, l'élève ne maîtrise les objets de savoir en jeu que dans le cercle trigonométrique (rayon unitaire). Nous faisons l'hypothèse que l'on n'attire pas l'attention de l'élève sur le fait qu'il y a une relation entre « angle au centre dont la mesure est en radians », « rayon du cercle » et « longueur de l'arc de cercle qui intercepte l'angle au centre ».
2. rappelons-nous qu'il s'agit d'une situation didactique dont le but est de viser un objet de savoir institutionnel et qu'il ne s'agit pas d'un savoir-faire/exercice pour faire maîtriser des objets de savoir déjà institutionnalisés.

Remarque : c'est clair que $2\pi R$ est une longueur mais ce n'est pas évident pour 2π.

L'indication « $2\pi R$ » serait utile pour faire en sorte que certains élèves en profitent pour :

- donner correctement la valeur de la longueur d'un tour de déplacement du point M, sans penser au lien avec le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ ou bien sans savoir comment faire/argumenter pour trouver la bonne réponse (avec la conviction : la longueur d'un tour de déplacement du point M est certainement $2\pi R$) ;
- corriger la réponse qui précède dans le cas où ils auraient donné 2π comme étant la longueur d'un tour du déplacement du point M (et peut-être, appeler à ce moment-là la formule du périmètre d'un cercle de rayon R) ;

- confirmer la réponse précédente sur la longueur d'un tour de déplacement du point M.

(2) dans la partie A (SD-P), nous ne proposons pas tout de suite aux élèves de calculer a et b, coordonnées du point M, en fonction de t et de R quand M est entre I et J alors que nous leur demandons de les déterminer à la question 4 de cette partie. Pour cela, il y a trois raisons précisées ci-après :

1. nous voulons voir la réaction des élèves à la question 1, vont-ils parler immédiatement de l'abscisse et de l'ordonnée du point M en lien avec les **cosinus** et **sinus** comme, par exemple ($\cos t$ et $\sin t$) ou ($R \cos t$ et $R \sin t$) ou ($R \cos\left(\frac{t}{R}\right)$ et $R \sin\left(\frac{t}{R}\right)$) ?
2. nous voulons que les élèves réactualisent et retiennent plutôt que le parcours du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ traduit le lien entre a et t, et celui entre b et t.
3. la tâche proposée à la question 4 est difficile à accomplir pour l'élève sans l'intervention de l'enseignant, parce que sa réalisation nécessite une connaissance importante : « la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la fois à l'angle (dont *la mesure est en* ***radians***) et au rayon du cercle ». Remarquons que cette connaissance est implicite dans l'enseignement de mathématiques dans le secondaire actuel.

Malgré la difficulté pour réaliser la question 4, l'objectif de cette question 4 est important pour expliciter la différence entre la mesure en radians de l'angle au centre et la longueur de l'arc de cercle intercepté par l'angle, autrement dit, la différence entre l'angle au centre et l'arc de cercle.

Nous pouvons conjecturer que face à cette situation, certains élèves apprendront peut-être qu'il y a un seul cas, $R = 1$, où le nombre réel 2π désigne à la fois « la circonférence/le périmètre du cercle » et « l'angle plein en radians du cercle ». Et, à ce moment-là, ils pourraient alors distinguer la longueur d'un arc de cercle d'une mesure en radians de l'angle au centre intercepté par cet arc de cercle.

2.3. Description de la SD-G – choix didactiques et objectifs

Nous faisons le choix de faire travailler dans le registre graphique avec deux fenêtres de graphique de GeoGebra (avec version GeoGebra 5.0) :

- « Graphique 1 » (affiché sur l'écran « Graphique ») situé à gauche, visant à la lecture graphique sur un cercle de rayon R (revoir la figure donnée dans SD-P lorsque l'élève démarre le travail d'observation en choisissant une valeur de R à la première étape, voir *Figure 144*), et
- « Graphique 2 » situé à droite, ayant pour but d'illustrer les connaissances visées dans le registre graphique du cadre fonctionnel, correspondant à $\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$. L'objectif principal est de mettre en évidence le passage de la trigonométrie sur le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus.

Nous présentons d'abord la feuille des questions que nous allons donner aux élèves lors de la mise en œuvre de la SD-G (voir *Figure 145*). Nous voulons préciser qu'il y a deux versions similaires que nous appelons « Version cosinus » et « Version sinus ».

Dans le même contexte que la partie A. Vous trouverez dans la fenêtre de GeoGebra deux graphiques : « Graphique » se situe à gauche, et « Graphique 2 », à droite.

Choisir une valeur du curseur R strictement positive.

1. Modifier les coordonnées du point P : $\boldsymbol{P(t, a)}$. (*On peut double-cliquer sur le point P*)
    a. Faire varier le curseur t. Que voit-on ? Que décrit le point P ?
    Cliquer sur le point P, puis écrire dans la base de saisie : $\mathbf{Lieu}[\boldsymbol{P}, \boldsymbol{t}]$. Que voit-on ? Que remarque-t-on ?
    b. Faire varier le rayon R (t est fixé). Que voit-on ? Que peut-on dire ?
    Déplacer le point P sur la courbe (R est fixé). Que remarque-t-on ?
    c. Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t.
    Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?
    d. Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? Justifier votre affirmation.

2. **Etudier maintenant le cas $\boldsymbol{R = 1}$.**
    a. Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point P décrit la courbe.
    b. Modifier le curseur t allant de 0 à 2π.
    À l'aide de la lecture graphique, sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, répondre aux questions suivantes : la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en combien de points ? Préciser leurs abscisses.
    Construire le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Vérifier ce tableau de variations dans la partie A à la question 2.

Figure 145 : Texte de la SD-G pour la version cosinus (pour la version sinus : $Q(t\,;b)$ à la place de $P(t\,;a)$ – voir l'annexe n° 4, pp. 427-428)

Nous avons fait les choix didactiques suivants. Nous avons caché la fenêtre algébrique ; nous avons créé, dans le « Graphique 1 », deux curseurs : t allant de 0 à 100 et R de 0 à 5 où t désigne une variable et R, un paramètre, avec incrément $0{,}1$. La fenêtre algébrique est cachée parce que nous voulons que les élèves se concentrent sur la lecture des deux fenêtres de graphique et qu'ils répondent à nos questions (*Figure 145*) via l'information donnée par le Graphique 1 et le Graphique 2.

Nous considérons à l'état initial, dans le « Graphique 2 », un point déjà placé : c'est le point $P(1\,;1)$ pour la demi-classe 1, et, le point $Q(1\,;1)$ pour la demi-classe 2. Le choix de ce point P (idem pour Q) a pour but d'attirer l'attention de l'élève sur l'articulation entre les deux graphiques. Au départ, lorsque l'élève essaye de faire varier le curseur t, il voit que dans le « Graphique 1 », le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ par exemple, mais il n'y a aucun lien avec le point P (idem pour Q) dans le « Graphique 2 ». L'élève peut se demander : pourquoi propose-t-on de modifier les coordonnées du point P (idem pour Q) à la question 1.a ?

Nous présentons ci-après l'écran de GeoGebra à l'état initial (voir *Figure 146*) et l'écran de GeoGebra lors du commencement à l'étape 1 au démarrage du travail des élèves en binôme (voir *Figure 147*).

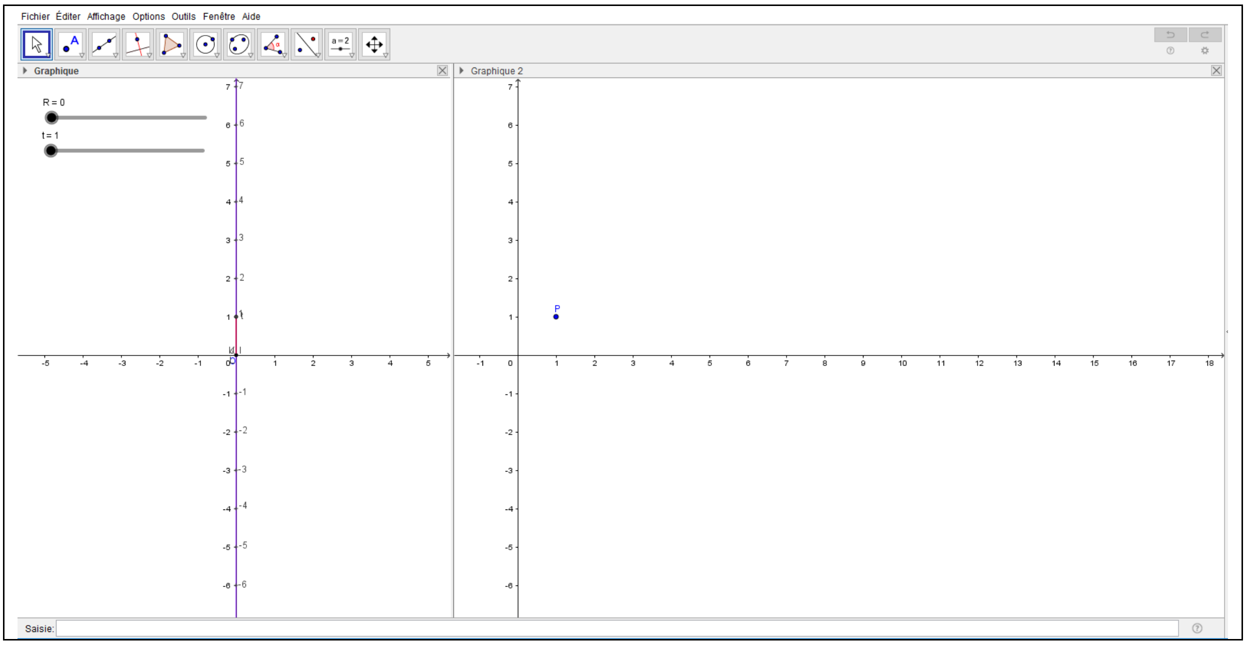


Figure 146 : SD-G à l'état initial où $R = 0$ (affiché devant les élèves avant le commencement du travail)

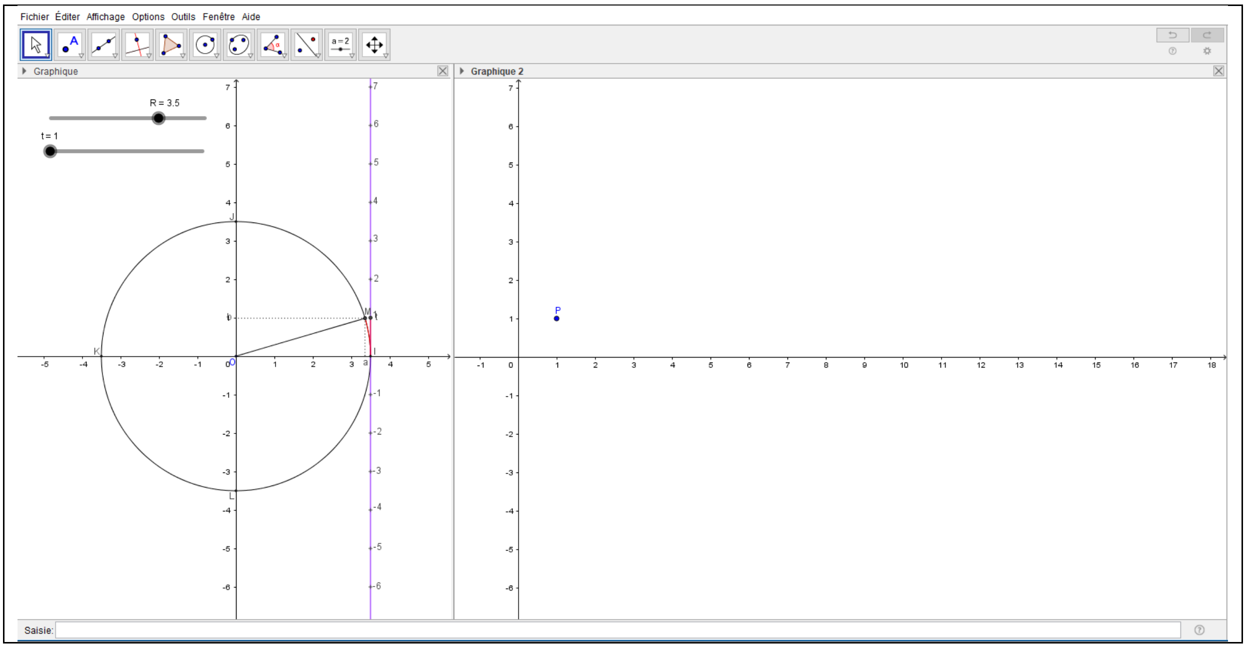


Figure 147 : SD-G à l'état où on choisit par exemple $R = 3.5$ pour le démarrage du travail

Nous envisageons deux phases dans la SD-G :

- *Phase 1* (Question 1 - *Figure 145*) : nous visons à renforcer la réflexion de l'élève en lien avec sa réflexion dans le milieu matériel papier-crayon. Cette fois-ci, dans la SD-G, l'élève voit étape par étape, avec l'observation dans le registre graphique, ce qui se passe. Par exemple pour R fixé et lorsque t varie, dans le Graphique 1 : déplacement du point M sur le cercle $\mathscr{C}$, déplacement du point d'abscisse t sur la droite des réels, et dans le Graphique 2 : déplacement du point $P(t\,;a)$ (idem pour $Q(t\,;b)$) décrivant une sinusoïde. L'enjeu dans cette phase 1 est de provoquer d'abord la réflexion de l'élève pour deux cas préliminaires :

- Cas 1 (question 1.a) : pour une valeur de R choisie, quand on fait varier le curseur t, le point P (idem pour Q) se déplace en décrivant une trajectoire que l'élève doit interpréter en terme de langage mathématique (courbe ou sinusoïde), puis le logiciel permet la vérification de la réponse donnée avec l'affichage de la trace ou avec Lieu$[P, t]$ (ou Lieu$[Q, t]$).
- Cas 2 (question 1.b) : pour t fixé pour le point P ou le point Q (avec logiciel), quand on fait varier le curseur R, dans le Graphique 1, le cercle $\mathscr{C}$ change de position avec le centre O fixé, et dans le Graphique 2, apparaît une famille de sinusoïdes d'amplitude R (la courbe tracée se dilate). Puis, en proposant de fixer le curseur R et de faire déplacer[17] le point P (idem pour Q) sur la courbe, nous attirons l'attention de l'élève sur le fait que les valeurs de t varient, le point P (idem pour Q) se déplace sur la courbe dans le Graphique 2 en même temps que le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$. Peut-être, l'élève pense-t-il à ce qui se passe lorsque le point P (idem pour Q) se situe sur l'axe des abscisses en position différente ou bien sur la courbe en position la plus haute ou la plus basse. Cette étape de réflexion pourrait faire penser l'élève à ce qu'il a rempli dans « le tableau 1 » dans le milieu papier-crayon. Nous faisons l'hypothèse que l'élève reconnaîtra la notion de phénomène périodique ou de signal périodique selon les termes de physique vus en Seconde et que le milieu matériel ici est riche et permet de nourrir la réflexion de l'élève afin qu'il découvre le lien entre P, M, t et a (idem pour Q : entre Q, M, t et b).

  Remarque : En lien avec le questionnaire (chapitre 4), de l'exercice IV non analysé dans le cadre du travail de thèse, nous constatons que la plupart des justifications des élèves de Terminale Scientifique concernant la périodicité d'une fonction sont celles issues des phénomènes de la physique.

Dans cette phase 1, nous continuons à inciter l'élève à penser, dans un premier temps, à la raison mathématique pour laquelle t peut avoir des valeurs négatives, puis dans un deuxième temps à l'aide de GeoGebra, l'affichage d'une branche de la courbe de l'autre côté de l'axe des ordonnées confirme sa réponse (question 1.c). Cette phase 1 se termine en faisant décrire les points communs aux courbes représentatives d'une famille de fonctions cosinus (idem pour une famille de fonctions sinus) correspondant à R variable (question 1.d).

La phase 1 de la SD-G, composée de quatre questions, vise à faire découvrir les propriétés d'une famille de fonctions sinusoïdales (ici : $t \mapsto R\cos(t/R)$ pour la demi-classe 1 et $t \mapsto R\sin(t/R)$ pour la demi-classe 2).

- *Phase 2* (Question 2 - *Figure 145*) : nous visons à faire découvrir la « fonction cosinus » pour la demi-classe 1 et la « fonction sinus » pour la demi-classe 2, en restreignant l'étude au cas particulier où $R = 1$. C'est ici que l'élève va expliciter l'expression algébrique de la fonction dont le point P (idem pour Q) décrit la courbe : reconnaît-il que l'ordonnée du point P (dans le Graphique 2) est $\cos t$ qui est l'abscisse du point M (dans le Graphique 1) ? Nous focalisons le travail de l'élève sur

[17] Le point P est déplaçable et entraîne le point M malgré la construction M puis P (avec version de GeoGebra : GeoGebra 5.0). Remarquons qu'en général, GeoGebra ne permet pas cela.

la lecture graphique : position entre la courbe et l'axe des abscisses, nombre des points d'intersection sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ en précisant les abscisses de ces points d'intersection (les valeurs exactes sont attendues) ; puis le travail se poursuit avec la construction du tableau de variations de la fonction sur cet intervalle, et pour finir, nous proposons à l'élève de comparer ce tableau de variations avec celui rempli dans la SD-P à la question 2.

2.4. Choix des variables didactiques

Nous présentons maintenant nos choix des trois variables didactiques principales dans l'élaboration de la situation didactique :

- **Variable 1** : <u>Rayon du cercle</u> (une *valeur littérale* choisie), déjà expliqué précédemment. (Partie A et Partie B)
- **Variable 2** : <u>Nombre de tours parcourus par le point M</u>
  - À la question 1 dans la « partie A », nous faisons étudier les *trois premiers tours* du déplacement sur un cercle $\mathscr{C}$ d'un point M, image d'un nombre réel t de la droite des réels enroulée autour du cercle $\mathscr{C}$. *Les trois premiers tours de déplacement du point M permettent de « sentir l'enroulement » et de percevoir notamment la notion de périodicité.*

    L'important ici est que l'élève arrive :
    - d'une part, à imaginer les mouvements du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ et les variations des valeurs du nombre réel t suivant les positions du point M sur le cercle (t désigne explicitement la longueur du parcours du point M en comptant à partir du point initial I fixé) et le nombre de tours de déplacement du point M ; et,
    - d'autre part, à lire graphiquement avec succès les « coordonnées cartésiennes » du point M, en quatre points fixes spécifiques I, J, K, L du cercle $\mathscr{C}$, sans lien avec les « cosinus et sinus ».

    L'idée principale de la question 1 est d'amener l'élève à envisager un processus efficace pour donner les valeurs de t suivant les mouvements du point M en ces quatre points fixes spécifiques sur le cercle $\mathscr{C}$ et nous voulons amener l'élève à remarquer dans le « tableau 1 » (voir *Figure 144* ou l'annexe n° 4, p. 426) qu'il y a une répétition des coordonnées de ces quatre points spécifiques à chaque tour de déplacement du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ et que t prend des valeurs de plus en plus grandes.

    Nous insistons sur la ***notion de périodicité*** avec plusieurs périodes possibles.
  - À la question 2 dans la « partie A », nous proposons de remplir deux tableaux de variations pour les *deux premiers tours* du déplacement du point M, mais ce n'est pas pour les trois premiers tours comme à la question 1 précédente, ni pour le premier tour comme dans la suite. En effet,
    - Pas pour les trois premiers tours : il n'y a pas assez de place et ce format est plutôt lisible et convenable d'une part, et d'autre part, à un moment donné, l'élève s'apercevrait ou anticiperait que les variations

de a et celles de b se répètent de la même manière à chaque tour du déplacement du point M, comme lors des deux premiers tours.

- Pas uniquement pour le premier tour : si c'était le cas alors ce serait faisable mais ce ne serait pas un bon choix pour faire en sorte que l'élève comprenne et s'approprie les variations d'une fonction périodique.
- C'est suffisant de faire comprendre, dans la réflexion cognitive de l'élève, le processus de variations sur les deux premières périodes d'une fonction périodique. L'élève pourra distinguer entre la répétition de manière identique des variations des coordonnées du point M à chaque tour de déplacement de ce point et les valeurs prises par la variable t sans répétition. Et cette distinction est vraiment importante afin d'expliciter cognitivement le lien entre a et t, et entre b et t, en relation avec la lecture graphique sur le cercle étudié ; autrement dit, il est important que l'élève arrive à voir et à retenir que le parcours du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ traduit le lien entre a et t, et entre b et t.

- À la question 3 dans la « partie A », nous demandons de remplir les tableaux de signe de a et de b pour le *premier tour* du déplacement du point M seulement. Même raison que précédemment : la place limitée, le format convenable et la suffisance d'intelligibilité sur la répétition de la même manière à chaque tour de déplacement du point M à travers la réflexion sur les deux questions précédentes.

- **Variable 3** : <u>Nature des nombres définissant les bornes de l'intervalle de variation de t</u>
Dans la « partie B » (voir *Figure 145*), t désigne un nombre réel associé au point image M du cercle $\mathscr{C}$ par l'enroulement de la droite des réels autour de ce cercle. Nous choisissons t prenant des valeurs de 0 à 100 mais pas de 0 à $2k\pi$ (k est un entier relatif positif) afin d'éviter de faire penser que l'on s'intéresse à l'étude d'une partie de la trigonométrie ; ici on s'intéresse à l'étude d'une fonction numérique d'une variable réelle. En plus, l'idée est d'éclairer et d'expliciter le fait que :
  - t désigne un nombre réel qui est l'abscisse d'un point de la droite des réels, simultanément, qu'il désigne une mesure de la longueur de l'arc de cercle IM où I est un point fixé et où M est un point mobile associé au nombre réel t, et
  - t ne représente pas des mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$, ce qui est le cas lorsque le rayon R du cercle $\mathscr{C}$ est l'unité.

3. Analyse *a priori* avec les outils d'analyse de la TSD – Modèle de la structuration du milieu

Dans chaque situation didactique (SD-P, SD-G) que nous allons analyser à l'aide des outils développés par Margolinas (1995) dans la *théorie des situations didactiques,* nous analysons l'activité de l'élève en niveaux de milieux de M_{-3} à M_{-1}, situés dans la situation a-didactique. Autrement dit, nous nous intéressons au potentiel d'adidacité de la situation. Remarquons que

les niveaux strictement négatifs correspondent aux niveaux a-didactiques dans lesquels l'enseignant occupe les positions de dévolueur, observateur et régulateur.
Nous précisons que dans le modèle de structuration du milieu sous forme de tableau (Margolinas 1995, Bloch 2000, Bloch 2005), la situation S_n de niveau n, qui correspond aux rapports entre M_n, E_n et P_n, devient une partie du milieu de la situation S_{n+1} de niveau $n+1$, où le niveau n est englobé dans le niveau $n+1$. (voir la section 3.3 du chapitre 1)

3.1. **<u>SD-P</u>** : *Décrire les variations de l'abscisse a et celles de l'ordonnée b du point image M sur un cercle $\mathscr{C}$, associé à un nombre réel t par l'enroulement de la droite des réels autour du cercle $\mathscr{C}$* (voir *Figure 145*)

Nous allons analyser, ci-dessous, l'interaction Élève-milieux dans quatre phases correspondant aux quatre questions posées dans la SD-P. Remarquons que dans la SD-P, il y a quatre questions consécutives qui sont liées, l'une à l'autre (surtout pour les trois premières questions). Nous pouvons dire que le milieu objectif s'enrichit dans la réalisation question par question, en tenant compte des résultats obtenus précédemment pour la/les question(s) qui la/les sui(ven)t.

Phase 1 : *La longueur d'un tour de déplacement du point M et le remplissage du tableau 1 pour les trois premiers tours du point M.* (voir *Figure 145* – Question 1)
Précisons que dans la phase 1, l'élève répond individuellement dans un premier temps à la question 1 de la partie A. Puis, dans le deuxième temps, il s'agit d'un travail en binôme que nous allons présenter ci-dessous dans les phases 2, 3 et 4.

<u>*Interaction Élève-milieux*</u> : l'élève est confronté à une tâche consistant à déterminer la longueur d'un tour de déplacement du point M et à remplir le « tableau 1 » pour les trois premiers tours de ce point. Le milieu matériel M_{-3} correspondant à la situation objective S_{-3} consiste en le texte de l'énoncé, la figure donnée et les quatre questions posées dans la SD-P. Les connaissances de l'élève lui permettent de comprendre le problème. Le milieu objectif M_{-2} est la S_{-3} : le texte du problème tel que le comprend l'élève. Dans la situation de référence S_{-2}, l'élève agit avec ses connaissances anciennes pour résoudre la question, en se posant des questions et il construit/développe des stratégies pour répondre à la tâche posée. Dans la phase 1, les connaissances anciennes convoquées sont : connaissances sur le périmètre du cercle, sur l'enroulement de la droite numérique sur le cercle, sur les coordonnées cartésiennes d'un point dans un repère orthonormé du plan. Ce qui relève de l'apprentissage ce sont les adaptations à faire : coordonner ces connaissances dans la situation proposée où on a un cercle de rayon R et non le cercle trigonométrique. La présence de $2\pi R$ dans le « tableau 1 » est bien un élément du milieu (M_{-3} et aussi M_{-2}) qui peut amener une rétroaction dans le cas où l'élève interprète le cercle comme le cercle trigonométrique à condition qu'il puisse aussi interpréter $2\pi R$ comme le périmètre du cercle. Nous pouvons dire que l'indication « $2\pi R$ » révèle son utilité lorsque celui-ci fait partie du milieu matériel qui agit sur la réflexion de l'élève qui peut changer sa/ses stratégie(s) développée(s) lors de la rencontre avec cette indication.
Nous considérons d'abord que l'élève s'approprie, en autonomie, et sans difficulté le principe de l'enroulement de la droite numérique sur un cercle quelconque avec une adaptation de la connaissance similaire vue en Seconde.

Supposons que l'élève a pris l'habitude de travailler avec le cercle trigonométrique et qu'il ne fait pas attention à l'énoncé dans lequel nous lui proposons de travailler dans un cercle quelconque. Dans ce cas, l'élève interprète la longueur d'un tour de déplacement du point M comme étant la circonférence ou le périmètre du cercle trigonométrique. Lors du remplissage dans le « tableau 1 », l'élève a *sous les yeux* « $2\pi R$ » qui indique que M est le point image de t lorsque M est au point I au commencement du déplacement du point M lors du deuxième tour ; et là se révèle l'intérêt de l'indication $2\pi R$ qui sert dans la réflexion cognitive de l'élève. Donc, $2\pi R$ fait partie du milieu qui nourrit la réflexion de l'élève.

Dans le cas où le périmètre d'un cercle de rayon R est disponible pour l'élève, autrement dit où l'élève maîtrise bien le périmètre d'un cercle de rayon R, nous attendons la réactualisation des connaissances antérieures de l'élève sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique avec une adaptation des connaissances sur un cercle de rayon R : valeurs exactes de t associées à son point image M sur le cercle $\mathscr{C}$ de rayon R dans l'enroulement en quatre points fixes spécifiques I, J, K et L lors d'un parcours pendant les trois premiers tours du point M dans le sens trigonométrique. Dans ce cas, l'indication « $2\pi R$ » sert plutôt pour assurer/contrôler la réponse précédente de l'élève sur la longueur d'un tour de déplacement du point M et pour contrôler la stratégie qu'il a développée pour les valeurs exactes de t remplies pour le premier tour de cercle décrit par le point M.

Stratégies pour remplir le tableau 1 :

Il y a plusieurs stratégies possibles pour remplir le « tableau 1 ». Par exemple,

soit colonne par colonne (point par point dans l'ordre) pour les valeurs de t, a, b ;

soit grande colonne par grande colonne (tour par tour de cercle) ;

soit ligne par ligne en commençant par les valeurs de t pour les trois premiers tours de déplacement du point M, puis donner parallèlement l'abscisse a et l'ordonnée b de ce point.

Comment déterminer les valeurs du nombre réel t associé à chaque point I, J, K, L lors d'un parcours pendant les trois premiers tours du point M dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$?

Pour les déterminer, il y a *plusieurs stratégies possibles*. Nous envisageons seulement *une stratégie* (en sachant que la circonférence $2\pi R$ se divise par quadrant en quatre arcs de cercle de même longueur $\frac{\pi}{2}R$) que nous appelons Stratégie 1.

<u>Stratégie 1</u> : Remplir d'abord la colonne du « 1er tour de cercle décrit par le point M » avec l'idée indiquée ci-après :

- sachant que la circonférence est $2\pi R$, et que K est en position de demi parcours du premier tour du point M alors K est associé au nombre qui est à la moitié de la circonférence c'est-à-dire πR ;
- ensuite, J est en position de demi parcours du demi premier tour du point M alors J est associé au nombre qui est à la moitié de la demi-circonférence c'est-à-dire $\frac{1}{2}\pi R$;
- puis, L est en position de l'autre demi parcours du premier tour du point M et là il semble que L est en position de trois quarts du parcours de déplacement du

premier tour du point M alors L est associé au nombre qui est à trois quarts de la circonférence c'est-à-dire $\frac{3}{4} \times 2\pi R$ ou $\frac{3}{2}\pi R$;

- enfin, I est en position de départ du parcours du point M alors I est associé à 0.

Finir par compléter les deux dernières colonnes, pour le 2$^{\text{ème}}$ tour et le 3$^{\text{ème}}$ tour de cercle, de la manière suivante : par exemple, pour obtenir la valeur de t en I au deuxième tour (cette valeur de t a été donnée) puis au troisième tour, il suffit d'ajouter, à chaque « saut », $2\pi R$ à la valeur de t associée au point I précédent ; et utiliser le même procédé pour les valeurs de t en J, en K et en L, (voir *Figure 148*).

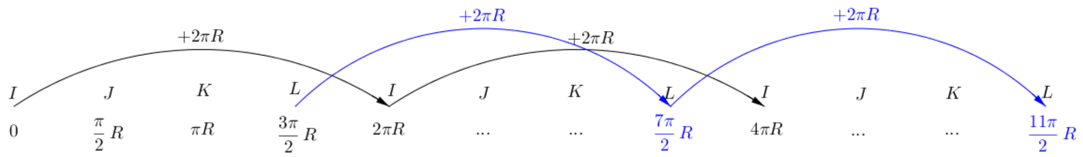


Figure 148 : Schéma pour la stratégie 1

Remarquons qu'il serait possible qu'il y ait des élèves qui appliquent cette stratégie 1 mais sans R dans leurs réponses pour la première colonne « 1$^{\text{er}}$ tour de cercle décrit par le point M », conformément au cas où l'élève travaille avec le cercle trigonométrique (rayon unitaire). Mais, l'indication dans la deuxième colonne « 2$^{\text{ème}}$ tour de cercle décrit par le point M » fait sans doute réfléchir l'élève et lui permet de rectifier ses pensées précédentes. Nous attendons aussi que l'élève donne toutes les valeurs du nombre réel t en I pour chaque tour complet du parcours du point M.

Comment déterminer les valeurs exactes de a à la quatrième ligne du tableau 1 et celles de b à la cinquième ligne ?

Pour les déterminer, nous envisageons deux stratégies possibles que nous appelons Stratégie 2 et Stratégie 3. Nous attendons que l'élève utilise la stratégie 2 pour le remplissage du « tableau 1 ». Nous signalons que la stratégie 3 est une stratégie globale que nous envisageons dans la SD-P à la dernière question (question 4).

La rétroaction du milieu objectif M_{-2} via la question 4 (dans le cas où l'élève a lu le texte jusqu'au bout) permet à l'élève de rejeter la stratégie 3 et le pousse à développer une autre stratégie : la stratégie 2. Nous attendons la stratégie 2 développée par l'élève dans la situation référence S_{-2}.

Stratégie 2 : Dans le cadre graphique, lire simplement les *coordonnées cartésiennes* des points I, J, K, L sans aucun lien avec les « cosinus et sinus ».

Dans ce cas, l'élève réfléchit seulement aux coordonnées cartésiennes de ces quatre points pour la colonne « 1$^{\text{er}}$ tour de cercle décrit par le point M », puis il les reporte simplement dans les deux dernières colonnes à remplir.

Remarquons qu'avec la « stratégie 2 », l'élève pourrait donner les valeurs exactes de a et de b bien qu'il n'arrive pas à donner les valeurs exactes de t à la troisième ligne du « tableau 1 ».

Stratégie 3 : Dans les cadres géométrique et algébrique, lire les coordonnées du point M en lien avec le « cosinus » et le « sinus ». Si c'est le cas, les élèves doivent d'abord donner correctement a et b en fonction de R et de t (voir Phase 4, p. 320) ; ce que nous leur demandons à la question 4, ensuite remplacer la valeur de t trouvée précédemment dans chaque cas et simplifier si c'est possible, et finir à l'aide des cosinus et sinus d'un nombre réel (vus en Seconde) ou de ceux d'une mesure en radians d'un angle orienté (vus en 1^{re} Scientifique).

Il serait possible que certains élèves puissent réaliser cette stratégie 3, avec d'autres réflexions comme celles qui suivent :

- <u>Stratégie 3.a</u> : Nous supposons que l'élève donne correctement les expressions de a et de b, mais il ne pense qu'aux angles géométriques dont les mesures sont en degrés ou en radians en oubliant la complexité relative aux valeurs de t ou bien sans penser aux valeurs de t (autrement dit, l'élève pense plutôt à $a = R\cos\left(\widehat{IOM}\right)$ et à $a = R\sin\left(\widehat{IOM}\right)$). Par exemple : lorsque M est en J, l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ est de 90° et $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, on a alors $a = R \times 0 = 0$ et $b = R \times 1 = R$ c'est-à-dire sans penser à trouver a et b de la manière suivante : $a = R \times \cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}R}{R}\right) = R \times \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = R \times 0 = 0$ et $b = R \times \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}R}{R}\right) = R \times \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = R \times 1 = R$.
- <u>Stratégie 3.b</u> : Nous supposons que l'élève donne incorrectement les expressions de a et de b comme $a = R\cos(t)$ et $b = R\sin(t)$, alors qu'il reprend la deuxième étape de la stratégie 3.a (utiliser les angles géométriques sans utiliser les valeurs de t trouvées précédemment). Cela fonctionne très bien bien que les expressions soient fausses. Dans ce cas, au sens de l'élève, t représenterait l'angle géométrique $\widehat{IOM}$.

Remarquons que dans la stratégie 3.b, si l'élève n'utilise pas les angles géométriques mais les valeurs de t trouvées précédemment, alors il n'arrive pas à donner les valeurs de a et de b à cause du paramètre littéral R sauf dans le cas où t prend la valeur 0. Dans ce cas, il est obligatoire pour certains élèves de faire des essais numériques en choisissant une valeur du paramètre R ($R \neq 1$) pour tester. Par exemple, lors du premier tour du déplacement du point M, nous supposons que M est en J, l'image de t qui prend la valeur $\frac{\pi}{2}R$; pour $R = 2$ (nous choisissons cette valeur 2 car elle facilite dans la simplification : $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$), alors $a = 2\cos\pi = 2 \times (-1) = -2$ et $b = 2\sin\pi = 2 \times 0 = 0$ alors que d'après la lecture graphique $a = 0$ et $b = 2$ ce qui montre que c'est incompatible. Ceci permettrait à l'élève de s'apercevoir que les expressions algébriques de a et de b qu'il aurait données étaient fausses et à ce moment-là, les résultats avec des essais numériques du paramètre R permettront à l'élève de réfléchir au fait que t ne désigne pas une mesure (en radians) de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$. Et, ceci permettrait à l'élève de changer cette stratégie 3.b et de penser peut-être soit à la stratégie 2 soit à la stratégie 3.a.

Dans le cas de la stratégie 3.b, les résultats avec des essais numériques d'une valeur du paramètre R ($R \neq 1$) permettront à l'élève d'une part de reconnaître ses expressions fausses de a et de b, et d'autre part, d'apercevoir le rôle de t qui ne représente pas une mesure (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sauf dans le cas où $R = 1$, et de changer ses stratégies.

Rappelons qu'après un travail individuel des élèves pour la question 1, il s'agit d'un travail en binôme des élèves pour les quatre questions de la SD-P (y compris la question 1 avec le travail individuel). Donc, le milieu matériel M_{-3} s'enrichit des productions des élèves en binôme à la question 1. Chaque binôme reprend la phase 1 pour accomplir la question 1, avant de suivre les trois dernières questions.
Nous espérons que les élèves appréhendent les valeurs prises par t de plus en plus grandes lors du parcours du point M, dans le sens trigonométrique, sur le cercle $\mathscr{C}$.

Phase 2 : *Variations de l'abscisse a et de l'ordonnée b du point M au cours de ses deux premiers tours de déplacement sur le cercle $\mathscr{C}$.* (voir *Figure 144* – Question 2)

<u>*Interaction Élèves-milieux*</u> : Chaque binôme d'élèves est confronté à une tâche consistant à compléter le tableau de variations de a et celui de variations de b. Le « tableau 1 » rempli fait partie du milieu objectif M_{-2} dans la situation de référence S_{-2}. Comme il n'y pas encore eu de mise en commun par l'enseignant, les tableaux remplis dans la phase 1 ne sont pas forcément corrects. Nous faisons l'hypothèse que l'étude du sens de variations va amener chaque binôme à identifier certaines erreurs.
Dans le tableau de variations de a (idem pour b) à compléter, nous avons indiqué des valeurs de t qui correspondent aux deux premiers tours de déplacement du point M. L'idée est de faire rechercher les extrema de a (idem pour b) et les valeurs de t correspondantes et de mettre les flèches dans le bon sens qui traduisent la monotonie, à l'aide soit de la lecture graphique sur le cercle $\mathscr{C}$ (et le tableau 1) soit de la lecture des valeurs remarquables du tableau 1. Ici, il n'est pas nécessaire que chaque binôme précise dans ce tableau de variations les valeurs de t en lesquelles a (idem b) s'annule. Mais, si oui, ce serait déjà plus avantageux pour la lecture du « signe » de a (idem pour b) à la question 3 suivante. Nous faisons l'hypothèse que chaque binôme arrivera à décrire les variations de a et de b suivant les valeurs de t, en les représentant symboliquement dans les tableaux de variations. Ici, le déplacement du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ joue un rôle intermédiaire articulant clairement le lien entre t et a, et celui entre t et b ; nous disons que l'intermédiaire M est un des éléments importants du milieu. Notre objectif est que les élèves étudient, à l'aide de la lecture graphique sur un cercle, a en fonction de t sans tenir compte explicitement du terme « cosinus » (idem. b en fonction de t sans tenir compte explicitement du terme « sinus »), et qu'il le traduise dans un registre de tableau des variations.

Stratégies pour compléter le tableau de variations de a (resp.b) :
Comment trouver les maxima de a et les valeurs de t correspondantes, et comment mettre des flèches dans le bon sens ?
Nous envisageons deux stratégies possibles que nous appelons Stratégie 4 et Stratégie 5 pour réaliser le tableau de variations de a. Il existe deux stratégies similaires pour réaliser celui de b. Nous présentons seulement les deux stratégies pour a.

Stratégie 4 : Commencer par une réflexion intuitive : a varie sur l'axe des abscisses car a est l'abscisse du point M qui se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ de rayon R et de centre O origine du repère orthonormé du plan ; ceci permet de conclure que $-R \leq a \leq R$. Puis, lire les valeurs de t et les valeurs de a correspondantes dans le « tableau 1 » obtenu à la question 1, et parallèlement, à l'aide de la figure donnée, imaginer les mouvements du point M à partir du point initial I et simultanément la variation des valeurs de a sur l'axe des abscisses, en fonction de t. Lorsque M se déplace dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$ en partant du point initial I vers J puis vers K, a prend des valeurs de plus en plus petites ; mais lorsque M continue à se déplacer à partir du point K, passant par L et arrivant en I en faisant un premier tour complet, a prend des valeurs de plus en plus grandes. Cela permet de décider de mettre les valeurs maximales de a aux bons endroits ainsi que les valeurs exactes de t correspondantes, et de mettre des flèches de monotonie dans le bon sens. Même procédure que précédemment pour définir les variations de a pour le deuxième tour du point M.

Stratégie 5 : Sans avoir besoin de relire graphiquement la figure donnée, c'est suffisant de lire le tableau 1 obtenu à la question 1 à la troisième ligne et à la quatrième ligne. Sachant que R est le rayon du cercle $\mathscr{C}$, alors intuitivement, R est la valeur la plus grande prise par a et $-R$, la valeur la plus petite prise par a. À la quatrième ligne du « tableau 1 » en lisant de gauche à droite, ceci permet de conclure que, lorsque M se déplace dans le sens direct (ici, nous supposons que l'élève a en tête l'image de la figure donnée, ou bien, que l'élève lit à la première ligne du « tableau 1 », par exemple : 1^er^ tour de cercle décrit par le point M), a prend des valeurs de plus en plus petites quand t varie de 0 à πR, puis a prend des valeurs en plus en plus grandes quand t varie de πR à $2\pi R$. Parallèlement, traduire ce langage de lecture en un registre des symboles mathématiques dans le tableau de variations de a. Puis, continuer à lire, les variations de a, avec la procédure précédente pour le déplacement du point M pendant le deuxième tour.

Nous attendons la stratégie 4 mais nous pensons qu'il est possible que les élèves utilisent la stratégie 5. Nous espérons savoir laquelle des deux stratégies envisagées est utilisée par les élèves via la conversation enregistrée lors du travail en binôme. Remarquons que la stratégie 5 est une stratégie abusive et insuffisante dans la compréhension mathématique de la continuité et de la monotonie. Il serait possible que l'élève n'ait pas besoin de relire graphiquement la figure donnée dans l'énoncé à plusieurs reprises en considérant qu'il l'avait en tête ; donc, le « tableau 1 » serait suffisant pour réaliser le remplissage du tableau de variations de a (idem pour b).
Nous espérons que l'élève réalise les tableaux de variations de a et de b en lisant graphiquement sur le cercle, (autrement dit, avec la stratégie 4).
Nous nous attendons à ce que l'enseignant demande l'avis des élèves sur les variations de a et celles de b pour le troisième tour de déplacement du point M, pendant la mise en commun (pendant la situation didactique $S0$), afin de savoir à quel niveau se situe la compréhension de la part des élèves sur ces variations.

Phase 3 : *Signe de l'abscisse* a *et de l'ordonnée* b *du point* M *pour* t *décrivant l'intervalle* $[0\,;2\pi R]$. (voir *Figure 144* – Question 3)

Interaction Élèves-milieux : Chaque binôme d'élèves est confronté à une tâche consistant à remplir le tableau de signe de a et celui de signe de b pour $t \in [0\,;2\pi R]$. Dans la phase 3, le milieu est enrichi par les tableaux de variation réalisés à la question précédente dans la phase 2. Les connaissances anciennes en jeu sont : lecture du signe sur les tableaux de variation ou sur le cercle suivant la stratégie adoptée.

Dans le tableau de signe de a (idem pour b) à remplir, nous avons indiqué les valeurs de t, ce qui signifie clairement que l'on s'intéresse au premier tour du déplacement du point M sur le cercle $\mathscr{C}$. Nous attendons que l'élève traduise « la lecture graphique du signe de a (idem pour b) suivant les valeurs de t » en « la représentation de symboles mathématiques dans le tableau de signe de a (idem pour b) ».

Stratégies pour remplir le tableau de signe de a ***et celui de signe de*** b ***pour*** $t \in [0\,;2\pi R]$:

Comment déduire le signe de a *et celui de* b *?*

Pour le déduire, nous envisageons trois stratégies possibles (notées : Stratégie 6, Stratégie 7, Stratégie 8) dans lesquelles on commence pour l'*étape initiale* par regarder attentivement le tableau de signe de a à remplir (idem pour b), parallèlement, par traduire « $t \in [0\,;2\pi R]$ » en « M se déplace dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$ pour le premier tour » et par étudier le signe de a en fonction de t (idem pour b).

Nous attendons les stratégies 6 et 7 développées par l'élève dans la situation de référence S_{-2}. La stratégie 8 est possible mais c'est incomplet.

Nous nous attendons à ce que les élèves arrivent à remplir ces tableaux de signe de a et de b pour le deuxième tour et pour le troisième tour, par exemple, si l'enseignant leur demande de le faire pendant la situation didactique $S0$.

Stratégie 6 : À l'aide de la figure donnée, imaginer les mouvements du point M dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$, et simultanément, les valeurs de t en lesquelles a (idem pour b) s'annule ; puis écrire à la première ligne ces valeurs de t dans l'ordre croissant dans le tableau de signe de a (idem pour b) ; et finir par remplir en utilisant le signe « $+$ » ou « $-$ » à la deuxième ligne de ce tableau de signe dans les sous intervalles que décrit t, à partir de la lecture des valeurs de a (idem pour b) sur l'axe des abscisses (idem l'axe des ordonnées) suivant les mouvements du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens direct en enchaînant avec les valeurs de t.

Stratégie 7 : À l'aide du tableau de variations de a (idem pour b) obtenu à la question 2 et le tableau 1 obtenu à la question 1, en lien avec les valeurs de t et celles de a (idem pour b), chercher dans le « tableau 1 » les valeurs de t en lesquelles a (idem pour b) s'annule puis ajouter les informations dans le tableau de variations de a (idem pour b), interpréter la monotonie grâce aux flèches et en déduire le signe de a (idem pour b) dans les sous intervalles que décrit t. Remplir alors le tableau de signe de a (idem pour b) avec les informations précédentes.

Stratégie 8 : À l'aide du tableau 1 obtenu à la question 1, lire les valeurs exactes de t à la troisième ligne et celles de a (idem pour b) à la quatrième ligne (idem la cinquième ligne), en déduire le signe de a (idem pour b) à partir des trois valeurs R, 0, $-R$ en considérant R comme le nombre positif désigné par le signe « $+$ », $-R$ comme le nombre négatif désigné par le signe « $-$ ». Remplir alors le tableau de signe de a (idem pour b) avec les informations précédentes.

Phase 4 : *Expressions algébriques de a et de b en fonction de t et de R.* (voir *Figure 144* – Question 4)

<u>*Interaction Élèves-milieux*</u> : Chaque binôme d'élèves est confronté à une tâche consistant à calculer a et b en fonction de t et de R quand M est entre I et J. Ici, les élèves n'ont pas vraiment à se servir des questions précédentes. La figure donnée sert pour la réflexion des élèves dans la situation de référence S_{-2}. Si les élèves connaissent les coordonnées $(\cos t\ ;\ \sin t)$ du point image sur le cercle trigonométrique, associé à t dans l'enroulement, par la proportionnalité nous pouvons penser qu'ils les multiplieront simplement par R pour les avoir sur le cercle de rayon R. Le cercle fourni peut servir de moyen de vérification : le milieu sert aussi à contrôler ce qu'on avance.
Il s'agit d'un travail dans les cadres géométrique et algébrique. Les connaissances anciennes convoquées sont : connaissances sur la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle au centre (de mesure en radians) qui intercepte cet arc de cercle et le rayon du cercle (ou bien, sur la correspondance entre l'angle plein et le périmètre du cercle menant au rapport de proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle), sur le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle lors du travail dans le cadre géométrique dans le quart du cercle, sur le cosinus et le sinus d'un angle orienté ou bien le cosinus et le sinus d'un nombre réel.
Nous faisons l'hypothèse que la majorité des élèves donneront, plutôt avec une confusion, les valeurs de a et de b qui suivent : $a = R\cos t$ et $b = R\sin t$. Mais, il est normal de voir une réponse comme celle-ci et ce serait déjà bien parce qu'il y aurait R dans la réponse. En effet, aux niveaux de Seconde et de 1^{re} Scientifique, les élèves ne retiennent que l'abscisse et l'ordonnée du point image M associé à un nombre réel t dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (de centre O l'origine du repère orthonormé et de rayon 1) qui sont définies respectivement comme étant $\cos t$ et $\sin t$. Concernant les valeurs de a et de b données comme étant $R\cos t$ et $R\sin t$, nous pouvons dire que dans la réflexion, l'élève voit plutôt l'angle au centre (avec confusion que t représente aussi une des mesures en radians de l'angle, en se référant aux connaissances reliées au cercle trigonométrique, vues en Seconde et en 1^{re} Scientifique) mais pas la distance parcourue du point M, dans le sens trigonométrique, partant du point initial I dans l'enroulement de la droite numérique.
L'objectif de la tâche posée à la question 4 est d'une part de faire réfléchir les élèves sur le fait qu'il n'est pas possible que $a = \cos t$ et $b = \sin t$, et d'autre part, d'obtenir qu'à un moment donné dans le processus de recherche des stratégies, les élèves s'aperçoivent que t ne désigne pas une des mesures en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ sauf dans le cas où $R = 1$ (car l'angle au centre $\widehat{IOM}$ qui intercepte la longueur t de l'arc IM a pour mesure en radians $\frac{t}{R}$).

Stratégies pour calculer a et b en fonction de t et de R quand M est entre I et J

Il faut déterminer d'abord une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et finir par calculer a et b dans le cadre géométrique.

Comment déterminer θ une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$?

Pour la déterminer, nous envisageons deux stratégies possibles que nous appelons Stratégie 9 et Stratégie 10. Nous attendons la stratégie 10 développée par les élèves dans la situation de référence S_{-2}.

Stratégie 9 : Dans les cadres géométrique et algébrique, mobiliser l'existence de la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle et le rayon du cercle, comme étant $t = R \times \theta$. En déduire alors θ en fonction de t et de R.

Stratégie 10 : Dans les cadres géométrique et algébrique, utiliser le rapport de proportionnalité $\frac{2\pi R}{2\pi} = \frac{t}{\theta}$ puis en déduire θ en fonction de t et de R.

Comment déterminer a et b en fonction de t et de R quand M est entre I et J ?

Pour les déterminer, nous envisageons une stratégie pertinente en lien avec les cosinus et sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle, dans le cadre géométrique. Cette stratégie consiste à trouver d'abord, à l'aide des définitions des cosinus et sinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle, les cosinus et sinus de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ dans le triangle rectangle HOM où H est le projeté orthogonal du point M sur l'axe des abscisses. Dans ce cas, les cosinus et sinus de l'angle géométrique $\widehat{IOM}$ sont les cosinus et sinus de θ, et, a et b désignent respectivement la longueur du côté adjacent et celle du côté opposé de l'angle $\widehat{IOM}$. En déduire alors a et b en fonction de t et de R.

3.2. **SD-G** : *Décrire le processus visant à découvrir les propriétés des fonctions cosinus et sinus*

Dans la SD-G, le logiciel GeoGebra est un outil, d'une part pour confirmer visuellement l'accomplissement du travail de l'élève dans la SD-P (partie A), et d'autre part, pour mettre en évidence le lien entre le repérage sur le cercle trigonométrique et les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus avec l'intérêt de pouvoir restreindre l'étude au cas particulier $R = 1$ et, simultanément, pour illustrer effectivement le parcours des points de coordonnées respectives $(t\,; a)$ et $(t\,; b)$ décrivant des courbes représentatives des fonctions à découvrir (*fonction cosinus* et *fonction sinus*, dans le cas où $R = 1$).

Nous allons analyser « l'interaction Élèves-milieux » dans deux phases correspondant à deux étapes à effectuer dans la SD-G (partie B). Rappelons qu'il y a deux versions : version cosinus et version sinus (voir *Figure 145*). Nous faisons seulement l'analyse dans le processus visant à découvrir les propriétés de la fonction cosinus via la version cosinus car l'analyse serait similaire pour le processus visant à découvrir les propriétés de la fonction sinus via la version sinus ; cependant, concernant la réalisation du tableau de variations sur l'intervalle $[0\,; 2\pi]$ dans la phase 2, les variations de la fonction sinus sur cet intervalle posent une difficulté plus élevée par rapport à celles de la fonction cosinus.

Remarquons que les élèves travailleront en groupes de deux ou trois.

La SD-G introduit un nouveau milieu qui permettra d'une part de remettre en question ce que les élèves ont fait dans la SD-P, et d'autre part, de mettre en évidence, avec l'observation et l'expérimentation via les fonctions de GeoGebra, le passage de la trigonométrie sur le cercle vers une fonction trigonométrique par le fait que l'on définit les notions de fonctions cosinus et sinus à partir d'un arc du cercle trigonométrique, en lien avec le principe de l'enroulement de la droite numérique.

Version cosinus : **Fonction cosinus**
Lorsque les fenêtres GeoGebra de chaque groupe d'élèves (de 2 ou 3) affichent les deux graphiques initiaux, avant que chaque groupe effectue cette SD-G, l'enseignante précisera : « sur l'écran d'ordinateur devant vous, vous voyez deux fenêtres graphiques : « Graphique » situé à votre gauche et « Graphique 2 », à votre droite. On a deux curseurs dans « Graphique » : t va de 0 à 100, R de 0 à 5 (en les écrivant sur le tableau) ; t désigne une variable, et R, un paramètre (nous supposons que l'élève distingue une variable d'un paramètre). Et, dans « Graphique 2 », on a un point $P(1\,;1)$ », (voir *Figure 146*).

Phase 1 : *Propriétés d'une famille de fonctions trigonométriques – périodicité, amplitude*. (voir *Figure 145* – Question 1)

Interaction Élèves-milieux : Chaque groupe d'élèves est confronté à quatre tâches, notées $\mathrm{B}.1.a$ (question 1.a), $\mathrm{B}.1.b$, $\mathrm{B}.1.c$, $\mathrm{B}.1.d$, à accomplir en autonomie.

- Pour $\mathrm{B}.1.a$: Il est demandé aux élèves de choisir d'abord une valeur de R strictement positive ($R \neq 1$) ; à ce moment-là, les élèves retrouveront la figure de la partie A (ici, nous pouvons dire que la partie A contribue à enrichir le milieu objectif M_{-2} de la SD-G). Cette étape attire l'attention des élèves, lors du démarrage, lorsqu'ils essayent de faire varier t, ils voient que le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ et que t varie aussi sur la droite d alors qu'***il n'y a aucun lien avec le point*** P ***donné***.
  Ensuite, il est demandé aux élèves de modifier les coordonnées du point P avec $P(t\,;a)$ pour commencer à découvrir les notions visées : périodicité, amplitude, fonction cosinus. À ce moment-là, P a une position en lien avec celle du point M se situant sur le cercle $\mathscr{C}$. Nous attendons des réponses du type : « lors de la visualisation, le point P décrit (ou constitue) une courbe lorsque l'on fait varier le curseur t » (les élèves pourraient afficher la trace du point P pour voir avant de répondre). Et, cette fois-ci, les élèves aperçoivent un « lien » particulier entre les deux Graphiques : lorsque t varie, le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ et P se déplace simultanément en décrivant une courbe.
  « $\mathrm{Lieu}[P,t]$ », demandé à la question $\mathrm{B}.1.a$, conforte la réponse donnée précédemment. Ici, nous attendons aussi que l'élève ait l'idée soit de choisir une valeur du curseur R suffisamment petite, soit de dézoomer, zoomer ou déplacer « Graphique 2 » pour voir le mieux possible plusieurs périodes à la fois.
- Pour $\mathrm{B}.1.b$: Il est demandé aux élèves de fixer d'abord le curseur t pour le point P, puis de faire varier le curseur R. Nous espérons que les élèves s'aperçoivent que lors de la visualisation, lorsque l'on fait varier le curseur R, il apparaît des courbes de *même forme* mais de *maxima différents* ou d'*amplitudes différentes* dépendant du paramètre R.

Puis, nous demandons aux élèves de fixer le curseur R et de déplacer le point P. Les élèves pourraient se rappeler à ce moment-là ce qu'ils ont répondu dans la SD-P (partie A) à la question 1 (la longueur d'un tour de déplacement du point M ; « tableau 1 ») et à la question 2 (variations de a). Nous espérons que les élèves s'aperçoivent que : « lors de la visualisation, pour R fixé, le parcours du point P se reproduit de manière répétitive sur des *intervalles réguliers* dépendant des tours de déplacement du point M sur le cercle » ; peut-être, cela fait que les élèves penseront aux mêmes motifs (en termes de physique) correspondant aux branches de la courbe pour ces intervalles réguliers. Nous pouvons faire l'hypothèse qu'à ce moment-là, les élèves s'aperçoivent que « la période » est exactement la longueur du déplacement pour un tour du point M ou bien le périmètre du cercle, et qu'ils voient « l'amplitude » d'une sinusoïde (valeur maximale).

Dans cette partie, nous attendons des propositions de la part des élèves comme celles ci-dessous :

- Il faut commencer par choisir $t = 0$ ou placer le point P au point d'intersection entre la courbe tracée et l'axe des ordonnées comme point de départ pour que le point M parte du point initial I sur le cercle $\mathscr{C}$. Lorsque le point P se déplace sur la courbe tracée de gauche à droite, on voit que le point M se déplace sur le cercle dans le sens direct et que t prend des valeurs de plus en plus grandes (ici, cela confirme la réponse de l'élève avec le remplissage du « tableau 1 » fait dans la SD-P).
- Lorsque le point P est sur l'axe des abscisses pour la première fois, le point M est en J ; lorsque le point P est en position la plus basse (au point minima) de la courbe pour la première fois, le point M est en K, etc.

  Nous pouvons faire l'hypothèse que grâce à l'observation expérimentale, les élèves arrivent à distinguer la manière dont le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ de celle du déplacement du point P sur la courbe tracée. Ils voient que le point M se déplace sur le cercle de manière répétitive avec des tours successifs ; ici, les élèves peuvent se rappeler ce qu'ils ont fait à la question A.1 car la figure affichée dans le Graphique 1 et la figure vue dans la partie A sont les mêmes. Et simultanément, ils voient que le point P semble se déplacer sur la courbe de gauche à droite sans revenir, mais son parcours sur la courbe est identique sur des intervalles égaux dont la longueur est égale au périmètre du cercle $\mathscr{C}$.

<u>Bilan</u> (par l'enseignant – dans la situation didactique $S0$) : « la période » est $2\pi R$, le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ et « l'amplitude » est R. Remarquons qu'à ce moment-là le terme « fonction » est plutôt sous-entendu.

- <u>Pour $B.1.c$</u> : Il est demandé aux élèves d'« expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t » parce que nous voulons attirer l'attention des élèves sur la variable t. Ceci amènera les élèves à réfléchir et les incitera à argumenter que :
  - Cette tâche est impossible à première réflexion. En effet, t ne désigne qu'un nombre réel positif ou nul car d'après l'hypothèse de la partie B, le curseur t

va de 0 à 100. Dans ce cas, l'élève ne fait pas attention à l'énoncé dans lequel nous avons d'abord indiqué « Dans le même contexte que la partie A ».

- On peut avoir des valeurs négatives de t car t désigne un nombre réel, soit négatif soit positif soit nul, car d'après l'hypothèse de la partie A, t est un nombre réel car M est le point image du nombre réel t par l'enroulement de la droite d des réels autour du cercle $\mathscr{C}$.

  Dans ce cas, certains élèves peuvent se rappeler le principe d'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique vu en Seconde.

Ensuite, $\mathrm{B.1.}c$ demande aux élèves de modifier le curseur t allant de -100 à 100. Visuellement, l'affichage d'une branche de la courbe dans l'autre partie à gauche confirme la réponse donnée précédemment pour les valeurs prises par t. Apparemment, lorsque l'on anime le curseur t, les élèves peuvent s'apercevoir du déplacement de manière parallèle du point P sur la courbe et du point M relatif sur le cercle $\mathscr{C}$. Lorsque t varie en prenant, par exemple, les valeurs dans l'ordre croissant, le point P se déplace sur la courbe de gauche à droite, et simultanément, le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$ dans le sens trigonométrique, et inversement.

- <u>Pour $\mathrm{B.1.}d$</u> : Nous attendons que les élèves pensent à faire varier le curseur R pour répondre à la question : « Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? » puis ils peuvent s'apercevoir que :
  - les courbes ont la « même forme » dont l'amplitude est R ;
  - chaque fonction représentée est périodique (de période $2\pi R$) et bornée (comprise entre $-R$ et R).

  En ce qui concerne la justification, nous attendons plutôt une justification géométrique :
    - pour la « même forme » des courbes : à l'aide de la visualisation ;
    - pour la période : à l'aide d'un lien avec la lecture sur le cercle, la longueur d'un tour de déplacement du point M ;
    - pour « chaque fonction bornée » : à l'aide de l'ordonnée a du point P variant entre $-R$ et R, en lien avec la lecture graphique sur le cercle.

Phase 2 : *Fonction cosinus – période, variations de la fonction cosinus sur l'intervalle* $[0 ; 2\pi]$ *à l'aide de la lecture graphique*. (Voir *Figure 145* – Question 2)

<u>*Interaction Élèves-milieux*</u> : Chaque groupe d'élèves est confronté à deux tâches, notées $\mathrm{B.2.}a$ (question 2.a), $\mathrm{B.2.}b$, à accomplir en autonomie.

- <u>Pour $\mathrm{B.2.}a$</u> : Il est demandé aux élèves d'étudier le cas $R = 1$ afin de découvrir la fonction cosinus. Lorsque $R = 1$, la rétroaction du milieu objectif M_{-2} peut permettre aux élèves de reconnaître que le cercle $\mathscr{C}$ devient le cercle trigonométrique et que a est $\cos t$ à l'aide de la lecture graphique sur le cercle trigonométrique dans « Graphique 1 ». Nous attendons que l'élève arrive à donner l'expression algébrique de la fonction dont le point P décrit la courbe tracée dans « Graphique 2 ».
- <u>Pour $\mathrm{B.2.}b$</u> : Il est demandé aux élèves de modifier le curseur t allant de 0 à 2π, puis de lire graphiquement sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ si la courbe représentative de la fonction coupe l'axe des abscisses et, si oui, en combien de points dont on précisera les

abscisses. Ensuite, $B.2.b$ demande de construire le tableau de variations de cette fonction sur $[0\,;2\pi]$ et de vérifier ce tableau de variations dans la partie A à la question 2, pour finir.

Nous espérons que :

- les élèves donnent les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Nous faisons l'hypothèse que les élèves procèderont par l'une des deux méthodes suivantes :
    - soit ils font afficher les valeurs sur l'axe des abscisses avec « pi » à l'aide du logiciel ;
    - soit ils lisent graphiquement sur le cercle trigonométrique (revoir le « tableau 1 » à la question A.1, avec $R = 1$) les valeurs de t telles que $a = \cos t = 0$, en vérifiant visuellement, à la fois, la position de P sur l'axe des abscisses dans « Graphique 2 » et la position du point M en J puis en K dans « Graphique 1 ».
- les élèves établissent le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, à l'aide de la lecture graphique. Nous espérons que les connaissances exigées pour réaliser le tableau de variations sont « des connaissances disponibles » chez les élèves.

4. Mise en œuvre et Analyse *a posteriori* de la situation didactique

4.1. En France : Mise en œuvre dans une classe de Terminale Scientifique

4.1.1. Modalité et contexte

La situation didactique est mise en œuvre, en novembre 2016, dans une classe de Terminale Scientifique au lycée Sainte Louise à Paris.

Le lycée Sainte Louise est une école privée catholique. Les salles sont bien équipées. Les élèves sont issus du milieu socioprofessionnel moyen. Ils sont de niveau moyen voire fragile avec 3 bons élèves, selon l'enseignante.

Lors des expérimentations dans la classe, tout fonctionne comme prévu dans le scénario, sauf pour le temps.

SD-P (Partie A) – Durée 35 minutes (prévue 40 minutes) – le 16 novembre 2016

- Phase 1 (durée 5 minutes) - un travail individuel des élèves pour la question 1.
- Phase 2 (durée 20 minutes) - un travail en binôme des élèves pour les quatre questions.
- Phase 3 (durée 10 minutes ; prévue 15 minutes) - une mise en commun par l'enseignant.

SD-G (Partie B) – Durée 50 minutes (durée prévue) – le 17 novembre 2016

- Pour <u>Demi-Classe 1</u> (durée 36 minutes) : Découvrir la notion de fonction cosinus et ses propriétés via la version cosinus

  Phase 1 (durée 36 minutes ; prévue 30 minutes) : Découvrir les propriétés d'une famille de fonctions trigonométriques – périodicité, amplitude, symétrie.
    - Sous phase 1.1 (durée 20 minutes comme prévu) - un travail en binôme des élèves.

- Sous phase 1.2 (durée 15 minutes ; prévue 10 minutes) - une mise en commun par l'enseignant.

Phase 2 (durée 0 minute – la phase 2 n'a pas eu lieu car le temps a été raccourci ; prévue 20 minutes) : Découvrir la fonction cosinus – période, variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ à l'aide de la lecture graphique.

- Pour <u>Demi-Classe 2</u> (durée 50 minutes) : Découvrir la notion de fonction sinus et ses propriétés via la version sinus

Phase 1 (durée 38 minutes ; prévue 30 minutes) : Découvrir les propriétés d'une famille de fonctions trigonométriques – périodicité, amplitude, symétrie.

- Sous phase 1.1 (durée 20 minutes comme prévu) - un travail en binôme des élèves.
- Sous phase 1.2 (durée 15 minutes ; prévue 10 minutes) - une mise en commun par l'enseignant.

Phase 2 (durée 13 minutes ; prévue 20 minutes) : Découvrir la fonction sinus – période, variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ à l'aide de la lecture graphique.

- Sous phase 2.1 (durée 8 minutes ; prévue 10 minutes) - un travail en binôme des élèves.
- Sous phase 2.2 (durée 5 minutes ; prévue 10 minutes) - une mise en commun par l'enseignant.

4.1.2. Déroulement et Analyse *a posteriori*

4.1.2.1. **SD-P**

4.1.2.1.1. **Déroulement**

Remarquons d'abord que c'est la première fois que l'enseignante, dans sa vie professionnelle, met en œuvre une activité d'approche visant à découvrir les fonctions cosinus et sinus à partir du cercle de rayon non unitaire. Elle trouve que cette activité est intéressante. Donc, nous essayons ensemble de faire réaliser cette situation didactique.

Nous installons une caméra au fond de la classe. Nous enregistrons des discussions de trois groupes d'élèves durant le travail en binôme. Nous proposons aux élèves d'utiliser un stylo, de ne pas d'utiliser un crayon et de changer la couleur lors de la mise en commun avec l'enseignante. Nous récupérons les feuilles remplies et nous les rendons aux élèves après les avoir scannées.

L'enseignante commence par des rappels (environ 6 minutes) sur la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vue en 1$^{\text{re}}$ Scientifique : Cercle trigonométrique, formules d'addition du cosinus et du sinus (un élève au tableau), formules des angles associés (même élève). La circonférence du cercle trigonométrique et le radian n'ont pas fait partie de ces rappels. Remarquons que ces rappels n'ont pas été prévus. Il serait possible que les rappels aient influencé la réflexion des élèves en lien avec le cercle trigonométrique, durant la mise en œuvre de la situation didactique.

L'enseignante distribue la feuille de la SD-P aux élèves, suivant le scénario prévu (voir la section 4.1.1 précédente). Les élèves travaillent individuellement pour la question 1 durant environ 5 minutes. Puis, il s'agit d'un travail en binôme durant environ 20 minutes. La mise en commun a lieu durant environ 10 minutes.

Nous précisons que lors du déroulement de la phase 2 (travail en binôme), l'enseignante se déplace dans les rangs, elle intervient dans chaque groupe pour inciter les élèves à réfléchir et à avancer le travail. Nous pouvons dire que c'est la première rencontre pour les élèves avec un cercle de rayon non unitaire et que le travail avec un cercle de rayon R est une difficulté dans la réflexion des élèves. Au début du travail en binôme, chaque binôme pense aux connaissances liées au cercle trigonométrique, puis les élèves arrivent à s'adapter à ce cercle non trigonométrique.

4.1.2.1.2. **Analyse *a posteriori***

Les 27 élèves répartis en 13 groupes de 2 ou 3 (avec un seul groupe de 3) ont répondu aux questions de la SD-P. Les 13 groupes sont notés : Gr1, Gr2, …, Gr12, Gr13 ; les copies des élèves sont notées dans l'ordre de ces groupes : C1, C2, C3, …, C26, C27. Nous présentons ci-dessous un récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les questions pour les 13 groupes des élèves, (voir *Tableau 61*).

Q1 : Longueur d'un tour de déplacement du point M et Remplissage du tableau 1	
(C ; C)	12 (dont 4 indiquent le terme « périmètre » : Gr2, Gr4, Gr5, Gr13)
(NC ; C)	1 (Gr8)
Q2 : Variations de l'abscisse a et de l'ordonnée b du point M	
(C ; C)	9 (dont 8 donnent la bonne réponse à Q1)
(C ; NC)	3 (Gr4 ; Gr5 ; Gr12)
(NC ; NC)	1 (Gr2)
Q3 : Signe de l'abscisse a et de l'ordonnée b du point M	
(C ; C)	11 (dont 10 donnent la bonne réponse à Q1)
(NR ; NR)	2 (Gr5 ; Gr12)
Q4 : Expressions algébriques de a et de b en fonction de t et de R	
NC	4 dont 1 (Gr9) : $a = \cos(t) \times R$, $b = \sin(t) \times R$; 1 (Gr13) : $a = \cos(t \times R)$, $b = \sin(t \times R)$; 1 (Gr11) : $a^2 = R^2 - b^2$ (C) avec $b = \sin(t)$ (NC) et $b^2 = R^2 - a^2$ (C) avec $a = \cos(t)$ (NC) ; 1 (Gr4) : $\cos^2(M) + \sin^2(M) = R$, $t =$ angle de M, $\cos(M) = a$, $\sin(M) = b$
Presque C	1 (avec $a = R\cos(\vec{R}, \overrightarrow{Oa})$, $b = R\sin(\vec{R}, \overrightarrow{Oa})$ – Gr10-voir *Figure 155*)
NR	8

(Q : Question ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse)

Tableau 61 : Récapitulatif sur l'effectif réparti suivant les questions de la SD-P

Dans la *Tableau 61*, à la question 2, par exemple (C ; NC) signifie : c'est, dans l'ordre, correct pour le remplissage du tableau de « variations de l'abscisse a » et non correct pour celui du tableau de « variations de l'ordonnée b ».

Dans la phase 1 (travail individuel pour la question 1), aucun élève n'arrive à donner correctement la longueur d'un tour de déplacement du point M. Remarquons que l'enseignante prononce trois fois à mi-temps de travail individuel « lire bien l'énoncé ». Plus de la moitié des élèves arrivent à la donner avec 2π qui est la longueur de la circonférence du cercle trigonométrique. Concernant le remplissage du « tableau 1 » pour les trois premiers tours du point M, les élèves travaillent avec le cercle trigonométrique sans faire attention à la consigne. Il semble que les élèves ne réactivent que les connaissances liées au cercle trigonométrique, en donnant, par exemple au premier tour de cercle décrit par le point M :

- les valeurs de t comme étant $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$;
- les valeurs de a (l'abscisse du point M) comme étant $1, 0, -1, 0$;
- les valeurs de b (l'ordonnée du point M) comme étant $0, 1, 0, -1$.

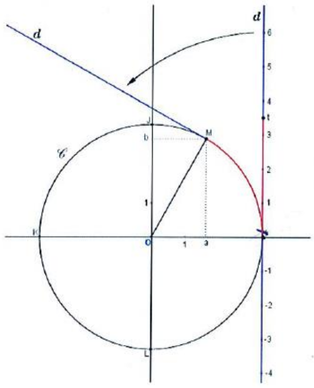
Nous pouvons dire que les connaissances liées au cercle trigonométrique sont disponibles pour l'élève. La disponibilité de ces connaissances est d'une part un appui dans la réflexion dans une nouvelle situation consistant en un travail avec un cercle de rayon non unitaire, et d'autre part, un obstacle dans l'avancement du travail dans cette telle situation dans le cas où les élèves ne sortent pas de l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$.

Durant la phase 2 (travail en binôme pour les quatre questions), au début de ce travail chaque binôme n'arrive pas à surmonter la difficulté rencontrée dans la phase 1. À un moment donné, les élèves reconnaissent que la consigne leur demande de travailler avec un cercle de rayon R (non unité). Nous constatons que les élèves réfléchissent et se posent des questions sur l'indication $2\pi R$ (voir *Figure 144* - Question 1), comme par exemple, dans un groupe (Gr6) lors de leur discussion : *pourquoi on a R ? (en prononçant entre eux cette question avec plusieurs fois) Du coup, ce n'est pas un cercle trigonométrique, c'est un cercle de rayon R, comment faire ?*

Nous pouvons dire qu'à l'aide de cette indication $2\pi R$, des élèves arrivent à remplir avec succès le « tableau 1 ». Pour la ligne des valeurs de t, les élèves ajoutent R en collant avec les valeurs de t indiquées précédemment et ils avancent pour le 2$^{\text{ème}}$ tour et le 3$^{\text{ème}}$ tour décrit par le point M. Pour la ligne des valeurs de a et celle des valeurs de b, ils modifient 1 en R et -1 en $-R$. Nous constatons que les élèves prennent un temps important pour remplir ce tableau 1. Nous pouvons dire que le travail avec un cercle de rayon R semble une difficulté pour les élèves qui ont d'habitude de travailler avec un cercle de rayon unité. Par exemple, un élève du Gr12 laisse une trace décrivant sa difficulté, (voir *Figure 149*).

Donc, l'existence $2\pi R$ dans le « tableau 1 » fait partie du milieu qui est suffisant riche pour nourrir la réflexion des élèves pour accomplir la tâche demandée.

Partie A



Dans un repère orthonormé direct d'origine O du plan, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit t un nombre réel. On considère le point M image du nombre réel t par l'enroulement de la droite d des réels autour du cercle $\mathscr{C}$. Soit $(a\ ;\ b)$ les coordonnées du point M.
A noter que cette droite d est perpendiculaire à l'axe des abscisses au point I et qu'elle est orientée par le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées du repère. (voir la figure ci-contre)

Ce n'est pas un cercle trigonométrique.
Je ne peux rien faire.

C24 du Gr12

Figure 149 : Difficulté avec un cercle de rayon non unitaire

Nous exposons maintenant question par question.

Pour la question 1 : le résultat final indique que la plupart des élèves réussissent la question 1. Cependant, avant d'aboutir à ce succès, nous constatons que dans la réflexion des élèves sur :

- la longueur d'un tour de déplacement du point M : comme réponse, il y a t (C23 du Gr12), 2π (C14 et C16 du Gr7 ; C27 du Gr 13), $2\pi R - t$ (C15 du Gr8), $2\pi r + t$ (C18 du Gr9), $2\pi R$.
- les valeurs de t, presque tous les groupes des élèves arrivent à donner toutes les valeurs de t pour le 3ème tour de cercle décrit par le point M.
- les valeurs prises par a et b : il y a une modification de 1 en R et -1 en $-R$ dans les traces écrites chez tous les groupes des élèves, (voir *Figure 150*).

1. Déterminer la longueur d'un tour de déplacement du point M.

Le longueur d'un tour de déplacement du point M est 2π

Non modifié

Puis, compléter le tableau 1 ci-dessous.

C27 du Gr13

Tableau 1

	1er tour de cercle décrit par le point M				2ème tour de cercle décrit par le point M				3ème tour de cercle décrit par le point M			
M se situe au point	I	J	K	L	I	J	K	L	I	J	K	L
Valeurs exactes de t	~~R~~0	$\frac{\pi}{2}R$	~~K~~πR	$\frac{3\pi}{2}R$	$2\pi R$	$\frac{5\pi}{2}R$	$3\pi R$	$\frac{7\pi}{2}R$	$4\pi R$	$\frac{9}{2}\pi R$	$5\pi R$	$\frac{11\pi}{2}R$
Valeur exacte de a	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0
Valeur exacte de b	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$

Figure 150 : Modification lors de la réflexion – question 1

Nous constatons que les élèves remplissent le « tableau 1 », colonne par colonne (point par point dans l'ordre) pour les valeurs de t, a, b : avec la stratégie 1 pour t et avec la stratégie 2 pour a et b. Dans l'ensemble du travail pour remplir le « tableau 1 », l'indication $2\pi R$ est un élément du milieu principal qui sert pour les élèves à réaliser le remplissage du tableau 1 avec succès.

Pour la question 2 : Les 13 groupes ont répondu à la question 2, un groupe n'arrive pas à remplir correctement les deux tableaux de variations (voir *Figure 151*), et 3 groupes ont des difficultés, pour certains intervalles, à réaliser le tableau de variations de b (voir *Figure 152*).

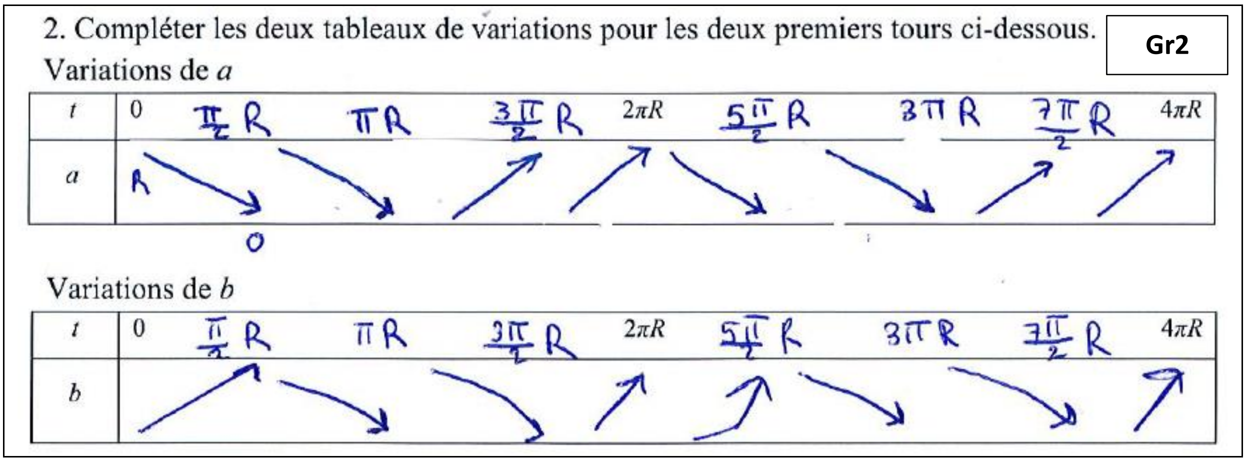


Figure 151 : Difficultés à réaliser le remplissage les tableaux de variations à la question 2

Dans la *Figure 151*, le Gr2 semble s'approprier les variations de a et de b en fonction de t. Les deux tableaux de variations donnés sont presque corrects ; une difficulté mise en évidence pour le Gr 2, c'est que le placement des flèches est mal fait et qu'il manque les valeurs prises par a et b aux bornes des intervalles décrits par t.

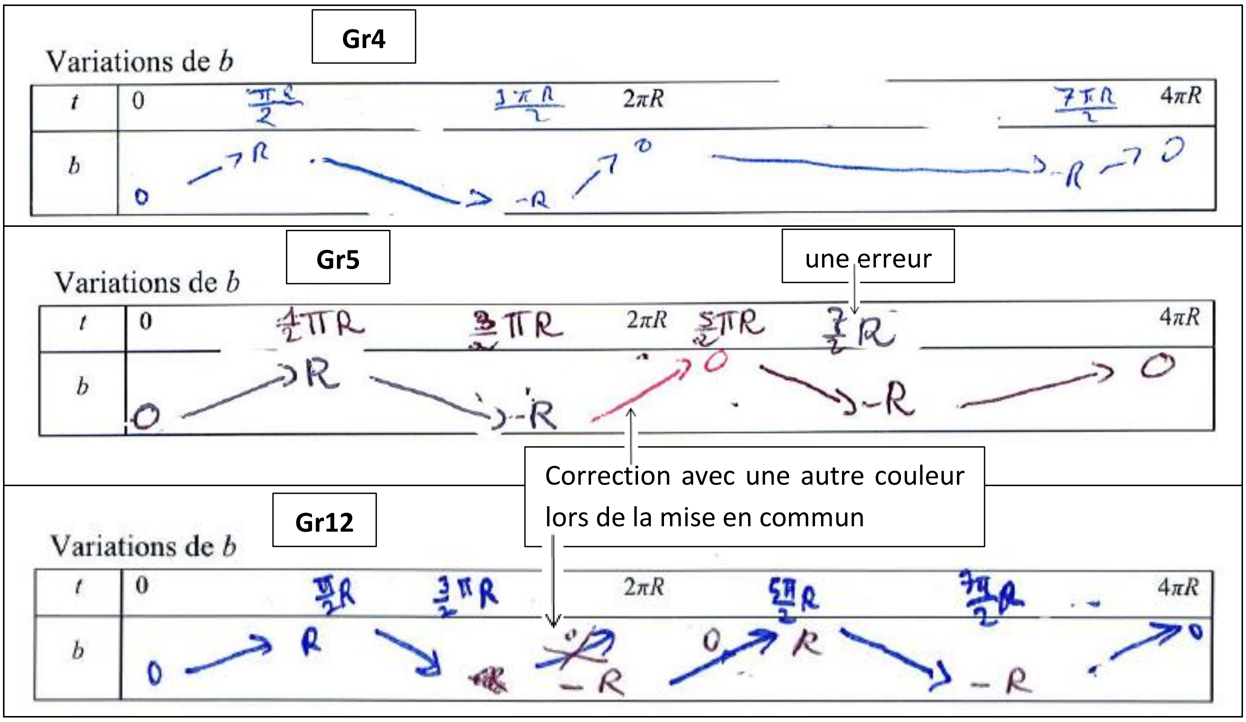


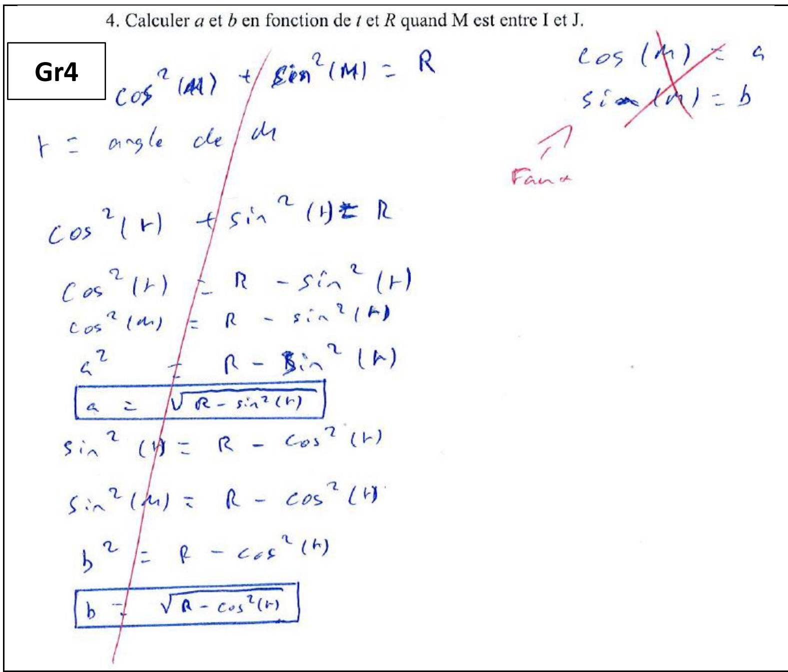
Figure 152 : Difficultés à réaliser le tableau de variations de b

Nous constatons que les élèves utilisent la stratégie 5 (voir la section 3.1, p. 318). Nous pouvons dire que le « tableau 1 » rempli est le milieu principal dont se sert les élèves pour compléter les tableaux de variations de a et de b à la question 2.

Pour la question 3 : 2 groupes (Gr5, Gr12) n'ont pas répondu à la question 3 et les 10 autres ont bien rempli les deux tableaux de signe.
Nous constatons que les élèves utilisent la stratégie 8 (voir la section 3.1, pp. 319-320). Nous pouvons dire que le « tableau 1 » (réalisé à la question 1) et les « tableaux de variations de a

et de b » (réalisés à la question 2) constituent le milieu principal dont se servent les élèves pour compléter les tableaux de signe de a et de b à la question 3.

Pour la question 4 : 8 groupes n'ont pas répondu à la question 4 et 5 autres groupes ont donné une réponse incorrecte pour les expressions algébriques de a et de b en fonction de t et de R. Nous nous intéressons ci-dessous à présenter les réponses incorrectes de ces 5 groupes.


4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Gr4

$\cos^2(M) + \sin^2(M) = R$

t = angle de M

$\cos^2(t) + \sin^2(t) = R$

$\cos^2(t) = R - \sin^2(t)$

$\cos^2(M) = R - \sin^2(t)$

$a^2 = R - \sin^2(t)$

$\boxed{a = \sqrt{R - \sin^2(t)}}$

$\sin^2(t) = R - \cos^2(t)$

$\sin^2(M) = R - \cos^2(t)$

$b^2 = R - \cos^2(t)$

$\boxed{b = \sqrt{R - \cos^2(t)}}$

$\cos(M) = a$

$\sin(M) = b$

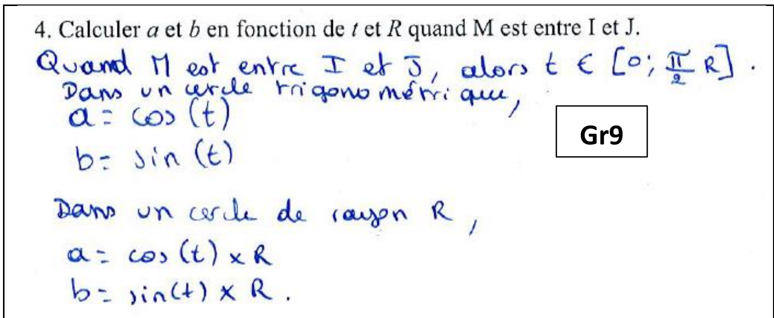
Faux

Gr4 a barré en rouge lors de la mise en commun.

Gr4 considère que t désigne « angle de M ». Nous supposons que ce groupe aurait voulu dire l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ et qu'il pense que t désigne une mesure en radians de cet angle.

Pour Gr4, a et b désignent le cosinus et le sinus de l'angle qui sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M, avec une erreur dans l'application du théorème de Pythagore. Comme nous demandons de déterminer a et b en fonction de t et R, Gr4 s'oblige à chercher à donner des expressions algébriques de a et b, contenant t et R, sans tenir compte que du fait que $\cos t$ et $\sin t$ sont l'abscisse et l'ordonnée du point M, associé à t, dans le cercle trigonométrique (rayon unitaire).

Figure 153 : Réponse donnée par Gr4 à la question 4


4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Quand M est entre I et J, alors $t \in [0 ; \frac{\pi}{2} R]$.

Dans un cercle trigonométrique,

$a = \cos(t)$

$b = \sin(t)$

Dans un cercle de rayon R,

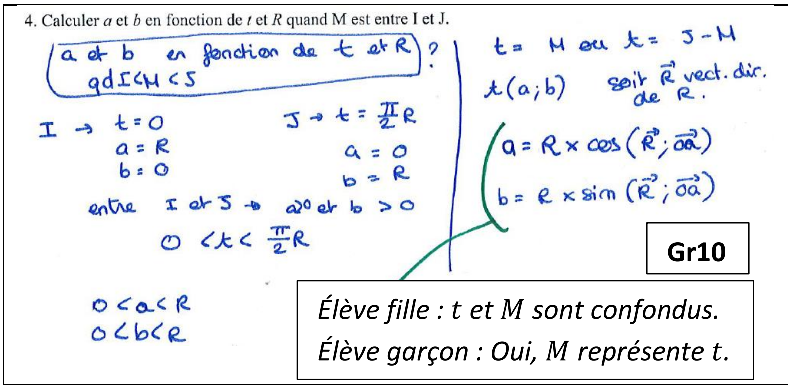
$a = \cos(t) \times R$

$b = \sin(t) \times R$.

Gr9

Gr9 se réfère au cosinus et au sinus d'un nombre réel définis dans l'OM_{CTrigo}, vus en Seconde. Donc, Gr9 en déduit les valeurs de a et de b pour un cercle de rayon R. Nous pouvons dire que Gr9 ne pense pas à la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle et le rayon du cercle. Il serait possible que Gr9 ne connaisse pas cette relation.

Figure 154 : Réponse donnée par Gr9 à la question 4


4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

a et b en fonction de t et R qd I<M<J ?

I → $t = 0$, $a = R$, $b = 0$

J → $t = \frac{\pi}{2} R$, $a = 0$, $b = R$

entre I et J → $a > 0$ et $b > 0$

$0 < t < \frac{\pi}{2} R$

$0 < a < R$

$0 < b < R$

$t = M$ ou $t = J - M$

$t(a ; b)$ soit $\vec{R}$ vect. dir. de R.

$a = R \times \cos(\vec{R} ; \vec{oa})$

$b = R \times \sin(\vec{R} ; \vec{oa})$

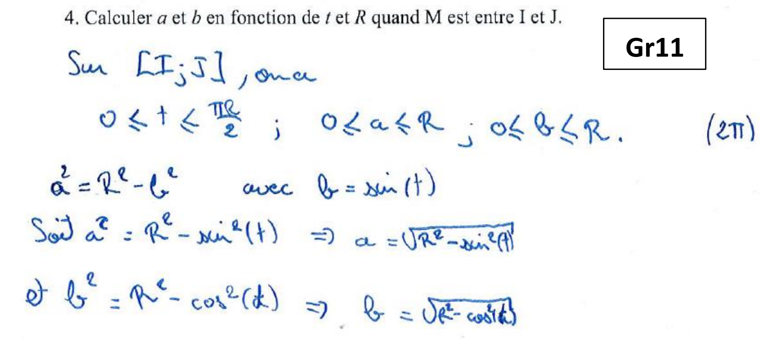
Gr10

Élève fille : t et M sont confondus.

Élève garçon : Oui, M représente t.

Gr10 commet une confusion en pensant que t est confondu avec M sur le cercle, et donc t a pour coordonnées a et b. Cependant, Gr10 a une bonne idée en pensant à multiplier le cosinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ (resp. le sinus) par R (malgré une erreur dans l'écriture avec les représentants des vecteurs et avec inversion des vecteurs). Ici, l'obstacle pour Gr10 consiste à trouver une mesure (en radians) de l'angle.

Figure 155 : Réponse donnée par Gr10 à la question 4



4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Gr11

Sur $[I;J]$, on a

$0 \leq t \leq \frac{\pi R}{2}$; $0 \leq a \leq R$; $0 \leq b \leq R$. (2π)

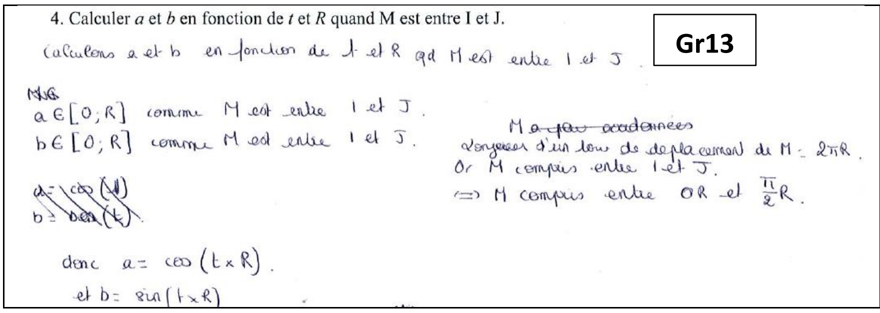
$a^2 = R^2 - b^2$ avec $b = \sin(t)$

Soit $a^2 = R^2 - \sin^2(t) \Rightarrow a = \sqrt{R^2 - \sin^2(t)}$

et $b^2 = R^2 - \cos^2(t) \Rightarrow b = \sqrt{R^2 - \cos^2(t)}$

Gr11 a raison pour la relation $a^2 = R^2 - b^2$. Les a et b de Gr11 sont $\cos t$ et $\sin t$ (non explicite comme dans le cas de b). Puis, Gr11 donne a et b en fonction de t et R pour accomplir la tâche demandée, en oubliant par exemple la relation fondamentale $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$. Nous pouvons dire que Gr11 ne vérifie pas, par exemple, $b = \sqrt{R^2 - \cos^2(t)}$ et $b = \sin(t)$ en lien avec la relation fondamentale.

Figure 156 : Réponse donnée par Gr 11 à la question 4



4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Gr13

Calculons a et b en fonction de t et R qd M est entre I et J.

$a \in [0;R]$ comme M est entre I et J.

$b \in [0;R]$ comme M est entre I et J.

~~$a = \cos(t)$~~

~~$b = \sin(t)$~~

donc $a = \cos(t \times R)$.

et $b = \sin(t \times R)$

~~M a pour coordonnées~~

longueur d'un tour de deplacement de M = $2\pi R$.

Or M compris entre I et J.

$\Rightarrow$ M compris entre $0R$ et $\frac{\pi}{2}R$.

Gr13 aurait voulu dire que t est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}R$ dans le cas où M se situe sur un quart du cercle. Il semble que dans un premier temps, Gr13 pense que $a = \cos t$ et $b = \sin t$, puis il change d'idée.

Figure 157 : Réponse donnée par Gr13 à la question 4

Dans la *Figure 157*, nous pensons que le Gr13 se réfère aux connaissances vues en Seconde et qu'il fait une remarque sur les valeurs prises par t dans l'enroulement sur le cercle de rayon R non unitaire. Nous recopions ici ses traces écrites :

Or M compris entre I et $J \Leftrightarrow M$ compris entre $0R$ *et* $\frac{\pi}{2}R$

donc $a = cos(t \times R)$ *et* $b = sin(t \times R)$

Nous pouvons penser que pour le Gr13, t représente un nombre réel dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique. Il semble que le Gr13 remarque que les valeurs prises par un nombre réel, associé au point M, dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle de rayon R sont généralement sous forme de produit d'un nombre réel dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique par le rayon R. Le Gr13 en déduit d'abord qu'un nombre réel associé au point M sur le cercle de rayon R est $t \times R$; ici, ce sont les valeurs prises par t vues habituellement dès la Seconde. Il applique à tort les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel vues en Seconde. Nous pouvons dire que l'idée du Gr13 peut être issue de ce que les manuels de Seconde n'attirent pas l'attention des élèves sur le fait que les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel s'appliquent seulement dans le cercle trigonométrique (rayon unitaire), relié au principe de l'enroulement de la droite numérique.

Nous pouvons dire que les élèves ne réactivent pas en autonomie la connaissance sur la proportionnalité entre « angle au centre » et « longueur d'un arc de cercle intercepté par l'angle ».

Remarque : Concernant la trace écrite à la question 4, des ostensifs scripturaux à remarquer tout particulièrement apparaissent comme : $\cos(M)$, $\sin(M)$ (voir *Figure 153*) ; $t = M$ ou $t = J - M$, $t(a\,;b)$ (voir *Figure 16*) ; M compris entre $0R$ et $\frac{\pi}{2}R$ (voir *Figure 157*). Et d'après la vérification avec l'enregistrement audio des trois groupes, deux de ces trois groupes utilisent des termes incorrects comme t vaut I, t vaut K, etc. (au moment de chercher les valeurs prises par t à la question 1) ; t et M sont confondus (au moment de chercher une stratégie pour répondre à la question 4). Il semble que certains élèves identifient des objets, leurs représentants et d'autres choses liées aux connaissances apprises sur l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$.

Mise en commun (situation didactique $S0$)

La mise en commun se passe en 10 minutes environ pour les quatre questions. Le texte de l'énoncé accompagné par la figure et la question 1 toute entière sont projetés sur le tableau. L'enseignante commence un peu vite par remplir le « tableau 1 », en sautant l'étape qui consiste à « déterminer la longueur d'un tour de déplacement du point M », mais elle revient rapidement sur cette étape. Le remplissage du « tableau 1 » est fait colonne par colonne dans l'ordre : « 1^er^ tour de cercle décrit par le point M », « 2^ème^ tour de cercle décrit par le point M », « 3^ème^ tour de cercle décrit par le point M » ; et, pour chaque grande colonne, on remplit colonne par colonne, les valeurs de t, de a et de b. L'enseignante mène le remplissage pour le premier tour en posant des questions cas par cas, puis elle envoie une élève au tableau pour remplir les colonnes du deuxième tour et du troisième tour. Ensuite, cette élève continue à remplir, sous le contrôle de l'enseignante, les deux tableaux de variations à la question 2 et les deux tableaux de signe de a et de b à la question 3.

Lors du remplissage des tableaux de variations, l'enseignante intervient en posant des questions concernant les extremums et les valeurs de t correspondant aux extremums. On utilise la stratégie 1 pour t et la stratégie 2 pour a et b, à l'aide du « tableau 1 » réalisé à la question 1. L'enseignante n'attire pas l'attention des élèves pour vérifier les variations de a et de b sur le cercle $\mathscr{C}$ (Stratégie 4).

Lors du remplissage des tableaux de signe (Stratégie 7), l'enseignante intervient comme précédemment, en demandant par exemple quelles sont les valeurs de t pour lesquelles a s'annule. Même remarque que précédemment : il n'y a pas de vérification sur le cercle $\mathscr{C}$ (Stratégie 6).

L'enseignante corrige la Question 4 en posant des questions étape par étape. Elle utilise la stratégie 10 (voir la section 3.1, p. 321).

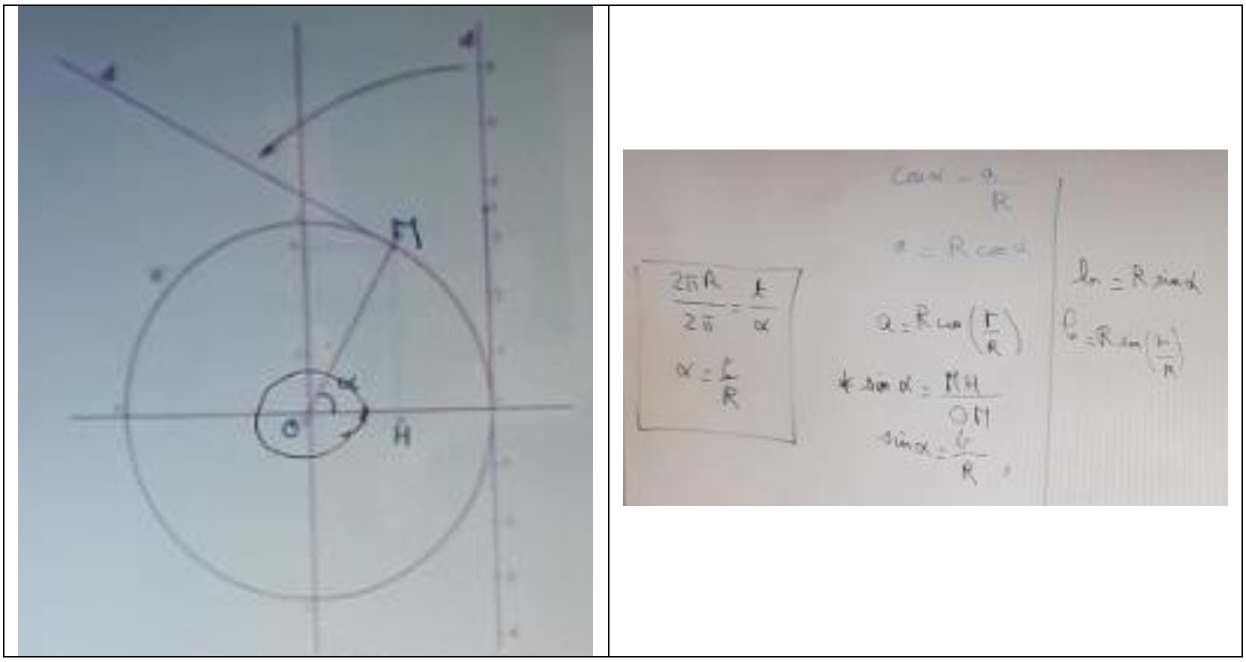


Figure 158 : Mise en commun pour la question 4 de le SD-P

Nous voyons qu'avec des questions posées par l'enseignante en se référant aux connaissances sur le cercle trigonométrique, un élève donne le rapport de la proportionnalité d'abord $\frac{2\pi R}{360} = \cdots$ (juste le premier membre du rapport car l'enseignante l'interrompt), puis un autre élève propose 2π à la place de 360 à la suite de la remarque de l'enseignante « pas en degrés », ensuite l'élève du début complète son rapport de proportionnalité $\frac{2\pi R}{2\pi} = \frac{t}{\alpha}$. L'enseignante finit alors la question 4 en posant des questions guidées.

Nous pouvons dire que dans l'ensemble de la correction de la question 4 :

- c'est l'enseignant qui guide, depuis le début jusqu'à la fin, en accompagnant par de petites questions ;
- les élèves n'ont pas d'idée de manière autonome ;
- mais il y a des élèves qui répondent correctement aux questions de l'enseignante.

Dans l'ensemble de la mise en commun dans la situation didactique, nous pouvons dire que le milieu d'apprentissage M_0 (y compris la situation d'apprentissage S_{-1}) est un milieu enrichi via la situation a-didactique. Bien que ce soit la première rencontre avec un cercle de travail *R* relié à la trigonométrie et qu'il y ait une difficulté à surmonter durant le travail individuel et durant le début du travail en binôme, les élèves arrivent à adapter leurs connaissances dans l'OML_{CTrigo} vues en Seconde et en 1re Scientifique.

4.1.2.2. **SD-G**

4.1.2.2.1. **Déroulement**

Nous installons une caméra au fond de la classe. Nous faisons enregistrer, lors du travail en binôme, des discussions de trois groupes d'élèves.

La mise en œuvre de la SD-G se déroule un jour après celle de la SD-P. Elle se passe dans la salle d'informatique pour deux demi-classes (l'une après l'autre).

La demi-classe 1 (DC1) va découvrir les propriétés de la fonction cosinus via la *version cosinus* et que la demi-classe 2 (DC2), les propriétés de la fonction sinus via la *version sinus*.

La phase 2 de la SD-G pour la DC1 n'a pas eu lieu à cause du temps raccourci à 36 minutes de la session.
Il n'y a pas de problème pour la DC2. La phase 1 et la phase 2 ont eu lieu comme prévues.
Donc, nous faisons le choix de présenter seulement ce qui se passe pour la DC2 dans l'analyse *a posteriori* (rappels : fonction sinus, avec le point Q dans le Graphique 2).

La DC1 (14 élèves) est décomposée en 7 groupes de deux élèves, et la DC2 (14 élèves), en 6 groupes de deux ou trois élèves. Les 6 groupes de DC2 sont notés DC2Gr1, DC2Gr2, …, DC2Gr6.
Pour chaque demi-classe, avant de commencer le travail, l'enseignante vérifie que chaque groupe d'élèves a bien ouvert le fichier GeoGebra avec les deux fenêtres graphiques programmées, et propose aux élèves de ne pas toucher le clavier. Puis, l'enseignante explique environ 2 minutes la consigne et la durée du travail à faire. Lors du déroulement, l'enseignante se déplace pour observer et intervenir (si c'est nécessaire) dans chaque groupe pour faire avancer le travail. Remarquons que chaque élève a aussi devant lui la feuille de la partie A remplie du travail de la veille.

4.1.2.2.2. **Analyse *a posteriori***

Lors du déroulement, il semble que les élèves soient satisfaits de la SD-G. Il y a des exclamations comme : super beau !, c'est cool !, c'est magique !, etc.
La feuille de la partie A remplie durant la situation a-didactique et la situation didactique est un milieu enrichi qui sert comme instrument pour nourrir la réflexion dans la SD-G via les observations et expérimentations, suivant les questions posées dans la phase 1 et dans la phase 2 de la SD-G.

4.1.2.2.2.1. **Phase 1 de la SD-G**

Rappelons que la phase 1 de la SD-G consiste en l'identification des propriétés d'une famille de fonctions trigonométriques – périodicité, amplitude. (voir *Figure 145* – Question 1)
Rappelons aussi que la DC2 va découvrir la fonction sinus (avec le point Q - Graphique 2).
Les six groupes de 14 élèves de la DC2 répondent aux trois premières questions, et cinq de six groupes, à la quatrième question (le groupe DC2Gr6 n'y répond pas).
Nous exposons maintenant les résultats question par question.

Question 1.a :

À l'étape 1 de la question 1.a (Faire varier le curseur t. Que voit-on ? Que décrit le point Q ?), cinq des six groupes disent que le point Q décrit une courbe, que quatre précisent clairement comme une sinusoïde (ou une courbe sinusoïdale). Trois de ces quatre groupes complètent leurs phrases « entre R et $-R$ » (DC2Gr3, DC2Gr6) ou « entre 1 et -1 » (DC2Gr4).

Un autre groupe (DC2Gr1) dit que le point Q décrit la valeur de $\sin\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}\right)$ en fonction de la distance de t.
Remarquons qu'en ce qui concerne le terme « sinusoïde », les élèves l'ont déjà rencontré dans un cours de physique au début de l'année scolaire (l'enseignante a posé la question à certains élèves après la mise en fonctionnement de la SD-G).

D'après la conversation des élèves, par exemple DC2Gr6, avant de généraliser que « le point Q décrit une courbe sinusoïdale entre R et $-R$ », ce groupe fait des essais (choix initial $R = 3$, puis choix $R = 1$).
À l'étape 2 de la question 1.a (Cliquer sur le point Q, puis écrire dans la base de saisie : Lieu$[Q, t]$. Que voit-on ?), chaque groupe reconnaît que le point Q décrit une courbe sinusoïdale. Remarquons que le groupe DC2Gr1 n'arrive pas à donner la bonne réponse à l'étape 1 mais ce groupe arrive à donner une bonne réponse à l'étape 2 : « On voit une fonction sinusoïdale dont le maximum est R et le minimum est $-R$ ».

Dans l'ensemble de la question 1.a, nous pouvons dire que :

- les élèves observent et expérimentent ce qui se passe avec le cercle de rayon R (Graphique 1), ce qui se passe et apparaît dans le registre graphique du cadre fonctionnel (Graphique 2) ;
- les élèves voient un lien entre les deux graphiques (autrement dit, un lien entre OML dans un cercle et $\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$), par exemple, sachant que t décrit l'ensemble des nombres réels, comment lire graphiquement les valeurs prises par t, dans le Graphique 1 au niveau du cercle, à l'aide de son point image M dans l'enroulement de la droite numérique, et comment lire graphiquement les valeurs prises par t dans le Graphique 2 au niveau du graphe fonctionnel.

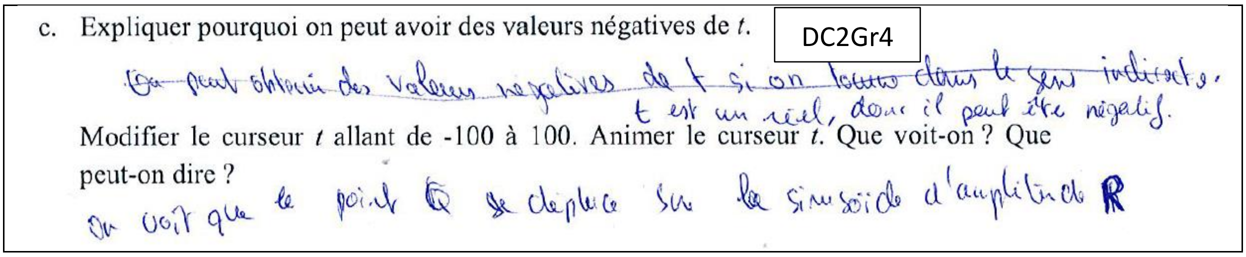
<u>Question 1.b</u> :
À l'étape 1 de la question 1.b (Faire varier le rayon R (t est fixé). Que voit-on ? Que peut-on dire ?), quatre des six groupes d'élèves s'intéressent aux extremums qui varient suivant les valeurs de R, dont deux groupes précisent les extremums R et $-R$. Trois des six groupes s'intéressent à une amplitude qui varie selon R. Deux des six groupes s'intéressent au point Q qui ne bouge pas sur la courbe lorsque R varie et t est fixé pour le point Q, dont un groupe (DC2Gr6) parle d'un antécédent, en disant que « Q a toujours le même antécédent qui est t ».
À l'étape 2 de la question 1.b (Déplacer le point Q sur la courbe (R est fixé). Que remarque-t-on ?), les six groupes remarquent dans cette étape 2 que t varie, M se déplace sur le cercle lorsque Q se déplace sur la courbe. Un des six groupes précise en détails que « Nous remarquons qu'en déplaçant Q sur la courbe, t varie et le point M se déplace sur le cercle, dans le sens trigonométrique quand l'abscisse de Q augmente et dans l'autre sens quand l'abscisse de Q diminue ».
Dans l'ensemble de la question 1.b, nous pouvons dire que les élèves reconnaissent la sinusoïde, les extremums, l'amplitude, l'antécédent t (qui est l'abscisse de Q dans le Graphique 2), et qu'ils remarquent principalement un lien entre Q, t et M en lisant simultanément le Graphique 2 et le Graphique 1.
Nous constatons que durant la discussion dans chaque groupe, il semble que :

- aucun groupe ne pense à faire des remarques sur les cas particuliers des quatre points spécifiques I, J, K, L sur le cercle $\mathscr{C}$ vus dans la SD-P (papier-crayon) pour observer/voir la position du point Q (dans le Graphique 2), la position relative du point M (dans le Graphique 1) en fonction de t ;
- les termes comme « période », « même motif » n'ont pas été prononcés ; donc, aucun groupe ne remarque les variations de la période.

Pourtant, les élèves verront tout cela durant la mise en commun avec l'enseignante.

<u>Question 1.c</u> :

À l'étape 1 de la question 1.c (Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t), trois groupes donnent la bonne réponse (DC2Gr2 – à l'aide de l'indication de la part de l'enseignante : « regardez la feuille d'hier » ; DC2Gr3 ; DC2Gr4 – voir *Figure 159*). Un groupe (DC2Gr6) justifie que l'on peut aller dans le sens indirect ; remarquons que le DC2Gr4 a dans un premier temps (avant de barrer – voir *Figure 159*) une idée proche du groupe DC2Gr6. La justification du DC2Gr5 est incompréhensible : « Ce point M alterne entre R et $-R$ faisant varié son sinus et son cosinus ». La justification du DC2Gr1 est incorrecte : « On peut avoir des valeurs négatives de t lorsque l'angle formé est obtus » ; ici, ce groupe aurait voulu dire l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ est obtus car pour les deux premières questions, il parle de cet angle. Il semble que le DC2Gr1 ait une confusion entre t et le cosinus de l'angle.


c. Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t.

DC2Gr4

~~On peut obtenir des valeurs négatives de t si on tourne dans le sens indirect.~~

t est un réel, donc il peut être négatif.

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

On voit que le point Q se déplace sur la sinusoïde d'amplitude R

<u>Figure 159</u> : Justification modifiée à la question 1.c de la SD-G

À l'étape 2 de la question 1.c (Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?), il y a plusieurs réponses.

- Un groupe (DC2Gr2) observe le déplacement du point M sur le cercle et du point Q, sur la sinusoïde, en faisant animer le curseur t allant de -100 vers 100.

  Voici la réponse de ce groupe : « La sinusoïde commence à -100 et en animant le curseur t, le point M avance sur le cercle selon le sens trigonométrique et Q avance sur la sinusoïde ».
- Trois groupes (DC2Gr3, DC2Gr4, DC2Gr5) ont une idée proche. Ils disent juste que le point Q se déplace sur la sinusoïde.
- Un groupe (DC2Gr6) observe le déplacement du point Q sur la courbe en fonction de t.

  Voici la réponse de ce groupe : « Rien ne change sur la courbe. Quand t tend vers $+100$, Q se déplace vers la droite ; quand t tend vers -100 alors Q se déplace vers la gauche ».
- Un autre groupe (DC2Gr1) observe l'enroulement de la droite numérique, (voir *Figure 160*). Ce groupe se situe plutôt dans le Graphique 1.

c. Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t.

on peut avoir des valeurs négatives de t lorsque l'angle formé est obtu.

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

DG2Gr1

On voit que l'enroulement de la droite tangente au cercle lorsque l'on va ... vers -∞, il se fait dans le sens indirect. Donc lorsque t va vers -∞, l'enroulement se fait dans le sens indirect, et lorsque t va vers +∞ l'enroulement se fait dans le sens direct

Figure 160 : Réponse du groupe DC2Gr1 à la question 1.c

Par conséquent, cinq des six groupes s'intéressent à observer le déplacement du point Q en fonction de t et à remarquer la manière dont se fait ce déplacement selon t, dont un groupe (DC2Gr2) qui l'observe un peu plus profondément par rapport à quatre autres groupes, (voir *Figure 161*) : déplacement du point M sur le cercle $\mathscr{C}$ et celui du point Q sur la sinusoïde.

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

DG2Gr2

La sinusoïde commence à -100 et en animant le curseur t, le point M avance sur le cercle selon le sens trigonométrique et Q avance sur la sinusoïde.

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

DG2Gr3

Le point Q se déplace sur des valeurs négative de la courbe sinusoïdale

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

DG2Gr4

On voit que le point Q se déplace sur la sinusoïde d'amplitude ℝ

Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?

DG2Gr5

On voit que la courbe est maintenant dans ℝ et donc plus le point Q varie dans ℝ.

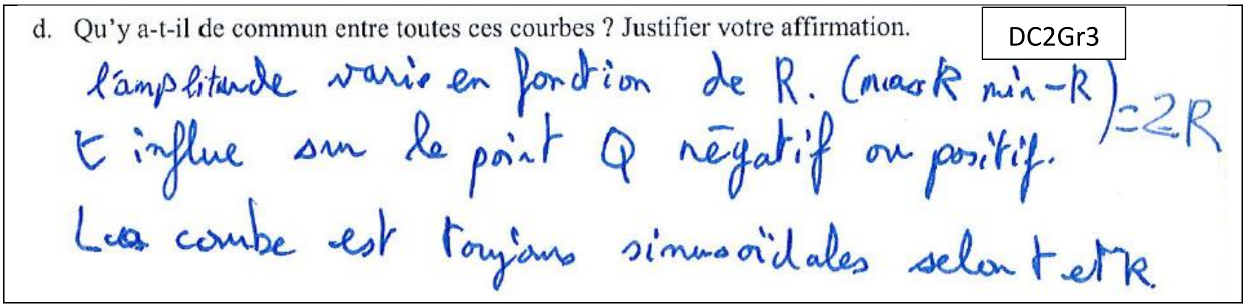
Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ? Rien se change sur la courbe. Quand t tend vers +100 Q se déplace vers la droite quand t tend vers -100 alors Q se déplace vers la gauche

DG2Gr6

Figure 161 : Réponse à la question 1.c à l'étape 2

Dans l'ensemble de la question 1.c, les élèves semblent reconnaître que t est un nombre réel, que le point Q décrit la courbe en fonction de t et que le point M se déplace sur la courbe $\mathscr{C}$, et ils remarquent principalement le déplacement du point Q selon que t prend des valeurs croissantes ou décroissantes. C'est vraiment important que les élèves appréhendent le déplacement du point M au niveau du cercle dans le sens antihoraire (resp. dans le sens horaire) et celui du point Q, de la gauche vers la droite (resp. de la droite vers la gauche), décrivant une sinusoïde au niveau du graphe fonctionnel, dépendant des valeurs prises par t.

Question 1.d :
Cette question 1.d consiste en un bilan des trois questions précédentes (Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? Justifier votre affirmation.).
Un groupe (DC2Gr6) ne répond pas à la question 1.d. Quatre des cinq groupes qui y répondent affirment que ces courbes sont des courbes sinusoïdales dont les extremums varient en fonction de R (DC2Gr1, DC2Gr2, DC2Gr3, DC2Gr5). Le groupe DC2Gr4 affirme un peu bizarrement : « Ces courbes représentent tous le rayon du cercle » ; peut-être, ce groupe aurait voulu dire que ces courbes dépendent du rayon R du cercle. Le groupe DC2Gr3 parle de l'amplitude et de l'influence de t sur le point Q, (voir *Figure 162*).


d. Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? Justifier votre affirmation.

DC2Gr3

l'amplitude varie en fonction de R. (max R min −R) = 2R
t influe sur le point Q négatif ou positif.
La courbe est toujours sinusoïdales selon t et R.

Figure 162 : Réponse du groupe DC2Gr3 à la question 1.d

Donc, la plupart des groupes d'élèves reconnaissent que ce sont les courbes sinusoïdales dont les extremums sont R et $-R$.

Mise en commun (situation didactique $S0$)
La mise en commun pour la phase 1 se passe en 15 minutes environ. Il s'agit d'un dialogue collectif entre l'enseignante et les élèves. L'enseignante guide en posant des questions. Elle attire l'attention des élèves sur la lecture graphique de ce qui se passe simultanément dans le Graphique 1 (registre graphique avec le cercle de rayon R, dans le cadre géométrique) et dans le Graphique 2 (registre graphique du cadre fonctionnel) ; notamment lorsque t varie, la position de M en quatre points spécifiques I, J, K, L (vus dans la SD-P, avec une question posée de l'enseignante : Est-ce que vous vous rappelez d'hier le tableau 1 ?) et la position relative de Q de coordonnées $(t\,;\,b)$. Durant la mise en commun, des élèves arrivent à répondre aux questions de l'enseignante posées étape par étape, menant à ce que nous attendons dans l'analyse *a priori* : le point Q décrit une sinusoïde, les extremums R et $-R$, l'amplitude $2R$, la période $2\pi R$ (à partir d'un motif répétitif → période → t → 2π). Nous voulons préciser un dialogue collectif menant à la période $2\pi R$ ci-après.

E (Enseignante) : Qu'est-ce que vous observez ? (*En faisant animer le curseur* t)
Éls (Élèves) : Toujours les mêmes choses.
E : C'est-à-dire ?
Éls : Le point Q décrit une sinusoïde.

Un motif répétitif.

E : S'appelle comment un motif répétitif ?

Éls : Une période.

Une période ? Non

C'est périodique.

E : Effectivement, c'est périodique.

E : La période est de combien ?

Éls : t

E : Non

Éls : 2π

2π ?

$2\pi R$

E : 2π ou $2\pi R$? *En faisant remarquer le premier tour de déplacement du point M sur le cercle, et comment déplacer simultanément le point Q au niveau du graphe de la fonction (en même temps, une élève fait un signe rond avec sa main droite).*

Éls : $2\pi R$

Et pour le bilan à la question 1.d, des élèves arrivent à donner les réponses suivantes : ces courbes sont des sinusoïdes dont l'amplitude $2R$ dépend de R ; ce sont des fonctions périodiques de période $2\pi R$.

Nous constatons que la motivation des élèves est intéressante durant la situation didactique. Nous pouvons dire que les objets visés dans la phase 1 sont effectivement institutionnalisés via les réponses des élèves. Dans l'ensemble de la situation didactique, via un dialogue collectif, la lecture graphique de l'un (Graphique 1) à l'autre (Graphique 2) est mise en évidence de manière parallèle :

- le déplacement du point M et le déplacement du point Q qui décrit une sinusoïde lorsque t varie dans l'ordre croissant et dans l'ordre décroissant,
- la position du point M en quatre points spécifiques sur le cercle de rayon R et la position relative du point Q,
- quand M fait un tour, la courbe décrit une « période » de $2\pi R$; quand M fait deux tours, la courbe décrit deux « périodes » donc $4\pi R$, par exemple.

4.1.2.2.2.2. **Phase 2 de la DS-G**

Rappelons que la phase 2 consiste à découvrir la fonction sinus dans le cas où $R = 1$.

Les six groupes d'élèves répondent aux deux questions de la phase 2.

Question 2.a :

Rappelons que la question 2.a consiste à « Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point Q décrit la courbe ».

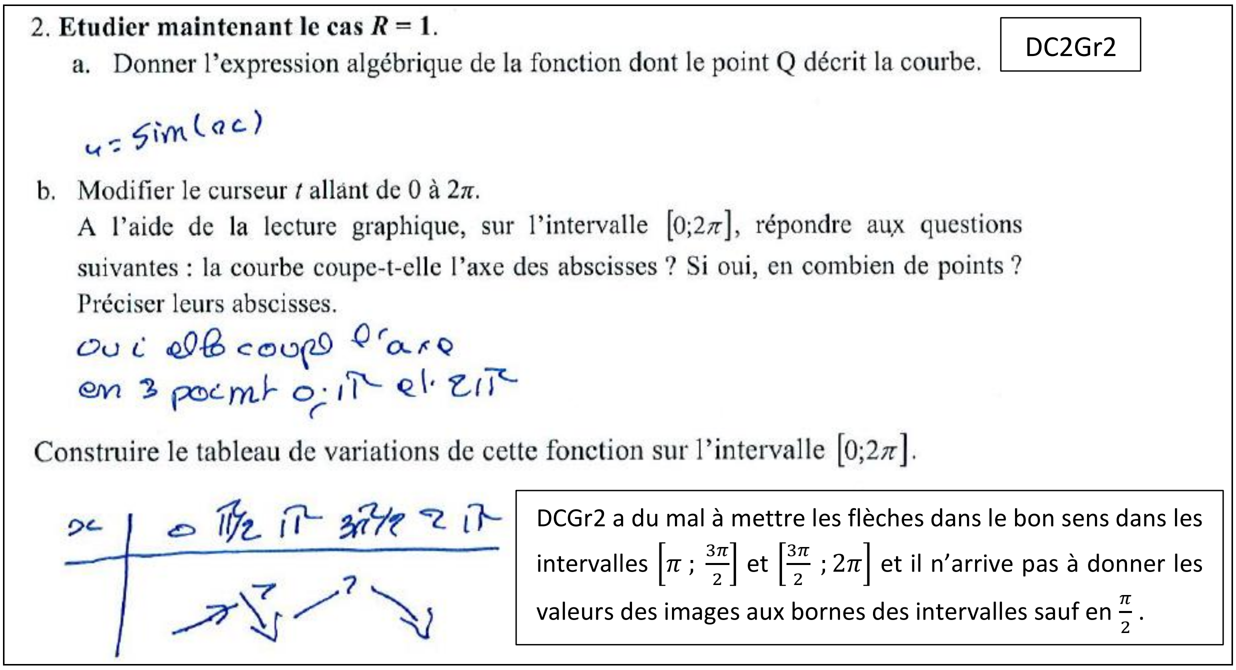
Quatre des six groupes donnent la bonne réponse dont deux groupes (DC2Gr1, DC2Gr6) utilisent t comme variable et deux autres groupes (DC2Gr2, DC2Gr3) utilisent x.

Un groupe (DC2Gr4) donne $\sin 2t$ (en couleur rouge), c'est un peu étrange à remarquer car à la question 2.b, la trace écrite est en bleue et dans le tableau de variations ce groupe utilise la variable x.

Un groupe (DC2Gr5) donne incorrectement $\cos(x)$. Il semble que ce groupe confonde le cosinus et le sinus.

Nous constatons que quatre groupes reconnaissent l'expression algébrique de la fonction sinus dont le point Q décrit la courbe dans le cas où $R = 1$.

<u>Question 2.b</u> :
Les six groupes donnent la bonne réponse avec la lecture graphique, en précisant les valeurs exactes des abscisses des trois points de la courbe avec l'axe des abscisses. Un groupe (DC2Gr2) a des difficultés pour réaliser correctement le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, (voir *Figure 163*). Seul le groupe DC2Gr3 affirme que « Le tableau correspond au tableau de variations de b » à notre propos consistant à « Vérifier ce tableau de variations dans la partie A à la question 2 ».


2. **Etudier maintenant le cas $R = 1$.**

DC2Gr2

a. Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point Q décrit la courbe.

u = sin(x)

b. Modifier le curseur t allant de 0 à 2π.
A l'aide de la lecture graphique, sur l'intervalle $[0;2\pi]$, répondre aux questions suivantes : la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en combien de points ? Préciser leurs abscisses.

oui elle coupe l'axe
en 3 point 0 ; π et 2π

Construire le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0;2\pi]$.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
	↗	?	↗	?	↘

DCGr2 a du mal à mettre les flèches dans le bon sens dans les intervalles $\left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$ et il n'arrive pas à donner les valeurs des images aux bornes des intervalles sauf en $\frac{\pi}{2}$.

<u>Figure 163</u> : Réponse du groupe DC2Gr2 aux questions 2.a et 2.b

Dans l'ensemble de la phase 2, les élèves réussissent à donner les valeurs exactes des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction sinus et l'axe des abscisses et la plupart des élèves arrivent à réaliser la construction du tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ à partir du travail graphique dans le cadre fonctionnel.

Mise en commun de la phase 2 (Situation didactique $S0$)
Nous constatons que la mise en commun est rapide (environ 5 minutes). Pour la question 2.a, l'enseignant demande juste l'expression algébrique de la fonction dont le point Q décrit la courbe dans le cas où $R = 1$, un élève propose « sinus du point M » (nous en parlerons ci-après), l'enseignante demande toute la classe : $\sin(M)$, est-ce que c'est possible ? D'autres élèves répondent « non ». Donc c'est ? Un autre élève répond : c'est $\sin(t)$; puis l'enseignante confirme « effectivement » et elle note juste à côté de la courbe projetée $y = \sin(t)$, et elle dit que l'on est bien sur le cercle trigonométrique. Remarquons que l'enseignante a projeté les deux fenêtres graphiques faites lors de la bonne réponse d'un élève sur l'expression algébrique de la fonction sinus et que tout a été fait par l'enseignante, par

exemple, dans le Graphique 2, l'axe des abscisses est gradué en fonction de π avec un pas de $\frac{\pi}{2}$.
Pour la question 2.b, la mise en commun est encore plus rapide (environ 2 minutes). L'enseignante demande : en combien de points la courbe coupe l'axe des abscisses ? Les élèves répondent en trois points ; juste là, l'enseignante donne tout de suite aux élèves un procédé pour graduer l'axe des abscisses avec π. Puis, l'enseignante dit que *ça vous permet de voir en quelles abscisses des points la courbe coupe l'axe des abscisses ; alors la courbe représentative de la fonction sinus coupe l'axe des abscisses en quelles abscisses ?* Les élèves y répondent : 0, π et 2π. Puis l'enseignante interroge collectivement, sans construire le tableau de variations de la fonction sinus, sur les variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, en lisant graphiquement. Et finit par la vérification avec le tableau de variations réalisé dans la partie A, *est-ce que dans la partie A, vous aviez bien le même tableau de variations*, demande l'enseigne, et la réponse « Oui » de la part des élèves. L'enseignante fait la conclusion : *Donc, on a retrouvé dans un cas particulier le tableau de variations obtenu avec un rayon quelconque*.
Nous pouvons dire que l'enseignante fait ce choix parce que le temps ne permet pas autre chose et que lors du travail en binôme (dans la situation a-didactique), elle s'est déplacée pour observer et intervenir si nécessaire pour faire avancer le travail de chaque groupe. Donc, durant la mise en commun, elle ajoute des informations comme, par exemple, comment graduer l'axe des abscisses en fonction de π pour faciliter la lecture des valeurs exactes des abscisses des points d'intersection entre la courbe de la fonction sinus et l'axe des abscisses. Dans la mise en commun, il manque la vérification avec la lecture graphique sur le cercle trigonométrique. De toute façon, nous pouvons dire que la situation didactique répond de manière satisfaisante à l'objectif visé car la plupart des élèves arrivent à lire graphiquement les variations de la fonction sinus à partir de l'information sur la courbe tracée.

Concernant le « sinus du point M » (cf. De Kee, Mura & Dionne, 1996) : rappelons que nous avons eu la trace écrite du Gr4 dans la SD-P comme étant $\cos(M)$ et $\sin(M)$, (voir *Figure 153*). Durant la mise en commun, un élève propose « sinus du point M » pour l'expression algébrique de la fonction dont le point Q décrit la courbe dans le cas $R = 1$; nous ne savons pas si c'est un des deux élèves du Gr4.
Nous essayons d'interpréter pourquoi certains élèves pensent, avec leur propre manière, par exemple au « sinus du point M » sachant que M se situe sur le cercle. Peut-être, entre un nombre réel t et son point image M dans l'enroulement sur le cercle, ces élèves voient concrètement le point image M mais pas le nombre réel t ; donc ils utilisent les termes « sinus du point M ». Imaginons, lorsque M se déplace sur le cercle pour plusieurs tours et il s'arrête au point de son premier arrêt, on ne voit que le point M et on lit le cosinus et le sinus. Peut-être, c'est plus simple que certains élèves lisent le cosinus et le sinus du point M au lieu du cosinus et du sinus du nombre réel t. Cela nous fait penser à la correspondance entre t et M dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle de rayon R qui consiste en un concept relié au quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ (Chapitre 3). Il semble que les objets cosinus et sinus enseignés en Seconde n'ont pas été vus comme des fonctions de la variable réelle.

Remarque : Dans une séance qui suit pour toute la classe, l'enseignante met en commun, durant environ 8 minutes, la phase 2 de la SD-G que le DG1 n'a pas faite. Tout se passe doucement et l'enseignant attire l'attention des élèves sur la lecture simultanée du Graphique 1 et du Graphique 2. Puis c'est le moment d'institutionnalisation sur la fonction cosinus, et pour finir, l'étude de la fonction cosinus. À la séance suivante, l'enseignante institutionnalise la fonction sinus et fait étudier la fonction sinus. Nous constatons que tout se passe bien car il semble que les élèves peuvent se référer au cercle trigonométrique et aussi à la courbe représentative de la fonction cosinus (resp. sinus). Remarquons qu'au moment de l'institutionnalisation de la fonction cosinus (resp. sinus), l'enseignante se réfère à la SD-G dans le cas particulier $R = 1$; elle fait lire les variations de la fonction cosinus (resp. sinus) et construire le tableau de variations de cette fonction pour une période, puis deux périodes.

4.1.3. Conclusion

Nous pouvons dire que la SD-P est un milieu matériel, qui enrichit la réflexion des élèves, lors du déroulement de la SD-G dans la situation a-didactique. Il semble que les élèves aient des difficultés lors de la première rencontre du travail graphique avec un cercle de rayon R au début du déroulement de la SD-P. Rappelons qu'au commencement du travail graphique, les élèves se situent dans l'OML_{CTrigo} vue en Seconde, ils commencent par compléter le « tableau 1 » avec les valeurs exactes de a et de b comme 1, 0 et -1. Les élèves posent des questions sur l'existence de $2\pi R$ dans le « tableau 1 ». Ce $2\pi R$ fait partie du milieu qui mène les élèves à (re)lire la consigne et à changer d'idée en sortant de l'OML_{CTrigo} pour adapter leurs connaissances vues dans l'OML_{CTrigo} dans une nouvelle situation. La plupart des élèves réussissent le remplissage des tableaux de variations de a et de b en fonction de t, et aussi, le remplissage des tableaux de signe de a et b. Les élèves rencontrent un obstacle pour accomplir la question 4 comme nous l'avions prévu dans l'analyse *a priori*. Rappelons qu'en Seconde, les élèves ont rencontré la correspondance entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en degrés de l'angle au centre qui intercepte l'arc de cercle via la proportionnalité entre ces deux grandeurs, et, qu'en 1re Scientifique, ils ont rencontré la correspondance entre les mesures d'un même angle en degrés et en radians pour convertir une mesure d'angle de radians en degrés, et inversement. Durant la mise en commun, sur la sollicitation de l'enseignante, un élève arrive à donner le rapport de proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle. Nous pouvons dire que :

- les élèves peuvent ne pas connaître (ou bien, ne pas réactiver) la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle et le rayon du cercle ;
- les élèves s'aperçoivent qu'un nombre réel t dans l'enroulement ne désigne pas une mesure en radians de l'angle au centre correspondant à la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre, sauf dans le cas du cercle trigonométrique ($R = 1$).

Nous constatons que dans la SD-G, les élèves arrivent à adapter convenablement leurs connaissances antérieures dans le travail graphique avec un cercle de rayon R. Dans la situation a-didactique du déroulement de la SD-G, les élèves se réfèrent au cercle trigonométrique qui sert, lors de l'observation, à la vérification des essais au cas par cas, par

exemple, au choix des valeurs de R, avant de prendre une décision pour généraliser leurs réponses dans la phase 1 de la SD-G. Dans la phase 2 de la SD-G, à un moment donné, les élèves reconnaissent qu'ils sont dans l'OML_{CTrigo} et la plupart d'entre eux réussissent, avec le travail graphique, à réaliser le tableau de variations de la fonction sinus (pour les 14 élèves du DG2). Donc, dans la phase 2 de la SD-G, les milieux M_{-2} et M_{-1} sont suffisamment riches. Nous pouvons faire l'hypothèse que la situation didactique répond au niveau du milieu dans la situation a-didactique.
Nous suivons aussi le cours de l'enseignante à la suite de la mise en œuvre de notre situation didactique. Nous constatons que les élèves s'approprient de mieux en mieux la lecture dans le registre graphique avec le cercle trigonométrique, dans la « Géométrie repérée » : on lit, par exemple, le cosinus sur l'axe des abscisses et t la longueur de l'arc de cercle correspondant à une mesure en radians d'angles orientés ; et aussi, la lecture dans le registre graphique du cadre fonctionnel : on lit sur l'axe des ordonnées le cosinus qui est l'ordonnée du point décrivant la courbe de la fonction cosinus et t sur l'axe des abscisses.
Nous pouvons dire que notre situation didactique sert dans l'apprentissage des élèves dans le cadre « Géométrie repérée » et dans le cadre « Analyse » d'une part, et que, d'autre part, elle nourrit la réflexion des élèves dans le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (au niveau du cercle du cadre géométrique) vers les fonctions cosinus et sinus (au niveau du graphe du cadre fonctionnel).
Remarquons que l'enseignante a suivi la formation de master professionnel en Didactique des Mathématiques, donc elle a des connaissances en cette science de la didactique. Durant la mise en œuvre de notre situation didactique, elle n'exploite pas le potentiel a-didactique des milieux. Nous pouvons nous demander ce qui serait passé si elle n'était pas autant intervenue.

4.2. Au Cambodge : Mise en œuvre dans une classe de 11e

4.2.1. Modalité et contexte

Dans le cadre de la thèse, nous faisons le choix de présenter seulement le travail des élèves d'une classe de 11e, au lycée Samdach Euv, situé dans la province de Battambang. Dans cette classe de 11e, il y a 43 élèves mais il n'y a qu'environ 29 élèves qui sont présents durant la mise en œuvre de la situation didactique, en mars 2017. Il s'agit plutôt d'une expérimentation exploratoire en adaptant notre situation didactique sur le terrain avec des élèves cambodgiens. Cette expérimentation exploratoire se déroule en trois séances de six heures.

Précisons pour commencer qu'au Cambodge, les formes de l'activité des enseignants et des élèves dans la classe ne sont pas identiques à celles que l'on rencontre en France. Au Cambodge, dans l'enseignement, on a entendu parler de « situation a-didactique » à partir des années 2000, mais c'est impossible de faire vivre une telle situation sur le terrain. Une raison est peut-être qu'il y a en moyenne une cinquantaine d'élèves par classe (entre 40 et 70). Au Cambodge, il n'y a pas de formation continue pour les enseignants. Avant de devenir enseignant dans une école du secondaire, on suit, une seule fois, la formation professionnelle durant une année (il s'agit plutôt d'une pédagogie) et on passe un diplôme professionnel à la fin de cette formation.
Rappelons que la situation didactique a été élaborée dans le contexte français et qu'elle s'adresse principalement aux élèves de Terminale Scientifique en France.

Rappelons aussi que, dans le programme cambodgien, le principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (en Seconde-Fr) n'apparaît pas. Or, notre situation didactique se base sur l'enroulement de la droite numérique.
Dans le programme cambodgien du secondaire, les notions de fonctions sinus et cosinus sont introduites en 11e (correspondant à la 1re en France). Nous essayons de mettre en œuvre la situation didactique, l'adaptant à la situation réelle sur le terrain :

- dans trois classes de 11e (deux classes au lycée Preah Monivong et une classe au lycée Samdach Euv), et
- dans deux classes de 12e (une classe au lycée Preah Monivong et une classe au lycée Samdach Euv).

Une classe de 11e au lycée Preah Monivong est celle d'un enseignant expérimenté (une vingtaine d'années dans la carrière professionnelle). Avant la mise en œuvre, il nous prévient que les élèves n'ont pas l'habitude de travailler dans une situation a-didactique. Nous essayons malgré tout de faire travailler les élèves dans une situation a-didactique. L'enseignant met en œuvre la SD-P, puis la doctorante continue à mettre en œuvre la SD-G car l'enseignant et les élèves ne connaissent pas GeoGebra.
Pour les deux autres classes de 11e et les deux classes de 12e, chaque couple des classes 11e et 12e a le même enseignant, dans les deux lycées indiqués précédemment. Les deux enseignants ont refusé de participer car ils pensent que ce sera compliqué de faire travailler les élèves cambodgiens avec la méthode d'enseignement que nous proposons. Mais, ils nous ont prêté leurs classes pour mettre en œuvre notre situation didactique.
Dans les établissements publics du secondaire, il n'y a pas encore de cours projeté ni de logiciel (par exemple GeoGebra) dans la classe, on travaille toujours avec papier-crayon.
Nous pouvons dire que c'est la première rencontre pour les élèves avec la méthode d'apprentissage que nous proposons dans notre situation didactique. Malgré ces conditions défavorables, nous souhaitons essayer pour connaître la réaction des élèves avec cette méthode. Lors du déroulement, nous faisons tout notre possible, pour que les élèves participent ; sinon, nous n'aurions pas réalisé ce que nous visons.
Lors des expérimentations dans les classes, nous constatons que la plupart des élèves ont des difficultés à s'exprimer, à donner leurs raisons pour expliciter leurs réponses. Nous avons modifié les questions posées et le procédé prévu, en l'adaptant à la situation et aux élèves rencontrés. Nous avons fait le choix de réorganiser le procédé de cette mise en œuvre, avec la dernière classe, qui est la classe de 11e au lycée Samdach Euv, afin de pouvoir récolter l'information et motiver les élèves à participer le mieux possible.
Concernant la SD-P (voir *Figure 144*), nous enlevons les deux dernières questions (la question 3 et la question 4), nous nous appuyons sur la question 1 parce que nous avons bien vu les difficultés des élèves dans les classes de 11e précédentes. Nous proposons aux élèves de faire seulement la question 1 (dans la première séance de deux heures) ; puis pour la question 2, nous donnons un cours durant 50 minutes dans la deuxième séance de trois heures.
Concernant la SD-G (voir *Figure 145*), nous commençons par la version cosinus visant une découverte de la notion de fonction cosinus, durant la deuxième séance de trois heures (à la suite de question 2 de la SD-P). Le travail est divisé en deux phases correspondant respectivement aux questions 1 et 2. Pour chaque phase, avant la mise en commun, nous animons GeoGebra (via un ordinateur commun à toute la classe) et nous laissons du temps

aux binômes d'élèves pour répondre à la question étudiée. Pour la version sinus, le travail prend la forme d'un cours dialogué, dans la troisième séance d'une heure. Cette dernière séance conclut par un bilan.

Comme nous l'avons précédemment indiqué, il s'agissait plutôt d'une expérimentation exploratoire avec des élèves cambodgiens et la mise en œuvre de la situation didactique ne s'est pas réalisée à l'identique de ce qui a été proposé en France, il y a eu beaucoup de changements. Dans la suite, nous rendons compte de ce qui s'est passé sur le terrain.

4.2.2. Compte rendu de ce qui s'est passé avec la situation didactique adaptée

4.2.2.1. **SD-P**

4.2.2.1.1. **Déroulement**

Nous installons une caméra au fond de la classe.

Nous commençons par un cours, durant une heure environ, qui vise le concept de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (rayon 1) et le cosinus et le sinus d'un nombre réel (rappelons que ces concepts ne sont pas attendus dans le programme cambodgien du secondaire). Nous faisons découvrir le concept de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique via une activité expérimentale inspirée de l'activité 1 à la page 152 du manuel Math'x (édité en 2010). Cette activité consiste en une observation de l'enroulement d'une ficelle sur un objet rond que l'on considère comme un cercle de rayon unitaire dans le sens antihoraire pour trois tours et dans le sens horaire pour trois tours ; à chaque tour, on fait une marque en couleur sur la ficelle, avec la même couleur pour le même sens d'enroulement, puis on déroule cette ficelle. Ensuite, cette ficelle est considérée comme représentant un objet mathématique, une droite numérique que l'on trace concrètement sur le tableau à partir de cette expérimentation. Nous relions cela à l'idée que les élèves arrivent à donner les abscisses des points de la droite numérique correspondant à l'enroulement pour un tour, deux tours, trois tours, puis k tours, dans le sens antihoraire puis dans le sens horaire. Nous résumons l'enchaînement d'idées à une droite numérique :

- Cette activité est commencée physiquement pour l'enroulement de la ficelle puis le déroulement de cette ficelle.
- Avec l'aide de deux élèves, on étend la ficelle en mettant l'objet rond vers le milieu du tableau, on marque au tableau le point où la ficelle a été attachée à cet objet rond que nous nommons O, puis on marque vers la droite de ce point O des points A_1, A_2, A_3 pour les trois points marqués sur la ficelle lors de l'enroulement pour les trois premiers tours dans le sens antihoraire, et on utilise le même procédé pour placer les points B_1, B_2, B_3 pour les trois premiers tours dans le sens horaire ;
- Nous traçons alors une droite passant par ces points. Cette droite est appelée droite des réels et O est nommé l'origine de cette droite des réels.
- À ce moment-là, nous amenons d'abord les élèves à répondre ce qui concerne des « longueurs » reliées à l'enroulement sur le cercle unité pour un tour, deux tours, trois tours. Il semble que les élèves connaissent que $B_2B_3 = B_1B_2 = OB_1 = OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = longueur\ d'un\ tour\ de\ cercle$.

  Puis, il y a une discussion intéressante sur la « longueur d'un tour de cercle ». Il y a trois réponses des élèves concernant cette longueur : 2π (1 élève) ; 2π rad (6 élèves) ;

360° (une dizaine d'élèves). L'élève qui donne la bonne réponse justifie à partir de la formule du périmètre d'un cercle. La majorité des élèves pensent à la mesure de l'angle plein.

- Nous amenons maintenant les élèves à s'intéresser à la droite des réels. Les élèves arrivent à donner rapidement l'abscisse de l'origine de la droite des réels (axe des réels). Mais, ils ont une difficulté à donner l'abscisse du point A_1. Il semble que les élèves pensent que A_1 a pour abscisse l'unité. Il y a une discussion intéressante avant que les élèves reconnaissent que le rayon du cercle unité est l'unité de la droite des réels et que l'abscisse du point A_1 n'est donc pas 1 mais 2π.

  Puis, il n'y a pas de difficulté à donner les bonnes réponses pour les autres points indiqués précédemment.

Après cela, nous introduisons les concepts visés indiqués précédemment ; puis nous précisons aux élèves que ces concepts n'existent pas dans le programme cambodgien du secondaire. Enfin, nous attirons l'attention des élèves sur ce qu'ils ont appris en classe avec leur enseignant « le cosinus et le sinus d'un angle orienté ».

Nous passons à la dévolution de notre situation didactique pour la SD-P (la question 1) durant environ 5 minutes. Puis, nous demandons aux élèves de travailler individuellement durant environ 7 minutes sans intervention. Ensuite, nous leur proposons de travailler en binôme durant 7 minutes au départ ; comme nous trouvons que la plupart des élèves n'arrivent pas à remplir le « tableau 1 », nous les aidons collectivement, durant environ 2 minutes, notamment en mettant en évidence l'indication $2\pi R$ dans ce tableau, puis nous leur demandons de continuer à remplir (durant environ 5 minutes) en changeant la couleur de stylo lors de leur remplissage à partir de cette aide. Nous demandons aux élèves de ranger les feuilles du travail et de les mettre au bout de leur table sans les toucher et nous ramassons les feuilles rangées après la mise en commun. La mise en commun dure environ 20 minutes.

4.2.2.1.2. **Compte rendu**

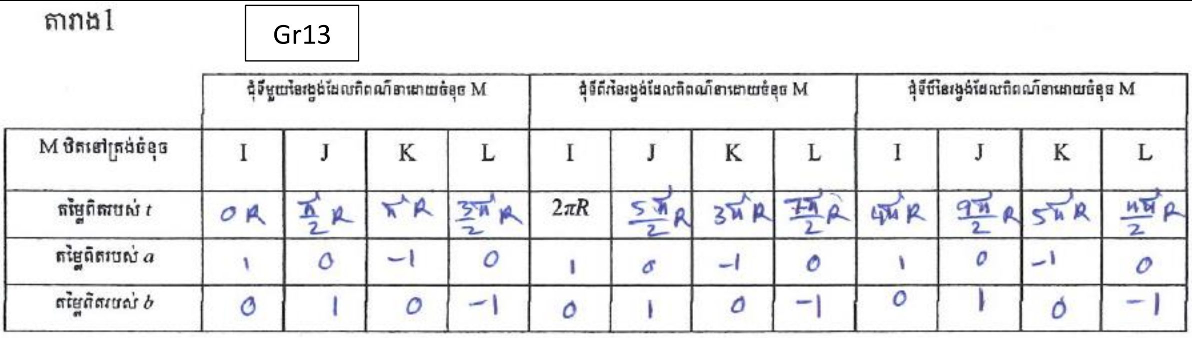
Les 29 élèves, répartis en 14 groupes de 2 ou 3 (avec un seul groupe de 3), ont répondu à la question 1. Les 14 groupes sont notés : Gr1, Gr2, …, Gr14. Aucun groupe ne remplit correctement le « tableau 1 ». Deux groupes (Gr9-*Figure 165* ; Gr13-*Figure 164*) donnent correctement les valeurs exactes de t pour les trois premiers tours de déplacement du point M. Nous présentons ci-dessous un récapitulatif sur l'effectif réparti dans les 14 groupes d'élèves (voir *Tableau 62*) et quelques extraits des productions d'élèves (voir *Figure 164*, *Figure 165*, *Figure 166*).

Q1.a : Longueur d'un tour de déplacement du point M	
C	7
NC	6 dont 1 : 2π ; 1 : $\alpha + 2\pi$ où 2π désigne la longueur d'un tour et α, l'angle constitué par OM et OI ; 1 : $\alpha + k2\pi$; 1 : 2π ou $2\pi\ rd$ ou 360° ; 1 : πR
NR	1

Q1.b : Remplissage du tableau 1	
NC	14 dont 2 (Gr9, Gr13) donnent correctement les valeurs exactes de t Pour Gr9 : $a = \cos t$ et $b = \sin t$ (voir *Figure 164*) Pour Gr3 : les valeurs de a et de b sont correctes dans le cas où $R = 1$ car dans le tableau rempli, il manque juste R, (voir *Figure 165*) 3 (Gr7, Gr10, Gr14) ne remplissent aucune valeur exacte de a ni celle de b 9 autres groupes donnent plutôt les valeurs exactes de a et de b avec 1, 0, -1 de manière incomplète ou non

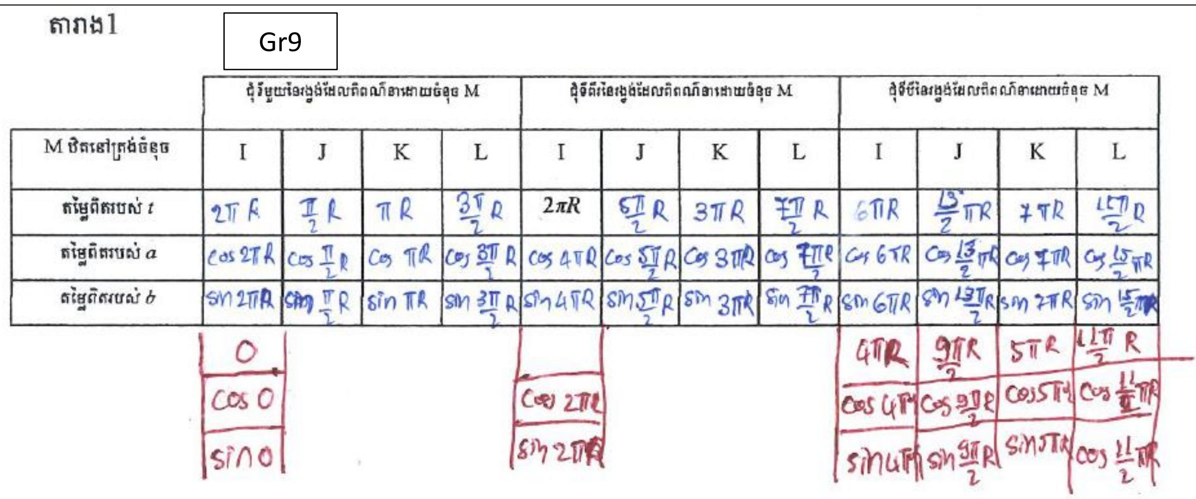
(Q : question ; C : réponse correcte ; NC : réponse non correcte ; NR : non réponse)

Tableau 62 : Récapitulatif sur l'effectif réparti pour la SD-P



Nous pouvons dire que Gr13 réactive la connaissance sur le principe de l'enroulement de la droite numérique avec adaptation des connaissances vues dans un cours précédent dans un premier temps du travail en binôme (autrement dit, avant une aide collective). Mais ce groupe n'arrive pas à donner correctement l'abscisse et l'ordonnée du point M sauf dans le cas où $R = 1$. Il semble que ce groupe oublie qu'il travaille avec un cercle de rayon R, ou bien, qu'il pense plutôt que a et b désignent respectivement le cosinus et le sinus de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ dans le cas où M se situe en quatre points spécifiques I, J, K, L.

Figure 164 : Remplissage du « tableau 1 » à la question 1.b – Gr13 des élèves de 11e



Nous pouvons dire que Gr9 arrive à donner la bonne réponse pour toutes les valeurs exactes de t dans un deuxième temps durant le travail en binôme (autrement dit, après une aide collective). Concernant les valeurs de a et de b, ce groupe s'inspire de manière fausse des définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel en lien avec l'enroulement de la droite numérique. Pour ce groupe, a est $\cos t$ et b est $\sin t$.

Figure 165 : Remplissage du « tableau 1 » à la question 1.b – Gr9 des élèves de 11e

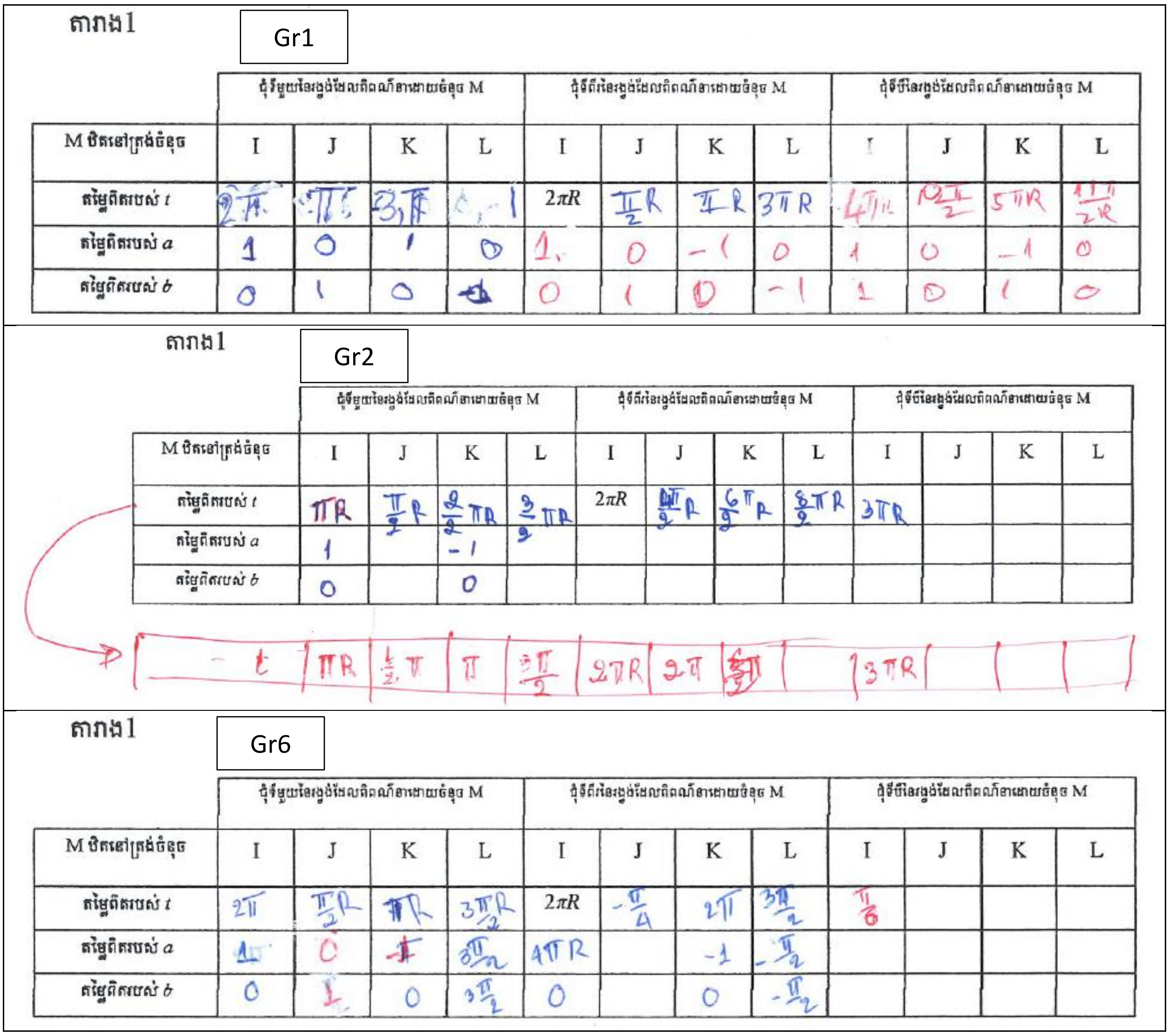


Figure 166 : Difficultés pour la plupart des élèves de 11e

Environ la moitié des élèves reconnaissent la longueur d'un tour déplacement du point M sur un cercle de rayon R, et l'autre moitié en a l'idée de manières diverses. Rappelons que l'on vient de parler du périmètre d'un cercle dans un cours précédent en lien avec le déplacement d'un point M sur un cercle de rayon unitaire via l'enroulement de la droite numérique. Nous pouvons dire que la moitié des élèves n'arrivent pas encore à interpréter la signification d'un tour de déplacement du point M en lien avec le périmètre du cercle.

Il semble que la majorité des élèves aient des difficultés à remplir les valeurs exactes de t et que plus de la moitié des élèves donnent partiellement les valeurs de a et de b avec 1, 0, -1. Aucun groupe ne remplit les valeurs de a et de b avec R.

Mise en commun
La mise en commun se passe en 20 minutes environ. Tout se passe lentement. À chaque étape, nous demandons aux élèves de donner leurs réponses lors du travail en binôme, puis nous posons de petites questions, en faisant avancer la réflexion pour que des élèves arrivent à donner la bonne réponse. Nous utilisions la stratégie 1 pour les valeurs exactes de t et la stratégie 2 pour les valeurs exactes de a et de b. Vers la fin de la mise en commun, les élèves reconnaissent que les points I, J, K, L sont des points fixés et que le point M est considéré comme un point mobile qui parcourt le cercle de rayon R. À ce moment, nous avons une idée (non prévue) pour expliciter cette reconnaissance. Nous demandons d'abord à quatre élèves de venir au tableau ; les quatre élèves volontaires représentent ces quatre points fixés, donc, ils sont debout en quatre positions différentes. Ensuite, nous demandons à une autre élève de rejoindre les quatre élèves au tableau. La cinquième élève représente le point M qui se déplace sur le cercle. Nous demandons aux élèves de nous montrer comment se déplace le point M ; comme le lieu n'est pas large, nous intervenons pour expliciter le déplacement de l'élève sur le cercle imaginé. Nous pouvons dire que cette idée non prévue peut nourrir la réflexion des élèves en lien avec notre situation didactique.

Concernant le remplissage des tableaux de variations de a et de b pour les deux premiers tours de déplacement du point M sur le cercle à la question 2 de la SD-P :
Comme nous avons précisé précédemment que nous avons des expériences avec d'autres élèves de deux classes de 11^{e}, nous faisons le choix de donner en mode cours le remplissage des tableaux de variations. Durant le déroulement, nous posons des questions pour que les élèves appréhendent ce que nous allons viser. Nous amenons les élèves à remplir le tableau de variations de a pour le premier tour de déplacement du point M sur le cercle à partir du travail graphique dans le cadre géométrique, puis nous leur laissons deux minutes pour continuer à compléter individuellement le tableau tout entier. Ensuite nous demandons à un élève d'aller au tableau et de compléter le tableau de variations pour le deuxième tour de déplacement du point M et nous lui demandons d'expliquer à toute la classe comment il réalise son remplissage. Pour cela, cet élève lit graphiquement sur le cercle pour le deuxième tour de déplacement du point M. Ensuite, nous laissons 6 minutes aux élèves pour remplir le tableau de variations de b (en travaillant en binôme) ; puis nous demandons à un élève de le remplir au tableau pour le premier tour de déplacement du point M, nous demandons aux autres s'ils sont d'accord avec leur camarade. Une élève pense qu'elle a une idée un peu différente de son camarade. Nous lui demandons de donner, au tableau, son tableau de variations de b ; et nous lui proposons de donner son tableau de variations pour les deux tours de déplacement du point M, et faisons la même demande à l'élève précédent. Ensuite, nous proposons à cet élève d'expliquer sa justification avec notre intervention pour que toute la classe y participe. Nous faisons un bilan sur la lecture graphique pour finir cette partie.

Dans l'ensemble du travail sur la SD-P, nous constatons que :
- les élèves ont des difficultés à accomplir en autonomie les tâches demandées ;
- les élèves arrivent à répondre à des questions menant vers les objets visés.

4.2.2.2. **SD-G**

4.2.2.2.1. **Déroulement**

Nous installons une caméra au fond de la classe.

Rappelons que c'est, pour les élèves, la première rencontre avec GeoGebra. Nous guidons toute la classe à l'aide d'un vidéo projeteur et nous animons GeoGebra.

Durant la phase 1 (version cosinus de la SD-G consistant à la découverte de la notion de fonction cosinus), 20 élèves sur 43 sont présents ; en phase 2 (version sinus de la SD-G), 26 élèves sur 43 sont présents. Les copies des élèves à l'étape 1 sont notées SDG-Gr1, SDG-Gr2, …, SDG-Gr10.

Lors du déroulement de la SD-G, nous animons GeoGebra (étape par étape).

Concernant la phase 1 (version cosinus – *Figure 145*) : la question 1 qui est composée de quatre questions, nous animons GeoGebra, et pour passer d'une question à la suivante, nous laissons le temps (entre 2 et 5 minutes) aux élèves pour y répondre, sans notre intervention ; et de même pour la question 2 qui est composée de deux questions. Dans cette phase 1, il y a deux phases de mise en commun. À chaque fois, le déroulement se passe lentement ; nous posons des questions pour que les élèves puissent trouver une réponse convenable. Nous pouvons dire que les élèves ont des difficultés quand ils sont confrontés avec le travail graphique.

Concernant la phase 2 (version sinus) : nous animons GeoGebra et nous proposons, par un dialogue collectif, aux élèves de répondre question par question (quatre sous-questions de la question 1). Puis pour la question 2, nous laissons du temps (environ 7 minutes) aux élèves (travail en binôme), ensuite durant la mise en commun, nous proposons aux trois élèves représentants de donner leurs réponses au tableau, accompagnées par leurs explications. Nous constatons que dans cette phase 2, des élèves arrivent à exprimer leurs justifications et à convaincre les autres.

Enfin, nous faisons un bilan pour toute la classe sur la fonction cosinus et la fonction sinus.

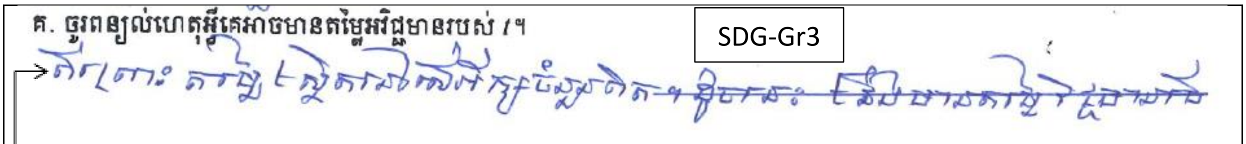
4.2.2.2.2. **Compte rendu**

Nous constatons que malgré des difficultés avec le travail graphique, les élèves participent en répondant à nos questions à l'écrit et à l'oral.

La question 1 (version cosinus de la SD-G) :

Nous voyons que les élèves n'arrivent pas à répondre à ce que nous attendons pour chaque question. Ils répondent de manière concrète et visuelle sans penser à faire le lien avec les connaissances mathématiques. Nous pouvons dire que les élèves donnent des réponses de manière diverse. Dans l'ensemble, lors du travail en binôme, les élèves voient que le point M se déplace sur le cercle de rayon R et que le point P se déplace simultanément en décrivant la courbe. Quatre binômes (SDG-Gr2, SDG-Gr4, SDG-Gr5, SDG-Gr6) reconnaissent que le point P décrit une courbe quand la courbe apparaît dans la fenêtre « Graphique 2 » au moment où nous faisons le Lieu$[P, t]$; deux binômes (SDG-Gr3, SDG-Gr9) voient la courbe qui apparaît sur l'écran comme « un fil en forme d'onde » (Gr9) ou bien comme « une trajectoire en forme d'onde » (Gr3) ; et d'autres binômes, ne parlent ni d'une courbe ni d'une trajectoire. Le terme de sinusoïde n'apparaît pas.

À la question 1.c, « Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t », seul le groupe SDG-Gr3 donne une justification que nous considérons comme une justification convenable, (voir *Figure 167*).



Parce que les valeurs de t se situent sur l'axe des réels. ~~*Donc t prendra des valeurs négatives si*~~

(SDG-Gr3 aurait voulu dire : la droite numérique dans l'enroulement, vue dans la première séance avec un cours donné par nous sur le principe de l'enroulement.)

Figure 167 : Valeurs prises par t à la question 1.c – SDG-Gr3

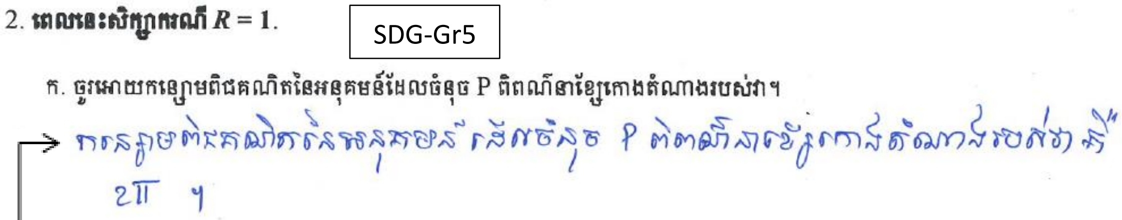
Mise en commun

La mise en commun pour la phase 1 dure environ 30 minutes. Nous voyons la motivation des élèves à y participer. Bien qu'il s'agisse d'une première rencontre, les élèves appréhendent au fur et à mesure le travail graphique et certains arrivent à donner de bonnes réponses en lien avec les objets que nous visons.

La question 2 (version cosinus) :

Rappelons que la question 2.a consiste à « Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point P décrit la courbe ».

Aucun groupe ne donne la bonne réponse ; il semble que les élèves ne connaissent pas la formulation « expression algébrique d'une fonction » ; peut-être, ce terme est-il sous-entendu dans l'enseignement. 7 groupes sur 10 semblent faire une confusion entre le point P et le périmètre d'un cercle que l'on note depuis toujours P dans la pratique au niveau scolaire : 2π pour 6 groupes et $2\pi R$ pour un groupe, (voir *Figure 168*). 3 autres groupes répondent de manières diverses.

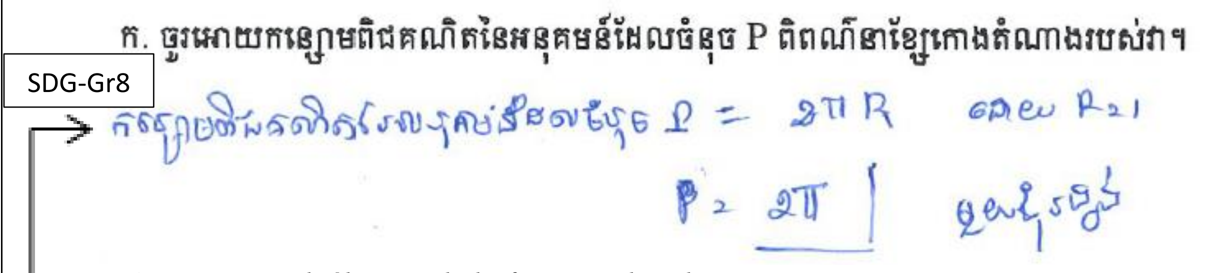


L'expression algébrique de la fonction dont le point P décrit la courbe est 2π.

L'expression algébrique de la fonction du point P est 2π, $R = 1$.

SDG-Gr2

C'est incompréhensible pour l'expression « L'expression algébrique de la fonction du point P ».



L'expression algébrique de la fonction dont le point $P = 2\pi R$ *comme* $R = 1$

$P = 2\pi$ *un tour de cercle*

Figure 168 : Expression algébrique d'une fonction vs. Périmètre d'un cercle – erreur du même représentant P

8 groupes sur 10 donnent la bonne réponse pour le nombre des points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction cosinus et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Concernant les abscisses des deux points d'intersection, parmi ces 8 groupes :

2 (SDG-Gr1, SDG-Gr9) donnent la bonne réponse avec des valeurs approchées,

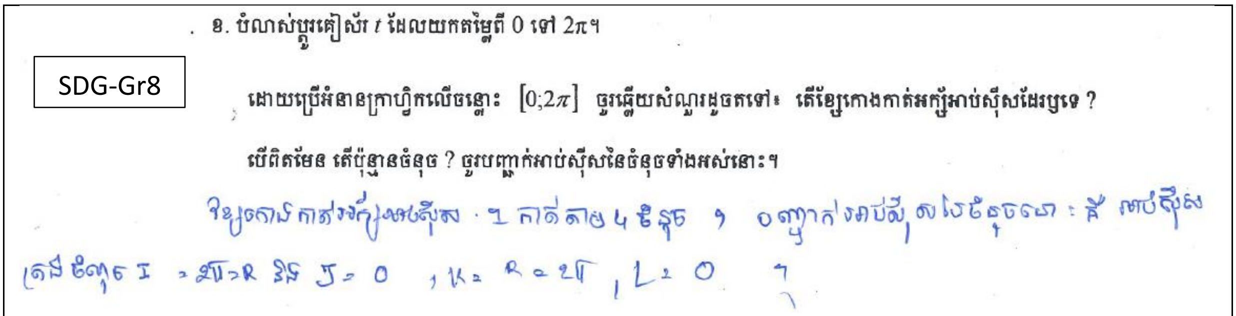
1 (SDG-Gr4) donne seulement une valeur approchée de l'abscisse du premier point d'intersection (non réponse pour celle du deuxième point d'intersection),

1 (SDG-Gr10) donne comme valeurs exactes de ces abscisses $\frac{\pi}{2}R$ et $\frac{3\pi}{2}R$ (nous pouvons considérer cela comme une bonne réponse car il semble que ce groupe oublie de remplacer R par 1),

1 (SDG-Gr3) donne comme valeurs exactes de ces abscisses $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ (remarquons que ce groupe reconnaît son erreur durant la mise en commun),

2 (SDG-Gr2, SDG-Gr5) ne donnent pas les abscisses de ces deux points d'intersection mais ils donnent deux intervalles corrects contenant ces abscisses : $]1\,;2[$ et $]4\,;5[$.

Pour deux autres groupes (SDG-Gr7, SDG-Gr8) : SDG-Gr7 donne trois points d'intersection dont les abscisses sont 0, $\frac{\pi}{2}$, 2π ; SDG-Gr8 donne quatre points d'intersection qui semblent être I, J, K, L mais c'est incompréhensible, (voir *Figure 169*).



La courbe coupe l'axe des abscisses en quatre points. Les abscisses de ces quatre points sont abscisses des points $I = 2\pi = R$ *et* $J = 0$, $K = R = 2\pi$, $L = 0$.

Il semble que ce groupe Gr8 voie plutôt l'intersection du cercle avec les deux axes dans le Graphique 1.

Figure 169 : Points d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses données par SDG-Gr8

Concernant le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, 5 groupes le construisent correctement (voir *Figure 170*), 2 groupes avec R (SDG-Gr3, SDG-Gr5 - *Figure 170*), 1 groupe (SDG-Gr7) fait une erreur en mettant $\frac{\pi}{2}$ au lieu de π (voir *Figure 171*), 2 groupes (SDG-Gr8, SDG-Gr10) ne réussissent pas à construire ce tableau de variations. Nous pouvons dire que le tableau de variations avec R pour deux groupes indiqués précédemment peut être considéré comme une réponse correcte car il semble que ces élèves ne fassent pas attention au fait que l'on étudie le cas où $R = 1$.

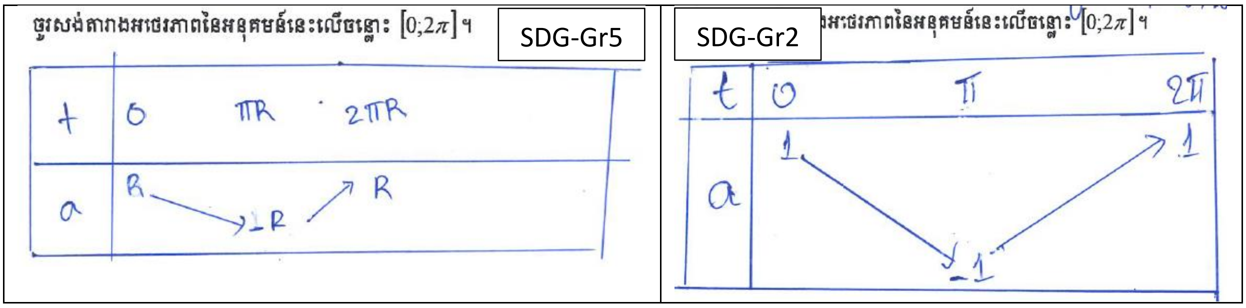
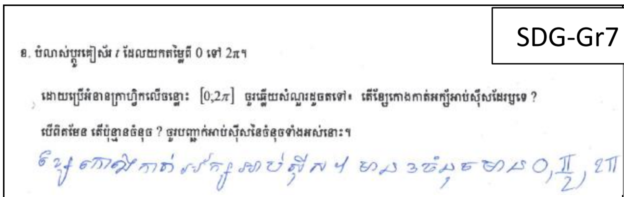
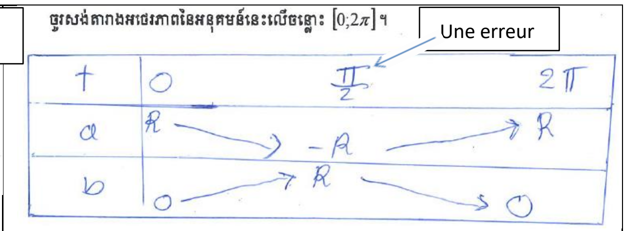


Figure 170 : Tableau de variations construit par SDG-Gr5, SDG-Gr2



La courbe coupe l'axe des abscisses en trois points ayant pour abscisses $0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$



Remarquons d'abord que SDG-Gr7 donne aussi les variations de b que nous ne lui avons pas demandé de construire. Cependant, ce groupe donne les valeurs correctes de b aux bornes des intervalles, mais pas correcte pour la valeur de a en $\frac{\pi}{2}$. Ce tableau rempli attire notre attention sur les variations de b sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$ qui sont plus compliquées pour les élèves à réaliser par rapport à celles de a.

Revenons au tableau de variations de a, SDG-Gr7 a des connaissances instables par rapport à ce qu'il a répondu à la question précédente (voir la partie de gauche de cette *Figure 171*). C'est incohérent avec ce que ce groupe a rempli dans son tableau de variations de a.

Figure 171 : Tableau de variations construit par SDG-Gr7

Mise en commun

La mise en commun dure environ 38 minutes. Comme nous constatons que les élèves ont des difficultés, nous posons des questions amenant les élèves à réfléchir et à donner des réponses convenables, voire de bonnes réponses.

À chaque étape, nous proposons aux élèves de donner les réponses qu'ils ont faites durant la situation a-didactique, puis nous discutons collectivement sur les réponses proposées en posant des questions afin d'expliciter le mieux possible les ambiguïtés dans la réflexion des élèves. Nous pouvons dire que certains élèves arrivent à interpréter les variations de a soit avec un travail graphique du cadre fonctionnel (2 représentants de deux groupes expliquent comment ils arrivent à construire leurs tableaux de variations de a), soit à partir des résultats de la question 2 dans la partie A (1 représentant d'un groupe explique sa justification). Nous faisons un bilan pour toute la classe sur comment lire graphiquement les variations de a (dans le Graphique 2) en les reliant au tableau de variations de a.

Remarque : Durant la mise en commun, il semble que les élèves sachent que l'on étudie a en fonction de t dans le cas $R = 1$, mais ce n'est pas évident pour la fonction cosinus. En effet, trois représentants montrent au tableau leurs tableaux de variations dans lesquels ils notent a et lors du moment de justification l'un après l'autre, aucun représentant ne prononce « la fonction cosinus » ni $\cos t$ par exemple. Nous attendons jusqu'à la dernière minute de cette séance pour demander aux élèves ce que c'est a ; enfin, c'est nous qui prononçons $\cos t$ et nous disons que les tableaux de variations qu'ils ont réalisés sont le tableau de variations de la fonction cosinus et que $a = \cos t$ dans ce cas où $R = 1$.

Durant la phase 2 (version sinus de la SD-G), nous constatons que les élèves appréhendent mieux par rapport à ce qui s'est passé dans la phase 1 car il s'agit d'une étude similaire. Les élèves arrivent à donner les valeurs exactes des abscisses des trois points d'intersection entre la courbe représentative de la fonction sinus et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Un représentant d'un groupe donne la bonne réponse au tableau (Graphique 2) et il justifie les valeurs exactes des abscisses de ces points à partir de la lecture graphique sur le cercle trigonométrique (Graphique 1). Trois représentants des trois groupes donnent au tableau la bonne réponse pour le tableau de variations dans lequel ils notent cette fois-ci $\sin t$ à la place b ; remarquons que ce n'était pas le cas lors de la première rencontre dans la phase 1 avec la fonction cosinus. Nous pouvons dire que des élèves peuvent lire graphiquement les variations de la fonction sinus dans les deux graphiques et qu'ils peuvent les interpréter et argumenter via le travail graphique.
Nous finissons par un bilan sur la notion de fonction cosinus puis celle de fonction sinus.

4.2.3. Conclusion

Rappelons que notre situation didactique se base sur l'enroulement de la droite numérique sur un cercle. D'une part, le « concept de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique » et le « concept du cosinus et du sinus d'un nombre réel défini à partir du principe de l'enroulement de la droite numérique » sont introduits par nous, juste avant la mise en œuvre de notre situation didactique. Et d'autre part, les élèves n'ont pas d'habitude de se mettre à travailler dans une situation a-didactique (sans intervention de l'enseignant).
De toute façon, nous voyons la motivation des élèves à répondre à nos questions. Pour les deux premières séances, il semble que les élèves ont des difficultés avec le travail graphique et qu'ils ont des difficultés à argumenter ; mais durant la troisième séance, il semble que les élèves s'approprient de mieux en mieux les connaissances visées et que certains arrivent à s'exprimer et à argumenter à partir du travail graphique dans la SD-G. Nous pouvons dire que la méthode d'enseignement importée par nous lors de la mise en œuvre de notre situation didactique peut nourrir la réflexion des élèves dans leur apprentissage.

Revenons à notre point de vue sur la situation didactique mise en œuvre, en adaptant à la situation réelle sur le terrain. Nous pouvons dire que la SD-P fait partie du milieu de la SD-G. La SD-G est un nouveau milieu qui permet aux élèves d'appréhender le contenu visé au fur et à mesure de nos sollicitations menant à nourrir leur réflexion sur les objets d'étude visés. Nous pouvons dire que les élèves arrivent à se rendre compte que nous faisons étudier a (resp. b) en fonction de t et qu'ils peuvent lire les variations de a (resp. b) de deux façons : soit sur le cercle à l'aide de l'intermédiaire M qui est le point image du nombre réel t dans l'enroulement de la droite numérique, soit sur la courbe représentative de la fonction étudiée, puis interpréter ces variations sous forme d'un tableau de variations, et inversement. Cela est important et c'est ce que nous souhaitions dans l'élaboration de notre situation didactique.

Avec les élèves cambodgiens, il faut qu'ils maitrisent le mieux possible le travail graphique. Nous pouvons dire qu'à la première rencontre avec nous, ils n'ont pas (assez) de connaissances mathématiques sur le travail graphique et qu'en pratique si les élèves s'habituent à travailler avec une nouvelle méthode d'enseignement importée par nous, ils peuvent penser et argumenter en lien avec les connaissances mathématiques apprises, nourrir leur réflexion et la développer au fur et à mesure dans le parcours d'apprentissage. Nous voulons préciser que les questions utilisées pour solliciter les élèves sont importantes pour qu'ils réfléchissent : au bout d'un moment, ils arrivent à s'exprimer avec des arguments mathématiques raisonnables.

4.3. Conclusion sur la situation didactique

En ce qui concerne la situation didactique, nous ne faisons pas la comparaison entre les institutions française et cambodgienne. Nous pouvons penser à deux raisons mentionnées ci-après :

(1) La situation didactique élaborée dans le contexte français se base sur l'enroulement de la droite numérique dont le concept n'est pas attendu dans le programme cambodgien du secondaire.

(2) Les élèves cambodgiens ne sont pas habitués à travailler dans une situation a-didactique (sans intervention de l'enseignant). En plus, nous constatons que les élèves ont des difficultés avec le travail graphique. Nous avons disposé d'un temps considérable, forcément incompatible avec les conditions concrètes de l'enseignement. Nous pouvons dire qu'il est possible d'intégrer une méthode d'enseignement importée par nous dans l'enseignement des élèves cambodgiens car nous avons vu une progression intéressante dans la réflexion des élèves, durant les trois séances de 6 heures, sur la compréhension des objets d'étude visés via un travail graphique, par exemple.

Concluons maintenant sur la situation didactique chez les élèves français de Terminale Scientifique.

Nous voyons l'intérêt de la situation didactique visant à découvrir les notions de fonctions cosinus et sinus, en se basant sur l'enroulement de la droite numérique et en visant principalement la périodicité et les variations pour plusieurs tours de déplacement d'un intermédiaire M qui est le point image d'un nombre réel t dans l'enroulement, qui peut être interprété comme un élément du quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$. Le choix essentiel est de nous focaliser sur le travail graphique pour nourrir la réflexion des élèves et pour développer la capacité des élèves à lire dans le registre graphique de manière parallèle :

- avec un cercle : lire les valeurs prises par t quand M se déplace sur le cercle dans le sens antihoraire (et dans le sens horaire) et lire les valeurs relatives prises par a (ou par $\cos t$ avec cercle unité) (resp. par b (ou par $\sin t$ avec cercle unité)) sur l'axe des abscisses (resp. sur l'axe des ordonnées) ;

- avec le graphique dans le cadre fonctionnel, lire les valeurs prises par t qui est l'abscisse du point P (resp. Q) décrivant la courbe sur l'axe des abscisses (en tenant compte du déplacement du point M sur le cercle) et lire sur l'axe des ordonnées les valeurs relatives prises par a (ou par $\cos t$ avec cercle unité) (resp. par b (ou par $\sin t$ avec cercle unité)) qui est l'ordonnée du point P (resp. Q).

En plus, les élèves arrivent à interpréter une/des période(s) dans les deux fenêtres de graphique pour les convertir en un tableau de variations et inversement. Remarquons qu'il semble que les élèves reconnaissent une « période » via des expressions comme 'même chose', 'motif répétitif' mais le terme « période » n'est pas prononcé en autonomie de la part des élèves seulement sans la médiation de l'enseignante.

Dans l'ensemble, il semble que les objets d'étude visés aient été assimilés par les élèves grâce au milieu assez riche, cela met en valeur la situation didactique. Si c'est le cas, la situation didactique sera utile dans l'apprentissage des élèves concernant le passage de la trigonométrie dans un cercle vers les fonctions cosinus et sinus.

5. Discussion et perspectives

Rappelons que la situation didactique :

1. est développée SANS les angles orientés ;
2. prend appui sur le quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ représenté géométriquement par le cercle.

Nous discutons ici l'intérêt du travail avec un cercle de rayon non unité pour la découverte de la notion de fonctions cosinus et sinus après l'analyse *a posteriori* de notre situation didactique.

Nous pouvons nous demander pourquoi la plupart des manuels de 1[re] Scientifique font le choix de définir « le radian » dans un cercle de rayon unitaire et pourquoi les manuels font travailler uniquement dans le cercle trigonométrique (cercle de rayon 1) depuis la Seconde jusqu'à la Terminale Scientifique.

Nous avons précisé, dans la section 1, les raisons qui nous mènent à élaborer une situation didactique, puis dans la section 2, nos choix et objectifs dans l'élaboration de cette situation didactique. D'après l'analyse *a posteriori*, nous constatons que :

- dans la SD-P, les élèves pensent de manière routinière à travailler dans le cercle trigonométrique (rayon unitaire) lors du démarrage du travail dans la situation a-didactique. L'indication $2\pi R$ est un élément important du milieu qui permet aux élèves de réfléchir et de modifier leur(s) stratégie(s) lors du remplissage du « tableau 1 » à la question 1, au deuxième tour de cercle décrit par le point M. Nous pouvons dire que l'obstacle est le rayon R non unitaire.

  Rappelons que dans l'élaboration, nous pensions que $2\pi R$ était évidemment une mesure de longueur pour les élèves et que ce n'était pas évident pour 2π car les élèves peuvent penser plutôt aux mesures (en radians) de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ durant le remplissage des valeurs de t.
- dans la SD-P, aucun binôme n'arrive à donner la bonne réponse à la question 4 (qui consiste à calculer a et b en fonction de t et de R quand M est entre I et J) car, peut-être :

- les élèves ne connaissent pas la relation entre la longueur d'un arc de cercle, l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle et le rayon du cercle, ou bien,
- ils ne réactivent pas en autonomie la proportionnalité entre la longueur d'un arc de cercle et l'angle au centre qui intercepte l'arc de cercle avec adaptation des connaissances vues en Seconde à une telle situation en pensant à la mesure de l'angle au centre en radians à la place des degrés dans les rapports de la proportionnalité.

- dans la SD-G, c'est intéressant de faire travailler avec un cercle de rayon R car cela permet aux élèves de découvrir dans la phase 1 toute la famille des fonctions périodiques d'amplitude R et de période $2\pi R$; puis dans la phase 2, la fonction cosinus (resp. sinus) dans le cas particulier où le rayon $R = 1$.

Dans l'ensemble, nous pouvons dire que notre situation didactique est une situation riche et qu'elle met en lumière la réflexion des élèves dans la découverte de la notion de fonctions cosinus et sinus.

Nous pensons qu'il n'est pas nécessaire de proposer aux élèves la question 4 de la SD-P dans la situation a-didactique, mais c'est indispensable de proposer, avec un dialogue collectif, aux élèves de réfléchir durant la situation didactique en attirant l'attention sur le fait que « longueur d'un arc de cercle » et « mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte l'arc de cercle » ne sont pas représentées par un même nombre réel sauf dans le cas où le cercle a pour rayon l'unité.

Nous pouvons dire que notre situation didactique vise principalement à :

- nourrir la réflexion des élèves sur le travail graphique au niveau du cercle (Graphique 1) et au niveau du graphe de la fonction (Graphique 2) et sur leurs relations ;
- renforcer la capacité d'interpréter la périodicité et les variations pour plusieurs périodes via un travail graphique et via un tableau de variations dans les deux sens.

L'important, c'est que l'élève arrive à prendre en compte le fait que, pour étudier la fonction cosinus (resp. sinus) de la variable réelle t, on peut appréhender ses variations à la fois :

- dans le déplacement du point image de t dans l'enroulement sur le cercle dans le cadre géométrique repéré, et
- dans celui du point décrivant le graphe de la fonction dans le cadre fonctionnel.

La richesse de notre situation réside dans le fait d'aider les élèves à faire le lien entre ces deux registres graphiques et celui du tableau de variations.

Chapitre 6 : **Conclusion**

Rappelons que notre question de recherche est la suivante « La trigonométrie du triangle et la trigonométrie du cercle trigonométrique sont-elles un appui ou un obstacle pour l'introduction des fonctions sinus et cosinus à la fin du secondaire, en France et au Cambodge ? ».
Comme nous nous concentrons plutôt sur le contexte français, dans la suite, nous orientons principalement la conclusion sur l'enseignement secondaire français. Nous revenons à la fin de ce chapitre de conclusion sur l'enseignement au Cambodge.

1. Synthèse des éléments de réponse aux deux premières questions de recherche QR1 et QR2

Rappelons que dans le programme du secondaire, les objets cosinus et sinus sont visés via trois organisations mathématiques locales (OML) :

1. OML portant sur la trigonométrie du triangle ($OML_{Triangle}$), située dans le domaine « Géométrie euclidienne »,
2. OML portant sur la trigonométrie du cercle trigonométrique (OML_{CTrigo}), située dans le domaine « Géométrie repérée » et
3. OML portant sur les fonctions trigonométriques ($OML_{FoncTrigo}$), située dans le domaine « Analyse ».

On vise principalement les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle (le cosinus et le sinus d'un nombre réel) dans le domaine Analyse en passant par les objets cosinus et sinus vus dans l'OML_{CTrigo}.
De fait, en France, du cycle 4 à la Terminale Scientifique, les programmes d'études sur la trigonométrie présentent une cohérence curriculaire, avec une progression des savoirs. Il s'agit maintenant de discuter de la façon dont cela est réalisé dans les manuels et, surtout, de savoir quelles sont les connaissances effectives des élèves.

Rappelons que dans le chapitre 4, nous avons examiné les connaissances des élèves sur les trois OML. Dans l'ensemble des résultats obtenus au questionnaire, la plupart des élèves de Terminale Scientifique ont une difficulté de mise en fonctionnement des connaissances apprises, durant les cinq dernières années du secondaire, sur la trigonométrie (l'$OML_{Triangle}$, l'OML_{CTrigo}) et les fonctions cosinus et sinus (l'$OML_{FoncTrigo}$). Dans chaque exercice du questionnaire, l'élève doit trouver l'OML pertinente parmi les $OML_{Triangle}$, OML_{CTrigo}, $OML_{FoncTrigo}$, pour accomplir une tâche demandée, voire changer d'OML.

1.1. $OML_{Triangle}$ – Manuels et Exercice I du questionnaire

Dans les manuels du secondaire, on vise le cosinus et le sinus d'un angle géométrique dont la mesure est en degrés :

(1) le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle (4^e-3^e au collège) ;

(2) le cosinus des angles saillants avec la formule d'Al-Kashi (1^{re} Scientifique).

Nous discutons principalement ici de la trigonométrie dans le triangle rectangle ($OML_{TriangleR}$). Dans l'institution du secondaire, on vise et définit principalement le cosinus et

le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle comme étant le quotient d'une des longueurs des côtés de l'angle droit du triangle rectangle par l'hypoténuse. Dans le cas où on connaît la mesure en degrés d'un angle aigu, on donne une valeur approchée du cosinus (idem pour sinus) à l'aide de la calculatrice, sans avoir introduit explicitement les notions de cosinus et sinus de la mesure d'un angle (chapitre 2). C'est au contraire ce que l'on vise en 1re Scientifique : on définit d'abord les mesures en radians d'angles orientés à l'aide du principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on reprend les définitions du cosinus et du sinus d'un nombre réel (en Seconde), puis on définit le cosinus et le sinus d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires comme étant le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures.
Au collège, on peut se demander si on calcule le cosinus et le sinus d'un angle aigu ou bien le cosinus et le sinus de la mesure en degrés d'un angle (Groupe didactique des mathématiques *IREM* d'Aquitaine, 2016). Notons que le théorème de Thalès sert à faire le lien entre « le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle » et « le cosinus d'un angle aigu » (chapitre 2).
Remarquons que le cosinus et le sinus de la mesure en degrés d'un angle géométrique ne sont pas le cosinus et le sinus d'un nombre réel introduits en Seconde et complétés en Terminale Scientifique, (Groupe didactique des mathématiques *IREM* d'Aquitaine, 2016 ; Tanguay, 2010) puisqu'il s'agit d'une composition avec une application linéaire (celle qui permet la conversion d'unités). Sur ce point, nous avons montré que les auteurs des manuels de mathématiques français du secondaire n'attirent pas l'attention sur la distinction, par exemple, entre deux fonctions $\sin_{\mathrm{deg}} x$ et $\sin_{\mathrm{rad}} x$, correspondant au sinus d'un angle mesurant respectivement x degrés et x radians (chapitre 2). Rappelons aussi que le concept d'angle n'est pas facile à appréhender (cf. la section 2 du chapitre 1). L'*angle géométrique* ($\mathrm{OML}_{\mathrm{Triangle}}$) consiste en une section du plan délimitée par les deux côtés de l'angle (deux demi-droites de même origine). Les élèves travaillent habituellement dès le début du collège avec les angles géométriques dont la mesure est en degrés (on peut mesurer l'angle à l'aide du rapporteur).

Les résultats du questionnaire (Exercice I concernant en l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{Triangle}}$ – chapitre 4) montrent que le cosinus et le sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle sont *disponibles* pour les élèves (autrement dit, ces connaissances sont assez bien maitrisées). Cependant, certains élèves de Terminale Scientifique ont une difficulté pour donner les valeurs du cosinus et du sinus de l'angle droit dans le triangle rectangle comme étant respectivement 0 et 1.

1.2. $\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$ – Manuels et Exercice II du questionnaire

On aborde en Seconde un nouvel objet d'étude consistant en l'étude du cosinus et du sinus d'un nombre réel qui sont différents des objets cosinus et sinus vus au collège. On définit le cosinus et le sinus d'un nombre réel x comme étant respectivement l'abscisse et l'ordonnée d'un point M du cercle trigonométrique (rayon 1), point image du nombre réel x dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique. Remarquons que l'on utilise la notion de radian sans le dire, par le fait qu'avec le principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (morphisme φ continu et surjectif – section 2 du chapitre 3), on mesure les arcs du cercle trigonométrique avec pour unité de longueur le rayon du cercle trigonométrique.

En 1re Scientifique, il s'agit d'une prolongation d'étude sur les objets cosinus et sinus mais, cette fois, on vise le cosinus et le sinus d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires sans toutefois définir ce qu'est un angle orienté de deux vecteurs (chapitre 2). La définition par les rotations vectorielles vues dans la section 1 du chapitre 3 est totalement absente, ce qui ne permet pas une construction rigoureuse de la notion d'angles orientés. Rappelons que la notion de radian est introduite en 1re Scientifique (le radian est une nouvelle unité de mesure d'angles) et qu'un angle orienté de deux vecteurs semble être défini par ses mesures en radians. Toutes les mesures en radians d'un angle orienté diffèrent d'un multiple de 2π ; il s'agit d'un lien avec la notion de *longueur* d'arcs de cercle trigonométrique (voir la section 3 du chapitre 3).

Il serait possible que dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$, l'élève voie un angle orienté de deux vecteurs comme étant un angle géométrique. Si c'est le cas, l'élève peut avoir des difficultés à s'approprier ce qu'est un angle orienté de deux vecteurs ainsi que toutes ses mesures en radians (ce qui est lié à la notion de périodicité), (voir Exercice III.1 du chapitre 4 ; cf. Bloch, 2009 ; cf. Kamber & Takci, 2018).

Nous constatons que :

1. Dans les manuels de Seconde étudiés, dès que la correspondance entre « angle » et « longueur d'arc de cercle » est faite, on parle seulement de cosinus et de sinus d'un nombre réel qui est l'abscisse d'un point de la droite numérique dans l'enroulement, en évitant de parler de cosinus et de sinus d'un angle dont la mesure est en degrés.
2. Dans les manuels de 1re Scientifique étudiés, lorsque l'on peut parler de mesures en radians d'angles orientés, le point de vue « enroulement » et « longueur d'arcs de cercle » disparaît, en particulier tous les éléments du registre graphique de l'enroulement introduits en Seconde. Il semble que les manuels fassent le pari que l'élève ait bien assimilé et retenu les connaissances visées en Seconde et soit capable de les réinvestir en 1re Scientifique, dans le registre graphique, malgré l'absence de la droite numérique qui sert à l'enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique.
3. Dans le registre graphique, dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ vue en Seconde et en 1re Scientifique, on voit clairement « $\cos x$ » et « $\sin x$ », qui sont respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point M, image d'un nombre réel x dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique (c'est-à-dire M est d'affixe $\varphi(x) = \exp(ix)$). Notons que M est toujours un point du cercle trigonométrique alors que x peut représenter différents objets mathématiques dans les deux premières années du lycée ; autrement dit, ce qui ressort de manière explicite est moins x que son point image M situé sur le cercle trigonométrique (voir *Figure 46* et *Figure 47*) qui peut être interprété comme le quotient $\mathbb{R}/Ker(\varphi)$.

Les résultats du questionnaire (Exercice II concernant l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ – chapitre 4) montrent que dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$, « l'expression des coordonnées cartésiennes d'un point du cercle trigonométrique à l'aide du cosinus et du sinus » semble être *peu disponible* pour les élèves de Terminale Scientifique. Certains élèves réactivent d'autres connaissances, par exemple l'$\text{OML}_{\text{TriangleR}}$; remarquons qu'ils réussissent à accomplir la tâche demandée pour l'angle aigu

α mais pas pour l'angle obtus β (voir *Figure 77*). Nous faisons l'hypothèse qu'il y a d'une part une confusion dans la transposition didactique sur l'objet « angle orienté de deux vecteurs » dans l'OM à enseigner et dans l'OM enseignée, et d'autre part, des difficultés de compréhension dans l'apprentissage des élèves sur les objets cosinus et sinus dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$.

1.3. $\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ – Manuels et Exercice III.1 du questionnaire

Rappelons que la plupart des manuels de Terminale Scientifique présentent le passage de la trigonométrie vers les fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle, en se basant sur les mesures en radians d'angles orientés, dans le cercle trigonométrique (un seul des quatre manuels étudiés fait découvrir les fonctions sinus et cosinus en se basant seulement sur l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique). Toutefois, il semble que les manuels de Terminale Scientifique ne travaillent pas sur la notion de périodicité lors de la découverte de ces deux fonctions, cette notion n'étant l'objet d'aucune activité d'approche.

Les résultats du questionnaire (Exercice III.1 concernant en l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ – chapitre 4) montrent que certains élèves de Terminale Scientifique font une confusion entre les connaissances apprises dans le registre graphique du cadre de la géométrie repérée ($\text{OML}_{\text{CTrigo}}$) d'une part, dans le registre graphique du cadre de l'analyse ($\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$) d'autre part. Plus précisément, ils ont du mal à interpréter la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans le registre graphique du cadre fonctionnel et ils commettent une confusion entre « les points dont les abscisses sont des nombres réels de différence un multiple de 2π, situés sur la courbe représentative de la fonction cosinus (ou sinus) dans l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ » et « les points images associés à ces nombres réels dans l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ ». Autrement dit, ces élèves ont du mal à interpréter ce qui se passe dans l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ en se référant à ce qui se passe dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$. Il semble que les élèves s'approprient, avec difficulté, ce qu'est le signe x dans le registre graphique de l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ et dans le registre graphique de l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$, où le *non-ostensif* représenté par x change : « nombres réels » (l'abscisse du point décrivant la droite numérique figurant verticalement l'ensemble des réels dans le registre graphique dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$) → « mesures de la longueur d'arcs de cercle » → « mesures en radians d'angles orientés des vecteurs » → « nombres réels » (l'abscisse du point décrivant la courbe représentant la fonction cosinus (resp. sinus) dans le registre graphique dans l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$). Nous faisons l'hypothèse qu'il y a une difficulté cognitive chez certains élèves concernant les objets cosinus et sinus dans les deux OML durant les trois années d'étude en fin de cursus.

1.4. De l'$\text{OML}_{\text{Triangle}}$ vers l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$

Rappelons que les objets cosinus et sinus dans l'$\text{OML}_{\text{Triangle}}$ et dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ sont deux objets d'étude différents, (voir la section 3 du chapitre 3). Ce n'est pas du tout simple de les appréhender car il y a d'autres objets mathématiques accompagnant ces objets d'étude : grandeurs « angle » et « longueur » et leurs mesures d'une part, et d'autre part, grandeur « angle » et ses mesures avec deux unités différentes : « Degré » et « Radian » (conversion de l'une à l'autre).

En Seconde, on fait le lien avec la trigonométrie dans le triangle rectangle. On insère le triangle rectangle dans le premier quart du cercle trigonométrique avec l'idée de montrer que la définition du cosinus et du sinus d'un angle aigu dans le triangle rectangle est cohérente avec les concepts du cosinus et du sinus définis dans l'OML_{CTrigo} (voir la section 1 du chapitre 3).
Certains élèves de Terminale Scientifique ont des difficultés à déterminer le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le triangle rectangle (Exercice I du questionnaire – chapitre 4) ; ils n'ont pas pensé à changer d'OML pour accomplir la tâche demandée. L'angle droit pose à l'évidence une difficulté cognitive à certains élèves, causée par un doute sur les connaissances apprises dans l'$OML_{Triangle}$ et dans l'OML_{CTrigo} : connaître « le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le cercle trigonométrique » mais pas « le cosinus et le sinus de l'angle droit dans le triangle rectangle », c'est par exemple le cas de l'élève L1E8B (voir chapitre 4 - *Figure 84* et *Figure 96*). Il s'agit d'une interprétation des deux OML car l'angle droit dans le triangle rectangle ne se présente pas, d'une certaine manière, comme l'angle droit dans le cercle trigonométrique : l'angle droit du triangle rectangle est le secteur angulaire délimité par deux côtés perpendiculaires du triangle, alors que l'angle droit dans le cercle trigonométrique est l'angle de demi-droites d'origine O, origine d'un repère orthonormé du plan (orienté), dont les vecteurs directeurs forment une base orthonormée (directe) du plan. Les manuels de Seconde étudiés n'attirent pas l'attention sur le fait que les formules vues au collège faisant intervenir les côtés adjacent et opposé ne s'appliquent pas directement pour l'angle droit, lors du passage de l'$OML_{TriangleR}$ à l'OML_{CTrigo}. Nous faisons donc l'hypothèse qu'il y a une difficulté chez certains élèves sur l'angle droit et que cette difficulté est causée par un manque de coordination des objets de savoir dans l'$OML_{Triangle}$ et l'OML_{CTrigo}.

1.5. De l'OML_{CTrigo} vers l'$OML_{FoncTrigo}$

Nous voulons attirer l'attention du lecteur sur la notion de « radian », (voir l'annexe n° 1, pp. 380-382). Remarquons que « le radian », étant une unité de mesure d'angles, est une unité très particulière par rapport à d'autres unités de mesure d'angles car c'est la seule unité de mesure d'angles, qui permet d'avoir une paramétrisation normale du cercle trigonométrique, menant à l'étude des fonctions cosinus et sinus usuelles d'une variable réelle dans le domaine « Analyse », (voir la section 3 du chapitre 3).
Rappelons que :

- Dans l'enseignement de la trigonométrie du secondaire actuel, on ne parle que de deux unités de mesure des angles : le « Degré » et le « Radian ». Le « radian », étant une nouvelle unité de mesure des angles, est introduite en 1re Scientifique.
- Il semble qu'il y ait consensus entre les manuels de mathématiques français de 1re Scientifique sur le fait que toutes les mesures d'angles orientés sont exprimées en « radians ».

Rappelons aussi qu'en ce qui concerne l'OML_{CTrigo} nous avons mis en évidence les faits suivants : en Seconde, on introduit la notion d'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, puis en 1re Scientifique, on définit les mesures en « radians » d'angles orientés à l'aide du principe d'enroulement de la droite numérique. Ceci exprime qu'une mesure de la longueur d'un arc de cercle (vue en Seconde) en prenant comme unité le rayon du cercle est interprétée comme une mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle (vue en 1re Scientifique). Le « radian » considéré comme unité de mesure d'angle fonctionne parfaitement dans le cercle trigonométrique car il permet de ne pas distinguer la longueur d'un arc de cercle trigonométrique de la mesure en radians de l'angle au centre qui intercepte cet arc de cercle trigonométrique.

Dans notre travail de thèse, nous nous focalisons sur le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus. L'exercice III.1 prouve clairement une difficulté, que nous interprétons comme un obstacle, relativement aux connaissances apprises liées aux objets mathématiques dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ (en Seconde et en 1re Scientifique) et dans l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ (en Terminale Scientifique). Rappelons que dans le registre graphique dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$, le signe x désigne à la fois « une mesure de la longueur de l'arc de cercle dans l'enroulement, (vue en Seconde) » et « une mesure en radians d'un angle orienté de deux vecteurs unitaires, (vue en 1re Scientifique) » (voir *Figure 47* – chapitre 2), par le fait que « les axes des abscisses et des ordonnées dans un repère orthonormé direct du plan » et « les arcs du cercle trigonométrique » ont la même *unité de longueur*. Nous faisons l'hypothèse que « le radian » est le pivot de cet obstacle, à la fois épistémologique et didactique, relativement à l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ et à l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$:

- Au sens de l'obstacle épistémologique :
    - le radian n'est pas tout de suite arrivé dans l'histoire d'une part, et d'autre part, pour avoir les mesures d'angles en radians, on est obligé de passer par une autre grandeur, la longueur d'arcs de cercle trigonométrique (voir la section 3 du chapitre 3) ;
    - les mesures d'angles en radians sont à valeurs dans le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, ce qui est une particularité dans les mesures usuelles où en général l'ensemble des mesures est $\mathbb{R}_+$. D'une certaine manière, le radian incarne le passage au quotient.
- Au sens de l'obstacle didactique parce que d'après l'étude du curriculum dans le chapitre 2, durant tout le parcours d'étude dans le secondaire, les objets cosinus et sinus visés, dans le thème de la trigonométrie ($\text{OML}_{\text{Triangle}}$ et $\text{OML}_{\text{CTrigo}}$) puis dans celui des fonctions sinus et cosinus ($\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$), ne sont pas bien distingués, dans les manuels de mathématiques du secondaire, semant une confusion d'une part, et d'autre part, il semble que l'organisation curriculaire des savoirs mathématiques soit lacunaire, ce qui pose des problèmes de coordination. Par exemple, la définition par les rotations vectorielles vues dans la section 1 du chapitre 3 (ou un équivalent théorique) est totalement absente, ce qui ne permet pas une construction rigoureuse de la notion d'angles orientés. Sans définir un angle orienté, on définit le cosinus et le sinus d'un angle orienté comme étant le cosinus et le sinus d'une quelconque de ses mesures en radians.

Le passage de l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ vers l'$\text{OML}_{\text{FoncTrigo}}$ est important à expliciter, afin d'attirer l'attention des élèves, d'une part, sur la distinction entre la droite numérique et le cercle trigonométrique, et d'autre part, sur les objets cosinus et sinus dans le domaine de l'analyse via un registre graphique du cadre fonctionnel.

1.6. Synthèse : $OML_{Triangle}$ et OML_{CTrigo} – Point d'appui ou obstacle

Nous pouvons dire que « la trigonométrie du triangle et la trigonométrie du cercle trigonométrique pourraient être un appui pour l'introduction des fonctions sinus et cosinus » si les objets de savoir visés étaient correctement explicités et coordonnés et bien assimilés par les élèves, principalement les objets cosinus et sinus d'une part, et d'autre part, le représentant x dans les différents cadres, introduit dès la Seconde.

En Seconde, par le principe de l'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, les élèves voient la droite numérique enroulée sur le cercle trigonométrique (et pas directement la longueur d'un arc de cercle), les valeurs prises par x (y compris l'interprétation du nombre de tours de parcours de M) et les valeurs relatives du cosinus et du sinus du nombre réel x (y compris la connaissance par la lecture graphique du cosinus et du sinus dans le cadre « Géométrie repérée »). En 1^re^ Scientifique, les élèves continuent à développer les connaissances de Seconde. Ces connaissances sont complétées par les nouvelles notions intégrées : *Radian* comme nouvelle unité de mesure des angles, mesures en radians d'angles orientés de vecteurs, angle orienté de deux vecteurs unitaires défini par ses mesures en radians. À ce niveau, l'accent est fortement mis sur le cosinus et le sinus d'un nombre réel avec d'autres objets mathématiques à intégrer. Au niveau du graphique dans le cadre « Géométrie repérée » (vu en 1^re^ Scientifique), malgré l'absence de la droite numérique enroulée sur le cercle trigonométrique, les élèves sont supposés continuer à mobiliser cette droite numérique enroulée en la reliant aux mesures en radians d'angle orienté (et pas directement à la longueur d'un arc de cercle ni à l'angle géométrique au centre). Les élèves peuvent alors apprendre et assimiler, en Terminale Scientifique, le cosinus et le sinus d'un nombre réel dans le domaine « Analyse » avec un nouveau graphique dans le cadre fonctionnel lors de la transition des savoirs à partir du cadre « Géométrie repérée ».

D'après notre étude curriculaire au chapitre 2, nous pouvons dire que les programmes d'études du secondaire sur la trigonométrie présentent une cohérence curriculaire, avec une progression des savoirs. Cependant, il manque certains éléments d'objets mathématiques non explicités (par exemple, ce qui concerne notre hypothèse portant sur « le radian », indiquée dans la sous-section 1.5 précédente) d'une part, et d'autre part, il semble que la transition entre les objets de savoir ne soit pas bien faite. Tout cela entraîne de telles conséquences sur l'apprentissage de la trigonométrie et des fonctions sinus et cosinus que nous pouvons dire que la trigonométrie du cercle trigonométrique se constitue en obstacle pour l'introduction des fonctions sinus et cosinus en Terminale Scientifique. En effet, il semble que les connaissances visées en Seconde et en 1^re^ Scientifique ne soient pas assimilées correctement par les élèves (Exercice II, Exercice III.1 du questionnaire – chapitre 4). De plus, les résultats du questionnaire font la preuve d'un manque de lien entre les trois OML concernant les objets d'étude, sur la trigonométrie et sur les fonctions sinus et cosinus, proposés par les manuels du secondaire. Nous faisons l'hypothèse que ces difficultés résultent du fait que, dans les manuels de mathématiques du secondaire, le lien entre les trois OML est largement implicite (chapitre 2) et ce serait plus simple, pour les élèves, sans les angles orientés.

2. Situation didactique et Résultats (chapitre 5)

Rappelons que nous nous intéressons principalement au passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique (OML_{CTrigo}) vers les fonctions cosinus et sinus ($OML_{FoncTrigo}$). Pour mieux introduire les notions de fonctions cosinus et sinus dans le domaine « Analyse » via le registre graphique, nous faisons l'hypothèse qu'il faut faire en sorte que les élèves s'approprient les objets de savoirs visés dans l'OML_{CTrigo}.

Rappelons aussi que les objectifs principaux de la situation didactique mise en œuvre sont :

1. de faire réfléchir les élèves sur le fait que l'on définit les notions de fonctions cosinus et sinus à partir d'un arc du cercle trigonométrique, en lien avec le principe de l'enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique (cf. Demir & Heck, 2013), sans les angles orientés pour tenter de contourner l'obstacle didactique ;
2. d'expliciter aussi clairement que possible la périodicité d'une fonction et de faire éviter une confusion entre « angles » et « nombres réels » de différence un multiple de 2π (courbe représentative de la fonction cosinus/sinus) en s'appuyant sur le cercle comme représentant géométrique du quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Dans notre travail de recherche, nous nous appuyons sur la notion de périodicité lors de la découverte de la notion de fonction cosinus (resp. sinus). Les résultats obtenus, après la mise en œuvre de notre situation didactique, montrent son intérêt particulier permettant de nourrir la réflexion des élèves ainsi que la compréhension des objets de savoirs visés, grâce au milieu assez riche de la situation didactique.

Notre situation didactique révèle l'intérêt de faire travailler avec un cercle de rayon R. Cela permet aux élèves de découvrir dans la phase 1 de la situation didactique avec GeoGebra (SD-G) toute la famille de fonctions sinusoïdales d'amplitudes R et de période $2\pi R$, puis dans la phase 2 de la SD-G, la fonction cosinus (resp. sinus) dans le cas particulier où le rayon du cercle est $R = 1$. Nous nous focalisons sur le travail graphique pour nourrir la réflexion des élèves et pour développer leur capacité à lire de manière parallèle dans deux registres graphiques : au niveau du cercle dans le cadre de la géométrie repérée et au niveau du graphe dans le cadre de l'analyse comme a cherché à le faire la thèse de Nguyen Thi (2013). La richesse de la situation didactique réside donc dans le fait d'aider les élèves à faire le lien entre ces deux graphiques et le tableau de variations. Les résultats nous permettent de conclure que notre situation didactique peut renforcer la capacité des élèves à interpréter la périodicité et les variations pour plusieurs périodes via un travail graphique et via un tableau de variations dans les deux sens.

3. Conclusion sur l'enseignement du secondaire au Cambodge

L'étude de curriculum au chapitre 2 nous montre que la structure de l'enseignement des mathématiques du secondaire concernant les thèmes sur la « Trigonométrie » et sur les « Fonctions sinus et cosinus » est différente avec les cinq dernières années du secondaire en France (correspondant aux programmes en vigueur juste la rentrée 2019) et les deux premières années du lycée au Cambodge, 10^{e} et 11^{e}, plus la 12^{e} pour les limites et les dérivées des fonctions trigonométriques.

De même, les organisations didactiques sont assez différentes, notamment ce qui concerne la structuration de chaque thème d'étude. Dans les manuels officiels cambodgiens, il manque l'intégration des connaissances didactiques permettant de nourrir la réflexion des élèves dans tout le parcours d'étude au lycée.
En revanche, les organisations mathématiques sont presqu'identiques malgré quelques différences :

- $OML_{Triangle}$: Il s'agit des mêmes objets de savoir visés, mais avec parfois des techniques différentes pour introduire et pour justifier, comme par exemple l'utilisation de la *calculatrice* en France *vs*. la *table de trigonométrie* au Cambodge.
- OML_{CTrigo} : L'enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique et les concepts des cosinus et sinus d'un nombre réel par l'enroulement de la droite numérique ne sont pas attendus dans le programme du secondaire cambodgien. Une extension des rapports trigonométriques d'un angle obtus dont la mesure en degrés de l'angle est comprise entre 0° et 180°, sans la notion d'angle orienté ; et cette extension n'est pas attendue dans le programme du secondaire français.
- $OML_{FoncTrigo}$: Les fonctions sinus et cosinus sont étudiées, en 11^e^, de manière incomplète, en raison de la non utilisation de la dérivation, et ce n'est pas le cas pour la France avec une étude complète sur une seule année, ce qui a des conséquences sur l'étude des variations.

L'étude curriculaire du chapitre 2 montre que les objets de savoir visés, dans l'enseignement du secondaire cambodgien, sur la trigonométrie pourraient être un appui pour l'introduction des notions de fonctions sinus et cosinus d'une variable réelle correspondant à une mesure en radians d'angle orienté. Cependant, d'une part certains concepts n'ont pas été définis de manière claire, par exemple : grandeur « angle » et ses mesures, et d'autre part, il manque également un lien entre les trois OML.

Rappelons que notre travail de recherche se focalise plutôt sur le contexte français. Le questionnaire d'évaluation des effets de l'enseignement (chapitre 4) et la situation didactique (chapitre 5) visant la découverte des notions de fonctions cosinus et sinus ont été élaborés dans le contexte français. Nous les avons mis en œuvre, avec modification de la situation et des tâches du questionnaire, sur le terrain au Cambodge. Les résultats issus de l'analyse *a posteriori* du questionnaire ont mis en évidence des difficultés importantes des élèves cambodgiens au niveau de la mise en fonctionnement des connaissances apprises sur la trigonométrie et sur les fonctions trigonométriques ; ces résultats du questionnaire révèlent bien les difficultés des élèves cambodgiens, relatives aux connaissances mathématiques, en général. Les résultats issus de l'analyse *a posteriori* de la situation didactique nous mènent à constater que les élèves ont des difficultés à réactiver des connaissances antérieures ainsi que des difficultés avec le travail graphique. Cependant, nous constatons une progression intéressante dans la réflexion des élèves, durant les trois séances de 6 heures, par exemple, sur la compréhension des objets d'étude visés via un travail graphique. Nous pouvons dire qu'il n'est pas irréaliste de penser que la méthode d'enseignement que nous avons expérimentée peut être importée dans l'enseignement auprès des élèves cambodgiens.

4. Limites et perspectives de recherche

Rappelons que notre travail de recherche a été commencé par une étude curriculaire (textes officiels et manuels), surtout en nous appuyant sur l'étude de la praxéologie mathématique (chapitre 2). Cette étude curriculaire nous a amené à vouloir connaître les effets de l'enseignement et les connaissances effectives des élèves via un questionnaire (chapitre 4) dont les tâches ont été sélectionnées à partir des types de tâches clés rencontrés dans les trois OML. Les résultats obtenus au questionnaire nous ont mené à nous focaliser sur les trois premiers exercices du questionnaire dans le cadre de la thèse. L'intérêt de ces résultats nous a incités à orienter notre recherche dans la formation doctorale. L'étude curriculaire (chapitre 2), l'étude mathématique (chapitre 3) et le questionnaire (chapitre 4) nous ont conduit à l'élaboration d'une situation didactique (chapitre 5) en prenant appui sur la trigonométrie du cercle, sans les angles orientés, en se basant sur le quotient[18] $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$ qui est géométriquement représenté par le cercle, pour introduire les notions de fonctions cosinus et sinus.

4.1. Recherches approfondies sur les obstacles

Notre questionnaire d'évaluation des effets de l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques du secondaire (chapitre 4) a été élaboré à partir de l'étude des trois OML déterminées dans le chapitre 2. Le questionnaire était composé de six exercices (voir l'annexe n° 3), avec un « spectre large » afin de préciser le questionnement, ce qui a permis de faire émerger un obstacle didactique et un obstacle épistémologique. Les résultats obtenus au questionnaire nous ont permis de dégager des éléments concernant notamment ces obstacles et nous ont conduits à nous focaliser sur les trois premiers exercices du questionnaire qui se sont révélés particulièrement intéressants pour structurer les questions de recherche de notre thèse. De nouvelles recherches sont nécessaires pour préciser les caractéristiques de ces obstacles didactique et épistémologique, tout en les validant.

Il est intéressant d'avoir un questionnaire plus précis relativement aux trois OML, par exemple, il y a des éléments à développer concernant les trois premiers exercices du questionnaire du chapitre 4. L'idée est de connaître les connaissances effectives des élèves sur les trois OML et de mieux comprendre, pour tenter de les surmonter, l'obstacle didactique et l'obstacle épistémologique indiqués précédemment.

Nous repérons six points importants qui sont liés à l'obstacle didactique, ils seront précisés dans la section 4.4 suivante. Il est nécessaire d'effectuer une recherche ciblée chez les élèves à ce niveau, de manière continue et sur le long terme. Il faudrait donc commencer par élaborer un/des questionnaire(s) en se focalisant sur le(s) point(s) de vue que l'on souhaite consolider afin d'améliorer la compréhension des élèves relativement aux connaissances enseignées. Il serait nécessaire d'élaborer une méthodologie spécifique en faisant, par exemple, une étude de classes ordinaires, des interviews avec des élèves et des enseignants pour mieux identifier les deux obstacles.

[18] On considère $x \mapsto R\exp(ix/R)$

4.2. Les enseignants et la formation

Nous avons proposé une théorie mathématique (chapitre 3) permettant de justifier ou construire, coordonner rigoureusement les trois OML. Nous pouvons conjecturer que la théorie mathématique est un point d'appui nécessaire pour les enseignants de mathématiques du secondaire. Mais nous ne savons pas quel est l'état des connaissances des enseignants. Nous ne savons pas comment enseigner cette théorie mathématique dans la formation des enseignants (quelle transposition didactique ?). Nous ne savons pas si l'inclure dans la formation des futurs enseignants aurait des conséquences sur l'enseignement effectif. Donc il faut développer des recherches sur ces thèmes.

Dans le cadre de la thèse, nous nous concentrons sur l'apprentissage par les élèves des concepts mathématiques sur la trigonométrie et sur les fonctions sinus et cosinus dans l'enseignement secondaire, ainsi que sur leurs difficultés de compréhension. Les résultats sur l'ensemble de notre travail de recherche montrent clairement les difficultés de compréhension chez les élèves sur ces deux thèmes via les trois OML. Il serait possible qu'il y ait, chez les enseignants aussi, des difficultés de compréhension sur certains concepts non simples à transmettre aux élèves. Contrairement à ce que semble penser une enseignante de notre étude, nous ne pensons pas qu'un élève de Terminale Scientifique qui prononce $\cos(M)$ ait tort. Au contraire, cela révèle peut-être une compréhension du quotient avec $\cos(x) = \cos(M_x)$ où M_x est une représentation de la classe de x dans le quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; dans les deux premières années du lycée, l'élève voit plutôt dans le registre graphique de l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$ le point M se situant sur le cercle trigonométrique que le nombre réel x dont ce point M est le point image dans l'enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique et qui représente différents objets mathématiques dans l'$\text{OML}_{\text{CTrigo}}$.

Il serait intéressant, et important, de faire une recherche ciblée chez les enseignants de mathématiques du secondaire concernant leurs connaissances afin d'envisager d'établir une ingénierie didactique de formation. En particulier, ont-ils connaissance de l'obstacle didactique ? Ont-ils réussi à franchir l'obstacle épistémologique ?

La nécessité de faire des recherches ciblées en se focalisant sur les obstacles didactique et épistémologique, du côté des élèves et du côté des enseignants, pourra conduire à une organisation didactique permettant d'éviter l'obstacle didactique dans l'enseignement et l'apprentissage des thèmes « Trigonométrie » et « Fonctions trigonométriques » dans le secondaire. Un obstacle épistémologique ne s'évite pas, il se dépasse ou il se franchit par un processus indispensable à la construction des savoirs mathématiques en jeu.

Nous pouvons envisager les deux temps suivants :

- Premier temps : nous interroger sur les connaissances des enseignants du secondaire ainsi que sur leurs pratiques dans l'enseignement sur les deux thèmes, via un questionnaire, puis des entretiens, et aussi l'observation de leurs pratiques dans les classes, pour comprendre l'état des connaissances des enseignants et leurs pratiques.
- Deuxième temps : en tenant compte de la compréhension de l'état des connaissances des enseignants étudiée dans le premier temps et donc des besoins de connaissances des enseignants, nous envisageons alors d'élaborer une formation des enseignants afin de les aider à franchir l'obstacle épistémologique, si le besoin ressort de l'étude, tout en tentant de faire évoluer leurs pratiques pour tenir compte des obstacles didactique et épistémologique.

Ces deux temps conduiront, nous l'espérons, à améliorer les connaissances des enseignants, leurs méthodes d'enseignement, leurs pratiques et ainsi améliorer le système d'enseignement.
Peut-on prendre en charge pleinement les fonctions trigonométriques dans la formation des enseignants pour améliorer cet enseignement ? Peut-on arriver à une ingénierie de formation ?

4.3. Au Cambodge

En ce qui concerne l'institution du secondaire cambodgien, on relève un besoin de recherche spécifique au Cambodge, avec des questionnaires et situations didactiques qui ne soient pas des adaptations d'outils importés de France, mais élaborés, en interne, pour le Cambodge. Il serait en particulier important d'évaluer les élèves sur les tâches techniques particulièrement travaillées dans les manuels. D'après l'étude des manuels (chapitre 2), nous constatons en général qu'il manque, dans les manuels de mathématiques officiels cambodgiens, des activités d'approches menant les élèves à se situer dans une situation a-didactique afin de découvrir les nouvelles notions mathématiques dans chaque thème d'étude visé. Il s'agit plutôt, comme on l'a vu au chapitre 2, d'une exposition/présentation décrite de manière directe sans dévolution dans le contenu des cours ; dans la partie des exercices, nous voyons bien qu'il s'agit presque totalement de calculs algébriques (voir l'annexe n° 2). Il ne s'agit pas d'importer sans réflexion la manière de faire en France, mais plutôt de voir comment pourraient vivre certaines activités d'approche pour enrichir le travail cognitif des élèves. Bien entendu, cela suppose également la production de ressources et notamment de manuels de manière *didactique*, avec bien entendu une formation adéquate pour les enseignants.
D'ailleurs, il serait intéressant que les auteurs des manuels de mathématiques du secondaire visent à développer, dans l'apprentissage des élèves, la conceptualisation des notions mathématiques.

4.4. Développement curriculaire

Comme nous l'avons constaté dans l'état de l'art et par notre propre travail curriculaire, il y a plusieurs méthodes d'enseignements de la trigonométrie et des fonctions cosinus et sinus dans le secondaire. Nous voyons bien les difficultés de compréhension de la trigonométrie et des fonctions trigonométriques chez les élèves (et aussi, peut-être chez certains enseignants) dans le secondaire. Grâce aux résultats obtenus lors de notre travail de recherche, nous espérons pouvoir améliorer l'enseignement de la trigonométrie et des fonctions cosinus et sinus. Nous envisageons de concevoir une progression intégrant notre situation didactique permettant l'enchainement des objets cosinus et sinus dans les trois OML, afin de surmonter les obstacles indiqués dans la section 1.5 précédente, pour renforcer la qualité de l'enseignement et l'apprentissage de ces objets d'étude à venir.
En ce qui concerne la question de la périodicité, il semble que la périodicité soit peu abordée dans les manuels de Terminale Scientifique, c'est pourtant une notion qui joue un rôle important (chapitre 5). Cela peut, et sans doute doit, faire l'objet de recherches spécifiques.
Rappelons que notre situation didactique (chapitre 5) n'a été expérimentée qu'une seule fois en France avec des effectifs réduits et sans évaluer les conséquences à long terme sur les connaissances des élèves. En France, elle n'a pas été expérimentée comme situation introductive. Nous voyons bien que la gestion par l'enseignante a pu modifier l'analyse *a*

priori. Quelles sont les contraintes qui ont provoqué ces interventions ? Donc, il faut prolonger son expérimentation en l'intégrant à une progression et en évaluant ses effets réels, comme aussi du côté de l'enseignant pour tenir compte des contraintes.

Nous conjecturons que notre situation didactique ouvre une piste dans le développement de la réflexion dans l'apprentissage des objets cosinus et sinus et des objets mathématiques qui les accompagnent, chez les élèves dans le secondaire. Concernant le passage de la trigonométrie dans le cercle trigonométrique vers les fonctions cosinus et sinus, on peut introduire les notions de fonctions[19] cosinus et sinus dès la Seconde, en se basant sur l'enroulement de la droite numérique sur un cercle de rayon R non unitaire (tout en s'appuyant sur le cercle comme représentant du quotient $\mathbb{R}/2\pi R\mathbb{Z}$). En effet, nous pensons que notre situation didactique est envisageable à ce niveau, grâce à son milieu, assez riche pour être mise en œuvre en Seconde, notamment les trois premières questions de la SD-P avec quelques modifications afin de renforcer la compréhension par un travail graphique sur la variation des périodes et sur les variations de la fonction cosinus (resp. sinus), et aussi, la capacité d'interprétation de ces variations sous forme d'un tableau de variations et inversement. Ensuite, la SD-G sera mise en œuvre en Terminale Scientifique (en 1^{re} Scientifique d'après le nouveau programme applicable à la rentrée 2019) pour faire découvrir les notions de fonctions cosinus et sinus dans le domaine « Analyse ». L'idée de faire travailler avec deux fenêtres graphiques de GeoGebra, illustrant ce qui se passe simultanément au niveau du cercle et au niveau du graphe de la fonction étudiée, conforte la réflexion des élèves pour mieux appréhender le passage de la trigonométrie dans un cercle vers les fonctions trigonométriques, via la lecture graphique. La compréhension sur la lecture dans de tels registres graphiques permettra aux élèves de mieux comprendre le signe x qui désigne différents objets mathématiques dans l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{CTrigo}}$ et l'$\mathrm{OML}_{\mathrm{FoncTrigo}}$.

Nous proposons alors de dissocier l'introduction des fonctions cosinus et sinus des nombres réels de la définition des cosinus et sinus des angles orientés pour éviter l'obstacle didactique. Pour travailler les aspects fonctionnels une telle perspective prendrait appui sur le cercle comme représentant du quotient, en s'inspirant de l'objet $\cos(M)$ introduit par certains élèves, pour aider à franchir l'obstacle épistémologique. Dans ce contexte, les résultats de notre recherche montrent l'importance de faire le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle avec les angles géométriques de façon à montrer la compatibilité des différents aspects sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, c'est-à-dire dans le premier quadrant. La question de l'extension des notions de cosinus et sinus pour les angles géométriques droit et obtus pourrait être alors soulevée. Le travail sur les angles orientés, leurs mesures en radians et plus généralement la trigonométrie du cercle avec les angles orientés n'interviendraient qu'*a posteriori*.

La nécessité d'un enseignement au secondaire de la notion d'angle orienté est un point qui mériterait d'être étudié. Pour quelles raisons mathématiques continue-t-on à les aborder alors que le curriculum français réduit toujours plus la place consacrée à la géométrie euclidienne orientée avec la disparition des notions de rotation et similitude par exemple. Existe-t-il des raisons au sein des usages non mathématiques de la trigonométrie des angles ? Ont-ils besoin de la notion d'angle orienté et de la relation de Chasles qui en est l'intérêt principal ? Les

[19] Concernant le nouveau programme de 1re Scientifique (BO Spécial n° 1 du 22-1-2019), on introduit à ce niveau les notions de fonctions cosinus et sinus.

angles géométriques ne leur suffisent-ils pas ? Ceci est une direction de recherche qu'il nous paraît légitime de soulever compte tenu des difficultés multiples mises en évidence par les différents travaux résumés dans l'état de l'art et confirmés par notre propre recherche.

Nous espérons que l'idée de faire travailler les élèves, dès la Seconde, avec un cercle de rayon non unitaire, peut développer la réflexion des élèves afin de mieux appréhender les objets mathématiques visant les objets cosinus et sinus dans le cercle trigonométrique dans le cadre de la géométrie repérée puis dans le cadre de l'analyse.

Dans le processus d'enchaînement de ces objets mathématiques accompagnés par certaines interprétations via un support instrumental, il nous semble important de faire travailler les élèves sur :

1. la circonférence d'un cercle et la longueur du parcours d'un point mobile sur un cercle pour un tour de déplacement ainsi que pour plusieurs tours ;
2. les liens entre la droite numérique et un cercle : observation expérimentale pour ce qui se passe dans l'enroulement et pour ce qui se passe dans le déroulement ;
3. le radian : une unité de mesure des angles, et aussi, une unité de longueur d'arcs du cercle ;
4. la relation entre « longueur d'un arc de cercle », « mesure en radians de l'angle qui intercepte cet arc de cercle » et « rayon du cercle » ;
5. l'angle orienté de deux vecteurs et ses mesures en radians ;
6. l'angle géométrique (dont le sommet est à l'origine d'un repère orthonormé du plan et les côtés sont des rayons du cercle) et l'angle orienté de deux vecteurs.

Ces six éléments clés devraient alors être constitutifs des recherches à venir sur le sujet pour mieux préciser leurs rôles et leurs liens. Ces recherches devraient pouvoir mener à l'élaboration de nouvelles situations didactiques, à expérimenter, pour lesquelles la situation didactique du chapitre 5 est une base.

5. Au-delà du secondaire, et après ?

Notre travail a confirmé la difficulté de l'enseignement et de l'apprentissage des fonctions trigonométriques. Or ces fonctions sont d'une grande importance en mathématiques ainsi que dans d'autres disciplines. En effet, en mathématiques on peut citer leurs interventions dans le travail sur les nombres complexes, dans la résolution de certaines équations différentielles et équations aux dérivées partielles, dans l'analyse harmonique, les séries de Fourier,… Mais aussi, au-delà des mathématiques, ce sont des fonctions fondamentales pour les sciences physiques : mouvements oscillants, électricité, optique, ondes électromagnétiques, astronomie, etc. En résumé, ce sont donc deux fonctions de base, parmi d'autres, sur lesquelles repose une grande partie des sciences. Il est donc crucial que les élèves du secondaire s'approprient convenablement ces deux objets. Nous espérons par notre thèse avoir apporté des éléments permettant d'affronter ce défi.

Bibliographie

AKKOC, H. (2008). Pre-service mathematics teachers' concept images of radian. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(7), 857-878.

ARTIGUE, M. (1989). Ingénierie didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BERTE, A., CHAGNEAU, J., DESNAVRES, C., LAFOURCADE, J., & SAGEAUX, C. (2004). Aide apportée aux enseignants par la recherche en didactique. Un exemple : enseigner le cosinus en 4ème. *Petit x* n° 65, 9-35.

BLOCH, I. (2009). Activité … La mesure des angles en radians au lycée. *Petit x* n° 80, 47-53.

BLOCH, I. (2001). Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps (Isère) – 21-30 Août 2001, 125-139. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOUDAREL, J., & COLMEZ, F. (1988). Angles de couples et rotations. *IREM*, 73.

BOSCH, M., & GASCON, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), Balises pour la didactique des mathématiques : cours de la 12e École d'Été de Didactique des Mathématiques. Corps (Isère). Du 20 au 29 août 2003, 107-122. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques (1998). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

BROUSSEAU, G. (1986). La relation didactique : le milieu. *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques*, IREM de Paris 7.

CARMAGNOLE, M. (1982). Grandeur, Mesure Tome VI. Brochure *A. P. M. E. P.*, 46, 11-101.

CARMAGNOLE, M. (1980). Secteur – Angle. Brochure *A. P. M. E. P.*, 37, 1-18.

CASTELA, C. (2018).Outiller les enseignants pour la sélection de tâches mathématiques dans les manuels. Espace Mathématique Francophone, Gennevillers les 22-26 oct. 2018, 19-27. Sciencesconf.org:emf2018:216222 https://emf2018.sciencesconf.org/data/pages/GT_6_Pre_actes_EMF_2019.pdf

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissages ignorés par les institutions d'enseignement. Recherche en Didactique des Mathématiques, 28(2), 135-182. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CETIN, O. F. (2015). Students' perceptions and development of conceptual understanding regarding trigonometry and trigonometric function. *Educational Research and Reviews*, 10(3), 338-350.

CHEVALLARD, Y. (2011). Conditions et contraintes de la recherche en didactique des mathématiques : un témoignage. *Textes et publications*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=199

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures et Fonctions. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps – 21-30 Août 2001*, 3-22. Grenoble : La Pensée Sauvage 2002.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et Régulation. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11ème École d'Été de Didactique des Mathématiques* – Corps – 21-30 Août 2001, 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2).

CHEVALLARD, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. *Textes et publications*. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=114

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-111.

CHEVALLARD, Y., & BOSCH, M. (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, 5-32.

DE KEE, S., MURA, R., & DIONNE, J. (1996). La compréhension des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics* 16, 2 (June 1996), 19-27.

DEMIR, Ö & HECK, A. (2013). A new learning trajectory for trigonometric functions. In E. Faggiano & A. Montone (Eds.) *Proceedings of the 11th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*, 119-124. Bari: Italy.

DEMIR, Ö. (2012). Students' concept development and understanding of sine and cosine functions. (Master's thesis). Retrieved from http://dare.uva.nl/document/423723

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-32.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

EL IDRISSI, A. (1998). L'histoire des mathématiques dans la formation des enseignants : étude exploratoire portant sur l'histoire de la trigonométrie. Thèse présentée comme exigence partielle du doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.

FERRATON, G., & CHAACHOUA, H. (2013). Rapport institutionnel au calcul littéral au collège. État des lieux et perspectives. *Petit x*, 91, 49-67.

GUEUDET, G., & QUERE, P.-V. (2018). Making connections in the mathematics courses for engineers: the example of online resources for trigonometry. Second conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, April 2018, Kristiansand, Norway. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01849973

HENROTAY, P., KRYSINSKA, M., ROSSEEL, H., & SCHNEIDER, M. (2015). Des fonctions taillées sur mesure. Construire des fonctions sinusoïdales, exponentielles et logarithmiques pour modéliser des problèmes variés. Presses Universitaires de Liège.

IREM D'AQUITAINE, GROUPE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES (2016). Quelques idées pour enseigner la trigonométrie au lycée.

KAMBER, D., & TAKACI, D. (2018). On problematic aspects in learning trigonometry. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(2), 161-175.

KHALLOUFI MOUHA, F. (2009). Étude du processus de construction du signifie de fonction trigonométrique chez des élèves de 2ème année section scientifique. Thèse 2009. Université de Tunis.

KONDRATIEVA, M., & WINSLØW, C. (2018). Klein's Plan B in the Early Teaching of Analysis: Two Theoretical Cases of Exploring Mathematical Links. Int. J. Res. Undergrad. Math. Ed. (2018) 4:119-138. Springer.

LEFORT, J. (1998). Petite histoire de la trigonométrie. *L'OUVERT*, 91, 10-16.

LEFORT, J. (2007). Âryabhata et la table des sinus. Bulletin *APMEP*, 473, 861-866.

LOENG, R., & VIVIER, L. Les trois ETM de la trigonométrie du secondaire français. *Sixième Symposium sur le Travail Mathématique*. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Valparaíso, Chili, Du 13 au 18 décembre 2018. À apparaître.

LOENG, R. (2018). Learning sine and cosine in French secondary schools. *CERME* 10, Feb 2017, Dublin, Ireland. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01925507

MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances : analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps (Isère) – 21-30 Août 2001*, 141-156. Grenoble : La Pensée Sauvage.

MARTINEZ-PLANELL, R., & DELGADO, A.C. (2016). The unit circle approach to the construction of the sine and cosine functions and their inverses: An application of APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 43, 111-133.

MAUREL, M., & SACKUR, C. (2002). La presqu'île. Une introduction aux fonctions de deux variables en DEUG. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques - Corps (Isère) – 21-30 Août 2001*, 167-175. Grenoble : La Pensée Sauvage.

MOOR, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), 225-245.

MOOR, K. C. (2009). Trigonometry, technology, and didactic objets. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & Lemons-Smith (Eds.), Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1480-1488. Atlanta, GA: Georgia State University. http://www.pmeana.org/2009

NGUYEN THI, N. (2013). La périodicité dans les enseignements scientifiques en France et au Vietnam : une ingénierie didactique d'introduction aux fonctions périodiques par la modélisation. Thèse de doctorat préparée au sein du Laboratoire d'Informatique de Grenoble dans l'École Doctorale Ingénierie pour la Santé, la Cognition et l'Environnement. Thèse en cotutelle : Université de Grenoble (France) et Université de Pédagogie de Ho Chi Minh Ville (Vietnam). https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00630048

NGUYEN THI, N. (2013). Fonctions trigonométriques et phénomènes périodiques : un accès à la mondialisation dans l'enseignement secondaire ? *Petit x* n° 91, 27-48.

P.YOUSCHKEVITCH, A. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du 19e siècle. In Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure *APMEP*, 41, 7-68.

PERRIN, P. (1999). Évolution du concept de fonction. Texte d'une conférence donnée à la faculté des sciences de Reims dans le cadre d'un enseignement d'histoire des sciences destiné à des étudiants de DEUG. Licence Greative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 4.0 International.

PROULX, J. (2003). L'histoire de la trigonométrie comme outil de réflexion didactique. *Bulletin AMQ*, XLIII (3), pp. 13-27.

ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants*, 46-57. Toulouse : Octares.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

ROBERT, A., & ROGALSKI, M. (2002). Comment peuvent varier les activités mathématiques des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion en classe. *Petit x*, 60, 6-25.

ROUCHE, N. (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères-IREM*, 15, 25-35.

ROUSSELET, M. (2007). L'invention de la trigonométrie. Histoire des mathématiques de l'Antiquité à l'an Mil. *Tangente Hors-série* n°30, pp. 118-123. POLE, 2007.

TANGUAY, D. (2010). Degrés, radians, arcs et sinusoïdes. *Petit x* n° 82, 59-71.

TUNA, A. (2013). A conceptual analysis of the knowledge of prospective mathematics teachers about degree and radian. *World Journal of Education*, 3(4), 1-9.

VAN BRUMMELEN, G. (2009). The mathematics of the heavens and the earth. The early history of trigonometry. Princeton University Press, 2009.

WEBER, K. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher*, 102(2), 144-150.

WEBER, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal*, 17(3), 91-112.

WINSLØW, C. (2016). Angles, trigonometric functions, and university level Analysis. *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Mar 2016, Montpellier, France. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01337947

Ouvrages mathématiques :

ARNAUDIES, J. M., & FRAYSSE, H. (1988). Analyse – Cours de mathématiques-2. BORDAS, 1988.

ARNAUDIES, J. M., & FRAYSSE, H. (1987). Algèbre – Cours de mathématiques-1. BORDAS, 1987.

AUDIN, M. (2006). Géométrie L3M1. EDP Sciences, 2006.

BAILLE, A., BOURSIN, J. L., & PAIR, C. (1971). Mathématiques Tome III. Classes Terminales C, E. Collection Cossart et Théron, BORDAS 1971.

CONDAMINE, M., & VISSIO, P. (1970). Algèbre linéaire et géométrie. Classes de Premières C-D-E. Collection P. Vissio, DELAGRAVE 1970.

CONDAMINE, M., & VISSIO, P. (1970). Analyse et algèbre. Classes de Premières A-B-C-D-E. Collection P. Vissio, DELAGRAVE 1970.

COURTIAL, CH., QUELFI, F., MORUCHON, P., & RICHE, E. (1972). Mathématiques Classes de Premières A, B. Collection E. Riche, HATIER 1972.

FRENKEL, J. (1973). Géométrie pour l'élève-professeur. *Collection Formation des enseignants*. HERMANN, 1973.

GRAMAIN, A. (1997). Géométrie élémentaire. HERMANN, 1997.

MONGE, M. (1962). Algèbre trigonométrie. Classes de Première A', C, M, M'. LIBRAIRIE BELIN 1962.

MORANDO, B. (1973). Quelques notes utiles pour le nouvel enseignement de la géométrie. *Formation Continue des Professeurs de Mathématiques*. Université d'Angers, année universitaire 1973-1974.

PERRIN, D. (2011). Mathématique d'école : Nombres, mesures et géométrie. CASSINI, 2011.

POCHARD, H. (1971). Arithmétique et géométrie. Terminales C. et E. GAUTHIER-VILLARS 1971.

RAMIS, E., DESCHAMPS, C., & ODOUX, J. (2001). Cours de mathématiques. Tome 4 : Séries et équations différentielles. DUNOD, 2001 (3e édition).

RAMIS, E., DESCHAMPS, C., & ODOUX, J. (1981). Cours de mathématiques spéciales. Tome 5 : Applications de l'analyse à la géométrie. MASSON, 1981.

RIUET, A-J. (2010). Calcul scientifique, Suites et séries. *Les filières technologiques des enseignements supérieurs*. Ellipses, 2010.

ROGALSKI, M., ROBERT, A., & POUYANNE, N. (2001). Carrefours entre Analyse, Algèbre, Géométrie. Collection CAPES/Agrégation. Ellipses 2001.

RUDIN, W. (1998). Prologue – La fonction exponentielle. Analyse réelle et complexe. Cours et exercices. Dunod 1998.

THUIZAT, A., GIRAULT, G., & ASPEELE, E. (1979). Tome III Géométrie. Classes Terminales C et E. Nouvelle collection Durrande, TECHNIQUE ET VULGARISATION 1979.

THERON, P., COUTURIER, M., & BOURSIN, J.L. (1970). Mathématiques Tome II. Classes de Premières C, D, E. Collection Cossart et Théron, BORDAS 1970.

Manuels de l'enseignement secondaire – Programmes en vigueur de 2008 à 2011 :

ABIHSSIRA-LAVANDIER, A., ALVEZ, Y., BEAUVOIT, E, GUILLEMET, D., ROYER, F., & TADEUSZ, L. (2012). Mathématiques Terminale S, Programme 2011. Collection Math'x, DIDIER 2012.

AIMANI, S., BONNEVAL, L-M., DEVYNCK, J-B., & YVONNET, P. (2012). Mathématiques Terminale S, Programme 2011. Collection Transmath, NATHAN 2012.

BRISOUX, F., BRUCKER, C., LEON, F., MEYER, N., REGHEM, D., ROLAND, C., SCHAVSINSKI, M., & SIGWARD, E. (2012). Mathématiques Terminale S, Programme 2011. Collection ODYSSÉE, HATIER 2012.

CHRETIEN, B., DESROUSSEAUX, P-A., DUQUESNOY, J-M., EYNARD, D., LAMBERT, F., LAMPLE, H., LECOLE, J-M., OBERT, M-C., WANTIEZ, O., & ZWERTVAEGHER, K. (2012). Mathématiques Terminale S, Programme 2011. Collection Hyperbole, NATHAN 2012.

ALVEZ, Y., BEAUVOIT, E., GUILLEMET, D., LAVIGNE, D., ROXVAL, E., SALIBA, G., & TADEUSZ, L. (2011). Mathématiques 1re S, Programme 2010. Collection Math'x, DIDIER 2011.

BARRA, R., BARROS, J-M., BENIZEAU, P., & MORIN, J. (2011). Mathématiques 1re S, Programme 2010. Collection transmath, NATHAN 2011.

BRISOUX, F., BRUCKER, C., SANCHEZ, I., & SCHWARTZ, P. (2011). Mathématiques 1re S, Programme 2010. Collection ODYSSÉE, HATIER 2011.

BARRA, R., BARROS, J-M., BENIZEAU, P., LIORIT, K., MORIN, J., NIVAUD, D., & RICOMET, V. (2010). Mathématiques 2de, Programme 2009. Collection Transmath, NATHAN 2010.

BELTRAMONE, J-P., GITON, F., LABROSSE, J., MERDY, C., SILHOL, J., & TRUCHAN, A. (2010). Mathématiques 2de, Programme 2009. Collection Déclic, HACHETTE 2014.

BRISOUX, F., BRUCKER, C., MONKA, Y., & SIGWARD, E. (2010). Mathématiques 2de, Programme 2009. Collection ODYSSÉE , HATIER 2010.

GASTIN, H., GUIGNARD, M., & GUILLEMET, D. (2010). Mathématiques 2de, Programme 2009. Collection Math'x, DIDIER 2010.

BOULLIS, M., DUTAUT, S., MONKA, Y., PERCOT, S., & ROY, D. (2011). Mathématiques 3e, Programme 2008. Collection Myriade, BORDAS 2012.

CHAPIRON, G., MANTE, M., MULET-MARQUIS, R., & PEROTIN, C. (2012). Mathématiques 3e, Programme 2008. Collection TRIANGE, HATIER 2012.

MALAVAL, J., COURBON, D., CARLOD, V., FUNDAKOWSKI, M., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F., & SERES, P. (2008). Mathématiques 3e, Programme 2008. Collection TRANSMATH, NATHAN 2008.

BOULLIS, M., DUTAUT, S., MONKA, Y., PERCOT, S., & ROY, D. (2011). Mathématiques 4e, Programme 2008. Collection Myriade, BORDAS 2011.

CHAPIRON, G., MANTE, M., MULET-MARQUIS, R., & PEROTIN, C. (2011). Mathématiques 4e, Programme 2008. Collection TRIANGE, HATIER 2011.

MALAVAL, J., CHAPUT, A., CARLOD, V., FUNDAKOWSKI, M., MAZE, M., PLANTIVEAU, A., PUIGREDO, F., QUAIRE, S., & WALLON, P. (2011). Mathématiques 4e, Programme 2008. Collection TRANSMATH, NATHAN 2011.

Manuels officiels de mathématiques cambodgiens au lycée – Programmes en vigueur de 2008 à 2010 :

Y, S., TY, P., OUCK, L., OUK, S., CHAN, R., BUN, R., NOU, R., & BOU, S. (2013). Mathématiques 12e, niveau non Scientifique, Programme 2010.

Y, S., TY, P., OUCK, L., OUK, S., CHAN, R., BUN, R., NOU, R., & BOU, S. (2013). Mathématiques 12e, niveau Scientifique, Programme 2010.

Y, S., TY, P., OUCK, L., OUK, S., CHAN, R., BUN, R., & NOU, R. (2009). Mathématiques 11e, niveau non Scientifique, Programme 2009.

Y, S., TY, P., OUCK, L., OUK, S., CHAN, R., BUN, R., & NOU, R. (2009). Mathématiques 11e, niveau Scientifique, Programme 2009.

Y, S., TY, P., SOEM, V., OUK, S., CHAN, R., BANN, K., & NOU, R. (2008). Mathématiques 12e, Tome 1, Programme 2008.

Y, S., TY, P., SOEM, V., OUK, S., CHAN, R., BANN, K., & NOU, R. (2008). Mathématiques 12e, Tome 2, Programme 2008.

Y, S., OUK, S., BANN, K., SOEM, V., ORN, N., BOU, S., & TIR, K. (2006). Programmes d'étude des mathématiques pour le secondaire au lycée.

Annexes

Annexe n° 1. **Étude historique, épistémologique**

1.1. L'histoire de la trigonométrie – concept de sinus

Le mot « trigonométrie » vient du grec et signifie « mesure des triangles », et il est utilisé pour la première fois en 1595 par le théologien et mathématicien allemand Pitiscus (1561 ; 1631).

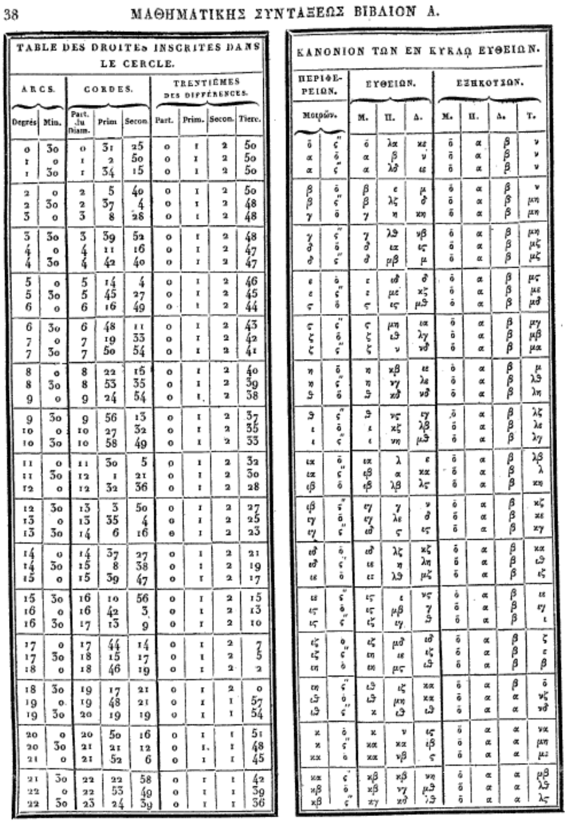
Historiquement, la trigonométrie est une discipline créée pour les besoins de l'astronomie. Il s'agit d'emblée de la « trigonométrie dans un cercle » associée à l'astronomie. L'astronome et mathématicien grec Hipparque de Nicée (-190 ; -120) construit la première table des cordes qui est utile pour calculer l'excentricité des orbites lunaire et solaire, ou dans les calculs des grandeurs du Soleil et de la Lune et de leurs distances à la Terre. La table des cordes fait correspondre à chaque valeur de l'angle au centre d'un cercle (avec le partage de la circonférence en 360°), la « *longueur de la corde interceptée dans le cercle* », pour un rayon fixe donné (avec le diamètre partagé en 120 parties). Ce calcul correspond au « *double du sinus de l'angle moitié* »[1], et donne, d'une certaine façon, ce que nous appelons aujourd'hui une table des sinus. Toutefois, la table des cordes d'Hipparque n'étant pas parvenue jusqu'à nous, elle ne nous est connue que par l'astronome et mathématicien grec Ptolémée (90 ; 168), qui l'a publiée, vers l'an 150, avec son mode de construction dans son *Almageste*. À noter que la trigonométrie de Ptolémée se fonde sur celle d'Hipparque et qu'il a connaissance de l'œuvre de Ménélaüs (fin du premier siècle) qui développe la trigonométrie sphérique. Ptolémée affine la table des cordes en la donnant pour les angles de $0{,}5^{\circ}$ à 180°, de demi-degré en demi-degré ; et il étend les résultats d'Hipparque et de Ménélaüs en développant les premières notions de trigonométrie plane et sphérique.
Ptolémée construit ses tables de cordes en commençant par le calcul des cordes remarquables correspondant aux côtés des polygones réguliers de 3, 4, 5, 6, 8 et 10 côtés inscrits dans un cercle de rayon R, à l'aide des connaissances géométriques qui figurent dans les livres d'Euclide ; et en utilisant les quatre règles fondamentales et un théorème portant son nom que nous résumons ci-dessous dans l'ordre (Rousselet, Tangente Hors-série n° 30, pp 118-123).
On considère R comme le rayon d'un cercle, et on note $\mathrm{corde}(\alpha)$ la corde interceptée par un angle au centre du cercle de α degrés.

- Corde sous-tendue par l'angle supplémentaire :
  $$\left[\mathrm{corde}\left(180^{\circ}-\alpha\right)\right]^2 = 4R^2 - [\mathrm{corde}(\alpha)]^2$$
- Corde sous-tendue par l'angle moitié :
  $$\left[\mathrm{corde}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 = R\left[2R - \mathrm{corde}\left(180^{\circ}-\alpha\right)\right] = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - [\mathrm{corde}(\alpha)]^2}$$
- Théorème de Ptolémée : dans un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, le produit des longueurs des diagonales est égal à la somme des produits des longueurs des côtés opposés.
- Corde sous-tendue par la différence de deux angles :
  $$\mathrm{corde}(\alpha-\beta) = \frac{1}{2R}\left[\mathrm{corde}(\alpha)\times\mathrm{corde}\left(180^{\circ}-\beta\right) - \mathrm{corde}(\beta)\times\mathrm{corde}\left(180^{\circ}-\alpha\right)\right]$$
- Corde sous-tendue par la somme de deux angles :

[1] Le concept de « sinus » signifiant « demi-corde » est donné, en 499, pour la première fois par l'astronome indien Âryabhata, et alors, le sinus de l'angle moitié dans ce sens est en fait le produit du rayon R du cercle par le sinus de l'angle moitié de nos jours.

$$[\text{corde}(\alpha+\beta)]^2 = 4R^2 - \left[\frac{\text{corde}(180^\circ-\alpha)\times\text{corde}(180^\circ-\beta)-\text{corde}(\alpha)\times\text{corde}(\beta)}{2R}\right]^2$$

Il s’agit ci-dessous d’un extrait d’une des tables de cordes de Ptolémée de l’Almageste, page 125 ; et nous donnons le calcul de $\sin(6^\circ)$ de nos jours à l’aide de la lecture de cette table.



38 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΣΥΝΤΑΞΕΩΣ ΒΙΒΛΙΟΝ Α.

TABLE DES DROITES INSCRITES DANS LE CERCLE.

ARCS.		CORDES.			TRENTIÈMES DES DIFFÉRENCES.			
Degrés	Min.	Part. du Diam.	Prim	Secon.	Part.	Prim.	Secon.	Tierc.
0	30	0	31	25	0	1	2	50
1	0	1	2	50	0	1	2	50
1	30	1	34	15	0	1	2	50
2	0	2	5	40	0	1	2	50
2	30	2	37	4	0	1	2	48
3	0	3	8	28	0	1	2	48
3	30	3	39	52	0	1	2	48
4	0	4	11	16	0	1	2	47
4	30	4	42	40	0	1	2	47
5	0	5	14	4	0	1	2	46
5	30	5	45	27	0	1	2	45
6	0	6	16	49	0	1	2	44
6	30	6	48	11	0	1	2	43
7	0	7	19	33	0	1	2	42
7	30	7	50	54	0	1	2	41
8	0	8	22	15	0	1	2	40
8	30	8	53	35	0	1	2	39
9	0	9	24	54	0	1	2	38
9	30	9	56	13	0	1	2	37
10	0	10	27	32	0	1	2	35
10	30	10	58	49	0	1	2	33
11	0	11	30	5	0	1	2	32
11	30	12	1	21	0	1	2	30
12	0	12	32	36	0	1	2	28
12	30	13	3	50	0	1	2	27
13	0	13	35	4	0	1	2	25
13	30	14	6	16	0	1	2	23
14	0	14	37	27	0	1	2	21
14	30	15	8	38	0	1	2	19
15	0	15	39	47	0	1	2	17
15	30	16	10	56	0	1	2	15
16	0	16	42	3	0	1	2	13
16	30	17	13	9	0	1	2	10
17	0	17	44	14	0	1	2	7
17	30	18	15	17	0	1	2	5
18	0	18	46	19	0	1	2	2
18	30	19	17	21	0	1	2	0
19	0	19	48	21	0	1	1	57
19	30	20	19	19	0	1	1	54
20	0	20	50	16	0	1	1	51
20	30	21	21	12	0	1	1	48
21	0	21	52	6	0	1	1	45
21	30	22	22	58	0	1	1	42
22	0	22	53	49	0	1	1	39
22	30	23	24	39	0	1	1	36

ΚΑΝΟΝΙΟΝ ΤΩΝ ΕΝ ΚΥΚΛΩ ΕΥΘΕΙΩΝ.

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ.		ΕΥΘΕΙΩΝ.			ΕΞΗΚΟΣΤΩΝ.			
Μοιρῶν.		Μ.	Π.	Δ.	Μ.	Π.	Δ.	Τ.
ō	ς″	ō	λα	κε	ō	α	β	ν
α	ō	α	β	ν	ō	α	β	ν
α	ς″	α	λδ	ιε	ō	α	β	ν
β	ō	β	ε	μ	ō	α	β	ν
β	ς″	β	λζ	δ	ō	α	β	μη
γ	ō	γ	η	κη	ō	α	β	μη
γ	ς″	γ	λθ	νβ	ō	α	β	μη
δ	ō	δ	ια	ις	ō	α	β	μζ
δ	ς″	δ	μβ	μ	ō	α	β	μζ
ε	ō	ε	ιδ	δ	ō	α	β	μς
ε	ς″	ε	με	κζ	ō	α	β	με
ς	ō	ς	ις	μθ	ō	α	β	μδ
ς	ς″	ς	μη	ια	ō	α	β	μγ
ζ	ō	ζ	ιθ	λγ	ō	α	β	μβ
ζ	ς″	ζ	ν	νδ	ō	α	β	μα
η	ō	η	κβ	ιε	ō	α	β	μ
η	ς″	η	νγ	λε	ō	α	β	λθ
θ	ō	θ	κδ	νδ	ō	α	β	λη
θ	ς″	θ	νς	ιγ	ō	α	β	λζ
ι	ō	ι	κζ	λβ	ō	α	β	λε
ι	ς″	ι	νη	μθ	ō	α	β	λγ
ια	ō	ια	λ	ε	ō	α	β	λβ
ια	ς″	ιβ	α	κα	ō	α	β	λ
ιβ	ō	ιβ	λβ	λς	ō	α	β	κη
ιβ	ς″	ιγ	γ	ν	ō	α	β	κζ
ιγ	ō	ιγ	λε	δ	ō	α	β	κε
ιγ	ς″	ιδ	ς	ις	ō	α	β	κγ
ιδ	ō	ιδ	λζ	κζ	ō	α	β	κα
ιδ	ς″	ιε	η	λη	ō	α	β	ιθ
ιε	ō	ιε	λθ	μζ	ō	α	β	ιζ
ιε	ς″	ις	ι	νς	ō	α	β	ιε
ις	ō	ις	μβ	γ	ō	α	β	ιγ
ις	ς″	ιζ	ιγ	θ	ō	α	β	ι
ιζ	ō	ιζ	μδ	ιδ	ō	α	β	ζ
ιζ	ς″	ιη	ιε	ιζ	ō	α	β	ε
ιη	ō	ιη	μς	ιθ	ō	α	β	β
ιη	ς″	ιθ	ιζ	κα	ō	α	β	ō
ιθ	ō	ιθ	μη	κα	ō	α	α	νζ
ιθ	ς″	κ	ιθ	ιθ	ō	α	α	νδ
κ	ō	κ	ν	ις	ō	α	α	να
κ	ς″	κα	κα	ιβ	ō	α	α	μη
κα	ō	κα	νβ	ς	ō	α	α	με
κα	ς″	κβ	κβ	νη	ō	α	α	μβ
κβ	ō	κβ	νγ	μθ	ō	α	α	λθ
κβ	ς″	κγ	κδ	λθ	ō	α	α	λς

À la lecture de cette table, nous lisons que la corde de l’arc 12° a pour la longueur $12;32{,}36$ dans la base soixante.

Or,

$$12;32{,}36 = 12 + \frac{32}{60} + \frac{36}{60^2} \approx 12{,}5433333333.$$

La longueur de la corde de l’arc 12° est : $\text{corde}(12^\circ) \approx 12{,}5433333333$, et on obtient : $\sin(6^\circ) = \frac{1}{60} \times \frac{1}{2}\text{corde}(12^\circ) \approx 0{,}1045277778$

(rappelons-nous que le rayon du cercle est partagé en 60 parties.)

L’astronome et mathématicien indien Âryabhata (476 ; 550), en 499, donne pour la première fois le concept de « sinus » qui était « *jyâ-ardha* » signifiant « demi-corde », et fournit à l’aide d’une formule de récurrence une table des sinus pour un rayon de 3438 unités correspondant à une circonférence de 360×60 unités, avec un procédé particulier dans lequel la circonférence et le rayon prennent la même unité de mesure.

> Les grandeurs des rayons qui furent utilisés par les Hindous sont de plusieurs ordres, […]. Parmi ces différents choix, le rayon de 3438 unités admet une signification très particulière et témoigne d’une grande originalité.
>
> En effet, 3438 est une approximation de 3437,7 qui n’est autre que la division de 21600 par 2π, π étant approximativement égal à 3,1416. L’énigme de ce choix disparaît si l’on constate que 21600 est le nombre de minutes contenues dans un cercle (21600 = 360.60). Ceci signifie qu’une unité de mesure quelconque étant choisie, un cercle dont le rayon mesure 3438 unités admet un cercle de 21600 unités. Or, ce choix ne peut être convenable que si l’on considère que la circonférence et le rayon du cercle sont des grandeurs homogènes qui peuvent être mesurées à l’aide de la même unité. Cette démarche est complètement différente de celle de Ptolémée chez qui la circonférence est mesurée en degrés ou en minutes, unité de mesure des arcs de cercle alors que le rayon est mesuré à l’aide d’une unité de mesure de longueurs. (A. El Idrissi, 1998, page 87)

Il s’agit d’une table de différences finies des sinus des angles (en minutes) de $3^\circ45'$ en $3^\circ45'$, une liste des 24 sinus des angles de $3^\circ45$ à 90°, en commençant par supposer d’emblée que le sinus de $3^\circ45'$ est égal à son arc ($\sin(225') = 225'$), et les autres valeurs des sinus de cette table sont calculées grâce à une formule de récurrence. Notons que Âryabhata partage le quadrant en vingt-quatre parties, valant chacune $3^\circ 45' = 225'$, et que l'angle $3^\circ 45'$ est le huitième de l'angle 30°.

Il s'agit de deux extraits de la table des sinus de Âryabhata :

Leçons de calcul d'Âryabhata/par M. Léon Rodet. 1879. – page 24

ARCS.	SINUS.	DIFFÉRENCES.	ARCS.	SINUS.	DIFFÉRENCES.	ARCS.	SINUS.	DIFFÉRENCES.
0	0		8	1719′		16	2978′	
		225′			191′			106′
1	225′		9	1910′		17	3084′	
		224′			183′			93′
2	449′		10	2093′		18	3177′	
		222′			174′			79′
3	671′		11	2267′		19	3256′	
		219′			164′			65′
4	890′		12	2431′		20	3321′	
		215′			154′			51′
5	1105′		13	2585′		21	3372′	
		210′			143′			37′
6	1315′		14	2728′		22	3409′	
		205′			131′			22′
7	1520′		15	2859′		23	3431′	
		199′			119′			7′
8	1719′		16	2978′		24	3438′	

Petite histoire de la trigonométrie/par M. Jean Lefort – l'Ouvert n°91-Juin 1998 – page 13

Table d'Âryabhata	Somme des termes successifs	Angles x correspondants	3438 sin x
		0	0
225	225	3° 45 '	224, 86
224	449	7° 30 '	448, 75
222	671	11° 15 '	670, 72
219	890	15°	889, 82
215	1105	18° 45 '	1105, 11
210	1315	22° 30 '	1315, 67
205	1520	26° 15 '	1520, 59
199	1719	30°	1719, 00
191	1910	33° 45 '	1910, 05
183	2093	37° 30 '	2092, 92
174	2267	41° 15 '	2266, 83
164	2431	45°	2431, 03
154	2585	48° 45 '	2584, 83
143	2728	52° 30 '	2727, 55
131	2859	56° 15 '	2858, 59
119	2978	60°	2977, 40
106	3084	63° 45 '	3083, 45
93	3177	67° 30 '	3176, 30
79	3256	71° 15 '	3255, 55
65	3321	75°	3320, 85
51	3372	78° 45 '	3371, 94
37	3409	82° 30 '	3408, 59
22	3431	86° 15 '	3430, 64
7	3438	90°	3438, 00

Nous voyons que Âryabhata fournit en fait une table de Rsin pour un rayon R de 3438 unités correspondant à la circonférence de $360 \times 60 = 21600$ unités.
Nous lisons par exemple $\sin(15^\circ)$ de nos jours, à l'aide de la table de gauche, ce qui nous indique que le sinus de l'arc 4 ou $900'$ est $S_4 = 890'$, autrement dit, $3438 \sin(15^\circ) = 890$, ce qui nous donne $\sin(15^\circ) = \frac{1}{3438} \times 890 \approx 0{,}2588714369$. En ce qui concerne la table de droite en lien avec celle de gauche, la première colonne est la colonne de « différences », la deuxième colonne est celle des « sinus », la troisième colonne est celle des « arcs », et la quatrième colonne semble être la colonne des valeurs $3438 \sin x$ données à l'aide de la calculatrice.

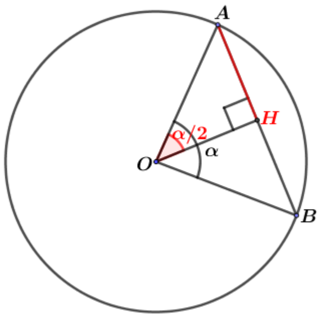
Âryabhata introduit aussi les concepts de cosinus, de l'inverse du sinus et de sinus-verse (ou contre-sinus).

Les astronomes et mathématiciens musulmans reprennent les acquis des sciences grecs et indiens et les améliorent pour les besoins de l'astronomie dans leurs pratiques, durant l'empire arabo-musulman du IXe au XVe siècle. Les mathématiciens arabo-musulmans développent la trigonométrie, définissent clairement les sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et cosécante, construisent des tables plus complètes, et établissent les formules trigonométriques.
L'astronome, mathématicien et physicien perse Al-Biruni (973 ; 1048) construit des tables des sinus et des tangentes avec un cercle de rayon unitaire.

Et, la trigonométrie se développe progressivement, sans cesse, dès le 14^{e} siècle en Europe. Les tables trigonométriques sont élaborées précisément par des mathématiciens allemands avec la masse de calculs à effectuer, sans instrument performant ; puis les logarithmes facilitent considérablement les calculs pour l'amélioration et la construction des tables.

Remarques particulières chez les Grecs et chez les Indiens :
1. Chez les Grecs, Hipparque et Ptolémée s'intéressent à la relation entre « arcs » et « cordes » alors que chez les Indiens, Âryabhata s'intéresse à celle entre « arcs » et « demi-

cordes ». C'est Âryabhata qui donne le concept de « sinus » comme étant « demi-corde », (voir la figure ci-dessous) :



L'angle au centre α (en degrés) intercepte la corde $[AB]$.
H est le milieu de $[AB]$.
Le sinus au sens de Âryabhata est la demi-corde $[AH]$, autrement dit : « le sinus de l'angle moitié est la moitié de la longueur de la corde interceptée dans le cercle ». Cela nous dit que le sinus au sens de Âryabhata est le produit du rayon R du cercle par le sinus de nos jours, ou tout simplement Rsin ; et plus précisément avec la notation algébrique : $R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{2}AB$. Ainsi, concernant la lecture des tables des cordes de Ptolémée et celle de la table des sinus de Âryabhata, pour trouver le sinus de nos jours, il nous faut penser à diviser la demi-corde correspondante par R.

2. Chez les Indiens, concernant la construction de la table des sinus, Âryabhata pense d'emblée à faire un choix en supposant que la circonférence et le rayon du cercle sont des grandeurs homogènes qui peuvent être mesurées à l'aide de la même unité qui est ici « *l'unité d'angle* » en minutes : le rayon du cercle mesure 3438 unités correspondant à la circonférence du cercle de $360\times 60=21600$ unités. Cette démarche nous indique limpidement que l'idée de la notion de « radian » est sur le point d'apparaître. Avec le concept de radian, on crée une mesure d'angle au centre du cercle à partir de *l'unité de longueur* supposée mesurer aussi la longueur de la circonférence du cercle ; l'unité de longueur étant le rayon du cercle.

3. Chez les Indiens, dans le processus de calcul des sinus de la table des sinus, Âryabhata suppose d'emblée que le sinus de $3^\circ 45'$ est égal à son arc ($\sin(225')=225'$). Cette idée de Âryabhata nous dit qu'il semble avoir déjà eu de façon pragmatique un aspect analytique de l'approximation $\sin(x)=x$ pour les petites mesures x en radians (ou pour les petites valeurs du réel x), ou un aspect analytique de l'équivalence entre la fonction sinus et la fonction identité au voisinage de zéro.

1.2. Concept de « radian »

> Le degré fut utilisé pendant plus de 2000 ans. Ce n'est qu'en 1873 qu'apparaît pour la première fois le mot « radian », imprimé dans des textes d'examens proposés au Queen's College de Belfast par James Thomson, même si cette émergence était préparée par plus d'un demi-siècle d'utilisation implicite. (Dictionnaire des mathématiques élémentaires de Stella BARUK)

Le radian apparaît légalement en France par décret du 3 mai 1961 sur les unités de mesure.
Après « Décret n° 75-1200 du 4 décembre 1975, art. 1er. », le radian désigne l'unité d'angle plan. On le définit ainsi : « Le radian est l'angle plan qui, ayant son sommet au centre d'un cercle, intercepte sur la circonférence de ce cercle un arc d'une longueur égale à celle du rayon du cercle. ». (Unités de mesure : [décrets du 3 mai 1961, du 26 février 1982 et du 24 avril 1975]. 1982.)
Cette définition indique que le rayon du cercle est l'unité d'arc du cercle ou bien l'unité de mesure de la circonférence.

En lien avec l'évolution du concept de la trigonométrie – une étape préliminaire à la notion de radian comme unité de mesure d'arcs semble apparaître chez les Indiens au 5e siècle avec l'utilisation du rayon 3438 unités correspondant à une circonférence de $360\times 60=21600$ unités, pour construire la table des sinus.

> En fait, nous décelons dans l'utilisation du rayon de 3438 unités un « ancêtre », un germe ou une étape préliminaire à la notion de radian comme unité de mesure d'arcs. Certes, l'essence du radian réside fondamentalement dans le choix du rayon du cercle comme unité de mesure de la circonférence de même cercle. Par contre, chez les Hindous, c'est une autre unité qui est utilisée. Néanmoins cette unité a l'avantage de tenir compte de la proportionnalité entre le rayon et la circonférence. (A. El Idrissi, 1998, page 88)

Nous remarquons que 3438 semble être l'arrondi de $3437{,}75$ en réalisant l'opération suivante :

$$1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ degrés} = \frac{180 \times 60}{\pi} \text{ minutes} \approx 3437,\ 75 \text{ minutes}$$

En lien avec l'évolution du concept du nombre transcendant $\boldsymbol{\pi}$ – depuis l'Antiquité, les mathématiciens ont très tôt été convaincus qu'il existait un **rapport constant** entre le périmètre du cercle et son diamètre, ainsi qu'entre l'aire du disque et le carré du rayon. Ce rapport constant n'est autre que le nombre π; cette notation π est utilisée pour la première fois par le mathématicien gallois William Jones (1675 ; 1749) dans son livre *Synopsis palmariorum* publié en 1706. Depuis l'époque d'Archimède jusqu'à nos jours avec un support instrumental performant : « l'informatique », les mathématiciens cherchent sans cesse à préciser l'écriture décimale de π. Géométriquement, on obtient alors la circonférence d'un cercle en multipliant son diamètre par le nombre π, et donc la circonférence d'un cercle de rayon r est $2\pi r$.
Il s'agit ci-dessous d'un extrait du site Wikipédia concernant la définition d'un angle en radians et celle d'un angle de mesure un radian :

Radian
élément sous droit, diffusion non autorisée

D'après la définition de l'angle en radians, l'angle α en radians désigne un nombre sans dimension.

Donc, dans la formule de la circonférence d'un cercle de rayon r donnée ci-dessus, 2π désigne la mesure en radians de l'angle plein du cercle, et la circonférence du cercle est proportionnelle au rayon r.

Dans un cercle de rayon unitaire, la mesure de l'angle en radians et la mesure de la longueur de l'arc dans l'unité « Rayon du cercle » sont alors désignées par le même nombre ou valent

le même nombre, et le rayon unitaire du cercle désigne l'unité de longueur de la circonférence du cercle. Dans ce cas, la circonférence du cercle est de 2π.
Dans le premier ouvrage d'Euler publié en 1748, page 93, π désigne la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $=1$ ou la longueur d'un arc de 180 degrés. (https://archive.org/details/introductionla01eule)

Annexe n° 2. **Textes traduites** (de Khmer en Français)

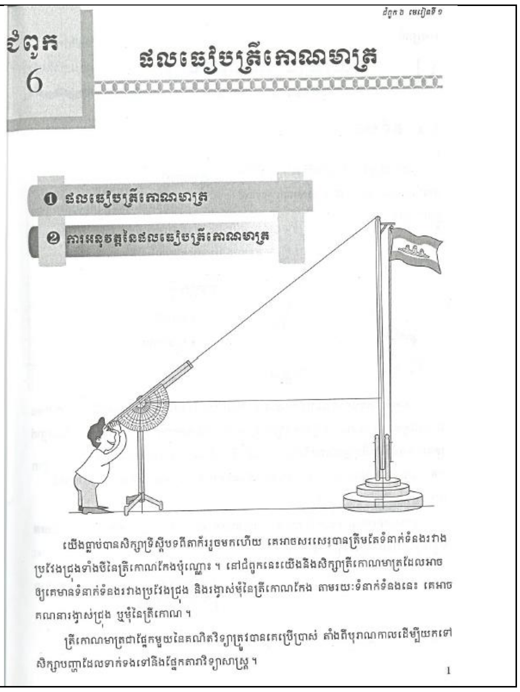
2.1. Chapitre 1 – Leçon 1 (la 10e)

Chapitre 6 : Rapports trigonométriques

1. Rapports trigonométriques
2. Application des rapports trigonométriques

(figure)

Nous avons déjà étudié le théorème de Pythagore. On peut écrire seulement une relation entre les longueurs des trois côtés du triangle rectangle. Dans ce chapitre, nous allons étudier la trigonométrie qui permet d'avoir une relation entre « longueurs » des côtés et « mesure » d'un angle du triangle rectangle. D'après cette relation, on peut calculer « longueurs » des côtés ou « mesure » d'un angle du triangle.
La trigonométrie qui est une partie des mathématiques est utilisée depuis l'antiquité, notamment pour étudier des problèmes concernant l'astronomie.



Leçon 1 : Rapports trigonométriques

1.1. Tangente

Par l'utilisation d'un instrument (théodolite) tel que le rapporteur pour mesurer des angles, l'élève peut-il déterminer la hauteur du support (ou du pied) du drapeau situé dans son école ?

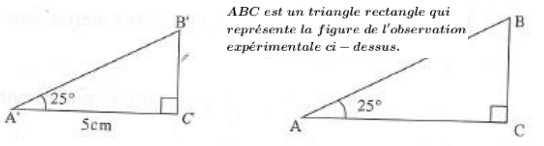
Objet :
Déterminer la tangente d'un angle aigu dans un triangle rectangle.

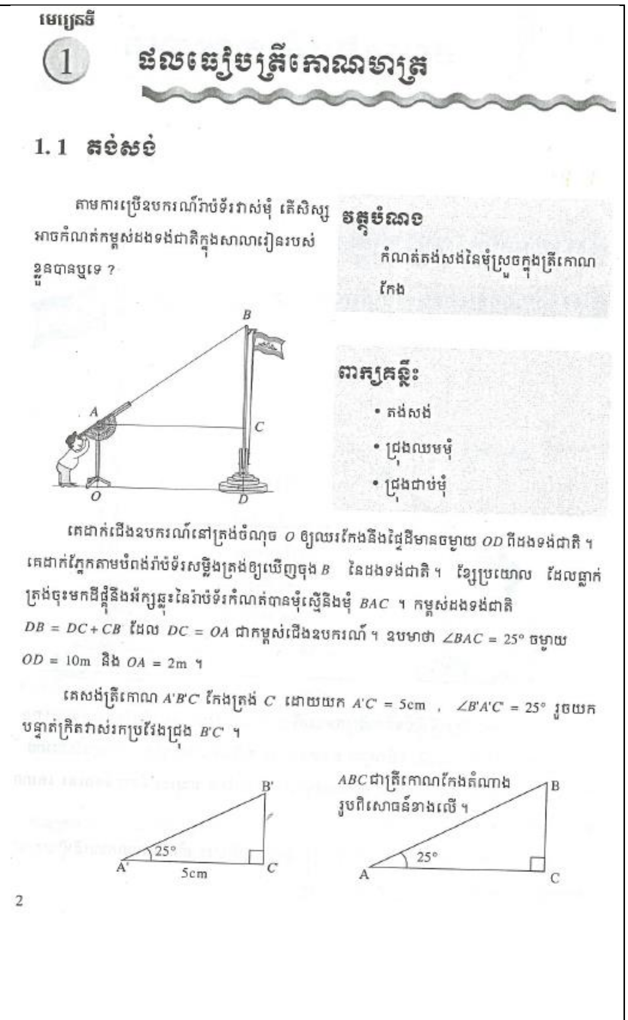
(figure)

Mots clés
. tangente
. côté opposé à un angle
. côté adjacent à un angle

On place le pied de l'instrument au point O en position verticale, perpendiculairement au sol, à la distance OD du support du drapeau. On place les yeux par le tuyau de rapporteur de manière que l'on puisse apercevoir l'extrémité B du support du drapeau. Le fil de support du drapeau suspendu verticalement par rapport au sol qui est associé à l'axe du rapporteur[1] détermine un angle, isométrique à l'angle $\widehat{BAC}$. La hauteur du support du drapeau $DB = DC + CB$ où $DC = OA$ est la hauteur du pied de l'instrument. Supposer que $\widehat{BAC} = 25^\circ$, les distances $OD = 10m$ et $OA = 2m$.

On construit un triangle $A'B'C'$ rectangle en C' en posant $A'C' = 5cm$, $\widehat{B'A'C'} = 25^\circ$ puis on mesure la longueur du côté $B'C'$ à l'aide d'une règle graduée.





On voit que les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables d'après le premier cas des triangles semblables. D'après les rapports égaux obtenus, nous en déduisons que $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'}$ ou $BC = AC \times \frac{B'C'}{A'C'}$ $\quad (*)$

Comme on connaît les longueurs $AC, A'C', B'C'$ alors on peut calculer BC par la formule $(*)$.

- On remarque que le rapport $\frac{BC}{AC}$ est déterminé, il suffit juste de connaître le point A et la mesure de l'angle A.
- Le rapport $\frac{BC}{AC}$ entre la longueur du côté opposé et celle du côté adjacent à l'angle A est appelé la tangente de l'angle A.

Définition : Dans un triangle rectangle si A est la mesure d'un angle[2] aigu alors la tangente de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle A et celle du côté adjacent à l'angle A.

(figure) $\quad \tan A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{a}{b}$

ou $\quad a = b.\tan A$

La mesure d'un angle en un sommet d'un triangle est notée par le nom de ce sommet du triangle.

Exemple 1 : Soit ABC un triangle rectangle en[3] C ayant pour longueurs des côtés $BC = 3cm$, $AC = 4cm$.
Calculer $\tan A$ et $\tan B$.

Réponse : On a $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} = 0,75$; $\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3} = 1,333$

Exemple 2 : Construire un triangle rectangle ayant un angle aigu de mesure 28°. Mesurer, à l'aide de la droite graduée, les longueurs des deux côtés de l'angle droit puis calculer $\tan 28^\circ$.

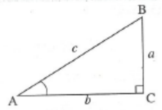
Réponse : Si on construit un triangle MNP rectangle en M en posant l'angle $\widehat{N} = 28^\circ$ et $MN = 3cm$ alors on mesure la longueur du côté $[MP]$. On obtient $MP = 1,6cm$.
$\tan 28^\circ = \frac{1,6}{3} = 0,5333$.

គេឃើញថាត្រីកោណ ABC និង $A'B'C$ ជាត្រីកោណដូចគ្នាតាមករណីដំណូចទី 1 ។ តាមផលធៀបដំណូចយើងទាញបាន : $\frac{BC}{AC} = \frac{B'C}{A'C}$ ឬ $BC = AC \times \frac{B'C}{A'C}$ $\quad (*)$

ដោយ AC , $A'C$, $B'C$ ជាប្រវែងដែលស្គាល់នោះ BC អាចគណនាបានតាមរូបមន្ត (*)

- គេសង្កេតឃើញថា ផលធៀប $\frac{BC}{AC}$ ត្រូវកំណត់បានដោយគ្រាន់តែស្គាល់ចំណុច A និងរង្វាស់មុំ A ។
- ផលធៀប $\frac{BC}{AC}$ រវាងរង្វាស់ជ្រុងឈម និងរង្វាស់ជ្រុងជាប់នៃមុំ A ហៅថាតង់សង់នៃមុំ A ។ គេកំណត់សរសេរ $\tan A$

និយមន័យ ក្នុងត្រីកោណកែងមួយ បើ A ជារង្វាស់មុំស្រួចមួយនោះ តង់សង់នៃមុំ A គឺជាផលធៀបរង្វាស់ជ្រុងឈមមុំ A និងរង្វាស់ជ្រុងជាប់មុំ A

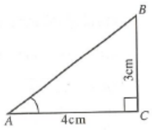


$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

ឬ $a = b \cdot \tan A$

គេកំណត់សរសេររង្វាស់មុំត្រង់កំពូលត្រីកោណដោយឈ្មោះកំពូលត្រីកោណនោះ ។

ឧទាហរណ៍ 1 ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C B មានរង្វាស់ជ្រុង $BC = 3\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$ ។ គណនា $\tan A$ និង $\tan B$ ។

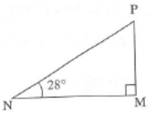


ចម្លើយ គេបាន $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4} = 0.75$

$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{3} = 1.333$

ឧទាហរណ៍ 2 សង់ត្រីកោណកែងមួយដែលមានមុំស្រួចមួយស្មើ 28° ។ យកបន្ទាត់ក្រិតវាស់ជ្រុងមុំកែងទាំងពីរ រួចគណនា $\tan 28^\circ$ ។

ចម្លើយ បើគេសង់ត្រីកោណ MNP កែងត្រង់ M ដោយយកមុំ $\angle N = 28^\circ$ និង $MN = 3\text{cm}$ នោះគេវាស់ជ្រុង $[MP]$



គេបាន $MP = 1.6\text{cm}$

$\tan 28^\circ = \frac{MP}{MN} = \frac{1.6}{3} = 0.5333$

3

Application

A l'aide des figures ci-dessous, calculer la tangente de l'angle A puis utiliser le rapporteur pour mesurer la valeur de l'angle A.

(figure a) (figure b) (figure c)

1.2. Sinus et cosinus

Exemple : Soit ABC un triangle rectangle en C. Si on connaît $\tan A = 0,75$ et $AC = 5cm$, calculer les rapports $\frac{BC}{AB}$ et $\frac{AC}{AB}$.

Réponse : D'après la formule de la tangente, on a : $\tan A = \frac{BC}{AC}$ ou
$BC = AC.\tan A = 5 \times 0,75 = 3,75$.
D'après le théorème de Pythagore, on a :
$AB^2 = AC^2 + BC^2$ ou
$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 3,75^2} = 6,25$
$\frac{BC}{AB} = \frac{3,75}{6,25} = 0,6$ et $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{6,25} = 0,8$

Objets :
- Trouver un rapport entre un des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse puis nommer ce rapport.
- Définir le sinus et le cosinus d'un angle aigu.

Mots clés :
sinus, cosinus

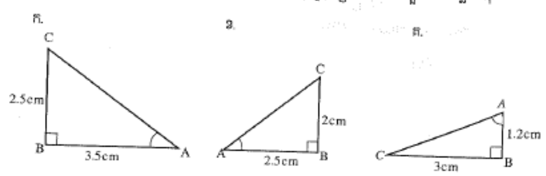
On remarque que les rapports $\frac{BC}{AB}$ et $\frac{AC}{AB}$ peuvent être déterminés ; il suffit juste de connaître la mesure d'un angle et un côté.

Le rapport $\frac{BC}{AB}$ entre le côté opposé à l'angle A et l'hypoténuse est appelé le sinus de l'angle A. On note $\sin A$.

Le rapport $\frac{AC}{AB}$ entre le côté adjacent à l'angle A et l'hypoténuse est appelé le cosinus de l'angle A. On note $\cos A$.

ប្រតិបត្តិ

តាមរូបខាងក្រោមនេះ ចូរគណនាតង់សង់នៃមុំ A រួចប្រើរាប់ទ័រដើម្បីវាស់តម្លៃនៃមុំ A :



1.2 ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

ឧទាហរណ៍ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C ។ បើស្គាល់ $\tan A = 0.75$ និង $AC = 5\text{cm}$ ចូរគណនាផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ និង $\frac{AC}{AB}$ ។

ចម្លើយ តាមរូបមន្តតង់សង់ គេបាន :

$\tan A = \frac{BC}{AC}$ ឬ $BC = AC \cdot \tan A$

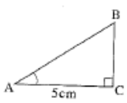
$= 5 \times 0.75 = 3.75$

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ គេបាន :

$AB^2 = AC^2 + BC^2$ ឬ

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + (3.75)^2} = 6.25$

$\frac{BC}{AB} = \frac{3.75}{6.25} = 0.6$ និង $\frac{AC}{AB} = \frac{5}{6.25} = 0.8$



គេសង្កេតឃើញថា ផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ និង $\frac{AC}{AB}$ អាចកំណត់បានដោយគ្រាន់តែស្គាល់រង្វាស់មុំមួយ និងជ្រុងមួយ ។

ផលធៀប $\frac{BC}{AB}$ ជ្រុងឈមមុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុសហៅថាស៊ីនុសនៃមុំ A ។ គេកំណត់សរសេរ $\sin A$

ផលធៀប $\frac{AC}{AB}$ ជ្រុងជាប់មុំ A និងអ៊ីប៉ូតេនុសហៅថាកូស៊ីនុសនៃមុំA ។ គេកំណត់សរសេរ $\cos A$

វត្ថុបំណង

- រកផលធៀបរវាងជ្រុងមុំកែង និងអ៊ីប៉ូតេនុស រួចកំណត់ឈ្មោះផលធៀប
- ឲ្យនិយមន័យស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

ពាក្យគន្លឹះ

ស៊ីនុស កូស៊ីនុស

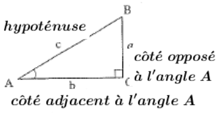
4

Définition : Dans un triangle rectangle, si A est la mesure d'un angle[2] aigu alors :

- le sinus de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté opposé à l'angle A et l'hypoténuse.
- le cosinus de l'angle A est le rapport entre la longueur du côté adjacent à l'angle A et l'hypoténuse.

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$ ou $a = c.\sin A$

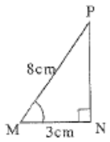
$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$ ou $b = c.\cos A$



Remarque : tangente, sinus et cosinus sont appelés rapports trigonométriques.

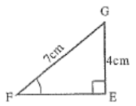
Exemple 1 : Soit MNP un triangle rectangle en N. Calculer le cosinus de l'angle M.

Réponse : Connaissant le côté adjacent à l'angle M : $MN = 3cm$ et l'hypoténuse $MP = 8cm$, on a alors : $\cos M = \frac{MN}{MP} = \frac{3}{8}$.



Exemple 2 : Soit EFG un triangle rectangle en E tel que $EG = 4cm$ et $FG = 7cm$. Calculer $\sin F$.

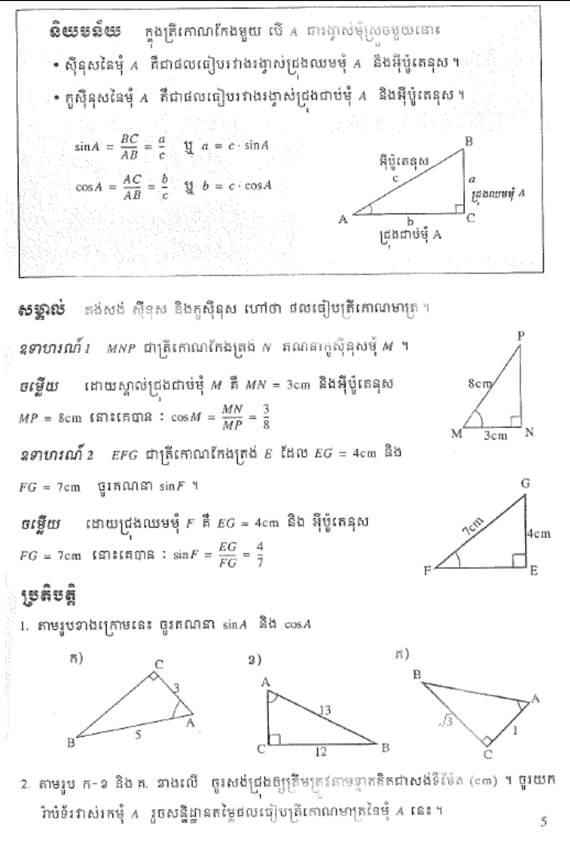
Réponse : Connaissant le côté opposé à l'angle F : $EG = 4cm$ et l'hypoténuse $FG = 7cm$, on a alors : $\sin F = \frac{EG}{FG} = \frac{4}{7}$.



Application

1. A l'aide des figures ci-dessous, calculer $\sin A$ et $\cos A$.
   figure a) figure b) figure c)

2. A l'aide des figures a, b et c ci-dessus, construire correctement les côtés en prenant pour unité de longueur le centimètre (cm). Mesurer, à l'aide du rapporteur, la mesure de l'angle A puis conclure en donnant les valeurs des rapports trigonométriques de cet angle A.



1.3. Valeurs des rapports trigonométriques

A. Triangle équilatéral

Utiliser les propriétés du triangle équilatéral ABC dont la longueur du côté est a pour calculer les rapports trigonométriques de l'angle 30° et de l'angle 60°. (figure)

Objets :
- Trouver les valeurs exactes des rapports trigonométriques des angles 30°, 45°, 60°.
- Utiliser la table des valeurs des rapports trigonométriques.

Mots clés :
triangle rectangle isocèle

Tracer la hauteur AH, on obtient le triangle ABH rectangle en H tel que $\hat{B} = 60^\circ$ et $\widehat{BAH} = 30^\circ$. On a : $AB = BC = AC = a$, $BH = HC = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$ donc $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D'après les définitions des rapports trigonométriques, on a :

…

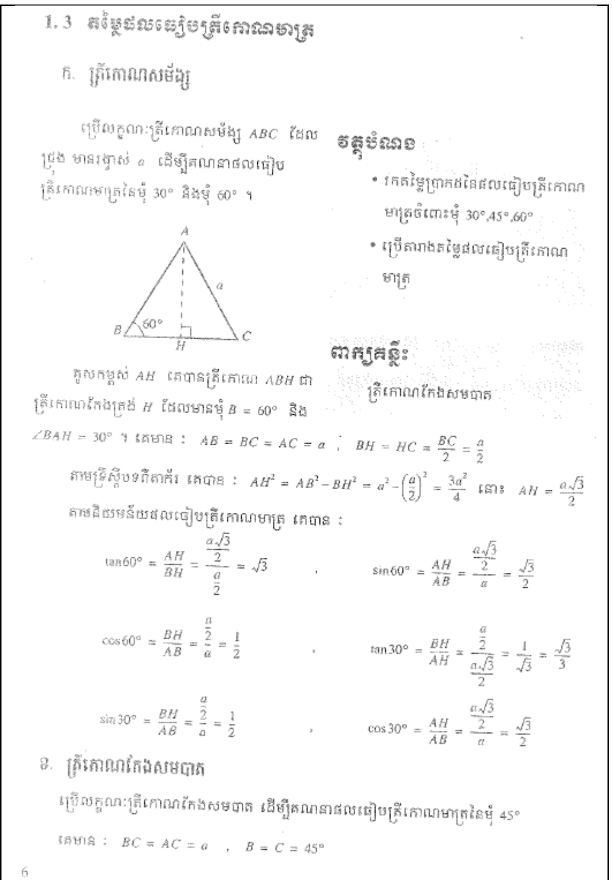
…

…

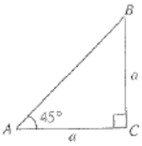
B. Triangle rectangle isocèle

Utiliser les propriétés du triangle rectangle isocèle pour calculer les rapports trigonométriques de l'angle 45°.

On a : $BC = AC = a$, $\hat{B} = \hat{C} = 45^\circ$.



D'après le théorème de Pythagore :
$AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
$AB = a\sqrt{2}$



D'après les définitions des rapports trigonométriques : $\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1$
$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

D'après la détermination des valeurs des rapports trigonométriques on peut élaborer la table des valeurs des rapports trigonométriques des angles de 0° à 90°. (Table de trigonométrie)

Exemple : Utiliser la table de trigonométrie pour calculer les côtés d'un triangle[4] ABC sachant que :

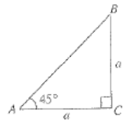
1. $AC = 3$, $\hat{B} = 22^\circ$
2. $AC = 3{,}4$, $\hat{A} = 26^\circ$
3. $AB = 7$, $\hat{B} = 60^\circ$
4. $AC = 4$, $AB = 7$ calculer la mesure de l'angle B.

Réponse

1. $\tan 22^\circ = \frac{AC}{BC}$ ou $BC = \frac{AC}{\tan 22^\circ} = \frac{3}{0{,}4040} = 7{,}42$
   $\sin 22^\circ = \frac{AC}{AB}$ ou $AB = \frac{AC}{\sin 22^\circ} = \frac{3}{0{,}3746} = 8$
2. …
3. …
4. $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{7} = 0{,}5714$, on obtient $B = 35^\circ$.

Application 1 : En montant une pente, si on est au point A, on sait qu'il y a une hauteur de $5m$ par rapport au sol. Si on continue ce parcours sur $100m$ jusqu'au point B, à quelle hauteur se trouvera-t-on sachant qu'en A l'angle est égal à 15° ? Cela revient à trouver la hauteur[5] BD.

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ : $AB^2 = BC^2 + AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
$AB = a\sqrt{2}$



តាមនិយមន័យផលធៀបត្រីកោណមាត្រ $\tan 45^\circ = \frac{BC}{AC} = 1$
$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

តាមការកំណត់តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនេះ គេអាចបង្កើតបានតារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពី 0° ទៅ 90° ។ (តារាងត្រីកោណមាត្រ)

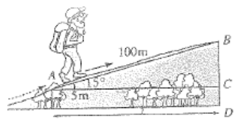
ឧទាហរណ៍ ប្រើតារាងត្រីកោណមាត្រ ដើម្បីគណនាជ្រុងនៃត្រីកោណ ABC ដោយស្គាល់ :

1. $AC = 3$, $B = 22^\circ$
2. $AC = 3.4$, $A = 26^\circ$
3. $AB = 7$, $B = 60^\circ$
4. $AC = 4$, $AB = 7$ គណនារង្វាស់មុំ B

ចម្លើយ

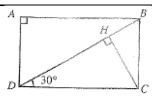
1. $\tan 22^\circ = \frac{AC}{BC}$ ឬ $BC = \frac{AC}{\tan 22^\circ} = \frac{3}{0.4040} = 7.42$
   $\sin 22^\circ = \frac{AC}{AB}$ ឬ $AB = \frac{AC}{\sin 22^\circ} = \frac{3}{0.3746} = 8$
2. $\tan 26^\circ = \frac{BC}{AC}$ ឬ $BC = AC \cdot \tan 26^\circ = 3.4 \times 0.4877 = 1.66$
   $\cos 26^\circ = \frac{AC}{AB}$ ឬ $AB = \frac{AC}{\cos 26^\circ} = \frac{3.4}{0.8987} = 3.78$
3. $\sin 60^\circ = \frac{AC}{AB}$ ឬ $AC = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{7\sqrt{3}}{2}$
   $\cos 60^\circ = \frac{BC}{AB}$ ឬ $BC = AB \cdot \cos 60^\circ = \frac{7}{2}$
4. $\sin B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{7} = 0.5714$ គេបាន $B = 35^\circ$

ប្រតិបត្តិ 1 នៅតាមផ្លូវចោតមួយ បើគេធ្វើដំណើរដល់ចំណុច A គេដឹងថាមានកម្ពស់ 5m ផុតពីដីរាប ។ បើគេបន្តដំណើរ 100m ទៅមុខទៀតដល់ចំណុច B តើគេបានកម្ពស់ប៉ុន្មានម៉ែតផុតពីដីរាប បើគេដឹងថាមុំនៅត្រង់ A ស្មើ 15° គឺរកកម្ពស់ BD ។



7

Application 2 : Soit $ABCD$ un rectangle tel que $BC = 5$ et l'angle $\widehat{BDC} = 30^\circ$. Soit H le projeté orthogonal du point C sur le segment BD. Calculer AB, BH et BD.

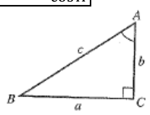


1.4. Relations entre les rapports trigonométriques

A. Relations entre tangente, sinus et cosinus

ABC est un triangle rectangle en C, on a :
$\tan A = \frac{a}{b}$, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$.
Comme $a = c.\sin A$, $b = c.\cos A$
alors $\tan A = \frac{c.\sin A}{c.\cos A}$

donc $\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}}$.



Objets :
- Trouver la relation entre tangente, sinus et cosinus
- Trouver la relation entre sinus et cosinus
- Trouver les rapports trigonométriques des deux angles complémentaires

Mots clés :
angles complémentaires

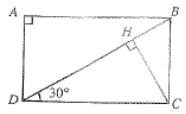
B. Relations entre sinus et cosinus

D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 + AC^2 = AB^2$
$(c\sin A)^2 + (c\cos A)^2 = c^2$
$c^2[(\sin A)^2 + (\cos A)^2] = c^2$ ou $(\sin A)^2 + (\cos B)^2 = 1$

On peut écrire : $(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$
Donc $\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$ est une relation importante dans la trigonométrie.

Si on divise les deux termes de $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ par $\cos^2 A \neq 0$ alors on obtient : $\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$
Donc $\boxed{1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}}$

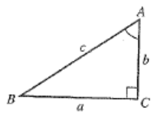
ប្រតិបត្តិ 2 $ABCD$ ជាចតុកោណកែងដែល $BC = 5$ និងមុំ $\angle BDC = 30^\circ$ ។ H ជាចំណោលកែងនៃ C លើ BD ។ គណនា AB , BH និង BD ។



1.4 ទំនាក់ទំនងរវាងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

ក. ទំនាក់ទំនងរវាងតង់សង់ ស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C គេបាន :
$\tan A = \frac{a}{b}$, $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$
ដោយ $a = c \sin A$, $b = c \cdot \cos A$
នោះ $\tan A = \frac{c \sin A}{c \cos A}$
ដូចនេះ $\boxed{\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}}$ ។



វត្ថុបំណង
- រកទំនាក់ទំនងរវាងតង់សង់ជាមួយស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស
- រកទំនាក់ទំនងរវាងស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស
- រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ 2 បំពេញគ្នា

ពាក្យគន្លឹះ
មុំបំពេញគ្នា

ខ. ទំនាក់ទំនងរវាងស៊ីនុស និងកូស៊ីនុស

តាមទ្រឹស្តីបទពីតាគ័រ : $BC^2 + AC^2 = AB^2$
$(c \sin A)^2 + (c \cos A)^2 = c^2$
$c^2[(\sin A)^2 + (\cos A)^2] = c^2$ ឬ $(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = 1$
គេអាចសរសេរ : $(\sin A)^2 = \sin^2 A$, $(\cos A)^2 = \cos^2 A$
ដូចនេះ $\boxed{\sin^2 A + \cos^2 A = 1}$ ជាទំនាក់ទំនងសំខាន់ក្នុងផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

បើគេចែកអង្គទាំងពីរនៃ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ នឹង $\cos^2 A \neq 0$ នោះ
គេបាន : $\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos^2 A}$ ដូចនេះ $\boxed{1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}}$

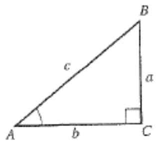
8

C. Relations trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu

Si les angles A et B ont pour somme 90° alors on dit que les angles A et B sont les angles complémentaires.

Si ABC est un triangle rectangle en C alors $A + B = 90^\circ$.

D'après les rapports trigonométriques, on a : $\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$.



Comme $B = 90^\circ - A$

Alors $\sin(90^\circ - A) = \cos A$, $\cos(90^\circ - A) = \sin A$

$$\tan(90^\circ - A) = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\tan A}.$$

Comme les angles A et $(90^\circ - A)$ sont complémentaires alors :

- le sinus d'un des deux angles aigus est égal au cosinus de l'autre.
- la tangente d'un des deux angles aigus est l'inverse de la tangente de l'autre.

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(90^\circ - A) = \cos A \\ \cos(90^\circ - A) = \sin A \\ \tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A} \end{array}}$$

Exemple 1 : Dans un triangle rectangle ABC, sachant que $\sin A = \frac{4}{7}$, calculer $\cos A$ et $\tan A$.

Réponse : D'après la relation $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ alors

$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49}$. Comme $\cos A > 0$ alors

$\cos A = \frac{\sqrt{33}}{7}$. On a : $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{\sqrt{33}}{7}} = \frac{4}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{33}$.

Exemple 2 : Sachant que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, calculer $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ où α est la mesure d'un angle aigu.

Réponse : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

Comme $\sin\alpha > 0$ alors $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ et $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$.

Donc $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{7}{-1} = -7$.

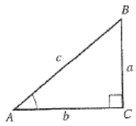
គ. ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំបំពេញ

បើមុំ A និង B មានផលបូកស្មើ 90° នោះគេថាមុំ A និង B ជាមុំបំពេញគ្នា។

បើ ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ C នោះ $A + B = 90^\circ$

តាមផលធៀបត្រីកោណមាត្រ គេបាន :

$\sin A = \frac{a}{c}$, $\cos A = \frac{b}{c}$, $\sin B = \frac{b}{c}$, $\cos B = \frac{a}{c}$



ដោយ $B = 90^\circ - A$

នោះ $\sin(90^\circ - A) = \cos A$

$\cos(90^\circ - A) = \sin A$

$\tan(90^\circ - A) = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\tan A}$

ដោយមុំ A និង $(90^\circ - A)$ ជាមុំបំពេញគ្នានោះ

- ស៊ីនុសនៃមុំមួយស្មើនឹងកូស៊ីនុសនៃមុំមួយទៀត
- តង់សង់នៃមុំមួយស្មើនឹងច្រាស់តង់សង់នៃមុំមួយទៀត

$$\boxed{\begin{array}{l} \sin(90^\circ - A) = \cos A \\ \cos(90^\circ - A) = \sin A \\ \tan(90^\circ - A) = \dfrac{1}{\tan A} \end{array}}$$

ឧទាហរណ៍ 1 ក្នុងត្រីកោណកែង ABC បើស្គាល់ $\sin A = \frac{4}{7}$ គណនា $\cos A$ និង $\tan A$ ។

ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ នោះ $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A = 1 - \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{33}{49}$

ដោយ $\cos A > 0$ នោះ $\cos A = \frac{\sqrt{33}}{7}$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{7}}{\frac{\sqrt{33}}{7}} = \frac{4}{\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{33}$$

ឧទាហរណ៍ 2 បើស្គាល់ $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ គណនា $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}$ ដែល α ជារង្វាស់មុំស្រួច

ចម្លើយ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

ដោយ $\sin\alpha > 0$ នោះ $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ និង $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{4}{3}$

ដូចនេះ $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \frac{1+\frac{4}{3}}{1-\frac{4}{3}} = \frac{7}{-1} = -7$

9

Exemple 3 : Sachant que $\tan\alpha = 2$, calculer $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$.

Réponse : On a $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ d'où $\sin\alpha = 2\cos\alpha$.

$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \cdots = -1$ ou bien $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \cdots = -1$.

Donc $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = -1$.

Application

1. Sachant que $\cos A = \frac{12}{13}$, calculer $\sin A$ et $\tan A$.
2. Sachant que $\tan A = 3$, calculer $\sin A$ et $\cos A$.
3. Trouver le rapport trigonométrique[6] d'un angle aigu dont la mesure est inférieur à 45° dans chacun des cas suivants :
   a. $\sin 63^\circ$, b. $\cos 82^\circ$, c. $\tan 73^\circ$.

1.5. Extension des rapports trigonométriques

A. Calculer les rapports trigonométriques à l'aide des coordonnées

On a déterminé les rapports trigonométriques d'un angle aigu en utilisant un triangle rectangle. Si α est un angle obtus, peut-on déterminer les rapports trigonométriques de l'angle obtus α ? On va étudier ce problème dans un repère de coordonnées.

Dans un repère de coordonnées, on trace un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point de ce cercle.

OM associé à l'axe des abscisses des x positifs détermine un angle[7] aigu α. Soit P le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. D'après les définitions des rapports trigonométriques

Objets :
- Calculer les rapports trigonométriques d'un angle obtus dans le cercle unité
- Trouver les valeurs des rapports trigonométriques des angles supplémentaires
- Trouver la valeur de $\sin\alpha$ ou $\cos\alpha$ ou $\tan\alpha$ connaissant l'une des trois valeurs

Mots clés :
angles supplémentaires

ឧទាហរណ៍3 បើស្គាល់ $\tan\alpha = 2$ គណនា $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$

ចម្លើយ គេមាន $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2$ នាំឲ្យ $\sin\alpha = 2\cos\alpha$

$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{2\cdot 2\cos\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 6\cos\alpha} = \frac{5\cos\alpha}{-5\cos\alpha} = -1$ ឬម្យ៉ាងទៀត

$\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos\alpha - 3\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{2\tan\alpha + 1}{1 - 3\tan\alpha} = \frac{2\cdot 2 + 1}{1 - 3\cdot 2}$

ដូចនេះ $\frac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha} = -1$

ប្រតិបត្តិ

1. ដោយស្គាល់ $\cos A = \frac{12}{13}$ គណនា $\sin A$ និង $\tan A$ ។
2. ដោយស្គាល់ $\tan A = 3$ គណនា $\sin A$ និង $\cos A$
3. រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំតូចជាង 45° ដែលស្មើនឹងផលធៀបត្រីកោណមាត្រនីមួយៗនេះ : ក. $\sin 63^\circ$ ខ. $\cos 82^\circ$ គ. $\tan 73^\circ$

1.5 ការពន្លាតនៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រ

ក. គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រដោយប្រើកូអរដោនេ

គេបានកំណត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំស្រួច ដោយប្រើត្រីកោណកែង ។ បើ α ជាមុំទាល តើគេអាចកំណត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាល α បានឬទេ ? គេនឹងសិក្សាបញ្ហានេះនៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ ។

នៅក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ គេគូសរង្វង់ផ្ចិត O កាំ r ។ M ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់នេះ ។

OM កំណត់ជាមួយអ័ក្សអាប់ស៊ីសខាង x វិជ្ជមានបានមុំស្រួច α ។ P ជាចំណោលកែងនៃ M លើអ័ក្សអាប់ស៊ីស ។ តាមនិយមន័យ ផលធៀប

វត្ថុបំណង
- គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាលក្នុងរង្វង់ឯកតា
- រកតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំបន្ថែមគ្នា
- រកតម្លៃ $\sin\alpha$ ឬ $\cos\alpha$ ឬ $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់តម្លៃមួយ

ពាក្យគន្លឹះ
មុំបន្ថែមគ្នា

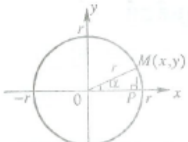
10

dans le triangle rectangle OMP, on a :

$\cos\alpha = \frac{OP}{OM}$, $\sin\alpha = \frac{MP}{OM}$, $\tan\alpha = \frac{MP}{OP}$.

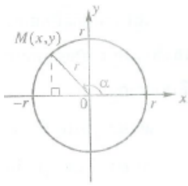
Si le point M a pour coordonnées (x, y) alors

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.



Par cette propriété, on va déterminer les rapports trigonométriques de l'angle[8] α où $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Dans un repère de coordonnées, on trace un cercle de centre O et de rayon r. Soit M un point du cercle tel que OM associé à l'axe des abscisses des x positifs détermine un angle obtus α. On voit que le point M se situe dans cette région ayant pour abscisse un nombre négatif x et pour ordonnée un nombre positif y :

donc $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$, $\tan\alpha < 0$.



Exemple 1 : Si $\alpha = 120^\circ$, rayon $r = 2$ unités.

Montrer que M a pour coordonnées $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ puis calculer les rapports trigonométriques de l'angle 120°.

Réponse : OMP étant un triangle rectangle en P a $\widehat{MOP} = 60^\circ$.

On obtient $OP = OM.\cos 60^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

$$MP = OM.\sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Comme P est situé à gauche de l'origine O alors on a : $M\left(-1, \sqrt{3}\right)$.

$\cos 120^\circ = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120^\circ = \frac{y}{x} = -\sqrt{3}$.

Exemple 2 : Si $\alpha = 150^\circ$et rayon $r = 2$.

Montrer que M a pour coordonnées[9] $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ puis calculer les rapports trigonométriques de l'angle 150°.

Réponse : On a $\widehat{MOP} = 30^\circ$, $OP = OM \times \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ et $MP = OM \times \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$. Or P se situe dans la partie des x négatifs alors $M\left(-\sqrt{3}, 1\right)$.

Donc[10] $\cos 150^\circ = -\sqrt{3}$, $\sin 150^\circ = 1$, $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Application

1. Calculer les rapports trigonométriques de l'angle 135° dans un cercle de rayon $= \sqrt{2}$.
2. Calculer les rapports trigonométriques de l'angle 180° dans un cercle de rayon $= 2$.

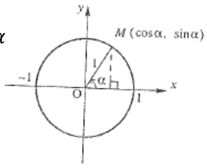
B. Cercle trigonométrique

Un cercle ayant son centre à l'origine d'un repère de coordonnées et ayant pour rayon 1 unité est appelé cercle unité ou cercle trigonométrique[11].

M ayant pour coordonnées (x, y) se situe sur le cercle unité

Le rayon OM et l'axe des abscisses de la partie des x positifs déterminent un angle[7] α dans dont le sens est opposé à celui des aiguilles de l'horloge.

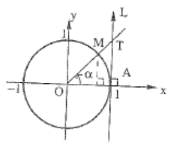
On a : $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.



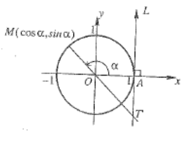
Donc sur le cercle trigonométrique, le point M a pour coordonnées[12] $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

- Valeur de la tangente d'un angle[13] α dans le cercle trigonométrique :

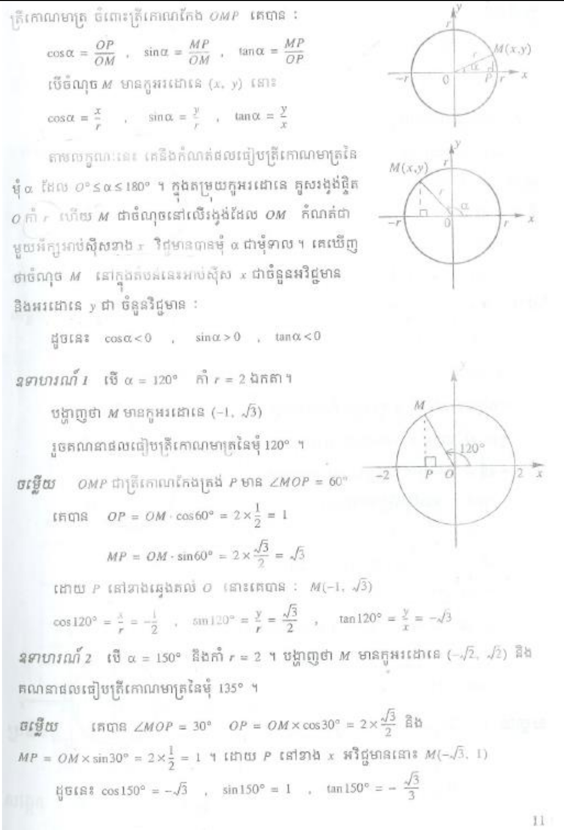
  Tracer un droite AL tangente au cercle en $A(1, 0)$.

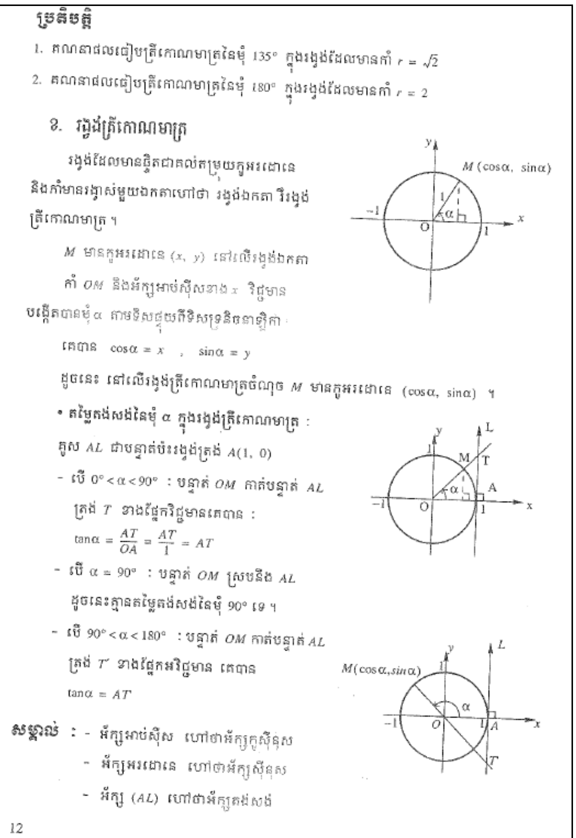
  

  - Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$: la droite OM coupe la droite AL en T dans la partie positive, on a : $\tan\alpha = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT$.
  - Si $\alpha = 90^\circ$: la droite OM est parallèle à la droite AL, donc il n'y a aucune valeur de tangente de l'angle 90°.
  - Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$: la droite OM coupe la droite AL en T' dans la partie négative, on a : $\tan\alpha = AT'$[14].

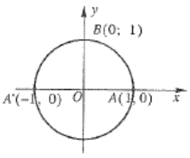
Remarque : - l'axe des abscisses est appelé axe des cosinus ;
- l'axe des ordonnées est appelé axe des sinus ;
- l'axe (AL) est appelé axe des tangentes.





- Valeurs des rapports trigonométriques des angles 0°, 90°, 180° :

Sur le cercle trigonométrique, les points A, B et A' ont pour coordonnées respectives : $(1,0)$, $(0,1)$ et $(-1,0)$.



- Si M est en A alors l'angle $\alpha = 0^\circ$: $\cos 0^\circ = 1$, $\sin 0^\circ = 0$, $\tan 0^\circ = 0$.
- Si M est en B alors $\alpha = 90^\circ$: $\cos 90^\circ = 0$, $\sin 90^\circ = 1$, $\tan 90^\circ = l'infini$.
- Si M est en A' alors $\alpha = 180^\circ$: $\cos 180^\circ = -1$, $\sin 180^\circ = 0$, $\tan 180^\circ = 0$.

Exemple : Si le rayon $r = 1$ unité, calculer les rapports trigonométriques des angles 120°, 135°.

Réponse : Comme $\alpha = 120^\circ$ alors $\widehat{MOP} = 60^\circ$, $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Donc $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120^\circ = -\sqrt{3}$.

Comme $\alpha = 135^\circ$ alors $\widehat{M'OP'} = 45^\circ$, $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Donc $\cos 135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 135^\circ = -1$.

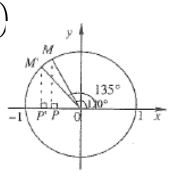


Tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables :

(figure ci-contre) & (មិនកំណត់ $= l'infini$)

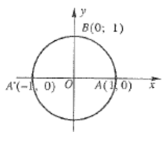
Application : Dans le cercle trigonométrique, vérifier les relations suivantes :

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 2. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, 3. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$.

Observation : Si $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ alors $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin\alpha \leq 1$.

• តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $0°, 90°, 180°$:

នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចំណុច A, B និង A' មានកូអរដោនេ : $(1, 0)$, $(0, 1)$ និង $(-1, 0)$



- បើ M នៅត្រង់ A នោះមុំ $\alpha = 0°$:

$\cos 0° = 1$, $\sin 0° = 0$, $\tan 0° = 0$

- បើ M នៅត្រង់ B នោះ $\alpha = 90°$

$\cos 90° = 0$, $\sin 90° = 1$, $\tan 90°$ មិនកំណត់

- បើ M នៅត្រង់ A' នោះ $\alpha = 180°$: $\cos 180° = -1$, $\sin 180° = 0$, $\tan 180° = 0$

ឧទាហរណ៍ បើកាំ $r = 1$ ឯកតា គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $120°$, $135°$ ។

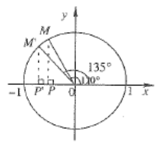
ចម្លើយ ដោយ $\alpha = 120°$ នោះ $\angle MOP = 60°$, $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ដូចនេះ $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 120° = -\sqrt{3}$

ដោយ $\alpha = 135°$ នោះ $\angle M'OP' = 45°$, $M'\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

ដូចនេះ $\cos 135° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 135° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 135° = -1$



តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ប្រតិបត្តិ ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចូរផ្ទៀងផ្ទាត់ទំនាក់ទំនងខាងក្រោម

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, 2. $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, 3. $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

សង្កេត បើ $0° \leq \alpha \leq 180°$ នោះ $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ និង $0 \leq \sin\alpha \leq 1$

13

C. **Rapports trigonométriques de l'angle $180^\circ - \alpha$**

- Si α et β sont des angles supplémentaires alors $\alpha + \beta = 180^\circ$ et $= 180^\circ - \alpha$.

$\widehat{AOM}) = \alpha$, $\widehat{AOM'} = \beta = 180^\circ - \alpha$

On obtient : $\widehat{A'OM'} = \alpha$

Donc M et M' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées (Oy). (figure)

Si M a pour coordonnées (x, y) alors M' a pour les coordonnées $(-x, y)$.

Comme $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$, alors $\cos\beta = -x$, $\sin\beta = y$, $\tan\beta = -\frac{y}{x}$.

D'où $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\sin\beta = \sin\alpha$, $\tan\beta = -\tan\alpha$.

Donc si deux angles sont supplémentaires, on a :

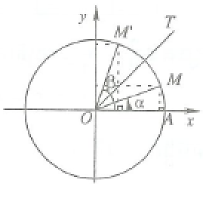
$$\boxed{\begin{aligned} \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\ \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

Par ces formules, la valeur du rapport trigonométrique d'un angle obtus est calculée par la transformation de cet angle[15] en un angle aigu.

Exemple : 1. … ; 2. … ; 3. … ; 4. …

Application : Trouver les rapports trigonométriques des angles 105°, 152°.

Dans un repère de coordonnées, on vérifie les rapports trigonométriques des angles complémentaires : $\alpha + \beta = 90^\circ$, $\beta = 90^\circ - \alpha$, $\widehat{AOM} = \alpha$, $\widehat{AOM'} = \beta$.

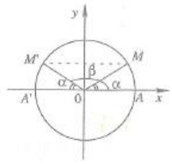


គ. ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $180° - \alpha$

- បើ α និង β ជាមុំបន្ថែមគ្នា នោះ $\alpha + \beta = 180°$

ហើយ $\beta = 180° - \alpha$

$\angle AOM = \alpha$, $\angle AOM' = \beta = 180° - \alpha$



គេបាន $\angle A'OM' = \alpha$

ដូចនេះ M និង M' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្ស (oy)

បើ M មានកូអរដោនេ (x, y) នោះ M' មានកូអរដោនេ $(-x, y)$

ដោយ $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$

នោះ $\cos\beta = -x$, $\sin\beta = y$, $\tan\beta = -\frac{y}{x}$

នាំឱ្យបាន $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\sin\beta = \sin\alpha$, $\tan\beta = -\tan\alpha$

ដូចនេះ ៖បើមុំពីរបន្ថែមគ្នានោះគេបាន :

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(180° - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \sin(180° - \alpha) &= \sin\alpha \\ \tan(180° - \alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}}$$

តាមរូបមន្តនេះ តម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំទាលត្រូវគណនា បានតាមការបំលែងមុំនេះជាមុំស្រួច ។

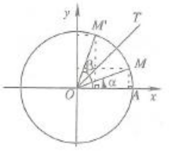
ឧទាហរណ៍

1. $\cos 125° = \cos(180° - 55°) = -\cos 55° = -0.5736$
2. $\sin 125° = \sin(180° - 55°) = \sin 55° = 0.5736$
3. $\tan 125° = \tan(180° - 55°) = -\tan 55° = -1.4281$
4. $\sin 143° = \sin(180° - 37°) = \sin 37° = 0.6018$

ប្រតិបត្តិ រកផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $105°$, $152°$ ។

ក្នុងតម្រុយកូអរដោនេ គេផ្ទៀងផ្ទាត់ផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំបំពេញគ្នា $\alpha + \beta = 90°$,

$\beta = 90° - \alpha$, $\angle AOM = \alpha$, $\angle AOM' = \beta$



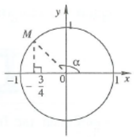
14

Sur le cercle trigonométrique, les points M et M' sont symétriques par rapport à la bissectrice (OT) de l'angle $x\widehat{O}y$.
On a alors $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$.
Donc $\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha$, $\tan(90^{\circ} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$.

D. Applications

Exemple 1 : Etant donné $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ avec $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$. Calculer $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

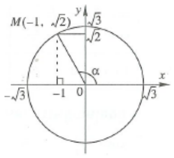
Réponse : D'après la relation $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
on a : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$.
Comme $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, alors $\sin\alpha \geq 0$,
donc $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$.



Exemple 2 : Etant donné $\tan\alpha = -\sqrt{2}$ avec $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$. Calculer $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

Réponse : D'après la relation $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$,
on a : $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + (-\sqrt{2})^2 = 3$ ou $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$.
Comme $\tan\alpha < 0$ et $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, alors $\cos\alpha < 0$, donc $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ou $\sin\alpha = \tan\alpha.\cos\alpha = (-\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

On peut le résoudre d'une autre façon :
On construit un cercle de rayon $= \sqrt{3}$.
Sur ce cercle, un point d'abscisse -1 doit avoir pour ordonnée $\sqrt{2}$ qui vérifie $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$.



On obtient : $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ou $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

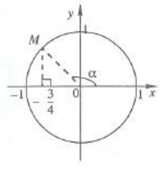
នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រចំណុច M និង M' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះ (OT) នៃ $\angle xOy$
គេបាន $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = \cos\alpha$
ដូចនេះ $\cos(90^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$, $\sin(90^{\circ} - \alpha) = \cos\alpha$, $\tan(90^{\circ} - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$

ឃ. អនុវត្ត

ឧទាហរណ៍ 1 គេឲ្យ $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$ ដែល $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ ។ គណនា $\sin\alpha$ និង $\tan\alpha$ ។

ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ គេបាន $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$

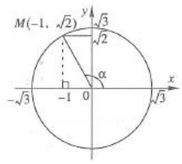
ដោយ $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ នោះ $\sin\alpha \geq 0$ នាំឲ្យ
$\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$



ឧទាហរណ៍ 2 គេឲ្យ $\tan\alpha = -\sqrt{2}$ ដែល $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ ។
គណនា $\sin\alpha$ និង $\cos\alpha$ ។

ចម្លើយ តាមទំនាក់ទំនង $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$
គេបាន : $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + (-\sqrt{2})^2 = 3$ ឬ $\cos^2\alpha = \frac{1}{3}$
ដោយ $\tan\alpha < 0$ និង $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ នោះ $\cos\alpha < 0$ នាំឲ្យ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ ឬ $\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = (-\sqrt{2})\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$

គេអាចដោះស្រាយតាមរបៀបម្យ៉ាងទៀត :
គេសង់រង្វង់កាំ $r = \sqrt{3}$ នៅលើរង្វង់នេះ ចំណុច ដែលមានអាប់ស៊ីស -1 ត្រូវមានអរដោនេ $\sqrt{2}$ ដែល ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$



គេបាន $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
ឬ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

15

Exemple 3 : Trouver les mesures d'un[16] angle α, tel que $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, qui vérifie $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Réponse : Sur le cercle trigonométrique, $\sin\alpha$ est l'ordonnée des points situés sur ce cercle (et l'ordonnée de ces points est)[17] $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
.
Il y a deux points du cercle M et M' qui ont pour ordonnée $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$; et ces deux points sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. D'après la formule[18] $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2},\ M'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Donc l'angle[14] α trouvé est : $\alpha = 60^{\circ}$ ou $\alpha = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$.

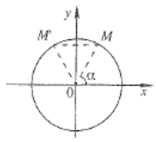
Résumé de la leçon

- Dans un triangle ABC rectangle en C :
  $\tan A = \frac{BC}{AC}$, $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$.
- $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$.
- $\sin(90^{\circ} - A) = \cos A$, $\cos(90^{\circ} - A) = \sin A$,
  $\tan(90^{\circ} - A) = \frac{1}{\tan A}$.

  Tableau des valeurs des rapports trigonométriques des angles remarquables
  (tableau ci-contre)

- Dans un repère de coordonnées, soit un point $M(x, y)$ d'un cercle de centre O et de rayon r et soit $\widehat{xOM} = \alpha$:
  $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.
- Si $r = 1$: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$.
- $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos\alpha$,
  $\tan(180^{\circ} - \alpha) = -\tan\alpha$.

ឧទាហរណ៍ 3 រកតម្លៃមុំ α ដែល $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$ ហើយ ផ្ទៀងផ្ទាត់ $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$



ចម្លើយ នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ $\sin\alpha$ ជាអរដោនេនៃចំណុច នៅលើរង្វង់នេះ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ។

មានពីរចំណុច M និង M' ដែលមានអរដោនេ $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ឋិតនៅលើរង្វង់ ហើយចំណុចទាំងពីរនេះឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអរដោនេ ។ តាមរូបមន្ត $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{2} ,\ M'\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) ,\ M\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ដូចនេះ មុំ α ដែលត្រូវរកគឺ : $\alpha = 60^{\circ}$ ឬ $\alpha = 180^{\circ} - 60^{\circ} = 120^{\circ}$

មេរៀនសង្ខេប

- ក្នុងត្រីកោណ ABC កែងត្រង់ C : $\tan A = \frac{BC}{AC}$, $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = \frac{AC}{AB}$
- $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, $1 + \tan^2 A = \frac{1}{\cos^2 A}$
- $\sin(90^{\circ} - A) = \cos A$, $\cos(90^{\circ} - A) = \sin A$, $\tan(90^{\circ} - A) = \frac{1}{\tan A}$

តារាងតម្លៃផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំពិសេស

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	មិនកំណត់	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

- ក្នុងតម្រុយអ័ក្សអរដោនេមានចំណុច $M(x, y)$ នៅលើរង្វង់ផ្ចិត O កាំ r និង $\angle xOM = \alpha$:
  $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$
- បើ $r = 1$: $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$, $\tan\alpha = \frac{y}{x}$
- $\sin(180^{\circ} - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^{\circ} - \alpha) = -\cos\alpha$, $\tan(180^{\circ} - \alpha) = -\tan\alpha$

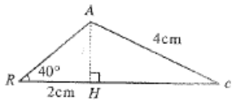
16

Exercices

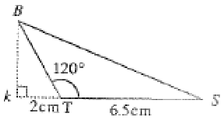
1. A l'aide des figures ci-dessous, calculer les rapports trigonométriques de l'angle A, puis donner la valeur approchée de l'angle A.
   (figures)

2. Soit ABC un triangle rectangle en A. Connaissant un angle et un côté, calculer les longueurs de deux autres côtés du triangle :
   a. $B = 18^\circ$, $AB = 5$ b. $B = 32^\circ$, $AC = 9$
   c. $B = 68^\circ$, $BC = 12$ d. $C = 60^\circ$, $BC = 10$

3. AH est une hauteur d'un triangle quelconque ARC tel que $HR = 2cm$, $AC = 4cm$, $\hat{R} = 40^\circ$.
   a. Calculer AH puis trouver la valeur approchée de l'angle C.
   b. Calculer HC.

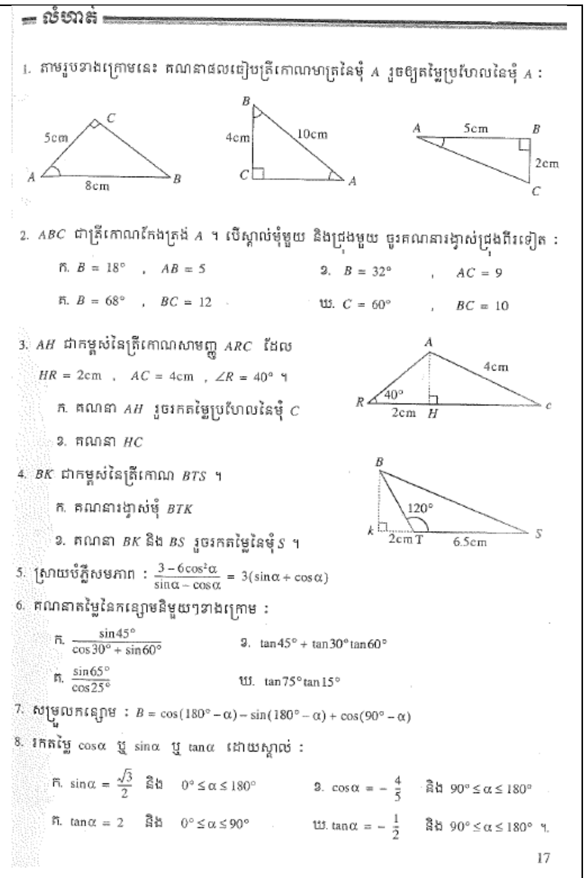


4. BK est une hauteur d'un triangle BTS.
   a. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{BTK}$.
   b. Calculer BK et BS puis la mesure de l'angle $\hat{S}$.



5. Prouver l'égalité : $\frac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 3(\sin\alpha + \cos\alpha)$.
6. Calculer la valeur de chaque expression suivante :
   a. $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}$ b. $\tan 45^\circ + \tan 30^\circ \tan 60^\circ$
   c. $\frac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$ d. $\tan 75^\circ \tan 15^\circ$

7. Simplifier l'expression :
   $B = \cos(180^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ) + \cos(90^\circ - \alpha)$.
8. Trouver les valeurs de $\cos\alpha$ ou $\sin\alpha$ ou $\tan\alpha$ sachant que :
   a. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ b. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ et $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
   c. $\tan\alpha = 2$ et $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ d. $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ et $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$



លំហាត់

1. តាមរូបខាងក្រោមនេះ គណនាផលធៀបត្រីកោណមាត្រនៃមុំ A រួចឲ្យតម្លៃប្រហែលនៃមុំ A :

2. ABC ជាត្រីកោណកែងត្រង់ A ។ បើស្គាល់មុំមួយ និងជ្រុងមួយ ចូរគណនារង្វាស់ជ្រុងពីរទៀត :
   ក. $B = 18^\circ$, $AB = 5$ ខ. $B = 32^\circ$, $AC = 9$
   គ. $B = 68^\circ$, $BC = 12$ ឃ. $C = 60^\circ$, $BC = 10$

3. AH ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណសាមញ្ញ ARC ដែល $HR = 2cm$, $AC = 4cm$, $\angle R = 40^\circ$ ។
   ក. គណនា AH រួចរកតម្លៃប្រហែលនៃមុំ C
   ខ. គណនា HC

4. BK ជាកម្ពស់នៃត្រីកោណ BTS ។
   ក. គណនារង្វាស់មុំ BTK
   ខ. គណនា BK និង BS រួចរកតម្លៃនៃមុំ S ។

5. ស្រាយបំភ្លឺសមភាព : $\frac{3-6\cos^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 3(\sin\alpha + \cos\alpha)$

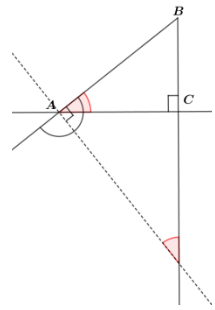
6. គណនាតម្លៃនៃកន្សោមនីមួយៗខាងក្រោម :
   ក. $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + \sin 60^\circ}$ ខ. $\tan 45^\circ + \tan 30^\circ \tan 60^\circ$
   គ. $\frac{\sin 65^\circ}{\cos 25^\circ}$ ឃ. $\tan 75^\circ \tan 15^\circ$

7. សម្រួលកន្សោម : $B = \cos(180^\circ - \alpha) - \sin(180^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ - \alpha)$

8. រកតម្លៃ $\cos\alpha$ ឬ $\sin\alpha$ ឬ $\tan\alpha$ ដោយស្គាល់ :
   ក. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ និង $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ខ. $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ និង $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$
   គ. $\tan\alpha = 2$ និង $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ឃ. $\tan\alpha = -\frac{1}{2}$ និង $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ ។

17

Liste des erreurs & remarques (Traduction du Khmer en Français – 10e Leçon 1 du chapitre 6 du manuel de mathématiques Tome 2) :



1. Nous avons traduit les textes aussi fidèlement que possible afin de ne pas en modifier l'esprit. Grâce à la figure donnée, nous supposons que les auteurs du manuel décrivent comment obtenir l'angle $\widehat{BAC}$. Nous traduisons la phrase mentionnée en illustrant la figure ci-contre.
Ici, les auteurs utilisent « axe de symétrie du rapporteur », nous traduisons simplement « axe du rapporteur » car ceci nous semble être tout à fait convenable. (page 2)

2. Il y a une ambiguïté entre un angle et sa mesure dans cette définition : A désigne-t-il l'angle A ou la mesure de l'angle A ? Dans cette définition, on définit : 1. la tangente d'un angle aigu du triangle rectangle ; 2. le sinus et le cosinus d'un angle aigu du triangle rectangle. Il ne faut pas préciser d'emblée : « A est la mesure d'un angle aigu » ; sinon, il s'agit d'une confusion des notions visées au niveau institutionnel. (page 3 & page 5)

3. Nous avons rectifié : le triangle ABC donné est rectangle en C. (page 3)

4. La consigne est vraiment incomplète. Le triangle donné doit être rectangle sinon on ne peut pas du tout répondre à la question posée. En plus, au quatrième cas, c'est hors sujet pour l'exemple tout entier. La lecture de la réponse donnée nous indique que ce triangle ABC donné doit être rectangle en C pour les quatre cas : les trois premiers cas consistent à calculer les deux autres côtés du triangle rectangle et le dernier cas consiste à calculer la mesure de l'angle B. (page 7)

5. Ici, il s'agit d'un problème accompagné par un schéma. Cependant, la question posée est très simple sans inciter les élèves à réfléchir. En effet, on a commencé par poser une question en langage discursif et on a tout de suite précisé ce que l'on demande de faire. (page 7)

6. Nous simplifions la question posée pour laquelle nous pensons que le sens est déjà intelligible. La question posée initialement dans le manuel est :

> Trouver le rapport trigonométrique d'un angle aigu, dont la mesure est inférieure à 45°, étant égal au rapport trigonométrique d'un angle donné dans chacun de ces cas suivants : a. $\sin 63^\circ$, b. $\cos 80^\circ$, c. $\tan 73^\circ$.

L'objectif de cette application 3. est de faire exploiter les relations trigonométriques de l'angle complémentaire d'un angle aigu. (page 10)

7. Il s'agit d'une façon de définir un angle déterminé par l'association entre l'axe des abscisses des x positifs et le rayon $[OM]$. Il semble que cet angle désigne implicitement un angle orienté de deux vecteurs dans l'ordre : l'un est le vecteur unitaire de l'axe des abscisses et l'autre, le vecteur $\overrightarrow{OM}$. (page 10 & page 12)

8. Il s'agit d'une ambiguïté entre un angle et sa mesure ; dans ce cas, il est incompréhensible que l'angle soit encadré par des mesures d'angle en degrés. Il est préférable de dire : on va déterminer les rapports trigonométriques d'un angle de mesure α (en degrés)

où $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. (page 11)

9. Il s'agit d'une erreur. Voici notre rectification : Montrer que M a pour coordonnées $(-\sqrt{3}\,;1)$. (page 11)

10. Le manuel oublie de diviser les coordonnées du point M par $r = 2$ pour obtenir le cosinus et le sinus de l'angle de 150°cherchés.

11. A cette définition du cercle trigonométrique, il manque l'orientation positive/directe du plan. (page 12)

12. Il semble que les auteurs s'intéressent plutôt aux coordonnées d'un point M du cercle trigonométrique, mais pas à définir ici le cosinus et le sinus d'un angle α comme étant l'abscisse et l'ordonnée du point M. (page 12)

13. C'est incompréhensible lors de la lecture de la phrase : « la tangente d'un angle α dans le cercle trigonométrique » ; et le registre graphique ci-contre nous aide à comprendre mieux ce que veulent dire les auteurs du manuel. (page 12)

14. C'est faux car AT' représente la distance de l'origine de l'axe des tangentes A au point T' de cet axe. Il serait préférable de dire : « on a : $\tan\alpha = -AT'$ ». (page 12)

15. Ce serait préférable de dire : Ces formules permettent de ramener le calcul des rapports trigonométriques d'un angle obtus à celui des rapports trigonométriques d'un angle aigu. Car on ne transforme pas un angle obtus en un angle aigu. (page 14)

16. A l'aide de lecture graphique sur le cercle trigonométrique, il y a deux angles différents qui ont le même sinus. (page 16)
Comme on ne demande pas explicitement un type de tâches comme par exemple : « résoudre une équation », il serait préférable de proposer les tâches suivantes :
soit, trouver les mesures α en degrés, où $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, des angles dont le sinus est $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
soit, trouver les mesures α en degrés, où $0^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$, des angles qui vérifient $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. Nous ajoutons une petite phrase mise entre parenthèses pour rendre le texte plus intelligible. (page 16)

18. C'est inutile de chercher les valeurs de $\cos\alpha$, autrement dit, de donner les coordonnées des points M et M'. (page 16)

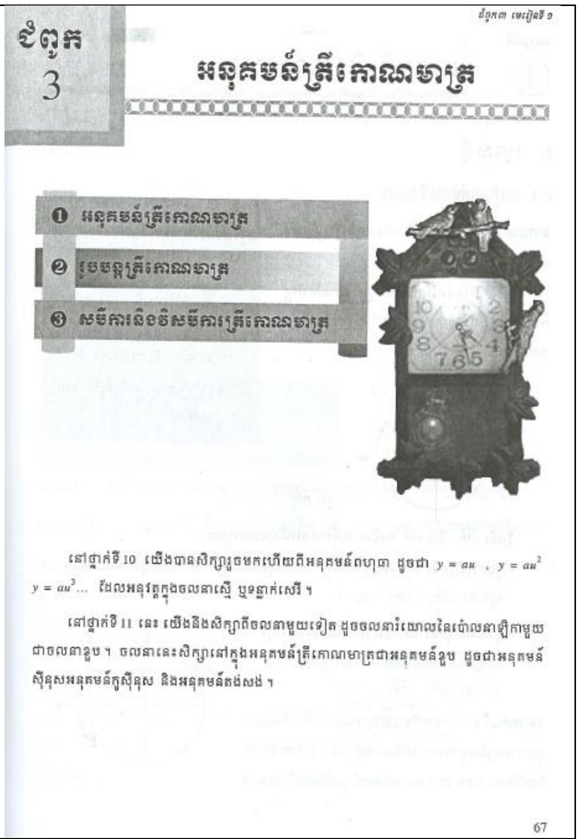
2.2. Chapitre 3 – Leçon 1 (la 11e)

Chapitre 3 : **Fonctions trigonométriques**

1. **Fonctions trigonométriques**
2. **Formules trigonométriques**
3. **Equations et inéquations trigonométriques**

En classe 10e, nous avons étudié les fonctions polynômiales définies par : $y = au$, $y = au^2$, $y = au^3$… qui ont été utilisées dans les mouvements rectilignes uniformes ou dans un mouvement de chute libre.

En classe 11e, nous allons étudier un autre mouvement : celui des vibrations d'un pendule qui est un mouvement périodique. Ce mouvement périodique est étudié à l'aide des fonctions trigonométriques qui sont des fonctions périodiques. Nous utilisons les fonctions sinus, cosinus et tangente.



Leçon 1 : **Fonctions trigonométriques**

1. Mesures d'un angle

1.1. Détermination d'un angle orienté

Exemple 1 : Dans le cercle trigonométrique, on utilise des vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ pour déterminer un angle.

$\overrightarrow{OP_0}$ étant un vecteur fixé situé du côté des positifs de l'axe $\overrightarrow{Ox}$, est appelé vecteur origine. $\overrightarrow{OP}$ étant un vecteur mobile (vecteur tournant), tournant autour de l'origine du repère, est appelé vecteur extrémité.

Objets :
- Convertir « un angle » de degrés en radians et de radians en degrés
- Utiliser les propriétés des angles associés pour calculer les « fonctions trigonométriques »
- Construire les graphiques des fonctions trigonométriques

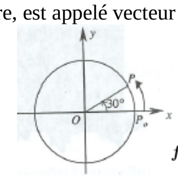


figure a

Les vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ forment alors un angle[1] de la manière suivante :

- Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne dans le sens antihoraire, l'angle formé est un angle positif. (figure a) $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = 30^\circ$.
- Dans le cas où le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne dans le sens horaire, l'angle formé est un angle négatif. (figure b) $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = -30^\circ$.

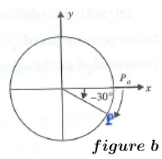
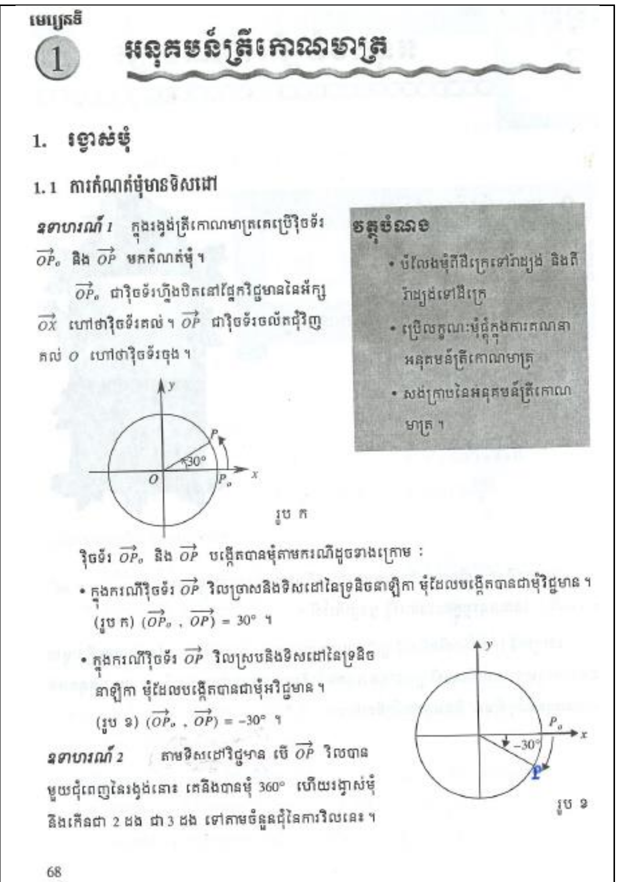
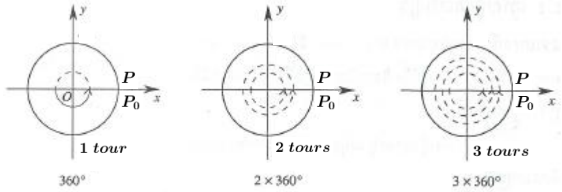


figure b

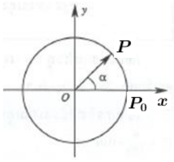
Exemple 2 : Par le sens direct, si $\overrightarrow{OP}$ fait 1 tour autour de ce cercle, on obtiendra l'angle 360° et sa mesure « augmente » 2 fois, 3 fois suivant le nombre de tours réalises.





Si α est un angle déterminé par les vecteurs[2] $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ alors $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ déterminent aussi un angle ayant des mesures différentes comme indiqué ci-après :

$\alpha + 360^\circ$	$\alpha - 360^\circ$
$\alpha + 2 \times 360^\circ$	$\alpha - 2 \times 360^\circ$
$\alpha + 3 \times 360^\circ$	$\alpha - 3 \times 360^\circ$



En général : $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$ sont deux vecteurs qui déterminent l'angle[3] $\alpha + k360^\circ$ $(k \in Z)$

Remarque[4] : Même si les angles α et $\alpha + 360^\circ$ ont des mesures différentes, ils ont le même vecteur origine et le même vecteur extrémité.

Exercice résolu 1 : Le vecteur $\overrightarrow{OP}$ tourne en partant de sa position initiale $\overrightarrow{OP_0}$ et détermine un angle[5] de 120° puis un autre angle de -155°. Calculer[6] l'angle $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$.

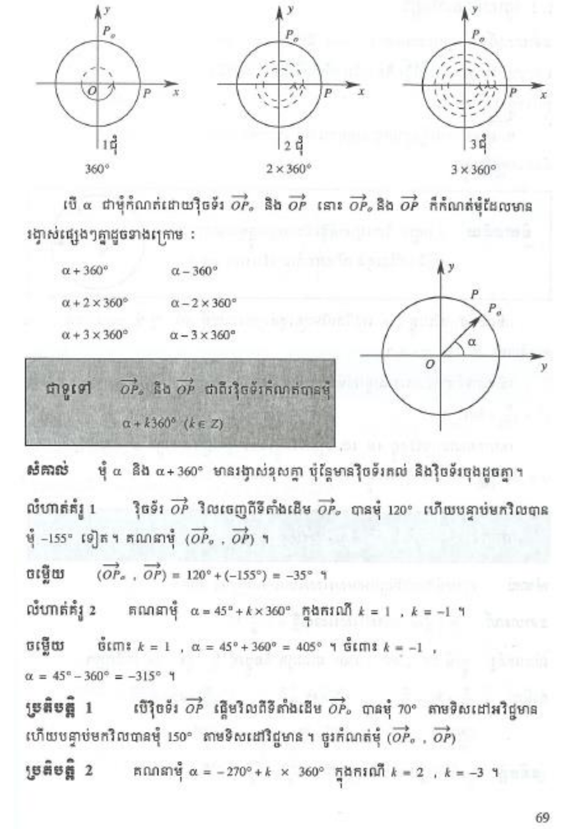
Réponse : $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = 120^\circ + (-155^\circ) = -35^\circ$.

Exercice résolu 2 : Calculer l'angle $\alpha = 45^\circ + k \times 360^\circ$ dans les cas : $k = 1, k = -1$.

Réponse : Pour $k = 1$, $\alpha = 45^\circ + 360^\circ = 405^\circ$.
Pour $k = -1$, $\alpha = 45^\circ - 360^\circ = -315^\circ$.

Application 1 : Si le vecteur $\overrightarrow{OP}$ commence par tourner en partant de sa position initiale $\overrightarrow{OP_0}$ et détermine un angle de 70° dans le sens indirect puis un angle de 150° dans le sens direct. Déterminer l'angle $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP})$.

Application 2 : Calculer l'angle $\alpha = -270^\circ + k \times 360^\circ$ dans les cas : $k = 2, k = -3$.


1ជុំ 360° ; 2ជុំ $2\times360°$; 3ជុំ $3\times360°$

បើ α ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ នោះ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ក៏កំណត់មុំដែលមានរង្វាស់ផ្សេងៗគ្នាដូចខាងក្រោម ៖

$\alpha+360°$ $\alpha-360°$
$\alpha+2\times360°$ $\alpha-2\times360°$
$\alpha+3\times360°$ $\alpha-3\times360°$

ជាទូទៅ $\overrightarrow{OP_o}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ជាពីរវ៉ិចទ័រកំណត់បានមុំ $\alpha+k360°$ $(k\in Z)$

សំគាល់ មុំ α និង $\alpha+360°$ មានរង្វាស់ខុសគ្នា ប៉ុន្តែមានវ៉ិចទ័រដើម និងវ៉ិចទ័រចុងដូចគ្នា ។

លំហាត់គំរូ 1 វ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ វិលចេញពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ 120° ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ −155° ទៀត ។ គណនាមុំ $(\overrightarrow{OP_o}, \overrightarrow{OP})$ ។

ចម្លើយ $(\overrightarrow{OP_o}, \overrightarrow{OP}) = 120°+(-155°) = -35°$ ។

លំហាត់គំរូ 2 គណនាមុំ $\alpha = 45°+k\times360°$ ក្នុងករណី $k=1$, $k=-1$ ។

ចម្លើយ ចំពោះ $k=1$, $\alpha = 45°+360° = 405°$ ។ ចំពោះ $k=-1$, $\alpha = 45°-360° = -315°$ ។

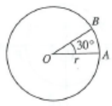
ប្រតិបត្តិ 1 បើវ៉ិចទ័រ $\overrightarrow{OP}$ ផ្តើមវិលពីទីតាំងដើម $\overrightarrow{OP_o}$ បានមុំ 70° តាមទិសដៅអវិជ្ជមាន ហើយបន្ទាប់មកវិលបានមុំ 150° តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។ ចូរកំណត់មុំ $(\overrightarrow{OP_o}, \overrightarrow{OP})$

ប្រតិបត្តិ 2 គណនាមុំ $\alpha = -270°+k\times360°$ ក្នុងករណី $k=2$, $k=-3$ ។

69

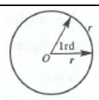
1.2. Mesures d'un angle en radians

Exemple : Soit un cercle ayant pour rayon $r = 5\ cm$ et $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Calculer la longueur de l'arc AB. L'angle au centre $\widehat{AOB}$ en degrés n'a aucune relation avec la longueur de l'arc AB.[7]



C'est pourquoi on crée une nouvelle unité de mesure d'angles ayant une relation avec la longueur de l'arc intercepté.

Définition : 1 radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte un arc de cercle dont la longueur est égale au rayon du cercle et on note 1 rd.



Nous savons que la longueur d'un arc $2\pi r$ est égale au périmètre du cercle intercepté par l'angle 360° ou l'angle $2\pi(rd)$ ce qui signifie que $360^\circ = 2\pi(rd)$.

Nous obtenons une relation entre la mesure d'angle en degrés et en radians qui est : $1\ rd = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ$, $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0{,}017$.

On peut calculer la longueur d'un arc AB en convertissant juste l'unité d'angle de degrés en radians : $\alpha = 30^\circ$ ou[8] $\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0{,}52\ rd$, la longueur de l'arc[9] $AB = \alpha . r = 0{,}52 \times 5 = 2{,}6\ cm$.

En général : $(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}) = \alpha + 2k\pi$ $(k \in Z)$.[10]

Remarque : La mesure d'un angle en radians peut s'écrire sans utiliser rd.

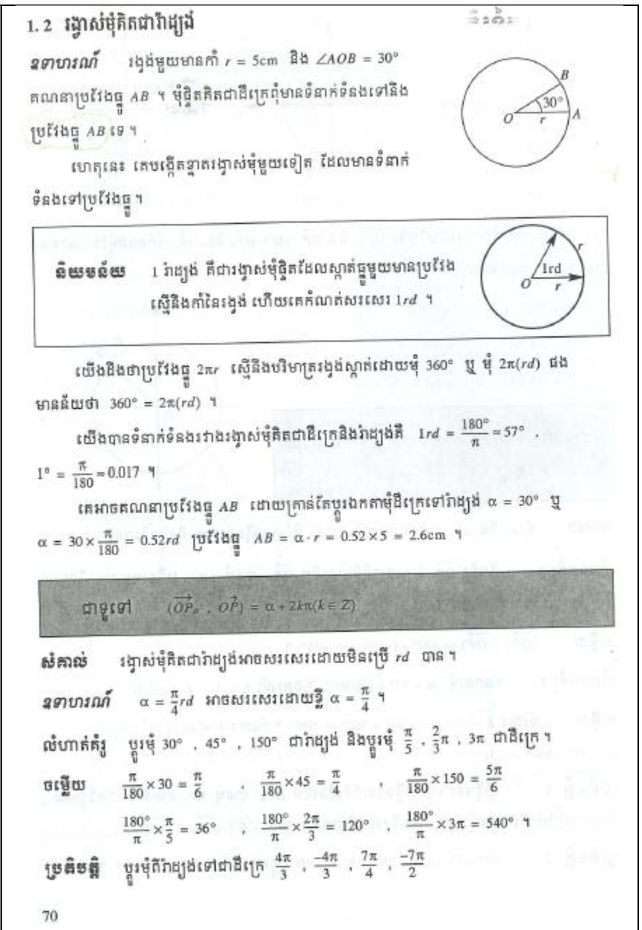
Exemple : $\alpha = \frac{\pi}{4} rd$ peut s'écrire $= \frac{\pi}{4}$.

Exo résolu : Convertir des angles 30°, 45° , 150° en radians et convertir des angles $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2}{3}\pi$, 3π en degrés.

Réponse : $\frac{\pi}{180} \times 30 = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{180} \times 45 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{150} \times 150 = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{\pi}{5} = 36^\circ$, $\frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{2\pi}{3} = 120^\circ$, $\frac{180^\circ}{\pi} \times 3\pi = 540^\circ$.

Application : Convertir des angles de radians en degrés : $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{-4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-7\pi}{2}$.



1.2 រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់

ឧទាហរណ៍ រង្វង់មួយមានកាំ $r = 5cm$ និង $\angle AOB = 30°$ គណនាប្រវែងធ្នូ AB ។ មុំផ្ចិតគិតជាដឺក្រេពុំមានទំនាក់ទំនងទៅនឹងប្រវែងធ្នូ AB ទេ ។

ហេតុនេះ គេបង្កើតខ្នាតរង្វាស់មុំមួយទៀត ដែលមានទំនាក់ទំនងទៅប្រវែងធ្នូ ។

និយមន័យ 1 រ៉ាដ្យង់ គឺជារង្វាស់មុំផ្ចិតដែលស្កាត់ធ្នូមួយមានប្រវែងស្មើនឹងកាំនៃរង្វង់ ហើយគេកំណត់សរសេរ $1rd$ ។

យើងដឹងថាប្រវែងធ្នូ $2\pi r$ ស្មើនឹងបរិមាត្ររង្វង់ស្កាត់ដោយមុំ 360° ឬ មុំ $2\pi(rd)$ ផង មានន័យថា $360° = 2\pi(rd)$ ។

យើងបានទំនាក់ទំនងរវាងរង្វាស់មុំគិតជាដឺក្រេនិងរ៉ាដ្យង់គឺ $1rd = \frac{180°}{\pi} \approx 57°$, $1° = \frac{\pi}{180} = 0.017$ ។

គេអាចគណនាប្រវែងធ្នូ AB ដោយគ្រាន់តែប្តូរឯកតាមុំពីដឺក្រេទៅរ៉ាដ្យង់ $\alpha = 30°$ ឬ $\alpha = 30\times\frac{\pi}{180} = 0.52rd$ ប្រវែងធ្នូ $AB = \alpha\cdot r = 0.52\times5 = 2.6cm$ ។

ជាទូទៅ $(\overrightarrow{OP_o}, \overrightarrow{OP}) = \alpha+2k\pi (k\in Z)$

សំគាល់ រង្វាស់មុំគិតជារ៉ាដ្យង់អាចសរសេរដោយមិនប្រើ rd បាន ។

ឧទាហរណ៍ $\alpha = \frac{\pi}{4}rd$ អាចសរសេរជា $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ។

លំហាត់គំរូ ប្តូរមុំ 30° , 45° , 150° ជារ៉ាដ្យង់ និងប្តូរមុំ $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2}{3}\pi$, 3π ជាដឺក្រេ ។

ចម្លើយ $\frac{\pi}{180}\times30 = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{180}\times45 = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{180}\times150 = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{180°}{\pi}\times\frac{\pi}{5} = 36°$, $\frac{180°}{\pi}\times\frac{2\pi}{3} = 120°$, $\frac{180°}{\pi}\times3\pi = 540°$ ។

ប្រតិបត្តិ ប្តូរមុំពីរ៉ាដ្យង់ទៅជាដឺក្រេ $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{-4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$, $\frac{-7\pi}{2}$

70

2. Fonctions trigonométriques

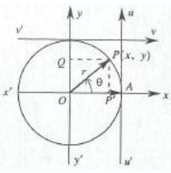
2.1. Sinus, cosinus, tangente et cotangente

Nous avons étudié les rapports trigonométriques des angles dont les mesures sont comprises entre 0° et 180° en classe 10e. Maintenant, nous déterminons sin, cos, tan et cot des angles généraux.

Dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon r, soit P un point du cercle ayant pour coordonnées $P(x;y)$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OP})=\theta$. Soient P' le projeté orthogonal de P sur l'axe $\overrightarrow{x'x}$ et Q celui de P sur l'axe $\overrightarrow{y'y}$. On obtient :

$\sin\theta=\frac{OQ}{OP}=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{OP'}{OP}=\frac{x}{r}$, [11]

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{x}{y}$.



En général : on obtient sinus, cosinus, tangente et cotangente qui sont les fonctions trigonométriques.

Remarque : l'axe $\overrightarrow{y'y}$ est appelé axe des sinus ; l'axe $\overrightarrow{x'x}$, axe des cosinus ; l'axe $\overrightarrow{u'u}$, axe des tangentes et l'axe $\overrightarrow{v'v}$, axe des cotangentes.

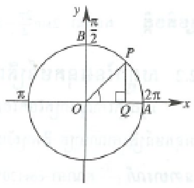
Exemple : Calculer les valeurs des fonctions trigonométriques des angles $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$.

B est le point d'intersection entre le cercle et l'axe $\overrightarrow{y'y}$ par le sens direct. Donc B est le point correspondant à la valeur $\frac{\pi}{2}$. D'après cette figure, on a : $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$, $\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ n'est pas défini car $\cos\frac{\pi}{2}=0$.

Dans le triangle rectangle OPQ, on a : $\widehat{AOP}=\frac{\pi}{6}$ et $=\frac{1}{2}$.

Donc $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

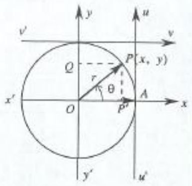


2. អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

2.1 ស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់

យើងបានសិក្សារួចមកហើយពីផលធៀបត្រីកោណមាត្រ មុំចន្លោះ 0° និង 180° ក្នុងថ្នាក់ទី 10 ។ ពេលនេះ យើងកំណត់ sin, cos, tan និង cot នៃមុំទូទៅ ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រដែលមានផ្ចិត O និងកាំ r ។ P ជាចំណុចមួយនៅលើរង្វង់ដែលមានកូអរដោនេ $P(x, y)$ ហើយ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})=\theta$ ។ P' ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ និង Q ជាចំណោលកែងនៃ P លើអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ។ គេបាន $\sin\theta=\frac{OQ}{OP}=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{OP'}{OP}=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{y}{x}$, $\cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{x}{y}$ ។



ជាទូទៅ គេបានស៊ីនុស កូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ ជាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

សំគាល់ អ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ ហៅថាអ័ក្សស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{x'x}$ អ័ក្សកូស៊ីនុស ហើយអ័ក្ស $\overrightarrow{u'u}$ ជាអ័ក្សតង់សង់ និងអ័ក្ស $\overrightarrow{v'v}$ ជាអ័ក្សកូតង់សង់ ។

ឧទាហរណ៍ គណនាតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6}$ ។

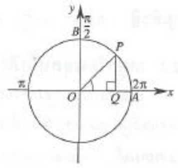
B ជាចំណុចប្រសព្វរវាងរង្វង់និងអ័ក្ស $\overrightarrow{y'y}$ តាមទិសដៅវិជ្ជមាន ។

ដូចនេះ B ជាចំណុចដែលត្រូវនឹងតម្លៃ $\frac{\pi}{2}$ ។ តាមរូបភាពនេះគេបាន $\sin\frac{\pi}{2}=1$, $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ។

$\cot\frac{\pi}{2}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$, $\tan\frac{\pi}{2}=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}}$ មិនអាចកំណត់បានព្រោះ $\cos\frac{\pi}{2}=0$ ។

ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ គេបាន $A\hat{O}P=\frac{\pi}{6}$ ហើយ $PQ=\frac{1}{2}$ ។

ដូចនេះ $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ។



71

$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

En général : on obtient le tableau des valeurs des fonctions trigonométriques de certains angles comme ce qui suit :

fonctions \ angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Exo résolu : Calculer a. $2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$

b. $\frac{5-4\tan^2 45^\circ+\cot^2 60^\circ}{2\cos^2 60^\circ-2\sin^3 90^\circ+4\tan 45^\circ}$

Réponse : a. $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\sqrt{3}+4\times1=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4=4$.

b. $\frac{5-4\times1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1^3+4\times1}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{4}-2+4}=\frac{8}{15}$.

Application : Calculer $2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos^4\frac{\pi}{2}+3\cot^2\frac{\pi}{4}$.

2.2. Signe des fonctions trigonométriques

Le cercle trigonométrique est divisé en quatre quadrants : *I*, *II*, *III* et *IV*. Le signe[12] des fonctions trigonométriques dépend des mesures d'un angle situé dans chaque quadrant.

Exemple : Calculer $\cos 120^\circ$, $\sin(-60^\circ)$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{6}$.

$\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$ ។

ជាទូទៅ គេបានតារាងតម្លៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំខ្លះដូចខាងក្រោម :

អនុ \ មុំ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\|$
cot	$\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

លំហាត់គំរូ គណនា ក. $2\sin\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{6}-3\tan\frac{\pi}{3}+4\cot\frac{\pi}{4}$

ខ. $\frac{5-4\tan^2 45^\circ+\cot^2 60^\circ}{2\cos^2 60^\circ-2\sin^3 90^\circ+4\tan 45^\circ}$

ចម្លើយ ក. $2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3\times\sqrt{3}+4\times1=\sqrt{3}+2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4=4$ ។

ខ $\frac{5-4\times1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\times1^3+4\times1}=\frac{1+\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{4}-2+4}=\frac{8}{15}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនា $2\sin\frac{2\pi}{4}-3\tan^2\frac{\pi}{6}+2\cos^4\frac{\pi}{2}+3\cot^2\frac{\pi}{4}$

2.2 សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

រង្វង់ត្រីកោណមាត្រចែកចេញជាបួនកាដ្រង់គឺ កាដ្រង់ទី *I*, *II*, *III* និង *IV* ។ សញ្ញានៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គឺអាស្រ័យលើរង្វាស់មុំដែលឋិតនៅក្នុងកាដ្រង់នីមួយៗ ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\cos 120^\circ$, $\sin(-60^\circ)$, $\cos\frac{3\pi}{4}$, $\sin\frac{7\pi}{4}$, $\tan\frac{5\pi}{6}$ ។

72

(figures)

On obtient un tableau abrégé ci-dessous :

quadrant / fonctions	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

Exo résolu : Où un angle x se situe-il lorsque les inéquations suivantes sont vérifiées : $\begin{cases}\sin x < 0\\ \cos x < 0\end{cases}$.

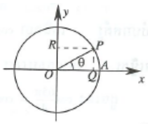
Réponse : On a $\sin x < 0$ et $\cos x < 0$ donc x se situe dans le quadrant *III*.

Application 1 : Dans quel quadrant peut-on trouver un angle qui vérifie les inéquations $\begin{cases}\cos x > 0\\ \tan x > 0\end{cases}$.

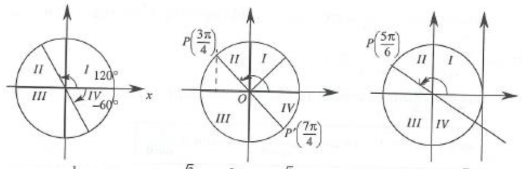
Application 2 : Dans quel quadrant $\tan x$ et $\cot x$ sont-elles de même signe ?

3. Propriétés des fonctions trigonométriques

3.1. Relations importantes



Dans le cercle trigonométrique, soit θ une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$. On a[13] $\cos\theta = OQ$, $\sin\theta = OR$.
Dans le triangle rectangle OPQ, d'après le théorème de Pythagore, on a : $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$
$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ ou $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (1)



$\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\tan\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

គេបានតារាងសង្ខេបដូចខាងក្រោម :

កាដ្រង់ / អនុ	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

លំហាត់គំរូ តើមុំ x នៅក្នុងកាដ្រង់ណាដែលផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\sin x < 0\\ \cos x < 0\end{cases}$ ។

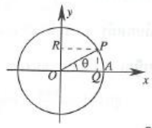
ចម្លើយ គេបាន $\sin x < 0$ និង $\cos x < 0 \Rightarrow x$ នៅកាដ្រង់ទី III ។ ដូចនេះ x នៅក្រាដ្រង់ទី III ។

ប្រតិបត្តិ 1 តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែលគេអាចរកមុំផ្ទៀងផ្ទាត់វិសមីការ $\begin{cases}\cos x > 0\\ \tan x > 0\end{cases}$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 តើក្នុងកាដ្រង់ណាដែល $\tan x$ និង $\cot x$ មានសញ្ញាដូចគ្នា ។

3. លក្ខណៈនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ

3.1 ទំនាក់ទំនងសំខាន់ៗ



នៅលើរង្វង់ត្រីកោណមាត្រ θ ជារង្វាស់មុំ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP})$
គេបាន $\cos\theta = OQ$, $\sin\theta = OR$ ។ ក្នុងត្រីកោណកែង OPQ
តាមទ្រឹស្តីបទពីតាករ គេបាន $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$
$1 = \sin^2\theta + \cos^2\theta$ ឬ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (1)

73

On sait que $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Pour $\cos\theta \neq 0$, on divise les deux termes de la relation (1) par $\cos^2\theta$.

On obtient : $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ou $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

De même, si on divise la relation (1) par $\sin^2\theta \neq 0$, on obtient :
$1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$.

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \;;\; 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \;;\; 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}}$$

Exemple : Calculer $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ sachant que $\sin\theta = \frac{8}{15}$ et que l'angle θ est situé dans le quadrant *I*.
On a $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Comme θ est situé dans le quadrant *I*, d'où $\cos\theta$ est positif. On obtient :

$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$,

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{15}$ et $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{15}{8}$.

Exo résolu : Calculer $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ connaissant $\tan\alpha = \frac{4}{15}$.

Réponse On a $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(5\tan\alpha + 7)}{\cos\alpha(6 - 3\tan\alpha)} = \frac{5\tan\alpha + 7}{6 - 3\tan\alpha} = \cdots = \frac{125}{78}$.

Application 1 : Calculer $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ connaissant[14] $\sin\alpha = -\frac{12}{3}$ et $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Application 2 : Calculer $\frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ connaissant $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ et $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.2. Fonctions trigonométriques des angles[16] θ et $\theta + 2k\pi$

Comme les angles θ et $\theta + 2k\pi$; $k \in Z$ sont des angles déterminés par les mêmes[15] vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ alors on obtient les formules :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \,,\; \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta\\ \tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \,,\; \cot(\theta + 2k\pi) = \cot\theta \;;\; k \in Z\end{array}}$$

Remarque : $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$, $\cot(\theta + k\pi) = \cot\theta$; $k \in Z$.

Exemple : $\sin\frac{9}{2}\pi = \cdots = 1$, $\cos\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \cdots = \frac{1}{2}$.

Exo résolu : On sait que $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Calculer $\cos\frac{65\pi}{4}$ et $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right)$.

Réponse : on peut écrire $\frac{65\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 16\pi + \frac{\pi}{4}$.

Donc $\cos\frac{65\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + (8 \times 2\pi)\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

គេដឹងថា $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ចំពោះ $\cos\theta \neq 0$ គេចែកអង្គទាំងពីរនៃទំនាក់ទំនង (1) និង $\cos^2\theta$

គេបាន $\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ឬ $\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$ ។

ដូចគ្នាដែរ បើគេចែកទំនាក់ទំនង (1) និង $\sin^2\theta \neq 0$ គេបាន $1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}$ ។

$$\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \;;\; 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \;;\; 1 + \cot^2\theta = \frac{1}{\sin^2\theta}}$$

ឧទាហរណ៍ គណនា $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$ ដោយស្គាល់ $\sin\theta = \frac{8}{17}$ និងមុំ θ នៅកាដ្រង់ទី I ។

គេមាន $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ ។ ដោយ θ នៅកាដ្រង់ទី I នោះ $\cos\theta$ វិជ្ជមាន ។ គេបាន
$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{289}} = \frac{15}{17}$ $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{8}{15}$ ហើយ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{15}{8}$

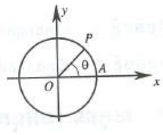
លំហាត់គំរូ គណនា $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ដោយដឹងថា $\tan\alpha = \frac{4}{15}$ ។

ចម្លើយ
គេបាន $\frac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{6\cos\alpha - 3\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha(5\tan\alpha + 7)}{\cos\alpha(6 - 3\tan\alpha)} = \frac{5\tan\alpha + 7}{6 - 3\tan\alpha} = \frac{5 \times \frac{4}{15} + 7}{6 - 3 \times \frac{4}{15}} = \frac{\frac{4}{3} + 7}{6 - \frac{4}{5}} = \frac{125}{78}$ ។

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$ ដោយគេស្គាល់ $\sin\alpha = -\frac{12}{3}$ និង $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

ប្រតិបត្តិ 2 គណនា $\frac{\cot\alpha + \tan\alpha}{\cot\alpha - \tan\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ និង $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.2 អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រនៃមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$



ដោយមុំ θ និង $\theta + 2k\pi$; $k \in Z$ ជាមុំកំណត់ដោយវ៉ិចទ័រ
$\overrightarrow{OA}$ និង $\overrightarrow{OP}$ ដូចគ្នានោះ គេបានរូបមន្ត :

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta \;,\; \cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta\\ \tan(\theta + 2k\pi) = \tan\theta \;,\; \cot(\theta + 2k\pi) = \cot\theta \;;\; k \in Z\end{array}}$$

សំគាល់ $\tan(\theta + k\pi) = \tan\theta$, $\cot(\theta + k\pi) = \cot\theta$, $k \in Z$

ឧទាហរណ៍ $\sin\frac{9}{2}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\left(-\frac{17}{3}\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 6\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ គេដឹងថា $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។ គណនា $\cos\frac{65\pi}{4}$ និង $\sin\left(-\frac{39}{4}\right)$ ។

ចម្លើយ គេអាចសរសេរ $\frac{65\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 16\pi + \frac{\pi}{4}$
ដូចនេះ $\cos\frac{65\pi}{4} = \cos\left[\frac{\pi}{4} + (8 \times 2\pi)\right] = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

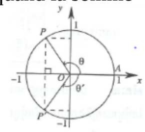
74

On sait que $-\frac{39\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{40\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 10\pi$.
On obtient : $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{4} - (5 \times 2\pi)\right] = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Application : Calculer les valeurs de $\sin 6\pi$, $\sin\frac{11\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$.

3.3. Angles associés

a. **Angles opposés** θ et $-\theta$: deux angles sont opposés quand la somme de leurs mesures est égale à 0 modulo[17] 2π.



Dans le cercle trigonométrique, soient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \theta'$ tels que $\theta + \theta' = 0$ modulo 2π, alors $\theta' = -\theta$ modulo 2π. On obtient les coordonnées des points P et P' : $P(\cos\theta, \sin\theta)$ et $P'(\cos(-\theta), \sin(-\theta))$.
Comme P et P' sont symétriques par rapports à l'axe des abscisses, on a $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$. Donc $\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos\theta} = -\tan\theta$ et $\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$.

On obtient les formules : $\boxed{\begin{array}{l}\sin(-\theta) = -\sin\theta, \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta, \cot(-\theta) = -\cot\theta\end{array}}$

Remarque : Deux angles opposés ont même cosinus et des sinus, tangente et cotangente opposés.

Exemple : $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, …

b. **Angles complémentaires** $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et θ : deux angles sont complémentaires quand la somme de leurs mesures est égale à $\frac{\pi}{2}$ modulo 2π.

Dans le cercle trigonométrique, soient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \frac{\pi}{2} - \theta$. On obtient les coordonnées du point P : $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Si on pose P' le symétrique du point P par rapport à la droite $y = x$ alors les coordonnées du point P' sont $(\sin\theta, \cos\theta)$ (1).
D'après la figure située à droite, OP' est un côté de l'angle $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.
Donc les coordonnées du point P' sont $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right)$ (2).
D'après (1) et (2), on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$.

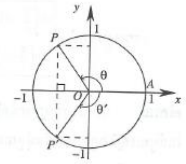
គេដឹងថា $-\frac{39\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \frac{40\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 10\pi$ ។

គេបាន $\sin\left(-\frac{39\pi}{4}\right) = \sin\left[\frac{\pi}{4} - (5 \times 2\pi)\right] = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ។

ប្រតិបត្តិ គណនាតម្លៃរបស់ $\sin 6\pi$, $\sin\frac{11\pi}{3}$, $\cos\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$, $\tan\left(-\frac{27\pi}{4}\right)$ ។

3.3 មុំផ្ទឹម

ក. មុំផ្ទុយគ្នា θ និង $-\theta$: មុំពីរផ្ទុយគ្នាកាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹងសូន្យតាម 2π ។



ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \theta'$ ហើយ $\theta + \theta' = 0$ តាម 2π នាំឲ្យ $\theta' = -\theta$ តាម 2π ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P និង P' គឺ $P(\cos\theta, \sin\theta)$ និង $P'(\cos(-\theta)\sin(-\theta))$ ។
ដោយ P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សអាប់ស៊ីស គេបាន
$\sin(-\theta) = -\sin\theta$, $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ដូចនេះ
$\tan(-\theta) = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{\cos(-\theta)} = -\tan\theta$ និង
$\cot(-\theta) = \frac{\cos(-\theta)}{\sin(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\begin{array}{l}\sin(-\theta) = -\sin\theta \ , \ \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \tan(-\theta) = -\tan\theta \ , \ \cot(-\theta) = -\cot\theta\end{array}}$

សំគាល់ មុំពីរផ្ទុយគ្នាមានកូស៊ីនុសដូចគ្នា ហើយមានស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា ។

ឧទាហរណ៍ $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,
$\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

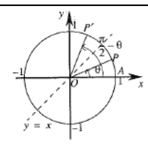
ខ. មុំបំពេញ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ និង θ : មុំពីរបំពេញគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង$\frac{\pi}{2}$ តាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណគេមាន $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \frac{\pi}{2} - \theta$ ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(\cos\theta, \sin\theta)$ ។ បើគេយកចំណុច P' ឆ្លុះគ្នានឹងចំណុច P ធៀបនឹងបន្ទាត់ $y = x$ នោះគេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច P' គឺ $(\sin\theta, \cos\theta)$ (1) ។
តាមរូបខាងស្តាំ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ ។
ដូចនេះកូអរដោនេនៃ P' គឺ $\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$ (2) ។
តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$ និង $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

75

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta},$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$



Remarque : Deux angles complémentaires ont pour extrémités qui sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

On obtient les formules : $\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta, \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta\end{array}}$

Remarque : Deux angles complémentaires ont pour propriétés : sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre et tangente de l'un est égale à la cotangente de l'autre.

Exemple : Calculer $\sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

c. **Angles supplémentaires** $(\pi - \theta)$ et θ : deux angles sont supplémentaires quand la somme de leurs mesures est égale à π modulo 2π.

Dans le cercle trigonométrique, soient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \pi - \theta$. On obtient les coordonnées du point P : $(\cos\theta, \sin\theta)$ et celles du point P' : $(-\cos\theta, \sin\theta)$ (1).
D'après la figure située à droite, OP' est un côté de l'angle $(\pi - \theta)$.
Donc les coordonnées de P' : $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta))$ (2).
D'après (1) et (2), on a $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$.

$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

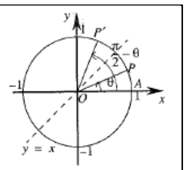
$$\cot(\pi - \theta) = \frac{\cos(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$$

Remarque : Deux angles supplémentaires ont pour extrémités qui sont symétriques par rapports à l'axe des sinus.

On obtient les formules : $\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta, \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta\end{array}}$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} ,$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$



សំគាល់ មុំពីរបំពេញគ្នា មានចុងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងបន្ទាត់ពុះទីមួយ ។

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \ , \ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \ , \ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta\end{array}}$

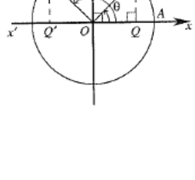
សំគាល់ មុំពីរបំពេញគ្នា មានស៊ីនុសនៃមុំមួយស្មើនឹងកូស៊ីនុសនៃមុំមួយទៀត ហើយតង់សង់នៃមុំមួយស្មើនឹងកូតង់សង់នៃមុំមួយទៀត ។

ឧទាហរណ៍ គណនា $\sin 60^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\frac{\pi}{3} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cot\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ ។

គ. មុំបន្ថែម $(\pi - \theta)$ និង θ : មុំពីរបន្ថែមគ្នា កាលណាផលបូករង្វាស់វាស្មើនឹង π តាម 2π ។

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \pi - \theta$ ។ គេបានកូអរដោនេនៃចំណុច P គឺ $(\cos\theta, \sin\theta)$ និង កូអរដោនេនៃចំណុច $P'(-\cos\theta, \sin\theta)$ (1) ។

តាមរូបខាងស្តាំ OP' ជាជ្រុងមួយនៃមុំ $(\pi - \theta)$
ដូចនេះ កូអរដោនេនៃ P' គឺ $(\cos(\pi - \theta), \sin(\pi - \theta))$ (2) ។
តាម (1) និង (2) គេបាន $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$,
$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$



$$\tan(\pi - \theta) = \frac{\sin(\pi - \theta)}{\cos(\pi - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$$

$$\cot(\pi - \theta) = \frac{\cos(\pi - \theta)}{\sin(\pi - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$$

មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានចុងឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងអ័ក្សស៊ីនុស ។

គេបានរូបមន្ត

$\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \ , \ \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta \ , \ \cot(\pi - \theta) = -\cot\theta\end{array}}$

76

Remarque : Deux angles supplémentaires ont même sinus et des cosinus, tangente et cotangente opposés.

Exemple : $\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Exo résolu : Calculer les valeurs numériques des expressions :

$$A = \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$$

$$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

Réponse : $A = \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta - \cos\theta = 0$.

$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Application 1 : Connaissant $\sin 47^\circ = 0{,}6820$, calculer $\cos 43^\circ$.

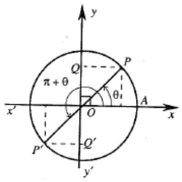
Application 2 : Trouver les valeurs des expressions :

$$A = \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

$$B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x),\ C = \tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}.$$

d. **Angles de différence π**

Dans le cercle trigonométrique, soient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \pi + \theta$, on obtient les coordonnées du point P : $(\cos\theta, \sin\theta)$ et celles du point P' : $(\cos(\pi + \theta), \sin(\pi + \theta))$.



Les points P et P' sont symétriques par rapport à l'origine du repère O, d'où OP et OP' ont pour projetés orthogonaux opposés sur l'axe des sinus et l'axe des cosinus.

On obtient : $\sin(\pi + \theta) = \sin(\pi - (-\theta)) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$,

$\cos(\pi + \theta) = \cos(\pi - (-\theta)) = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$,

$\tan(\pi + \theta) = \frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$,

$\cot(\pi + \theta) = \frac{\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$.

សំគាល់ មុំពីរបន្ថែមគ្នា មានស៊ីនុសដូចគ្នាហើយមានកូស៊ីនុស តង់សង់ និងកូតង់សង់ផ្ទុយគ្នា។

ឧទាហរណ៍

$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\cos\left(-\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{20\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + 6\pi\right) = \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ ។

លំហាត់គំរូ គណនាតម្លៃលេខនៃកន្សោម :

$A = \cos(-\theta) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos(\pi - \theta) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)$

$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ ។

ចម្លើយ $A = \cos\theta + \cos\theta - \cos\theta - \cos\theta = 0$ ។

$B = \sin\frac{5\pi}{6} + \cos\frac{3\pi}{4} + \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{6}$

$= \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ប្រតិបត្តិ 1 ដោយស្គាល់ $\sin 47^\circ = 0.6820$ គណនា $\cos 43^\circ$

ប្រតិបត្តិ 2 រកតម្លៃលេខនៃកន្សោម $A = \sin(-x) + \sin(\pi - x) + \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

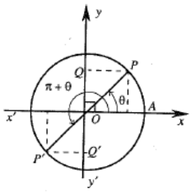
$B = \sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(3\pi - x)$, $C = \tan\frac{5\pi}{6} + \cot\frac{7\pi}{4} + \frac{1}{\tan\frac{\pi}{3}}$ ។

ឃ. មុំដែលមានផលសងស្មើ π

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ និង $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \pi + \theta$ គេបាន កូអរដោនេនៃចំណុច $P(\cos\theta, \sin\theta)$ និងកូអរដោនេនៃចំណុច $P'\cos(\pi + \theta), \sin(\pi + \theta)$ ។

ចំណុច P និង P' ឆ្លុះគ្នាធៀបនឹងគល់ O

គេបាន OP និង OP' មានចំណោលកែងផ្ទុយគ្នា លើអ័ក្សស៊ីនុស និងអ័ក្សកូស៊ីនុស។



គេបាន $\sin(\pi + \theta) = \sin[\pi - (-\theta)] = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$\cos(\pi + \theta) = \cos[\pi - (-\theta)] = -\cos(-\theta) = -\cos\theta$

$\tan(\pi + \theta) = \frac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi+\theta)} = \frac{-\sin\theta}{-\cos\theta} = \tan\theta$

$\cot(\pi + \theta) = \frac{\cos(\pi+\theta)}{\sin(\pi+\theta)} = \frac{-\cos\theta}{-\sin\theta} = \cot\theta$ ។

77

On a les formules : $\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta, \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta, \cot(\pi + \theta) = \cot\theta\end{array}}$

Exemple : $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$.

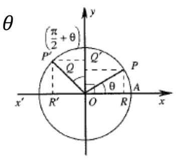
$\tan\frac{7\pi}{2} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$A = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y) = -2\cos(2x) - \sin y + 2\cos 2x + \sin y = 0$.

e. **Angles de différence $\frac{\pi}{2}$**

Dans le cercle trigonométrique, soient $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}) = \theta$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP'}) = \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} - (-\theta)$.

L'arc AP' est l'arc complémentaire d'un arc ayant pour mesure $(-\theta)$ modulo 2π.[18]



Donc $\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\theta) = \cos\theta \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot(-\theta) = -\cot\theta \\ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(-\theta) = -\tan\theta\end{array}}$

Exemple : …

Exo résolu : Calculer $\frac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$.

Réponse : …

Application 1 : Calculer $\sin 870^\circ$, $\cos(-135^\circ)$, $\tan 765^\circ$, $\cot\frac{25}{4}\pi$.

Application 2 : Calculer $\frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cot 406^\circ}{\cot 316^\circ} - \cot 72^\circ \cot 18^\circ$.

គេបានរូបមន្ត $\boxed{\begin{array}{l}\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta , \cos(\pi + \theta) = -\cos\theta \\ \tan(\pi + \theta) = \tan\theta , \cot(\pi + \theta) = \cot\theta\end{array}}$

ឧទាហរណ៍ $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ ។

$\tan\frac{7\pi}{2} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

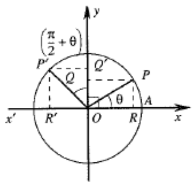
$A = 2\cos(\pi - 2x) + \sin(\pi + y) - 2\cos(\pi - 2x) - \sin(\pi + y)$

$= -2\cos 2x - \sin y + 2\cos 2x + \sin y = 0$ ។

ង. មុំដែលមានផលសងស្មើ $\frac{\pi}{2}$

ក្នុងរង្វង់ត្រីកោណមាត្រគេមាន $(\vec{OA}, \vec{OP}) = \theta$ និង $(\vec{OA}, \vec{OP}) = \frac{\pi}{2} + \theta = \frac{\pi}{2} - (-\theta)$ ។

ធ្នូ AP' ជាធ្នូបំពេញនៃធ្នូដែលមានរង្វាស់ $(-\theta)$ តាម 2π ។



ដូចនេះ $\boxed{\begin{array}{l}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\theta) = \cos\theta , \\ \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(-\theta) = -\sin\theta \\ \tan\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cot(-\theta) = -\cot\theta , \\ \cot\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(-\theta) = -\tan\theta\end{array}}$

ឧទាហរណ៍ $\sin 120^\circ = \sin(30^\circ + 90^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan\frac{5\pi}{6} = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ។

$\frac{\cot\frac{3}{4}\pi}{\sin\frac{3}{2}\pi} = \frac{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)} = \frac{-\tan\frac{\pi}{4}}{\cos\pi} = \frac{-1}{-1} = 1$ ។

លំហាត់គំរូ គណនា $\frac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ$ ។

ចម្លើយ $\frac{\cos(-288^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-162^\circ)\sin 108^\circ} - \tan 18^\circ = \frac{\cos(-360^\circ + 72^\circ)\cot 72^\circ}{\tan(-180^\circ + 18^\circ)\sin(90^\circ + 18^\circ)} - \tan 18^\circ$

$= \frac{\cos 72^\circ \tan 18^\circ}{\tan 18^\circ \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ = \frac{\cos(90^\circ - 18^\circ)\tan 18^\circ}{\tan 18^\circ \cos 18^\circ} - \tan 18^\circ$

$= \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} - \tan 18^\circ = \tan 18^\circ - \tan 18^\circ = 0$

ប្រតិបត្តិ 1 គណនា $\sin 870^\circ$, $\cos(-135^\circ)$, $\tan 765^\circ$, $\cot\frac{25}{4}\pi$ ។

ប្រតិបត្តិ 2 គណនា $\frac{(\cot 44^\circ + \tan 226^\circ)\cos 406^\circ}{\cos 316^\circ} - \cot 72^\circ \cot 18^\circ$ ។

78

4. Etude des fonctions trigonométriques

Pour étudier les fonctions trigonométriques, on doit procéder comme suit :

a. Ensemble de définition : La fonction sinus et la fonction cosinus sont définies sur ℝ. La fonction tangente[19] peut être définie si et seulement si $\cos x \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$. Donc l'ensemble de définition de la fonction tangente est $\mathbb{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}, k \in Z$.

La fonction cotangente[19] peut être définie si et seulement si $\sin x \neq 0$, $x \neq k\pi, k \in Z$.

Donc l'ensemble de définition de la fonction cotangente est $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, $k \in Z$.

Exemple : La fonction $y = \sin 2x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$.

La fonction $y = \frac{4}{\cos x}$ est définie lorsque $\cos x \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$.

La fonction $y = \tan(x-1)$ est définie lorsque $x - 1 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq 1 + (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$.

b. Périodicité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D. f est une fonction périodique de période p si et seulement si p est le plus petit nombre positif tel que $\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$. A partir de cette définition, on peut en déduire :

$$f(x) = f(x+p) = f[(x+p)+p] = f(x+2p) = \cdots$$
$$f(x) = f[(x-p)+p] = f(x-p) = f(x-2p) = \cdots$$

En général : $\forall k \in Z, \forall x \in D, f(x+kp) = f(x)$.

Les fonctions sinus et cosinus ont pour période 2π car 2π est le plus petit nombre positif tel que[20] $\sin(x+2\pi) = \sin x$ et $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

Remarque : Les fonctions $y = \sin 2x$ et $y = \cos 2x$ ont pour période π car[21] $\sin[2(x+\pi)] = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x$ et $\cos[2(x+\pi)] = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x$.

En général : Les fonctions $y = \sin ax$ et $y = \cos ax$ ont pour période $p = \frac{2\pi}{|a|}$.

4. **សិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ**

ដើម្បីសិក្សាអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ គេត្រូវរក :

ក. ដែនកំណត់ អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងអនុគមន៍កូស៊ីនុសកំណត់លើ R ។ អនុគមន៍តង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\cos x \neq 0$, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ ។ ដូចនេះដែនកំណត់នៃអនុគមន៍តង់សង់គឺ $R - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$; $k \in Z$ ។

អនុគមន៍កូតង់សង់អាចកំណត់បាន លុះត្រាតែ $\sin x \neq 0$, $x \neq k\pi$, $k \in Z$ ។

ដូចនេះ ដែនកំណត់នៃអនុគម៍កូតង់សង់គឺ $R - \{k\pi\}$, $k \in Z$ ។

ឧទាហរណ៍ អនុគមន៍ $y = \sin 2x$ មានដែនកំណត់ $D = R$ ។

$y = \frac{4}{\cos x}$ កំណត់បានកាលណា $\cos x \neq 0$ $(2k+1)\frac{\pi}{2}$

អនុគមន៍ $y = \tan(x-1)$ កំណត់បានកាលណា $x - 1 \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $x \neq 1 + (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in Z$ ។

ខ. ខួបនៃអនុគមន៍

និយមន័យ f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍មានខួប p លុះត្រាតែ p ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុត ដែល $\forall x \in D : f(x+p) = f(x)$ ។ ពីនិយមន័យនេះ គេអាចសរសេរទាញបាន $f(x) = f(x+p) = f[(x+p)+p] = f(x+2p) = \ldots\ldots$
$f(x) = f[(x-p)+p] = f(x-p) = f(x-2p) = \ldots\ldots$

ជាទូទៅ $\forall k \in Z$, $\forall x \in D$, $f(x+kp) = f(x)$ ។

អនុគមន៍ស៊ីនុសនិងកូស៊ីនុសមានខួប 2π ព្រោះ 2π ជាចំនួនវិជ្ជមានតូចបំផុតដែល $\sin^2[(x+\pi)] = \sin x$ និង $\cos(x+2\pi) = \cos x$

សំគាល់ អនុគមន៍ $y = \sin 2x$ និង $y = \cos 2x$ មានខួប π ព្រោះ

$\sin[2(x+\pi)] = \sin(2x+2\pi) = \sin 2x$ និង $\cos^2[(x+\pi)] = \cos(2x+2\pi) = \cos 2x$

ជាទូទៅ អនុគមន៍ $y = \sin ax$ និង $y = \cos ax$ មានខួប $p = \frac{2\pi}{|a|}$ ។

79

La fonction tangente et la fonction cotangente ont pour période π car $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in Z, \tan(x+\pi) = \tan x$ implique $\tan(x+k\pi) = \tan x$ et $\cot(x+\pi) = \cot x$ implique $\cot(x+k\pi) = \cot x$. En général, les fonctions $y = \tan ax$ et $y = \cot ax$ ont pour période $= \frac{\pi}{|a|}$.

Exemple : $y = \sin\frac{1}{2}x$ a pour période[22] $T = 8\pi$, $y = \cos(-3x)$ a pour période $= \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$, $y = 3\tan\frac{1}{2}x$ a pour période $T = 2\pi$, $y = \cot 5x$ a pour période $T = \frac{\pi}{5}$.

c. Parité

Définition :
- Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D. f est une fonction paire si et seulement si pour tout $x \in D, -x \in D$, $f(-x) = f(x)$.
- Soit f une fonction ayant pour ensemble de définition D. f est une fonction impaire si et seulement si pour tout $x \in D, -x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

Exemple : $y = x - \sin x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$. Pour tout $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = -x - \sin(-x) = -(x - \sin x) = -f(x)$. Donc $y = x - \sin x$ est une fonction impaire.

$y = \tan x \cot^3 x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}, k \in Z$. Pour tout $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = \tan(-x)\cot^3(-x) = \tan x \cot^3 x = f(x)$. Donc $y = \tan x \cot^3 x$ est une fonction paire.

Propriétés :
- La représentation graphique d'une fonction impaire a l'origine du repère comme centre de symétrie.
- La représentation graphique d'une fonction paire a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

4.1. Variations et représentation graphique de la fonction $y = \sin x$

Ensemble de définition : $y = \sin x$ est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Périodicité[23] : $y = \sin x$ est une fonction périodique de période $p = 2\pi$ car $\sin(x+2\pi) = \sin x$. Nous étudions la fonction $y = \sin x$ sur l'intervalle $[-\pi ; \pi]$ et traçons sa courbe représentative sur cet intervalle. Sa courbe représentative sur l'intervalle $[(2k-1)\pi ; (2k+1)\pi]$; $k \in \mathbb{Z}$, est obtenue par translations de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ de la branche de la courbe représentative sur $[-\pi ; \pi]$.

អនុគមន៍តង់សង់និងអនុគមន៍កូតង់សង់មានខួប π ព្រោះ $\forall x \in R$, $\forall x \in Z$, $\tan(x+\pi) = \tan x$ នាំឲ្យ $\tan(x+k\pi) = \tan x$ និង $\cot(x+\pi) = \cot x$ នាំឱ្យ $\cot(x+k\pi) = \cot x$ ។ ជាទូទៅអនុគមន៍ $y = \tan ax$ និង $y = \cot ax$ មានខួប $T = \frac{\pi}{|a|}$ ។

ឧទាហរណ៍ $y = \sin\frac{1}{2}x$ មានខួប $T = 8\pi$, $y = \cos(-3x)$ មានខួប $T = \frac{2\pi}{|-3|} = \frac{2\pi}{3}$

អនុគមន៍ $y = 3\tan\frac{1}{2}x$ មានខួប $T = 2\pi$, $y = \cot 5x$ មានខួប $T = \frac{\pi}{5}$ ។

គ. ភាពគូនិងភាពសេស

និយមន័យ – f ជាអនុគមន៍ដែលកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍គូ លុះត្រាតែគ្រប់ $x \in D$, $-x \in D$, $f(-x) = f(x)$

– f ជាអនុគមន៍មានដែនកំណត់ D ។ f ជាអនុគមន៍សេសលុះត្រាតែគ្រប់ $f \in D$, $-x \in D$, $f(-x) = -f(x)$

ឧទាហរណ៍ $y = x - \sin x$ មានដែនកំណត់ $D = R$ ។ គ្រប់តម្លៃ $x \in D$, $-x \in D$ ហើយ $f(-x) = -x - \sin(-x) = -(x - \sin x) = -f(x)$ ។ ដូចនេះ $y = x - \sin x$ ជាអនុគមន៍សេស ។

$y = \tan x \cot^3 x$ មានដែនកំណត់ $D = R - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$ $k \in Z$ គ្រប់តម្លៃ $x \in D$, $-x \in D$ ហើយ $f(-x) = \tan(-x)\cot^3-(x) = \tan 0\cot^3(-x) = \tan x\cot^3 x = f(x)$ ។

ដូចនេះ $y = \tan x\cot^3 x$ ជាអនុគមន៍គូ ។

លក្ខណៈ

- ក្រាបនៃអនុគមន៍សេសមានគល់តម្រុយជាផ្ចិតឆ្លុះ ។
- ក្រាបនៃអនុគមន៍គូមានអ័ក្សអរដោនេជាអ័ក្សឆ្លុះ ។

4.1 **អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍** $y = \sin x$

ដែនកំណត់ : $y = \sin x$ ជាអនុគមន៍ កំណត់ចំពោះគ្រប់ $x \in R$ ។

ខួប : ជាអនុគមន៍ខួប ដែលមានខួប $p = 2\pi$ ដោយ $\sin(x+2\pi) = \sin x$ យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \sin x$ លើ $[-\pi, \pi]$ ហើយក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \sin x$ លើចន្លោះ $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ បានដោយរំកិលវែកលើ $[-\pi, \pi]$ ចំនួន 2π តាមអ័ក្ស $(x'x)$ ។

80

Parité : sachant que $\sin(-x) = -\sin x$, donc $y = \sin x$ est une fonction impaire. La courbe représentative de $y = \sin x$ a l'origine du repère comme centre de symétrie. Donc, nous ne l'étudions que sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et la branche de sa courbe représentative sur $[-\pi\ ;\ 0]$ est obtenue à partir de celle sur $[0\ ;\ \pi]$ par symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

Sens de variations : remarquant que lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les valeurs de $\sin x$ croissent de 0 à 1. Si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π alors les valeurs de $\cos x$ décroissent de 1 à 0.

On obtient le tableau de variations ci-dessous

(tableau)

Courbe représentative de $y = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$

(figure)

Cette courbe est appelée sinusoïde.

Exemple : Etudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = 2\sin x$ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Ensemble de définition : la fonction $y = 2\sin x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$. Elle a pour période $T = 2\pi$.

Parité : $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = 2\sin(-x) = -2\sin x = -f(x)$. Donc $y = 2\sin x$ est une fonction impaire.

On obtient le tableau de variations ci-dessous

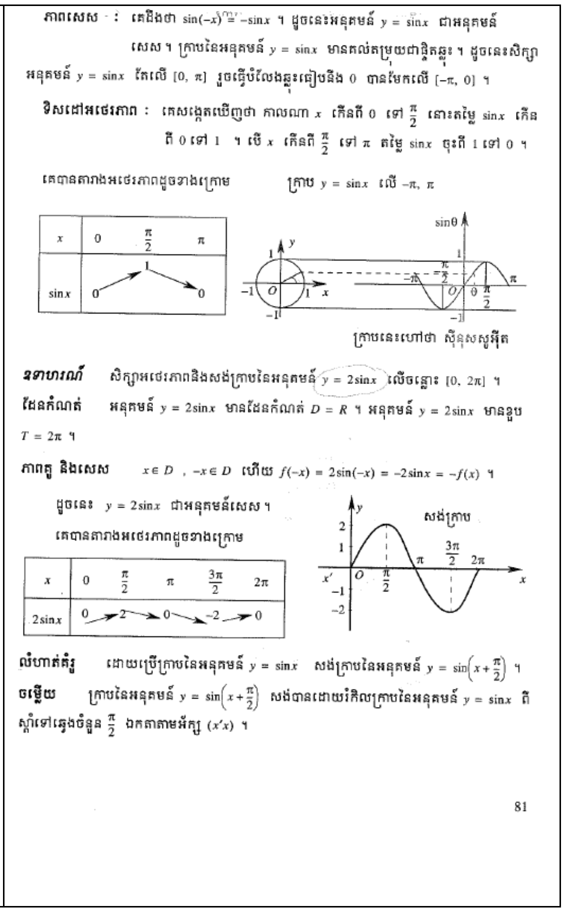
(tableau)

Construire la courbe représentative

(figure)

Exo résolu : En utilisant la courbe représentative de la fonction $y = \sin x$, construire celle de la fonction $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Réponse : La courbe représentative de la fonction $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est obtenue par translation[24] de vecteur $-\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ à partir de celle de la fonction $y = \sin x$.



(figure)

Application 1 : Etudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = \sin 2x$.
Application 2 : Utiliser la courbe représentative de la fonction $y = \sin x$, construire celle de $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

4.2. Variations et représentation graphique de la fonction $y = \cos x$

Ensemble de définition : cosinus est une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Périodicité[25] : $y = \cos x$ est une fonction périodique de période $p = 2\pi$. Nous étudions la fonction $y = \cos x$ sur l'intervalle $[-\pi\ ;\ \pi]$ et traçons sa courbe représentative sur cet intervalle. Sa courbe représentative sur l'intervalle $[(2k-1)\pi\ ;\ (2k+1)\pi]\ ; k \in \mathbb{Z}$, est obtenue par translations de vecteur $2\pi\vec{\imath}$ de la branche de la courbe représentative sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

Parité : sachant que $\cos(-x) = \cos x$, donc $y = \cos x$ est une fonction paire. La courbe représentative de $y = \cos x$ a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Donc, nous ne l'étudions que sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et la branche de sa courbe représentative sur $[-\pi\ ;\ 0]$ est obtenue à partir de celle sur $[0\ ;\ \pi]$ par symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées.

Sens de variations : remarquant que lorsque x croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les valeurs de $\cos x$ décroissent de 1 à 0. Si x croît de $\frac{\pi}{2}$ à π alors les valeurs de $\cos x$ décroissent de 0 à -1.

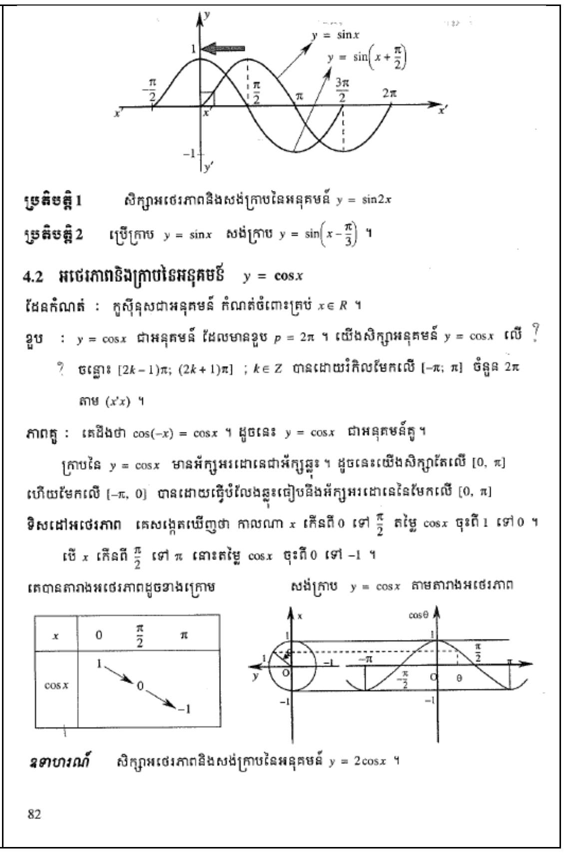
On obtient le tableau de variations ci-dessous :

(tableau)

Construire la courbe représentative de $y = \cos x$ selon le tableau de variations.

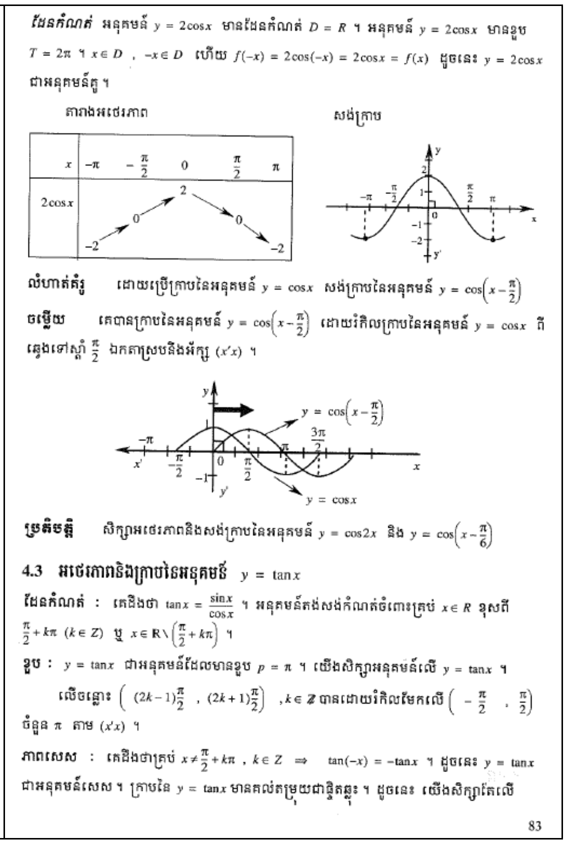
(figure)

Exemple : Etudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = 2\cos x$.



Ensemble de définition : La fonction $y = 2\cos x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R}$. Elle a pour période $T = 2\pi$. $x \in D, -x \in D$ et $f(-x) = 2\cos(-x) = 2\cos x = f(x)$, donc $y = 2\cos x$ est une fonction paire.

Tableau de variations (tableau) Construire la courbe représentative (figure)



Exo résolu : En utilisant la courbe représentative de la fonction $y = \cos x$, construire celle de la fonction $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

Réponse : La courbe représentative de la fonction $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ est obtenue par translation[26] de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{\imath}$ à partir de celle de la fonction $y = \cos x$.

(figure)

Application : Etudier les variations et construire les courbes représentatives des fonctions : $y = \cos 2x$ et $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.3. Variations et représentation graphique de la fonction $y = \tan x$

Ensemble de définition : On sait que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. La fonction tangente est définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in Z$.

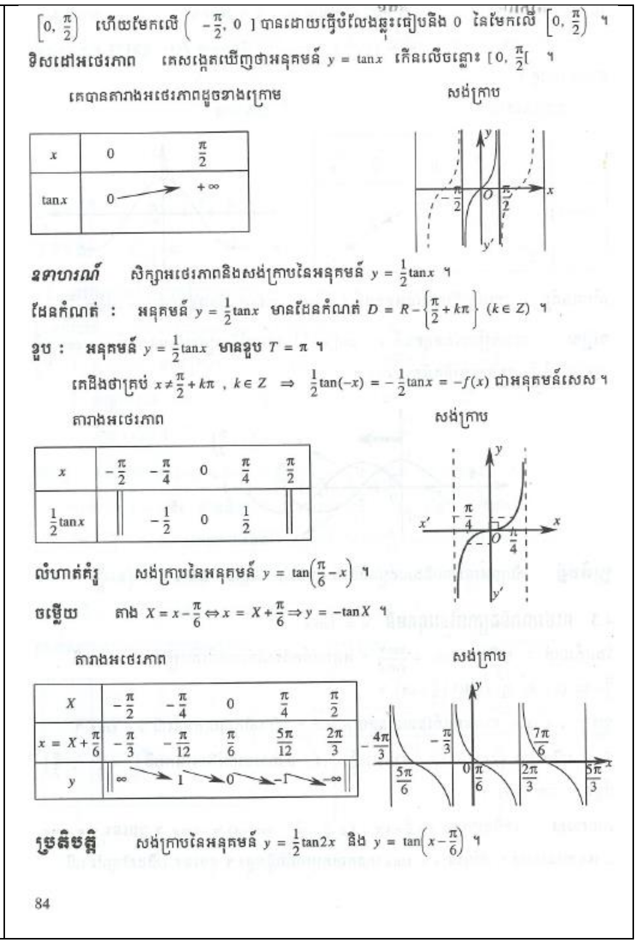
Périodicité : $y = \tan x$ est une fonction ayant pour période $p = \pi$. Nous étudions la fonction $y = \tan x$.

Sa courbe[27] représentative sur l'intervalle $\left](2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right[$, $k \in Z$ est obtenue par translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$ de la branche de la courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Parité : On sait que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, $\tan(-x) = -\tan x$. Donc $y = \tan x$ est une fonction impaire. Sa courbe représentative a l'origine du repère comme centre de symétrie. Ainsi, nous ne l'étudions que sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et la branche de la courbe sur $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ est obtenue à partir de celle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par la symétrie centrale de centre O.

Sens de variations : on observe que la fonction $y = \tan x$ croît sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous (tableau) Construire la courbe représentative (figure)



Exemple : Etudier les variations et construire la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}\tan x$.

Ensemble de définition : La fonction $y = \frac{1}{2}\tan x$ a pour ensemble de définition $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$, $(k \in Z)$.

Périodicité : La fonction $y = \frac{1}{2}\tan x$ a pour période $T = \pi$.

On sait que pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$, $f(-x) = \frac{1}{2}\tan(-x) = -\frac{1}{2}\tan x = -f(x)$, d'où $y = \frac{1}{2}\tan x$ est une fonction impaire.

Tableau de variations (tableau) Construire la courbe représentative (figure)

Exo résolu : Construire la courbe représentative de la fonction $y = \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$.

Réponse : Posons $X = x - \frac{\pi}{6}$ équivaut à $= X + \frac{\pi}{6}$, on a alors $y = -\tan X$.

Tableau de variations (tableau[28]) Construire la courbe représentative (figure)

Application : Construire les courbes représentatives des fonctions : $y = \frac{1}{2}\tan 2x$ et $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

4.4. Variations et représentation graphique de la fonction $y = \cot x$

Ensemble de définition : on sait que $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Donc, la fonction cotangente est définie et continue pour tout $x \neq k\pi \quad (k \in Z)$.

Périodicité : $y = \cot x$ est une fonction ayant pour période $p = \pi$. Nous étudions la fonction $y = \cot x$.

Sa courbe[29] représentative sur l'intervalle $]k\pi, (k+1)\pi[$, $k \in Z$ est obtenue par translations de vecteur $\pi\vec{\imath}$ de la branche de la courbe représentative sur $]0, \pi[$.

Parité : Comme $\cot(-x) = -\cot x$, d'où $y = \cot x$ est une fonction impaire. La courbe représentative de $y = \cot x$ a l'origine du repère comme centre de symétrie.

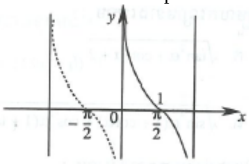
Nous étudions la fonction $y = \cot x$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sens de variations : La fonction $y = \cot x$ décroît sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On obtient le tableau de variations ci-dessous

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\Vert +\infty$ ↘	0

Construire la courbe représentative



Application 1 : Construire la courbe représentative de la fonction $y = \frac{1}{2}\cot x$.

4.4 អថេរភាពនិងក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \cot x$

ដែនកំណត់ : គេដឹងថា $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ។

ដូចនេះ អនុគមន៍កូតង់សង់កំណត់និងជាប់ចំពោះគ្រប់ $x \neq k\pi \quad (k \in Z)$

ខួប : $y = \cot x$ ជាអនុគមន៍ដែលមានខួប $p = \pi$ ។ យើងសិក្សាអនុគមន៍លើ $y = \cot x$ ។

លើចន្លោះ $(k\pi, (k+\pi)\pi)(k \in Z)$ បានដោយរំកិលមែកលើ $(0, \pi)$ ចំនួន π តាម $(x'x)$ ។

ភាពសេស : ដោយ $\cot(-x) = -\cot x$ នាំឲ្យ $y = \cot x$ ជាអនុគមន៍សេស។ ក្រាបនៃ $y = \cot x$ មានគល់ 0 ជាផ្ចិតឆ្លុះ

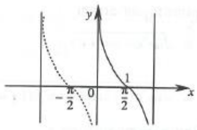
យើងសិក្សាអនុគមន៍ $y = \cot x$ លើចន្លោះ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ។

ទិសដៅអថេរភាព : អនុគមន៍ $y = \cot x$ ចុះលើចន្លោះ $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ។

គេបានតារាងអថេរភាពដូចខាងក្រោម

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$\cot x$	$\Vert +\infty$ ↘	0

សង់ក្រាប



ប្រតិបត្តិ 1 សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ $y = \frac{1}{2}\cot x$ ។

85

Exercices

1. Convertir en radians des angles : $200^\circ, -100^\circ, 225^\circ, -240^\circ, -135^\circ, 330^\circ, 570^\circ, 630^\circ$.

2. Convertir en degrés des angles : $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{7}, \frac{7\pi}{4}, \frac{-11\pi}{6}, \frac{-5\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \frac{\pi}{9}$.

3. Soient $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ et $\pi < \theta < 2\pi$. Calculer :
   a. $\sin\theta\cos\theta$, b. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$, c. $\sin^3\theta - \cos^3\theta$.

4. Trouver les valeurs des expressions suivantes :
   $A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ connaissant $\tan\alpha = 2$.
   $B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ connaissant $\tan\alpha = -2$.
   $C = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}$ connaissant $\cot\alpha = 3$.

5. Simplifier les expressions suivantes :
   a. $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2}$ b. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$
   c. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$ d. $\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha}$

6. Vérifier les égalités suivantes :
   a. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ b. $\frac{\cos x\cot x - \sin x\tan x}{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}} = 1 + \sin x\cos x$
   c. $(\tan\theta - \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$
   d. $\frac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$

7. Trouver les périodes des fonctions suivantes :
   a. $y = \sin\frac{2}{3}x$ b. $y = -\sin\frac{1}{4}x$ c. $y = 2\cos\frac{1}{4}x$
   d. $y = \tan\frac{1}{4}x$ e. $y = \cot\frac{1}{3}x$ f. $y = \sin 2x + \cos x$

8. Trouver la parité des fonctions trigonométriques suivantes :
   a. $y = x - \sin 2x$ b. $y = x^2\cos^2 x$ c. $y = \tan x\cos^2 x$

លំហាត់

1. បំប្លែងជារ៉ាដ្យង់នៃមុំ $200^\circ , -100^\circ , 225^\circ , -240^\circ , -135^\circ , 330^\circ , 570^\circ , 630^\circ$ ។

2. បំប្លែងជាដឺក្រេនៃមុំ $\frac{2\pi}{3} , \frac{5\pi}{4} , \frac{5\pi}{6} , \frac{5\pi}{7} , \frac{7\pi}{4} , \frac{-11}{6} , \frac{-5\pi}{2} , \frac{-7\pi}{2} , \frac{\pi}{9}$ ។

3. គេមាន $\sin\theta + \cos\theta = -\frac{1}{2}$ ហើយ $\pi < \theta < 2\pi$ ។
   គណនា ក. $\sin\theta\cos\theta$ ខ. $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$ គ. $\sin^3\theta - \cos^3\theta$ ។

4. រកតម្លៃកន្សោមខាងក្រោម
   $A = \frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = 2$ ។
   $B = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\tan\alpha = -2$
   $C = \frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}$ ដោយស្គាល់ $\cot\alpha = 3$ ។

5. សម្រួលកន្សោមខាងក្រោម :
   ក. $\sqrt{\tan^2\alpha + \cot^2\alpha + 2}$ ខ. $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos^2\alpha - \cot^2\alpha}$
   គ. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\cot\alpha) + \cos^2\alpha(1+\tan\alpha)}$ ឃ. $\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cot\alpha}{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha}$

6. ផ្ទៀងផ្ទាត់សមភាពខាងក្រោម :
   ក. $\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ ខ. $\frac{\cos x\cot x - \sin x\tan x}{\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}} = 1 + \sin x\cos x$
   គ. $(\tan\theta - \sin\theta)^2 + (1 - \cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)^2$ ឃ. $\frac{2\sin\theta\cos\theta - \cos\theta}{1 - \sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\tan\theta}$

7. រកខួបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :
   ក. $y = \sin\frac{2}{3}x$ ខ. $y = -\sin\frac{1}{4}x$ គ. $y = 2\cos\frac{1}{4}x$
   ឃ. $y = \tan\frac{1}{4}x$ ង. $y = \cot\frac{1}{3}x$ ច. $y = \sin 2x + \cos x$

8. រកភាពគូនិងសេសនៃអនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រខាងក្រោម :
   ក. $y = x - \sin 2x$ ខ. $y = x^2\cos^2 x$ គ. $y = \tan x\cos^2 x$

86

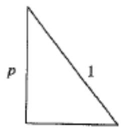
d. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x \cos 2x \quad (x \in \mathbb{R})$
e. $y = \sin x + \tan x + \cot 3x \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$
f. $y = \cos x + \sin\frac{x}{2}\sin x + 5x^2$

9. Construire les courbes représentatives des fonctions suivantes :
a. $y = -\sin\frac{x}{3}$ b. $y = -\sin x + 1$ c. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
d. $y = 3\tan x$.

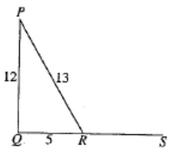
10. En utilisant la courbe représentative de $y = \sin x$, construire celles des fonctions suivantes :
a. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ b. $y = 2 + \sin x$ c. $y = 1 - \sin x$

11. En utilisant le courbe représentative de $y = \cos x$, construire celles des fonctions suivantes :
a. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b. $y = 2 - \cos x$ c. $y = \cos x + 2$

12. Soit un triangle indiqué par la figure[30] située à droite tel que $\sin\beta = p$ et que β soit un angle aigu. Calculer les expressions suivantes en fonction de p :
a. $\tan\beta$ b. $\sin(90^\circ - \beta)$ c. $\sin(180^\circ + \beta)$



13. D'après cette figure située à droite, QRS est une droite rectiligne et $PQ = 12cm,\ QR = 5cm,\ RP = 13cm$.
a. Expliquer pourquoi l'angle $\widehat{PQR}$ est droit.
b. En déduire la valeur[31] QPR et $\cos\widehat{PRS}$.



14. Montrer que $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{1}{1+\sin\theta}\right)$ peut s'écrire sous forme $k\tan\theta$ et trouver la valeur de k.

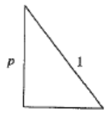
ឃ. $y = \sin 5x + \sin 3x + 5\sin x\cos 2x \quad (x \in R)$
ង. $y = \sin x + \tan x + \cot 3x \quad \left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$
ច. $y = \cos x + \sin\frac{x}{2}\sin x + 5x^2$

9. សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :
ក. $y = -\sin\frac{x}{3}$ ខ. $y = -\sin\theta + 1$ គ. $y = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ ឃ. $y = 3\tan\theta$ ។

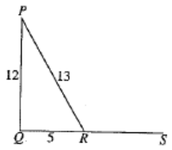
10. ដោយប្រើក្រាប $y = \sin x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ខាងក្រោម :
ក. $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ខ. $y = 2 + \sin x$ គ. $y = 1 - \sin x$ ។

11. ដោយប្រើក្រាប $y = \cos x$ សង់ក្រាបនៃអនុគមន៍ :
ក. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ខ. $y = 2 - \cos x$ គ. $y = \cos x + 2$ ។

12. គេមានត្រីកោណដូចរូបខាងស្ដាំដែលមាន $\sin\beta = p$ ហើយ β ជាមុំស្រួច ។ ចូរគណនាកន្សោមខាងក្រោមជាអនុគមន៍ p :
ក. $\tan\beta$ ខ. $\sin(90^\circ - \beta)$ គ. $\sin(180^\circ + \beta)$ ។



13. តាមរូបខាងស្ដាំនេះ QRS ជាបន្ទាត់ត្រង់ ហើយ $PQ = 12cm$, $QR = 5cm$ និង $RP = 13cm$ ។
ក. ចូរពន្យល់ថាហេតុអ្វីបានជា $P\hat{Q}R$ ជាមុំកែង ។
ខ. ទាញរកតម្លៃ QPR និង $\cos P\hat{R}S$ ។



14. បង្ហាញថា $\cos\theta\left(\frac{1}{1-\sin\theta} - \frac{1}{1+\sin\theta}\right)$ អាចសរសេរក្នុងទម្រង់ $k\tan\theta$ និងរកតម្លៃនៃ k ។

87

Liste des erreurs & remarques (Traduction du Khmer en Français – niveau 11e - Leçon 1 du chapitre 3 du manuel de mathématiques Tome 1) :
1. La définition donnée ne semble pas être correcte. En effet : 1. le concept d'un angle orienté positif n'existe pas ni d'ailleurs celui d'un angle orienté négatif ; 2. dans cette définition, il n'y a pas la distinction entre un angle orienté et ses mesures. (page 68)

2. Nous rectifions les positions des points P et P' dans les quatre figures, dans la partie traduction. (page 69)

3. Il serait préférable de généraliser de la manière suivante : Les vecteurs $\overrightarrow{OP_0}$ et $\overrightarrow{OP}$, dans cet ordre, déterminent un angle orienté, noté $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}\right)$. Si α est une mesure en degrés de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}\right)$, alors les autres mesures de cet angle sont $\alpha + k360^\circ$ où $k \in Z$. (page 69)

4. Nous remarquons que les auteurs du manuel semble éprouver, eux-mêmes des difficultés à distinguer un angle orienté de ses mesures. Il serait préférable de dire : α et $\alpha + 360^\circ$ sont deux mesures différentes d'un même angle orienté. (page 69)

5. Le manuel dit : « un angle 120° », mais il serait mieux de dire : « un angle de (mesure) 120°. (page 69)

6. Il est préférable de dire : calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}\right)$. (page 69)

7. La phrase « L'angle au centre $\widehat{AOB}$ en degrés n'a aucune relation avec la longueur de l'arc AB » est fausse. (page 70)

8. Il y a, ici, certainement une ambiguïté : que désigne α ?
Lorsque nous lisons une partie de la phrase mentionnée : « On peut calculer la longueur d'un arc AB en convertissant juste l'unité d'angle de degrés en radians : $\alpha = 30^\circ$ ou $\alpha = 30 \times \frac{\pi}{180} = 0{,}52\ rd, \dots$ », α représente nécessairement « un angle » qui a à la fois la mesure 30° et la mesure $0{,}52\ rd$. Mais si on termine la lecture de cette phrase : « …, la longueur de l'arc $AB = \alpha . r = 0{,}52 \times 5 = 2{,}6\ cm.$ », nous constatons que le manuel manipule l'objet α car dans la formule « la longueur de l'arc $AB = \alpha . r$ », α désigne la mesure en radians de l'angle. (page 70)

9. Apparaît sans justification la formule de la longueur d'un arc de cercle de rayon r, intercepté par l'angle au centre dont la mesure est α rd. (page 70)

10. Il faut préciser d'emblée dans cette généralité que α est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OP_0}, \overrightarrow{OP}\right)$. (page 70)

11. Ces deux formules sont valables seulement dans le cas où le point P se situe dans le premier quadrant sauf dans le cas où OQ et OP' désignent respectivement la mesure algébrique du vecteur $\overrightarrow{OQ}$ et celle du vecteur $\overrightarrow{OP'}$. A noter qu'il n'y a plus la notion de mesure algébrique d'un vecteur dans le curriculum. (page 71)

12. Il serait préférable de dire : Le signe des fonctions trigonométriques dépend du quadrant dans lequel se trouve l'angle. (page 72)

13. Il est valable seulement dans le cas où le point P se situe dans le premier quadrant. (page 73)

14. Il s'agit plutôt d'une erreur. Il serait préférable d'écrire : connaissant $\sin\alpha = -\frac{3}{12}$. (page 74)

15. Ce n'est pas correct car lorsque que l'on dit : « … angles déterminés par les mêmes vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ alors on obtient les formules : … », cela ne signifie pas qu'il s'agit du même angle orienté, cet angle serait soit $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP}\right)$ soit son opposé $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OA}\right)$. Mais, pour que cela désigne le même angle orienté, il faut préciser en plus dans cette phrase : « … mêmes vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OP}$ dans cet ordre, alors on obtient les formules : … ». (page 74)

16. Il faut dire : un angle orienté de mesures (en radians) θ et $\theta + 2k\pi$. (page 74)

17. Le terme modulo apparaît, d'un coup ici, sans indiquer/commenter, par exemple, la signification de « 0 modulo 2π ». (page 75)

18. Il apparaît ici étrangement car on parle de deux arcs de cercle complémentaires en lien avec leurs mesures. (page 78)

19. Comment le manuel explique-t-il la définition de la fonction tangente et celle de la fonction cotangente ? (page 79)

20. Nous rectifions une erreur. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

> Les fonctions sinus et […] car 2π est le plus petit nombre positif tel que $\sin^2[(x+\pi)] = \sin x$. (page 79)

21. Nous rectifions une erreur. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

> Les fonctions … et $y = \cos 2x$ ont pour période π car … et $\cos^2[(x+\pi)] = \cos(2x + 2\pi) = \cos 2x$. (page 79)

22. Il y a une erreur car $T = 4\pi$. (page 80)

23. Dans cette partie, nous ajoutons des trous (oubli (?) dans la transcription) et nous reformulons une phrase incompréhensible. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

> Périodicité : … est une fonction périodique de période $p = 2\pi$ car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, nous étudions la fonction $y = \sin x$ sur $[-\pi, \pi]$ et traçons la courbe représentative de la fonction $y = \sin x$ sur l'intervalle $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$ qui est obtenue par les translations de la branche de la courbe représentative $[-\pi, \pi]$ le nombre 2π suivant l'axe $(x'x)$. (page 80)

24. Nous reformulons la phrase initiale pour la rendre intelligible. Voici la phrase initiale du manuel :

> La courbe représentative de la fonction $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ est obtenue par la translation de celle de la fonction $y = \sin x$ de droite à gauche le nombre $\frac{\pi}{2}$ unités suivant l'axe $(x'x)$. (page 81)

25. Nous reformulons cette partie pour la rendre intelligible. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

> Périodicité : $y = \cos x$ est une fonction périodique de période 2π. Nous étudions la fonction $y = \cos x$ sur l'intervalle $[(2k-1)\pi, (2k+1)\pi]$; $k \in Z$, obtenue par la translation de la courbe représentative sur $[-\pi, \pi]$ le nombre 2π suivant l'axe $(x'x)$. (page 82)

26. Nous reformulons la phrase initiale pour la rendre intelligible. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

On obtient le courbe représentative de la fonction $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ en translatant celle de la fonction $y = \cos x$ de gauche à droite $\frac{\pi}{2}$ unités parallèle à l'axe $(x'x)$. (page 83)

27. Nous reformulons la phrase initiale pour la rendre intelligible. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

Sur l'intervalle $](2k-1)\pi, (2k+1)\pi[$, $k \in Z$ obtenue par translations de la branche de la courbe représentative sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ le nombre π par l'axe $(x'x)$. (page 83)

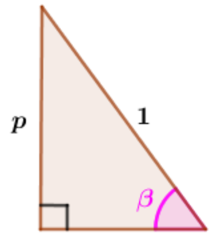
28. Comment le manuel explique-t-il la signification des flèches dans cette position ? En fait, il s'agit d'une seule flèche. (page 84)

29. De même que l'indice 25 précédemment. Voici ce qui est écrit dans le manuel :

Sur l'intervalle $]k\pi, (k+\pi)\pi[$ $(k \in Z)$ obtenue par translations de la branche de la courbe représentative sur $]0, \pi[$ le nombre π par l'axe $(x'x)$. (page 85)

30. La figure donnée est insuffisante. Nous pouvons poser d'emblée deux questions importantes sur la nature du triangle donné et sur la position de l'angle aigu β du triangle, puis la question : la figure donnée sert-elle à la tâche demandée ? (page 87)

La figure donnée serait la figure ci-dessous :



31. Il serait plutôt la mesure en degrés de l'angle $\widehat{QPR}$. (page 87)

2.3. Résumé des leçons 2 et 3 du chapitre 3 dans le manuel tome 1 de 11e et celui de la leçon 1 du chapitre 3 dans le manuel tome 2 de 11e

Leçon 2 : « Formules trigonométriques » (manuel tome 1 de 11e)

1. Formules d'addition des cosinus, sinus et tangente :

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

2. Application sur les formules d'addition

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\tan\alpha=\frac{2t}{1-t^2}$$
(où $=\tan\frac{\alpha}{2}$).

3. Formule de transformation :

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]\qquad \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\qquad \sin\beta\cos\alpha=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos p+\cos q=2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\qquad \cos p-\cos q=-2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p+\sin q=2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}\qquad \sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\tan p+\tan q=\frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}\qquad \cot p+\cot q=\frac{\sin(p+q)}{\sin p\sin q}$$
$$\tan p-\tan q=\frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}\qquad \cot p-\cot q=\frac{\sin(p-q)}{\sin p\sin q}$$

Remarques :

On donne la démonstration de la formule d'addition : $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$, à l'aide des deux formules du produit scalaire de deux vecteurs unitaires (la définition et l'expression analytique). Nous remarquons que, dans des manuels français et cambodgien, les technologies pour justifier la technique pour mener cette formule mentionnée sont les mêmes.

Les autres formules repérées ci-dessus sont développés algébriquement.

Dans le curriculum français, les formules d'addition et de duplication des cosinus et sinus sont seules attendues.

Leçon 3 : « Equations et inéquations trigonométriques » (manuel tome 1 de 11e)

1. Nombres ayant même cosinus

En général : Deux nombres x et y ont même cosinus $\cos x = \cos y$ si, et seulement, si $x = y + 2k\pi$ ou $x = -y + 2k\pi$ ($k \in Z$).

2. Nombres ayant même sinus

En général : Deux nombres x et y ont même cosinus $\sin x = \sin y$ si, et seulement, si $x = y + 2k\pi$ ou $x = \pi - y + 2k\pi$ ($k \in Z$).

A noter que dans les deux premières sections, x et y désignent une mesure d'angles orientés.

3. Equations trigonométriques
Résoudre des équations trigonométriques sous forme :

$\cos x = a$; $\sin x = a$; $\tan x = a$; $\cot x = m$.

4. Inéquations trigonométriques
Résoudre des inéquations trigonométriques sous forme :

$\cos x \leq a$; $\sin x \leq a$; $\tan x \leq a$;
$\cos x \geq a$; $\sin x \geq a$; $\tan x \geq a$.

Leçon 1 : « Equations et inéquations trigonométriques » (manuel tome 2 de 11^{e})

1. et 2. Equations trigonométriques

Equations trigonométriques sous forme :

$a\cos x + b\sin x = c$ $\quad a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ $\quad a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = d$

$$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$$
$$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$$
$$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$$

3. Système des équations trigonométriques
Exemples : Résoudre des systèmes des équations

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \sin x + \sin y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4} \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4} \\ 3\tan x = \tan y \end{cases}$$

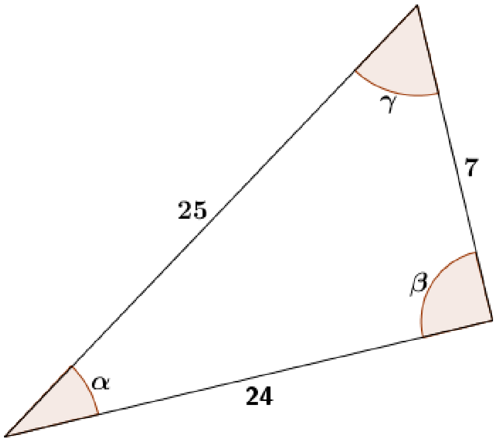
4. Inéquations trigonométriques
Inéquations trigonométriques sous forme : $a\cos x + b\sin x < c$.

Annexe n° 3 : **Questionnaire – énoncés, résolutions des trois premières questions**

3.1. Énoncés

Question I – version B

On considère un triangle dont les côtés ont pour longueurs respectives 7, 24 et 25 comme indiqué dans la figure ci-dessous. Donner les valeurs des cosinus et sinus de α, de β et de γ où α, β et γ sont les angles indiqués du triangle, en justifiant votre réponse.



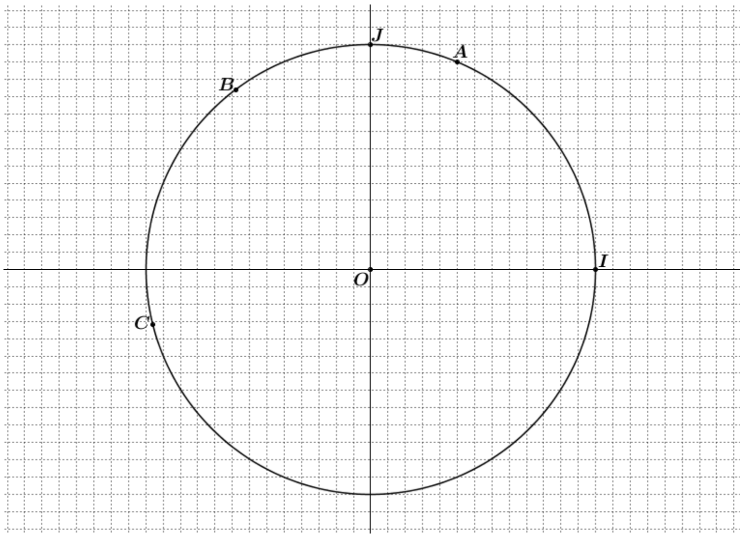
$\cos\alpha = \ldots$ $\sin\alpha = \ldots$

$\cos\beta = \ldots$ $\sin\beta = \ldots$

$\cos\gamma = \ldots$ $\sin\gamma = \ldots$

Question II – version B

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; I, J)$. On considère $A\left(\frac{5}{13}\ ;\ \frac{12}{13}\right)$ et $B\left(-\frac{3}{5}\ ;\ \frac{4}{5}\right)$ deux points du cercle trigonométrique (de centre O et de rayon 1).



1. On note $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) = \alpha$ l'angle orienté des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OA}$, ainsi que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OB}) = \beta$.
Donner les cosinus et sinus de α et β :

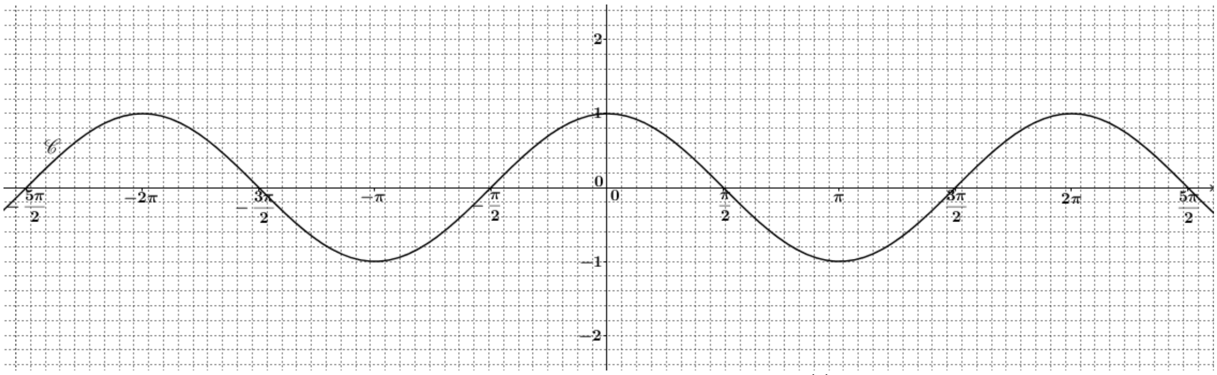
$\cos\alpha = \cdots$ $\sin\alpha = \cdots$

$\cos\beta = \cdots$ $\sin\beta = \cdots$

2. On considère maintenant C le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OC}) = \alpha + \beta$.
   a. Exprimer les coordonnées du point C en fonction de α et β.
b. Calculer les coordonnées du point C.

Question III – version A

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction cosinus.



1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point A.

   b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point B.

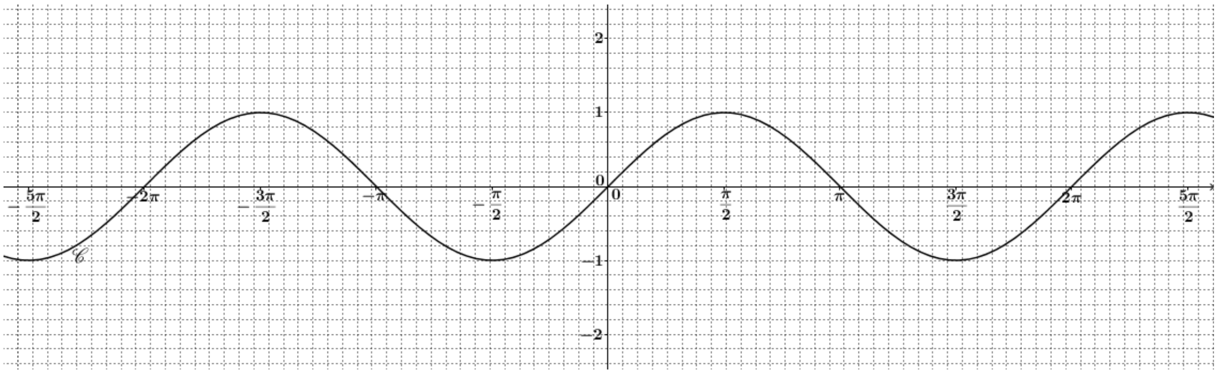
   c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de C.

d. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point D d'abscisse $-\frac{589\pi}{6}$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de A et de D.

2. Placer, si possible, le point E, symétrique du point A par rapport à l'axe des ordonnées en justifiant votre affirmation. Le point E est-il sur la courbe $\mathscr{C}$? Pourquoi ?

Question III – version B

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction sinus.



1. a. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point M d'abscisse $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'ordonnée du point M.

   b. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point N d'ordonnée $\frac{5\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Donner, si possible, l'abscisse du point N.

   c. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point P d'abscisse $\left(\frac{5+3\times2018}{3}\pi\right)$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de M et de P.

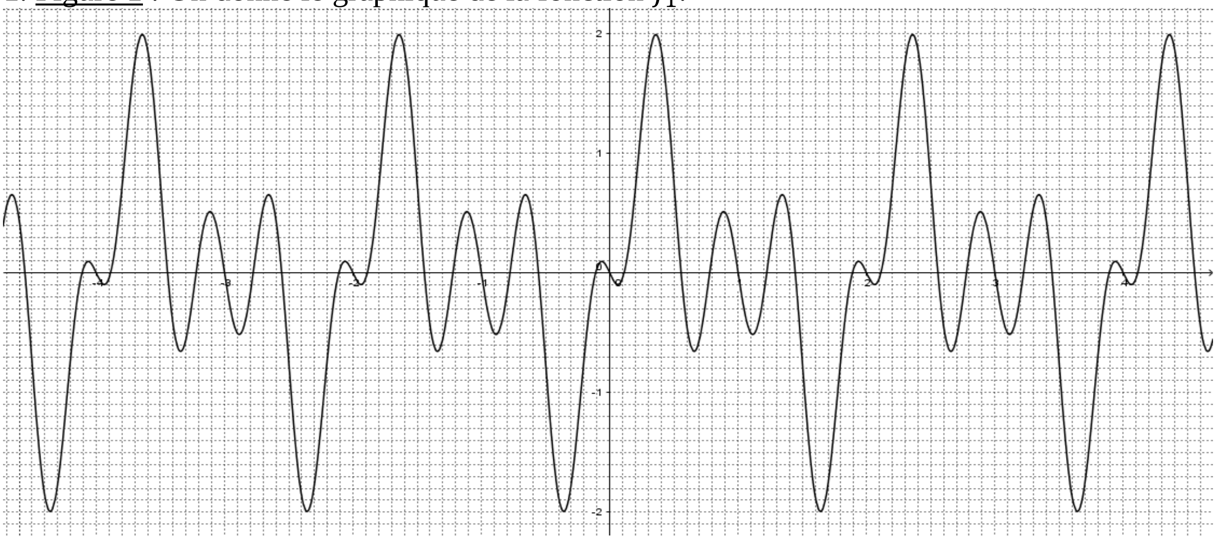
d. Placer, si possible, sur la courbe $\mathscr{C}$ le point Q d'abscisse $-\frac{295\pi}{3}$ en justifiant votre affirmation. Comparer les ordonnées de M et de Q.

2. Placer, si possible, le point R, symétrique du point M par rapport à l'origine du repère en justifiant votre affirmation. Le point R est-il sur la courbe $\mathscr{C}$? Pourquoi ?

Question IV – version A

IV. Dans chaque cas, on donne un graphique d'une fonction. Cocher la/les affirmation(s) qui vous semble(nt) correcte(s).

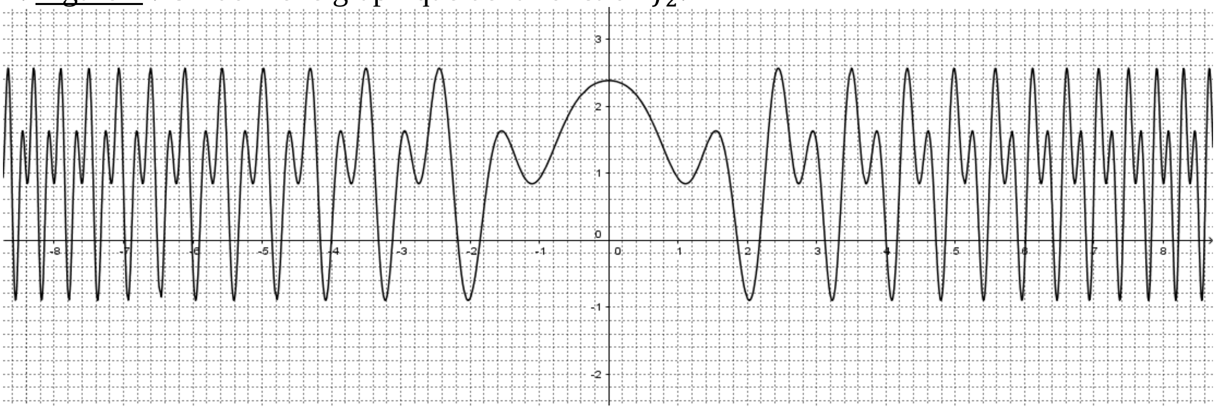
1. Figure 1 : On donne le graphique de la fonction f_1.



La fonction f_1 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

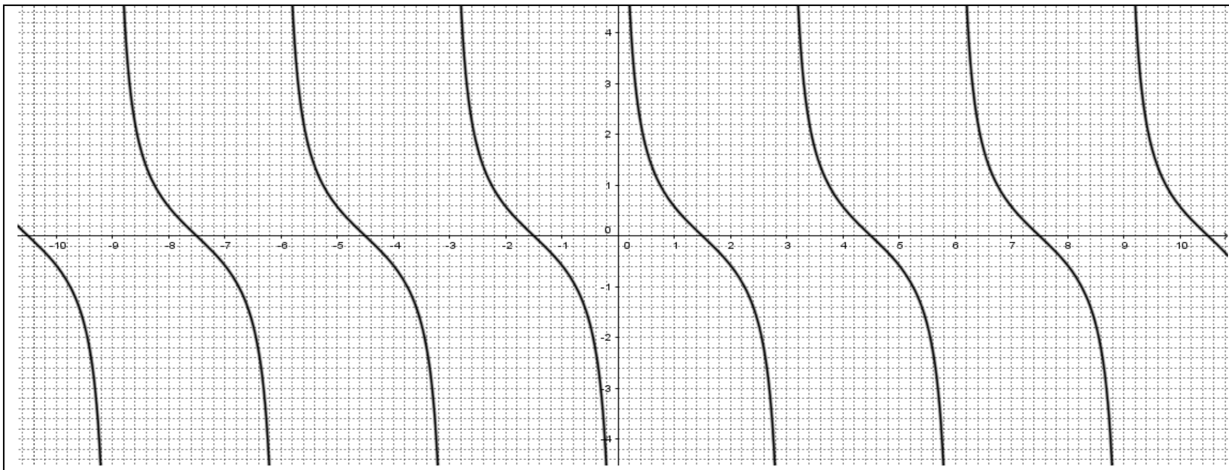
2. Figure 2 : On donne le graphique de la fonction f_2.



La fonction f_2 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

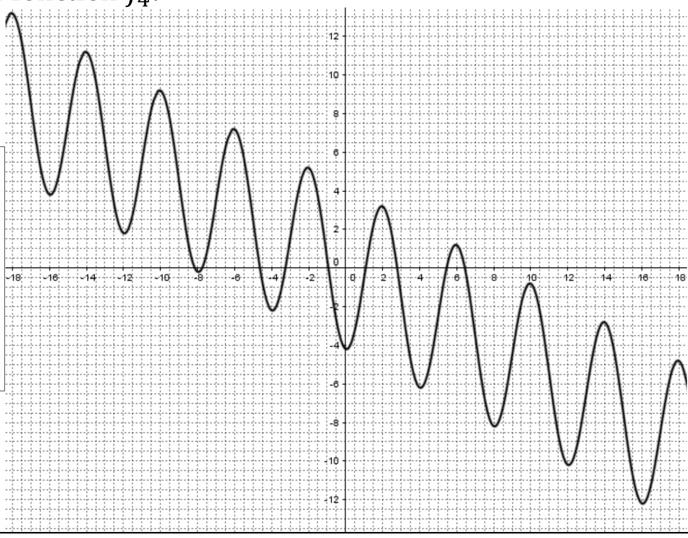
3. Figure 3 : On donne le graphique de la fonction f_3.



La fonction f_3 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

4. <u>Figure 4</u> : On donne le graphique de la fonction f_4.



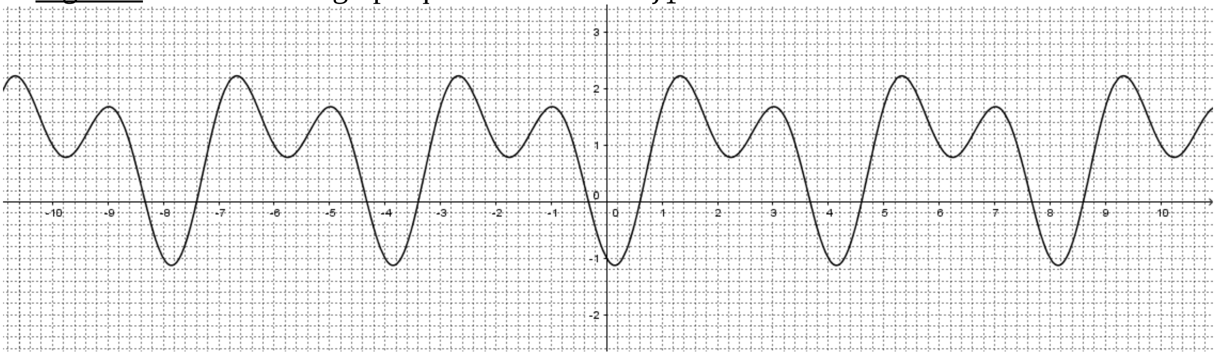
La fonction f_4 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

Question IV – version B

IV. Dans chaque cas, on donne un graphique d'une fonction. Cocher la/les affirmation(s) qui vous semble(nt) correcte(s).

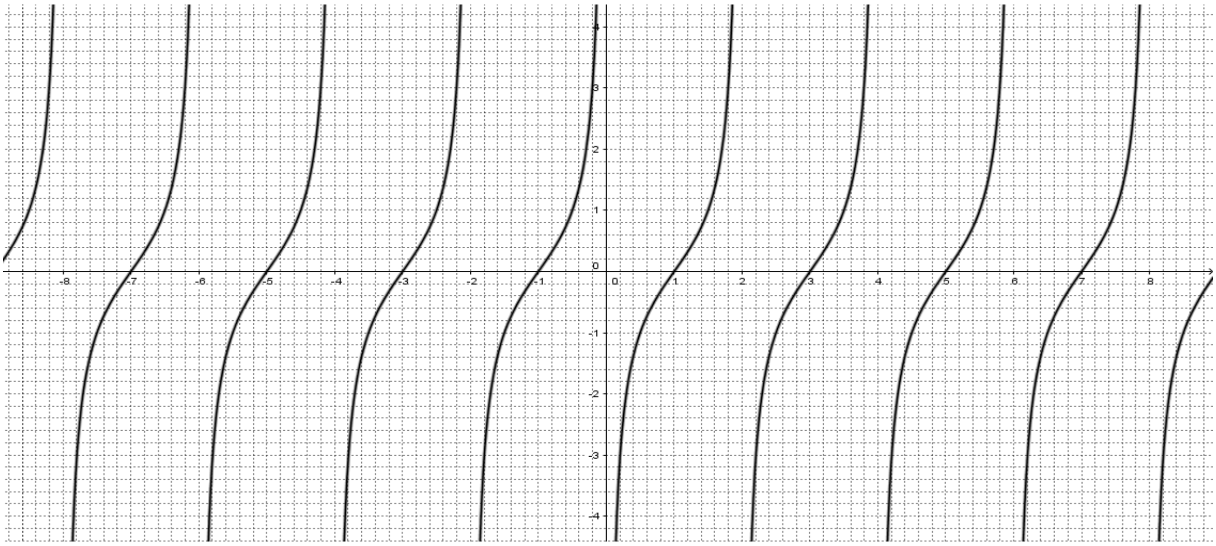
1. <u>Figure 1</u> : On donne le graphique de la fonction f_1.



La fonction f_1 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

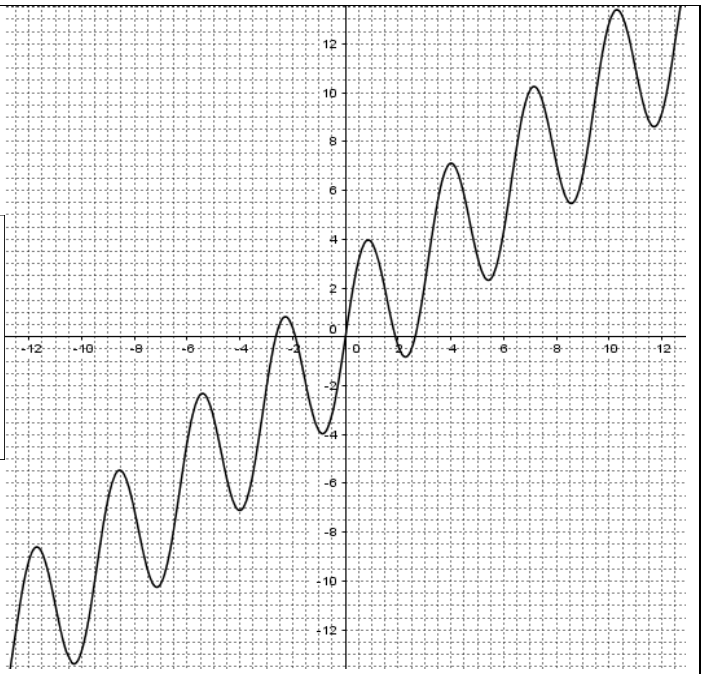
2. <u>Figure 2</u> : On donne le graphique de la fonction f_2.



La fonction f_2 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

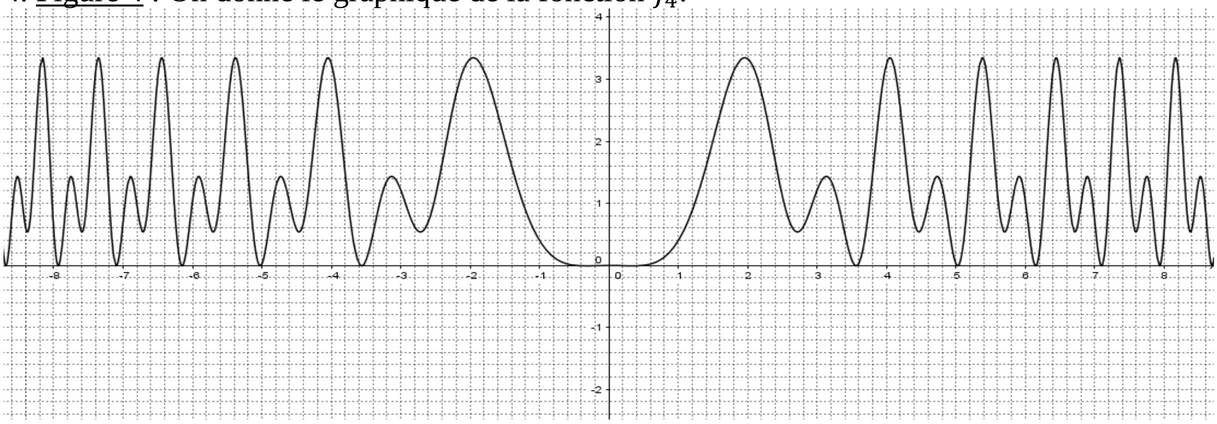
3. <u>Figure 3</u> : On donne le graphique de la fonction f_3.



La fonction f_3 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

4. <u>Figure 4</u> : On donne le graphique de la fonction f_4.



La fonction f_4 semble être :

1. paire ☐ oui ☐ non
2. impaire ☐ oui ☐ non
3. périodique ☐ oui : préciser la période
   ☐ non : justifier votre réponse

Question V – version A

V. Soit f la fonction définie par $(x) = \sqrt{1 - \sin x}$. Cocher la/les bonne(s) affirmation(s) :

1. f est définie sur ☐ $\left]-\frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ ☐ $]-\pi\ ;\ \pi[$ ☐ $[0\ ;\ +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$

2. f est à valeurs dans ☐ $[-1\ ;1]$ ☐ $\left[0\ ;\ \sqrt{2}\right]$ ☐ $]0\ ;\ +\infty[$

3. f est : a. paire ☐ oui ☐ non
   b. impaire ☐ oui ☐ non
   c. périodique ☐ oui ☐ non Si oui, sa période est $T = \cdots$

4. f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ ☐ oui et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cdots$

☐ non et justifier votre réponse

5. a. f atteint son maximum en :

☐ $-\pi$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ 2π ☐ f n'atteint pas de maximum

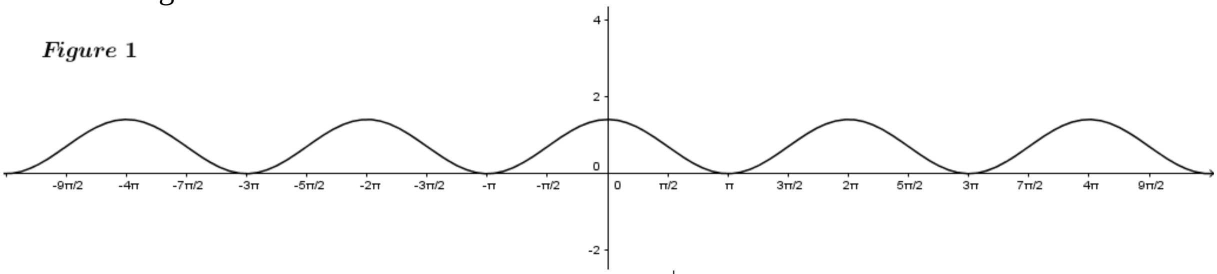
b. f atteint son minimum en :

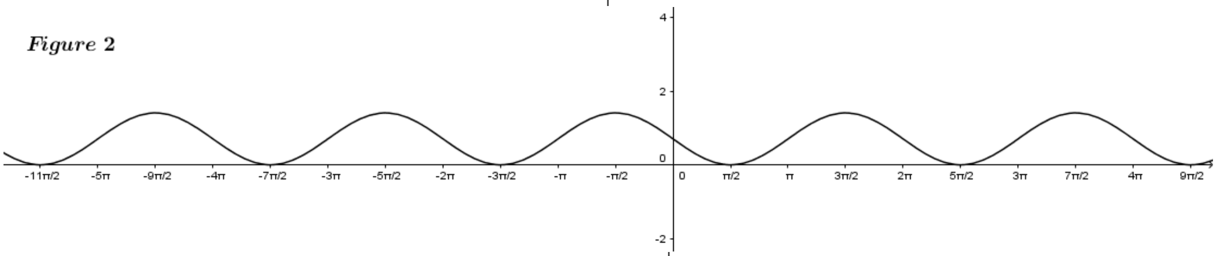
☐ $-\pi$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ 2π ☐ f n'atteint pas de minimum

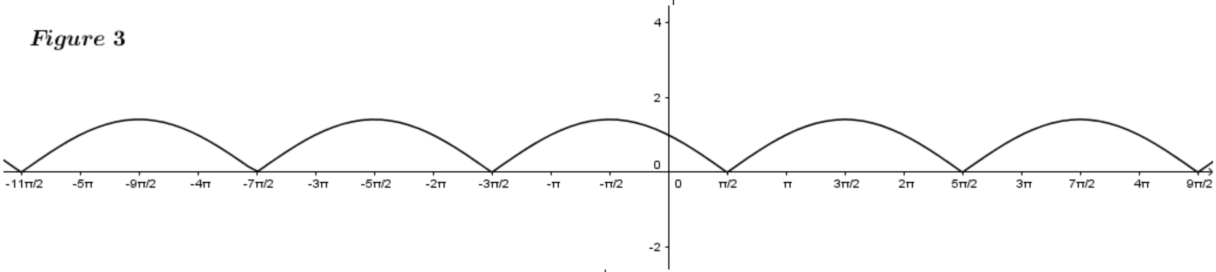
6. La représentation graphique de la fonction f est :

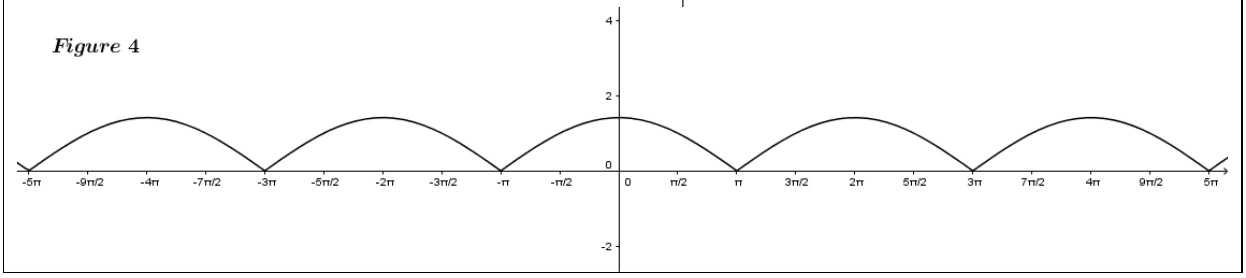
Justifier votre choix

a. la figure 1 ☐ oui ☐ non
b. la figure 2 ☐ oui ☐ non
c. la figure 3 ☐ oui ☐ non
d. la figure 4 ☐ oui ☐ non









Question V – version B

V. Soit f la fonction définie par $(x) = \sqrt{1 + \cos x}$. Cocher la/les bonne(s) affirmation(s) :

1. f est définie sur ☐ $\left]-\frac{3\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ ☐ $]-\pi\ ;\ \pi[$ ☐ $[0\ ;\ +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$

2. f est à valeurs dans ☐ $[-1\,;1]$ ☐ $[0\,;\sqrt{2}]$ ☐ $]0\,;+\infty[$

3. f est : a. paire ☐ oui ☐ non

b. impaire ☐ oui ☐ non

c. périodique ☐ oui ☐ non Si oui, sa période est $T = \cdots$

4. f est dérivable en π ☐ oui et $f'(\pi) = \cdots$

☐ non et justifier votre réponse

5. a. f atteint son maximum en :

☐ $-\pi$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ 2π ☐ f n'atteint pas de maximum

b. f atteint son minimum en :

☐ $-\pi$ ☐ $-\frac{\pi}{2}$ ☐ 0 ☐ $\frac{\pi}{2}$ ☐ π ☐ $\frac{3\pi}{2}$ ☐ 2π ☐ f n'atteint pas de minimum

6. La représentation graphique de la fonction f est :

Justifier votre choix

a. la figure 1 ☐ oui ☐ non

b. la figure 2 ☐ oui ☐ non

c. la figure 3 ☐ oui ☐ non

d. la figure 4 ☐ oui ☐ non

Figure 1

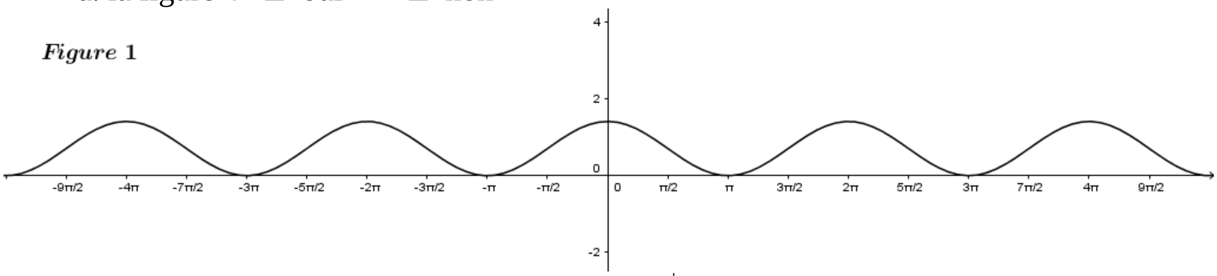


Figure 2

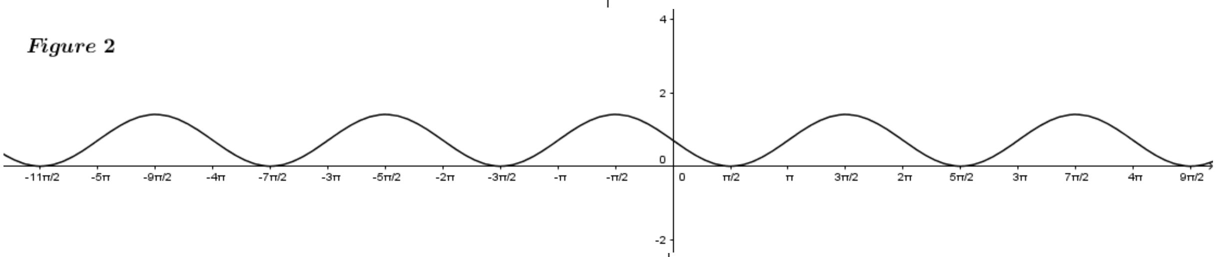
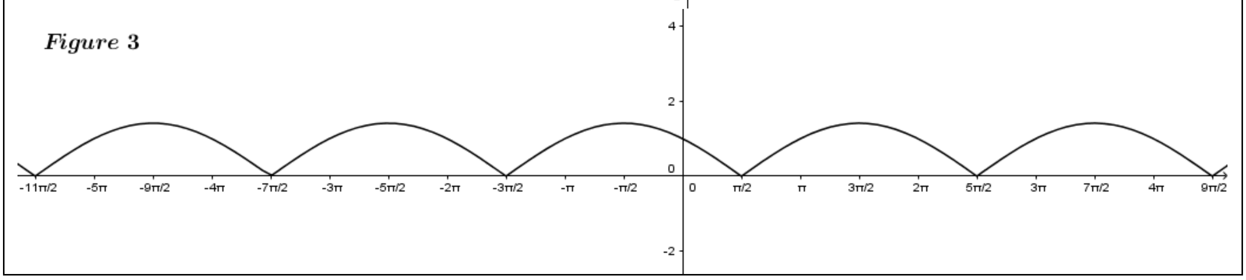
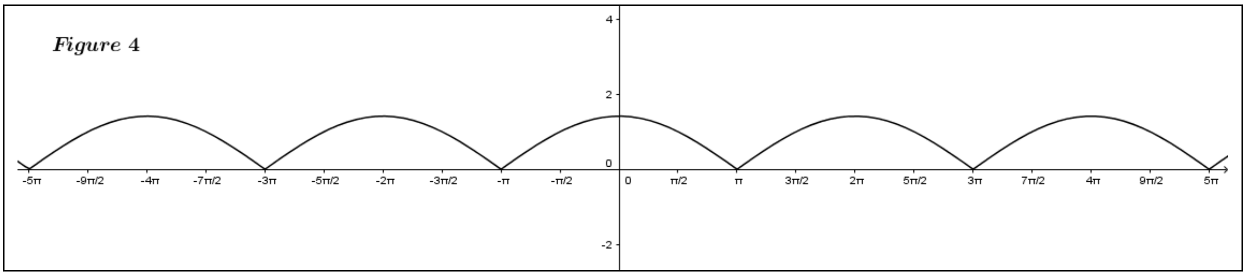


Figure 3





Question VI – version A

VI. 1. Cocher la bonne réponse. L'équation $\sin 2x = \frac{1}{3}$ admet dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

☐ aucune solution ☐ une unique solution ☐ deux solutions

☐ un nombre fini de solutions ☐ une infinité de solutions

2. Justifier votre affirmation dans la question 1.

Question VI – version B

VI. 1. Cocher la bonne réponse. L'équation $\cos 2x = \frac{1}{4}$ admet dans l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$:

☐ aucune solution ☐ une unique solution ☐ deux solutions

☐ un nombre fini de solutions ☐ une infinité de solutions

2. Justifier votre affirmation dans la question 1.

3.2. Résolutions des trois premières questions

3.2.1. Solutions de la question I, version A

Stratégie 1 : On voit que $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ et $13^2 = 169$, donc $5^2 + 12^2 = 13^2$. (Ou on remarque que $13^2 - 12^2 = (13 - 12)(13 + 12) = 25 = 5^2$, donc $5^2 + 12^2 = 13^2$.)

D'après *la réciproque du théorème de Pythagore*, on en déduit que le triangle donné est un triangle rectangle dont l'hypoténuse est 13.
Puis, il y a deux méthodes possibles pour donner les valeurs des cosinus et sinus de α, de β et de γ :

Stratégie 1.1 :

Dans ce triangle rectangle, on applique *les définitions des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle*, on a alors : $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$; $\sin\gamma = \frac{5}{13}$.
Comme β est un angle droit, on utilise alors *la propriété des cosinus et sinus de l'angle droit* : $\cos\beta = \cos 90^\circ \left(\text{ou } \cos\frac{\pi}{2}\right) = 0$; $\sin\beta = \sin 90^\circ \left(\text{ou } \sin\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Stratégie 1.2 :

Dans ce triangle rectangle, on applique et articule *deux propriétés du produit scalaire de deux vecteurs : expression avec normes et cosinus & expression avec projeté orthogonal* pour donner les cosinus et sinus des trois angles du triangle rectangle.
On a $5 \times 13 \times \cos\alpha = 5 \times 5$, donc $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.
On a $5 \times 12 \times \cos\beta = 5 \times 0$, donc $\cos\beta = 0$; ou bien $12 \times 5 \times \cos\beta = 12 \times 0$, donc $\cos\beta = 0$.

On a $12 \times 13 \times \cos\gamma = 12 \times 12$, donc $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

On exploite *la Relation fondamentale/Relation des carrés* pour trouver $\sin\alpha$, $\sin\beta$ et $\sin\gamma$:

On calcule $\sin\alpha$:

On a $(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$, d'où $(\sin\alpha)^2 = 1 - (\cos\alpha)^2 = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{13^2-5^2}{13^2} = \frac{(13-5)(13+5)}{13^2} = \frac{8\times 18}{13^2} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$.

Comme $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ (ou $0 < \alpha < \pi$), alors $\sin\alpha > 0$.

Par conséquent, on obtient $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

Même procédé, on obtient : $\sin\beta = 1$ et $\sin\gamma = \frac{5}{13}$.

<u>Stratégie 2</u> : On applique *la relation généralisée de Pythagore/la formule d'Al-Kashi* pour trouver $\cos\alpha$.

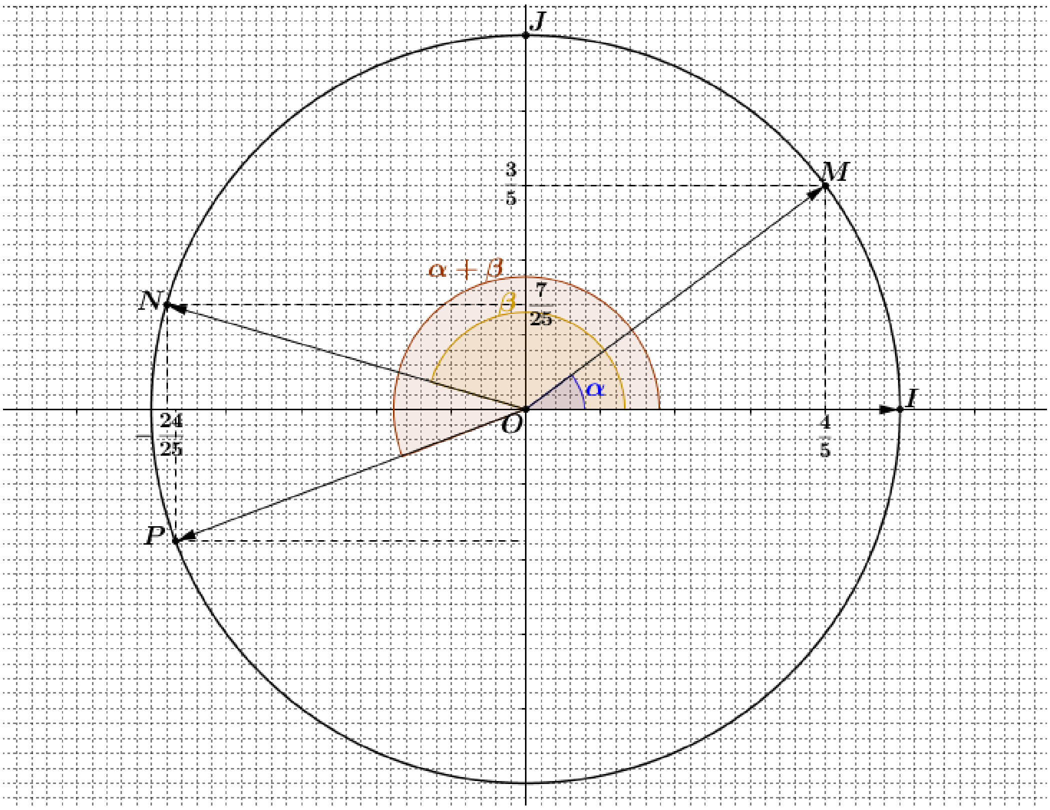
On a $12^2 = 5^2 + 13^2 - 2 \times 5 \times 13 \times \cos\alpha$. Donc $\cos\alpha = \frac{5^2+(13-12)(13+12)}{2\times5\times13} = \frac{2\times5^2}{2\times5\times13} = \frac{5}{13}$.

On exploite *la Relation fondamentale* pour trouver $\sin\alpha$ (voir Stratégie 1.2 ci-dessus).

Même procédé, on a $\cos\beta = 0$; $\sin\beta = 1$; $\cos\gamma = \frac{12}{13}$ et $\sin\gamma = \frac{5}{13}$.

À remarquer qu'il est aussi possible que lorsque l'on trouve $\cos\beta = 0$, on en déduit alors que β est l'angle droit et que le triangle donné est rectangle dont l'hypoténuse est 13. On revient donc à utiliser la stratégie 1.1 ou la stratégie 1.2 afin de déterminer $\sin\beta$ puis $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$ pour finir.

3.2.2. Solutions de la question II, version A



1. Comme $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}) = \beta$, alors on a $M(\cos\alpha\ ;\ \sin\alpha)$ et $N(\cos\beta\ ;\ \sin\beta)$.

Or $M\left(\frac{4}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right)$ et $N\left(-\frac{24}{25}\ ;\ \frac{7}{25}\right)$. On en déduit que : $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

et $\cos\beta = -\frac{24}{25}$ et $\sin\beta = \frac{7}{25}$.

Notons qu'il y a d'autres manières possibles pour donner les cosinus et sinus de α et de β comme suit :

Utiliser les *définitions des cosinus et sinus d'un angle aigu du triangle rectangle* pour donner les cosinus et sinus de α :

On a $\cos\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}$.

Appliquer la *formule* $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|}$ ou la *relation généralisée de Pythagore*/la *formule d'Al-Kashi* dans un triangle pour donner le cosinus de β, puis la relation fondamentale pour donner le sinus de β.

Soit : On a $\overrightarrow{OI}(1\,;0)$ et $\overrightarrow{ON}\left(-\frac{24}{25}\ ;\ \frac{7}{25}\right)$. Comme $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{ON}}{\|\overrightarrow{OI}\|\times\|\overrightarrow{ON}\|}$, on obtient alors : $\cos\beta = \frac{1\times\left(-\frac{24}{25}\right)+0\times\frac{7}{25}}{1\times1} = -\frac{24}{25}$.

Soit : On a $I(1\,;0)$ et $N\left(-\frac{24}{25}\ ;\ \frac{7}{25}\right)$, on obtient alors $IN^2 = \left\|\overrightarrow{IN}\right\|^2 = \left(-\frac{24}{25} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{25} - 0\right)^2 = \left(-\frac{49}{25}\right)^2 + \left(\frac{7}{25}\right)^2 = \left(\frac{7}{25}\right)^2 \times (7^2 + 1) = \frac{7^2}{25^2} \times 25 \times 2 = \frac{98}{25}$.

Dans le triangle , on a $IN^2 = OI^2 + ON^2 - 2 \times OI \times ON \times \cos\beta$, on obtient alors : $\cos\beta = \frac{OI^2+ON^2-IN^2}{2\times OI\times ON} = \frac{1^2+1^2-\frac{98}{25}}{2\times1\times1} = 1 - \frac{49}{25} = -\frac{24}{25}$.

On a $(\sin\beta)^2 + (\cos\beta)^2 = 1$, d'où $(\sin\beta)^2 = 1 - (\cos\beta)^2 = 1 - \left(-\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{25^2-24^2}{25^2} = \frac{(25-24)(25+24)}{25^2} = \left(\frac{7}{25}\right)^2$.

Graphiquement, β désigne ici l'angle géométrique $\widehat{ION}$ dans le triangle OIN, on a alors $\sin\beta > 0$.

Par conséquent : $\sin\beta = \frac{7}{25}$.

Exploiter *les relations permettant de passer de la forme algébrique d'un nombre complexe à une forme trigonométrique et inversement* pour trouver les cosinus et sinus de l'angle α et ceux de l'angle β :

On a $M\left(\frac{4}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right)$, d'où le point M a pour l'affixe $z_M = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

Comme M est un point du cercle trigonométrique, alors $|z_M| = 1$.

Or $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \alpha$, donc on a : $\cos\alpha = \frac{\mathrm{Re}(z_M)}{|z_M|} = \frac{\frac{4}{5}}{1} = \frac{4}{5}$ et $\sin\alpha = \frac{\mathrm{Im}(z_M)}{|z_M|} = \frac{\frac{3}{5}}{1} = \frac{3}{5}$.

Même procédé, on obtient alors $\cos\beta = -\frac{24}{25}$ et $\sin\beta = \frac{7}{25}$.

2. a. Comme $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}) = \alpha + \beta$. On a alors $P(\cos(\alpha+\beta)\ ;\ \sin(\alpha+\beta))$.

b. Stratégie 1 : Lecture graphique, à l'aide du quadrillage en comptant le nombre de carreaux, $P\left(-\frac{23,5}{25}\ ;\ -\frac{9}{25}\right)$ ou $P(-0,94\ ;\ -0,36)$.

Stratégie 2 : À l'aide de la calculatrice, d'après 1., on obtient :
Cas où l'on met la calculatrice en mode radians,
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0,6435$ (ou $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0,6435$;
$\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{24}{25}\right) \approx 2,8578$ (ou $\beta = \pi - \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) \approx 3,1416 - 0,2838 \approx 2,8578$).
On a alors $\alpha + \beta \approx 0,6435 + 2,8578 = 3,5013$.
D'où : $\cos(\alpha + \beta) \approx \cos(3,5013) \approx -0,936$ et $\sin(\alpha + \beta) \approx \sin(3,5013) \approx -0,352$.
Donc $P(-0,936\ ;\ -0,352)$.

Cas où l'on met la calculatrice en mode degrés,
$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 36,87^{\circ}$ (ou $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 36,87^{\circ}$) ;
$\beta = \cos^{-1}\left(-\frac{24}{25}\right) \approx 163,74^{\circ}$ (ou $\beta = 180^{\circ} - \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) \approx 180^{\circ} - 16,26^{\circ} = 163,74^{\circ}$.
On a alors $\alpha + \beta \approx 36,87^{\circ} + 163,74^{\circ} = 200,61^{\circ}$. D'où :
$\cos(\alpha + \beta) \approx \cos(200,61^{\circ}) \approx -0,936$ et $\sin(\alpha + \beta) \approx \sin(200,61^{\circ}) \approx -0,352$
Donc $P(-0,936\ ;\ -0,352)$.

Stratégie 3 : Utiliser *les formules d'addition du cosinus et du sinus*. On a :
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ et $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$.
Comme $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\beta = -\frac{24}{25}$; $\sin\beta = \frac{7}{25}$. D'où :
$\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \times \left(-\frac{24}{25}\right) - \frac{3}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{3}{5\times25}(-32 - 7) = \frac{3}{125}(-39) = -\frac{117}{125}$;
$\sin(\alpha + \beta) = \frac{3}{5} \times \left(-\frac{24}{25}\right) + \frac{4}{5} \times \frac{7}{25} = \frac{4}{5\times25}(-18 + 7) = \frac{4}{125}(-11) = -\frac{44}{125}$.
On en déduit donc que $P\left(-\frac{117}{125}\ ;\ -\frac{44}{125}\right)$.

Il y a d'autres stratégies réalisables que l'on ne compte pas dans le corps de la thèse :

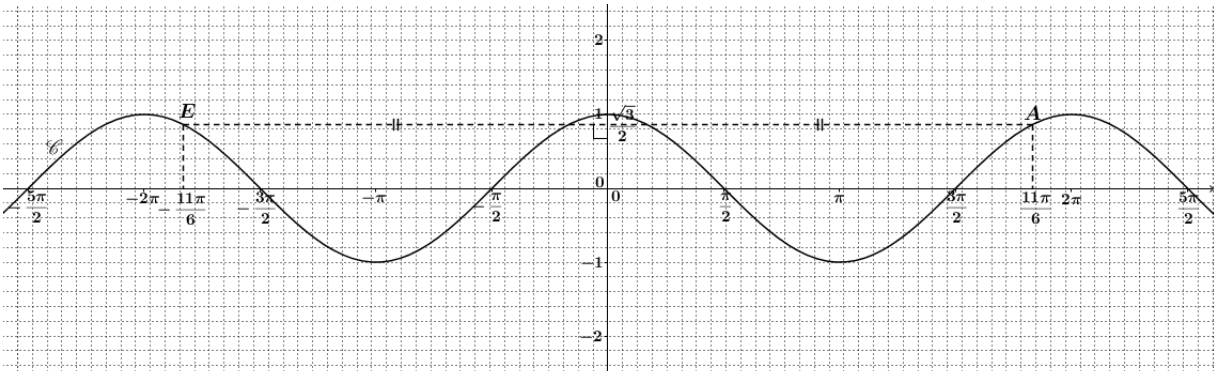
Stratégie 4 : Exploiter des *propriétés des nombres complexes* – forme exponentielle, forme algébrique, forme trigonométrique d'un nombre complexe de module 1.
On a $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OP}\right) = \alpha + \beta$; $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right) = \alpha$; $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}\right) = \beta$.
Posons que z_P, z_M, z_N sont les affixes respectives des points P, M et N du cercle trigonométrique.
On a $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} \times e^{i\beta}$, d'où on peut écrire $z_P = z_M \times z_N$.
Comme $z_M \times z_N = \left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right) \times \left(-\frac{24}{25} + \frac{7}{25}i\right) = -\frac{117}{125} - \frac{44}{125}i$; $(i^2 = -1)$.
On obtient : $z_P = -\frac{117}{125} - \frac{44}{125}i$.
Or $z_P = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$.
On en déduit que : $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{117}{125}$ et $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{44}{125}$.
Donc $P\left(-\frac{117}{125}\ ;\ -\frac{44}{125}\right)$.

Stratégie 5 : Comme $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OP}) = \alpha + \beta$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \alpha$; $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{ON}) = \beta$. On peut alors dire que le point P est l'image du point N par la rotation de centre O et d'angle α. Donc, $\overrightarrow{OP}$ est l'image de $\overrightarrow{ON}$ par la rotation de matrice $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

On obtient : $\begin{pmatrix} x_P \\ y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} \\ \frac{7}{25} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 \times (-24) + (-3) \times 7 \\ 3 \times (-24) + 4 \times 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{125} \begin{pmatrix} -117 \\ -44 \end{pmatrix}$.

Ainsi $P\left(-\frac{117}{125} ; -\frac{44}{125}\right)$.

3.2.3. Solutions de la question III, version A



1. a. On exploite *l'ensemble de définition d'une fonction* et *l'ensemble des images de la fonction sur son ensemble de définition*.

Comme la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, donc le point A d'abscisse $\frac{11\pi}{6}$ existe sur la courbe $\mathscr{C}$.

On remarque que $\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, on peut encadrer alors $\frac{3\pi}{2} < \frac{11\pi}{6} < 2\pi$.

Le graphique donné permet de placer le point A sur la courbe $\mathscr{C}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

On peut repérer l'abscisse du point A de plusieurs manières comme suit :

- soit à l'aide du quadrillage et de la calculatrice $\left(\frac{11\pi}{6} \approx 5{,}76\right)$;
- soit à l'aide de la droite graduée avec l'exploitation du théorème de Thalès ;
- soit à l'aide d'une méthode inverse dans le cas où on s'habitue aux cosinus et sinus des valeurs remarquables : on commence d'emblée à repérer le point associé au nombre réel $-\frac{\pi}{6}$ (parce que $\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi$) sur le cercle trigonométrique dont le centre est l'origine du repère du graphique donné ; on lit sur le cercle trigonométrique : $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, on reporte la longueur $\frac{\sqrt{3}}{2}$ à l'aide du compas ou de la droite graduée afin de placer un autre point de coordonnées $\left(0 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur l'axe des ordonnées (ou on place un point sur le cercle dont l'abscisse est $\frac{1}{2}$, l'ordonnée de ce point est $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on repère alors un autre point de coordonnées $\left(0 ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ sur l'axe des ordonnées), on trace une droite perpendiculaire à cet axe des ordonnées passant par ce

dernier point ; on repère donc le point A qui est l'intersection entre la droite tracée et la courbe $\mathscr{C}$ **,** où l'abscisse du point A appartient à l'intervalle $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

L'ordonnée du point A est :

- soit $y_A \approx 0{,}85$, avec la *lecture graphique*.
- soit $y_A = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \approx 0{,}87$, (utiliser la *calculatrice* pour donner la valeur approchée de $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ sans le justifier mathématiquement).
- soit $y_A = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ parce que :

$$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. b. On ne peut pas placer le point B d'ordonnée $\frac{11\pi}{6}$ sur la courbe $\mathscr{C}$ parce que la fonction cosinus est à valeurs dans l'intervalle $[-1 ; 1]$ et que $\frac{11\pi}{6} > 1$. Donc, ce point B n'existe pas sur la courbe $\mathscr{C}$; et dans ce cas, on ne peut pas non plus faire apparaître l'abscisse du point B.

Remarquons qu'il y a d'autres manières possibles pour justifier l'inexistence du point B sur la courbe $\mathscr{C}$. Les voici :

- soit, on ne peut pas repérer $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des ordonnées à cause du graphique donné (une justification incorrecte) ;
- soit, prolonger l'axe des ordonnées, repérer $\frac{11\pi}{6}$ sur l'axe des ordonnées, la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point $\left(0 ; \frac{11\pi}{6}\right)$ ne coupe pas la courbe $\mathscr{C}$ (une justification négligeable).

1. c. Le point C d'abscisse $\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right)$ est un point de la courbe $\mathscr{C}$ parce que la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$. Par contre, on ne peut pas placer ce point sur la partie de la courbe donnée parce qu'il est hors du graphique donné.

Le point C a la même ordonnée que le point A. En effet :

<u>Stratégie 1</u> : À l'aide de la *calculatrice*, on utilise quand même la *propriété d'un point d'une courbe*. L'ordonnée du point C est $y_C = \cos\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right) \approx 0{,}87$ (ou $\approx 0{,}8660254038$). D'après 1.a., on a $y_A = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \approx 0{,}87$ (ou $\approx 0{,}8660254038$). On peut conjecturer avec confiance que $y_C = y_A$.

<u>Stratégie 2</u> : Exploiter la périodicité d'une fonction. Nous distinguons deux sous-stratégies réalisables ci-après :

<u>Stratégie 2.1</u> : On utilise la *propriété d'un point d'une courbe* et la *formule* $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ en calculant mathématiquement l'ordonnée du point C.

On a :

$$y_C = \cos\left(\frac{11+6\times2016}{6}\pi\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6} + 2016\pi\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6} + 1008 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = y_A.$$

Stratégie 2.2 : On exploite la *propriété d'un point d'une courbe* et *la propriété géométrique de la périodicité d'une fonction*.

On sait que C et A sont deux points de la courbe $\mathscr{C}$, et on remarque que

$$x_C - x_A = \left(\frac{11+6\times 2016}{6}\pi\right) - \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} + 2016\pi - \frac{11\pi}{6} = 2016\pi = 1008 \times 2\pi.$$

De plus, la fonction cosinus est périodique de période 2π. On en déduit que le point C est l'image du point A par la translation de vecteur $(1008 \times 2\pi)\vec{\imath}$. On obtient alors $y_C = y_A$.

1.d. Même raisonnement qu'en « 1.c. ».
Le point D a la même ordonnée que le point A. En effet,

Stratégie 1 : À l'aide de la *calculatrice*, on utilise quand même la *propriété d'un point d'une courbe*. L'ordonnée du point D est $y_D = \cos\left(-\frac{589\pi}{6}\right) \approx 0{,}87$ (ou $\approx 0{,}8660254038$).

D'après 1.a., on a $y_A = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) \approx 0{,}87$ (ou $\approx 0{,}8660254038$). On peut conjecturer avec confiance que $y_D = y_A$.

Stratégie 2 : Exploiter la périodicité d'une fonction. Nous distinguons ci-dessous deux sous-stratégies réalisables.
Stratégie 2.1 : On utilise la *propriété d'un point d'une courbe* et la *formule* $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos x$ en calculant mathématiquement l'ordonnée du point D.
Soit : On a $y_D = \cos\left(-\frac{589\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi-600\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6} - 50 \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = y_A$.

Soit : On a $y_D = \cos\left(-\frac{589\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{589\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{588\pi+\pi}{6}\right) = \cos\left(49 \times 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d'après 1.a.), on obtient alors $y_D = y_A$.

Soit : On a $y_D = \cos\left(-\frac{589\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{588\pi+\pi}{6}\right) = \cos\left(-49 \times 2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $y_A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (d'après 1.a.), on obtient alors $y_D = y_A$.

Stratégie 2.2 : On exploite la *propriété d'un point d'une courbe* et *la propriété géométrique de la périodicité d'une fonction*.

On sait que D et A sont deux points de la courbe $\mathscr{C}$, et on remarque que :
soit $x_D - x_A = \left(-\frac{589\pi}{6}\right) - \frac{11\pi}{6} = \frac{11\pi-600\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = -100\pi = -50 \times 2\pi$;
soit $x_D - x_A = \left(-\frac{589\pi}{6}\right) - \frac{11\pi}{6} = -\frac{589\pi+11\pi}{6} = -\frac{600\pi}{6} = -100\pi = -50 \times 2\pi$;
soit $x_D - x_A = \left(-\frac{589\pi}{6}\right) - \frac{11\pi}{6} = -\frac{588\pi}{6} - \frac{\pi}{6} - \frac{11\pi}{6} = -98\pi - 2\pi = -100\pi = -50 \times 2\pi$.
De plus, la fonction cosinus est périodique de période 2π. On en déduit que le point D est l'image du point A par la translation de vecteur $(-50 \times 2\pi)\vec{\imath}$. On obtient alors $y_D = y_A$.

2. Placer le point E, symétrique du point A par rapport à l'axe des ordonnées, à l'aide de la *propriété de la symétrique axiale* avec le support instrumental : soit la droite graduée et/ou le compas, soit le quadrillage.

D'après « 1.a. », le point A existe sur le graphique donné qui permet de placer le point E, symétrique du point A par rapport à l'axe des ordonnées.

Le point E est sur la courbe $\mathscr{C}$. En effet,

Stratégie 1 : On applique la *propriété de la symétrie de deux points par rapport à l'axe des ordonnées*. Les points E et A ont des abscisses opposées et la même ordonnée. Il suffit de justifier que l'ordonnée de E est exactement $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$:

$y_E = y_A = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$, (soit utiliser la *propriété du cosinus d'angles associés opposés* : α et $-\alpha$, soit lire graphiquement sur le cercle trigonométrique pour justifier que les deux réels $\frac{11\pi}{6}$ et $-\frac{11\pi}{6}$ ont le même cosinus).

Stratégie 2 : On exploite la *propriété de la parité d'une fonction* (ici, fonction paire) et *celle de la symétrie axiale* (ici, la symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées).

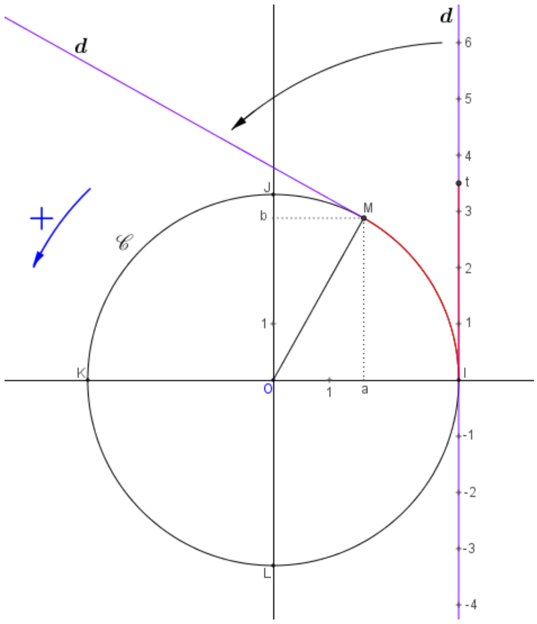
D'une part, la fonction cosinus est paire, alors la courbe $\mathscr{C}$ a l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. Et, d'autre part, A est un point de la courbe $\mathscr{C}$ et E est le symétrique du point A par rapport à l'axe des ordonnées.

Annexe n° 4 : **Situation didactique : texte de la situation, réponses correctes aux questions**

4.1. Texte de la situation didactique

Objectif : Découvrir la notion de fonctions sinus et cosinus

Partie A : ***Coordonnées d'un point associé à un nombre réel – lecture graphique sur un cercle***



Dans un repère orthonormé direct d'origine O du plan, soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. Soit t un nombre réel. On considère le point M image du nombre réel t par l'enroulement de la droite d des réels autour du cercle $\mathscr{C}$. Soient $(a\ ;\ b)$ les coordonnées du point M.
À noter que cette droite d est perpendiculaire à l'axe des abscisses au point I et qu'elle est orientée par le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées du repère. (voir la figure ci-contre)

1. Déterminer la longueur d'un tour de déplacement du point M.
Puis, compléter le tableau 1 ci-dessous.

Tableau 1

	1er tour de cercle décrit par le point M				2ème tour de cercle décrit par le point M				3ème tour de cercle décrit par le point M			
M se situe au point	I	J	K	L	I	J	K	L	I	J	K	L
Valeurs exactes de t					$2\pi R$							
Valeur exacte de a												
Valeur exacte de b												

2. Compléter les deux tableaux de variations ci-dessous pour les deux premiers tours.

Variations de a

t	0	$2\pi R$	$4\pi R$
a			

Variations de b

t	0	$2\pi R$	$4\pi R$
b			

3. Remplir les tableaux de signe de a et de b pour $t \in [0\,;2\pi R]$.

Tableau de signe de a :

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $2\pi R$
a	

Tableau de signe de b :

t	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $2\pi R$
b	

4. Calculer a et b en fonction de t et R quand M est entre I et J.

Partie B : ***Découvrir les propriétés de la fonction cosinus*** (Demi-Classe 1)

Dans le même contexte que la partie A. Vous trouverez dans la fenêtre de GeoGebra deux graphiques : « Graphique » se situe à gauche, et « Graphique 2 », à droite.

Choisir une valeur du curseur R strictement positive.

1. Modifier les coordonnées du point P : $\boldsymbol{P(t,a)}$. (*On peut double-cliquer sur le point P*)
   a. Faire varier le curseur t. Que voit-on ? Que décrit le point P ?
   Cliquer sur le point P, puis écrire dans la base de saisie : $\mathbf{Lieu}[\boldsymbol{P},\boldsymbol{t}]$. Que voit-on ? Que remarque-t-on ?
   b. Faire varier le rayon R (t est fixé). Que voit-on ? Que peut-on dire ?
   Déplacer le point P sur la courbe (R est fixé). Que remarque-t-on ?
   c. Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t.
   Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?
   d. Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? Justifier votre affirmation.

2. **Etudier maintenant le cas $\boldsymbol{R=1}$.**
   a. Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point P décrit la courbe.
   b. Modifier le curseur t allant de 0 à 2π.
   À l'aide de la lecture graphique, sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, répondre aux questions suivantes : la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en combien de points ? Préciser leurs abscisses.
   Construire le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Vérifier ce tableau de variations dans la partie A à la question 2.

Partie B : ***Découvrir les propriétés de la fonction sinus*** (Demi-Classe 2)

Dans le même contexte que la partie A. Vous trouverez dans la fenêtre de GeoGebra deux graphiques : « Graphique » se situe à gauche, et « Graphique 2 », à droite.

Choisir une valeur du curseur R strictement positive.

1. Modifier les coordonnées du point Q : $\boldsymbol{Q(t,b)}$. (*On peut double-cliquer sur le point Q*)
   a. Faire varier le curseur t. Que voit-on ? Que décrit le point Q ?
   Cliquer sur le point Q, puis écrire dans la base de saisie : $\mathbf{Lieu}[\boldsymbol{Q},\boldsymbol{t}]$. Que voit-on ? Que remarque-t-on ?
   b. Faire varier le rayon R (t est fixé). Que voit-on ? Que peut-on dire ?
   Déplacer le point Q sur la courbe (R est fixé). Que remarque-t-on ?

c. Expliquer pourquoi on peut avoir des valeurs négatives de t. Modifier le curseur t allant de -100 à 100. Animer le curseur t. Que voit-on ? Que peut-on dire ?
d. Qu'y a-t-il de commun entre toutes ces courbes ? Justifier votre affirmation.

2. **Etudier maintenant le cas $\boldsymbol{R = 1}$.**
a. Donner l'expression algébrique de la fonction dont le point Q décrit la courbe.
b. Modifier le curseur t allant de 0 à 2π.
À l'aide de la lecture graphique, sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, répondre aux questions suivantes : la courbe coupe-t-elle l'axe des abscisses ? Si oui, en combien de points ? Préciser leurs abscisses.
Construire le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Vérifier ce tableau de variations dans la partie A à la question 2.

4.2. Réponses correctes aux questions

Partie A : ***Coordonnées d'un point associé à un nombre réel – lecture graphique sur un cercle***
Le point M se déplace dans le sens direct sur le cercle $\mathscr{C}$.

1. La longueur d'un tour de déplacement du point M est $2\pi R$ (unité de longueur), le périmètre du cercle $\mathscr{C}$ de centre de O et de rayon R.

Tableau 1

	1er tour de cercle décrit par le point M				2ème tour de cercle décrit par le point M				3ème tour de cercle décrit par le point M			
M se situe au point	I	J	K	L	I	J	K	L	I	J	K	L
Valeurs exactes de t	0 ou $2\pi R$	$(\pi/2)R$	πR	$(3\pi/2)R$	$2\pi R$ ou $4\pi R$	$(5\pi/2)R$	$3\pi R$	$(7\pi/2)R$	$4\pi R$ ou $6\pi R$	$(9\pi/2)R$	$5\pi R$	$(11\pi/2)R$
Valeur exacte de a	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0
Valeur exacte de b	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$

2. Tableaux de variations
Variations de a

t	0	$\frac{\pi}{2}R$	πR	$\frac{3\pi}{2}R$	$2\pi R$	$\frac{5\pi}{2}R$	$3\pi R$	$\frac{7\pi}{2}R$	$4\pi R$
a	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0	R

Variations de b

t	0	$\frac{\pi}{2}R$	πR	$\frac{3\pi}{2}R$	$2\pi R$	$\frac{5\pi}{2}R$	$3\pi R$	$\frac{7\pi}{2}R$	$4\pi R$
b	0	R	0	$-R$	0	R	0	$-R$	0

3. Tableaux de signe de a et de b pour $t \in [0\,;2\pi R]$

Tableau de signe de a :

t	0		$\frac{\pi}{2}R$		$\frac{3\pi}{2}R$		$2\pi R$
a		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tableau de signe de b :

t	0		πR		$2\pi R$
b	0	$+$	0	$-$	0

4. L'abscisse du point M est $a = R\cos\left(\frac{t}{R}\right)$, et son ordonnée, $b = R\sin\left(\frac{t}{R}\right)$.

Partie B : ***Découvrir les propriétés de fonction cosinus*** (Demi-groupe 1)

1.a. Lorsque l'on fait varier le curseur t, on voit que dans « Graphique 1 », le point M se déplace sur le cercle $\mathscr{C}$, et simultanément, le point P se déplace dans « Graphique 2 ». Il semble que le point P décrive une courbe.

Après avoir saisi « Lieu$[P, t]$ », il apparaîtra « lieu 1 », la trace d'une courbe décrite par le point P pour une valeur de R choisie. On remarque que le point P se déplace sur la courbe lorsque l'on fait varier le curseur t ou bien lorsque l'on déplace le point P. Cela nous assure visuellement que le point P décrit la courbe.

1.b. Lorsque l'on fait varier le curseur R (t est fixé), on voit qu'il apparaît une variété de courbes qui semblent avoir la « même forme » mais de « maxima différents » ou d'« amplitudes différentes » dépendant des valeurs de R. Il semble que chaque courbe se reproduise de manière identique à intervalles (de temps) égaux et que cela semble représenter effectivement un *phénomène périodique* ou un *signal périodique* en terme de physique, notion que les élèves ont vue en Seconde, par exemple : un signal électrique de forme sinusoïdale où la tension est symétrique ($U_{max} = -U_{min}$) ; ici $U_{max} = R$.

(De plus, lorsque R varie, on voit que le cercle $\mathscr{C}$ varie et que le point M est en position fixée sur ce cercle alors qu'il ne se situe pas dans la même position dans le plan. Donc, l'abscisse a du point M varie. Comme a est l'ordonnée du point P et que son abscisse t est fixée, alors le point P se déplace verticalement lorsque R varie.)

Pour R fixé, par exemple $R = 2$, lorsque l'on « déplace » le point P sur la courbe tracée de gauche à droite ; en même temps, le point M se déplace dans le sens direct. Dans « Graphique 2 », on remarque que le point P se déplace sur la courbe de manière répétitive (ou périodique) sur des intervalles réguliers dont la longueur (ou la période) est environ $12{,}56$ ou exactement 4π (unité de longueur).

1.c. On peut avoir des valeurs négatives de t parce que t est un nombre réel (vérifiant le principe d'enroulement de la droite des réels autour du cercle $\mathscr{C}$, d'après l'hypothèse de la partie A).

Lorsque l'on modifie le curseur t, variant de -100 à 100, il apparaît une autre partie de la courbe où t prend des valeurs négatives.

Lorsque l'on anime le curseur t, on voit le déplacement du point P sur la courbe sur l'intervalle $[-100\,;100]$, et en plus, on voit clairement « la période » ou « la répétitivité du parcours du point P sur des intervalles réguliers » ou « même motif à intervalles (de temps) égaux ».

Visuellement, il semble que la courbe tracée admette l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

1.d. Visuellement, ces courbes semblent avoir la même forme et elles semblent admettre l'axe des ordonnées comme axe de symétrie. De plus, chaque fonction représentée par chaque courbe est périodique et bornée.

2. **Cas** $R = 1$

   a. Le point P décrit la courbe représentative de la fonction dont l'expression algébrique est $f(t) = \cos t$.

   b. Graphiquement, sur l'intervalle $[0\,;2\pi]$, la courbe coupe l'axe des abscisses en deux points dont les abscisses sont respectivement $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$.

   Construire les tableaux de variations :

   Tableau de variations de la fonction cosinus

t	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$cost$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Annexe n° 5. **Nouveaux programmes actuels de mathématiques du secondaire français sur les thèmes « Trigonométrie » et « Fonctions cosinus et sinus »**

5.1. Nouveau programme de mathématiques de 3e (cycle 4)

Nous avons extrait du BO n° 30 du 26-7-2018 concernant l'enseignement de la trigonométrie en 3e que l'on a classée dans le thème D portant sur « Espace et géométrie ». Ce nouveau programme est en vigueur à partir de la rentrée 2018.

> ➢ lignes trigonométriques dans le triangle rectangle : cosinus, sinus, tangente.

5.2. Nouveau programme de mathématiques de Seconde à la rentrée 2017

Nous avons extrait du BO n° 18 du 4-5-2017 concernant l'enseignement de la trigonométrie en Seconde que l'on a classé dans le domaine « Fonctions ». Ce nouveau programme est en vigueur à partir de la rentrée 2017. Remarquons qu'en ce qui concerne ce thème d'étude, il n'y pas de changement par rapport au programme de mathématiques de Seconde 2010.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Trigonométrie « Enroulement de la droite numérique » sur le cercle trigonométrique et définition du sinus et du cosinus d'un nombre réel.	• On fait le lien avec les valeurs des sinus et cosinus des angles de 0°, 30°, 45°, 60°, 90°.	On fait le lien avec la trigonométrie du triangle rectangle vue au collège. La notion de radian n'est pas exigible. ⇄ *Réfraction (optique).*

5.3. Nouveau programme de mathématiques de 1re Scientifique

Nous avons extrait du BO n° 18 du 22-1-2019 concernant l'enseignement des fonctions trigonométriques en 1re Scientifique que l'on a classé dans le domaine « Analyse ».

- **Fonctions trigonométriques**

Contenus

- Cercle trigonométrique. Longueur d'arc. Radian.
- Enroulement de la droite sur le cercle trigonométrique. Image d'un nombre réel.
- Cosinus et sinus d'un nombre réel. Lien avec le sinus et le cosinus dans un triangle rectangle. Valeurs remarquables.
- Fonctions cosinus et sinus. Parité, périodicité. Courbes représentatives.

Capacités attendues

- Placer un point sur le cercle trigonométrique.
- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.
- Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de *x*, les cosinus et sinus d'angles associés à *x*.

Démonstration

- Calcul de $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{3}$, $\sin\frac{\pi}{3}$.

Exemple d'algorithme

- Approximation de π par la méthode d'Archimède.

Remarquons qu'en ce qui concerne ce nouveau programme de 1re Scientifique, il y a maintenant la notion de « longueur d'arc » et aussi une nouvelle expression utilisée « les cosinus et sinus d'angles associés à x ».