Philosophie de la connaissance et logique intuitionniste

Joseph Vidal-Rosset

Département de philosophie - Nancy
UFR Connaissance de l'Homme

École doctorale Langages, Temps, Société

Philosophie de la connaissance et logique intuitionniste

MÉMOIRE de SYNTHÈSE

présenté et soutenu publiquement le 4 décembre 2012 à Nancy

pour l'obtention de l'

Habilitation de l'Université de Lorraine

(Spécialité Philosophie)

par

Joseph Vidal-Rosset

Composition du jury

Président :	Didier Galmiche, Professeur à l'Université de Lorraine, Nancy (France) ;
Rapporteurs :	Pascal Engel, Professeur à l'Université de Genève (Suisse) ; François Lepage, Professeur à l'Université de Montréal (Canada) ; Marco Panza, Directeur de recherches, CNRS, Paris (France) ;
Examinateurs :	Gerhard Heizmann, Professeur à l'Université de Lorraine, Nancy (France) ; Jan von Plato, Professeur à l'Université d'Helsinki (Finlande).

Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie - Archives Henri Poincaré — UMR 7117

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je vais tenter de remercier ici tous mes collègues, qui, de près ou de loin, d'une façon ou d'une autre, dans l'espace ou dans le temps, m'ont aidé ou soutenu dans la réalisation des pages qui suivent, en espérant que ceux qui sont victimes d'un oubli me pardonneront.

Merci à Konstantine Arkoudas, Alessandro Avellone, Michel Bastit, Jacques Bouveresse, Stéphane Chauvier, Marcel Crabbé, Gabriella Crocco, René David, Michael De, David DeVidi, Jacques Dubucs, Roy Dyckhoff, Pascal Engel, Richard L. Epstein, Mauro Ferrari, Didier Galmiche, Jean Gayon, Pierre Guenancia, Gerhard Heinzmann, Jonathan Jacky, Jean-Baptiste Joinet, Johan W. Klüwer, Dominique Larchey-Wendling, François Lepage, Michel Lévy, Mathieu Marion, Sean McLaughlin, Cyrille Michon, Jean Mosconi, Sara Negri, Karim Nour, Michel Parigot, Franck Pfenning, Roger Pouivet, Philippe de Rouilhan, Roland Quilliot, Christophe Raffalli, Manuel Rebuschi, Elisabeth Schwartz, Göran Sundholm, Neil Tennant, Claudine Tiercelin, Jan von Plato, Pierre Wagner, Jean-Jacques Wunenburger.

Je remercie enfin tout particulièrement l'institution des Archives Poincaré à Nancy, qui est un environnement de travail d'une exceptionnelle qualité.

Je dédie ce mémoire d'habilitation à Marie-Cécile, sans qui je ne serais jamais parvenu à bout de ce travail.

Table des matières

Table des figures

Préface

1 Pourquoi un « mémoire de synthèse »

L'exercice de l'Habilitation à Diriger des Recherches étant défini de manière équivoque, il entraîne une hésitation dès lors qu'on entreprend sérieusement de le réaliser. En effet, j'étais libre de présenter ou bien un dossier sur travaux accompagné d'un rapport de synthèse qui les décrit, ou bien un dossier comprenant, outre le rapport de synthèse et les publications, un mémoire original. Comme on ne peut rien changer au volume de l'ensemble de ce que l'on a publié, j'avais donc le choix entre écrire un rapport de synthèse et un mémoire original ou bien présenter uniquement un rapport de synthèse de travaux. Dans un rapport de synthèse de travaux, le plus intéressant est souvent la partie la plus autobiographique, c'est-à-dire celle où l'auteur décrit son parcours professionnel et intellectuel ; en revanche il est difficile d'échapper au caractère décousu et elliptique de la description des publications.

Quatre de mes derniers articles, qui tous avaient un rapport avec la philosophie de la connaissance et la logique intuitionniste, me donnaient déjà matière à la rédaction d'un mémoire original ; mais je ne pouvais me hasarder à la rédaction précipitée d'un autre livre. J'ai donc choisi de présenter non un « rapport de synthèse de travaux », mais un « *mémoire* de synthèse », qui est en quelque sorte un essai où j'expose un parcours et un bilan de recherches. Je vais donc décrire mon parcours professionnel et intellectuel dans la prochaine section. La conclusion de ce mémoire portera sur les résultats qui se dégagent des quatre articles de ce volume, ainsi que sur le projet d'un autre livre.

2 Autobiographie professionnelle et intellectuelle

2.1 Mes années d'études

Le parcours intellectuel et professionnel qui conduit jusqu'à cet essai est issu, me fait remonter jusqu'au début des années 80, à mes années de préparation de l'agrégation de philosophie, lorsque j'étais étudiant en Première supérieure au Lycée Fénelon à Paris [1] et à l'Université de Panthéon-Sorbonne. Quelles que soient les discussions idéologiques qui peuvent tourner autour des classes préparatoires aux grandes écoles en France, je ne veux pas oublier de mentionner cette période de ma formation, car c'est bien pendant ces années que j'ai eu mes premiers contacts avec l'histoire de la philosophie et que j'ai pris conscience du rôle crucial que joue le professeur de philosophie dans la formation qu'il dispense à ses étudiants, et de l'importance de la répétition de l'exercice difficile de la dissertation. Je tiens donc à rendre hommage à Roger Vila et Anne-Marie Boudot, car c'est à eux que je dois d'avoir découvert et aimé la philosophie exposée de manière magistrale. C'est pendant ces premières années que j'ai découvert le système des *Méditations* de Descartes tel que l'expose Gueroult, auquel l'article de ce volume apporte d'une certaine façon sa contribution. Je dois aussi à l'existence de la Licence de Logique de l'Université de Paris 1 mon initiation à la logique mathématique, grâce aux cours de Michel Parigot, et à la philosophie analytique, enseignée alors par Jacques Bouveresse et Philippe de Rouilhan. Cet enseignement à l'Université de Paris 1, me fit découvrir un style philosophique que j'ignorais, bien que le classicisme des questions traitées par la philosophie analytique n'était évidemment pas étranger à ce que j'avais appris.

Une vie intellectuelle est comparable à une vie tout court, elle est faite de rencontres, plus ou moins marquantes. La rencontre la plus marquante de mes années d'études fut sans aucun doute celle de Jules Vuillemin. Alors agrégatif, je suivais régulièrement les cours de Vuillemin au Collège de France, où il exposait le contenu des ses prochains livres, à savoir *Nécessité ou Contingence* [146], et *What are philosophical systems ?* [147]. Des cours et séminaires de Vuillemin, je garde un souvenir qui mérite d'être rapporté ici. Je ne voudrais pas répéter inutilement ce que j'ai écrit dans le dernier article de ce volume, page 119, mais j'assume sans la moindre difficulté le fait de penser que la classification des systèmes philosophiques de Vuillemin est une œuvre philosophique majeure, sans doute à mon avis l'une des plus importantes dans l'histoire de la philosophie du vingtième siècle, parce qu'elle apporte une clarification sans précédent sur la nature des systèmes philosophiques. Je ne dois pas tout à Vuillemin, mais je lui dois l'essentiel, c'est-à-dire la compréhension de la nature d'une dispute philosophique. Je lui dois de m'avoir aidé à définir mon sujet de thèse de Doctorat, où j'ai réfléchi à la fois sur une partie de l'œuvre de Quine et sur la classification définie dans [146] et [147], et la correction aussi précise que patiente de tous les brouillons que je lui envoyais. Je lui dois enfin un goût pour un certain style philosophique concis et précis autant que possible. De l'histoire de la philosophie et des sciences, je me soucie sans doute moins que lui, et je crois accorder une importance plus grande qu'il ne le voulait au rôle de la logique dans l'argumentation philosophique. Mais de son enseignement et de son aide amicale, je retiens surtout

1. Après des études secondaires au Lycée Vaugelas de Chambéry (Savoie) et de Lettres supérieures au Lycée Champollion de Grenoble

aujourd'hui qu'un travail philosophique se juge aussi et peut-être surtout à partir du gain de clarté conceptuelle qu'il apporte. Lorsqu'à Dijon j'ai discuté avec Vuillemin de mon sujet de thèse, j'entends encore le conseil qu'il m'avait donné : « faites comme vous avez fait pour rédiger votre article sur Bachelard, il faut que votre thèse soit le résultat de l'application d'une méthode et parvienne à des résultats ». Je ne sais pas si j'ai toujours réussi à suivre correctement son conseil, mais je sais que je ne l'ai jamais oublié et que même si je l'ai reçu lorsque j'étais déjà enseignant, ce souvenir appartient à mes années d'études.

2.2 Mes années d'enseignement

En 1987, je fus nommé comme professeur agrégé au Lycée Prieur de la Côté d'Or, à Auxonne, en Bourgogne. J'y enseignerai pendant neuf ans. De la même façon que je n'ai pas voulu passer sous silence mes années d'études en classes préparatoires, je tiens à dire quelques mots sur ce passage par l'enseignement secondaire. Ce fut pour moi une période à la fois heureuse et formatrice. Bien entendu je ne fais pas allusion ici au bonheur de ma vie personnelle à cette époque. Je veux parler du bonheur que j'ai eu à faire découvrir la philosophie à des esprits vierges, et du caractère formateur de l'exigence constante de simplicité et de clarté qui est l'impératif catégorique de l'enseignement de la philosophie en classe de terminales. C'est une fierté pour moi d'avoir eu parmi mes élèves du lycée Prieur, trois d'entre eux qui sont devenus plus tard des professeurs agrégés de philosophie. Ces années d'enseignement en Lycée sont probablement aussi à l'origine du fait que je n'ai pas ressenti la moindre répugnance mais au contraire du plaisir à écrire deux ouvrages pédagogiques, à savoir *Qu'est-ce qu'un paradoxe ?*[126] et *Les paradoxes de la liberté*[133], et j'avoue que rien ne m'a fait plus plaisir que d'entendre certains de mes collègues, en classes préparatoires comme à l'Université, me dire que ces ouvrages leur avaient été utiles dans leur enseignement.

Ce point me donne l'occasion de souligner le fait que je crois qu'un enseignement de philosophie en Lycée ne devrait certainement jamais être séparé d'une activité de recherches. C'est à cette même époque que Jean-Jacques Wunenburger m'invita à accepter une charge de cours à l'Université de Bourgogne, et que Jean Gayon m'associa régulièrement à des journées d'études. L'une d'entre elles a donné naissance à cet article évoqué plus haut, intitulé « L'intuitionnisme de Gaston Bachelard » [122] qui me donna l'occasion de reprendre contact avec Vuillemin. C'est pendant cette période, où mes charges de cours en Lycée n'ont jamais été inférieures à 14 heures hebdomadaires auxquelles s'ajoutaient mes heures de cours à l'Université de Bourgogne, que j'ai rédigé ma thèse de Doctorat. Je dois remercier Philippe de Rouilhan qui me conseilla d'abandonner un premier sujet de thèse probablement irréalisable et Elisabeth Schwartz qui accepta de me diriger pour un nouveau sujet sur lequel j'avais discuté avec Vuillemin. Au regard de la rudesse de la compétition qui sévissait déjà pour l'obtention des postes d'enseignant-chercheur, je mesure la chance que j'ai eue d'obtenir mon élection et (donc ma promotion) comme Maître de conférences à l'Université de Bourgogne en 1997, puis ma mutation à l'Université de Nancy 2 en 2004.

Aussi bien à Dijon qu'à Nancy, j'ai été jusqu'à aujourd'hui chargé d'enseigner principalement la logique mathématique, la philosophie contemporaine et l'histoire de la philosophie à l'âge classique. L'encadrement de quelques mémoires de Maîtrise mis à part, j'ai eu l'honneur et la chance d'être invité par Marcel Crabbé en 2001 à l'Université Catholique de Louvain-la-Neuve pour participer à un jury de thèse de Doctorat, ainsi que plus récemment, en 2011, par Cyrille Michon à l'Université de Nantes, pour un autre jury de thèse. Enfin j'encadre actuellement avec Gerhard Heinzmann une thèse qui portera sur un manuscrit inédit de Vuillemin. J'espère que cette habilitation m'offrira l'occasion d'encadrer d'autres travaux et d'intensifier mon activité de recherches, comme je l'ai fait en cette année 2012, avec l'organisation de journées d'études à Nancy (une sur le thème « Logique classique vs. logique intuitionniste », une autre en décembre sur « l'intuitionnisme kantien » dans le cadre des « Journées Vuillemin »). Mais comme je présente plus en détails ces éléments dans le CV en Annexe de ce volume (pages 165-167), je préfère insister pour finir cette rapide autobiographie intellectuelle et professionnelle sur le bilan de mes activités de recherches.

2.3 Bilan synthétique des mes activités de recherches

Mon activité de recherches qui a suivi la rédaction de ma thèse (1996) se divise en deux périodes que l'on peut identifier à l'aide de la bibliographie donnée à la fin de cet ouvrage. La première période, de 1995 à 2006 (de [121] à [131]) est marquée par un effort d'approfondissement de la théorie des systèmes philosophiques de Vuillemin et de la théorie de l'engagement ontologique chez Quine. Une partie de ces publications [126, 127, 129, 130, 131] a une intention ouvertement pédagogique et vise à mieux faire connaître et comprendre la pensée de Vuillemin comme celle de Quine. D'autres articles de cette période dépassent le seul intérêt pédagogique et apportent des résultats. Dans [122] par exemple, j'ai pu éprouver le caractère heuristique de la classification de Vuillemin, en montrant qu'elle permettait de définir la philosophie de la connaissance de Bachelard comme appartenant à la classe des systèmes intuitionnistes. Dans [124], j'ai montré comment l'analyse que Vuillemin donne de la preuve par les effets de l'existence de Dieu chez Anselme s'applique également à la preuve que Descartes donne dans la troisième *Méditations* et permet de comprendre à la fois les mérites et les limites de celle-ci. Parallèlement à cet usage de la classification de Vuillemin, je me suis efforcé de montrer comment la théorie de la connaissance de Quine, intégralement fondée sur la logique classique, entend faire échec à l'essentialisme d'Aristote [125]. J'ai montré également comment il était possible du point de vue de Quine, *d'éclairer* la distinction kantienne entre jugements analytiques et jugements synthétiques [128], contrairement à la simplification abusive que l'on donne habituellement du propos du logicien américain sur cette question.

J'ai aujourd'hui rompu avec le conservatisme logique de Quine, c'est-à-dire avec la croyance selon laquelle la logique classique est « la bonne logique » pour le développement de la pensée philosophique. Ce conservatisme logique était adopté moins ouvertement par Vuillemin, en raison de sa « méta-philosophie » pluraliste (pour reprendre l'expression de Chauvier), mais il n'en reste pas moins qu'il considérait que la logique intuitionniste était incapable d'apporter une preuve du caractère inadéquat ou insuffisant du réalisme, comme de tout système « dogmatique » de sa classification. Un effort de compréhension de la position intuitionniste, des fondements de la logique intuitionniste et de ses méthodes de preuves, m'a conduit à rejeter le classicisme logique d'un Quine et à m'éloigner du pluralisme philosophique de Vuillemin [2].

Cette seconde période de mon « développement philosophique » a probablement commencé avec la rédaction d'un ouvrage pédagogique intitulé *Les paradoxes de la liberté - Arguments logiques au sujet de la contingence, du libre arbitre et du choix rationnel* [133], publié chez Ellipses, car, comme Vuillemin l'a lui-même souligné, aucune classe de systèmes philosophiques autre que l'intuitionnisme, n'accorde autant de valeur au concept de liberté. La fréquentation de l' œuvre du philosophe intuitionniste et logicien Tennant m'a conduit à écrire que les fameux théorèmes d'incomplétude de Gödel n'apportaient pas d'argument logique décisif en faveur du réalisme platonicien, ou pour le dire autrement, que ces théorèmes ne prouvent pas que, d'une façon générale, la vérité transcende la preuve, ce qui serait une réfutation du bien fondé de la position intuitionniste. Mais la conclusion de cet article [132], reste aujourd'hui à mes yeux trop timide, puisque après avoir exposé ce qui oppose le réalisme d'un côté (Shapiro - Ketland) et l'intuitionnisme (Tennant) de l'autre, je conclus cet article *à la Vuillemin*, en disant qu'il s'agit là du modèle même d'une querelle philosophique et me refuse à trancher d'un strict point de vue logique ou scientifique. Je trouve maintenant cette conclusion insatisfaisante. Mes dernières publications se défont de cette timidité. Lorsqu'il s'agit d'approfondir une analyse du principe du tiers exclu, étrangement commune à Russell et à Tennant, qui tous deux en font un vérité *synthétique a priori*, c'est du côté de l'intuitionnisme que je vois la cohérence [136]. Lorsqu'après quelques années de réflexions sur le sujet, je reprends une fois de plus la critique logico-philosophique que Vuillemin, dans *Nécessité ou Contingence*, fait de la preuve que Prior donne du Dominateur, j'ai réalisé qu'il est possible, du point de vue intuitionniste, d'écarter toutes les critiques que Vuillemin fait de la preuve de Prior [137]. Cette preuve a deux conséquences philosophique à mes yeux.

2. Voir le dernier article de ce volume.

Elle montre d'une part le caractère naturel de la logique intuitionniste qui s'impose comme *logique de base* dès lors qu'il s'agit de rendre compte d'un point de vue logique de nos intuitions temporelles et modales. D'autre part, cette réflexion conduit à remettre en cause la portée du pluralisme philosophique de Vuillemin, dans un débat qui, pour ainsi dire, opposerait ce dernier au Dummett du *The Logical Basis of Metaphysics*. Autrement dit, si l'intuitionnisme est capable d'apporter la réponse la plus simple et le plus élégante qui puisse se concevoir à l'argument de Diodore, définitivement désamorcé [137] d'un point de vue logique, est-il encore possible d'être pluraliste, même d'un point de vue dit « méta-philosophique » ? La réponse à cette question occupe le dernier chapitre de ce mémoire.

3 Objet et plan de ce mémoire

Le titre de ce mémoire, *Philosophie de la connaissance et logique intuitionniste*, indique l'unité des articles qui composent cet ouvrage : ce travail de recherches est un effort pour montrer ce qu'apporte la logique intuitionniste de Heyting à la philosophie de la connaissance, telle que celle-ci a été définie par Vuillemin à partir de sa classification des systèmes philosophiques. Il faut donner à cette expression « philosophie de la connaissance » non pas uniquement un sens épistémologique qui renverrait à l'enquête sur l'acquisition de la connaissance, mais également un sens ontologique, puisqu'un système philosophique qui porte sur le contenu de la connaissance et fait passer au second plan l'enquête sur l'accès à celle-ci, est aussi évidemment une philosophie de la connaissance. Pour rendre compte de l'unité des ces articles, on peut aussi faire référence au titre d'un des livres de Dummett, *The Logical Basis of Metaphysics*, puisque tous ces articles montrent, à partir d'un angle à chaque fois différent, à quel point le rejet ou l'adoption de la logique intuitionniste fonde une métaphysique de la connaissance, c'est-à-dire décide du domaine de celle-ci ou de ses conditions de possibilité.

On verra que la référence conjointe à Russell et à Tennant occupe le premier chapitre (c'est-à-dire le premier article) de ce mémoire qui est une reprise de [136], ainsi que le prolongement de publications antérieures, à savoir [131, 129, 128]. Cette conjonction s'explique à la fois par l'origine de mon travail de recherches et par un tournant de celui-ci qui m'a conduit à un réexamen. J'ai écrit sous la direction d'Elisabeth Schwartz une thèse de doctorat intitulée *Philosophie des mathématiques et systèmes philosophiques*. La première partie de cette thèse portait sur l'usage du concept d'engagement ontologique de Quine dans la compréhension des conflits en philosophie des mathématiques ; la seconde partie intégrait les résultats de cette analyse dans la classification des systèmes philosophiques de Vuillemin (Pour un résumé de cette thèse, on peut lire [123]). J'ai donc été pendant quelques années très influencé par la philosophie de Quine et particulièrement par l'importance donnée à la logique classique du premier ordre dans l'analyse des questions fondamentales de la philosophie de la connaissance. En raison de ma mutation à l'Université de Nancy, le programme de mes cours de logique m'a conduit à m'intéresser de plus près à la déduction naturelle et à la logique intuitionniste. La lecture de Dummett, de Prawitz et de Tennant, m'ont conduit à la conclusion que le conservatisme logique d'un Quine, partagé aussi bien par Russell que par Vuillemin, est en réalité l'expression d'un préjugé philosophique aussi profond que tenace en faveur de l'idée selon laquelle la logique classique est « la bonne logique ». Le premier article de ce mémoire s'efforce de montrer qu'une compréhension correcte des fondements et de la signification de la logique intuitionniste doit permettre de venir à bout des arguments de Russell et de Quine en faveur de ce conservatisme logique qui est aussi celui de Vuillemin.

Cependant l'analyse développée par cet article a une conséquence qui va au-delà du rejet du conservatisme logique. Il faut aussi conclure que le choix entre l'adoption ou le refus d'assumer le principe de bivalence définit aussi, d'un point de vue logique, la division bipartite des classes de systèmes philosophiques selon Vuillemin : d'un côté les systèmes dogmatiques, qui assument tous la logique classique (sans pour autant lui donner la même valeur dans le système de la connaissance) et de l'autre les systèmes de l'examen qui se fondent sur un refus d'assumer le principe de bivalence, refus dont les conséquences sont développées formellement dans la logique de Heyting. Ce point important est esquissé dans le premier article et affirmé clairement dans le dernier. Ce dernier article permet de comprendre une thèse sur laquelle Vuillemin, peut-être en raison de son manque d'intérêt pour la logique intuitionniste, n'a pas suffisamment insisté : si le tiers exclu est logiquement valide, alors il exprime une vérité synthétique *a priori*, comme l'affirme avec raison Tennant. Cette conclusion par conséquent complète la définition que Vuillemin donne de la philosophie kantienne comme un exemple de philosophie intuitionniste : d'un point de vue logique [3] le tiers exclu n'est pas une vérité analytique [4].

De la même façon, le second article de ce mémoire, intitulé « Preuves intuitionnistes touchant la Première Philosophie » [139], qui poursuit et achève un travail publié en 2001 [124], *prouve* que les deux preuves fondamentales des *Méditations métaphysiques* de Descartes, à savoir la preuve du *Cogito* et la première preuve de l'existence de Dieu, sont recevables du point de vue de la logique intuitionniste, conformément à la caractérisation que Vuillemin fait de la philosophie de Descartes.

Le troisième et avant dernier chapitre a une portée plus critique, puisqu'il est une défense intuitionniste de la preuve que Prior a donné de l'argument de Diodore. La logique intuitionniste permet de montrer que les trois critiques que Vuillemin a développées contre la preuve de Prior peuvent être écartées si on donne à cette preuve élé-

3. Par l'expression "du point de vue logique", j'entends et j'entendrai dans tous les articles de ce volume "du point de vue de la logique intuitionniste".

4. La question de savoir si cette intuition a un écho dans le système de Kant fera l'objet d'un article qui est en préparation.

gante un sens intuitionniste. Ce chapitre, qui est aussi l'approfondissement logique de thèses exposées dans *Les paradoxes de la liberté* [133], reprend [137] et l'améliore en corrigeant une faute dans la démonstration page 108 [5], et en rendant plus limpide la preuve finale, enfin totalement conforme à toutes les règles intuitionnistes de la déduction naturelle.

Ces trois articles sont autant d'usages philosophiques de la logique intuitionniste et m'ont conduit à un réexamen de la classification des systèmes philosophiques de Vuillemin. En poursuivant une réflexion déjà engagée dans [130, 132], je montre dans le dernier chapitre [138], en guise de conclusion, que d'une part la classification de Vuillemin est conforme à la division fondamentale entre logique classique et logique intuitionniste, mais que le pluralisme philosophique que Vuillemin considère comme une conséquence nécessaire des principes de sa classification, ne s'impose pas comme il l'affirme, si l'on prend au sérieux la prétention de la logique intuitionniste d'être la logique de base de la connaissance humaine et d'apporter une correction aux illusions philosophiques qui naissent d'un usage non critique de la logique classique.

5. je dois à Michael De d'avoir attiré mon attention sur cette faute.

Introduction
La conception intuitionniste de la logique

On néglige presque toujours le fait que, dans les applications de la logique, il s'agit toujours de ce que nous savons et des conclusions que nous pouvons tirer de ce que nous savons. On fera sans doute l'objection qu'en adoptant ce point de vue je base la logique sur la théorie de la connaissance, dans laquelle il n'y a pas plus d'accord entre les opinions qu'en métaphysique. Je réponds qu'il faut choisir un point de départ ; ce qui importe c'est que les notions de base soient aussi immédiates que possible. Or, du moins pour l'homme, le savoir est plus immédiat que l'être, qui ne se manifeste pour lui que par une analyse du savoir.

Heyting

Cette introduction, qui reprend le titre d'un article de Heyting [51], a pour objet de faciliter la lecture des chapitres qui suivent. On suppose le lecteur a une connaissance de la logique classique. La section suivante établit la liste des symboles utilisés dans cette Introduction et dans le reste du volume.

1 Langage symbolique

1.1 Langage objet :

- variables propositionnelles : $A, B, C \ldots...$,
- constante du vrai : $\top$,
- constante du faux : $\bot$,
- négation : $\neg$,
- conjonction : $\wedge$,
- disjonction : $\vee$,
- conditionnel : $\rightarrow$,
- biconditionnel : $\leftrightarrow$,
- quantification universelle : $\forall$,
- quantification existentielle : $\exists$,
- variables d'individus : $x, y, z, \ldots$ (dernières lettres de l'alphabet),
- constantes d'individus : $a, b, c, \ldots$ (premières lettres de l'alphabet),
- prédicats à n places d'arguments : $Fx, Gxy, \ldots, Ha, \ldots.$
- parenthèse ouvrante : (
- parenthèse fermante :).

1.2 Métalangage

- « A est dérivable » (ou « A est prouvable ») : $\vdash A$
- « A n'est pas dérivable » ((ou « A n'est prouvable »)) : $\nvdash A$
- les indices m, i, c sous le symbole de conséquence syntaxique $\vdash$ ou de non-conséquence syntaxique $\nvdash$ indiquent respectivement que la formule est prouvable (*resp.* non prouvable) en logique minimale, en logique intuitionniste, en logique classique : $\vdash_m A$, $\nvdash_m B$, $\vdash_i C$, $\nvdash_i C$, $\vdash_c D$, $\nvdash_c E$.

1.3 Formalisme des preuves ou des schémas de preuves

Pour la déduction naturelle, c'est le formalisme de la déduction dans le style inventée par Fitch [35] qui a été privilégié [6]. L'Annexe A donne les règles de la déduction naturelle en logique propositionnelle minimale, intuitionniste et classique.

6. Ce choix s'explique par souci de clarté et de pédagogie. Le style de Fitch, appelé aussi « style drapeau », rend les preuves très lisibles en raison de sa quasi-linéarité et de la parfaite lisibilité du rôle des preuves subalternes et de la décharge progressive des hypothèses. Ce style est cependant négligé, pour ne pas dire méprisé, par la majorité actuelle des théoriciens de la preuve, qui lui préfère le style arborescent de Gentzen, qui est plus compact, et qui, dans certains cas, permet de mieux saisir la structure des preuves et surtout de *mieux les comparer*. Du point de vue du calcul ces styles sont rigoureusement équivalents : tout ce qui peut être démontré en déduction naturelle dans le style de Gentzen peut être aussi démontré dans le style de Fitch, et réciproquement.

On a choisi également de reprendre la méthode des arbres de Beth pour la logique intuitionniste telle qu'elle a été exposée par Bell *et al.* [6, chap. 5, pp. 192-223]. Cette méthode est exposée à la section 4 de cette Introduction (pages 30-36) ; elle implémente les modèles et contre-modèles de Kripke[7] et permet à des étudiants qui connaissent la méthode des arbres de réfutation en logique classique, telle qu'elle est exposée par Lepage [64], d'apprendre à tester une formule intuitionniste du premier ordre de manière rapide et efficace, sans passer ni par la déduction naturelle, ni par le calcul des séquents dont l'apprentissage est plus long et plus difficile. Enfin, cette méthode de preuve par recherche d'un contre-modèle, a pour mérite de permettre de visualiser clairement le comportement dynamique du conditionnel et de la négation intuitionniste, ce qui montre aussi comment la logique intuitionniste enrichit le langage de la logique classique.

Remarque. *On n'insiste dans cette Introduction que sur l'interprétation de la logique propositionnelle car, la validité sémantique en logique intuitionniste est équivalente à la dérivabilité en logique propositionnelle intuitionniste*[8] *; il n'est donc pas utile d'ajouter une complication dans l'exposé en abordant le cas de la quantification intuitionniste du premier ordre, dont on donne cependant les règles pour la méthode de décision de Bell et al., mais sans approfondir dans cette Introduction la question du calcul intuitionniste des prédicats*[9].

2 Une logique encore peu connue et mal comprise

Pourquoi la logique intuitionniste, en dépit de nombreuses études dont elle a fait l'objet, est-elle encore aujourd'hui peu connue et mal comprise par les philosophes ? On voit trois raisons majeures qui permettent de l'expliquer.

1. La première raison est relative à l'enseignement de la logique. Parce qu'il est évidemment préférable dans l'apprentissage d'une science d'aller du simple au complexe, il est sain que l'enseignement de la logique commence par l'exposé de la logique classique. Nous apprenons à penser rationnellement en conformité avec la sémantique de la logique classique, si bien qu'après l'apprentissage plus ou moins long et plus ou moins approfondi de la logique classique

7. Définis plus bas, pages 10-11.
8. Voir sur ce point Mints [71, p. 47].
9. Ce point rappelé par Mints signifie que l'explication de ce qu'est une *inférence valide* du point de vue intuitionniste peut être développée exclusivement au niveau du calcul propositionnel, sans qu'il soit nécessaire de recourir au calcul des prédicats. Cela ne signifie évidemment pas que le calcul des prédicats intuitionniste ne soit pas utile dans certains cas pour décider plus aisément du caractère correct du point de vue intuitionniste de certaines inférences ; son usage est par exemple pratiquement indispensable pour traduire les preuves des *Méditations* de Descartes (voir chap. 2).

du premier ordre, on peut éprouver de fortes résistances au changement de perspective qu'impose la logique intuitionniste.

2. La seconde raison tient à la logique intuitionniste elle-même, pour laquelle le problème de la décision est plus complexe que pour la logique classique. Un logicien qui connaît aussi bien la logique classique que la logique intuitionniste, n'aura aucune peine à voir tout de suite que la formule suivante

$$((\neg\neg A \to A) \to (\neg A \vee A)) \to (\neg A \vee \neg\neg A) \tag{1}$$

est immédiatement réductible à $X \to \top$ et donc à une tautologie classique, mais aura nécessairement besoin de plus de temps, voire d'un papier et d'un crayon, pour dire si (1) est ou n'est pas prouvable en logique intuitionniste [10]. Il est difficile de ne pas remarquer, même si ce n'est qu'un paradoxe apparent, que la logique intuitionniste, parce qu'elle est moins simple que la logique classique, semble être par contraste moins “intuitive” qu'elle.

3. La dernière raison tient à l'histoire de la philosophie et de la logique. Même si la logique classique s'est considérablement perfectionné au vingtième siècle, et qu'il est devenu très banal de remarquer l'erreur que Kant [56, Préface de la seconde édition, p. 37] a commis en affirmant que la logique semblait arrêtée et achevée depuis Aristote, il n'en reste pas moins vrai que la logique classique est incontestablement *née* avec Aristote, alors que la logique intuitionniste est née au vingtième siècle avec Heyting, au début des années 30 [11]. Il n'est donc pas très surprenant que ni la compréhension philosophique de la valeur de cette logique pour la connaissance humaine, ni la connaissance précise de ses propriétés formelles ne soient encore très largement connues. On sait que, du point de vue philosophique, toutes les positions de Brouwer, de Heyting et de Dummett, ne se rejoignent pas. Mais comme on peut s'en douter, il n'y a en revanche qu'une et une seule logique intuitionniste formelle, dont le perfectionnement des procédures de preuves reste actuellement encore un sujet d'étude important pour les logiciens.

3 Contexte et fondement de la logique intuitionniste

Définition 1. *On appelle « logique intuitionniste » l'ensemble des règles logiques définies par Heyting [49] qui permettent de définir les déductions logiquement correctes dans la mathématique intuitionniste de Brouwer* [12].

10. La formule (1) n'est pas prouvable en logique intuitionniste.
11. Il faut noter cependant que l'idée de contester la loi logique du tiers exclu n'a pas été exprimée pour la première fois par Brouwer, mais par Epicure, comme le remarque Vuillemin [146, pp. 189-190].
12. Les règles pour la logique intuitionniste propositionnelle sont données en Annexe A de ce volume.

Le contexte de l'invention de la logique intuitionniste n'est pas sans conséquence. Du point de vue de Heyting, la définition de la logique intuitionniste n'a un sens clair et précis *que* dans le contexte des mathématiques intuitionnistes telles que Brouwer les a définies. C'est la raison pour laquelle il écrit [50, p. 19] que « la logique, dans le sens le plus général, est de la mathématique appliquée » et que « la logique est une partie du domaine des mathématiques ». Heyting veut dire ici que la logique intuitionniste est une partie des mathématiques intuitionnistes. Il fait par ailleurs référence à l'idée de Brouwer selon laquelle « la mathématique s'identifie avec la partie exacte de notre pensée » [50, p. 13], et ne conteste pas cette idée de Brouwer. En conséquence du point de vue de Heyting, la logique de notre pensée exacte est définie par la logique intuitionniste.

Cela éclaire la différence sur laquelle Posy [79, 104, pp. 318-320] insiste, entre deux expressions de l'intuitionnisme. La première est celle de l'intuitionnisme de Brouwer qui, comme l'explique Posy [79, p. 321-335] fonde la mathématique intuitionniste sur une philosophie qui est une phénoménologie de l'intuition et de la construction de l'objet mathématique par le sujet pensant, et qui est aussi une critique acerbe de la thèse formaliste selon laquelle la mathématique serait fondée sur la logique et le langage. Aucune idée n'est plus éloignée de la philosophie de Brouwer que celle d'un Carnap qui voit la mathématique comme « une syntaxe du langage ».

Posy [79, p. 336] remarque pertinemment que l'on pouvait difficilement s'attendre à ce que les intuitionnistes formalisent une logique intuitionniste ou produisent des systèmes formels qui soient des branches de la mathématique intuitionniste et fondée sur cette logique, alors que, c'est pourtant exactement ce qui arriva avec les travaux de Heyting sur la logique intuitionniste du premier ordre et sur la théorie intuitionniste des nombres. Or, c'est précisément la logique et la philosophie de la logique de Heyting qui est la base de cette seconde branche de l'intuitionnisme qui a trouvé son développement dans la philosophie de Dummett. La difficulté présente réside bien moins dans la compréhension des raisons pour lesquelles les intuitionnistes refusent certains théorèmes de logique classique, que dans le fait de donner une interprétation claire, univoque et précise des concepts fondamentaux de la logique intuitionniste.

Pour Heyting [51, p. 226] l'application de la logique entraîne une interrogation au sujet du mot « vrai », des réponses qui enveloppent une conception du réel, et par conséquent une *interprétation* de la logique présupposant une ontologie. Cependant, à la différence de Brouwer, Heyting refuse de croire que la mathématique et la logique intuitionnistes déterminent un engagement ontologique. Elles sont pour lui, souligne Posy [79, p. 340], ontologiquement neutres, à la différence de la logique et de la mathématique classiques qui ont pour Heyting le défaut d'être « ontologiquement chargées ». Ce poids ontologique se manifeste en effet dans la sémantique de la logique propositionnelle classique qui, dans le langage de la théorie des ensembles, se définit par une application de l'ensemble P des variables propositionnelles dans l'ensemble $\{Vrai, Faux\}$ [13]. Le fait que la logique classique, en tant qu'algèbre de Boole, conduise à considérer de manière réaliste (ou platonicienne) que la vérité est un objet indépendant de la pensée et à masquer le fait que le tiers exclu n'est pas un principe logique sûr, avait déjà été remarqué par Brouwer [13]. Mais c'est incontestablement Heyting qui le premier a réfléchi à la nature de la logique intuitionniste : cette logique est pour lui ontologiquement et métaphysiquement neutre, parce qu'elle n'est pas une « logique de l'être » mais l'expression de la « logique du savoir ».

S'il est assez facile de comprendre et d'expliquer les raisons qui conduisent les intuitionnistes à rejeter la validité universelle du tiers exclu et la sémantique de la logique classique, la question de l'interprétation ou de la sémantique de la logique intuitionniste est plus complexe. C'est de cette question que l'on va maintenant tenter de traiter.

3.1 Le principe fondamental de la logique intuitionniste

Bien que la tentation soit forte de chercher à donner une interprétation totalement naturelle, empirique et générale à la logique intuitionniste, il ne faut jamais perdre de vue que cette logique a été définie par Heyting pour schématiser les inférences de la mathématique intuitionniste. C'est dans ce contexte qu'il faut se poser la question de savoir ce que sont le vrai et le faux pour le mathématicien intuitionniste.

Proposition 1 (Principe intuitionniste fondamental)**.** *La logique intuitionniste est fondée sur le refus d'assumer le principe de bivalence , selon lequel tout énoncé* **A** *est vrai ou faux de manière déterminée et indépendamment de nos procédures de démonstration ou de vérification, et par le fait d'assumer que* **A** *est vrai si est seulement si il est l'objet d'une preuve constructive et faux si ce n'est pas le cas.*

En réalité l'expression « preuve constructive » signifie « preuve intuitionniste » ou « preuve » tout court, car une preuve qui n'est pas constructive, c'est-à-dire qui ne peut être mené à terme sans faire usage de la logique classique, n'est tout simplement pas une preuve pour un intuitionniste.

Définition 2 (Constructivité de la logique intuitionniste)**.**

Le caractère constructif de la logique *se prouve* [14] et se définit à l'aide de la propriété de la disjonction dans le calcul propositionnel

$$\text{Si } \vdash_i A \vee B \text{ alors } \vdash_i A \text{ ou } \vdash_i B \qquad \text{(Propriété de la disjonction)}$$

13. Voir Cori et Lascar [19, p. 32].
14. Voir David *et al.* [95, pp. 212-215].

et par la propriété *d'existence* dans le calcul intuitionniste des prédicats :

Si $\vdash_i \exists x F x$ alors il existe un terme c tel que $\vdash_i Fc$ (Propriété d'existence)

En raison de cette définition, partout où le mot *preuve* sera écrit dans ce volume, il faudra entendre *preuve constructive*, la constructivité telle qu'elle est définie par la définition 2 n'étant pas une propriété de la logique classique.

Fitting [36, p. 437-438] définit la logique intuitionniste en insistant lui aussi sur ce que l'on a appelé plus haut le principe intuitionniste fondamental :

> Il doit être suffisant de dire que, pour un intuitionniste, *vrai* signifie *prouvé*, et *existe* signifie *a été construit*. En raison du premier point, on ne devrait pas s'attendre à ce que $X \vee \neg X$ soit logiquement valide pour un intuitionniste. Car cette formule se lit ainsi : ou bien X est prouvé, ou bien il est prouvé que X conduit à une contradiction. Parce qu'il existe, en ce moment, des questions mathématiques non résolues, $X \vee \neg X$ ne peut pas être correct quel que soit le choix que l'on fait pour définir X. De la même façon, les intuitionnistes font usage du terme *existe* en niant de leur point de vue la validité de $\neg\forall x \neg Ax \rightarrow \exists x Ax$.

On doit remarquer que dans la citation qui précède, Fitting établit une relation de synonymie pour les intuitionnistes, entre « A est vrai » et « A est prouvé », et non, comme on peut le lire parfois, « A est *prouvable* ». Or, comme le souligne Raatikainen [96], tous les intuitionnistes contemporains, depuis Brouwer, ont hésité entre une conception « potentialiste » de la vérité, où la vérité est définie par la « prouvabilité », et une conception « actualiste » où la vérité est définie par tout ce qui a fait jusqu'à présent l'objet de preuves. Dans un article remarquable par sa clarté et sa profondeur, Shramko [106] adopte une position actualiste convaincante que l'on adopte [15] et que l'on va résumer.

L'interprétation que Shramko donne de la conception intuitionniste du vrai et du faux se résume à l'idée qu'un logicien intuitionniste accepte une conception *actualiste* de la vérité : sont vrais tous les énoncés qui sont prouvés (les énoncés qui ont été prouvés restant toujours vrais), sont considérés comme faux tous les énoncés qui ne sont pas prouvés. Cette conception est adéquate avec la sémantique des modèles de Kripke, qui est habituellement donnée comme interprétation de la logique intuitionniste, et c'est cette interprétation qui montre le changement de perspective de la logique classique à la logique intuitionniste.

On sait que la logique classique a joué un rôle important en philosophie de la connaissance et en métaphysique. On peut par exemple faire usage de la sémantique

15. S'il subsiste dans ce volume des expressions qui pourraient faire croire à mon lecteur que l'intuitionnisme entraîne une conception de la vérité en termes de prouvabilité, ces expressions fautives auront tout simplement échappé à ma correction.

du calcul propositionnel classique pour imaginer une distribution des valeurs de vérités sur tous les états du monde. Cette idée a été exprimée par Wittgenstein [153] dès les premiers aphorisme de son *Tractatus* :

- 1. Le monde est tout ce qui a lieu.
- 1.1 Le monde est la totalité des faits, non des choses.
- 1.11 Le monde est déterminé par les faits, et par ceci qu'ils sont *tous* les faits.
- 1.12 Car la totalité des faits détermine ce qui a lieu et aussi tout ce qui n'a pas lieu.

Quine [85, p. 11] fait incontestablement écho à ce dernier aphorisme lorsqu'il écrit : « Les énoncés vrais sont aussi nombreux que les faux puisque chaque énoncé faux admet une négation qui est vraie ».

Pour un intuitionniste, cette idée d'une distribution des valeurs de vérité sur les propositions qui sont dans une relation projective au monde, ne rend pas correctement compte de notre usage réel du mot *vrai*. En effet, il n'est pas correct de dire que la négation de n'importe quel énoncé faux donne un énoncé qui est vrai, dès lors que l'expression *énoncé vrai* signifie *énoncé prouvé*. La négation d'un paradoxe, par exemple, c'est-à-dire la négation d'un nombre fini d'énoncés qui conjointement, sont équivalents à une contradiction, ne permet pas pour autant de savoir quel est, ou quels sont, les énoncés fautifs, même s'il n'est pas exclu qu'on puisse le savoir *plus tard*. Autrement dit

$$\nvdash_i \neg(A \wedge \neg B \wedge C) \rightarrow (\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg C) \tag{2}$$

car si l'on sait que $(A \wedge \neg B \wedge C)$ forme une conjonction contradictoire, on ne peut pas en déduire, du point de vue intuitionniste, que la négation de cette conjonction est vraie, comme on serait tenté de le penser en raison de l'application classique d'une loi de Morgan. Car pour que la disjonction $(\neg A \vee \neg\neg B \vee \neg C)$ puisse être considérée comme prouvée, il faut obtenir une preuve de l'un de ses membres, en raison de la propriété de la disjonction de la logique intuitionniste qui définit sa constructivité.

On saisit l'essentiel de la différence entre logique classique et logique intuitionniste lorsque l'on comprend que l'interprétation sémantique de cette dernière est de nature *dynamique*, contrairement à la première. C'est ce dynamisme qu'exprime l'interprétation de la logique intuitionniste à partir des modèles de Kripke qui, formellement, représentent l'intuition de la progression de la connaissance mathématique dans le temps. On comprend alors le postulat de la *persistance du vrai* : un théorème reste un théorème pour toujours ; de même il est tout aussi évident qu'il y a des énoncés que l'on ne sait ni prouver ni réfuter et qui restent donc *indécidés*. Par abus de langage on peut appeler « faux » les énoncés de cette catégorie, car si le vrai se définit par ce qui est prouvé, alors il est permis de dire qu'est faux ce qui n'est pas prouvé.

On voit donc que l'on a besoin en logique intuitionniste de *trois* signes pour exprimer le jugement que l'on peut porter sur un énoncé A.

1. A prend la valeur $\top$ si et seulement si A est prouvé,
2. A prend la valeur $\bot$ si et seulement si A peut-être *réfuté*, c'est-à-dire jugé comme *certainement faux* (A est dans ce cas *faux pour toujours* parce qu'il est prouvé que A implique une contradiction),
3. enfin A ne prend aucune valeur définie si la méthode de décision échoue à prouver comme à réfuter A.

A chacun de ces trois jugements possibles à l'issue d'une méthode de décision appliquée à un énoncé A, on peut associer à A le vrai ($\top$), ou bien le faux ($\bot$), ou bien échouer à définir une valeur de vérité pour A (voir la table 1 page 9 [16]).

Jugements sur A *via* une méthode de décision	**Valeurs de vérité associée**
$\mathbf{V}A$	$\top$
$\mathbf{F_c}A$	$\bot$
$?A$	*non fixée*

FIGURE 1 – Table de vérité intuitionniste pour une formule A

Avant d'aborder l'expression formelle de l'interprétation de la logique intuitionniste des modèles de Kripke, il est utile d'insister sur un point : la logique intuitionniste *ne doit pas être interprétée comme une logique à trois valeurs de vérité*, comme le montre le résultat suivant que l'on doit à Gödel [42] :

Théorème 1 (Gödel - 1932)**.** *Aucune logique vérifonctionnelle, à* $\boldsymbol{n}$ *valeurs, quel que soit* $\boldsymbol{n}$ *fixé et fini, ne peut fournir une sémantique adéquate pour la logique propositionnelle intuitionniste.*

Démonstration. Cette preuve est donnée par Bell *et al.* [6, pp. 195-196] [17], on la retraduit ici en faisant usage, pour plus de précision, du vocabulaire de la théorie des ensembles.

Supposons un ensemble α constitué d'un nombre $n+1$ de formules atomiques distinctes :

$$\alpha = \{P_1, \ldots, P_{n+1}\}$$

et un ensemble β fini dont les éléments sont n valeurs de vérités, numérotées de 1 à n

$$\beta = \{1, \ldots, n\}$$

16. Les signes que l'on choisit se retrouvent dans la méthode des tableaux en logique intuitionniste qui a été introduite par Fitting [36], et perfectionnée par Moscato [73] et reprise par Fiorino *et al.*[4] avec l'introduction du signe $\mathbf{F_c}$ pour dénoter un énoncé certainement faux. Enfin le signe ? est emprunté à Bell *et al.* [6] dont la méthode de décision est utilisée dans ce mémoire et exposée dans cette Introduction.
17. Voir aussi McCarty [67, p. 373]

Hypothèse H : Tous les éléments de départ α ont, sans exception,*ont une valeur de vérité une valeur de vérité déterminée*, ils ont donc tous une image qui est un élément de l'ensemble d'arrivée β.

Conséquence de H : Accepter **H** revient à définir une application de α sur β qui ne peut pas être bijective (car il y a plus de variables propositionnelles que de valeurs intermédiaires), et qui peut tout au plus être surjective, ce qui signifie que, nécessairement, au moins deux éléments de β auront la même image, c'est-à-dire la même valeur de vérité. Par conséquent la formule suivante construite à partir des éléments de α :

$$(P_1 \leftrightarrow P_2) \vee \cdots \vee (P_1 \leftrightarrow P_{n+1}) \vee (P_2 \leftrightarrow P_3) \vee \cdots \vee (P_n \leftrightarrow P_{n+1}) \tag{3}$$

aura pour valeur $\top$ quelle que soit la distribution des valeurs de vérité donnée sur les éléments de α. Or une telle sémantique est inadéquate pour la logique intuitionniste, car elle conduit à la conclusion qu'une disjonction peut-être prouvable sans que l'on puisse prouver un seul élément de la disjonction, ce qui est en contradiction avec la propriété de la disjonction de la logique intuitionniste [18]. $\square$

3.2 La sémantique des modèles de Kripke

Définition 3 (De l'interprétation sémantique des formules du calcul propositionnel intuitionniste *via* les modèles de Kripke)**.** *Dans l'ensemble des formules du calcul propositionnel intuitionniste, un modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{K} = (|\mathcal{K}|, \leq, \Vdash)$ tel que, intuitivement :*

- $|\mathcal{K}|$ ***modélise le temps****,*
- $\leq$ *une relation d'ordre partiel (préordre) pour définir* ***l'ordre du temps****, et*
- $\Vdash$ *une relation dite de "forcing" (réalisation) $\Vdash$ jouant le rôle de fonction d'évaluation d'une formule A à l'instant γ.*
  "$\gamma \Vdash A$" se lit : "A est vraie (ou vérifiée) au moment γ d'une théorie quelconque, ou mieux encore, "A est vraie à l'état de la théorie γ" (l'apport d'information au cours du temps équivaut à un changement de théorie).

On étend ensuite la relation $\Vdash$ à toutes les formules de la logique propositionnelle intuitionniste. Pour tout $\gamma, \delta \in |\mathcal{K}|$, on a :

1. *Si $\gamma \Vdash A$ et si $\gamma \leq \delta$, alors $\delta \Vdash A$ (propriété de "monotonie" ou de "persistance" : le vérifié ou le prouvé reste toujours vérifié ou prouvé) ;*

18. Ni Bell *et al.* ni McCarthy n'insistent suffisamment sur le fait qu'il est remarquable que cette démonstration soit fondée sur une généralisation du principe de bivalence . Il suffit en effet d'accepter l'hypothèse **H** selon laquelle *toute formule du calcul propositionnel reçoit une valeur de vérité déterminée, quelle que soit cette valeur, pourvu que le nombre des valeurs soit fini*, pour que l'on puisse démontrer qu'en raison du fait que l'ensemble des formules atomiques est potentiellement infini, toute sémantique vérifonctionnelle, à n-fini valeurs, est inadéquate pour la logique intuitionniste.

2. *$\gamma \Vdash \top$, $\gamma \nVdash \bot$;*
3. *$\gamma \Vdash A \wedge B$ si et seulement si $\gamma \Vdash A$ **et** $\gamma \Vdash B$;*
4. *$\gamma \Vdash A \vee B$ si et seulement si $\gamma \Vdash A$ **ou** $\gamma \Vdash B$;*
5. *$\gamma \Vdash A \to B$ si et seulement si pour tout δ tel que $\gamma \leq \delta$, $\delta \Vdash A$ implique $\delta \Vdash B$;*
6. *$\gamma \Vdash \neg A$, si et seulement si quel que soit δ tel que $\gamma \leq \delta$, $\delta \nVdash A$ (i.e. $\delta \Vdash A$ n'est pas le cas).*
7. ***Remarque :** $\gamma \nVdash A$ n'implique pas $\gamma \Vdash \neg A$ mais dit seulement "A **n'est pas prouvée à l'état de la théorie γ (mais A sera peut-être prouvé plus tard à partir d'une théorie δ)**".*

A partir de cette interprétation bien connue Shramko [106, pp. 14-15] montre qu'il est possible de définir de manière duale le faux comme la *falsifiabilité potentielle*. Pour expliquer la signification intuitionniste de ce concept et montrer que la sémantique des modèles de Kripke en rend très naturellement compte comme le dual du concept intuitionniste de vérité [19]. En effet, $\gamma \nVdash A$ signifie que A n'est pas prouvé à l'état de la théorie γ, autrement dit que, compte tenu des informations dont on dispose, on peut rejeter A comme un énoncé n'ayant jamais été prouvé jusqu'à maintenant. Remarquons ici à nouveau la dualité avec la thèse d'un énoncé vrai : si A est vrai (parce que vérifié ou prouvé), alors sa vérité persiste dans le futur ; en revanche le fait que A ne soit pas prouvé, c'est-à-dire faux, ne nous permet pas de dire qu'il ne sera pas prouvé plus tard, mais permet d'affirmer qu'il n'a jamais été prouvé ultérieurement. La vérité pour un intuitionniste persiste dans le futur, ou « vers l'avant », la fausseté persiste dans le passé, « vers l'arrière ». La vérité correspond à la preuve actuelle : on dispose D'un preuve de A ; la fausseté correspond à la falsifiabilité, ou à la fausseté potentielle : comme on peut montrer qu'il existe des situations qui falsifient A (on *peut construire des contre-modèles* qui montrent que A est un énoncé faux), A est *rejetable*, ce qui ne contredit pas l'hypothèse d'une vérification ultérieure de A ou d'une *réfutation* de A c'est-à-dire d'une preuve que A implique l'absurde.

En suivant Shramko, on peut donc définir la fausseté en logique intuitionniste à l'aide des contre modèles de Kripke de la façon suivante :

Définition 4 (De l'interprétation sémantique des formules du calcul propositionnel intuitionniste *via* les contre-modèles de Kripke)**.** *Dans l'ensemble des formules **Form**, un contre-modèle de Kripke est un triplet $\mathcal{K} = (|\mathcal{K}|, \leq, \rho, \nVdash)$ tel que, intuitivement :*

- *$|\mathcal{K}|$ **modélise le temps**,*
- *$\leq$ une relation d'ordre partiel (préordre) pour définir **l'ordre du temps**, et*

19. Shramko fait usage du symbole $\Vdash_f$. On ne reprendra pas ici ce symbole car il ne signifie ni plus ni moins que $\nVdash$ et donc dans les citations qui suivent, on remplace le $\Vdash_f$ de Shramko par le $\nVdash$ standard.

– $\nVdash$ *une relation dite de "non-forcing" (non-réalisation ou absence de preuve)* $\nVdash$ *jouant le rôle de fonction d'évaluation d'une formule A à l'instant* γ.
"$\gamma \nVdash A$*" se lit "A est fausse (ou non prouvée) au moment* γ *d'une théorie quelconque, ou mieux encore, "A est faux à l'état de la théorie* γ*". La fausseté de A ne préjuge pas de sa fausseté à venir, mais permet de dire que A n'a jamais été jusqu'à présent vérifié.*

On étend la relation $\nVdash$ *à toutes les formules de la logique propositionnelle intuitionniste :*

1. *Si* $\gamma \nVdash A$ *et si* $\delta \leq \gamma$, *alors* $\delta \nVdash A$ *(propriété de "monotonie" ou de "persistance" rétrograde : le non prouvé a toujours été jusqu'à présent non prouvé) ;*
2. $\gamma \Vdash \top$, $\gamma \nVdash \bot$ *;*
3. $\gamma \nVdash A \wedge B$ *si et seulement si* $\gamma \nVdash A$ ***ou*** $\gamma \nVdash B$ *;*
4. $\gamma \nVdash A \vee B$ *si et seulement si* $\gamma \nVdash A$ ***et*** $\gamma \nVdash B$ *;*
5. $\gamma \nVdash A \rightarrow B$ *si et seulement si il existe au moins un* δ *tel que* $\gamma \leq \delta$, $\gamma \Vdash A$ *et* $\delta \nVdash B$ *;*
6. $\gamma \nVdash \neg A$, *si et seulement si il existe au moins un état* δ *tel que* $\gamma \leq \delta$, $\delta \Vdash A$. ***Remarque :*** $\gamma \nVdash A$ *n'implique pas* $\gamma \Vdash \neg A$, *mais l'inverse est évidemment vrai : si* $\gamma \Vdash \neg A$ *alors* $\gamma \nVdash A$ *(autrement dit, si A est réfuté, alors il n'y a évidemment pas de preuve de A.)*

L'interprétation que Shramko donne de la fausseté intuitionniste est convaincante d'une part parce qu'elle est duale de la vérité intuitionniste définie par la preuve et, d'autre part, parce qu'elle également adéquate avec la méthode de décision intuitionniste des arbres de réfutation de Bell *et al.* [6] que l'on va exposer à la fin de cette introduction.

En quoi une méthode de décision par recherche d'un contre-modèle en logique intuitionniste est-elle fondamentalement de cette même méthode appliquée à la logique classique ? La réponse à cette question réside encore différence fondamentale qui oppose logique intuitionniste et logique classique. Celle-ci part de la supposition de l'absurdité de la formule A qui fait l'objet du test, pour montrer que si l'on parvient à montrer que cette supposition conduit partout à des conséquences absurdes, alors A est un théorème de la logique classique. Celle-là part de la supposition selon laquelle A serait fausse du point de vue intuitionniste, c'est-à-dire non prouvée ou incertaine, pour décider de la vérité ou de la fausseté de A, en raison de la *signification* des connecteurs donnée par la sémantique des modèles et contre-modèles de Kripke. On voit donc, une fois de plus, que le fait d'assumer le principe de bivalence en adoptant la logique classique, ou le refus intuitionniste d'assumer ce principe, détermine les règles et l'interprétation de la méthode de preuve *via* la recherche d'un contre-modèle pour la formule testée.

3.3 L'indépendance des connecteurs logiques

Proposition 2. *Selon Brouwer, Heyting et Kolmogorov, La logique intuitionniste définit le sens de chaque connecteur logique en l'interprétant à partir du concept de preuve (« interprétation BHK »).*

La sémantique des modèles de Kripke n'est pas éloignée de l'interprétation intuitionniste des connecteurs logiques donnée par l'interprétation dite de Brouwer-Heyting-Kolmogorov (BHK), appelée aussi par van Atten [117], « l'interprétation preuve » (*Proof Interpretation*) [20] :

- On obtient une preuve de $A \wedge B$ si et seulement si on a une preuve de A et une preuve de B.
- On obtient une preuve de $A \vee B$ si et seulement si on a une preuve de A ou s'il l'on a une preuve de B.
- Une preuve de $A \to B$ est une construction qui permet, à partir de n'importe quelle preuve de A, de dériver une preuve de B.
- L'absurde (noté $\perp$) n'est pas prouvable. $\neg A$ est une construction qui permet, à partir de n'importe quelle preuve hypothétique de A, de dériver une contradiction (autrement dit $\neg A \leftrightarrow A \to \perp$).

Proposition 3 (Indépendance des connecteurs primitifs - McKinsey [68])**.** *Aucun des quatre connecteurs du calcul propositionnel intuitionniste ($\neg, \wedge, \vee, \to$) n'est définissable à partir des trois autres.*

Qu'aucun de ces quatre connecteurs du calcul propositionnel intuitionniste ne soit définissable à l'aide des trois autres, Heyting [49, p. 44] le conjecture, et c'est McKinsey [68] qui en apporte la preuve en 1939, à partir d'une méthode fondée sur les matrices. Cette preuve déborde le cadre de notre propos mais elle prouve le bien fondé de la position de Heyting, sur laquelle Dummett a beaucoup insisté : la logique intuitionniste de manière correcte la signification des connecteurs logiques, puisque la signification de chaque connecteur est indépendante de celles des autres.

Il n'est donc pas surprenant qu'un des plus ardents défenseurs de la logique classique ait toujours refusé d'accorder un sens clair à la perspective intensionnelle en logique, puisque les significations spécifiques des connecteurs se dissolvent en logique classique dans les équivalences suivantes :

$$\vdash_c (A \to \neg\neg A) \wedge (\neg\neg A \to A) \tag{4}$$

20. Il est sans doute encore plus précis et judicieux d'appeler cette interprétation BHK comme le fait Mints [71, p. 25], « l'interprétation programme », en raison de la fameuse correspondance Curry-Howard qui permet d'interpréter les formules comme des types et les preuves intuitionnistes comme des programmes. Néanmoins la traduction que Mints donne Mints de l'interprétation BHK est excessivement formelle pour notre propos ; il est donc préférable de reprendre celle de Troelstra et van Dalen [116], à l'instar de van Atten [117]

$$\vdash_c ((A \vee B) \to \neg(\neg A \wedge \neg B)) \wedge (\neg(\neg A \wedge \neg B) \to (A \vee B)) \tag{5}$$

$$\vdash_c ((A \wedge B) \to \neg(\neg A \vee \neg B)) \wedge (\neg(\neg A \vee \neg B) \to (A \wedge B)) \tag{6}$$

$$\vdash_c ((\neg A \vee B) \to (A \to B)) \wedge ((A \to B) \to (\neg A \vee B) \tag{7}$$

exprimées par les formules (4) à (7) [21] , alors que ces dernières sont au contraire, du point de vue intuitionniste, salutairement détruites [22].

Il n'est pas inutile de rappeler ce que souligne à juste titre Hand [48, 38, p. 185] : « en logique classique, les connecteurs sont 'véri-conditionnels' ; en logique intuitionniste, ils sont 'preuve-conditionnels' ». Hand veut simplement dire qu'en logique classique, la signification des connecteurs est donnée par leur condition de vérité, alors qu'elle est donnée en logique intuitionniste par les règles intuitionnistes d'introduction et d'élimination des connecteurs.

On verra en observant les règles pour la méthode intuitionnistes des arbres de réfutation données plus bas, qu'il n'existe en réalité que deux connecteurs pour lesquels la supposition de l'absence de preuve entraîne une conséquence inintelligible du point de vue classique. Sont dans ce cas la négation et le conditionnel pour lesquelles on a, respectivement, lorsqu'on suppose qu'ils échouent :

$$\frac{?\neg A \checkmark}{A}$$

et

$$\frac{?(A \to B)\checkmark}{\begin{array}{c} A \\ ?B \end{array}}$$

Ce qui signifie, pour la première formule : « la supposition de l'absence de preuve de réfutation de A, laisse entendre l'existence d'une situation à venir où A serait prouvé » et, pour la seconde, « la supposition de l'absence de preuve de réfutation de $A \to B$, laisse entendre l'existence d'une situation à venir où A serait prouvé et B ne le serait pas » [23]. Mais avant d'en venir aux règles de la méthode de Bell *et al.*, approfondissons la signification du conditionnel et de la négation d'un point de vue intuitionniste.

21. Chaque formule qui forme le membre de droite dans ces conjonctions n'est *pas* prouvable en logique intuitionniste.

22. Ce point anticipe la réponse intuitionniste à l'argument conservateur de Quine selon lequel la logique intuitionniste serait fondée sur des définitions « déviantes » des connecteurs logiques (voir plus bas, pp. 54-60).

23. L'expression « laisse entendre » est la traduction littéraire de l'expression « conséquence analytique » qui n'aurait dans un tel contexte que l'apparence de plus de rigueur. La première expression exprime exactement le sens de la règle : dire qu'il n'est pas prouvé que Untel ne puisse pas devenir un jour président de la République, signifie *analytiquement* une situation *possible* où Untel est Président de la République.

3.4 Conditionnel et négation en logique intuitionniste

Détour classique

Seldin [103] a brillamment démontré à l'aide du λ-calcul que la force d'un système logique repose sur l'*implication*, et *seulement* sur l'implication. Comme il faut entendre par *implication* la prouvabilité du conditionnel [24], le résultat de Seldin n'est au fond pas surprenant : on mesure la force d'une logique à proportion des théorèmes qu'elle permet de dériver ou qu'elle *implique*. La logique classique est donc à ce titre *plus forte* que la logique intuitionniste, puisqu'elle permet de dériver un plus grand nombre de théorèmes. Toutes les formules conditionnelles correspondant au schéma

$$A \rightarrow B$$

qui ne sont pas des théorèmes de la logique classique sont telles que l'affirmation de A et la négation de B n'est pas contradictoire. Cela découle de la définition du conditionnel matériel qui définit le conditionnel en logique classique :

Définition 5 (Définition du conditionnel matériel)**.**

$$\vdash_c (A \supset B) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B) \tag{8}$$

Cette équivalence dit que le conditionnel n'est faux que si et seulement si l'antécédent est vrai et le conséquent est faux. Tester l'implication d'une formule B par une formule A, en se servant de la méthode des arbres de réfutation, revient donc en logique classique à affirmer A et à nier B : si le développement de la formule niée conduit à des contradictions dans tous les chemins de ce développement, alors A implique classiquement B ; dans le cas contraire l'arbre de la négation de A permet de donner un contre-modèle de qui réfute l'hypothèse de cette implication. Mais, évidemment, une telle méthode dépend de cet règle fondamental qui définit la logique classique :

$$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \neg\neg A & \neg\mathbf{I} \\ A & \bot_c \end{array} \tag{$\bot_c$}$$

24. Quine [85, p. 46], dans le cadre de la logique classique, définit l'implication par la validité du conditionnel.

Démonstration.

1	$\neg\neg A$	H
2	$\quad \neg A$	H
3	$\quad \bot$	$\neg\mathbf{E}, 1, 2$
4	$\neg\neg A$	$\neg\mathbf{I},\ 2, 3$
5	A	$\bot_c\mathbf{E},\ 4$
▶	$\neg\neg A \to A$	$\neg\mathbf{I},\ 1, 5$

□

On peut remarquer que cette dérivation dans le style de Fitch procède à un *détour* dont on doit pouvoir faire l'économie, puisque l'hypothèse de départ $\neg\neg A$ est à nouveau introduite (c'est-à-dire dérivée) à la ligne 4, pour être ensuite suivie de la déduction de A, en raison de la règle dite d'« absurdité classique » [25] de l'élimination de la double négation, pour la distinguer de la règle d'« d'absurdité intuitionniste », notée $\bot_i$ qui correspond à la règle bien connue du *Ex Contradictione Quodlibet.* Ainsi la preuve classique précédente doit se réduite à cette preuve étonnamment courte :

Démonstration.

1	$\neg\neg A$	H
2	A	$\bot_c,\ 1$
▶	$\neg\neg A \to A$	$\neg\mathbf{I},\ 1, 2$

□

On serait donc tenté de dire, en adoptant un refrain intuitionniste, qu'il n'y a pas de preuve de ($\bot_c$) mais simplement l'injection dans la logique de la règle de l'absurdité classique d'une règle *anormale* puisque l'introduction de la double négation peut immédiatement être suivie de son élimination, ce qui outrepasse pour un intuitionniste le sens logique qu'a la double négation, qui ne prouve rien d'autre à la ligne 3 de la première preuve, qu'il est absurde de supposer que A est absurde, dès lors que l'on part de l'hypothèse selon laquelle l'absurdité de A est absurde. On tourne effectivement en rond et l'on n'a nullement prouver que cette double négation implique la dérivabilité de A à partir de $\neg\neg A$.

Une tel reproche laisse évidemment indifférent un logicien classique comme Quine. La prouvabilité de ($\bot_c$) peut tout aussi bien se démontrer en logique classique, sans utiliser l'élimination de la double négation, et en ne faisant usage que de théorèmes admis par les intuitionnistes :

25. Expression employée par Troelstra *et al.* [115], et reprise par David *et al.* [95].

Démonstration.

$$\begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{\neg\neg A \to A} \\ \neg\neg\top \supset \top & \neg\neg\bot \supset \bot \\ \top & \neg\neg\neg\bot \\ & \neg\neg\top \\ & \neg\bot \\ & \top \end{array}$$

□

A gauche de cette analyse vérifonctionnelle, la réduction à $\top$ est aussi immédiate et en elle-même incontestable du point de vue intuitionniste

$$\vdash_i (\neg\neg\top \to \top) \to \top \tag{9}$$

A droite, la seconde ligne correspond à la règle d'introduction de la négation de la logique minimale, et les renversements successifs des signes $\bot$ et $\top$ qui accompagnent la disparition progressive des négations, sont en accord avec les implications intuitionnistes suivantes :

$$\vdash_i \neg\bot \to \top \tag{10}$$

$$\vdash_i \neg\top \to \bot \tag{11}$$

On peut par conséquent conclure que le logicien classique pourra toujours s'étonner du fait que l'intuitionniste s'émeut de l'adoption d'une règle qui est en réalité fondée dans la sémantique vérifonctionnelle du calcul propositionnel classique, et qui est donc à ce titre parfaitement justifiée.

Signification du conditionnel intuitionniste

On pourrait en effet être un instant troublé par cette riposte classique si l'on oubliait que, précisément l'intuitionniste refuse que l'on puisse prouver ($\bot_c$) par une analyse vérifonctionnelle, c'est-à-dire une table de vérité elle-même fondée sur l'acceptation du principe de bivalence . Du point de vue intuitionniste, accepter que l'on puisse prouver ($\bot_c$) par une analyse vérifonctionnelle *à la Quine*, revient à supposer que tout problème mathématique est par définition décidable, c'est-à-dire que l'on peut avoir une réduction de A à $\top$, ou de A à $\bot$, ce qu'exprime le tableau précédent. Effectivement, il est prouvable en logique intuitionniste que, le seul fait d'accepter la vérité du tiers exclu [26]

$$\neg A \vee A \tag{LEM}$$

26. Noté dans ce volume (LEM) par adaptation à la convention anglaise : *Law of Excluded Middle*

est une condition suffisante pour que l'on puisse considérer que A est impliqué par l'affirmation de $\neg\neg A$. On a en effet le théorème intuitionniste suivant :

$$\vdash_i (\neg A \lor A) \to (\neg\neg A \to A) \tag{12}$$

Démonstration.

1	$\neg A \lor A$	**H**
2	$\neg\neg A$	**H**
3	$\neg A$	**H**
4	$\bot$	$\neg$**E**, 2,3
5	A	$\bot_i$**E** 4
6	$\neg A \to A$	$\to$ **I**, 3,5
7	A	**H**
8	$A \to A$	$\to$ **I**,7,7
9	A	$\lor$**E**, 1, 6, 8
10	$\neg\neg A \to A$	$\to$ **I**, 2,10
▶	$(\neg A \lor A) \to (\neg\neg A \to A)$	$\to$ **I**, 1,10

□

Remarquons dans la démonstration qui précède l'usage de la règle d'absurdité intuitionniste qui se définit ainsi :

$$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \bot & \neg\mathbf{E} \\ X & \bot_i \end{array} \tag{$\bot_i$}$$

ce qui est l'indice du fait que (12) n'est pas prouvable en logique minimale. La démonstration montre donc que l'intuitionniste concède sans difficulté que le fait d'accepter la loi du tiers exclu implique l'acceptation de la règle de l'absurdité classique. Encore une fois, s'il n'accepte ni cette loi, ni cette règle, c'est qu'il refuse d'assumer le principe de bivalence , ce qui est bien le principe fondamental constitutif de la logique intuitionniste. Cependant, pour montrer que (LEM) ainsi que ($\bot_c$) ne sont pas prouvables et donc sont de formules logiques fausses du point de vue intuitionniste - ou, plus exactement, des formules *faussement logiques* - il lui faut enrichir la signification du conditionnel et, du même coup, de la négation intuitionniste.

Cet enrichissement va permettre de faire apparaître la vérité de (LEM) et de ($\perp_c$), comme un cas particulier de l'inférence logique : celui où l'on suppose que l'on dispose d'une procédure de décision, qui permet effectivement de remplacer A par $\top$, si l'on dispose d'une preuve de A, ou de remplacer A par $\perp$ si l'on dispose d'une réfutation de A, c'est-à-dire si l'on *prouve la fausseté* de A, ce qui est évidemment plus fort que d'échouer à prouver A. Mais dans le cas général (qui n'implique rien d'autre que la compréhension de la logique intuitionniste elle-même), on peut exhiber les contre-modèles de Kripke de (LEM) et de ($\perp_c$) qui montrent qu'aucune de ces deux formules n'est prouvable dans le cadre expressif plus large de la logique intuitionniste.

Pour comprendre la signification du conditionnel intuitionniste, il faut revenir à l'interprétation de la logique intuitionniste à partir des modèles de Kripke. La signification du conditionnel intuitionniste ne se limite pas à la platitude du conditionnel matériel de la logique classique. Modélisé dans la sémantique de Kripke, il exprime formellement ce que l'on peut considérer comme une compréhension raisonnable du progrès de la connaissance mathématique. On conçoit en effet l'accumulation des théorèmes au sein d'une théorie mathématique à laquelle on accorde une unité. Si le célèbre théorème de la géométrie euclidienne selon lequel la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits, a pu être répété jusqu'à la nausée pendant l'âge classique, c'est tout simplement parce que la démonstration de cette implication reste toujours vraie au sein de cette théorie, indépendamment de l'approfondissement de la connaissance de la géométrie euclidienne. De la même façon, la démonstration du beau résultat de Specker [107] qui démontre que la théorie des ensembles de Quine réfute l'axiome du choix, reste et restera vrai, dans le contexte théorique de cette théorie exotique des ensembles. Cela signifie que l'on ne considère un énoncé comme prouvé que si et seulement il est déduit d'une théorie Γ que l'on *suppose* cohérente. Telle est la signification du point 2 de la définition 3 page 10 : $\gamma \Vdash \top$, $\gamma \nVdash \perp$.

Ces exemples devraient permettre de saisir le caractère adéquat de la définition intuitionniste de l'implication pour comprendre le développement des théories mathématiques. Remarquons en effet que, bien qu'il soit logiquement vrai, du point de vue classique, que l'implication matérielle $A \supset B$ où A est le théorème euclidien sur la somme des angles d'un triangle, et B le théorème de Specker sur **NF**, est une implication matérielle dont la valeur de vérité est le vrai, puisque A et B sont tous les deux vrais, il n'y a aucun sens clair dans une telle implication, excepté celui de la distribution des valeurs de vérité sur A et B qui permet l'inférence $A \supset B$ en raison de la table de vérité de $\supset$.

Comprendre ce que signifie le conditionnel comme *implication* doit donc passer par la compréhension de la définition de l'introduction du conditionnel. Le schéma

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \Gamma & & \mathbf{H} \\
\hline
2-m & \vdots & & \\
n & \quad \mid\; A & & \mathbf{H} \\
o-j & \quad \mid\; \vdots & & \\
k & \quad \mid\; B & & \\
l & A \rightarrow B & & \rightarrow \mathbf{I}\,, n-k
\end{array} \tag{13}
$$

signifie qu'il n'est possible d'affirmer que A *implique* B qu'à la condition que B soit déductible de la seule hypothèse de A et de ce que l'on peut déduire de cette hypothèse, ou bien de ce que l'on peut déduire de l'hypothèse de A et de ce qui est déductible des formules qui composent Γ. Autrement dit, il ne peut se trouver dans les lignes $o-j$ du schéma (13) que des conséquences logiques de $\Gamma \cup \{A\}$. Dès lors que l'on est parvenu à déduire $A \rightarrow B$, on sait que l'on peut à nouveau introduire le conditionnel et affirmer que, Γ *implique* le fait que, si A est posé à titre d'hypothèse, alors B est une conséquence de A. On peut donc poursuivre la déduction jusqu'à son terme, en déchargeant Γ :

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \Gamma & & \mathbf{H} \\
\hline
2-m & \vdots & & \\
n & \quad \mid\; A & & \mathbf{H} \\
o-j & \quad \mid\; \vdots & & \\
k & \quad \mid\; B & & \\
l & A \rightarrow B & & \rightarrow \mathbf{I}\,, n-k \\
\blacktriangleright & \Gamma \rightarrow (A \rightarrow B) & & \rightarrow \mathbf{I},\ 1-l
\end{array} \tag{14}
$$

Pour saisir la signification de l'implication intuitionniste, on se pose la question de savoir à quelle condition on peut affirmer que la conclusion du schéma (14) permet d'affirmer que l'on peut obtenir une preuve que $\Gamma \rightarrow B$ qui puisse être considérée comme une information pertinente. A cette question répond le théorème suivant :

Théorème 2. *Pour qu'une implication de la forme* $\Gamma \rightarrow (A \rightarrow B)$ *soit à la fois réductible à* $\Gamma \rightarrow B$ *et que cette implication soit pertinente, il faut que l'hypothèse de la cohérence de* Γ *et celle de la conjonction de* Γ *et de* A *soient maintenues et que* B *ne soit pas lui aussi réductible à une contradiction, c'est-à-dire que* B *soit différent de* $\bot$.

Schéma de preuve. On suppose pour cette preuve que B est une formule propositionnelle atomique.

Si B est $\bot$, alors Γ est contradictoire, ou $\Gamma \cup \{A\}$ est contradictoire.

Par définition de la cohérence de Γ , Γ n'implique pas (c'est-à-dire ne prouve pas) $\bot : \Gamma \nVdash \bot$, reste donc $\Gamma \cup \{A\} \Vdash \bot$, donc dans ce cas, $\Gamma \to (A \to B)$ se réduit à $\Gamma \to (A \to \bot)$ c'est-à-dire à $\Gamma \to \neg A$. On a donc montré que si B est $\bot$, B n'est évidemment pas impliqué par Γ si Γ est cohérent.

Supposons $B \neq \bot$, $\Gamma \neq \bot$, $A = \bot$. L'implication de B par A n'est possible qu'à condition que la logique adoptée soit intuitionniste ou bien classique, puisque le conditionnel $\bot \to B$ n'est pas prouvable en logique minimale ; autrement dit si A est $\bot$, on n'a le droit d'introduire le conditionnel $A \to B$ qu'à la condition d'avoir admis (ECQ) comme une règle du système. Mais $\Gamma \to (\bot \to B)$, en raison de l'hypothèse de cohérence de Γ, n'est pas logiquement réductible à $\Gamma \to B$.

Supposons $B \neq \bot$, $\Gamma \neq \bot$, $A \neq \bot$. Pour que l'on puisse obtenir $\Gamma \to B$ il faut parvenir à déduire A de Γ à partir d'une règle d'élimination, afin d'obtenir le schéma suivant :

$$
\begin{array}{lll}
 & \quad\quad \vdots & \\
 & \quad\quad B & \\
 & \quad A \to B & \to \mathbf{I} \\
 & \quad A & \text{règle } \mathbf{E} \\
 & \quad B & \to \mathbf{E} \\
\blacktriangleright & \Gamma \to B & \to \mathbf{I}
\end{array}
$$

Dans ce cas, B est bien une sous-formule de Γ. C'est donc bien uniquement sous cette dernière hypothèse que l'implication $\Gamma \to B$ est pertinente. □

La preuve qui précède montre que l'implication logique définie *via* la déduction naturelle a une signification épistémologique que ne possède pas le conditionnel matériel. Néanmoins cette preuve ne montre pas en quoi l'implication intuitionniste représente un gain épistémologique sur l'implication classique, car les règles de la déduction naturelle pour le conditionnel sont les mêmes pour la logique classique et pour la logique intuitionniste. C'est encore une fois la constructivité de la logique intuitionniste qui permet de donner la réponse à cette question : le schéma intuitionniste $\Gamma \to B$ donne une information plus grande que le schéma classique, prouvable en logique classique $\Gamma \to B \vee \neg B$, cette dernière implication n'étant correcte en logique intuitionniste qu'à la condition qu'on ait une preuve ou une réfutation de B, c'est-à-dire qu'on soit capable de réduire à une seule formule la conséquence de cette dernière implication.

Enfin, le gain épistémologique de la logique intuitionniste apparaît clairement lorsque l'on réunit les Définitions 3 et 4 de l'interprétation de la logique intuitionniste à partir des modèles et des contre-modèles de Kripke, autrement dit lorsque l'on saisit ce qui distingue la méthode des arbres de réfutation de la logique classique, de l'adaptation de cette méthode pour la logique intuitionniste, telle qu'elle est exposée par Bell *et al.* [6]. On achèvera cette introduction à la logique intuitionniste avec une explication de cette méthode puisque celle ci, en s'appuyant sur la sémantique des modèles et contre-modèles de Kripke, permet d'éclairer la conception intuitionniste de la preuve et de la réfutation.

Signification de la négation intuitionniste

La définition intuitionniste de la négation

$$\neg A \leftrightarrow_{def.} A \rightarrow \bot \tag{Def. ¬}$$

est parfois critiquée au cours de développements logico-philosophiques difficiles et obscurs où le mot de « métaphysique » est finalement lâché, sans que l'on soit parvenu à une théorie de la négation qui soit à la fois naturelle, logique, claire et distincte [27]. Une réflexion sur la question permet cependant de comprendre que cette question à première vue simple de la définition de la négation est en réalité aussi profonde que difficile. On va tenter de relever le défi et de parvenir à donner une explication intuitionniste acceptable de la négation qui soit capable de justifier la définition de la négation donnée par la formule (Def. ¬).

Du point de vue syntaxique, dans le cadre théorique de la déduction naturelle, la définition de la négation est limpide : (Def. ¬) dit que la négation d'une formule quelconque A est l'abréviation d'une implication. Autrement dit il n'y a strictement

27. Tennant développe une théorie logico-philosophique de la négation où la définition intuitionniste de la négation est adoptée dans la syntaxe, en l'occurrence dans les règles de son système logique **IR** (pour Intuitionistic Relevant logic), mais rejetée de la sémantique et du métalangage qui explique la théorie. La conclusion qu'il donne à [113], pour brillante qu'elle puisse paraître, n'échappe pas au paradoxe : « ⊥ est un simulacre d'opérateur logique. Certains logiciens se plaisent à le définir comme un connecteur à zéro-place. J'aime à penser que c'est un aveu qu'il n'a pas de place en logique. ». Contrairement à Tennant, on souhaite une sémantique et un métalangage intuitionniste qui fasse bon ménage avec la syntaxe.

aucune différence conceptuelle entre les déductions (15) et (16) :

$$\begin{array}{|ll}
\Gamma & \mathbf{H} \\ \hline
\vdots & \vdots \\
\quad\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{H} \\ \vdots \\ \neg\mathbf{E} \end{array} \\
\neg A & \neg\mathbf{I}
\end{array} \tag{15}$$

$$\begin{array}{|ll}
\Gamma & \mathbf{H} \\ \hline
\vdots & \vdots \\
\quad\begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{H} \\ \vdots \\ \neg\mathbf{E} \end{array} \\
A \to \bot & \to\mathbf{I}
\end{array} \tag{16}$$

Or la plupart des critiques sur cette définition de la négation se concentrent sur son caractère circulaire. Il est en effet incontestable que l'introduction de la négation dans une dérivation logique correspond à au schéma suivant, qui permet au passage de comprendre que les règles d'élimination et d'introduction de la négation ne sont que des cas particuliers de l'élimination et de l'introduction du conditionnel :

$$\begin{array}{l|ll}
1 & \Gamma & \mathbf{H} \\ \cline{2-2}
2 & \vdots & \vdots \\
3 & \quad\begin{array}{|l} A \\ \hline A \to \bot \\ \bot \end{array} & \begin{array}{l} \mathbf{H} \\ \mathbf{R},\ n < 3 \\ \to\mathbf{E},\ 3,\ 4 \end{array} \\
4 & & \\
5 & & \\
6 & A \to \bot & \to\mathbf{I}\ ,\ 3\text{-}5
\end{array} \tag{17}$$

Tennant [113] puis Cook et Cogburn [17] ont développé des arguments philosophiques contre la remarque faite par Dummett [24] selon laquelle la négation est aussi définissable en arithmétique intuitionniste à l'aide d'une formule comme

$$\neg A \leftrightarrow_{def.} A \to (0 = 1) \tag{18}$$

où l'expression $(0 = 1)$ est une autre façon d'exprimer la constante du faux conventionnellement symbolisée par $\perp$.

La critique de Tennant que Tennant adresse à Dummett est plus simple que celle que développent Cook et Cogburn, en dépit de ce que prétendent ces derniers. On ne voit pas comment, souligne Tennant, on pourrait justifier l'inférence dans un discours vide de toute référence à l'arithmétique, d'un énoncé évidemment faux comme « ce ballon est à la fois totalement rouge et totalement vert » à un énoncé arithmétique absurde comme '$0 = 1$'.

Selon Cook et Cogburn [17, p. 7] la critique de Tennant est correcte, mais ils choisissent de développer une attaque qu'ils considèrent comme délibérément moins subtile et plus frontale :

> Nous ne pouvons pas définir la négation ainsi parce que toutes les vérités de l'arithmétique qui restent non négatives sont conjointement insuffisantes pour assurer la signification attendue de '$\neg$'. Nous sommes libres d'interpréter le contenu des axiomes dépourvus de négation comme arithmétiques modulo 1, rendant ainsi '$0 = 1$' vrai, ce qui ferait de '$\neg$' une sorte d'opérateur de vérité. La négation ne peut pas être définie à partir du conditionnel et de l'arithmétique du premier ordre. Elle doit, être ou bien primitive ou bien définie à partir d'un autre opérateur primitif comme la constante logique $\perp$.

Montrer que les arguments de Tennant et ceux de Cook et Cogburn participent d'une même confusion pourrait faire l'objet d'un chapitre de livre ou d'un article indépendant. On ne peut donner ici que les éléments qui doivent permettre de comprendre l'erreur de ces philosophes vis-à-vis de la position intuitionniste qui est celle de Dummett et qui, sur cette question, n'est certainement pas différente de celle de Heyting ou de Brouwer. Néanmoins on ne s'appuiera pas sur l'histoire, mais sur la signification que l'intuitionniste donne à l'implication et à la négation. La syntaxe et la sémantique de la logique intuitionniste propositionnelle vont être les béquilles de nos jugements sur cette question profonde et difficile du sens de la définition intuitionniste de la négation.

L'expression contradictoire $(A \wedge \neg A)$ que l'on peut substituer à la constante du faux $\perp$ en logique intuitionniste, n'est pas une expression syntaxiquement incorrecte, mais une expression qui est *toujours* reconnue comme fausse, ce qui ne serait pas possible si elle ne respectait pas la syntaxe de cette théorie. Contrairement à l'opinion de Tennant [113, p. 5], il n'y aurait strictement aucun avantage à remplacer la règle de l'élimination de la négation, écrite *à la Gentzen*

$$\frac{A \qquad \neg A}{\perp}\,\neg\mathrm{E}$$

par la même règle d'où l'on aurait jeté $\perp$ par-dessus bord :

$$\frac{A \qquad \neg A}{} \neg\mathbf{E}$$

Tennant parle en faveur d'une logique pertinente : de la contradiction on ne dérive *rien* (de pertinent), ce serait donc une belle chose que de remplacer ce qui n'est rien par du vide plutôt que par un symbole de constante. Le fait que Tennant lui-même ait renoncé à appliquer dans le symbolisme de **IR**[28] cette suggestion de remplacer $\perp$ par le vide, montre sans doute plus le vide de cette idée que son caractère philosophiquement bien fondé. Une relecture de Russell [99], qui pourtant combat la position intuitionniste (avec des arguments logiquement non fondés, comme on le verra au chapitre suivant), permettrait de montrer avec profondeur que ce signe de la constante du faux, précisément n'est pas rien, mais au contraire est le porteur d'une *information* : le message que délivre le schéma $\neg A \wedge A$ signifie que, quels que soient les énoncés substituables à A l'information délivrée par une telle conjonction dénotera *toujours* une situation irréalisable.

Les puristes désigneront les constantes $\top$ et $\perp$ par les mots de « top » et « bottom » et se garderont d'utiliser les expressions de *vrai* et de *faux*, par crainte de faire une confusion entre l'usage et la mention. On tombe d'accord avec Quine [85, p. 38, n. 1] et Kaye [57, p. 58] pour fuir ce purisme : appelons respectivement $\top$ et $\perp$, « le vrai » et « le faux » et l'on ne s'en portera que mieux.

Observons maintenant que le fait de refuser d'accorder une interprétation sémantique à $\perp$, comme on le fait si l'on considère que la « bonne logique » est la logique minimale, conduit à des conséquences contre-intuitives. La logique minimale partage avec la logique intuitionniste la formule (Def. $\neg$) qui définit la négation, et reconnaît donc comme corrects les schémas de déduction (15), (16) et (17). En revanche, la règle dite du *Ex Contradictione Quodlibet*[29], selon laquelle on peut déduire de la contradiction n'importe quel énoncé

$$\left|\begin{array}{ll} \vdots & \\ \perp & \neg\mathbf{E} \\ X & \perp\mathbf{E} \end{array}\right. \tag{ECQ}$$

ne fait pas partie des règles de la logique minimale, mais n'est admise qu'avec la logique intuitionniste dont la logique minimal est un sous-système. Dès lors, si un ensemble d'hypothèses Γ est adopté avec la logique minimale pour système déductif, et que Γ est contradictoire, c'est-à-dire contient ou bien $\perp$ dans ses prémisses ou bien une contradiction que l'on peut schématiser par $(\neg A \wedge A)$, alors on pourra déduire de Γ n'importe quel énoncé précédé de $\neg$, mais non un énoncé quelconque positif, et cela en raison du schéma suivant :

28. Voir note 27 page 22.
29. Appelée aussi plus improprement *Ex Falso Quodlibet*

$$
\begin{array}{|l l}
\perp & \mathbf{H} \\
\hline
\quad \begin{array}{|l} A \\ \hline \end{array} & \mathbf{H} \\
A \to \perp & \to \mathbf{I}
\end{array}
\tag{19}
$$

Cependant il est assez facile de voir que l'adoption de la logique minimale ne peut se faire que si l'on accepte de renoncer à certaines intuitions naturelles qui jouent un rôle dans d'inombrables inférences. Voyons pourquoi avec quelques exemples.

Bien que l'on puisse affirmer à partir du système déductif de la logique minimale que la conjonction de n'importe quel énoncé et d'une contradiction implique le faux, autrement dit que l'on a bien en logique minimale le théorème suivant :

$$\vdash_m (B \wedge (A \wedge \neg A)) \to \perp \tag{20}$$

On ne pourra en revanche pas considérer, contrairement à l'inférence que l'on peut faire en logique intuitionniste, qu'il est équivalent de dériver d'une hypothèse contradictoire aussi bien des énoncés positifs que négatifs, ni que même que deux schémas contradictoires sont équivalents. Autrement dit les formules qui suivent sont prouvables en logique intuitionniste, alors qu'elles ne le sont pas en logique minimale, en dépit des exigences du bon sens :

$$\nvdash_m ((\neg A \wedge A) \to (\neg B \wedge C)) \leftrightarrow ((\neg A \wedge A) \to \perp) \tag{21}$$

$$\nvdash_m (\neg A \wedge A) \leftrightarrow (\neg B \wedge B) \tag{22}$$

En se fondant sur ces deux exemples très simples, il est facile de tomber d'accord avec Epstein [31, p. 309] pour dire que savoir si la logique minimale est douée d'une sémantique raisonnable reste une question ouverte. Quel que soit le jugement que l'on puisse porter sur la question de la sémantique de la logique minimale, la comparaison du sens qu'a la négation dans cette logique avec le sens de la négation dans la logique de Heyting devrait permettre de mieux comprendre la signification de cette dernière.

Heyting [50, p. 19] note en faisant allusion à la logique minimale de Johansson que celle-ci exprime la logique intuitionniste « avec une autre interprétation de l'implication », sans hélas écrire un seul mot qui permette de comprendre où se trouve la différence entre l'implication en logique minimale et l'implication en logique intuitionniste. De toute évidence, le propos de Heyting est incomplet et ne peut viser que la différence du traitement de la négation dans les deux logiques, en raison de l'absence de la règle (ECQ) dans la logique minimale. Une remarque de David *et al.* [95,

p. 173], en dépit de l'anachronisme de sa référence, donne au moins une hypothèse explicative intéressante [30] :

> **Définition** : Soit L un langage du premier ordre. Un L-modèle de Kripke pour la logique minimale (on dit aussi *un L-modèle de Kripke minimal*) est un L-modèle ordinaire dont lequel on omet la condition « pour tout $\alpha \in |K|, \alpha \nVdash \perp$ ». On note $\Vdash$ la relation de forcing dans les modèles minimaux pour les distinguer de la logique intuitionniste.
>
> **Remarque** : Dans un modèle de Kripke minimal, $\alpha \Vdash_m \neg A$ ne signifie plus : pour tout $\beta \in |K|$ tel que $\alpha \leq \beta$ on a $\beta \nVdash A$. En effet, comme $\neg A$ est l'abréviation de $A \rightarrow \perp$, *le nouveau sens* de $\alpha \Vdash_m \neg A$ est : pour tout $\beta \in |K|$ tel que $\alpha \leq \beta$, si $\beta \Vdash_m A$, alors $\beta \Vdash \perp$.

On peut hésiter pour savoir si cette remarque permet de comprendre une réelle différence entre négation en logique minimale et négation en logique intuitionniste. Une réponse négative s'appuie sur le constat qu'il est vrai aussi, en logique intuitionniste, qu'une théorie qui réfute A permet ultérieurement de montrer que A est vrai, est une théorie qui recèle une erreur ou une contradiction. Mais la logique intuitionniste, en conservant une expression habituelle de la négation, apporte une information supplémentaire par rapport à celle que donne la logique minimale à partir de la déduction de la négation d'un énoncé : si la théorie est cohérente, et si elle réfute A, alors on sait que A ne sera jamais réalisé, ou ne sera jamais vrai. La référence de la conséquence porte sur cet échec persistant de la réalisation de A, ce qu'est incapable de dire *explicitement* la logique minimale.

On peut, pour en finir avec cette comparaison, rappeler un point sur lequel Tennant a beaucoup insisté à juste titre. On va l'exprimer d'une façon différente de lui, mais sans désaccord sur le fond [31]. Les preuves de la logique minimale sont limitées en raison de l'absence de la règle (ECQ). Le célèbre *syllogisme disjonctif*

$$((A \vee B) \wedge \neg A) \rightarrow B \tag{23}$$

qui n'est *pas* prouvable en logique minimale, mais à partir de la logique intuitionniste seulement. Il est pourtant fondamental en mathématiques et il est difficile de lui refuser un caractère naturel dès lors que l'on développe les prémisses, la formule suivante étant *équivalente* à la précédente, même en logique minimale :

$$((A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \rightarrow B \tag{24}$$

30. C'est moi qui souligne.

31. Mon désaccord avec Tennant porte sur le fait que je ne partage pas sa thèse selon laquelle son système **IR** est un système de logique pertinente qui serait un sous-système de la logique intuitionniste ; mais c'est là une question qui dépasse le cadre de cet exposé.

La solution s'impose d'elle-même : abandonner le chemin contradictoire de la disjonction et déclarer le conditionnel valide, puisque l'abandon du chemin contradictoire offre cette évidente implication :

$$(B \wedge \neg A) \rightarrow B \tag{25}$$

En dépit de ce raisonnement logique élémentaire, celui qui s'aventure à adopter la logique minimale comme la logique de ses inférences, aura toutes les peines du monde à expliquer pourquoi il se refuse à rejette l'implication (24) mais accepte (25). La raison de cet étonnante limitation du raisonnement logique tient à l'absence de la règle (ECQ) dans la logique minimale qui se trouve dans l'incapacité d'appliquer la règle de l'élimination de la disjonction , tout simplement parce que l'on a le malheur d'avoir affaire à un B qui n'est pas négatif. La logique de Heyting ne connaît pas cette malheureuse limitation et peut prouver (23) comme (24) :

1	$(A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)$	**H**
2	$\quad A \wedge \neg A$	**H**
3	$\quad A$	$\wedge_l$**E**, 2
4	$\quad \neg A$	$\wedge_r$**E**, 2
5	$\quad \bot$	$\neg$**E**, 3, 4
6	$\quad B$	$\bot$**E**, 5
7	$(A \wedge \neg A) \rightarrow B$	$\rightarrow$**I**, 2 – 6
8	$\quad B \wedge \neg A$	**H**
9	$\quad B$	$\wedge_l$**E**, 8
10	$(B \wedge \neg A) \rightarrow B$	$\rightarrow$**I**, 8 – 9
11	B	$\vee$**E**, 1, 7, 10
►	$((A \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg A)) \rightarrow B$	$\rightarrow$**I**, 1 – 11

Ce détour comparatif entre logique minimale et logique intuitionniste permet maintenant d'écarter aussi bien les critiques de Tennant que celles de Cook et Cogburn à l'égard l'explication arithmétique que Dummett a donné de la négation en logique intuitionniste. Dummett n'a certainement pas voulu dire que l'on devrait pouvoir retrouver une absurdité arithmétique dans un langage L dénué de référence à l'arithmétique pour pouvoir définir la négation dans L. L'analogie ne fonctionne pas ainsi, mais de la façon suivante : comme Tennant pourtant le souligne à juste titre, notre perception exclue naturellement certaines situations, non parce qu'elles seraient totalement inexprimables, mais parce qu'elles sont *normalement impossibles* :

il m'est par exemple impossible de me taire à l'instant même où je parle [32] , et d'une façon générale, notre langage nous conduit à inférer le faux à partir de toute conjonction d'un énoncé A quelconque et de sa négation. La définition de la négation *intuitionniste* affirme que la négation d'un énoncé est *justifiée* si et seulement si on peut prouver que A implique une contradiction de la forme $(\neg B \wedge B)$. Or une telle contradiction ne s'exprime que dans le système syntaxique et déductif de la logique intuitionniste, de la même façon, *mutatis mutandis* que la contradiction peut trouver une expression dans le système des perceptions habituelles, et de la même façon que la contradiction peut s'exprimer dans le système de l'arithmétique élémentaire, *par rapport aux opérations qui ont été définies en elle.*

Ce dernier point nous amène maintenant à la critique de la critique de Cook et Cogburn. Que veut dire leur assertion selon laquelle nous serions libres d'interpréter le contenu des axiomes dépourvus de négation comme arithmétiques modulo 1, rendant ainsi '$0 = 1$' vrai, ce qui ferait de '$\neg$' une sorte d'opérateur de vérité ? La question n'est pas de savoir si l'arithmétique permet une telle supposition, ou si elle est absurde. Le hic est qu'une telle supposition n'a tout simplement aucune signification à un niveau élémentaire où l'on n'a pas défini ce qu'il faut entendre par « modulo 1 ». Si cette opération ou déduction modulo [33] n'est pas définie dans la liste des opérations de notre théorie arithmétique, elle ne peut pas servir à illustrer un énoncé nécessairement faux et encore moins servir de contre-exemple à un énoncé bien formé qui est choisi comme le type même des énoncés toujours faux. Il est vrai que l'exemple choisi par Dummett ne permet pas à lui seul de comprendre comment un énoncé arithmétique faux peut impliquer l'expression '$0 = 1$'. Mais cela ne signifie certainement pas qu'il est soit impossible de comprendre comment, à un niveau très simple de l'arithmétique élémentaire, on peut définir une procédure telle qu'elle conduise celui qui a compris cette procédure à affirmer un énoncé négatif comme $\neg\exists x F x$ où F est ce prédicat qui ne peut être vrai d'aucun entier naturel différent de 0. On n'imagine pas dans les entiers naturels différents de 0, par exemple, un entier n qui, additionné à lui-même, puisse donner pour résultat ce même entier n. Un enfant qui comprend l'opération de l'addition pour les entiers naturels rejettera au bout d'une minute de réflexion la recherche d'un tel entier, si on lui soumet le problème, en répondant qu'il est faux qu'existe un tel entier. Ajoutons qu'il aura raison de le faire dans le contexte de la théorie élémentaire qu'il a apprise.

Il est donc inexact d'affirmer avec Cook et Cogburn que la négation n'est pas définissable à partir du conditionnel et de l'arithmétique du premier ordre. Elle l'est à partir du conditionnel et de l'ensemble des opérations *définies* dans l'arithmétique

32. Voir à ce sujet les développements de Vuillemin [146, pp. 32-34] sur le principe de nécessité conditionnelle.

33. On ignore en fait ce que les auteurs entendent par cette expression, s'ils entendent quelque chose de comparable à la *déduction modulo* sur laquelle Dowek a beaucoup insisté, ou s'ils entendent autre chose.

du premier ordre, et non comme l'entendent Cook et Cogburn, à partir du conditionnel et de l'ensemble des opérations *définissables* dans l'arithmétique du premier ordre. Car ce sont les opérations *définies* qui définissent aussi le domaine du vrai ou du prouvé, et donc, du même coup, ce qui est absurde, c'est-à-dire ce qui ne sera jamais constructible dans le domaine des nombres *via* un ensemble *défini* d'opérations.

Ce point permet de conclure que, dès lors que l'on définit la vérité mathématique comme le font les intuitionnistes à partir des constructions ou des preuves, c'est bien deux et non une seule définition de la fausseté qui apparaissent clairement. D'une part un énoncé peut être considéré comme faux à un moment du développement d'une théorie, parce qu'aucune preuve ne permet de le considérer comme vrai. C'est le cas de ce que l'on appelle communément un problème « ouvert » où aucun des membres de l'alternative n'est prouvé. La disjonction dès lors ne peut même pas être considérée comme vraie, tant que la recherche de preuve échoue pour chacun de ses membres. En l'absence de décision d'un côté ou de l'autre, il n'y a aucun sens, *du point de vue intuitionniste*, à considérer une telle disjonction comme « vraie ». Ce point, qui choque le logicien classique puisqu'il refuse que l'on renonce à définir le tiers exclu comme une vérité logique, définit précisément la constructivité de la logique intuitionniste au niveau du calcul propositionnel, comme on le sait à partir de la Définition 2, page 6. D'autre part, un énoncé faux peut aussi être, en un sens plus fort cette fois, un énoncé *réfuté*, c'est-à-dire un énoncé pour lequel il est démontré que l'hypothèse de sa construction ou de sa preuve implique une contradiction définissable dans la théorie. La réfutation a dans ce cas la même propriété de persistance dans l'avenir qu'une preuve positive : si A est démonstrativement faux, alors on sait que l'on échouera toujours à réaliser une construction de A à partir de la théorie T qui le réfute.

On vient de voir cependant que la définition canonique d'un énoncé faux est toujours relatif à une théorie. Comment concilier alors ce caractère de la persistance des réfutations et de l'enrichissement des théories qui peuvent modifier la compréhension de ce qui pouvait être perçu comme absurde dans une théorie moins riche ? Une telle question ne se pose que si l'on oublie que c'est toujours RELATIVEMENT à une théorie donnée que l'on prouve ou réfute un énoncé. On peut tout à fait expliquer les raisons pour lesquelles à partir de la logique minimale le syllogisme disjonctif ne sera jamais valide et comprendre ce fait logique comme la propriété d'une logique excessivement limitée.

4 Preuve syntaxique et interprétation

A la différence de la logique classique, la méthode intuitionniste de preuve d'une formule quelconque A par recherche d'un contre-modèle de Kripke pour A ne part pas de la négation de A mais de *la supposition de l'échec d'une preuve* de A, autrement dit de l'hypothèse $\nvdash_i A$ ou, plus précisément encore, de l'hypothèse selon laquelle l'état de développement d'une théorie γ ne permet pas de prouver A : $\gamma \nVdash A$. De manière plus naturelle mais plus relâchée, Bell *et al.* traduisent cette même hypothèse par l'écriture suivante :

$$?A\,.$$

La signification de la preuve est alors tout aussi claire qu'en logique classique : si le développement arborescent de $?A$ conduit partout à des contradictions, c'est qu'il est absurde de supposer que la formule n'exprime pas une vérité logique [34]. En revanche, la lecture des contre-modèles de Kripke offerte par un arbre de réfutation qui a des branches qui ne ferment pas, est plus subtile : une situation fermée par un trait horizontal, où aucune contradiction n'apparaît, donne un contre-modèle de la formule où les formules de ? indiquent qu'elles ne sont pas (encore) prouvées, ou qu'elles sont réfutées lorsqu'elles sont précédés de $\neg$, les formules positives sont considérées comme vraies. Pour éviter la convention contre-intuitive adoptée par Bell *et al.* qui choisissent de symboliser les formules non prouvées et fausses par le signe de la constante du faux $\bot$, et les formules positives par la constante du vrai $\top$; on reprendra la convention inventée par Moscato [73] (et reprise par Fiorino *et al.* [33] pour l'implémentation du prouveur intuitionniste fCube) qui consiste à signer les formules par **F** pour indiquer l'échec de leur preuve, par $\mathbf{F_c}$ pour indiquer qu'elles sont certainement fausses, c'est-à-dire réfutées, et par **T** pour indiquer qu'elles sont vraies.

4.1 La procédure de preuve de Bell-DeVidi-Solomon

La procédure de preuve de Bell, DeVidi et Solomon [6, chap. 5, pp. 184-223] n'a certainement pas connu le succès qu'elle mérite. De la même manière que la méthode des arbres de Beth en logique classique, cette procédure donne directement un contre-modèle de Kripke lorsque la formule testée n'est pas prouvable en logique intuitionniste. Les exigences pour l'apprentissage et la compréhension de cette méthode sont peu nombreuses mais cruciales : on voit tout de suite que le signe d'incertitude intuitionniste ? apposé sur une formule conditionnelle ou négative, introduit automatiquement *une nouvelle situation* marquée par l'apparition d'un trait horizontal sous la formule ; c'est là l'essentiel du comportement non classique des règles $?\rightarrow$ et $?\neg$, les autres règles non classiques pour cette méthode dérivent du caractère *dynamique* de ces deux règles.

1. **Règles de transformation des formules** : voir Figure 2, page 32.

34. Au sens évidemment de vérité de la logique intuitionniste.

	Disjonction	**Conjonction**	**Implication**
Affirmée	$A \lor B$ $A \quad \| \quad B$	$A \land B$ A B	$A \rightarrow B$ $?A \quad \| \quad B$
Non affirmée (incertaine)	$?(A \lor B)$ ✔ $?A$ $?B$	$?(A \land B)$ ✔ $?A \quad \| \quad ?B$	$\underline{?(A \rightarrow B)}$✔ A $?B$

	Equivalence	**Négation**
Affirmée	$A \leftrightarrow B$ $A \quad \| \quad ?A$ $B \quad \| \quad ?B$	$\neg A$ $?A$
Non affirmée (incertaine)	$?(A \leftrightarrow B)$ ✔ $?(A \rightarrow B) \quad \| \quad ?(B \rightarrow A)$	$\underline{?\neg A}$ ✔ A

Instanciation de $\forall$	**Instanciation de $\exists$**	**Instanciation de $?\forall$**	**Instanciation de $?\exists$**
$\forall xFx$ Fc (c *non inédite* : pouvant être reprise dans la liste des lettres déjà utilisées)	$\exists xFx$ ✔ Fc (c *inédite* : ne pouvant être dans la liste des lettres déjà utilisées.)	$\underline{?\forall xFx}$ ✔ $?Fc$ (c *inédite*)	$?\exists xFx$ $?Fc$ (c *non inédite*)

FIGURE 2 – Règles intuitionnistes pour les arbres de Beth en logique du premier ordre

2. **Règles de cochage** : On appose une coche ✔ pour indiquer que l'on désactive la formule une fois celle-ci transformée par l'application de la règle. Les formules qui ne sont jamais cochées sont les formules affirmées (celles qui ne sont pas précédées de ?) et qui sont *transportables* de haut en bas à travers les traits horizontaux qui marquent le passage d'un état de la connaissance à un autre : leur vérité persiste à travers ces états.
3. **Règle de transport** Il est permis de transporter n'importe quelle formule qui n'est pas précédée du signe ? à travers les lignes horizontales introduites par les règles $? \rightarrow$, $?\neg$ et $?\forall$.
4. **Règle de la fourche** Bell *et alii* [6, p. 199] notent qu'il est important de remarquer que l'application répétée des règles $? \rightarrow$ et $?\neg$ dans une même branche apparaissant à un même état du savoir - donc dans une branche qui n'est pas coupée par un trait horizontal - doit nécessairement entraîner l'introduction de lignes horizontales et séparées pour chaque application des règles.

   N.B. : Dans un tel cas il suffit qu'*une seule branche de la fourche* soit fermée pour que *la branche qui a donné naissance à la fourche* soit aussi fermée (c'est-à-dire contradictoire), comme le montre l'exemple 3, où l'on doit considérer que c'est la branche initiale (1. à 4.), celle qui a donné naissance à la fourche, qui est complètement fermée parce qu'elle conduit à une situation contradictoire.
5. **Règle de clôture** : Pour qu'une branche soit fermée il faut deux conditions :
   (a) l'affirmation d'une formule quelconque P et sa non-affirmation $?P$ apparaissent dans la même branche,
   (b) que P et $?P$ ne soient pas séparés par un trait horizontal.
6. **Règle de lecture du résultat du test :** Un arbre de réfutation intuitionniste est un test de validité d'une formule qui se lit quand et seulement quand l'arbre est totalement développé. Un arbre de réfutation est totalement développé quand tous les connecteurs $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ont été éliminés, quand toutes les formules actives ont été cochées, et quand la règle de transport n'est plus applicable. Si toutes les branches d'un arbre totalement développé sont fermées, alors la formule qui a fait l'objet du test est valide en logique intuitionniste ; sinon chaque branche ouverte donne un contre-modèle de Kripke de la formule et montre que la formule testée n'est pas prouvable en logique intuitionniste.

Exemple 1 (Réfutation de la prouvabilité du tiers exclu)**.**

$$\nvdash_i \neg A \vee A$$

Démonstration.

$$\begin{array}{l}
1.\ ?(A \vee \neg A) \checkmark \\
2.\ ?A\ _{(1)} \\
3.\ \underline{?\neg A}_{(1)} \\
4.\ A
\end{array}$$

□

Contre-modèle de Kripke : $\mathbf{F}A, \mathbf{F}\neg A$.

Remarque 1. *La preuve classique du tiers exclu, par la même méthode* ***mais*** *dans le contexte de la logique* ***classique****, permet de voir directement en quoi le langage de la logique intuitionniste est un* ***enrichissement*** *du langage de la logique classique, et donc permet d'appréhender la raison pour laquelle aucune traduction de la logique intuitionniste dans la logique classique ne peut être fiable sur le plan sémantique*[35] *puisqu'elle ne traduit pas les mêmes (contre-)modèles.*

$$\vdash_c \neg A \vee A$$

Démonstration.

$$\begin{array}{l}
1.\ \neg(A \vee \neg A) \checkmark \\
2.\ \neg A\ _{(1)} \\
3.\ \neg\neg A\ _{(1)} \\
4.\ \times
\end{array}$$

□

Exemple 2.

$$\nvdash_i (A \to B) \vee (B \to A)$$

Démonstration.

$$\begin{array}{c}
1.\ ?((A \to B) \vee (B \to A)) \\
2.\ ?(A \to B)\ _{(1)} \checkmark \\
3.\ ?(B \to A)\ _{(1)} \checkmark \\
\begin{array}{cc}
4.\ \overline{A}\ _{(2)} & 6.\ \overline{B}\ _{(3)} \\
5.\ ?B\ _{(2)} & 7.\ ?A\ _{(3)}
\end{array}
\end{array}$$

Contre-modèle de Kripke : $\{\mathbf{T}A, \mathbf{F}B\}, \{\mathbf{T}B, \mathbf{F}A\}$.

□

Remarque 2. *Sans la règle de la fourche, la règle de transport permettrait la clôture de la branche et rendrait donc incorrect le test de la formule* $(A \to B) \vee (B \to A)$.

35. Pour une démonstration de l'absence de fiabilité sémantique d'une telle traduction, voir Epstein [31, pp. 395-396]

Remarque 3. *Un contre-modèle apparemment linéaire, permettant de mieux refléter la logique classique à travers le contre-modèle de la logique intuitionniste, peut être retrouvée, si on remplace comme le font Nerode et Shore [105, chap. 5, pp. 247-294], la règle de la fourche par une numérotation qui indique le changement des états ; mais comme le remarquent ces auteurs (p. 280), cette linéarité masque en réalité un embranchement car toute structure linéaire ne peut que forcer, incorrectement en logique intuitionniste, la réalisation d'une telle formule. C'est la raison pour laquelle la règle de la fourche, perturbante à première vue, est finalement préférable.*

Exemple 3.

$$\vdash_i \neg A \rightarrow \neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B$$

Démonstration.

$$1.\ \underline{?(\neg A \rightarrow (\neg(A \wedge \neg B) \vee \neg B)}\ ✔$$

$$2.\ \neg A_{\ (1)}$$

$$3.\ ?\neg(A \wedge \neg B)_{\ (1)}\ ✔$$

$$4.\ ?\neg B_{\ (1)}\ ✔$$

$$5.\ \overline{A \wedge \neg B}_{\ (3)}\ ✔ \qquad 6.\ \overline{B}_{\ (4)}$$

$$7.\ A_{\ (5)}$$

$$8.\ \neg B_{\ (5)}$$

$$9.\ \neg \boldsymbol{A}_{\ (2)}$$

$$10.\ \boldsymbol{?A}_{\ (9)}$$

$$\times$$

□

Exemple 4.

$$\nvdash_i ((\neg\neg A \to A) \to (\neg A \vee A)) \to (\neg A \vee \neg\neg A)$$

Démonstration.

1. $?(((\neg\neg A \to A) \to (\neg A \vee A)) \to (\neg\neg A \vee \neg A))$ ✔
2. $((\neg\neg A \to A) \to (\neg A \vee A))$ $_{(1)}$ ✔
3. $?(\neg\neg A \vee \neg A)$ $_{(1)}$ ✔
4. $?\neg\neg A$ $_{(3)}$ ✔
5. $?\neg A$ $_{(3)}$ ✔

Branche gauche :

6. A $_{(5)}$

- 8. $?(\neg\neg A \to A)$ $_{(2)}$ ✔
  10. $\neg\neg A$ $_{(8)}$
  11. $?A$ $_{(8)}$
  12. A $_{(6)}$
  $\times$ (11–12)
- 9. $(\neg A \vee A)$ $_{(2)}$ ✔
  - 13. $\neg A$ $_{(9)}$
    15. $?A$ $_{(13)}$
    $\times$ (15–6)
  - 14. A $_{(9)}$

Branche droite :

7. $\neg A$ $_{(4)}$

- 16. $?(\neg\neg A \to A)$ $_{(2)}$ ✔
  18. $\neg\neg A$ $_{(16)}$
  19. $?A$ $_{(16)}$
  20. $?\neg A$ $_{(18)}$ ✔
  21. A $_{(20)}$
  22. $\neg A$ $_{(7)}$
  23. $?A$ $_{(22)}$
  $\times$ (21–23)
- 17. $(\neg A \vee A)$ $_{(2)}$ ✔
  - 24. $\neg A$ $_{(17)}$
    26. $?A$ $_{(24)}$
  - 25. A $_{(17)}$
    27. $?A$ $_{(24)}$
    $\times$ (25–27)

□

La lecture du contre-modèle de Kripke à partir de cet arbre déjà complexe est laissée au lecteur. On terminera cette introduction en soulignant quelques points qui mériteraient un approfondissement mais qui dépassent le cadre de cette introduction à la logique intuitionniste.

5 Rapides aperçus pour conclure

– La complexité du problème de la décision est en logique intuitionniste, strictement supérieure à celle de la logique classique, comme ces arbres de réfutation en sont le témoin. Un algorithme de décision pour la logique intuitionniste est optimisé si le nombre des étapes requises pour parvenir au terme de la recherche de preuve est minimisé, autrement dit si un tel algorithme donne pour tout calcul le plus petit contre-modèle de Kripke. A ce problème répond la récente construction du calcul intuitionniste par réfutation **RJ** qui est un calcul des séquents inventé par Ferrari *et al.* [34], après les travaux de Dyckhoff [27], d'Hudelmaier [53], et de Galmiche *et al.* [61].

– Les questions de décidabilité et de complétude ont été laissé de côté. Le calcul propositionnel est décidable : pour toute formule de ce calcul on peut donner une preuve ou bien un contre-modèle de Kripke. Comme le calcul des prédicats de la logique classique, le calcul intuitionniste des prédicats est indécidable. Deux preuves intuitionnistes de la complétude faible de la logique intuitionniste du premier ordre ont été données respectivement par Veldman et de Swart [120, 22] en 1976. Les deux preuves sont fondées sur les modèles de Kripke.
– Les questions profondes et difficiles du fondement des mathématiques, du changement de perspective imposée par les mathématiques intuitionnistes, ainsi que le rapport de la logique intuitionniste avec l'informatique fondamentale (l'isomorphisme de Curry-Howard, etc.) dépassent largement le cadre de cette modeste introduction et ont volontairement été passé sous silence.

Les pages qui suivent doivent être lues comme des applications philosophiques des éléments de logique intuitionniste qui ont été développés dans cette Introduction.

1

L’argument de Russell-Tennant

> But it must be said that the point of view we are now to consider is disputable. Its main merit is that it allows us to believe in the law of excluded middle.
>
> Bertrand Russell

> Quine holds that meaning (via translation) is indeterminate, but that truth is bivalent. The anti-realist, by contrast, holds that meaning is determinate, but that truth is not bivalent.
>
> Neil Tennant

Résumé. *Ni dans les Principia ni ailleurs dans son œuvre, Russell n’envisage de rejeter la validité universelle du tiers exclu. Ce n’est que tardivement, dans “Signification et Vérité” [99], qu’il examine la position intuitionniste, pour finalement la refuser après avoir donné des arguments logiques et épistémologiques pour choisir la logique classique comme logique de base de sa théorie de la connaissance. Ce qu’il faut bien appeler son « conservatisme logique » a exercé une profonde influence sur Quine comme sur toute la philosophie analytique en général. On examine dans cet article les arguments de Russell et de Quine en faveur du conservatisme logique et l’on montre que, du strict point de vue de la logique mathématique, ils ne sont pas justifiés. Russell affirme cependant que le fait d’assumer la validité universelle du tiers exclu est incompatible avec l’empirisme. Il sous-entend une thèse qui sera plus tard développé par Tennant Il sous-entend une thèse qui sera plus tard développé par Tennant [111] : le principe du tiers exclu, s’il est valide, est synthétique a priori. Cet argument bien compris aurait dû faire de la logique intuitionniste la logique de base de l’empirisme logique.*

Abstract. *Neither in the Principia nor elsewhere in his work, Russell is inclined to reject the universal validity of the excluded middle. Belatedly, in "An Inquiry into Meaning and Truth" [99], he examines intuitionism, to finally reject it, after having given logical and epistemological arguments for choosing classical logic as the core logic of his theory of Knowledge. Russell's philosophy of logic has had a deep influence on Quine as well on analytic philosophy in general. We examine in this paper Russell's and Quine's arguments on behalf of logical conservatism and we show that from a logical point of view, they are not justified. Russell, however, argues that the fact to assume the universal validity of the excluded middle is incompatible with empiricism. It is a thesis that will be later developed by Tennant [111] : the principle of the excluded, if valid, is synthetic a priori. This argument , correctly understood , should have made intuitionistic logic the core logic of logical empiricism.*

1.1 Définition et enjeu de l'argument de Russell-Tennant

J'entends par « argument de Russell-Tennant » un raisonnement que Russell a développé dans *Signification et Vérité* et que Tennant a repris pour lui donner une forme précise et explicite. Russell est parti de la remarque selon laquelle l'affirmation de la validité universelle du tiers exclu est incompatible avec l'empirisme et, par conséquent, une philosophie de la connaissance cohérente se doit de renoncer à la logique classique comme logique de base, ou bien de renoncer à l'empirisme. Russell choisit la première option, Tennant la seconde. En affirmant que le tiers exclu, s'il est valide, est synthétique *a priori*, Tennant utilise une terminologie adéquate qui précise correctement ce que vise le raisonnement de Russell. Cela justifie que je baptise ainsi cet argument, même si, évidemment, Tennant n'en tire pas les mêmes conclusions que Russell.

L'enjeu de l'argument de Russell-Tennant n'est rien de moins que l'adoption ou le rejet du réalisme sémantique. On entend aujourd'hui par « réalisme sémantique » la thèse au sujet de la vérité que Russell [99, p. 268] définit ainsi :

Définition 6 (Réalisme sémantique)**.** *Si l'on se place du point de vue que l'on peut appeler la conception réaliste de la vérité, il y a des « faits » et il y a des phrases dont leurs rapports aux faits les rend vraies ou fausses, et cela de manière totalement indépendante de la façon dont on peut décider de leur fausseté ou de leur vérité.*

Il faut entendre par « anti-réalisme sémantique » non le rejet de la thèse de la correspondance entre énoncés vrais et faits, mais le rejet de l'idée selon laquelle vérité ou fausseté peuvent être indépendantes des procédures de preuve ou de réfutation des énoncés. Cette appellation contemporaine correspond à la conception de la vérité défendue par Brouwer et l'école intuitionniste :

Définition 7 (Anti-réalisme sémantique)**.** *Le terme « vrai » attribué à un énoncé quelconque n'est d'aucun usage indépendamment d'une méthode pour décider de cette attribution. Un énoncé P est vrai si et seulement si P est connaissable (c'est-à-dire démontrable ou vérifiable) en principe. La vérité est toujours épistémologiquement contrainte.*

Les définitions 6 et 7 étant incompatibles, toute philosophie de la connaissance qui adopte l'une d'entre elle donne aussi des arguments pour rejeter l'autre. Cette opposition de thèse résume la dispute philosophique entre le conservatisme logique qui privilégie la logique classique comme logique de base de la connaissance, et l'intuitionnisme qui, à partir de Brouwer, affirme qu'un changement de système logique est nécessaire afin de corriger les jugements philosophiques erronés qui sont précisément engendrés par l'usage de la logique classique.

En dépit de l'intérêt que suscite la position intuitionniste en logique mathématique et notamment en informatique fondamentale, et bien que l'on puisse considérer que l'intuitionnisme logique a plus de cent ans d'existence (la thèse de Doctorat de Brouwer datant de 1907 [118]), il n'est pas exagéré de dire que le conservatisme logique reste une position forte. Celle-ci a trouvé un avocat de talent chez Russell, et plus tard chez Quine, qui a choisi de faire de la logique classique du premier ordre le centre de gravité de sa théorie de la connaissance. Pour ces deux grands logiciens, seule la logique classique est vraiment naturelle et aucune autre logique ne peut offrir plus de simplicité et de commodité qu'elle n'en apporte. Comme on ne peut pas renoncer facilement au principe de bivalence qui est au fondement de la logique classique, une saine philosophie de la connaissance renâcle naturellement à rejeter la validité universelle du tiers exclu comme la logique intuitionniste l'exige. Cet article s'efforce de réfuter cet argument polémique ainsi que tous les arguments qui ont été avancés par Russell et Quine contre l'adoption de la logique intuitionniste.

Dans un premier temps on se concentre sur les arguments logiques qui ont été avancés par Russell et Quine sur cette question. On montre qu'aucun de ces arguments n'est scientifiquement recevable en raison de théorèmes de logique mathématique désormais bien connus (pour lesquels je ne donne pas les démonstrations, mais simplement leurs références, afin de ne pas alourdir le texte). La seconde partie de cet article est une défense de l'intuitionnisme sur le plan épistémologique, à partir de l'argument de Russell-Tennant. On examine le sens de la célèbre thèse que Quine a développée contre l'existence d'une distinction tranchée entre vérités analytiques et vérités synthétiques. On montre que cet argument, même du point de vue de Quine, échoue à invalider la position intuitionniste de Tennant, qui maintient une frontière indiscutable entre les deux types de jugements, ce qui permet à Tennant de dire que le tiers exclu est synthétique *a priori*, s'il est valide. C'est après avoir écarté pour finir deux remarques polémiques de Russell que l'on pourra conclure que, sans le conservatisme logique, ce que l'on a appelé « l'empirisme logique » aurait naturellement dû être intuitionniste.

1.2 Défense logique de l'intuitionnisme

A partir de certains théorèmes fondamentaux établis sur la logique intuitionniste, cette section répond à un certain nombre de préjugés dont le premier a été formulé par Russell, et les autres par Quine. On commencera par un rappel sur les rapports exacts entre calcul classique des propositions, et la version intuitionniste de ce même calcul.

1.2.1 Calcul des propositions classique et calcul intuitionniste

On considère que la logique classique est la logique de base de la connaissance seulement si l'on reconnaît la vérité du principe de bivalence que l'on peut définir ainsi (à partir d'une traduction de Tennant [112, p. 36]) :

Définition 8 (Principe de bivalence ou principe de détermination des valeurs de vérité des énoncés)**.** *Tout énoncé déclaratif est vrai ou faux de manière déterminée, indépendamment de toute procédure de décision pour trancher l'alternative.*

Ce principe adopté, la formule classique du tiers exclu (avec ici l'étiquette internationale LEM pour « Law of Excluded Middle ») :

$$(P \vee \neg P) \tag{LEM}$$

est directement prouvée via sa table de vérité en logique classique

P	$\vee$	$\neg P$
$\top$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$

En effet, c'est parce que l'on affirme que la valeur de vérité d'un énoncé, quel qu'il soit, est toujours *déterminée*, que l'on peut en logique classique procéder au calcul de la valeur de vérité d'une formule par combinaison de toutes les valeurs possibles sur les atomes de la formule et, toujours si l'on raisonne avec la logique classique comme logique de base, n'importe quelle substitution d'un énoncé déclaratif à P dans le schéma (LEM) donne une disjonction vraie.

Il est facile de remarquer que les définitions du réalisme sémantique et du principe de bivalence coïncident ou, plus exactement, qu'il est nécessaire d'affirmer le principe de bivalence, tel qu'il est exprimé plus haut, pour pouvoir affirmer le réalisme sémantique.

Le fait que la logique intuitionniste soit fondée sur le refus d'assumer le principe de bivalence peut se traduire de la façon suivante. La logique intuitionniste fait *mention* de deux notions, celle d'être démontrable à partir des prémisses (la constante $\top$ est alors un symbole représentant un énoncé valide de la logique intuitionniste) et celle du non-prouvé, qui est le faux du point de vue intuitionniste. Dès lors le vrai et monotone, le faux ne l'est pas [36]. C'est parce que l'intuitionniste fait de la preuve ou de la réfutation, autrement dit de la décidabilité des énoncés, la condition nécessaire de la détermination de leur valeur de vérité, qu'il ne peut se résoudre à affirmer ce principe nécessaire à l'expression du réalisme sémantique. Contre cette position, le réaliste au contraire nie que la décidabilité soit la condition nécessaire pour que l'on puisse affirmer que les valeurs de vérité des énoncés sont déterminées.

Dès lors on comprend intuitivement ce que veut dire le rejet de la validité universelle du tiers exclu pour l'intuitionniste : puisque le schéma (LEM) est valide *seulement si* il existe une preuve constructive de P ou une réfutation consrtuctive de P, admettre la validité *universelle* de cette formule reviendrait à admettre que tout énoncé déclaratif a une preuve ou une réfutation constructive, ce qui évidemment est faux. D'une part, l'histoire des mathématiques montre qu'il existe un bon nombre de conjectures dont le propre est de n'avoir jamais été jusqu'à ce jour réfutées ni prouvées ; d'autre part, l'intuitionniste rejette la thèse classique selon laquelle la réfutation de $\neg P$ suffit à prouver P. Une démonstration qui montre qu'il est absurde de considérer P comme absurde, montre en effet uniquement que P est *cohérent*, non que P est *vrai*.

Exemple (Exemple à partir de la conjecture de Golbach)**.**

La conjecture de Goldbach s'énonce ainsi : « tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers ». Par convention nommons cet énoncé G. Dès lors $(G \vee \neg G)$ n'est pas une vérité du point de vue intuitionniste puisque cette conjecture n'étant actuellement ni prouvée ni réfutée, aucun état du savoir jusqu'à maintenant ne contient G ou la réfutation de G (c'est-à-dire $\neg G$), ce qui n'interdit pas de supposer que l'on puisse ultérieurement apporter ou bien une preuve, ou bien une réfutation de G. Si ce type de raisonnement permet de comprendre comment une sémantique constructive peut donner un contre-modèle du tiers exclu [8, pp. 131-132], l'analyse de la preuve du schéma $(P \vee \neg P)$ en déduction naturelle montre qu'il n'est prouvable qu'en logique classique, et que la logique intuitionniste s'arrête à la preuve de sa double négation :

Théorème 3.

$$\vdash_c (P \vee \neg P) \tag{LEM}$$

36. On doit évidemment alors distinguer le faux du réfuté, c'est-à-dire ce qui est démonstrativement faux, et non simplement ce qui fait échouer une tentative de démonstration dans un système donné.

Démonstration.

1	$\neg(P \vee \neg P)$	**H**
2	$\quad P$	**H**
3	$\quad P \vee \neg P$	$\vee_l$ **I**, 2
4	$\quad \bot$	$\rightarrow$ **E**, 1,3
5	$\neg P$	$\rightarrow$ **I**, 2,4
6	$P \vee \neg P$	$\vee_r$ **I**, 5
7	$\bot$	$\rightarrow$ **E**, 1,6
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\rightarrow$ **I**, 1,7
▶	$P \vee \neg P$	$\bot_{\mathbf{c}}$, 8

Traduction de la preuve en langage naturel - Le signe $\vdash_c$ qui précède (LEM) signifie que la formule n'est dérivable qu'en logique classique ; on le montre de la façon suivante. Supposons que la disjonction $P \vee \neg P$ soit absurde (ligne 1), pour le montrer supposons que l'on affirme P (ligne 2), or s'il est justifié d'affirmer P, alors il l'est aussi d'affirmer $P \vee \neg P$ (ligne 3) *via* la règle d'introduction de la disjonction ; mais cela contredit l'hypothèse de la négation de $P \vee \neg P$ (ligne 4) ce que l'on note par le signe canonique de la fausseté $\bot$. Donc on abandonne l'hypothèse de P et on affirme $\neg P$ (ligne 5). (On dit que l'hypothèse P est *déchargée*. Un des avantages du symbolisme de Fitch adopté ici, est de rendre cette décharge *immédiatement visible*, dans le passage de la ligne 4 à la ligne 5, par le décalage vers la gauche et par le passage *sous* la ligne verticale qui marquait tout ce qui dépendait de l'hypothèse de P, à partir de la ligne 2.) Notons que la négation de P est une assertion dont la justification ne dépend plus dès lors que l'hypothèse de la ligne 1. Mais s'il est justifié d'écrire $\neg P$ sous l'hypothèse de $\neg(P \vee \neg P)$, il l'est aussi d'écrire $P \vee \neg P$ (ligne 6) *via* la règle d'introduction de la disjonction. Mais cela contredit de nouveau l'hypothèse de départ (ce qui est noté par $\bot$ ligne 7). L'hypothèse $\neg(P \vee \neg P)$ engendre la contradiction et donc peut être déchargée et niée (ligne 8). Comme l'a souligné Brouwer, il est ainsi *justifié* d'affirmer qu'il est absurde d'affirmer que $(P \vee \neg P)$ est absurde.

Le raisonnement qui précède est purement constructif (jusqu'à la ligne 8 de la déduction à la Fitch). Mais on voit qu'il ne permet pas d'affirmer que P est vrai, c'est-à-dire justifié, ou que P est réfuté. Il est en effet *impossible* d'en déduire une telle conséquence sans faire usage de la règle d'absurdité classique (notée $\bot_c$, qui symbolise le signe canonique de l'absurdité, indexé ici par un c qui veut dire « classique ») :

$$\begin{array}{r|ll} i & \vdots & \\ j & \neg\neg P & \\ \blacktriangleright & P & \bot_c,\ j \end{array}$$

Dès lors qu'est accordée cette règle qui définit la ligne de démarcation entre logique classique et logique intuitionniste, alors $(P \vee \neg P)$ est prouvable par l'absurde (ligne 9 de la déduction à la Fitch). □

1.2.2 Contre l'alarmisme de Russell

L'effondrement de la logique ?

Russell a publié *Signification et Vérité* en 1940, soit six années après la parution en allemand du texte où Heyting [50] définit la sémantique de la logique intuitionniste. Au début du chapitre XX de ce livre, Russell définit avec précision le problème philosophique auquel il tente d'apporter une réponse jusqu'à la fin du chapitre suivant ; il écrit alors :

> Si nous définissons la vérité par son rapport avec la connaissance, *la logique s'effondre* et une grande partie du raisonnement admis jusqu'à présent, y compris des parties étendues des mathématiques, doit être rejeté comme n'étant pas valable. Mais si nous acceptons la loi du tiers exclu, nous nous trouvons engagés dans une métaphysique réaliste qui peut sembler, dans l'esprit sinon dans la lettre, incompatible avec l'empirisme. La question est fondamentale et de la plus grande importance.

J'ai souligné en italiques le propos inutilement alarmiste. Il est évident qu'un philosophe ne pourrait pas aujourd'hui écrire que le rejet intuitionniste de la validité du tiers exclu signifie « l'effondrement de la logique », sans susciter un mépris justifié chez les logiciens. L'expression de Russell est malencontreuse parce que, prise à la lettre, elle est tout simplement fausse. En effet l'ensemble des théorèmes de la logique intuitionniste est strictement contenu dans la logique classique. Or le rejet intuitionniste de la validité universelle du tiers exclu a d'une part un sens précis qu'il s'agit ici d'éclairer et, d'autre part, ce rejet concerne une vérité qui n'appartient pas au noyau de la logique, mais pour ainsi dire à sa périphérie. Si l'on est attaché comme Russell à la logique élémentaire standard, la logique ne s'effondrerait qu'à la condition que l'on rende la logique *minimale* impossible. Le diagramme de la figure 1.1 (que j'ai adapté à partir d'un fichier source que Neil Tennant m'a amicalement envoyé) exprime les relations fondamentales d'inclusion entre logique minimale, logique intuitionniste et enfin logique classique :

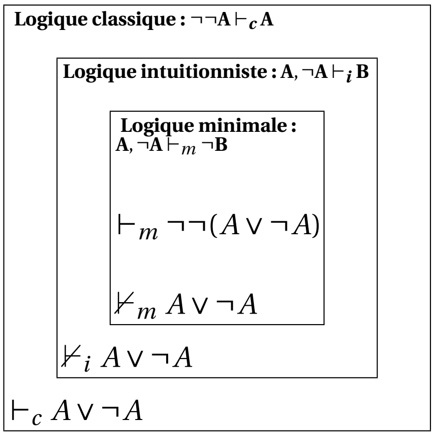

FIGURE 1.1 – Relations entre logique minimale, logique intuitionniste et logique classique

On définit aisément la logique minimale par l'ensemble des règles d'introduction et d'élimination des constantes logiques (négation, conjonction, disjonction et conditionnel), où le signe $\perp$ qui ne se distingue des autres lettres schématiques du calcul des énoncés que par le fait d'être le symbole canonique de la fausseté. La logique intuitionniste contient la logique minimale mais prouve plus de théorèmes que cette dernière en acceptant, contrairement à la logique minimale, la fameuse règle du *Ex Falso Quodlibet* (notée *EFQ*) qui stipule que n'importe quel énoncé est dérivable à partir du faux. C'est cette règle qui est exprimée dans le tableau précédent par le séquent :

$$A, \neg A \vdash_i B \tag{1.1}$$

où le signe $\vdash_i$ exprime la dérivabilité en logique intuitionniste.

La logique classique contient ces deux dernières logiques, mais franchit une étape de plus en acceptant la règle d'absurdité classique $\perp_c$ qui permet de prouver le tiers exclu. Cette règle est exprimée dans le tableau par le séquent :

$$\neg\neg A \vdash_c A \tag{1.2}$$

où le symbole $\vdash_c$ exprime la dérivabilité en logique classique. Ce séquent, pas plus que le tiers exclu, n'est dérivable à partir des seules règles de la logique intuitionniste.

Le boxeur sans ses poings ?

La lecture que j'ai faite de la citation de Russell page 45 n'a pas été très charitable, car il est évident que l'on peut interpréter le texte cité de façon à lui faire dire, plus justement, que si le tiers exclu n'est plus une loi logique acceptable, alors tous les théorèmes mathématiques où celui-ci est utilisé seront du même coup invalidés. Cependant on ne voit pas pourquoi le mathématicien trouverait avantage à faire usage d'une logique qui le contraindrait à jeter par-dessus bord un grand nombre de théorèmes que nul ne sait démontrer sans l'usage du tiers exclu. Cet argument avancé par Russell a déjà été formulé avec vigueur par Hilbert [7] dans une formule devenue célèbre :

> Enlever le principe du tiers exclu aux mathématiciens serait la même chose, disons, que d'interdire le télescope à l'astronome ou au boxeur l'usage de ses poings.

La formule de Hilbert a été tellement percutante, qu'elle a marqué pendant des décennies les esprits et a laissé des traces dans la littérature philosophique. Mais on voit désormais plus clairement que cette polémique est le fruit d'un malentendu qui tient au fait que les partisans du conservatisme logique souvent ne comprennent pas ce que signifie réellement le rejet intuitionniste de la validité du tiers exclu. Car non seulement le fait de renoncer à la validité universelle du tiers exclu ne produit pas un effondrement de *la* logique, mais il est de plus possible de traduire tout théorème classique qui n'est pas valide en logique intuitionniste en lui apposant une double négation, de façon à le transformer en un théorème intuitionniste. En effet, si (LEM) n'est pas un théorème de la logique intuitionniste, en revanche

$$\neg\neg(P \vee \neg P) \tag{1.3}$$

l'est. Ce fait peut se comprendre de façon générale *via* ce célèbre théorème :

Théorème 4 (Théorème de Glivenko)**.** *Soient* Γ, A, *des formules propositionnelles.*
On a $\Gamma \vdash_c A$ *si et seulement si* $\neg\neg\Gamma \vdash_i \neg\neg A$.

Démonstration. [95, p. 157]. □

Ce théorème de 1929 est devenu célèbre, et il reste invariablement cité dans tous les articles ou manuels qui traitent de la logique intuitionniste [37]. Mais il existe un

37. Le théorème de Glivenko n'est vrai qu'en logique propositionnelle intuitionniste et non en logique des prédicats intuitionniste. Mais cela ne signifie pas qu'il ne soit pas possible d'établir une traduction des théorèmes spécifiques de la logique classique du premier ordre dans la logique minimale du premier ordre, *via* la traduction de Gödel, ou dans la logique intuitionniste du premier ordre proprement dite *via* la traduction de Kuroda (voir David *et al.* [95, pp. 152-157]).)

autre théorème plus récent, qui permet de rendre compte de la traduction de la logique classique à l'intérieur de la logique intuitionniste et qui a pour immense mérite de rendre simple et transparent *le rôle épistémologique exact* que joue la logique intuitionniste par rapport à la logique classique dans la recherche mathématique. Ce beau théorème a été découvert par von Plato en 1999, et rejeté par un rapporteur aveugle du célèbre *Journal of Symbolic Logic*, il est resté à l'état de manuscrit [140], pour être enfin donné dans [75, pp. 27 et 207] :

Théorème 5 (Théorème de von Plato)**.** *Soit $P_0, P_1, \ldots, P_n$ les propositions atomiques de la formule C. Alors C est démontrable en logique classique si et seulement si*

$$((P_0 \vee \neg P_0) \wedge (P_1 \vee \neg P_1) \wedge \cdots \wedge (P_n \vee \neg P_n)) \rightarrow C$$

est démontrable en logique intuitionniste.

Démonstration. [75, p. 207]. □

Le théorème 5 signifie, comme le soulignent avec force Negri et von Plato [75, p. 27], que la logique propositionnelle classique peut-être interprétée par la logique intuitionniste comme une logique où les preuves des théorèmes sont relatives *aux décisions sur les formules atomiques.* Le caractère tout à fait remarquable du théorème 5, est qu'il prouve que n'importe quel théorème C spécifique à la logique classique mais habituellement rejeté par la logique intuitionnistes (comme la loi de Peirce par exemple) devient, du point de vue intuitionniste, une conséquence logique acceptable de la distribution classique des valeurs de vérités sur les formules atomiques de C. Pour être encore plus clair

$$\nvdash_i ((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P \tag{1.4}$$

signifie que la Loi de Peirce n'est pas valide en logique intuitionniste, mais en revanche

$$\vdash_i ((P \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg Q)) \rightarrow (((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P) \tag{1.5}$$

l'est, ce qui est une illustration du théorème de von Plato.

Le noeud de la question est donc que la formule classique du tiers exclu (LEM) n'est pas une tautologie pour l'intuitionniste mais, comme le soulignent Negri et von Plato [75, pp. 26-27], un schéma qui n'est valide qu'à la condition que la formule P soit décidable. Ce que l'on peut exprimer par le Corollaire suivant :

Corollaire 1. $\vdash_i (P \vee \neg P)$ *si et seulement si P est décidable.*

Tiers exclu et théorie de la preuve

Russell donne en faveur de la logique classique un argument fondamental selon lequel le maintien de la validité universelle du tiers exclu serait indispensable pour la poursuite de la vérité. Cet argument exprime d'une autre manière la même idée que celle exprimée par la célèbre métaphore de Hilbert. En tenant compte de ce qui vient d'être établi, on va voir pourquoi c'est au contraire la position intuitionniste, qui n'accorde la validité à (LEM) qu'à la condition que P soit décidable, qui permet le progrès de la poursuite de la vérité.

L'argument de Russell répond exactement à l'esprit de la logique classique : la validité universelle du tiers exclu s'explique par l'application systématique du principe de bivalence, selon la combinatoire de la méthode des tables de vérité, indépendamment des moyens que nous avons pour connaître la valeur de vérité des énoncés qui sont schématisés par les variables propositionnelles. Pour Russell la validité du tiers exclu exprimerait donc la séparation, correcte du point de vue du réalisme sémantique, entre vérité et connaissance justifiée [99, p. 288, trad. fr. p. 313] :

> Lorsque nous nous embarquons dans une recherche, nous prétendons que les propositions, au sujet desquelles nous faisons notre enquête, sont vraies ou fausses ; nous pouvons en trouver la preuve ou non. [...] A présent, nous ignorons s'il y a de la vie ailleurs dans l'univers, mais nous avons raison d'être assurés qu'il y en a ou qu'il n'y en a pas. Nous avons donc besoin de la « vérité » aussi bien que de la « connaissance » parce que les frontières de la connaissance sont incertaines et parce que, sans la loi du tiers exclu, nous ne pourrions pas nous poser les questions qui donnent naissance aux découvertes.

Cet argument exprime d'une autre manière la même idée que celle exprimée par la célèbre métaphore de Hilbert. En tenant compte du théorème 5 et du corollaire 1, on va montrer pourquoi c'est au contraire la position intuitionniste, qui n'accorde la validité à (LEM) qu'à la condition que P soit décidable, qui permet le progrès de la poursuite de la vérité.

On peut remarquer que Russell n'explique pas comment, en tant que principe logique, le principe du tiers exclu intervient pour « donner naissance aux découvertes ». Or il est évident que, formulé de manière schématique *via* la formule (LEM), le tiers exclu n'est que l'expression abstraite de la réponse par « oui ou non » à un problème quelconque. Un schéma propositionnel peut faciliter la compréhension d'un ensemble de phrases ayant la même structure, mais en aucune façon il ne livre une procédure de preuve qui permette d'affirmer une conséquence logique. Si le tiers exclu a une fonction logique, on aimerait comprendre en quoi la logique classique fait plus que d'affirmer que telle assertion problématique est vraie ou fausse, et en quoi elle est supérieure, *via* la démonstration du tiers exclu, à la logique intuitionniste qui, plus exigeante, n'admet l'attribution du vrai à un énoncé P qu'en présence d'une preuve de P, ou du faux qu'en présence d'une réfutation de P. On va répondre à cette question en montrant au contraire, à partir de l'analyse d'un exemple canonique, que le principe du tiers exclu n'est fécond du point de vue logique qu'à la condition d'être intégré dans une règle constructive (c'est-à-dire acceptable pour l'intuitionniste) et d'être interprété de manière intuitionniste.

Pour illustrer la différence qui existe entre la position réaliste (ou platonicienne) et la position constructive, on trouve souvent dans les manuels, le théorème suivant et sa démonstration :

Théorème 6 (Théorème non-constructif canonique)**.** *Il y a au moins deux nombres irrationnels x et y tels que x^y est rationnel.*

Démonstration. (i) Prémisse : $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel ou ne l'est pas.

(ii) Supposons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ rationnel . On pose $x = y = \sqrt{2}$ et l'on obtient l'exemple qui prouve l'assertion existentielle du théorème 6 : $\sqrt{2}$ est irrationnel et $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est supposé rationnel.

(iii) Supposons $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ irrationnel, on pose $x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ (irrationnel par supposition) et $y = \sqrt{2}$ (irrationnel) ; on obtient alors :

$x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$. Or 2 est rationnel, et cela prouve l'assertion existentielle du théorème 6.

$\square$

Si cet exemple est fréquemment donné pour illustrer ce qu'est une démonstration *non constructive* parce qu'elle repose sur l'usage du tiers exclu, on ne précise jamais ce que l'intuitionniste serait cependant prêt à admettre dans cette démonstration, ni comment il la reformulerait de manière à la rendre acceptable de son point de vue. Il est pourtant éclairant de le faire. Voici le schéma qui exprime la démonstration du théorème dans le style de la déduction naturelle *à la Fitch*, où $R(x)$ signifie « x est rationnel » :

1	$(\forall x)(R(x) \vee \neg R(x))$	**H** ("tiers exclu")
2	$(x = y = \sqrt{2}) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H** – *cf.Démonstration,* (ii).
3	$\neg R(\sqrt{2})$	**H** – *cf.Démonstration,* (ii).
4	$((x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2)$	**H** – *cf.Démonstration,* (iii).
5	$R(2)$	**H** – *cf.Démonstration,* (iii).
6	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \vee \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	$\forall$**E**, 1
7	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
8	$(x = y = \sqrt{2})$	**H**
9	$(x = y = \sqrt{2}) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	$\rightarrow$ **I**, 8, 2
10	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\exists$ **I**, 9, 3, 7
11	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
12	$(x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})$	**H**
13	$((x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \wedge (y = \sqrt{2})) \rightarrow (x^y = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}} = 2)$	$\rightarrow$ **I**, 12, 4
14	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\exists$ **I**, 13, 11, 3, 5
▶	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \wedge \neg R(y)) \rightarrow R(x^y))$	$\vee$ **E**, 6, 10, 14

Expliquons ce schéma. On voit tout d'abord que la prémisse (i) de la démonstration page 50, n'est pas posée à titre d'hypothèse dans le raisonnement classique, mais déduite (ligne 6) comme l'instance d'une vérité universelle (ligne 1 du même schéma) et valide à ce titre. Or, dès lors que cette prémisse est posée comme déductible en raison de l'universalité du tiers exclu [38], suit l'élimination de cette disjonction (ligne 15) qu'est cette instance du tiers exclu qui a permis l'inférence de l'existence *non déterminée* deux irrationnels x et y qui peuvent être ou bien tous deux égaux à $\sqrt{2}$, ou bien correspondre respectivement à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{2}$ pour produire la conséquence affirmée dans le théorème.

Voyons maintenant la preuve de ce même théorème qu'elle pourrait être formulée dans le cadre de la logique intuitionniste. Le logicien intuitionniste rejette la validité universelle du tiers exclu, donc il se dispense évidemment de poser la ligne 1

38. Ce qui a été ici appelé dans cette démonstration « tiers exclu » est plus exactement une formule dérivée du tiers exclu, c'est-à-dire une de ses expressions dans le langage du calcul des prédicats. Voir sur ce point l'Annexe B.

du schéma classique et les quatre hypothèses suivantes suffiront. Il n'affirmera pas non plus que la détermination de la rationalité ou de l'irrationalité d'un réel quelconque est un problème décidable (il ne l'est sans doute pas). La prémisse (i) de la démonstration de la page 50 ne sera donc évidemment pas une vérité déductible de la validité du tiers exclu, mais une prémisse posée à titre d'hypothèse qui s'énoncera ainsi : « *Si* l'on peut décider de la rationalité ou de l'irrationalité de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ *alors* on doit pouvoir obtenir une preuve du théorème 6 ». On retrouve ici ce qui a été précisé plus haut concernant l'admissibilité de l'expression du tiers exclu dans le raisonnement intuitionniste : une instance du tiers exclu est admissible du point de vue intuitionniste si et seulement si cette instance est en l'occurrence décidable. L'intuitionniste transforme la démonstration en affirmant cette conclusion : si l'on peut décider de la rationalité ou de l'irrationalité de $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, alors on peut en déduire qu'il existe au moins deux deux nombres irrationnels x et y tels que x^y est rationnel. La procédure de preuve intuitionniste est traduisible en déduction naturelle par le schéma suivant :

⋮	⋮	
4	⋮	
5	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \lor \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H** *Démonstration* (i)
6	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
	⋮	
	$R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \to (\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \land \neg R(y)) \to R(x^y))$	
	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})$	**H**
	⋮	
⋮	$\neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \to (\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \land \neg R(y)) \to R(x^y))$	
13	$(\exists x)(\exists y)((\neg R(x) \land \neg R(y)) \to R(x^y))$	$\lor$ **E**
▶	$(R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}) \lor \neg R(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})) \to (\exists x)(\exists y)(\neg R(x) \land \neg R(y)) \to R(x^y))$	$\to$ **I**

Remarquons que le corps de la preuve classique de l'existence des deux nombres irrationnels *n'est pas rejeté par l'intuitionniste*, tout simplement parce que l'élimination de la disjonction (ligne 13 du précédent schéma) est une règle admissible en logique intuitionniste. Mais l'intuitionniste qui se passe de la loi du tiers exclu peut reprendre le même schéma de raisonnement pour conclure avec plus de précision que ne le fait le logicien classique : si la disjonction de la prémisse (i) est décidable, c'est-à-dire si l'on peut si x est égal à $\sqrt{2}$ ou bien à $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, alors on peut exhiber deux témoins x et y qui justifient l'assertion du théorème 6, conformément aux canons de la logique intuitionniste.

L'intuitionniste ne reproche évidemment pas au mathématicien qui fait usage de la logique classique les raisonnements constructifs qui lui permettent d'indiquer l'existence d'objets mathématiques, mais il lui reproche tous les raisonnements non constructifs qui conduisent à des assertions existentielles indéterminées qui dépendent de l'affirmation de la validité universelle du tiers exclu, autrement dit d'une assertion injustifiée du point de vue intuitionniste.

L'analyse comparative et détaillée de cet exemple classique montre de manière difficilement contestable que c'est uniquement la perspective intuitionniste qui fait un usage utile de la logique dans la poursuite de la vérité. C'est en effet le règle constructive de l'élimination de la disjonction qui permet au logicien classique d'établir la preuve du théorème dans la démonstration précédente, et c'est enfin l'exigence de décidabilité de la prémisse (i) qui apparaît comme la condition suffisante de la *détermination* de l'existence de ces deux irrationnels. En l'occurrence, on sait l'exigence intuitionniste de décidabilité de la prémisse (i) est satisfaite, puisque le très difficile théorème de Gelfond-Schneider (1934) qui apporte une solution générale au septième problème de Hilbert permet aussi de montrer que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre transcendant (donc irrationnel). Le mathématicien qui, à l'instar de Russell, croît encore que la logique classique est le fondement du raisonnement de la découverte scientifique, sera peut-être encore tenté de répondre que l'on passe ici sous silence l'hypothèse d'éléments non-constructifs dans la preuve de Gelfond-Schneider. Mais, si tel est le cas, ces éléments pourraient à leur tour être repérés au sein de la logique intuitionniste comme autant de sous-problèmes à résoudre pour parvenir à une preuve intégralement constructive du théorème 6.

On ne peut donc pas admettre l'argument qui consiste à dire qu'il faut conserver la validité universelle du tiers exclu parce qu'y renoncer affaiblirait en quelque sorte la logique de la découverte scientifique ; car c'est uniquement au sein de la logique intuitionniste qu'une formule qui est une instance du tiers exclu prend un sens scientifique fort et intéressant, dès lors qu'il est requis que, pour être valide, l'instance en question doit être décidable. En un mot le tiers exclu n'est utile pour la poursuite de la vérité, qu'à la condition qu'il soit *enrégimenté* dans un raisonnement constructif tel que la logique intuitionniste permet de le comprendre. A la métaphore de Hilbert qui compare le mathématicien sans le tiers exclu au boxeur privé de ses poings, l'intuitionniste peut riposter en faisant remarquer que, si l'image de Hilbert est juste, alors il l'est tout autant de souligner que ce même boxeur doit savoir, le moment venu, s'il faut lancer une gauche ou une droite, et surtout ne pas rester indéfiniment dans l'indécision.

1.2.3 Contre les arguments de Quine

De Russell, Quine a hérité le conservatisme logique. Mais contrairement à Russell, Quine semble n'avoir jamais pris au sérieux la position intuitionniste, à en juger sur la désinvolture des arguments qu'il emploie dans sa polémique contre celle-ci. Pour stigmatiser toute logique « déviationniste » en général, Quine [93, chap. 6] a opposé un slogan devenu célèbre : *change of logic, change of subject* (« changer de logique c'est changer de sujet »). Dans sa polémique contre la logique intuitionniste en particulier, il a développé des arguments dont voici l'essentiel : l'adoption de la logique intuitionniste a, pour Quine, trois conséquences fâcheuses :

(a) la logique intuitionniste change la *signification* de la négation, de la disjonction et de la quantification et donc, du point de vue de Quine, le logicien classique ne peut comprendre le sens dévié de ces constantes logiques que par rapport à une traduction de cette logique dans la sienne (qui contient la logique intuitionniste) ;

(b) la logique intuitionniste complique la théorie de la preuve ainsi que la sémantique, car la logique intuitionniste « n'a pas le caractère familier, la commodité, la simplicité et la beauté [de la logique classique] » ;

(c) on change le sujet de la logique qui doit être le vrai et non le savoir comme le pensent les intuitionnistes.

Un changement de signification des constantes logiques ?

Au chapitre 6 de [93], Quine argumente ainsi le point (a) :

> Nous avons dépeint le rejet du principe du tiers exclu "P ou $\neg P$" comme étant principalement un rejet de la négation classique. Or je viens de présenter les arguments intuitionnistes comme ayant trait surtout à la disjonction. En fait, il n'y a pas lieu de distinguer réellement, car une fois qu'on a bouleversé les relations entre les opérateurs logiques, on peut dire qu'on a modifié n'importe lequel d'entre eux ou qu'on les a tous modifiés. Quoi qu'il en soit, la négation intuitionniste est aussi, de son estoc, une déviation : le principe de la double négation devient caduc.

Cet argument repose sur une confusion entre la *signification* des connecteurs et quantificateurs et *l'interprétation* des formules logiques elles-mêmes. C'est parce que Quine pense exclusivement à la méthode des tables de vérité pour définir les connecteurs qu'il affirme à tort que la négation intuitionniste est déviante. Il est vrai qu'en logique classique l'application de la négation renverse à chaque fois la valeur de vérité de la formule niée, ce qui permet d'obtenir que, quel que soit la valeur de P, sa double négation lui soit toujours équivalente. On obtient donc le tableau suivant :

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$

C'est cette fonction « renversante » accordée à la négation dans la logique classique qui permet de faire de (1.2) une inférence valide qui justifie l'application de la règle d'absurdité classique dans tous les raisonnements où l'on fait usage de la logique classique. Mais cela signifie-t-il que, parce que l'intuitionniste rejette la validité de (1.2), il fait usage d'une conception *déviante* de la négation ? La réponse est non, et l'on va montrer que l'argument de Quine n'est admissible que si et seulement si l'on fait dépendre la signification des constantes logiques de l'application du principe de bivalence, ce qui non seulement n'est pas naturel mais, comme l'a bien vu Dummett, introduit une confusion fâcheuse entre signification et référence : car il peut exister des formules *significatives*, comme $(\neg A \vee A)$, qui font usage de connecteurs logiques mais qui ne sont pas cependant *prouvables* : la signification est fixée, la référence (c'est-à-dire la valeur de vérité de la formule) ne l'est pas.

On peut rejeter sereinement cette accusation de déviance intuitionniste de la signification des constantes logiques pour deux raisons. La première est une raison fondée sur la compréhension naturelle que nous avons par exemple des connecteurs du calcul des propositions. On sait que l'intuitionniste rejette le principe de bivalence ainsi que l'équivalence classique entre la double négation d'un énoncé P quelconque et l'assertion de P. En suivant Bell *et al.* [6] on peut faire usage du signe « ? » en logique intuitionniste, en interprétant ce signe non comme une troisième valeur de vérité, mais comme un symbole qui, apposé à une formule, indique que la formule en question n'est pas prouvée. Dès lors la logique intuitionniste peut illustrer l'invalidité du tiers exclu par la table suivante, en réponse à la table de la logique classique de la même formule :

P	$\vee$	$\neg P$
?	?	$\bot$
?	?	?

Dans la table qui précède, on peut traduire le fait que $\neg P$ ait la valeur $\bot$ ainsi : $\neg P \rightarrow \bot$, ce qui veut dire qu'il est faux que $\neg P$ soit faux, raison pour laquelle on a $?P$ ce qui signifie que l'on n'est pas pour autant autorisé à dire que l'on a une preuve de P. Cette table peut-elle montrer que l'intuitionniste a une conception déviante de la disjonction et de la négation ? Il semble aller de soi que nous comprenons toujours la disjonction de la même façon, c'est-à-dire, pour reprendre la définition qu'en donne Russell [99, p. 85, trad. fr. p. 98], comme « l'expression verbale d'une indécision ». La négation est à elle seule un champ de réflexions logiques et philosophiques et c'est donc un sujet délicat. Mais dès lors que l'on est d'accord sur la traduction $\neg P$ par « P est faux » on peut sans difficulté soutenir contre Quine que la logique intuitionniste fait usage de la même notion de la négation que celle qui est en vigueur dans la logique classique. Nous comprenons tous ce qu'est la négation d'un énoncé à partir de ce qui est assumé comme vrai ou comme connu. Celui qui est en train de lire ces lignes peut par exemple supposer qu'il est en train de lire la dernière phrase de cet article. Mais parce qu'il voit une ligne qui suit la phrase précédente et une page qui suit la page qu'il est en train de lire, il en conclura rapidement que sa supposition est fausse, parce qu'elle est *incompatible* avec ce qu'il sait. Voilà pourquoi la logique intuitionniste traduit la négation d'un énoncé P comme équivalente avec le fait de dire que P implique l'absurde et définit ainsi la négation :

$$\neg P \leftrightarrow_{def.} P \rightarrow \bot \qquad (Def.\ \neg)$$

Une riposte réaliste, qui consisterait à dire qu'un tel compte rendu de la signification des constantes logiques verse dans le psychologisme, brandirait à tort une sorte d'épouvantail philosophique et manquerait l'essentiel de l'argument qui vient d'être avancé. Si l'on soutient l'argument de Quine selon lequel l'intuitionniste ferait usage d'une notion déviante de la négation des constantes logiques en général, on est très embarrassé pour expliquer comment logiciens intuitionnistes et logiciens classiques peuvent s'entendre sur la démonstration de l'absurdité de $\neg(P \vee \neg P)$. En revanche on explique aisément cet accord si l'on donne raison à Gentzen [40] lorsqu'il voit dans les règles d'introduction de la déduction naturelle *la définition* des constantes logiques. *A l'exception de l'ajout de la règle d'absurdité classique*, $\bot_c$, toutes les règles de la déduction naturelle du calcul des propositions définissent la logique intuitionniste et permettent de tester la validité d'une formule sans faire usage des tables de vérité et donc toutes les règles du calcul classique des propositions, sauf $\bot_c$, sont les mêmes que celles du calcul intuitionniste. Puisque seules importent les extensions en science selon Quine, on voit mal à partir de quel point de vue scientifique il peut reprocher aux intuitionnistes d'attribuer des significations déviantes aux constantes logiques.

Un esprit conciliant serait tenté de répondre que la déduction naturelle jusqu'à la règle d'absurdité classique exceptée est, comme l'a remarqué Prawitz [80], une bonne traduction de *la signification constructive* des opérateurs logiques tels qu'ils ont été définis par Heyting [50] pour la logique intuitionniste, mais une traduction qui échoue à donner la signification classique des opérateurs logiques. Cela expliquerait pourquoi Quine soutient que la logique intuitionniste fait un usage déviant des opérateurs logiques. De la même façon, avec Prawitz [81] encore, on peut considérer que le calcul des séquents classique traduit mieux la signification classique des constantes logiques [21, p. 63, n.16]. Mais, ce serait éviter l'argument de Quine selon lequel les significations intuitionnistes des constantes logiques sont « déviantes » et accepter le préjugé - entretenu par un pluralisme logique qui capitule face aux querelles philosophiques - qui consiste à croire qu'il y a une signification intuitionniste *et* une signification classique des constantes logiques. On peut soutenir vigoureusement qu'il n'y a qu'une signification des constantes logiques et qu'elles sont données par les règles d'introduction de la déduction naturelle.

L'argument de Quine apparaît d'autant moins recevable que les connecteurs et quantificateurs ne sont pas inter-définissables en logique intuitionniste et donc qu'ils n'ont pas à proprement parler de « relations » entre eux, chaque opérateur logique est défini *pour lui-même*. Il est donc étrange de reprocher à la logique intuitionniste de bousculer les rapports entre les opérateurs logiques, alors qu'elle s'abstient de dire quoi que ce soit sur ces rapports. Enfin non seulement l'accusation d'entretenir une notion déviante de la négation tombe, puisque, encore une fois, la logique classique accepte ($Def.\ \neg$), mais c'est du point de vue constructif que l'accusation contre la logique classique d'une approche « déviante » de la négation pourrait être plus rigoureusement justifiée. En effet, puisque la logique classique surajoute à la définition constructive de la négation la règle d'absurdité classique, l'intuitionniste peut protester à bon droit, à l'instar de Bornat [8, p. 34] qui, après avoir rappelé que la négation d'un énoncé P est équivalente, en raison de ($Def.\ \neg$), au fait d'affirmer que P conduit à une contradiction, donne à son lecteur cet avertissement encadré :

> **Ne présumons pas** que $\neg$ est comme une négation numérique, de façon à ce que $\neg\neg A$ soit automatiquement équivalent à A. C'est de la logique formelle, pas de l'algèbre de Boole.

Mais c'est justement ce que reproche Quine à la sémantique de la logique intuitionniste : de ne pas être une algèbre de Boole et donc de ne pas avoir la simplicité et la commodité que fournit cette dernière. Cela nous conduit donc au traitement du point (b).

Une logique moins familière, moins commode, moins simple et moins belle ?

On n'engagera pas la polémique sur la question de la plus ou moins grande « beauté » de telle ou telle logique. On peut simplement remarquer que Quine ne donne pas avec précision une norme qui permette de dire pourquoi la logique classique est belle, lorsqu'au contraire l'école intuitionniste a insisté sur *l'harmonie* qui existe en déduction naturelle dans l'équilibre des règles de la d'introduction et d'élimination des connecteurs et sur la fécondité déductive qui résulte de cette harmonie (voir [114]).

Il est très probable que Quine associe ce qu'il considère être la « beauté » de la logique classique avec la simplicité et donc la commodité de sa sémantique booléenne qu'il oppose par contraste à la plus grande complexité de la sémantique constructive que les modèles de Kripke ou l'algèbre de Heyting traduisent. Cette opposition pourrait faire pencher la balance en faveur de la logique classique qui posséderait une méthode de décision plus simple que la logique intuitionniste. Mais l'argument ne pourrait être décisif qu'à la condition de penser que la méthode des tables de vérité est *la* méthode fondamentale de décision en logique, ce qui n'est évidemment pas possible d'envisager du point de vue intuitionniste.

Il est cependant vrai que la recherche de preuve en logique intuitionniste est plus longue et donc plus difficile qu'en logique classique (notamment en raison du fait que certaines règles sont non inversibles et que l'on est contraint à des choix pour l'élimination des disjonctions) mais on ne peut accepter que ce point puisse faire figure d'argument sérieux contre l'intuitionnisme, à moins de faire de la paresse une position scientifiquement correcte. En revanche, si la recherche de preuve est moins économique en logique intuitionniste, le gain d'information est aussi plus important comme on l'a vu plus haut.

Enfin, accorder un caractère plus « familier » à la logique classique, comme Quine le fait, s'accorde mal avec le fait que certains théorèmes classiques comme

$$\vdash_c (P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \vee Q) \tag{1.6}$$

sont condamnés à rester contre intuitifs et donc, contrairement à ce que soutient Quine, non familiers. Dans son analyse du conditionnel et de la disjonction, Quine [85, ch. 3] soutient une position cohérente avec son réalisme sémantique et son adhésion au conservatisme logique, mais en désaccord avec l'usage naturel que l'on fait du conditionnel, comme on peut en juger à la lecture de ce texte :

> Dans la pratique, celui qui affirme 'Si p alors q' est ordinairement incertain quant à la vérité ou à la fausseté individuelle de 'p' et de 'q' mais a quelque motif simplement pour ne pas croire à la combinaison de 'p et non 'q' prise globalement. Nous disons :
>
> Si Pierre a la malaria alors il a besoin de quinine,
>
> parce que nous connaissons la malaria mais nous sommes dans le doute à la fois sur la maladie de Pierre et sur son besoin de quinine. Seuls valent la peine d'être affirmés les conditionnels qui découlent d'une sorte de rapport direct entre l'antécédent et le conséquent - par exemple d'une loi reliant les états de fait que décrivent les deux énoncés composants. Une telle liaison, tout en étant à la base des applications utiles du conditionnel, n'a cependant nul besoin de participer à sa signification. [...] Ce qu'il est important de noter, c'est que '$p \supset q$', c'est-à-dire le conditionnel matériel, doit avoir exactement la signification '$\neg(p \wedge \neg q)$' (ou '$\neg p \vee q$') et l'on verra suffisamment, en avançant, à quel point ce concept est bien adapté aux fins pour lesquelles 'si alors' vient naturellement à l'esprit.

En dépit de ce Quine soutient dans ce texte à la fois dogmatique et provocateur, il est difficile de ne pas reconnaître que les énoncés

$$\text{Pierre n'a pas la malaria ou il a besoin de quinine} \tag{1.7}$$

$$\text{Si Pierre a la malaria alors il a besoin de quinine} \tag{1.8}$$

$$\text{Affirmer que Pierre a la malaria et n'a pas besoin de quinine est absurde} \tag{1.9}$$

n'ont pas *intuitivement* la même signification. Mais Quine [88, pp. 288-294] soutient que, si deux formules ont des tables de vérité identiques, alors un langage référentiellement transparent et purement dénotatif peut se passer des objet intentionnels. Faut-il alors admettre que « la division de 6 par 2 » *signifie* la même chose que « l'addition de 2 et de 1 » puisque ces deux opérations ont le même résultat ?

Supposons qu'un professeur de médecine examine Pierre devant ses étudiants, est-il raisonnable de soutenir qu'il leur apporterait exactement la même *information* en affirmant (1.7) plutôt que (1.8), ou (1.8) plutôt que (1.9) ? Supposer que la disjonction est vraie, c'est déjà affirmer quelque chose sur l'état de Pierre, ce dont s'abstient en fait l'énoncé conditionnel. Si Quine avait approfondi la réflexion sur son exemple dans le cadre de la logique intuitionniste, peut-être aurait-il été troublé de constater que, conformément à ce que l'usage naturel du langage nous suggère, (1.7) a pour conséquence (1.8), en logique intuitionniste, mais non l'inverse, et de même (1.8) a pour conséquence (1.9), mais non l'inverse. Bien entendu ce point de logique s'explique encore une fois par le fait que la logique intuitionniste ne fait pas usage de la règle d'absurdité classique, mais il ne faut pas perdre de vue que ce refus est motivé par l'observation du fait que $\neg\neg P$ n'apporte pas la même information que P.

Sans entrer dans les détails qui exigeraient des développements longs et difficiles, on peut rappeler que l'algèbre de Boole, qui offre à la logique classique sa sémantique, n'est qu'un qu'un *cas particulier* de l'algèbre de Heyting, qui elle permet d'interpréter du point de vue sémantique la logique intuitionniste. Ce point éclaire l'expressivité plus riche de cette dernière, ce que Quine passe totalement sous silence. Le conservatisme logique apparaît comme une position philosophique aussi peu justifiée, *mutatis mutandis*, que la thèse qui consisterait, en philosophie de la physique, à prétendre que la théorie de la relativité est une théorie « déviante » par rapport à la mécanique classique et qu'il faut lui préférer cette dernière théorie parce qu'elle plus familière et plus simple [39] . Mais c'est assez pour cette défense logique de l'in-

39. Le privilège accordé à la simplicité, sur lequel Quine insiste énormément, est resté l'argument fondamental des partisans actuels de la logique classique. Voir sur ce point Burgess [14, chap. 6] et Haack [47, chap. 5]. Une réponse développée aux arguments de Burgess et de Haack déborderait largement le cadre de ce chapitre, mais il est indiscutable que leurs arguments restent profondément dépendants de l'influence de Quine. Pour un logicien classique, la logique intuitionniste est irrémédiablement *déviante*, comme Haack l'affirme explicitement dans le titre de son ouvrage. Pour un intuitionniste, la « bonne logique », c'est-à-dire la logique intuitionniste, est plus riche que la logique classique et contient cette dernière, ce qui est effectivement incompréhensible et intraduisible du point de vue classique. Il n'est donc pas étonnant que, du point de vue étroit d'une logique plus faible, on qualifie une logique expressivement plus forte de « déviante », tout simplement parce qu'on est incapable d'en traduire, de son point de vue logique, la signification correcte. Voir sur ce point la remarque 1 et la note 35 de l'Introduction de ce volume, page 34.

tuitionnisme, il est temps d'aborder la question de sa compatibilité avec l'empirisme.

1.3 Défense épistémologique de l'intuitionnisme

1.3.1 Le problème de Russell et « l'argument de Russell-Tennant »

Russell a eu le mérite de poser le problème que soulève l'adoption de la validité universelle du tiers exclu dans une philosophie de la connaissance qui admet l'empirisme (comme le montre la citation faite plus haut page 45). La complexité de la question apparaît à partir d'un double constat. D'une part, dans le domaine mathématique, les contre-exemples que Brouwer donne pour invalider le tiers exclu conduisent selon Russell, ou bien à sacrifier toutes les preuves qui n'obéissent qu'à la logique classique mais qui ne sont pas valides en logique intuitionniste, ou bien à conserver toutes les mathématiques classiques et du même coup reconnaître implicitement le caractère fondé du platonisme. D'autre part, comme l'induction échoue à fondé le tiers exclu et donc à justifier logiquement son application dans les sciences de la nature, alors on doit, contre l'empirisme, admettre que la validité du tiers exclu est comparable à celle d'un principe d'inférence qui transcende l'expérience en général. C'est ainsi que Russell réaffirme la vérité du réalisme sémantique [99, p. 305, trad. fr. p. 311] :

> Comme une expérience est un fait, les propositions vérifiables sont vraies ; mais il n'y a pas de raison de supposer que toutes les propositions vraies sont vérifiables. Si néanmoins nous affirmons qu'il y a des propositions vraies qui ne sont pas vérifiables, nous abandonnons l'empirisme pur. Finalement, personne ne croit à l'empirisme pur et, si nous devons conserver des croyances que nous considérons tous comme valables, nous devons admettre des principes d'inférence qui ne sont ni démonstratifs ni dérivables de l'expérience.

Pour Russell, un empirisme « pur » implique que ne soient considérés comme vrais que les énoncés qui font référence à des événements dont on a l'expérience privée. Il est évident que, si l'on ne veut pas tomber dans le solipsisme pour maintenir coûte que coûte l'empirisme pur, on doit accepter la vérité de certains énoncés qui sont fondés sur les témoignages ou sur la physique contemporaine et qui présupposent que l'on admette des principes d'inférence qui ne sont ni démontrables, ni dérivables de l'expérience. Parmi ceux-ci, le tiers exclu justifie la croyance en la vérité de phrases comme « il y a ou il n'y a pas de vie au-delà de notre système solaire », parce qu'en vertu de la loi du tiers exclu et indépendamment de toute preuve ou de toute réfutation, l'un des énoncés correspond à un fait. Nous savons que cette disjonction est vraie, parce que chacun de ces membres entretient « des rapports syntaxiques « avec les propositions de base qui traduisent notre expérience. C'est donc par *analogie* avec les propositions de base que nous pouvons affirmer que les énoncés qui outrepassent notre expérience, voire la possibilité de notre expérience en général, sont vrais.

Il n'est pas aisé de répondre à la question de savoir à quelle classe de système philosophique la théorie que Russell développe dans *Signification et Vérité*. On peut par exemple penser avec Quine [91], qu'en dépit de sa sympathie pour le nominalisme et de ses fréquentes références à Carnap, Russell conserve à son insu une théorie platonicienne des mathématiques. On peut aussi considérer avec Marion [66] que la théorie de la connaissance de Russell a toujours conservé d'indiscutables aspects métaphysiques. Mais la question de l'interprétation générale de la philosophie de Russell dans *Signification et Vérité* a déjà été traitée par Engel [30] et n'est pas ici notre propos.

Notons simplement qu'il est indiscutable que Russell est finalement conduit à reconnaître une réalité aux jugements synthétiques *a priori* que le logicisme écartait, même s'il ne l'écrit pas explicitement. On trouve en effet plus tard sous sa plume cette définition de l'empirisme qui *prouve* qu'il admet les jugements synthétiques *a priori* dont le tiers exclu est un exemple [100, p. 516, trad. fr. p. 533] :

> L'empirisme peut être défini par l'affirmation : « Toute connaissance synthétique est fondée sur l'expérience ».

Russell parvient à la conclusion du caractère inadéquat de l'empirisme, et donc à l'idée selon laquelle il y a bien une connaissance synthétique qui est indépendante de l'expérience, c'est-à-dire synthétique et *a priori*. Cinquante six années plus tard, Tennant marquera son accord avec la conséquence que Russell tire de sa position, dans un article au titre suffisamment explicite : *The Law of Excluded Middle is Synthetic A Priori, if Valid* [111]. Mais comme le souligne Tennant, cela rompt avec le statut de vérité analytique que la tradition philosophique depuis Kant accordait à toute vérité logique. En affirmant que le principe du tiers exclu doit être conçu du point de vue du réalisme sémantique comme un « principe synthétique *a priori* » , Tennant insiste plus que Dummett ne l'a fait sur le caractère métaphysique d'une telle position. Cet argument présuppose, bien entendu, que l'intuitionniste qui refuse la validité universelle du tiers exclu n'est en rien tenu d'adopter une telle métaphysique. Si Russell avait réfléchi plus profondément aux fondements et aux vertus épistémologiques de la logique intuitionniste, peut-être n'aurait-il pas sacrifié l'empirisme pour conserver la logique classique comme logique de base, au profit du réalisme sémantique. On a en revanche plus de mal à imaginer ce qu'aurait pu être la philosophie de la logique de Quine sans le conservatisme logique.

1.3.2 L'esquive de Quine : relativité de l'analyticité

Le fait que Quine n'ait jamais considéré que la position intuitionniste puisse être bien fondée, ni que la logique intuitionniste puisse être autre chose qu'une logique « déviante, » explique aussi qu'il donne des arguments qui, indirectement, relativisent l'analyse que Russell fait du tiers exclu dans *Signification et Vérité*. Un des arguments des plus célèbres de Quine [86] consiste à contester que la distinction entre analytique et synthétique puisse être une distinction tranchée, puisque toute définition rationnelle et acceptable de la notion d'analyticité consiste à relativiser celle-ci à une théorie donnée.

Pour définir après Kant le sens de la distinction entre analytique et synthétique, Tennant [111] souligne le fait que deux choses permettent ordinairement de déterminer la valeur de vérité d'un énoncé déclaratif ϕ : sa signification et les états de choses du monde. Cette distinction permet alors de préciser comment il faut entendre les expressions « ϕ est analytique » et « ϕ est synthétique ». Si la signification suffit à déterminer la valeur de vérité de ϕ, alors ϕ est analytique et ne dit rien sur les états de choses du monde. Si en revanche un état de choses du monde doit participer à la détermination de la valeur de vérité de ϕ, alors ϕ est synthétique.

Reprenons maintenant les exemples et l'analyse de Quine [86] :

$$\text{Aucun homme non marié n'est marié} \tag{1.10}$$

est analytique parce que (1.10) est une vérité logique qui, pour reprendre la prose de Quine, reste vraie pour toute interprétation de ses composantes autres que les constantes logiques. Cet exemple conduit Quine à remarquer que

$$\text{Aucun célibataire n'est marié} \tag{1.11}$$

n'est pas une vérité de logique, mais reste un énoncé analytique, en raison de la relation de synonymie en français entre les termes « célibataire » et « non marié ». Laissons pour l'instant de côté l'embarras de Quine vis-à-vis de la synonymie et admettons que, dans un contexte ordinaire, (1.11) est analytique. Son embarras a quelque chose d'embarrassant parce qu'il contraste avec son manque d'embarras pour considérer (1.7), (1.8) et (1.9) comme des énoncés analytiquement équivalents et donc substituables *salva veritate* dans tous les contextes dénotatifs et référentiellement transparents. Mais l'analyse de Quine s'explique et ne souffre d'aucune incohérence.

Poursuivons en nous demandant si

$$\text{Tout ce qui vert est étendu} \tag{1.12}$$

est analytique ou ne l'est pas. Quine se déclare indécis à ce sujet, et explique que son indécision ne provient pas d'une appréhension incomplète de la signification des termes « vert » et « étendu » mais de la difficulté qui réside dans la définition même de l'analyticité. La démarche qui consisterait à expliquer l'analyticité de (1.12) par la construction d'une sémantique scientifique pour un langage artificiel L, de façon à rendre (1.12) *L-analytique*, ne réussit pas à cacher le fait qu'il est nécessaire d'avoir une compréhension préalable de ce qu'il faut entendre par « analytique » avant de pouvoir définir l'analyticité par l'application de règles sémantiques dans un langage artificiel quelconque. Ce que veut dire Quine est sans doute qu'il est impossible de connaître la vérité de (1.12) sans qu'il soit nécessaire d'avoir au moins une fois l'expérience sensorielle du vert. De la même façon, on peut admettre que (1.11) est vrai en vertu d'une relation de synonymie, mais on ne comprendra pas la signification de cette synonymie, sans comprendre ce que signifie le mariage, autrement dit sans une expérience de nature sociologique qui, évidemment, n'est pas *a priori* et donc n'est pas analytique dès lors que l'on accepte l'idée selon laquelle tout énoncé analytique est *a priori*.

Toutes les remarques de Quine doivent être comprises à partir de son point de vue holiste. Quine écrit à la fois contre le dogme réductionniste selon lequel chaque énoncé peut être confirmé ou infirmé, et contre le dogme d'un clivage tranché entre analytique et synthétique [86, trad. fr. pp. 75-76] :

> Les deux dogmes sont, à la racine, identiques. Nous avons remarqué plus haut qu'en général la vérité des énoncés dépend, de façon évidente, à la fois du langage et des faits extra-linguistiques ; nous avons vu que cette observation évidente peut conduire, sinon logiquement, en tout cas hélas naturellement, au sentiment qu'on peut analyser la vérité d'un énoncé en deux composantes, l'une linguistique, l'autre factuelle. Si l'on est empiriste, la composante se réduit à une série de confirmations par l'expérience. Dans le cas extrême, où la composante linguistique est la seule qui compte, un énoncé vrai est un énoncé analytique. Mais j'espère qu'on arrive maintenant à apprécier combien la distinction entre l'analytique et le synthétique a obstinément résisté à toute tentative de la tracer clairement.

La conclusion de cette analyse est que, pour Quine, le schéma de Tennant [111]

$$\left.\begin{array}{l}\text{Monde}\\ \text{Signification de } \phi\end{array}\right\} \rightarrow \text{valeur de vérité de } \phi$$

participe du non-sens. On va cependant montrer qu'il existe un noyau de la signification qui résiste aux attaques holistiques de Quine.

1.3.3 Le noyau dur de la signification constructive des constantes logiques

Une lecture attentive de [86] permet de comprendre que Quine n'affirme pas qu'il n'y a pas de frontière entre vérités analytiques et vérités synthétiques mais, plus précisément, qu'au-delà de la distinction entre les vérités décidables à l'aide de la logique du premier ordre qui sont indiscutablement analytiques, et les autres vérités qui nécessitent pour leur décision des théories plus riches ou bien le recours à l'expérience, la frontière entre analytique et synthétique n'est pas et ne peut pas être une frontière clairement définissable.

Admettons l'argument de Quine dès lors que celui-ci concède l'analyticité des vérités de la logique ; car il n'en faut pas plus, du point de vue intuitionniste, pour contester l'analyticité du tiers exclu. En effet, comme nous l'avons vu à partir de la section 1.2.3, les règles d'introduction des constantes logiques donnent la signification des constantes logiques et parce que ces règles sont aussi les règles de la logique classique, il est impossible, même du point de vue de Quine, de ne pas reconnaître qu'une démonstration intuitionniste qui prouve que C est la conséquence logique des prémisses $H_0, H_1, \ldots, H_n$ établit une vérité analytique. En revanche, à l'instar de Tennant, l'intuitionniste invite le réaliste à assumer le fait qu'en adoptant la logique classique comme logique de base, on accorde au tiers exclu le statut de vérité synthétique *a priori* et non de vérité analytique. Le réaliste évidemment rejettera l'argument de Russell-Tennant et l'interprétera comme l'indice supplémentaire de la relativité de l'analyticité : il semble évident que si l'on adopte une logique plus faible et si l'on définit les vérités analytiques comme coextensives aux vérités logiques, alors on déplace la frontière entre analytique et synthétique. D'un point de vue logique, une preuve en logique propositionnelle classique, n'est pas moins analytique qu'une preuve intuitionniste. On terminera cette section en montrant pourquoi ce déni réaliste de l'argument intuitionniste n'a rien de convaincant.

Il est compréhensible que l'on puisse être tenté de rejeter l'argument de Russell-Tennant en se plaçant du point de vue de Quine. Mais il n'y a pas d'autre moyen de rejeter cet argument qu'en faisant précisément ce que Russell reproche à Carnap et au positivisme logique en général, c'est-à-dire de considérer que le terme « réalité » est un terme métaphysique qui ne connaît pas d'usage légitime et que le Principe de Tolérance doit contraindre tout esprit scientifique à reconnaître qu'il n'y a aucun sens à considérer qu'il y a *une* logique correcte. C'est en assumant cette position propre à Carnap qu'un Quine peut s'autoriser à ne voir dans le tiers exclu qu'un schéma ontologiquement innocent, qu'il est utile et commode de respecter sans inquiétude.

Or, précisément, il n'y a dans l'ajout du tiers exclu ou de la règle d'absurdité classique aux autres règles de la déduction naturelle, aucune *justification* qui soit fondée sur la seule signification des connecteurs. On peut remarquer par ailleurs, que la proposition 2.11 des *Principia* [101, p. 101] n'apporte pas une démonstration satisfaisante du tiers exclu, puisque celle-ci est uniquement fondée sur la substitution de la variable p à la variable q dans le schéma $(\neg p \vee q)$. C'est la raison pour laquelle Tennant considère qu'il est justifié de considérer que le tiers exclu est posé par la logique classique comme une vérité *a priori* et non comme une règle logique comparable à l'introduction de la disjonction ou l'introduction de la négation. Cette « vérité *a priori* » exprime la croyance métaphysique en l'idée selon laquelle le monde est déterminé dans *toutes* ses dimensions exprimables, ce qui revient bien à affirmer, pour parler comme Kant, un jugement synthétique *a priori*. Lorsque Brouwer, pour illustrer l'invalidité du tiers exclu, pose la question de savoir s'il existe ou non, dans le développement décimal de π, un chiffre qui apparaît plus souvent que tous les autres, le réaliste conséquent ne pose pas d'exception à l'applicabilité du tiers exclu, en dépit du fait qu'il est douteux que l'on puisse répondre un jour à une telle question. En conséquence, du point de vue réaliste, on a raison ou tort selon la réponse que l'on donne au problème de Brouwer, même si la réponse transcende irrémédiablement nos capacités cognitives. Ceci montre, à défaut de le prouver, que le réaliste assume le tiers exclu comme un principe synthétique *a priori* et qu'en cela il ne peut s'accorder avec l'empirisme.

1.4 Conclusion : compatibilité de l'intuitionnisme et de l'empirisme

L'argument de Russell-Tennant laisse à l'intuitionniste la possibilité d'assumer l'empirisme. L'intuitionniste n'est pas engagé dans un système philosophique *instable* qui, comme celui de Quine admet l'ontologie des vérités mathématiques transcendantes, l'infinité des ensembles non spécifiables de la théorie de ZFC, mais admet aussi la vérité de l'épistémologie empiriste en décrivant de la sorte l'origine de la connaissance [94] :

> Partant des impacts sur nos surfaces sensorielles, nous avons fait jaillir par notre création collective et cumulative, au fil des génération, notre théorie systématique du monde extérieur.

Dès lors, compte tenu de la défense qui a été faite de la logique intuitionniste, c'est au réaliste partisan, comme Russell et Quine, du conservatisme logique, qu'incombe la preuve de montrer que notre théorie systématique du monde extérieur a besoin de la validité universelle du tiers exclu et donc d'outrepasser la restriction intuitionniste du tiers exclu au domaine du décidable.

Il n'est pas certain que Russell ait eu à l'esprit le fait que le tiers exclu redevenait une vérité pour l'intuitionniste dès lors que l'on est dans le domaine du décidable. Car il assez facile de voir que les exemples polémiques que Russell donne pour jeter le doute sur la position intuitionniste ne sont pas pertinents. Lorsqu'il s'agit de traiter de « propositions extra-logiques au sujet desquelles il n'y de preuve ni pour ni contre », Russell prend comme exemple de proposition de ce type :

$$\text{Il a neigé sur l'île de Manhattan le 1er janvier de l'an I de notre ère.} \tag{1.13}$$

Bien que la géologie nous apprenne que l'île de Manhattan existait le 1er janvier de l'an I de notre ère, et bien qu'en raison des observations climatiques cet énoncé soit plausible, trop de données seraient requises pour que (1.13) soit humainement prouvable ou réfutable. Russell voit dans cet exemple un argument de bon sens contre l'intuitionnisme : nous répugnons à admettre que (1.13) n'est ni vrai ni faux parce que nous croyons obstinément et à juste titre, à une monde « réel » indépendant de nous. Or le fait de soutenir avec l'intuitionniste une conception épistémologique de la vérité conduit, selon Russell, à rejeter ce réalisme de bon sens.

Mais c'est faire là un mauvais procès fait à l'intuitionnisme, sur la base d'un mauvais exemple. Le fait que les calculs météorologiques soient *pratiquement* impossibles pour déterminer la vérité ou la fausseté de (1.13) ne conduit pas l'anti-réaliste *modéré* qu'est l'intuitionniste à considérer que cet énoncé n'est ni vrai ni faux et qu'il est donc un bon candidat pour illustrer la non validité universelle du tiers exclu. Si importante soit la période temporelle choisie dans l'exemple de Russell, celle-ci est *finie* et l'on a une idée des procédures dont on devrait faire usage pour décider si (1.13) est vrai ou faux. Le fait que l'énoncé choisi par Russell ne soit pas pratiquement décidable ne conduit nullement à penser qu'il est *absolument* indécidable. Puisque (1.13) est connaissable en principe à l'aide d'une méthode que l'on connaît, l'intuitionniste n'a aucune raison de considérer qu'il infirme le tiers exclu.

Russell pousse cependant le raisonnement pour montrer qu'il est impossible de trouver un énoncé qui fasse référence à une expérience imaginable, mais qui ne puisse cependant faire l'objet ni d'une preuve, ni d'une réfutation, conformément à la théorie qu'il attribue (encore à tort) à l'intuitionnisme. Il écrit alors

> Il y aura encore des propositions au sujet desquelles il n'y a aucune sorte de preuve. Par exemple « Il y a un cosmos qui ne possède aucun rapport spatio-temporel avec celui dans lequel nous vivons ». Un auteur de romans scientifiques pourrait imaginer un tel cosmos, mais de la nature même de l'hypothèse, il résulte qu'il ne peut y avoir aucun argument inductif ni pour ni contre elle. Quand nous avons le sentiment qu'il doit ou ne doit pas y avoir un tel cosmos, je pense que nous imaginons une Divinité contemplant tous les mondes qu'Elle a créés, et de la sorte nous restaurons subrepticement le chaînon avec notre propre monde, monde qu'en paroles nous avons refusé. Si nous excluons fermement à la fois cette conception et celle d'un accroissement miraculeux de nos propres facultés perceptives, peut-être pourrait-on supposer que notre hypothèse est sans signification. Dans ce cas, elle n'est ni vrai ni fausse,

> mais elle n'est pas une proposition, et c'est pourquoi, elle est impuissante à montrer qu'il y a des propositions qui n'obéissent pas à la loi du tiers exclu.

Il est étonnant que Russell n'ait pas vu que sa façon de régler le problème qu'il se donne à lui-même avec cet exemple, n'embarrasse pas l'intuitionnisme mais menace sa propre théorie d'incohérence. Car manifestement l'exemple de phrase qu'il donne a une signification puisque nous la comprenons. Si tel n'était pas le cas Russell n'aurait pas pu suggérer qu'un tel énoncé pourrait être le point de départ d'un roman de science fiction. Néanmoins, pour éloigner la menace d'invalidité du tiers exclu, puisque cet énoncé n'est pas vérifiable, Russell lui refuse toute signification et lui refuse donc le statut de proposition. Si l'analyse de Russell était acceptable, il faudrait admettre qu'il y a des énoncés qui expriment des situations imaginables mais qui sont néanmoins sans signification.

Encore une fois l'effort de Russell pour faire échec à l'intuitionnisme est ici vain. Il eût été plus simple de dire que l'énoncé pris pour exemple est faux, si l'on assume pour vraie l'hypothèse suivante « tout ce qui peut être affirmé au sujet de quoi que ce soit d'existant dans un univers physique quelconque, doit avoir un rapport spatio-temporel avec notre cosmos pour être vrai », pour que l'énoncé pris comme exemple par Russell soit déclaré faux, car il implique le faux, conformément à l'hypothèse.

Il est enfin totalement inexact que l'intuitionnisme conduise à la forme de l'idéalisme que Russell combat, c'est-à-dire à cette philosophie qui consiste à renoncer à la saine croyance en l'indépendance du monde réel par rapport à nos moyens de connaître. Ce à quoi en revanche l'intuitionnisme conduit à renoncer comme on l'a vu, c'est à la thèse logico-philosophique qui affirme que tous les énoncés doués de sens seraient vrais ou faux de manière déterminée en raison des occurrences factuelles du monde qui répondraient, sans que l'on sache pourquoi, aux contenus de nos énoncés référentiels. A cause de son conservatisme logique, Russell a manqué l'occasion de construire une théorie de la connaissance fondée sur la logique intuitionniste qu'il méconnaissait. Il a exercé comme on le sait une influence non négligeable sur Quine, dont le génie a, hélas, oeuvré pour renforcer dans le milieu philosophique, le préjugé antique que dénonçait Brouwer[62, 12], notre croyance en la validité universelle du tiers exclu. A l'aube du 21ème siècle, ce préjugé persiste encore.

2

Preuves intuitionnistes touchant la Première Philosophie

Résumé. *Vuillemin a toujours lu Descartes comme un intuitionniste avant la lettre, si l'on entend par « intuitionniste » un mathématicien qui adopte la philosophie de Brouwer et la logique de Heyting. On se propose dans l'Introduction et la première section de cet article de montrer que cette lecture que Vuillemin fait de Descartes est parfaitement justifiée en expliquant pourquoi les Méditations peuvent être lues comme une application de la logique intuitionniste. La seconde et la troisième section sont respectivement consacrées à l'analyse logique de la preuve du Cogito (Méditation seconde) et de la première preuve de l'existence de Dieu (Méditation troisième). On montre que les deux preuves fondamentales des Méditations métaphysiques de Descartes sont toutes les deux valides en logique intuitionniste. Du point de vue logique, la première preuve de l'existence de Dieu que donne Descartes pourrait être considérée comme un progrès par rapport à la preuve d'Anselme qui est concluante en logique classique mais qui échoue en logique intuitionniste. Cependant on nuance ce jugement en conclusion en insistant sur le fait que le concept de Dieu sur lequel Descartes fonde sa preuve est indiscutablement un élément réaliste et non constructif.*

Abstract. *Vuillemin has always read Descartes as an intuitionistic before the letter, if by "intuitionistic" one means a mathematician who adopts the philosophy of Brouwer and Heyting logic. It is proposed in the Introduction and the first section of this paper to show that this reading of Descartes Vuillemin fact is perfectly justified in explaining why the Meditations may be read as an application of intuitionistic logic. The second and third sections are devoted respectively to the logical analysis of evidence of the Cogito (Meditation second) and the first proof of the existence of God (Meditation third). We show that the two fundamental proofs of Descartes' Meditations are both valid in intuitionistic logic. From the logical point of view, the first evidence of the existence of God that gives Descartes could be considered an improvement over Anselm's proof*

which is conclusive that in classical logic but fails in intuitionistic logic. However we must nuance this judgment by emphasizing that the concept of God which Descartes based his proof is indisputably unrealistic and non constructive.

2.1 Introduction De l'intérêt de l'analyse intuitionniste des preuves des *Méditations*

Le projet philosophique de Descartes déclaré dès la première phrase de la première Méditation est d'« établir quelque chose de ferme et de constant dans les sciences », et pour cela, de commencer « tout de nouveau, dès les fondements », en *démontrant*, à partir de la méthode du doute, des vérités absolument certaines pour toute conscience. C'est parce qu'il n'y a pas de théorie de la démonstration sans étude de la logique qu'il est crucial d'analyser la logique des preuves des *Méditations* pour pouvoir les comprendre. Certes, la syllogistique était perçue par Descartes comme une discipline formelle mais vide de contenu intuitif. Il est vrai que le fondement rationnel de nos connaissances *sur le monde* n'est pas à chercher, pour Descartes, du côté de la logique, de laquelle il y a selon lui finalement peu à apprendre, mais du côté des mathématiques, c'est-à-dire de l'arithmétique et de la géométrie. Cependant, pour écarter immédiatement tout malentendu, il faut rappeler que, du point de vue intuitionniste, la logique est une *partie* des mathématiques et que, dès lors qu'elle est corrigée des défauts de la logique classique, elle ne doit être écartée ni des mathématiques, ni de l'entreprise du fondement des sciences. La logique intuitionniste, contrairement à la logique classique est fondée sur une représentation de la progression de la connaissance dans le temps, et c'est cet aspect fondamental qui la rend particulièrement adaptée pour la compréhension des *Méditations* en raison de l'analogie suivante : de la même façon que la méthode du doute permet de comprendre ce qui est métaphyiquement nécessaire, la logique intuitionniste donne aussi les règles générales des preuves mathématiques qui sont recevables d'un point de vue intuitionniste. Cette logique forme donc le « noyau dur » de l'intuitionnisme et occupe une place comparable à celle que Descartes donne aux *Méditations* dans son système. En effet, les *Méditations métaphysiques* fondent à leur tour la science mathématique elle-même sur la preuve du *Cogito* qui conduit par une chaîne de raisons aux preuves de l'existence de Dieu, ce dernier étant le garant de la vérité des idées claires et distinctes que toute conscience peut reconnaître dans les éléments de l'arithmétique et de la géométrie.

J'ai déjà souligné ailleurs [129] que Vuillemin entend par « intuitionnisme » tout système de philosophie de la connaissance qui, comme celui de Kant après celui de Descartes, place le Sujet au centre de la constitution de sa description intégrale et systématique de la réalité ; autrement dit, Vuillemin ne restreint pas le sens de ce terme à la philosophie des mathématique qui est née au début du vingtième siècle avec Brouwer. Scrupuleusement attentif à l'histoire de la philosophie, Vuillemin [144, 146] a remarqué que la philosophie de Descartes s'est constituée comme celle d'Epicure en privilégiant « les jugements de méthode » ; le doute cartésien étant le type même d'un jugement de méthode, c'est-à-dire un performatif théorique systématiquement employé pour décider du vrai. En considérant Descartes comme un intuitionniste, Vuillemin évidemment invite à comparer la philosophie de Descartes et celle de Brouwer, et il est vrai qu'elles ne sont pas sans points communs.

L'œuvre révolutionnaire de Brouwer en mathématiques est fondée sur l'idée selon laquelle les mathématiques relèvent d'une libre activité de l'esprit indépendante d'un quelconque langage particulier. Dès 1908, Brouwer manifeste une méfiance à l'égard de la logique formelle classique qui s'exprime par ces mots [11, pp. 18-19] :

> [...] les raisonnements logiques effectués indépendamment de la perception, attendu qu'ils sont les signes de transformations mathématiques à l'intérieur du système mathématique qui régit les perceptions, peuvent déduire, de prémisses scientifiquement admises, des conclusions inacceptables.

Dans ce même article, Brouwer remarque au passage que « la sagesse qui se manifeste dans l'œuvre de Spinoza est ressentie comme totalement indépendante de sa systématisation logique », avant de souligner que les paradoxes logico-mathématiques contemporains sont nés d'un privilège indûment accordé à la logique sur une mathématique vidée à tort de l'intuition originaire du temps. Il poursuit et achève son analyse du rôle de la logique en mathématiques en affirmant que, si le principe du syllogisme et celui de contradiction sont universellement fiables, le principe du tiers exclu en revanche ne l'est plus pour les systèmes infinis.

On sait aujourd'hui comment Heyting et Kolmogorov ont réussi à exprimer une logique, dite « intuitionniste » qui est capable de répondre aux exigences de Brouwer, et comment les modèles et contre-modèles de Kripke donnent une interprétation formelle claire à cette logique. Je me propose dans cet article de montrer que, du point de vue de l'argumentation philosophique, les trois premières Méditations de Descartes illustrent avec force exactement la même position. En 1960, Vuillemin [142] avait déjà montré que la *Géométrie* de Descartes repose sur une décision métaphysique qui « insère l'œuvre cartésienne dans la tradition des mathématiques intuitionnistes sinon finitistes ». Mais probablement parce qu'il a toujours été convaincu du bien fondé et de la solidité de la logique classique et qu'il n'a jamais prêté une grande attention au développement technique de la logique intuitionniste, Vuillemin, à ma connaissance, ne semble s'être jamais vraiment posé la question de savoir si la recherche des preuves qui est à l'œuvre dans les *Méditations* s'accorde avec les principes fondamentaux de la philosophie de Brouwer et avec la logique intuitionniste en général. Je vais montrer qu'il en est bien ainsi.

2.2 Première Méditation Des choses que l'on ne peut logiquement révoquer

Je développe dans cette section quelques éléments qui justifient encore un peu plus le rapprochement que l'on peut faire entre la philosophie de Descartes et l'intuitionnisme contemporain et je montre pourquoi l'on est fondé à penser, à la lecture de la Première Médidation, que la logique des démonstrations dans les *Méditations* est la logique intuitionniste.

L'entreprise philosophique de Descartes, tout comme celle de Brouwer, repose avant tout sur cette conviction inébranlable : la connaissance rationnelle ne peut être fondée de manière ferme et constante que sur des idées simples, claires et distinctes pour tout sujet pensant. On aurait tort de négliger l'originalité d'une telle position, car elle ne va pas de soi pour nombre de philosophes qui n'accordent aucun privilège au sujet pensant en tant qu'être singulier isolé de l'activité sociale et collective. Pour un Quine comme pour bien d'autres, les vrais doutes sont définis par les problèmes que posent les sciences ; en conséquence de quoi le point de départ de Descartes a, pour tout philosophe « dogmatique » au sens que Vuillemin donne à ce terme, quelque chose d'artificiel et de faussé. Le rejet spinoziste de la méthode du doute cartésien, exprimé par exemple dans la proposition **XLIII** de la seconde partie de l'*Ethique* [108] - « Qui a une idée vraie sait en même temps qu'il a une idée vraie et ne peut douter de la vérité de sa connaissance » - met en relief l'originalité de la position cartésienne. Pour Descartes, le fait que je sois capable de parvenir jusqu'au doute métaphysique et hyperbolique, en forgeant la fiction selon laquelle je pourrais être trompé par une puissance infiniment trompeuse, même lorsque je fais l'addition de deux et de trois, atteste de la liberté de la volonté qui est présente dans tout jugement, selon la théorie de la troisième Méditation. Comme le dit très justement Alquié [1, p. 177] :

> la marche de la Méditation première relève avant l'heure de la structure ontologique du « je pense » : du sensible, on doute par raison, car l'entendement dépasse et fonde le sensible ; du rationnel, on doute par volonté, car la volonté est infinie, dépasse l'entendement, et constitue le fond le plus authentique de nous-mêmes.

Dans sa note introductive à l'article cité de Brouwer [11, p. 16], Largeault écrit que « l'origine de l'intuitionnisme brouwerien est une métaphysique où le vouloir est antérieur à la pensée ». Je laisse aux exégètes de la pensée de Brouwer le soin de vérifier jusqu'à quel point cette remarque de Largeault sur Brouwer est correcte. Mais cette citation de Largeault pourrait aussi caractériser correctement la position de Descartes, à la condition d'être modifiée ainsi : « l'origine de l'intuitionnisme *cartésien* est une métaphysique où la *liberté du vouloir est la condition de possibilité de la méthode du doute* ». [40]

Cependant, si le doute est de toute évidence un acte de la volonté, il n'est pas moins évident qu'il faut, dans le contexte cartésien, en concevoir l'usage comme une méthode pour la recherche de la vérité, et non comme le font les sceptiques, comme une fin en soi. Ce point mériterait à peine d'être mentionné si, dans la célèbre et prestigieuse revue *Analysis*, dans un article publié en 1979 [109], on ne pouvait pas au sujet de Descartes, lire ce genre de perles :

> In one of the most celebrated philosophical passages, the first of his six *Meditations*, Descartes claims to have demonstrated a sceptical conclusion concerning the senses by arguing that the very sensations which seems to confirm the existence of an "external" world might be occasioned by a dream.

Il est regrettable que, dans cet article, l'auteur prenne la première Méditation de Descartes comme simple prétexte et commette un grossier contresens, par manque de fidélité à *l'ordre des raisons* sur lequel Gueroult [45, 46] a insisté à juste titre. Il est vrai que Descartes reprend ici à son compte le doute sceptique au sujet des sens, mais il est inexact d'écrire qu'il prétend que ce doute *démontre* les conclusions sceptiques. L'expression de « Cartesian scepticism » utilisée plus loin dans le même article, est incompatible avec ce texte de la sixième Méditation :

> [...] pouvant user de ma mémoire pour lier et joindre les connaissances présentes aux passées, et de mon entendement qui a déjà découvert toutes les causes de mes erreurs, je ne dois plus craindre désormais qu'il se rencontre de la fausseté dans les choses qui me sont le plus ordinairement représentées par mes sens. Et je dois rejeter tous les doutes de ces jours passés, comme hyperboliques et ridicules, particulièrement cette incertitude si générale touchant le sommeil, que je ne pouvais distinguer de la veille : car à présent j'y rencontre une très notable différence, en ce que notre mémoire ne peut jamais lier et joindre nos songes les uns aux autres et avec toute la suite de notre vie, ainsi qu'elle a de coutume de joindre les choses qui nous arrivent étant éveillés.

Cette citation de la sixième Méditation montre que dans la première Méditation, Descartes *simule* un doute sceptique qui le conduit à reconnaître qu'il ne dispose pas *pour le moment* d'une quelconque preuve de la fiabilité des sens. C'est la raison pour

40. Il est tout à fait remarquable que la négation ne peut pas être comprise adéquatement de manière intuitionniste si l'on n'admet pas pour la décrire *un élément pré-logique*, qui exprime en réalité l'action, et non la représentation. Mais j'abandonne ici le développement de cette remarque pour rester dans les limites de mon sujet.

laquelle *les raisons naturelles de douter* ne touchent pas les vérités de l'arithmétique et de la géométrie. En effet, les preuves de ces vérités peuvent être faites par un entendement qui ne s'inquiète pas de la correspondance de ses idées avec les objets du monde extérieur :

> Car, soit que je veille ou que je dorme, deux et trois joints ensemble formeront toujours le nombre de cinq, et le carré n'aura jamais plus de quatre côtés ; et il ne semble pas possible que des vérités si apparentes puissent être soupçonnées d'aucune fausseté ou d'incertitude.

Ce moment de la première Méditation établit que, si le doute *naturel* permet de remettre en cause la correspondance des représentations et des choses existantes représentées, en revanche, comme le souligne avec précision Gueroult [45, p. 36], il ne touche pas les idées simples et universelles qui sont les conditions nécessaires de toute représentation possible :

> De ce genre de choses est la nature corporelle en général, et son étendue ; ensemble la figure des choses étendues, leur quantité ou grandeur, et leur nombre ; comme aussi le lieu où elles sont, le temps qui mesure leur durée, et autres semblables.

Ce n'est que lorsque Descartes a épuisé les *raisons naturelles de douter*, qu'il évoque pour finir la possibilité d'un doute *métaphysique*. Le raisonnement de Descartes est le suivant : j'ai en moi l'*opinion* qu'il y a un Dieu dont la puissance est infinie et, bien que l'idée de ce Dieu soit celle d'un Dieu bon incompatible avec l'idée de tromperie volontaire, il n'est pas naturellement douteux que je me trompe parfois, sans que je puisse pour autant affirmer qu'un tel Dieu *veuille* me tromper. On pourrait, poursuit Descartes, être tenté de se ranger du côté des athées plutôt que d'admettre une telle puissance infinie (même si l'idée de tromperie est incompatible avec l'idée de Dieu). Mais alors au sujet des athées s'impose la conclusion suivante :

> Toutefois, de quelque façon qu'ils supposent que je sois parvenu à l'état et à l'être que je possède, soit qu'ils l'attribuent à quelque destin ou fatalité, soit qu'ils le réfèrent au hasard, soit qu'ils veuillent que ce soit par une continuelle suite et liaison des choses, il est certain que, puisque faillir et se tromper est une espèce d'imperfection, d'autant moins puissant sera l'auteur qu'ils attribueront à mon origine, d'autant plus sera-t-il probable que je suis tellement imparfait que je me trompe toujours.

La première Méditation s'achève par la mise en place de la méthode du doute hyperbolique qui consiste à rejeter comme fausse toute idée qui *peut* être douteuse ; autrement dit la méthode réduit le connaissable à l'indubitable. Or, par un raisonnement qui mériterait très certainement d'être analysé de manière plus approfondie[41], Descartes affirme que l'imperfection de ma connaissance a une probabilité d'autant plus grande que l'on suppose une imperfection de la cause de mon être. En conséquence l'athée a encore plus de raisons de douter et ne peut ni échapper au *doute naturel* du sceptique, ni même échapper à l'hypothèse sceptique d'une absence de véracité des idées claires et distinctes, car, comme Descartes le souligne dans les *Sixièmes Réponses aux Objections* (cité par Gueroult [45, p. 46]) :

> d'autant moins puissant [l'athée] concevra l'auteur de son être, d'autant plus aura-t-il occasion de douter, si sa nature n'est point tellement imparfaite qu'il se trompe, même dans les choses qui lui semblent très évidentes.

A l'issue de la première Méditation, la méthode est donc fixée : il s'agit de partir d'une idée *métaphysiquement indubitable* pour parvenir à un fondement de la science contemporaine qui soit tout aussi indubitable que cette idée. Cette méthode en réalité ne diffère pas de l'interprétation que l'on donne aujourd'hui de la logique intuitionniste, comme je vais maintenant le montrer.

Traduire formellement la démarche démonstrative des *Méditations* dans la logique intuitionniste n'a d'intérêt que si et seulement si cette traduction ou bien éclaire les *Méditations*, ou bien si les *Méditations* donne une interprétation intuitive claire de la signification des preuves en logique intuitionniste. Ce dernier point peut être assez facilement mettre en évidence en se fondant par exemple sur le formalisme des preuves intuitionniste adopté par Bell *et alii* [6].

Remarquons qu'à l'instar des intuitionnistes contemporains, Descartes ne considère une idée comme absolument vraie qu'à la condition que celle-ci soit indubitable ou prouvée. Or du point de vue de la logique intuitionniste, le fait d'être douteux, ou *incertain*, pour une idée ne constitue pas une nouvelle valeur de vérité qui s'ajouterait à celles du vrai et du faux (notées respectivement aujourd'hui $\top$ et $\perp$). Le doute est un *acte* qui dans le cadre cartésien dépend de la volonté et, dans le contexte intuitionniste contemporain est le fait de remarquer que, pour tel énoncé A, on ne possède pas de preuve concluante de la vérité de A. Pour traduire le fait qu'un énoncé A « n'est pas connu comme vrai (*is not known to be true*) » c'est-à-dire, plus simplement et en meilleur français, est *douteux ou incertain*, Bell *et alii* [6, pp. 192-223] le notent par l'apposition d'un point d'interrogation devant la formule A qui fera l'objet du test de validité intuitionniste. L'application des règles intuitionnistes pour la méthode des arbres de Beth (voir l'Introduction de ce volume, section 4, pages 30-36)

41. C'est encore une remarque qu'il sera ici impossible de développer. François Lepage a attiré mon attention sur le fait que la logique intuitionniste peut être mathématiquement définie comme le cadre logique de la théorie des probabilités. Le fait que Descartes conçoive dans la sixième Méditations toutes les vérités qui enveloppent l'existence des corps comme des vérités avec un degré de certitude nécessairement inférieur aux vérités de la métaphysique qui fonde les sciences, confirme l'idée que la bonne logique pour Descartes est cette logique intuitionniste qui ne sera définie que bien plus tard dans l'histoire.

permet de donner une traduction simple de la signification de la méthode de preuve indirecte qui rappelle la même méthode dans le cadre de la logique classique : soit $?(A)$, si le développement arborescent complet de toutes les sous formules de $?(A)$ donnent uniquement des branches qui se ferment sur une contradiction c'est-à-dire sur l'absurde, alors l'incertitude de la validité de A est elle-même absurde et donc A est effectivement prouvable du point de vue intuitionniste, ce qui peut s'écrire ainsi :

$$\vdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (\alpha \nVdash A) \rightarrow \perp \tag{2.1}$$

ou, dans la notation de Bell *et al.* :

$$\vdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (?A) \rightarrow \perp \tag{2.2}$$

De même en logique intuitionniste, si une formule A n'est pas prouvable, alors il existe un contre modèle de A qui peut être représenté par un arbre de Beth de $?(A)$ où il existe au moins une branche ouverte, et ce contre-modèle correspond à un contre-modèle de Kripke. On a donc :

$$\nvdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad \alpha \nVdash A \tag{2.3}$$

ou encore

$$\nvdash_i A \quad \leftrightarrow_{def.} \quad (?A) \nrightarrow \perp \tag{2.4}$$

Il est remarquable que la recherche des preuves dans les *Méditations* corresponde exactement à la façon dont la recherche de preuve est conçu en logique intuitionniste. On a vu plus haut que l'impuissance à prouver la fiabilité des sens ne devait être conçue ni comme une preuve en faveur du scepticisme, ni comme une réfutation de celui-ci. Autrement dit la formule

$$\nvdash_i A \tag{2.5}$$

ne doit pas être considéré comme équivalente

$$\vdash_i \neg A \tag{2.6}$$

car (2.5) exprime le fait d'échouer à prouver A, mais n'exclut pas le fait que A puisse être prouvé ou réfuté ultérieurement, autrement dit (2.5) n'implique pas (2.6). En revanche (2.6) exprime la réfutabilité intuitionniste de A, ce qui est une propriété persistante dans le temps, donc (2.6) implique (2.5).

Si l'on prête attention à la manière dont Descartes conçoit les preuves dans les *Méditations*, on constate que le fameux *ordre des raisons* correspond à un ordre dans le temps, chacune des six *Méditations* correspondant à une journée d'étude, la seconde commençant précisément par ces mots : « La Méditation que je fis hier m'a rempli l'esprit de tant de doutes, qu'il n'est plus désormais en mon pouvoir de les oublier ». Nombreux sont les lecteurs qui, peu attentifs à l'ordre adopté, n'ont pas compris qu'une thèse n'est assumée par Descartes qu'au moment où il en donne la preuve, mais pas avant. Tel est le cas par exemple de la distinction réelle de l'âme et du corps, qui ne peut pas être assumée avant la troisième Méditation, c'est-à-dire pas avant la démonstration de l'existence d'un Dieu qui soit le garant de la vérité des idées claires et distinctes. Cela signifie que, du point de vue démonstratif adopté par les *Méditations*, la thèse matérialiste selon laquelle l'âme et le corps sont une seule et même chose, reste une thèse douteuse, ni réfutée ni prouvée, jusqu'à ce que la démonstration de sa fausseté soit faite à la sixième Méditation. Cette importance accordé à l'ordre temporel des démonstrations a trouvé son expression contemporaine dans les modèles de Kripke [42] qui offrent actuellement le modèle le plus simple pour interpréter la logique intuitionniste.

On peut conclure cette section sur un doute légitime et répondre à ce doute. Si la logique dont Descartes fait usage dans les *Méditations* est vraiment la logique intuitionniste, il est légitime de se demander s'il existe dans ce texte un traitement intuitionniste du théorème du tiers exclu. La réponse à cette question est affirmative ; ce texte existe, il se trouve au premier alinéa de la seconde Méditation, où Descartes établit la transition avec ce qui tout ce qui précède. Je souligne dans la citation qui suit ce qui est crucial pour justifier la thèse selon laquelle Descartes fait usage du tiers exclu *via* une interprétation intuitionniste :

> La Méditation que je fis hier m'a rempli l'esprit de tant de doutes, qu'il n'est plus désormais en ma puissance de les oublier. Et cependant je ne vois pas de quelle façon je les pourrai résoudre ; et comme si tout à coup j'étais tombé dans une eau très profonde, je suis tellement surpris, que je ne puis ni assurer mes pieds dans le fond, ni nager pour me soutenir au-dessus. Je m'efforcerai néanmoins, et suivrai derechef la même voie où j'étais entré hier, en m'éloignant de tout ce en quoi je pourrai imaginer le moindre doute, tout de même que si je connaissais que cela fût absolument faux ; et *je continuerai* ***toujours*** *dans ce chemin, jusqu'à ce que j'aie rencontré quelque chose de certain, ou du moins, si je ne puis autre chose, jusqu'à ce que j'aie appris certainement, qu'il n'y a rien au monde de certain.*

Remarquons que Descartes fait usage d'une formule qui est effectivement celle du tiers exclu, mais qu'il lui donne précisément une interprétation intuitionniste : dans la recherche indéfinie d'une idée certaine, c'est-à-dire prouvable, le doute hyperbolique sera désactivé pour au moins une idée dont la démonstration est indubitable, ou bien avec la démonstration qu'il n'existe aucune idée certaine. La formalisation de la disjonction énoncée par Descartes est bien une instance de la formule

42. Voir l'Introduction, pages 10-11.

du tiers exclu, où x est une variable qui prend ses valeurs dans le domaine des idées du *Cogito* et où Px signifie « x est prouvable » :

$$\exists x Px \vee \forall x \neg Px \tag{2.7}$$

Si l'on fait usage de la logique classique, il est démontrable que (2.7) est une tautologie, comme on le montre ici avec la méthode des arbres de Beth pour la logique classique :

Théorème 7.

$$\vdash_c \exists x Px \vee \forall x \neg Px$$

Démonstration.

$$\begin{array}{c}
1.\ \neg(\exists x Px \vee \forall x \neg Px)\ \checkmark \\
2.\ \neg\exists x Px\ _{(1)} \\
3.\ \neg\forall x \neg Px\ _{(1)}\ \checkmark \\
4.\ \neg\neg Pa\ _{(3)} \\
5.\ \neg Pa\ _{(2)} \\
\times
\end{array}$$

□

Dans le cadre classique, la disjonction formulée par Descartes serait une platitude. Mais l'interprétation intuitionniste de (2.7) ne fait pas de cette formule une formule prouvable en logique intuitionniste. Ce que veut dire Descartes peut être clairement représenté par le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & \vdots & \\
 & \textit{Dubito} & \\
\swarrow & & \searrow \\
\exists x Px & & \forall x \neg Px \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

On peut démontrer que (2.7) n'est pas prouvable du point de vue intuitionniste en utilisant la méthode des arbres exposée par Bell *et alii* [6] et reprise dans l'Introduction de ce volume :

Théorème 8.

$$\nvdash_i \exists x Px \vee \forall x \neg Px$$

Démonstration.

$$\begin{array}{c}
1.\ ?(\exists x Px \vee \forall x \neg Px)\ \checkmark \\
2.\ ?\exists x Px\ _{(1)} \\
3.\ ?\forall x \neg Px\ _{(1)}\ \checkmark \\
4.\ ?Pa\ _{(2)} \\
\hline
5.\ ?\neg Pb\ _{(3)}\ \checkmark \\
\hline
\\
6.\ Pb\ _{(5)}
\end{array}$$

□

Si l'on doute de cette démonstration, on peut vérifier son résultat à l'aide d'Imogen, un programme écrit par Sean McLaughlin [70] pour tester automatiquement le caractère prouvable des formules en logique intuitionniste du premier ordre [43]. Un des avantages d'Imogen est une syntaxe standard et assez intuitive : les symboles

```
forall , exists , ~ , & , | , => , <=>
```

dénotent respectivement la quantification universelle, la quantification existentielle, la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence. Imogen adopte aussi la convention du langage Prolog où les variables sont symbolisées par les majuscules (ou par un mot commençant par une majuscule) et en utilisant les lettres minuscules (ou les mots commençant par des lettres minuscules) pour symboliser les prédicats. On verra plus loin que cette souplesse inspirée de Prolog permet l'écriture de formules qui restent très intuitives et donc très faciles à lire. Voici la copie du résultat du test de (2.7) avec Imogen (la barre verticale « | » symbolisant le connecteur « ou ») :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ imogen prove 'exists X.p(X) | forall X. ~ p(X)'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status CounterSatisfiable

The database is saturated.  The formula is false!
```

Enfin, pour donner un sens intuitif à ce résultat, on peut remarquer que cette instance de la formule du tiers exclu correspond exactement à un certain type de contre-exemples au tiers exclu donnés par Brouwer et qualifiés de « faibles » (par opposition aux contre-exemples dits « forts » donnés plus tardivement aussi par Brouwer et qui, comme l'explique van Atten[117], sont ceux qui produisent directement une contradiction lorsqu'on substitue dans les formules les concepts intuitionnistes à leurs expressions classiques). Un des contre-exemples faibles au tiers exclu donné par Brouwer est l'énoncé suivant :

> « Il y a un chiffre qui apparaît plus souvent que tous les autres dans le développement décimal de π, ou tous les chiffres du développement décimal de π sont tels qu'il est faux que l'un d'entre eux apparaît plus souvent que les autres »

Il est évident que la formalisation de cet énoncé en calcul des prédicats donne aussi la formule (2.7). Le contre-modèle qui prouve le théorème 8 illustre, de manière schématique mais précise, le refus intuitionniste d'assumer la transcendance implicitement contenue dans le tiers exclu classique. Comme le montre le contre-modèle, il est évidemment incontestable qu'au moment où l'énoncé quelconque Pa

43. http://www.seanmcl.com/software/imogen/

est prouvé, le doute au sujet de la vérité de cette instance du tiers exclu devient absurde. Mais, ce que souligne Brouwer dans [11], est précisément le fait que le tiers exclu perd son statut de vérité logique dans les systèmes *infinis*, en donnant évidemment à ce mot le sens intuitionniste d'*infini potentiel*.

On comprend donc que, de la même façon qu'il est possible de chercher indéfiniment une preuve de l'existence d'un chiffre qui apparaît plus souvent que les autres dans le développement décimal de π, il est envisagé comme possible par Descartes que le *Cogito* puisse effectivement « se noyer » en s'enfonçant *toujours plus loin* dans une recherche qui ne lui assure ni l'existence d'une seule idée certaine, ni la preuve qu'il n'y a rien de certain. Autrement dit n'exclut pas de rencontrer une situation qui corresponde au second monde décrit plus haut par le contre-modèle et qui se prolongerait indéfiniment :

$$\begin{array}{c} ?(\exists x Px \vee \forall x \neg Px) ✔ \\ ?\exists x Px \\ ?\forall x \neg Px ✔ \\ ?Pa \\ \hline ?\neg Pb ✔ \\ \vdots \end{array}$$

Résumons le rôle que peut jouer la logique intuitionniste comme théorie de la démonstration dans les *Méditations*. Pour établir la certitude absolue de n'importe quelle idée A, doutons de A, si l'opération qui consiste à douter de A, rend ce doute absurde, c'est-à-dire si $?(A)$ conduit à une contradiction, alors A est une idée indubitable c'est-à-dire une vérité certaine ; dans le cas contraire on considérera que A n'est pas prouvé. Les règles logiques utilisées seront celles de la logique intuitionniste, car, comme on vient de le voir, la formule (2.7) est prouvable avec les règles de la logique classique, alors qu'elle ne l'est pas avec celle de la logique intuitionniste. On voit donc qu'en utilisant une logique plus faible, on doit pouvoir obtenir une certitude plus forte. La méthode logique étant définie, on peut maintenant montrer pourquoi la preuve intuitionniste du *Cogito* n'a rien de trivial.

2.3 Méditation Seconde
De la nature intuitionniste de la preuve du *Cogito*

Une idée qui résiste au doute hyperbolique, c'est-à-dire à la fiction du mauvais génie, en impliquant l'absurde dès lors qu'elle fait l'objet de ce doute est une idée indubitable ou encore un idée vraie ou démontrable. La formule (2.1), caractéristique de la logique intuitionniste, schématise la recherche de preuves dans les *Méditations*. On ne perdra pas de temps à faire la recension des philosophes qui ont affirmé que le

Cogito est une vérité triviale. Un des derniers à l'avoir fait plus ou moins ouvertement est Hintikka [52, 59], qui n'a fait qu'aggraver l'erreur de Gassendi en s'appuyant sur la logique libre de Lambert pour contester l'intérêt que Descartes donne de la preuve du *Cogito* de Descartes. Le raisonnement d'Hintikka [52, pp. 147-149] consiste simplement à remarquer que le fameux *Cogito, ergo sum* de Descartes a la forme logique suivante :

$$\mathit{Cogito}(\text{ego}) \to \exists x(x = \text{ego}) \tag{2.8}$$

Hintikka remarque alors que, si l'on raisonnait dans une « logique libre », c'est-à-dire, selon la définition que Lambert [60, p. 35] donne de la logique libre « une logique libre d'assomptions existentielles sur les termes généraux et singuliers », la question de savoir si l'on peut inférer « J'existe » de « Je pense » serait alors une question vraiment pertinente. Mais tel n'est pas le cas puisque tout énoncé de la forme

$$B(a) \to \exists x(x = a) \tag{2.9}$$

repose sur une présupposition existentielle véhiculée par l'usage de la constante a. En conséquence de quoi Hintikka semble considérer que la remarque que Gassendi avait faire à Descartes dans les *Cinquièmes Objections* selon laquelle la conclusion du « J'existe » aurait pu être tirée du fait que je me promène comme de n'importe quelle autre de mes actions, puisque

$$\mathit{Ambuli}(\text{ego}) \to \exists x(x = \text{ego}) \tag{2.10}$$

partage avec (2.8) la même forme logique, à savoir (2.9).

Or l'analyse d'Hintikka sur ce point, du moins dans la section de cet article, néglige à la fois la signification et la preuve que Descartes apporte pour établir la vérité du *Cogito*. La suite de l'article s'oriente vers une explication du *Cogito* comme étant une sorte de performatif théorique, ce qui explique pour Hintikka [52, 59, p. 167] le privilège que Descartes accorde au verbe *cogitare*. Néanmoins, la critique développée dans la section 4 de l'article subsiste : la présupposition existentielle d'un énoncé comme (2.8) n'est pas contestable et rend la preuve de Descartes, aux yeux d'Hintikka, sans intérêt logique.

Pariente est très probablement au fait de la critique d'Hintikka et on peut supposer qu'il songe à son insuffisance lorsqu'il écrit [78, 77, p. 39] :

> ce qui est suffisant pour la logique ne l'est pas pour Descartes, en ce point de son argumentation. Plus exactement peut-être, Descartes impose ici une condition qui renforce l'exigence de la logique, en ceci qu'il reconnaît comme vrai que l'indubitablement vrai.

Ici « indubitablement vrai » signifie sans doute « effectivement démontrable ». La réduction du vrai au domaine du démontrable est l'exigence de la logique intuitionniste dont le premier principe théorique est le refus d'assumer l'universalité du principe de bivalence. Il est donc évidemment impropre de parler comme le fait ici Pariente de « *la* logique », comme si l'on pouvait faire abstraction de la différence sémantique fondamentale entre logique classique et logique intuitionniste.

Ce point établi, je crois cependant que, dès lors que l'on raisonne à l'aide la logique intuitionniste, il est possible de démontrer qu'Hintikka comme Pariente accordent tous deux une importance exagérée à la nécessité d'expliquer l'usage de la première personne dans les *Méditations*. Le problème de Descartes n'est pas de prouver l'existence de l'*ego*, mais de trouver une pensée indubitable, c'est-à-dire une pensée qui résiste à la puissance du grand trompeur. En effet, aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'y a aucune difficulté à traduire la démonstration de Descartes à la troisième personne, sans rien lui faire perdre de son caractère apodictique. On remarquera que dans la démonstration qui suite, la référence à la première personne du singulier n'est pas requise, mais que l'on peut faire usage de cette première personne pour rendre plus intuitif le résultat.

Supposons donc qu'un sujet décide de considérer toutes ses représentations comme douteuses, et forge pour cela la fiction d'un être qui la puissance de le tromper quel que soit le contenu et la nature de ses pensées. Un tel sujet peut-il malgré tout être certain d'au moins une pensée ? La réponse de Descartes à cette question est qu'un tel sujet peut être absolument certain qu'il pense, non seulement parce qu'il est impossible de douter que l'on pense au moment où l'on doute, puisque le doute est une pensée, mais parce que l'acte de tromperie du mauvais génie à l'égard du sujet doutant implique aussi que ce sujet est trompé seulement si ce sujet pense, en vertu de la signification qui est donnée dans ce contexte à cette fiction du mauvais génie. En effet la tromperie est supposée s'exercer sur *les représentations* ou sur les pensées du sujet, non sur des actes dont la description contient une référence au corps, ce que semble n'avoir pas compris Gassendi.

Le fait que la tromperie du grand trompeur ait pour condition nécessaire la pensée et que la supposition d'une tromperie et la négation de la pensée rend la tromperie impossible, peut se traduire ainsi :

> « Quel que soit x et quel que soit y, le fait que x trompe y seulement si y pense, implique qu'il est certainement faux que x trompe y si l'on suppose à la fois que x trompe y et que y ne pense pas. »

L'énoncé qui précède est facilement traductible dans le langage du calcul des prédicats, et la syntaxe d'Imogen en offre une traduction presque limpide :

```
forall X.  forall Y.((trompe(X,Y)=> pense(Y))=>
((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))
```

Vérifier qu'un tel énoncé est prouvable en logique intuitionniste devient dès lors un jeu d'enfant. Voici la copie du résultat du test de cette formule *via* Imogen :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ imogen prove
'forall X.  forall Y.((trompe(X,Y)=> pense(Y))=>
((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status Theorem for forall X. forall Y.((trompe(X,Y)=>
 pense(Y))=>((trompe(X,Y) & ~ pense(Y))=> ~ trompe(X,Y)))

The formula is true!
```

On peut aussi traduire la formule dans le langage usuel du calcul des prédicats du premier ordre et en donner la preuve à l'aide de la méthode exposée dans l'Introduction de ce volume :

Théorème 9.

$$\vdash_i \forall x\forall y((Txy \to Py) \to ((Txy \wedge \neg Py) \to \neg Txy))$$

Démonstration.

$$1.\ \underline{?\forall x\forall y((Txy \to Py) \to ((Txy \wedge \neg Py) \to \neg Txy))}$$
$$2.\ \underline{?\forall y((Tay \to Py) \to ((Tay \wedge \neg Py) \to \neg Tay))}\ _{(1)}$$
$$3.\ \underline{?((Tab \to Pb) \to ((Tab \wedge \neg Pb) \to \neg Tab))}\ _{(2)}\ ✔$$
$$4.\ Tab \to Pb\ _{(3)}\ ✔$$
$$5.\ \underline{?((Tab \wedge \neg Pb) \to \neg Tab)}\ _{(3)}\ ✔$$
$$6.\ \boldsymbol{Tab}\ _{(5)}$$
$$7.\ \neg Pb\ _{(5)}$$
$$8.\ ?\neg Tab\ _{(5)}$$
$$9.\ \boldsymbol{?Pb}\ _{(7)}$$
$$10.\ \boldsymbol{?Tab}\ _{(4)} \qquad 11.\ \boldsymbol{Pb}\ _{(4)}$$
$$\times \qquad\qquad \times$$

□

On imagine aisément la réaction que peut provoquer la démonstration qui précède. Au « grand appareil » qu'est la fiction du grand trompeur, il semble que l'on substitue ici l'appareil de la formalisation logique avec ses subtilités pour lesquelles Descartes, comme le rappelle Guenancia [44, pp. 32-34], n'avait que mépris. Mais je crois qu'un tel rejet traduirait plus l'ignorance et l'incompréhension de la signification d'une telle preuve que les scrupules de l'historien. Ce que montre une telle preuve est au contraire précieux dans la perspective intuitionniste qui, incontestablement, est bien celle de Descartes. En effet, cette preuve démontre qu'il suffit d'accorder, d'une part, que « penser » est une condition nécessaire pour « être trompé » (ce qui est évidemment impliqué par la fiction du grand trompeur) et, d'autre part, que les constantes logiques de la conjonction, de l'implication et de l'absurde, ont une signification naturelle, universelle et évidente, pour que la premier résultat positif des *Méditations* soit, du point de vue intuitionniste, une *vérité logique* irréfutable.

Il faut rappeler que le logicien intuitionniste est, en théorie de la démonstration, plus exigeant que le logicien classique car, comme je l'ai expliqué dans un autre article [136], toutes les vérités de la logique intuitionnistes sont des vérités analytiques (raison pour laquelle le tiers exclu n'est pas une vérité de la logique intuitionniste). Tel est bien le cas de la vérité du « Je pense » dans les *Méditations*. On se souvient que Gueroult [45, p. 62] a insisté sur le fait que la certitude *métaphysique* du *Cogito* est entendue par Descartes comme une certitude *scientifique*. La démonstration en logique intuitionniste du raisonnement de Descartes confirme ce point, en prouvant formellement ce qui peut se comprendre intuitivement : aucun état de la connaissance concevable n'est compatible avec l'hypothèse d'un individu qui se trompe, ou qui est trompé, mais qui ne pense pas.

Comme le souligne avec justesse Guenancia [43, p. 65], « il est impossible de douter de sa propre existence, de *chose qui pense* ». C'est donc bien la pensée et, avec la pensée en général, tout contenu de pensée au moment même de la représentation, qui est mis à l'abri du doute hyperbolique dans la seconde Méditation. Quelle que soit l'obscurité et la confusion d'une idée, le grand trompeur ne peut faire en sorte que je n'ai pas cette représentation au moment où je la pense. Il se peut que je ne me représente rien de réel, mais, de la même façon qu'il est impossible que je ne pense pas lorsque je doute, il est impossible que cette représentation ne soit rien, c'est-à-dire n'existe pas, quand je pense.

Mais on recherche désormais une idée qui puisse correspondre certainement à une chose existant hors du *Cogito*. Il est temps d'aborder ce qui est à mon avis la plus grande difficulté des *Méditations*, celle de la preuve qui permet au *Cogito* de prouver que l'idée de Dieu qui est en lui à la fois *prouve l'existence* d'un être qui est hors de lui, et exprime correctement l'essence de Dieu. C'est l'objet de la troisième Méditation.

2.4 Méditation troisième
Preuve intuitionniste de l'existence de Dieu

La première preuve de l'existence de Dieu que Descartes donne dans les *Méditations* est dite « par les effets » parce qu'elle procède de l'idée que le *Cogito* a de Dieu pour prouver l'existence de Dieu qui est cause de cette idée. Dans la troisième Méditation, Descartes n'expose pas de manière abrupte cette preuve mais, de la même façon que pour la preuve qu'il donne du *Cogito*, s'efforce de préparer son lecteur à la compréhension de cette preuve. On ne fera pas ici l'analyse conceptuelle de cette preuve qui a longuement été développée par Gueroult [45, ch. V, pp. 154-247]. On s'efforcera au contraire d'en donner la traduction la plus concise et la plus précise possible afin de savoir, conformément à l'objectif poursuivi dans cet article, si cette preuve est exprimable et recevable en logique intuitionniste du premier ordre. La preuve de Descartes, indépendamment du travail conceptuel de préparation qui la précède, tient dans l'alinéa suivant :

> Partant il ne reste que la seule idée de Dieu, dans laquelle il faut considérer s'il y a quelque chose qui n'ait pu venir de moi-même. Par le nom de Dieu j'entends une substance infinie, éternelle, immuable, indépendante, toute connaissante, toute-puissante, et par laquelle moi- même, et toutes les autres choses qui sont (s'il est vrai qu'il y en ait qui existent) ont été créées et produites. Or ces avantages sont si grands et si éminents, que plus attentivement je les considère, et moins je me persuade que l'idée que j'en ai puisse tirer son origine de moi seul. Et par conséquent il faut nécessairement conclure de tout ce que j'ai dit auparavant, que Dieu existe. Car, encore que l'idée de la substance soit en moi, de cela même que je suis une substance, je n'aurais pas néanmoins l'idée d'une substance infinie, moi qui suis un être fini, si elle n'avait été mise en moi par quelque substance qui fût véritablement infinie.

Les six prémisses de cette preuve se répartissent en deux groupes de même taille. Le premier est constitué de trois axiomes (propositions 4 à 6) qui expriment les rapports évidents pour la pensée entre réalité des idées et causes des idées. Le second groupe est constitué de trois propositions (7 à 9) qui expriment des *faits* dont le *Cogito* ne peut douter. Toute les propositions qui suivent jouent un rôle dans la preuve. Pour plus de clarté, elles sont aussitôt traduites par exprimées par une formule de la logique du premier ordre écrites dans la syntaxe d'Imogen. Il faut aussi préciser que la preuve qui suit fait usage de deux constantes d'individus qui n'appartiennent pas à la même catégorie grammaticale. En effet le terme *deo*, écrit en minuscules, fait référence au *concept* de Dieu, c'est-à-dire à l'idée innée que le sujet pensant conçoit. Ce sujet pensant est désigné par le terme de *cogito* écrit aussi en minuscules, pour se plier à la syntaxe d'Imogen. Pour que le sens de la preuve soit clair, il faut donc garder à l'esprit que *deo* désigne un *objet de pensée*, quand *cogito* désigne la représentation du *sujet pensant*. Ces précisions étant faites, on peut maintenant exprimer, formaliser et tester la preuve de Descartes.

Proposition 4. *Si un être pensant a un concept quelconque, alors il existe quelque chose qui est la cause de ce concept*[44].

```
(forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=> exists X. cause(X,Y)))
```

Proposition 5. *Une chose ne peut être la cause d'une autre qu'à la condition que la cause ait au moins autant de perfections (ou de réalité) que l'effet*[45].

44. La réalité objective d'une idée doit venir du *Cogito* ou d'une autre chose existante, car sinon cette réalité aurait pour cause le néant, ce qui est impossible.

45. Descartes écrit :

```
(forall X. forall Y.(cause(X,Y)=> a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y)))
```

Proposition 6. *Un être ne peut être la cause de ce qui est actuellement infini qu'à la condition d'être aussi actuellement infini.*

```
(forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X)))
```

Proposition 7. *Le Cogito a un concept de Dieu.*

```
(a_un_concept(cogito,deo))
```

Proposition 8. *L'infini actuel est une propriété du concept de Dieu.*

```
(actuellement_infini(deo))
```

Proposition 9. *Il est absurde d'affirmer qu'il y a au moins autant de perfections dans le Cogito que dans le concept de Dieu*[46].

```
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo))
```

La conclusion de la première preuve « par les effets » de l'existence de Dieu est la suivante :

Proposition 10. *Ce n'est pas le Cogito qui est la cause du concept de Dieu, mais un être qui est actuellement infini.*

```
(~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))
```

On parvient maintenant au théorème de cette section :

> c'est une chose manifeste par la lumière naturelle, qu'il doit y avoir pour le moins autant de réalité dans la cause efficiente et totale que dans son effet : car d'où est-ce que l'effet peut tirer sa réalité sinon de sa cause ?

On remarque que « perfection » est synonyme de « réalité » et que Descartes n'applique une relation d'ordre sur les représentations qu'en raison des relations de dépendances logiques ou grammaticales : la substance pouvant être conçue ou connue sans ses modes, elle est d'une perfection supérieure aux modes ; la représentation de Dieu qui est la représentation d'une substance actuellement infinie a plus de perfection que n'importe quelle autre représentation, et donc la cause de la représentation de Dieu doit avoir au moins autant de perfection, ou réalité, que cette représentation en contient. En conséquence aucune substance finie ne peut être la cause de la représentation de Dieu, ce qui exclut que le *Cogito* soit la cause de cette représentation.

46. Puisque le sujet pensant doute, il est nécessairement imparfait et donc fini ; le concept de Dieu enveloppe en revanche une infinité de perfections.

Théorème 10. *La conjonction de chacune des expressions qui formalisent les propositions 4 à 9 implique, en logique intuitioniste du premier ordre, l'expression qui formalise la proposition 10 ; autrement dit :*

$$\vdash_i ((4) \land (5) \land (6) \land (7) \land (8) \land (9)) \to (10) \tag{2.11}$$

Du seul point de vue de la logique intuitionniste, la preuve « par les effets » que Descartes donne de l'existence de Dieu est donc irréprochable.

Test avec Imogen. `joseph@joseph-Inspiron-530:~$`

```
imogen prove '((forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=>
> exists X. cause(X,Y))) &
> (forall X. forall Y.(cause(X,Y)=>
> a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) &
> (forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
> actuellement_infini(X))) &
> (a_un_concept(cogito,deo)) &
> (actuellement_infini(deo)) &
> (~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
> (~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))'
### Warning: using slow symbols ###
% SZS status Theorem for ((forall Y.(a_un_concept(cogito,Y)=>
exists X. cause(X,Y))) &
(forall X. forall Y.(cause(X,Y)=>
a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) &
(forall X. forall Y.((cause(X,Y) & actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X))) &
(a_un_concept(cogito,deo)) &
(actuellement_infini(deo)) &
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
(~cause(cogito,deo) & exists X.(actuellement_infini(X) & cause(X,deo)))

The formula is true!
```

□

Test avec ileanCoP. ileanCoP est, comme Imogen, un vérificateur automatique de théorèmes pour la logique intuitionniste du premier ordre [47], écrit en Prolog par Jens Otten. La syntaxe de ce progrmme est très proche de celle d'Imogen. Voici la copie du résultat sans surprise du test de (2.11) avec ileanCoP :

```
?- %  nnf_mm_intu compiled 0.00 sec, 10,932 bytes
% /home/joseph/provers/prolog-provers/ileancop_swi/ileancop_swi.pl
```

47. http://www.leancop.de/ileancop/

```
compiled 0.00 sec, 18,216 bytes
true.

?- prove(((all Y:(a_un_concept(cogito,Y)=>
ex X: cause(X,Y))) ,
(all X: all Y:(cause(X,Y)=>
a_au_moins_autant_de_perfections_que(X,Y))) ,
(all X: all Y:((cause(X,Y) , actuellement_infini(Y))=>
actuellement_infini(X))) ,
(a_un_concept(cogito,deo)) ,
(actuellement_infini(deo)) ,
(~ a_au_moins_autant_de_perfections_que(cogito,deo)))=>
(~ cause(cogito,deo) , ex X:(actuellement_infini(X) , cause(X,deo)))).
|    |    |    |    |    |    |    |    |    0.009999999999999998
true
```

□

De la même façon qu'une calculette donne le résultat d'une longue opération arithmétique, Imogen et ileanCoP permettent de savoir si une formule de la logique du premier ordre est ou n'est pas prouvable en logique intuitionniste. Aux esprits chagrins qui seraient tentés de répondre que la copie de ces résultats ne remplacent pas une démonstration, on donne la possibilité de faire cette démonstration avec la méthode de Bell *et al.*.

Pour aider encore un peu ceux qui souhaitent faire la démonstration de (2.11), en voici la traduction dans un formalisme très usuel :

$$\begin{aligned}((\forall y(Rcy \to \exists x Cxy)) \land \\ (\forall x \forall y(Cxy \to Axy)) \land \\ (\forall x \forall y((Cxy \land Iy) \to Ix)) \land \\ Rcd \land \\ Id \land \\ \neg Acd) \to \\ (\neg Ccd \land \exists x(Ix \land Cxd))\end{aligned} \tag{9}$$

Le code LaTeX de cette formule est le suivant :

```
((\forall y(Rcy\to \exists x Cxy))\land(\forall x \forall y (Cxy \to Axy))
\land (\forall x \forall y((Cxy \land Iy)\to Ix)) \land
Rcd \land Id \land \neg Acd)\to (\neg Ccd \land \exists x(Ix \land Cxd))
```

Il suffit de copier ces trois lignes de code qui précèdent et de les soumettre au Tree Proof Generator, écrit et mis en ligne [48] par Wolfgang Schwarz, pour obtenir la

48. http://www.umsu.de/logik/trees/

preuve de cette formule *en logique classique*. Le logiciel de Wolfgang Schwarz donne un arbre de 15 branches à la 381ème étape de son calcul qui démontre la validité de (2.11). L'accord des résultats obtenus par Imogen et ileanCoP ne laisse aucun doute sur le fait que (2.11) est un théorème de la logique intuitionniste du premier ordre. On laisse au lecteur qui a du temps à perdre le soin de le prouver « à la main », avec la méthode de Bell *et al.* ou une autre méthode de son choix. La conclusion qui suit porte sur les leçons philosophiques des démonstrations qui viennent d'être faites.

Conclusion

Vuillemin [142] a montré que la *Géométrie* de Descartes est d'inspiration intuitionniste. C'est à partir de ce constat qu'il a jugé que les *Méditations métaphysiques* expriment une position philosophique en raison du privilège accordé à ce qu'il appelle les *jugements de méthode*. Mais aucune réponse n'avait été apportée jusqu'à présent à la question de savoir si les preuves fondamentales des *Méditations* sont conformes ou non à la logique intuitionniste telle qu'elle a été rigoureusement définie par Heyting. Cet article démontre que tel est bien le cas pour les deux premières preuves des *Méditations*, à savoir la preuve du *Cogito* et la première preuve par les effets de l'existence de Dieu. Cette dernière conduit logiquement à se débarrasser du solipsisme et il n'y a donc aucune raison de penser que *Les Méditations* ne sont pas une œuvre philosophique logiquement stable, c'est-à-dire intuitionniste d'un bout à l'autre de la chaîne des raisons.

Le fait que la première preuve par les effets soit une preuve recevable en logique intuitionniste est un résultat remarquable dans l'histoire des preuves de l'existence de Dieu. Avant Descartes, Anselme avait donné une preuve comparable, longuement et profondément analysée par Vuillemin [143]. Cependant, comme l'a déjà montré Weingartner [152, 58] la preuve du Proslogion comporte une étape illégitime d'un point de vue intuitionniste et fait de cette preuve une preuve qui n'est valide qu'en logique classique. Pour le montrer, on peut reprendre l' analyse que Vuillemin [143, p.21] donne de la preuve d'Anselme :

> La preuve d'Anselme se distingue à la fois de la preuve ontologique qui déduit l'existence de la perfection absolue et de la preuve cartésienne par l'idée du parfait en moi. Elle ressemble à cette seconde preuve en ce qu'elle fait appel à une *cogitatio* et, en ceci, elle ressemble à une preuve par les effets. Mais cette *cogitatio* est réputée impossible et c'est de cette impossibilité que l'existence divine devra être déduite. En ce sens, on peut dire que la preuve du *Proslogion* est une preuve par les effets exclus en ce qu'elle part de ce qu'il est impossible de poser en relation à l'être dont cette impossibilité démontrera l'existence.

En définissant Dieu comme « ce qui est tel que rien de plus grand ne peut être pensé », Anselme parvient à la conclusion que Dieu existe en raison même de la définition qu'il en donne. En effet « ce qui est tel que rien de plus grand ne peut être pensé ne peut exister seulement dans l'intelligence », car sinon on pourrait penser un être plus grand qui serait aussi dans la réalité et lui serait supérieur, ce qui contredirait la définition. Donc ce qui est tel que rien ne peut être pensé de plus grand *ne peut pas ne pas* être pensé comme étant aussi dans la réalité. D'où la conclusion d'Anselme [2, Proslogion, ch. II, p. 180] : « Il existe donc, sans aucun doute, quelque chose dont on ne peut rien concevoir de plus grand, et dans l'intelligence, et dans la réalité ». On remarque ici que le raisonnement d'Anselme effectue une dérivation licite en logique classique mais proscrite en logique intuitionniste : le passage de l'énoncé modal « *ne peut pas ne pas* être » à la conclusion « est nécessairement ». Or cette dérivation revient à supprimer la double négation au profit de l'affirmation, ce que refuse de façon générale la logique intuitionniste. Certes, la formule

$$\neg\Diamond\neg p \rightarrow \Box p \tag{2.12}$$

est un théorème de **S4**, mais **S4** est un système de logique modale *classique*. Ce que rejette la logique intuitionniste, c'est tout d'abord la formule classique et non modale

$$\neg\neg p \rightarrow p \tag{2.13}$$

dont la traduction modale McKinsey-Tarski est dans **S4** [49]

$$\Box(\Box\neg\Box\neg\Box p \rightarrow \Box p) \tag{2.14}$$

Or (2.14) *n'est pas* un théorème de **S4** mais de **S5**, comme l'attestent les résultats des tests réalisé à l'aide de « The Logics Workbench [50] » :

```
joseph@joseph-Inspiron-530:~$ lwb
Starting the LWB, please wait...

 LWB  -  The Logics Workbench  1.1 linux
 type 'help;' for help

> load (s4);
s4  user
s4> provable(box(box ~ box ~ box p -> box p));
false
s4> load (s5);
s5  s4  user
s5> provable(box(box ~ box ~ box p -> box p));
true
```

49. Voir sur cette question Bell *et alii* [6, pp. 212-214].
50. http://www.lwb.unibe.ch/

Il est donc incontestablement fondé, du point de vue de la logique intuitionniste, de rejeter la preuve d'Anselme. Or tel n'est pas le cas de la première preuve de l'existence de Dieu que Descartes donne dans la troisième Méditation [51], logiquement recevable dans une logique plus faible que la logique classique, elle est philosophiquement plus forte parce qu'il est plus difficile de rejeter un argument qui repose sur un noyau logique partagé aussi par les logiciens classiques.

Ce résultat signifie-t-il que la preuve de Descartes est dès lors susceptible de forcer la foi du logicien intuitionniste ? Évidemment non et une analyse du fonctionnement de la preuve permet de voir où le bât blesse. On a vu que la preuve de Descartes repose sur trois axiomes et trois énoncés factuels admis comme indubitables. La suppression d'un seul énoncé de l'ensemble des prémisses rend impossible la dérivation de la conclusion. On peut convenir de ne pas discuter des propositions 4 à 6 qui sont des définitions ou des axiomes. En revanche, la conjonction des prémisses 7 et 8 pose problème, car l'on peut évidemment contester le fait que l'on conçoit clairement et distinctement l'infini divin qui est au-delà de toute possibilité d'accroissement, c'est-à-dire, pour reprendre la définition d'Anselme, « l'être tel que rien de plus grand ne peut être pensé ». Je peux admettre que j'ai un concept de Dieu, mais refuser de reconnaître que je conçois l'infini absolu et actuel *via* un tel concept. Je peux aussi reconnaître que par définition le concept de Dieu enveloppe l'infini actuel, mais nier qu'il y ait en moi l'intuition d'un tel concept. Hobbes l'a parfaitement compris lorsqu'il écrit et répète dans les *Troisièmes Objections* que Descartes ne prouve pas que nous avons une idée de Dieu. Descartes peut bien répondre qu'il est manifeste que nous en avons une, il montre simplement que la prémisse de cette preuve outrepasse la position intuitionniste au sens strict : c'est *un acte de foi réaliste*, celui-là même que rejettent les intuitionnistes contemporains qui refusent précisément d'admettre dans les mathématiques tout élément théologique. Vuillemin a vu avec précision ce point lorsqu'il écrit [141, chap. 1] :

> le seul recours à la causalité et à la correspondance dans la preuve de l'existence de Dieu à partir de son idée en moi ne saurait produire un cercle qui ne figurerait pas déjà dans le contenu même de l'idée de Dieu.

L'intuitionniste authentique peut admettre aisément qu'un enchaînement de dérivations logiques dépasse l'intuition mais reste légitime tant que l'on peut vérifier pas à pas, quel que soit le temps que cela puisse prendre, que chaque dérivation est logiquement recevable. En cela les outils d'aide à la vérifications des théorèmes sont les bienvenus, comme on a pu le voir ; mais la présence au sein de raisonnements logiquement corrects d'éléments absolument non constructifs, non décidables ou non vérifiés, ou encore non intuitifs, frappe aussitôt le résultat de la preuve intuitionniste du même doute que tout ce qui relève de preuves non constructives dans les mathématiques classiques. S'il est démontrable que la première preuve de l'existence

51. Contrairement à ce que j'avais cru et développé dans un brouillon fautif.

de Dieu que donne Descartes est recevable du point de vue intuitionniste, il n'est ni prouvé ni attesté que nous ayons le concept de Dieu que Descartes prête au *Cogito*. Ce dernier point est condamné à rester une question de foi, et non de logique.

3

Une défense intuitionniste de l'argument de Diodore-Prior

Résumé. *Cet article répond aux trois reproches que Vuillemin a formulés contre la preuve du Dominateur proposée par Prior. L'interprétation intuitionniste de cette preuve permet d'écarter les deux premiers reproches et de limiter la portée du troisième reproche. On donne en conclusion une preuve de l'argument de Diodore, fondée sur une interprétation intuitionniste du premier axiome de la démonstration de Prior. Cette preuve fait à la fois l'économie des axiomes additionnels de Prior et des indices temporels utilisés par les démonstrations de Vuillemin.*

Abstract. *This paper is a reply to the three reproaches Vuillemin made against Diodorus-Prior's Master Argument. The intuitionistic interpretation of Prior's proof can rule out the first two criticisms and can limit the scope of the third criticism. In conclusion we give a proof of the argument of Diodorus, based on an intuitionistic interpretation of Prior's proof. This proof both makes the economy of Prior's additional axioms and time indexes used by evidences proposed by Vuillemin.*

3.1 Le langage de la preuve de Prior

Dans [82] et [83] Prior a donné une preuve formelle du fameux argument Dominateur rapporté par Epicure. Comme nous le verrons, la preuve proposée par Prior, exprimée dans le langage d'une logique temporelle minimale, est fondée uniquement sur les règles du calcul propositionnel de la logique minimale. Aucune démonstration formelle de l'argument de Diodore n'a été capable, jusqu'à maintenant, de dépasser l'élégance et la simplicité de cette preuve.

3.1.1 Formalisme de la preuve de Prior

Prior fait usage du langage du calcul propositionnel auquel il ajoute deux opérateurs temporels et deux opérateurs modaux.

1. *Opérateurs temporels* :
   - Pp = « p est le cas au moins une fois dans le passé ».
   - Fp = « p est le cas au moins une fois dans le futur ».
   - p et $\neg p$ signifient respectivement « p est maintenant le cas »et « p n'est pas maintenant le cas ». En d'autres termes, si une variable propositionnelle n'est pas précédée d'un opérateur temporel, on l'interprète comme représentant une assertion au sujet du présent.
2. *Opérateurs modaux* :
   - $\Diamond p$ = « p est possible »,
   - $\Box q$ = « q est nécessaire ».

3.1.2 L'argument de Diodore proprement dit

Les trois prémisses du Dominateur sont alors formalisées par Prior de la façon suivante :

- Toute proposition vraie au sujet du passé est nécessaire. En d'autres termes, ce qui a été le cas ne peut pas ne pas avoir été le cas :

$$Pp \to \neg\Diamond\neg Pp \tag{I}$$

- L'impossible ne suit pas [logiquement] du possible. En d'autres termes, s'il est nécessaire que p implique q, alors si q est impossible, p l'est aussi.

$$\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p) \tag{II}$$

- Quelque chose qui n'est, ni ne sera, reste cependant possible.

$$\neg p \wedge \neg Fp \wedge \Diamond p \tag{III}$$

Diodore affirme que l'assertion conjointe de (I) et de (II) implique la négation de (III) :

- Si un énoncé p n'est vrai ni maintenant ni plus tard, alors p est impossible.

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \to \neg\Diamond p \tag{¬ III}$$

3.1.3 L'argument de Diodore-Prior

Déduction naturelle

Pour démontrer formellement l'argument de Diodore, Prior ajoute deux axiomes. Le premier est un axiome de la logique temporelle $\mathbf{K_t}$ et, à l'instar de Garson [39], je l'appelle (HF) :

– « Nécessairement, si une chose est le cas, alors il a toujours été vrai qu'elle allait être au moins une fois le cas. » En formule :

$$\Box(p \to HFp) \tag{HF}$$

– A partir de la traduction *classique* de H par $\neg P \neg$, il est possible de traduire (HF) par « nécessairement, si p est le cas, alors il n'a jamais été vrai dans le passé que p n'allait pas être au moins une fois le cas ». C'est cette expression que Prior choisit comme premier axiome additionnel :

$$\Box(p \to \neg P \neg Fp) \tag{IV}$$

Prior ajoute enfin un second axiome additionnel, à savoir :

– « Si p n'est pas le cas et ne le sera jamais, alors il y au moins un moment dans le passé où il est vrai que p ne sera jamais le cas. »En formule :

$$(\neg p \land \neg Fp) \to P\neg Fp \tag{V}$$

On peut alors démontrer en déduction naturelle que la conjonction de (I), (II), (IV) et (V) implique la négation de (III) (cf. Figure 3.1 page 96). On peut remarquer que la preuve de Prior ne fait usage que des règles de la logique propositionnelle minimale, cette dernière étant contenue dans la logique intuitionniste, la validité intuitionniste de la preuve de Prior ne fait donc aucun doute.

Arbre de réfutation

Si l'on lit attentivement la preuve de Prior en déduction naturelle (page 96), on peut remarquer que l'axiome IV est en fait utilisé pour transformer l'axiome II *via* une règle de substitution. Ainsi la contradiction réside plus précisément dans la conjonction des propositions(I*) et (II*) [52], (V) et (III), comme le montre l'arbre de réfutation page 97.

Cependant, l'arbre de réfutation de la page 97 comporte une leçon intéressante [53]. On remarquera que la dernière branche à gauche a un développement particulier

52. (I*) et (II*) correspondent respectivement aux axiome (I) et (II) modifié par substitution aux lignes 8 et 10 de la preuve en déduction naturelle page 96

53. Je remercie à cette occasion Michael De de m'avoir montré, lors du colloque de la Sopha à Paris en mai 2012, que j'avais commis une erreur en logique modale dans le développement de cet arbre.

Théorème 11. –

$$
\begin{aligned}
((Pp \to \neg\Diamond\neg Pp)\land \\
(\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p))\land \\
(\Box(p \to \neg P\neg Fp))\land \\
(\Box(p \to \neg P\neg Fp))\land \\
((\neg p \land \neg Fp) \to P\neg Fp)) \to \\
(\neg p \land \neg Fp) \to \neg\Diamond p
\end{aligned}
$$

Démonstration. –

1	$(Pp \to \neg\Diamond\neg Pp) \land (\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p)) \land (\Box(p \to \neg P\neg Fp)) \land ((\neg p \land \neg Fp) \to P\neg Fp)$	
2	$Pp \to \neg\Diamond\neg Pp$	$\land_1$**E**,1
3	$\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p)$	$\land_2$**E**,1
4	$\Box(p \to \neg P\neg Fp)$	$\land_3$**E**,1
5	$(\neg p \land \neg Fp) \to P\neg Fp$	$\land_4$**E**,1
6	$\neg p \land \neg Fp$	**H**
7	$P\neg Fp$	$\to$ **E**, 6, 5
8	$P\neg Fp \to \neg\Diamond\neg P\neg Fp$	$p/\neg Fp$, 2
9	$\neg\Diamond\neg P\neg Fp$	$\to$ **E**, 7,8
10	$\Box(p \to \neg P\neg Fp) \to (\neg\Diamond\neg P\neg Fp \to \neg\Diamond p)$	$q/\neg P\neg Fp$, 3
11	$\neg\Diamond\neg P\neg Fp \to \neg\Diamond p$	$\to$ **E**, 4,10
12	$\neg\Diamond p$	$\to$ **E**, 9,11
13	$(\neg p \land \neg Fp) \to \neg\Diamond p$	$\to$ **I**, 6,12
▶	$((Pp \to \neg\Diamond\neg Pp) \land (\Box(p \to q) \to (\neg\Diamond q \to \neg\Diamond p)) \land (\Box(p \to \neg P\neg Fp)) \land ((\neg p \land \neg Fp) \to P\neg Fp)) \to$	
	$((\neg p \land \neg Fp) \to \neg\Diamond p)$	$\to$ **I**, 1,13

□

FIGURE 3.1 – La preuve de Prior en déduction naturelle

Théorème 12.

$$\begin{aligned}
&((P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond\neg P\neg Fp)\wedge \\
&(\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp) \rightarrow (\neg\Diamond\neg P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond p))\wedge \\
&((\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp)) \rightarrow \\
&(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg\Diamond p
\end{aligned}$$

Démonstration. –

$\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp) \rightarrow (\neg\Diamond\neg P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond p)$ ✔
$P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond\neg P\neg Fp$ ✔
$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp$ ✔
$\neg((\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow \neg\Diamond p)$ ✔
$\neg p$
$\neg Fp$
$\neg\neg\Diamond p$

- $\neg(\neg p \wedge \neg Fp)$ ✔
  - $\neg\neg p$
    ×
  - $\neg\neg Fp$
    ×
- $P\neg Fp$
  - $\neg P\neg Fp$
    ×
  - $\neg\Diamond\neg P\neg Fp$
    - $\neg\Box(p \rightarrow \neg P\neg Fp)$ ✔
      $\underline{\Diamond\neg(p \rightarrow \neg P\neg Fp)}$
      $p \;/ t_1$
      $\neg\neg P\neg Fp \;/ t_1$ ✔
      $\neg Fp \;/ t_0$ ✔
      $\neg p \;/ t_1$
      ×
    - $\neg\Diamond\neg P\neg Fp \rightarrow \neg\Diamond p$ ✔
      - $\neg\neg\Diamond\neg P\neg Fp$
        ×
      - $\neg\Diamond p$
        ×

□

FIGURE 3.2 – L'arbre de la preuve de Prior

qu'il s'agit d'expliquer. Lorsque l'on écrit :

$$\frac{\Diamond\neg(p \to \neg P\neg Fp)}{\begin{array}{c} p \ \ / t_1 \\ \neg\neg P\neg Fp \ \ / t_1 \end{array}}$$

la ligne horizontale symbolise l'introduction d'une nouvelle localité où l'on illustre la possibilité de la négation de ce conditionnel, où la conjonction de p et de $\neg\neg P\neg Fp$ sont des informations connues au même moment t_1. Cet arbre de réfutation fait usage de la logique classique : on considère que la double négation de $P\neg Fp$ est équivalente à l'affirmation de $P\neg Fp$, pour supprimer l'opérateur P affirme alors l'information $\neg Fp$ dans un temps antérieur t_0, mais cette information est contradictoire avec celle selon laquelle p est vrai en t_1, et donc la branche ferme.

Il est inutile de s'inquiéter de savoir si la logique intuitionniste temporelle minimale permet le même raisonnement : $\mathbf{IK_t}$ a aussi pour axiome la formule

$$p \to HFp \tag{HF}$$

et donc, *a fortiori*, la formule plus faible

$$p \to \neg P\neg Fp$$

Par conséquent supposer la possibilité de la négation de cette formule est contradictoire, même en logique intuitionniste temporelle.

3.1.4 La logique temporelle $\mathbf{K_t}$

Au sujet de $\mathbf{K_t}$ Copeland [18] écrit :

> There is a well-known connection between the minimal tense logic $\mathbf{K_t}$ the minimal modal logic **T**. If we define $\Box p$ as $p \wedge Gp$ (the so-called Diodorean definition of necessity) then the theorems of $\mathbf{K_t}$ containing no logical symbols other than $\Box$ and truth functional connectives are precisely the theorems of **T**.

Copeland entend ici par le système **T** le système modal normal fondé sur l'axiome de **K** :

$$\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q) \tag{K}$$

et l'axiome dit axiome de **T** ;

$$\Box p \to p \tag{T}$$

$\mathbf{K_t}$ est bien connu comme le système de logique temporelle minimale *qui n'implique aucune assomption sur les propriétés physiques du temps.* (Pour une description de $\mathbf{K_t}$ voir Burgess [14, chap. 2] et, pour un système de preuve dans $\mathbf{K_t}$, voir l'élégant système exposé par Copeland [18]). On a dans $\mathbf{K_t}$ les équivalences suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{K_t}} Gp \equiv \neg F \neg p \tag{3.1}$$

et

$$\vdash_{\mathbf{K_t}} Hp \equiv \neg P \neg p \tag{3.2}$$

où Gp et Hp signifient respectivement : « p sera toujours le cas » et « p a toujours été le cas ».

Il est alors possible de définir, comme Ewald [32] l'a fait, un système *intuitionniste* de logique temporelle qui est un sous-système de $\mathbf{K_t}$, appelé $\mathbf{IK_t}$, fondé sur la logique intuitionniste de la même façon que $\mathbf{K_t}$ est fondé sur la logique classique. Dans $\mathbf{IK_t}$ les équivalences (3.1) et (3.2) disparaissent pour faire place aux implications suivantes :

$$\vdash_{\mathbf{IK_t}} Gp \rightarrow \neg F \neg p \tag{3.3}$$

et

$$\vdash_{\mathbf{IK_t}} Hp \rightarrow \neg P \neg p \tag{3.4}$$

mais les converses de ces formules *ne sont pas* des théorèmes de $\mathbf{IK_t}$, comme ne le sont pas toutes les formules de $\mathbf{IK_t}$ qui, pour être prouvées, nécessitent le recours à des formules non démontrables en logique intuitionniste.

3.2 Questions logiques et philosophiques

3.2.1 Le problème logique

Le fait que la preuve de Prior soit valide en raison des règles de la logique minimale ne prouve pas que la démonstration parvienne à une conclusion justifiée dans une logique temporelle et modale. Pour que la conclusion soit valide dans un système comme $\mathbf{K_t}$ par exemple, il faudrait que toutes les formules temporelles utilisées dans la preuve de Prior soient également démontrables dans $\mathbf{K_t}$ et que toutes les formules modales soient aussi démontrables dans $\mathbf{T}$. En d'autres termes, se demander si

$$X \vdash_{\mathbf{K_t}} (\neg\ \mathrm{III}) \tag{3.5}$$

où X est l'ensemble des prémisses de Prior, est une question plus difficile que de montrer que, pour $\vdash_m$ symbolisant la relation de dérivabilité en logique minimale, on a

$$X \vdash_m (\neg\ \mathrm{III}) \tag{3.6}$$

ce qui a déjà été prouvé précédemment. Toute la question est donc, sur le plan strictement logique, de déterminer quelles sont les ressources minimales qui sont nécessaires à une logique temporelle et modale pour justifier intégralement la conclusion de Diodore-Prior.

3.2.2 La polémique philosophique

Il est important de rappeler le caractère anti-aristotélicien du Dominateur. Cet argument entend en effet monter une faute logique inhérente à la conception des modalités entretenue par l'essentialisme d'Aristote. On sait que la distinction modale entre actualité et potentialité est fondamentale dans le système d'Aristote et que c'est en partant de cette distinction qu'Aristote répond au fatalisme logique des Mégariques dans le chapitre IX du *De Interpretatione*. Pour faire court, Aristote admet les modalités *de re*. Selon lui, une substance seconde, l'homme par exemple, a des qualités nécessaires, comme celle d'avoir un corps limité et corruptible, et des qualités contingentes, comme celle d'être chauve ou de ne pas l'être. En tant qu'homme il réalisera nécessairement certains actes, comme celui de respirer, mais il laissera aussi d'autres possibles, comme par exemple le fait d'apprendre le chinois, à jamais irréalisés. On peut citer Vuillemin [148, p. 32] pour résumer le sens qui, en raison du contexte aristotélicien, a été donné au Dominateur :

> On peut [...] avec Aristote, distinguer deux sortes de futurs. Certains sont des vertus qui *ne pourraient pas ne pas être* réalisées. Les autres sont des possibles contingents. Parmi ces derniers, certains sont réalisés, mais il en reste d'autres qui ne le seront jamais. L'ordre des possibles, par conséquent, n'est en aucune façon épuisé par les futurs qui se réaliseront. Diodore veut montrer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. Mais pour cela il n'a pas besoin de supposer que tous les possibles ne sont pas et ne seront jamais ; le fait qu'Aristote admette la non-réalisation de quelques possibles est déjà assez.

En réalité il est parfaitement possible de conclure avec Diodore que tout possible est ou bien présent ou bien futur, tout en refusant d'affirmer qu'aucun futur non réalisé n'est possible. La stratégie consiste alors à assumer un engagement ontologique minimal au sujet de la nature du temps, ainsi qu'une théorie des modalités bien plus faible que celle d'Aristote, afin de faire tomber la théorie de ce dernier dans la contradiction, puisqu'Aristote assume *a fortiori* les thèses de la logique minimale d'un Diodore. Cependant, en tant qu'arbitre, Vuillemin [146, pp. 25-26] ne reconnaît pas à Prior le mérite d'avoir traduit fidèlement l'argument de Diodore et par conséquent refuse que l'on s'appuie sur la démonstration de Prior pour juger de la solidité de l'argument de Diodore contre Aristote :

> Suivons, au contraire [de Prior], la vraisemblance historique. Considérons la faveur universelle que le Dominateur a rencontré dans l'antiquité, comme une présomption en faveur de sa solidité. Écartons donc la supposition que des ambiguïtés grossières se seraient glissées dans les prémisses. Donnons, avec Prior, un sens purement logique au mot “suivre”. Posons que le passé dont il est question dans la première prémisse est celui des événements, non celui des temps grammaticaux. Il reste à montrer l'incompatibilité des trois prémisses sans avoir ni à postuler la discrétion du temps, ni à confondre l'irrévocabilité du passé avec la nécessité logique, ni même à invoquer une rétrogradation du vrai dont Epictète ne fait pas mention et que le Stagirite a expressément mise en question.

Vuillemin soutient donc que la preuve de Prior, principalement en raison de ses prémisses additionnelles nécessaires à la dérivation de la conclusion, est coupable de trois fautes majeures qui sont :

(A) la confusion de la nécessité logique avec l'irrévocabilité du passé (faute de la première prémisse),

(B) l'usage de la rétrogradation du vrai (faute de la première prémisse additionnelle),

(C) le postulat du temps discret (faute de la seconde prémisse additionnelle).

Insistons encore sur le fait que pour Vuillemin les fautes (B) et (C) sont des fautes en raison du but anti-aristotélicien du Dominateur, car Aristote rejette explicitement la rétrogradation du vrai qui est impliquée par la théorie des Mégariques, et il assume la continuité du temps.

Dans les sections qui suivent, je me limite à une défense de la preuve que Prior a donné du Dominateur, en prouvant, dans les sections 3.3 et 3.4, que les deux premières critiques peuvent parfaitement être écartées d'un point de vue intuitionniste. La section 3.5 explique brièvement pourquoi le dernier reproche n'a pas le caractère décisif que Vuillemin lui donne. Enfin, la section 3.6 donne une preuve intuitionniste fondée sur une lecture modale du premier axiome de la preuve de Prior, qui dérive la conclusion de Diodore, sans faire usage du moindre axiome additionnel.

3.3 Réponse à la première accusation

3.3.1 Renforcement du reproche

Pour répondre au reproche (A), on commencera par le reprendre et l'exprimer sous une forme qui renforce le soupçon du caractère irrecevable de la preuve de Prior, dès lors que celle-ci prétend être une preuve en logique modale. Il est en effet indiscutable que, même dans **S5**, l'axiome (I) *n'est pas* un théorème de logique modale. L'axiome (I) a la même forme logique que

$$p \rightarrow \neg\Diamond\neg p \tag{3.7}$$

formule classiquement équivalente à

$$p \rightarrow \Box p \tag{3.8}$$

On a vu que l'on est contraint, pour effectuer la preuve de Prior avec la méthode des arbres de Beth, de montrer que l'arbre de réfutation ne se ferme qu'à la condition de raisonner en logique minimale $\mathbf{K_t}$ et que ce système, comme le souligne Copeland, enveloppe le système modal **T**. Or, en raison de la conjonction de (T) et de (3.8) on serait donc conduit à admettre

$$p \leftrightarrow \Box p \tag{3.9}$$

Cependant le fait d'admettre (3.9) serait effectivement une catastrophe pour la preuve de Prior car, comme le soulignent Hughes et Cresswell [54, pp. 64-65], le simple fait d'ajouter (3.9) au système modal normal le plus faible qui soit, c'est-à-dire **K**, provoque un *effondrement modal.* En d'autres termes, **K** + (3.9) = **Triv**, **Triv** étant un système où les théorèmes n'expriment de manière *triviale* que les vérités du calcul propositionnel et où $\Box$ et $\Diamond$ ne sont rien d'autre que de simples décorations inutiles.

3.3.2 Réponse au reproche renforcé

Interprétons l'axiome (I) comme exprimant la même idée que le principe de nécessité conditionnelle que Vuillemin utilise dans son système de logique avec indices temporels, c'est-à-dire « si p est vrai en t alors il n'est pas possible en t que p soit faux en t », en formule :

$$p_t \rightarrow \neg\Diamond_t\neg p_t \tag{Nec. Cond.}$$

et faisons de l'axiome (I) *une instance du schéma d'axiomes*

$$p \rightarrow \neg\Diamond\neg p \tag{Schéma d'ax.}$$

valide quel que soit p, alors on peut écarter le reproche (A) (et plus encore, comme on le verra dans la section 3.6). Soulignons qu'il est crucial d'*interpréter* l'axiome (I) de façon à ce qu'il ne soit pas lu comme on lit classiquement (3.8). Remarquons que la preuve originale de Prior donne un indice de la légitimité d'une lecture intuitionniste, en ne traduisant jamais $\neg\Diamond\neg$ par $\Box$ comme l'autoriserait l'équivalence classique. Si la logique intuitionniste des prédicats permet de prouver

$$\vdash_i \ (\forall x)Fx \rightarrow \neg(\exists x)\neg Fx \tag{3.10}$$

mais n'autorise pas la preuve de l'implication converse, de la même façon on a, en logique intuitionniste modale :

$$\vdash_i \Box\varphi \to \neg\Diamond\neg\varphi \tag{3.11}$$

mais en revanche

$$\nvdash_i \neg\Diamond\neg\varphi \to \Box\varphi \tag{3.12}$$

L'interprétation intuitionniste de l'axiome (I) permet donc d'écarter le reproche (A) exprimé sous sa forme la plus forte, car il n'est plus possible d'affirmer que l'axiome (I) est une instance du schéma (3.8). Il est d'une part claire que la formule (Schéma d'ax.), conserve sa valeur modale, puisqu'elle dit : « si p est *prouvable*, alors il *n'est pas possible* que l'on *puisse* prouver que p implique une absurdité ». D'autre part, la menace de devoir accepter (3.9) comme une formule valide dans le système de logique modale utilisé pour la preuve est aussi écartée, en raison des vertus de la logique intuitionniste, qui permet, comme on le voit, de rejeter la première accusation de Vuillemin contre la preuve de Prior.

3.4 Réponse à la seconde accusation

Les réticences de Vuillemin au sujet de l'axiome (HF) proviennent du fait que cet axiome affirme une rétrogradation du vrai qui était expressément rejetée par Aristote [3, pp. 99-100] comme une position absurde :

> Rien n'empêche, en effet, que dix mille ans à l'avance, tel homme prédise un événement et que tel autre prédise le contraire : ce qui se réalisera nécessairement, c'est celle des deux prédictions, quelle qu'elle soit, qui était vraie à ce moment là.(*De Int.*9 - **18**b34 ; cité par Vuillemin [146, p. 151])

Il est indiscutable que si la preuve de Prior ajoute un axiome qui est rejeté par Aristote, alors cette preuve ne peut être considérée comme acceptable.

Mais l'intérêt de la lecture intuitionniste de la preuve de Prior est de montrer que l'affaiblissement de (HF) par l'axiome (IV) permet d'écarter l'accusation (B). Contrairement à (HF), l'axiome (IV) n'est pas contre-intuitif et, d'un point de vue intuitionniste, celui-ci n'implique pas celui-là. Traduit en langage intuitionniste, l'axiome (IV) dit :

> S'il est prouvable que p soit le cas, alors il n'y a rien qui, dans le passé, puisse prouver que p ne sera jamais le cas.

Autrement dit, si l'on suppose que l'on peut obtenir maintenant une preuve de p, alors en raison même de cette supposition, toute supposition de l'existence d'une réfutation de p antérieure à cette preuve, c'est-à-dire d'une preuve que p conduit toujours à l'absurde, est absurde. En effet la conclusion rétrograde, mais cette rétrogradation a uniquement un contenu cognitif négatif et ne donne nullement le sentiment que les événements à venir sont déjà déterminés dans le passé. *Last but not least*, l'axiome (IV) est un théorème de $\mathbf{K_t}$, tout comme de $\mathbf{IK_t}$. Il n'est donc pas rejetable sans absurdité par Vuillemin, car la logique temporelle aristotélicienne contient nécessairement la logique temporelle minimale $\mathbf{K_t}$.

3.5 Réponse à la troisième accusation

On a vu que l'axiome (I) lu de manière intuitionniste est acceptable. On sait aussi que l'axiome (II) est un théorème de **K** qui est le système le plus faible de toutes les logiques modales normales et recevable aussi du point de vue intuitionniste. On vient de voir enfin que l'axiome additionnel (IV) est un théorème de la logique temporelle minimale également valide du point de vue intuitionniste et qu'il ne peut donc pas être rejeté par celui qui adopte une logique plus forte, à l'instar d'Aristote. Qu'en est-il de l'axiome additionnel (V) ? Il est hélas non valide dans $\mathbf{K_t}$ et donc *a fortiori* n'est pas un théorème de $\mathbf{IK_t}$. C'est pour cette raison que Prior lui-même a douté plus tard de la validité de sa preuve, arrivant à la conclusion que l'axiome (V) n'est valide que dans une structure discrète. En remarquant que l'axiome (V) est équivalent à la formule de Hamblin

$$(p \wedge Gp) \rightarrow PGp \tag{Hamb}$$

Prior [83, p. 48] écrit :

> This is precisely Proposition (V) in the reconstruction of the Master Argument of Diodorus. And it is interesting to be given a basis for a tense-logic from which it is provable. Just this Proposition (V), however, had begun about 1960 to strike me as dubious. Theses which appeal, in order to gain intuitive plausibility, to what was the case at 'the moment just past', are liable to commit one to the view that time is discrete. What if there is *no* 'moment just past', but between any past moment, however close to the present, and the present itself, there is another moment still past ? On this supposition, Proposition (V) in fact fails, and on the corresponding supposition about the future, Hamblin's fails too.

On est aujourd'hui venu à la conclusion qu'il n'y a probablement aucun moyen de donner une preuve de l'argument de Diodore dans une logique temporelle minimale si l'on ne suppose pas un modèle de temps discret, et l'on a baptisé l'axiome (V) « l'axiome du discret », puisque cette formule n'est *prouvable* qu'à la condition de supposer un temps composé d'instants dans une relation isomorphe avec l'ensemble des entiers.

On peut cependant remarquer que le fait que l'axiome (V) ne soit prouvable qu'à la condition que l'on accepte un modèle du temps discret ne fait pas de la preuve de Prior une traduction incorrecte de l'argument de Diodore, ni ne limite sa portée polémique contre la position aristotélicienne. L'axiome (V) étant *satisfiable* dans $\mathbf{K_t}$, on peut très bien le concevoir comme un axiome *non logique* nécessaire à la preuve de Diodore-Prior dans la logique minimale temporelle. Insistons sur le fait que la formule

$$(\neg p \wedge \neg Fp) \rightarrow P\neg Fp \tag{V}$$

ne traduit rien d'autre qu'une intuition très naturelle et dont le rejet est pour le moins obscur, car si on traduit la formule en termes intuitionnistes, (V) dit :

> « si l'on peut prouver que p est faux et qu'à l'avenir, il le sera toujours, alors il y a un instant passé à partir duquel tous les instants qui suivent sont ceux où p est faux ».

Le seul contre-modèle intuitivement clair à cet énoncé est de supposer un temps où il n'y a pas de passé et où donc il n'y a aucun sens à dire qu'« *il y a* un instant passé à partir duquel tous les instants qui suivent sont ceux où p est faux ». L'autre voie possible pour contredire la formule est de souligner que si le temps est dense, alors il n'y aucun moyen de déterminer l'instant passé à partir duquel tous ceux qui suivent sont ceux où p est faux. Mais s'il y a quelque énoncé qui est faux maintenant et qui l'est pour toujours, alors il y a bien un instant après lequel il est faux pour toujours, sinon on retomberait dans les paradoxes de Zénon et affirmerait avoir la preuve d'un énoncé qui est faux pour toujours sans jamais qu'il puisse commencer de l'être, ce qui totalement obscur. Le reproche que Vuillemin développe contre l'usage de cet axiome dans la preuve de Prior est donc à mon avis insuffisamment fondé, comme l'atteste du reste l'arbre de réfutation page 97 où l'on voit clairement que (V) ne joue qu'un rôle qu'au niveau du calcul propositionnel, et ne joue en fait aucun rôle dans l'usage de la logique temporelle pour la conclusion de la preuve.

Voyons maintenant comment il est possible de prouver la conclusion de Diodore d'une manière purement modale et intuitionniste, sans les axiomes additionnels.

3.6 Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore

Définition 9 (Contingence)**.** *Un énoncé p est contingent s'il n'est ni nécessairement vrai, ni nécessairement faux.*

$$\nabla p \leftrightarrow (\neg\Box p \wedge \neg\Box\neg p) \tag{3.13}$$

mais on utilisera l'écriture suivante :

$$\nabla p \leftrightarrow (\Diamond \neg p \land \Diamond \neg\neg p) \tag{Def. ∇}$$

Exemple 5. *« Je pense donc je suis », est une vérité nécessaire, donc possible, mais non contingente.*

Remarque 4. *Comme le suggère l'exemple 5, on peut percevoir intuitivement que l'usage de ∇ et de $\neg\nabla$ n'a de pertinence que dans un système modal où l'axiome (T) est accepté. (C'est ce que souligne Cresswell [20] en faisant référence à une remarque de Segerberg [102] au sujet des développements de Montgomery et Routley [72] sur les systèmes avec l'opérateur ∇. Voir aussi sur ce point Humberstone [55].) On a vu en effet plus haut (section 3.1.2) que la preuve de l'argument de Diodore-Prior nécessite au moins du point de vue modal les axiomes K et T.*

Exemple 6. *« Aujourd'hui ou demain, François va tondre la pelouse », est une vérité contingente.*

Remarque 5. *A la lecture de l'exemple 6, on pressent que les événements passés, tout comme les événements immédiatement présents, excluent la possibilité de leur négation et donc la contingence ainsi définie ; cette impossibilité de nier leur existence implique par conséquent un effondrement modal, mais comme le remarque Vuillemin [146, p. 34], un effondrement modal limité.*

Définition 10. *(Négation)*

$$\neg p \leftrightarrow (p \to \bot) \tag{Def. $\neg$}$$

Remarque 6. *Cette définition de la négation, qui est la définition standard de la négation en logique intuitionniste, peut traduire adéquatement la seconde prémisse de l'aporie de Diodore telle que la rapporte Epictète : « un possible ne peut pas être la conséquence logique d'un impossible » ; autrement dit, il est équivalent de dire qu'un énoncé p implique une conclusion absurde et de dire que p est faux ou que la négation de p est vraie.*

Théorème 13. *Dans un système modal normal pourvu des axiomes K et T, où l'axiome (I) est une instance du schéma d'axiomes $p \to \neg\Diamond\neg p$, et où l'on assume qu'il n'y a de preuve de p comme possible qu'à la condition que l'on puisse prouver que p est passé, ou présent, ou futur, alors, avec l'usage de l'opérateur ∇ et les seules règles intuitionnistes de la logique propositionnelle on peut dans ce contexte dériver une thèse intuitionniste qui est la* ***traduction*** *de celle de Diodore :*

$$(\neg p \land \neg F p) \to \neg\Diamond\neg\neg p \tag{3.14}$$

Démonstration.

1	$Pp \to \neg\Diamond\neg Pp$	Axiome I
2	$\neg p \wedge \neg Fp$	**H**
3	$P\neg p \wedge \Diamond\neg P\neg p \wedge \Diamond\neg\neg P\neg p$	**H** : $P\neg p \wedge \nabla P\neg p$
4	$P\neg p$	$\wedge_1$ **E**, 3
5	$P\neg p \to \neg\Diamond\neg P\neg p$	1 subst. $(Pp/P\neg p)$
6	$\neg\Diamond\neg P\neg p$	$\to$ **E**, 4-5
7	$\Diamond\neg P\neg p$	$\wedge_2$ **E**, 3
8	$\bot$	$\to$ **E**, 6-7
9	$\neg P\neg p \vee \neg\nabla P\neg p$	$\to$ **I**, 3-8 (i.e. $\neg$**H**)
10	$\Diamond\neg\neg p \wedge \Diamond\neg p$	**H** : $\nabla\neg p$
11	$\neg p$	$\wedge_1$**E**, 2
12	$\neg p \to \neg\Diamond\neg\neg p$	1-subst.$(Pp/\neg p)$
13	$\neg\Diamond\neg\neg p$	$\to$ **E**, 11-12
14	$\Diamond\neg\neg p$	$\wedge_1$**E**, 10
15	$\bot$	$\to$ **E**, 13-14
16	$\neg\nabla\neg p$	$\to$ **I**, 10-15 (i.e. $\neg$**H**)
17	$\Diamond\neg\neg Fp \wedge \Diamond\neg Fp$	**H** : $\nabla\neg Fp$
18	$\neg Fp$	$\wedge_2$**E**, 2
19	$\neg Fp \to \neg\Diamond\neg\neg Fp$	1-subst.$(Pp/\neg Fp)$
20	$\neg\Diamond\neg\neg Fp$	$\to$ **E**, 18-19
21	$\Diamond\neg\neg Fp$	$\wedge_1$ **E**, 17
22	$\bot$	$\to$ **E**, 21-20
23	$\neg\nabla\neg Fp$	$\to$ **I**, 17-22 (i.e. $\neg$**H**)
24	$(\neg\nabla P\neg p \vee \neg P\neg p) \wedge \neg\nabla\neg p \wedge \neg\nabla\neg Fp$	$\wedge$**I**, 9-16-23
25	$\neg\nabla\neg p$	$\wedge_2$**E**, 24
26	$\neg\Diamond\neg\neg p \vee \neg\Diamond\neg p$	Def. ∇ 25
27	$\neg\Diamond\neg p$	**H**
28	$\neg p$	$\wedge_1$**E**, 2
29	$\bot$	$\to$ **E**, 27-28
30	$\neg\Diamond\neg\neg p$	$\bot$**E** 29
31	$\neg\Diamond\neg\neg p$	**H**
32	$\neg\Diamond\neg\neg p$	**R**, 31
33	$\neg\Diamond\neg\neg p$	$\vee$**E** 26, 27-29, 31-32
34	$(\neg p \wedge \neg Fp) \to \neg\Diamond\neg\neg p$	$\to$ **I** 2 - 33

□

4

Pluralisme philosophique versus Logique intuitionniste

> Les systèmes philosophiques ont dû produire la dialectique pour s'éprouver les uns les autres et la logique pour s'éprouver eux-mêmes.
>
> Vuillemin

> What goes for the laws of logic goes more generally for the principles of philosophy.
>
> Dummett

Résumé. *Cet article montre dans un premier temps pourquoi la classification que Vuillemin donne des systèmes philosophiques est un progrès dans l'histoire de la philosophie de la connaissance, et il répond dans un second temps aux embarras exprimés par Bouveresse et Engel au sujet du pluralisme philosophique qui est une conséquence que Vuillemin tire des principes et définitions de sa classification des systèmes philosophiques. La thèse principale de cet article est une conjecture : le pluralisme philosophique n'est pas une position que l'on est contraint d'admettre si l'on adopte la classification de Vuillemin. On donne pour conclure les éléments qui devrait permettre la démonstration de cette conjecture.*

Abstract. *In a first time, this paper shows why the classification of philosophical systems defined by Vuillemin improves our understanding of the history of philosophy. I*

reply in a second time to embarrassments expressed by Bouveresse and Engel about the philosophical pluralism which is, according to Vuillemin, a consequence of the principles and definitions of his classification of philosophical systems. The main thesis of this paper is a conjecture : the philosophical pluralism is not a position that one is forced to admit if one adopts Vuillemin's classification. Elements that should allow a proof of this conjecture are given in conclusion.

4.1 Vuillemin versus Dummett

Je dois reconnaître humblement que mes aînés, Bouveresse [9] et Engel [29], ont soulevé plus tôt que moi le problème crucial que la classification de Vuillemin pose par rapport à la question du rapport entre vérité *philosophique* et vérité *tout court*. Cet article porte dans un premier temps sur la question du statut de la logique dans la classification des systèmes philosophiques de Vuillemin. Dans un second moment on s'efforce de montrer que l'entorse principale que Vuillemin fait au concept de ordinaire de vérité, à savoir sa thèse du pluralisme philosophique, n'est pas, contrairement à ce qu'il soutient, une conséquence nécessaire de l'adoption de sa classification. L'article ne s'achève pas sur une démonstration mais sur une conjecture qui est vraisemblablement démontrable.

Je dédie cet article à Jacques Bouveresse qui, plus que quiconque, a su montrer l'intérêt et la richesse de la classification de Vuillemin. Comme le montre son livre *Qu'est-ce qu'un système philosophique ?* [10], publié à partir de ses cours au Collège de France [54], Bouveresse a vu bien avant moi que, sur la question de la nature systématique de la philosophie, la confrontation des positions respectives de Vuillemin et Dummett est particulièrement éclairante. Convaincu depuis quelques années du caractère fécond de l'usage de la logique intuitionniste dans l'analyse des questions philosophiques, j'ai pris ici le parti de Dummett, en m'efforçant de démontrer que le pluralisme philosophique de Vuillemin n'est pas une thèse qu'un intuitionniste *à la Dummett* est contraint d'admettre.

D'aucuns trouveront sans doute que la tournure *more geometrico* de certains passage de cet article, a quelque chose d'affecté ou de forcé, mais ne suffit pas à prouver que les argument avancés sont des démonstrations au même titre que des démonstrations de logique mathématique. A cette critique je réponds simplement que j'ai adopté ce style afin de m'efforcer à autant de rigueur et de concision que possible ; compte tenu de la difficulté du sujet, j'espère qu'on ne trouvera pas cette décision inutile.

54. Je cite dans cet article la traduction que Bouveresse donne dans cet ouvrage du livre de Vuillemin, *What are Philosophical Systems ?* [147] qu'il commente dans cet ouvrage.

4.2 Pourquoi la classification de Vuillemin est opératoire

En définissant sa classification des systèmes philosophiques Vuillemin [146, 148, 147] a réalisé son chef d'œuvre, comme le souligne Bouveresse [10, Cours 1] :

> La philosophie de la philosophie a pris, chez [Vuillemin], la forme d'une tentative de construction d'une classification et d'une théorie des systèmes philosophiques qui, de toute évidence, a constitué un des aspects les plus importants, pour ne pas dire le plus important, de son œuvre.

Mis à part le livre de Bouveresse [10] déjà cité, et un volume d'articles en hommage à Vuillemin édité par Rashed et Pellegrin [97], il y a eu, jusqu'à présent, peu de travaux universitaires sur la classification de Vuillemin. Impressionné par les exposés qu'il avait donné de sa classification lors de ses leçons au Collège de France au début des années 80, j'y avais consacré ma thèse de doctorat où je m'efforçais de montrer comment la classification esquissée par Quine [84, 87] en philosophie des mathématiques, pouvait être intégrée à celle que Vuillemin donne pour les systèmes philosophiques en général. Bouveresse m'a fait un honneur que je ne crois pas mériter, d'une part en citant généreusement ce travail dans son cours du Collège de France, d'autre part en corrigeant avec indulgence et discrétion, la tendance que j'ai eue dans cette thèse à forcer le trait ; il est en effet tout à fait juste de dire comme il le fait que [10, Résumé du cours de l'année 2008] :

> Quine n'a pas réellement cherché à construire une classification en bonne et due forme des différentes espèces de philosophies des mathématiques et encore moins, bien entendu, des différentes espèces de philosophies tout court. Il a plutôt cherché, plus modestement, à montrer comment les trois espèces principales de philosophies des mathématiques qui se sont divisées et affrontées au vingtième siècle : le logicisme, l'intuitionnisme et le formalisme, peuvent être distinguées par les engagements ontologiques auxquels elles consentent ou refusent de consentir et comment le critère de l'engagement ontologique qu'il propose permet de clarifier les désaccords qu'il y a entre elles.

En dépit de cette critique pertinente et de toutes les autres que l'on pourrait encore faire sur ce travail de jeunesse que j'aurais du mal à relire, il y a au moins un point que je garde en mémoire comme le résultat des analyses développées dans cette thèse de doctorat : il s'agit de l'adéquation du critère d'engagement ontologique de Quine avec le fil conducteur de la classification de Vuillemin. Rappelons que l'engagement ontologique selon Quine [92, chap. 4, pp. 107-129] se définit avec clarté et distinction dès lors que l'on dispose du langage du calcul des prédicats du premier ordre :

> Notre question était la suivante : quels objets requiert une théorie ? Voici notre réponse : ce sont les objets qui ont à être des valeurs de variables pour que la théorie soit vraie. [...].
>
> L'existence est ce qu'exprime la quantification existentielle. Il y a des choses de l'espèce F si et seulement si $(\exists x)Fx$.

Vuillemin [150, pp. 6-7] a confirmé cette adéquation en écrivant :

> Le philosophe se demande, en somme, où placer dans le monde les *objets* mathématiques ou bien comment concevoir le monde pour qu'ils puissent y trouver leur place. Et, comme *l'existence des objets ou places dans le monde correspondent aux formes possibles de prédication* en tant qu'elles sont susceptibles de recevoir une valeur de vérité, à l'exclusion donc des fictions, il y aura autant de philosophies [ou plus exactement, de classes de systèmes philosophiques] qu'on peut distinguer de formes de prédication originales. *La philosophie des mathématiques, à cet égard, se confond avec la philosophie théorique et l'histoire des classes de systèmes.*

Dans la citation qui précède j'ai souligné les points qui établissent l'adéquation entre le critère d'engagement ontologique de Quine et la manière dont Vuillemin caractérise la classe des systèmes dogmatiques. Chauvier [16, pp. 190-191] souligne très justement que le passage de la perception au langage se fait, du point de vue de Vuillemin[147], lorsqu'il est question de « parler d'objets ». Je ne crois pas que Quine [92, chap. 1] soutienne une thèse fondamentalement différente sur cette question. Si l'expression objectuelle de la norme de l'engagement ontologique est insuffisante dès lors qu'il s'agit de traduire le changement de perspective qui caractérise les systèmes qui appartiennent à la classe des systèmes de l'examen, en revanche le critère de Quine offre un gain de simplicité qui permet de comprendre que la classe des systèmes dogmatiques est ordonnée selon un principe d'économie ontologique si l'on part du réalisme des Idées pour aller jusqu'au nominalisme en passant par le conceptualisme.

Lors de son cours au Collège de France, Vuillemin a présenté la progression de l'économie ontologique réalisée sur l'engagement du réalisme des Idées d'une manière très simple que je reconstitue ici de mémoire dans un vocabulaire qui n'est pas toujours le sien.

La formule qui caractérise l'engagement ontologique d'un Platon est la disjonction « toute chose est ou bien une Idée, ou bien l'image d'une Idée ». C'est là le résultat du privilège accordé par le réalisme des idées à la prédication pure, c'est-à-dire aux énoncés prédicatifs qui associent deux universaux (par exemple « l'humilité est une vertu », « huit est un nombre pair »). Les autres énoncés sur les objets ou images du monde sensible se comprendront par participation à cette première forme de prédication. Pour qu'un énoncé comme « π est un nombre irrationnel et transcendant » soit vrai, il faut admettre dans le parcours des valeurs des variables de la théorie qui assume la vérité de cet énoncé, l'existence d'entités abstraites, en l'occurrence celle du nombre π lui-même.

Aristote rejette non la réalité des Idées mais leur transcendance. L'universel n'est dès lors plus dans les Idées, mais dans les choses sensibles, au titre des Formes ou des qualités abstraites par l'esprit. Schématiquement le parcours de valeurs des variables, dans une théorie conceptualiste comme celle d'Aristote, est composé des individus (substances premières) et des espèces (substances secondes). L'affirmation « toute chose est un individu ou une espèce » exprime le privilège accordé à la prédication substantielle composite (« Socrate est un homme ») et à la prédication accidentelle simple (« Socrate est assis ») caractéristique du conceptualisme. Par rapport au réalisme, le conceptualisme réalise une économie ontologique comparable à celle qu'une théorie prédicative des ensembles réalise par rapport à une théorie imprédicative : on rejette les ensembles qui ne seraient pas définis à l'aide d'éléments auparavant spécifiés. La progression des abstractions est dès lors comparable à celle que Russell [98, Appendice B] a décrite dans sa théorie des types simples.

Une économie ontologique encore plus sévère est réalisée par les philosophes que l'on désigne par le terme de « nominalistes », parce qu'ils nient que l'universel soit dans les choses et ne le posent que dans les mots ou dans les signes, raison pour laquelle la philosophie des mathématiques contemporaine qui est l'expression du nominalisme a été le formalisme. En ce qui concerne la réalité physique, l'univers de ces philosophes se réduit à l'existence des individus, lorsqu'ils privilégient prédication substantielle simple (« x est un atome ») et prédication accidentelle composite (« Jupiter est occulté par la Lune ») ou à celle des événements quand ils privilégient la prédication circonstancielle (« il a plu à Paris le 14 juillet »).

La description de la classe des systèmes dogmatiques achevée, on peut faire deux remarques. Premièrement, c'est bien la question de l'existence des objets abstraits et de leur définition dans la description de la réalité qui est le fil conducteur de la classification de Vuillemin. Deuxièmement, comme le remarque Quine [84], celui qui assume l'engagement ontologique le plus faible *a la charge de prouver* qu'il peut décrire la même réalité (en l'occurrence l'univers des mathématiques) en paraphrasant les assomptions ontologiques des partisans de l'ontologie la plus lourde dans un langage ontologiquement plus faible.

Le choix de Quine en faveur du réalisme en mathématiques est fondé sur le double constat suivant. D'une part il est impossible à un philosophe qui veut rendre compte de l'intégralité de la science mathématique contemporaine de faire l'économie d'une théorie des ensembles imprédicative comparable à celle de Zermelo ; les théories prédicatives (conceptualistes du point de vue de Vuillemin) échouent à traduire des théorèmes importants des mathématiques classiques, comme Quine [90, pp. 249-265] le montre pour le théorème de la borne supérieure de toute partie majorée de l'ensemble des nombres réels. D'autre part, le projet nominaliste qui consiste à tenter de traduire les mathématiques dans un langage ontologiquement neutre comme l'est celui du calcul des prédicats du premier ordre, est un projet vain si l'on tombe d'accord avec Frænkel *et al.* [37, p. 333], pour dire que les difficultés qui existent pour paraphraser toutes les mathématiques classiques en termes nominalistes semblent, et probablement sont, insurmontables. On voit donc que la norme de l'engagement ontologique a pour mérite d'être un critère objectif pour juger de l'engagement ontologique réel d'une théorie, et qu'elle offre aussi un moyen de comparer les théories entre elles. Vuillemin était admiratif de la critique de Quine[91, 93] au sujet des prétentions nominalistes de Russell qui sont en désaccord avec la théorie des classes développée dans les *Principia*. La norme de l'engagement ontologique permet de montrer que cette théorie des classes est en fait une théorie réaliste. Il n'est pas douteux que la classification de Vuillemin exprime le même souci de clarifier la question des ontologies adoptées par les systèmes qu'elle permet de juger. Mais j'ai déjà insisté sur ce point [123].

Cette explication conduit à son tour à une question qui ne peut pas manquer de se poser : ces oppositions ontologiques en philosophie et cette classification n'est-elle pertinente que pour la philosophie des mathématiques ?

S'il est vrai que pour Vuillemin [146, pp. 288-289] le fait de privilégier un couple d'assertions fondamentales suffit à fonder un système philosophique complet, il n'en reste pas moins vrai qu'il n'exclut pas le fait que l'on puisse par exemple, adopter le réalisme comme philosophie des mathématiques, le conceptualisme comme philosophie de la nature et le nominalisme en morale. Un tel éclectisme est à ses yeux « instable » sur le plan philosophique et, comme je l'ai remarqué ailleurs [135], ce souci de stabilité peut aussi être exprimé, comme Tennant l'a fait, du point de vue logique défendu par l'intuitionnisme.

Après avoir réussi à montrer que la philosophie de la connaissance de Bachelard pouvait être définie comme un intuitionnisme au sens que Vuillemin donne à ce mot [122], j'ai été définitivement convaincu du caractère opératoire de cette classification lorsqu'il s'agit de saisir une authentique position philosophique. Mais il est plus difficile d'expliquer les raisons du caractère opératoire de la classification de Vuillemin que de simplement le remarquer. On doit effectivement se poser la question de savoir pourquoi la classification de Vuillemin est fiable dès lors que l'on entreprend d'expliquer par exemple les caractéristiques essentielles du système d'Aristote, les points sur lesquelles il s'oppose à la philosophie de Platon, ou encore ce qui sépare fondamentalement la perspective d'un Descartes de celle d'un Spinoza. Cette question de la fiabilité de la classification de Vuillemin revient à celle de son adéquation avec l'histoire de la philosophie et conduit à se demander si cette classification est complète : comment être certain que des options philosophiques *fondamentales* n'échappent pas à cette classification ? La réponse à ces questions achèvera la section de cette article où je soutiens que la classification de Vuillemin est, au regard de la philosophie de la connaissance, non seulement à la fois fiable et complète, mais permet de définir une méthode d'identification des différents systèmes philosophiques dans l'histoire de la philosophie.

A la question qui est de savoir si la classification est complète, la réponse de Vuillemin ne fait aucun doute : elle l'est parce qu'elle repose sur une classification complète des formes fondamentales de la prédication et que les systèmes philosophiques reposent sur un privilège accordé à telle ou telle assertion fondamentale ou à tel ou tel couple d'assertions fondamentales pour donner une description intégrale de la réalité. Dans un article publié en 1984, Vuillemin affirme le caractère ontologique et complet de la classification qu'il est en train d'élaborer [145, p. 11 ; c'est moi qui souligne] :

> Le système ne sera démontré *complet* que si, dans ce prélude philosophique [qu'est l'exercice classificatoire des formes fondamentales de la prédication], on subordonne la sémiotique à un principe philosophique et on la rend, par là, générale. Quel est ce principe ? Les participants à la communication doivent, pour que la communication puisse réussir, accéder aux conditions de la vérité que, par supposition, vise la prédication. On aura donc classé exhaustivement les formes fondamentales de prédication en décrivant comment les participants à la communication peuvent et doivent, étant donné leurs positions particulières, s'accorder sur ces conditions. La classification sera *complète* au moment où les participants conviendront que l'introduction d'une forme nouvelle ferait s'évanouir les conditions de vérité, comme on verra qu'il arrive pour la fiction. [...]
>
> Je distinguerai trois articulations principales de la classification : celle de la forme nominale, celle des formes verbales objectives, celle des formes verbales subjectives.

Pour résumer, c'est parce que la classification est fondée sur la série complète des assertions fondamentales permettant la communication de la perception et qu'un système philosophique authentique s'explique par un privilège accordé à telle ou telle assertion fondamentale, que la classification des systèmes philosophiques est nécessairement complète. Identifier la nature d'un système philosophique revient donc à repérer ses principes fondateurs, autrement dit à déterminer ce qu'il privilégie dans la description intégrale de la réalité. Les systèmes philosophiques authentiques étant incompatibles, il en résulte des conséquences importantes qu'il s'agit maintenant d'examiner.

A juste titre, Bouveresse souligne que Vuillemin n'est pas un philosophe positiviste, si l'on entend par ce terme quelqu'un qui croit qu'un problème philosophique, quel qu'il soit, doit tôt ou tard trouver une solution qui s'impose universellement *via* une preuve ou une réfutation scientifique purement rationnelle ou expérimentale. Tout au contraire, Vuillemin était parvenu à la conviction qu'un problème authentiquement philosophique trouve une pluralité de solutions rationnelles mais mutuellement incompatibles, chacune fondée sur des argumentations qui ne sont jamais indubitablement décisives. L'aporie de Diodore Kronos n'est évidemment pas aux yeux de Vuillemin le moteur de l'histoire de la philosophie, mais elle est le type même du problème philosophique par excellence, car à son sujet s'exprime un nombre défini de positions philosophiques et des développements indéfinis d'arguments. Un positiviste pensera, peut-être naïvement, que même cette aporie célèbre doit avoir une solution logique qui est préférable à toutes les autres, parce qu'au moins elle l'emporte sur les autres par son caractère plus simple et plus naturel. Vuillemin s'est toujours refusé de croire à la possibilité d'un tel verdict et je l'entends encore me rappeler, lors d'un colloque à Clermont-Ferrand organisé par Elisabeth Schwartz, à quel point il était pluraliste en philosophie, ce qui signifiait qu'il ne croyait pas à un traitement logique définitif et satisfaisant d'une aporie philosophique aussi fondamentale que celle de Diodore. On retrouvera plus loin la question du pluralisme ; cette digression permet simplement de comprendre que le socle de la philosophie pour Vuillemin n'est pas dans la logique, au sens précis que l'on donne à ce mot en mathématiques et en informatique fondamentale, mais dans l'ontologie, dans « l'ontologique soumise à la logique », comme Bouveresse [10, Cours 3] le rappelle en citant et traduisant ce passage de *What are Philosophical Systems ?* [147, p.105] :

> Comme tous les systèmes axiomatiques ont en commun l'appareil déductif qui est appelé la logique formelle, nous pouvons définir le système de signes qui est particulier à la philosophie comme une ontologie soumise à la logique. Cela étant, il n'est pas étonnant que les parties premières de la logique – la syllogistique et la logique propositionnelle – aient trouvé leur expression scientifique à l'intérieur des philosophies grecques. En outre, les deux dimensions qui sont attribuées à la philosophie comme combinaison présumée cohérente de signes ontologiquement interprétés, expliquent pourquoi chaque philosophie libre a la forme d'un système rationnel. Puisque la logique s'applique à l'ontologie, la philosophie est systématique de la même façon que les systèmes axiomatiques matériels le sont. De plus, un ensemble quelconque de prémisses qui contient une ontologie continue à embrasser le tout de la réalité, et la philosophie peut être dite être systématique dans un second sens, qui rappelle et métamorphose l'universalité du mythe.

Je ne crois pas trahir la pensée de Vuillemin en affirmant qu'il y a, dans l'histoire de la philosophie telle qu'il la comprend et en dépit de ce que pourrait faire croire son expression, « l'ontologie soumise à la logique », une priorité de l'ontologie sur la logique, et peut-être même à ses yeux -aussi surprenante que puisse paraître une telle affirmation pour ceux qui imaginent un Vuillemin scientiste - une influence plus forte du mythe que de la science dans l'activité philosophique. Il faut bien sûr justifier ces deux affirmations. En raison de leur caractère crucial dans l'argumentation de cet article, je les distinguerai par deux propositions dont la première est la suivante.

Proposition 11. *Selon Vuillemin, tout système philosophique se définit à partir d'un choix philosophique qui peut se comprendre comme un choix ontologique ; la soumission de tout système philosophique à « la logique » n'est qu'une conséquence de la supposition de la cohérence du choix qui définit le système en question. Lorsque certains principes logiques fondamentaux sont assumés ou sont refusés, comme le principe de bivalence ou le tiers exclu, c'est toujours en raison de la cohérence du choix.*

Proposition 12. *Puisque Epicure refuse d'assumer le tiers exclu comme un vérité logique, l'expression « la logique » ne désigne dans la classification de Vuillemin rien d'autre que tel ou tel système logique défini en raison d'un choix philosophique [146, p. 285] : « Les systèmes philosophiques ont dû produire la dialectique pour s'éprouver les uns les autres et la logique pour s'éprouver eux-mêmes ».*

Proposition 13. *A la différence du mythe, tout système philosophique admet l'exigence logique de cohérence, et en cela admet un critère reconnu par toute théorie scientifique.*

A l'appui de cette proposition, on reprendra la citation que Bouveresse [10, Cours 10] donne de cet alinéa de *Nécessité ou contingence* [146, p. 285] :

> La pluralité des philosophies, leur rivalité, leurs polémiques rappelèrent, dès l'origine, à la raison que poser, c'est se diviser et choisir. Comment la faculté même des principes pouvait-elle produire un tel conflit ? Car c'est le sentiment de cette diversité irréconciliable qui distingue la philosophie du mythe. Celui-ci va rapiéçant des bouts, sans s'inquiéter du disparate. Celle-là ne pose un principe qu'au vu de ses conséquences. Si elle n'y prenait pas garde, une autre la rappellerait aussitôt à la cohérence .

Proposition 14. *Par définition tout système philosophique authentique est « un système intégral de la réalité » [146, p. 286] et, en raison du caractère absolument universel de ce qu'il définit comme la réalité, il hérite d'une caractéristique propre au mythe et se distingue des systèmes scientifiques.*

En ce qui concerne les mathématiques, Vuillemin [147, p. 104] remarque que « en tant que système hypothético-déductif, l'axiomatique est [...] complètement étrangère à l'ontologie ». En somme la question de la nature des figure ou des nombres est une question philosophique. Mais la recherche de la distinction entre apparence et réalité est générale à toute l'entreprise philosophique et s'étend donc à toute chose.

Si bien qu'à la différence des sciences de la nature, la réalité ou les objets dont traite un système philosophique ne sont pas rigoureusement définis par un protocole expérimental. C'est pourquoi Vuillemin écrit [147, pp. 131-132] :

> Cette indétermination est la garantie de l'indépendance relative de la philosophie. Assurément, en vertu de l'origine commune de l'axiomatique et de la philosophie, il y a des échanges réciproques entre les lois scientifiques positives et les conceptions philosophiques correspondantes des lois. Ce n'est pas par un simple hasard que l'empirisme sceptique est une philosophie de physiciens, alors que personne n'était autorisé à entrer dans l'Académie de Platon s'il ne s'y connaissait pas en géométrie. Une philosophie qui n'est plus nourrie par la science décline et se flétrit en scolastique. Néanmoins les lois scientifiques ne déterminent jamais de façon unique les concepts philosophiques. Les systèmes philosophiques et *a fortiori* les classes de systèmes philosophiques ne sont jamais confrontés directement avec les lois scientifiques comme avec des expériences cruciales. En conséquence, aucune découverte scientifique n'est par elle-même en mesure de forcer une décision philosophique.

Vuillemin avait peu de goût pour les slogans ; néanmoins son propos pourrait ici se résumer par un slogan qui serait, selon lui, le mot d'ordre de la pensée philosophique : « ni mythe, ni science ». La philosophie se distingue du mythe parce qu'elle se soumet à la logique ; mais elle n'est pas non plus une science, parce que, comme le remarque Bouveresse [10, Cours 2], Vuillemin ne croit pas, contrairement à Dummett ou à Quine [89, § 56, p. 378], c'est-à-dire contrairement à tous les philosophes que l'on peut considérer comme appartenant à la tradition analytique au sens large de ce terme, que la philosophie puisse procéder « conformément à des méthodes de recherche admises par tout le monde » et obtenir des résultats « entérinés ou récusés en fonction de critères communément admis ». Si tel était le cas, la philosophie serait à la fois systématique en raison de la structure logique de ses théories, et systématique au second sens que Dummett donne à ce mot, c'est-à-dire en raison de la nature communément admise de ses méthodes de preuves et de réfutation.

Comme l'histoire de la philosophie montre que l'activité philosophique ne s'interdit *a priori* aucun domaine de réflexion, et qu'il est de la nature des systèmes philosophiques de tenter de donner une sorte de tableau intégral de la réalité à partir d'un nombre restreint de principes, il est vain selon Vuillemin d'une part d'imaginer que l'on puisse parvenir à des thèses philosophiques qui soient universellement reconnues comme des vérités, comme c'est le cas en mathématiques et dans les sciences de la nature, et il est d'autre part tout aussi illusoire de penser qu'une des cinq grandes classes de systèmes définis par sa classification (à savoir réalisme des Idées, conceptualisme, nominalisme, intuitionnisme et scepticisme) puisse un jour être définitivement écartée par une théorie scientifique. Les classes de systèmes philosophiques subsistent et subsisteront en raison même de leur origine, c'est-à-dire en raison des formes fondamentales de la prédication et du privilège que l'on accorde à certaines d'entre elles quand on prend le risque de penser philosophiquement. Ce point important a une fois de plus été impeccablement exprimé par Bouveresse [10, Cours 9] lorsqu'il écrit :

> [Vuillemin] pense que les systèmes philosophiques, pour des raisons qui n'ont rien d'accidentel, sont réellement irréfutables. Ils ne le sont pas simplement du point de vue subjectif de la psychologie de l'adhésion et de la croyance.

Autrement dit le *pluralisme philosophique* est une conséquence nécessaire aux yeux de Vuillemin des principes mêmes sur lesquels sont fondées sa classification des systèmes. Le pluralisme philosophique de Vuillemin n'est en rien une posture morale, je veux dire qu'il n'est pas une concession faite à un esprit du temps où il serait de bon ton d'être pluraliste comme il politiquement correct d'être démocrate. Il est certain en revanche qu'il a, aux yeux de Vuillemin, au moins une conséquence morale, comparable à celle de la théorie kantienne qui met le philosophe à l'abri de la *Schwärmerei.* L'agnosticisme du pluralisme est moralement préférable au dogmatisme vulgaire et fanatique. Mais ce ne sont certainement pour ces raisons morales que Vuillemin considère que le pluralisme s'impose, il s'impose à l'esprit du philosophe de la connaissance qu'il est, pour des raisons théoriques, celles qui tiennent à l'élaboration de la classification, et par fidélité à l'histoire de la philosophie qui témoigne de la survivance des ces classes de systèmes, quelle que soit l'actualité scientifique. Voilà ce que Vuillemin soutient lorsqu'il écrit [147, p. 132] que « les philosophies sont vivantes parce qu'elles peuvent être indéfiniment réécrites ».

On ne peut être, à mon avis, que profondément admiratif de la lumière que l'œuvre classificatrice de Vuillemin jette sur la nature et l'histoire de la philosophie. Je crois me souvenir avec entendu Vuillemin au Collège de France, soutenir qu'il y avait aussi progrès dans les sciences lorsqu'une théorie parvenait à être exposée et expliquée de façon suffisamment simple et claire pour des générations d'étudiants. Je me souviens, avec certitude cette fois, l'avoir entendu dire qu'il ne cherchait pas à développer une philosophie difficile et compliquée mais simple, claire et distincte. Lors de l'exposé que Vuillemin fit de sa classification au Collège de France, je garde en mémoire le vif souvenir du sentiment de lumière jetée sur les polémiques philosophiques que j'étudiais jusqu'alors sans ordre, c'est-à-dire sans en saisir ni la nature, ni l'unité. Je ne crois pas avoir connu depuis d'expérience comparable à cette joie de comprendre enfin le caractère fondamentalement polémique de la philosophie et ses principaux conflits. Plus tard, j'ai pu comme enseignant mettre à profit ce que j'avais appris, et grâce à cette œuvre magistrale, je pense avoir orienté correctement la pensée de mes étudiants en leur apprenant que, comprendre un système philosophique, c'est avant tout saisir les principes fondamentaux de sa constitution ainsi que sa portée polémique par rapport aux autres systèmes qu'il affronte. En un mot, je n'imagine pas comment il est possible de comprendre la nature de la philosophie et de son histoire sans faire référence à l'œuvre de Vuillemin. La section suivante, qui est une critique à la fois de son pluralisme philosophique et de son platonisme, est encore une façon de lui donner raison sur la thèse du caractère foncièrement polémique de la philosophie.

4.3 Le pluralisme philosophique et l'argument de la charge de la preuve

La conjecture selon laquelle le pluralisme philosophique ne serait pas une conséquence que l'on doit nécessairement admettre si l'on adopte la classification de Vuillemin, ne doit pas être conçue comme une réfutation du pluralisme philosophique, car il faudrait pouvoir montrer que la thèse du pluralisme philosophique est absurde, or il est évident qu'elle ne l'est pas. Il ne faut pas non plus entendre par « pluralisme philosophique » la platitude qui consiste à reconnaître qu'il existe une pluralité de positions philosophiques inconciliables. Le pluralisme philosophique affirme quelque chose de bien plus précis ; il trouve une de ses expressions dans cette formule de Vuillemin :

Proposition 15. *Aucune découverte scientifique n'est par elle-même en mesure de forcer une décision philosophique.*

Une telle assertion est déjà éminemment problématique lorsqu'on la considère hors de son contexte, c'est-à-dire indépendamment des principes de la classification qui, selon Vuillemin, l'entraînent. Dès lors que l'on n'adopte pas le pyrrhonisme, et que l'on accepte la thèse somme toute banale selon laquelle la philosophie a pour point commun avec la science, la poursuite de la vérité, on voit mal les raisons pour lesquelles une découverte scientifique serait par elle même incapable de forcer une décision philosophique. Il est nécessaire d'admettre, même du point de vue qui est celui de Vuillemin, qu'il y a des arguments logiques qui réfutent certaines interprétations philosophiques. J'ai fait allusion plus haut à l'argument de Quine [91] selon lequel la théorie russellienne des classes est contrainte de reconnaître l'existence des objets abstraits que sont les ensembles et donc exprime un engagement ontologique réaliste. Vuillemin considérait cet argument de Quine comme la démonstration d'une vérité importante dans l'histoire de la philosophie contemporaine. De même il louait Quine d'avoir montré avec précision toutes les difficultés conceptuelles qu'implique une position rigoureusement nominaliste.

Aucune de ces remarques n'aurait été cependant susceptible d'inquiéter Vuillemin sur la cohérence de sa philosophie de la philosophie. En ce qui concerne l'argumentation de Quine contre le nominalisme, il aurait probablement répondu que le nominalisme peut retrouver d'autres formes d'expression et détourner les difficultés logiques que cette position rencontre en philosophie des mathématiques. Enfin Vuillemin aurait sans difficulté reconnu qu'il existe dans l'histoire de la philosophie des arguments décisifs qui prouvent ou réfutent des thèses que l'on peut isoler, que l'on peut considérer comme locales, mais qui en aucun cas ne sont comparables aux thèses fondamentales qui sont les principes des classes de systèmes philosophiques. Quine a réfuté la thèse selon laquelle les *Principia Mathematica* développe une théorie nominaliste des classes ; il n'a pas réfuté le nominalisme en général. Lorsque Vuillemin [150, p. 38] soutient que « la philosophie ne comporte pas de démonstration », il prend soin de préciser qu'il ne veut pas dire par là qu'il n'y a pas de critère de décision rationnel en philosophie, mais plus simplement, et plus fondamentalement, qu'il n'est possible ni de prouver la vérité de la base théorique d'une position philosophique (c'est-à-dire démontrer la vérités des principes de la classe à laquelle appartiennent tel et tel système philosophique), ni de réfuter une classe de système philosophique.

L'adoption du pluralisme entraîne chez Vuillemin une compréhension très précise de ce qu'est non seulement un choix philosophique mais aussi une dispute philosophique. Un choix philosophique se fait, sous la contrainte de la logique, avec la reconnaissance de ne pouvoir, à partir du point de vue adopté, justifier des positions que l'on reconnaît comme logiquement possibles. Puisque dans le traitement d'une aporie comme celle de Diodore, le philosophe fait librement un choix cohérent, il reconnaît d'une part s'écarter du sens commun insouciant de la cohérence de la description de la réalité et, d'autre part, ne pas adhérer à certaines autres positions philosophiques possibles. C'est pourquoi Vuillemin [147, p. 133] écrit :

> Une classification philosophique, si elle est utile, jette une lumière sur notre situation en relation aux autres, en nous rappelant qu'il faut reconnaître qu'eux aussi ont de bonnes raisons pour choisir conformément à une maxime qui n'est pas la nôtre.

Je me souviens avoir entendu Vuillemin définir dans un de ses cours, les systèmes philosophiques, comme « des systèmes d'amputation », voulant dire par là que, sous la contrainte de la cohérence, un choix philosophique conduit à sacrifier au moins une assertion reconnue comme allant de soi par la pensée commune non critique, comme par exemple « il existe au moins un événement possible qui n'est pas actuellement vrai et qui ne le sera jamais », et qui est également admis par des systèmes philosophiques différents. Mais si l'on admet qu'un philosophe ne peut ni démontrer la vérité des principes qui sont les siens, ni réfuter ceux qu'il rejette, qu'est-ce qu'un argument philosophique ? Vuillemin n'a hélas pas eu le temps de répondre de manière développée à cette question, mais il était parvenu à la conclusion que l'argument philosophique par excellence s'apparente à l'argument juridique de la charge de la preuve. On va maintenant expliquer dans un premier temps ce que signifie cet argument juridique, et dans un second temps les raisons pour lesquelles Vuillemin considère que cet argument est le type même de l'argument philosophique.

En droit civil, la règle générale est que la charge de la preuve incombe au plaignant, et que celui qui ne porte pas la charge de la preuve a du même coup le bénéfice de la présomption d'innocence. Bien évidemment, c'est à un juge extérieur au conflit que revient la responsabilité de dire qui a la charge de la preuve et qui jouit de la présomption d'innocence. D'un point de vue scientifique, on peut aisément comprendre que la charge de la preuve incombe à celui qui soutient des assertions, que celles-ci soient de nature empiriques ou formelles. Prouver un énoncé universel revient ou bien à en donner la démonstration formelle, ou bien montrer que cet énoncé universel permet d'exprimer une régularité naturelle. On peut aussi réfuter un énoncé universel en donnant la preuve de l'existence d'un contre-exemple, tout comme on peut admettre que l'on prouve un énoncé existentiel en exhibant un exemple. Il est cependant inutile ici de poursuivre car l'on voit que, dès lors que l'on s'interroge sur le concept de la charge de la preuve en sciences, on a inévitablement tendance à se poser la question « qu'est-ce qu'une preuve ? », ce qui évidemment n'est plus tout à fait le même sujet.

L'analyse de l'argument de la charge de la preuve est importante en philosophie car, comme le remarque Walton [151, p. 233], bien que l'on on sache depuis Socrate que la dispute théorique entre deux protagonistes est une forme classique de l'argumentation philosophique, tout ce qui a été publié sur le rôle du poids de la preuve en philosophie a conduit à plus de questions que de réponses sur ce sujet. Presque dix années plus tard, Cargile [15, p. 69] non seulement ne contredit pas cette remarque, mais l'appuie en citant Lehrer [63] qui affirme que, « généralement, les arguments qui portent sur la question de savoir à qui incombe le poids de la preuve ne sont pas concluants ».

Pourtant l'article de Walton s'efforce de clarifier la question, puisqu'il ne s'interroge pas uniquement sur les usages fallacieux de l'argument du poids de la preuve, mais aussi sur le rapport du poids de la preuve et de la plausibilité, se demande si le poids de la preuve revient à celui qui attaque une thèse ou à celui qui la défend, et s'interroge enfin sur les différences entre usage juridique et usage philosophique de cet argument. Il est assez facile de comprendre que le croyant ne peut pas rationnellement faire reposer la preuve de l'existence de Dieu sur le fait que les athées n'ont pas démontré rationnellement son inexistence. De la même façon, pour prouver que tous les chiffres apparaissent avec la même fréquence dans le développement décimal de π, il ne suffit pas de dire qu'on a toujours échoué *jusqu'à présent* à montrer un nombre qui n'a pas cette propriété d'apparaître avec la même fréquence que tous les autres dans ce développement décimal. Ces points de logique sont importants mais ils ne font que montrer les usages fallacieux de l'argument du poids de la preuve, sans dire quel est son usage correct dans une dispute philosophique.

Dans la partie positive de son article, Walton semble vouloir s'appuyer, si je le comprends bien, sur le paradigme des jeux ou des dialogues tel qu'il a été développé par Hintikka et Lorenzen. Mais, s'il s'agit de comprendre l'usage que Vuillemin fait de cette forme d'argument, la référence de Walton à la méthode des jeux ou du dialogue en logique est insuffisante pour deux raisons. La première est que l'on peut montrer, comme je l'ai fait avec Galmiche et Larchey-Wendling [134], que la dialogique est une méthode de logique que l'on peut toujours traduire par une autre, comme celle du calcul des séquents par exemple, et que les preuves données par la dialogique sont des preuves logiques *tout court*. Le jeu de dialogue n'est donc ni un vrai jeu, puisque l'issue est déterminée, ni un vrai dialogue, puisqu'on pourrait le convertir en monologue et ne rien perdre du résultat. Pour comprendre l'argument du poids de la preuve tel que le conçoit Vuillemin, *la logique ne suffit pas*, il est nécessaire d'admettre au moins deux philosophes qui admettent des *ontologies* rivales et incompatibles pour décrire une même réalité. La proposition qui suit définit, dans la perspective de Vuillemin, l'usage légitime de l'argument de la charge de la preuve.

Proposition 16. *Soit deux philosophes A et B qui, pour décrire une même réalité R, soutiennent deux théories différentes et incompatibles, respectivement T_A et T_B qui peuvent être par exemple représentées par les formules suivantes*

$$T_A = \{\exists x F x \wedge \exists y G y\} \tag{4.1}$$

et

$$T_B = \{\neg \exists x F x \wedge \exists y G y\} \tag{4.2}$$

si B soutient une ontologie moins lourde que A, comme c'est par exemple ici le cas, alors c'est à B qu'incombe la charge de prouver que l'on peut se dispenser d'assumer l'existence de certaines entités que A admet (en l'occurrence les entités qui sont des F) pour donner un modèle de R.

Le privilège accordé par Vuillemin à ce type d'argument peut s'expliquer par le fait que Vuillemin a très probablement été influencé, plus qu'il ne l'a explicitement reconnu, par la manière dont Quine a défendu le réalisme mathématique. Quine renonce à la philosophie nominaliste pour laquelle il inclinait spontanément, parce qu'il réalisé qu'il est indispensable d'admettre la théorie classique des ensembles, et donc de quantifier sur les objets abstraits, pour éviter de sacrifier un bon nombre de vérités mathématiques importantes dans la science contemporaine. Son conservatisme en logique est fondé sur la même maxime de mutilation minimum, « il faut éviter de faire chavirer le navire ». La façon dont Vuillemin [150] s'exprime est évidemment à l'opposé de ce que ce que l'on pourrait appeler « le pragmatisme logico-technique » d'un Quine qui avoue « poser les objets abstraits au total à contrecœur » [94, II, § 11, p. 56], quand Vuillemin [150, p. 28] par contraste souligne en gras dans le texte que son *Credo réaliste* « porte sur un article unique qui résume une philosophie des mathématiques : **Il existe un monde intelligible** » ; mais l'usage que Quine et Vuillemin font tous deux de l'argument de la charge de la preuve est rigoureusement le même. Quine attend que les mathématiciens qui réfléchissent sur les théories prédicatives des ensembles montrent qu'il est possible de fonder les théories physiques sur un édifice mathématique ontologiquement moins lourd, mais en attendant il déclare le réalisme mathématique comme la seule option raisonnable à ses yeux pour la philosophie des sciences. Vuillemin opte tardivement mais plus résolument pour le platonisme et défie tous les anti-platoniciens de rendre compte intégralement de la science *et* de la morale sans admettre les Idées de Platon ; à eux la charge de la preuve. [55]

Précisons enfin que, si le privilège de l'argument de la charge de la preuve est une des conséquences du pluralisme philosophique, une des conditions pour la bonne expression du pluralisme philosophique est aussi le choix de la stabilité du système ou de l'authenticité de la philosophie adoptée :

Proposition 17. *Un système philosophique est authentique si et seulement si il appartient intégralement à l'une des cinq classes de la classification des systèmes. (Par exemple, s'il est stable ou authentique, un tel système ne peut pas être platonicien pour la philosophie de la connaissance, et nominaliste en morale.)*

Proposition 18. *D'un point de vue authentiquement philosophique, il est impossible de ne pas admettre que certaines positions philosophiques sont abandonnées en raison de la position philosophique que l'on choisit.*

55. Le fait que la charge de la preuve soit devenue pour Vuillemin l'argument par excellence du réalisme est attesté par ces lignes d'un manuscrit inédit [141] sur lequel travaille David Thomasette, doctorant à l'Université de Lorraine :

> Discipline commune à tout aveu philosophique, la règle respective à l'usage du poids de la preuve est aussi la règle unique du réalisme. Tous les autres aveux philosophiques la complètent par une règle de leur cru. Que cette dernière ait pour objet l'abstraction, le langage, la déduction ou la simple réflexion, elle assigne à l'aveu une méthode spécifique capable de distinguer la philosophie parmi toutes les autres disciplines, quoique ce soit au moyen d'une marque polémique et donc contestable.

De même, la Préface de ce même manuscrit fait écho au texte cité plus haut :

> Je crois au monde intelligible.
>
> Cette profession de foi est une proposition philosophique. On verra qu'elle en particularise une autre : toute proposition, pour peu qu'elle soit philosophique, exprime un acte de foi ou d'incrédulité

4.4 Une conjecture : l'intuitionniste peut s'abstenir d'assumer le pluralisme philosophique

Comme je l'ai souligné dans l'introduction de cet article, la dernière section de cet article s'efforce de donner des arguments pour prouver une conjecture dont l'intuition est à mon avis présente dans les propos de Bouveresse [10, Cours 2] que je comprends ainsi : il n'y a pas de différence fondamentale entre la division tracée par Dummett entre réalisme sémantique et anti-réalisme sémantique et celle établie par Vuillemin entre systèmes dogmatiques et systèmes de l'examen, et cependant Dummett n'est pas conduit à soutenir comme Vuillemin que le pluralisme philosophique doit nécessairement être admis. Encore une fois, le rejet intuitionniste du pluralisme philosophique n'est pas la négation de l'existence d'une pluralité de positions philosophiques, car cette négation serait absurde. L'intuitionniste rejette la proposition 15 en soutenant que la logique intuitionniste est une découverte scientifique capable de forcer le choix de l'intuitionnisme à partir de la connaissance de la classification de Vuillemin *et* de l'exigence philosophique de construction d'un système intégral. Il s'agit par conséquent de démontrer la conjecture suivante :

Conjecture 1. *Le pluralisme philosophique n'est pas une conséquence nécessaire des principes de la classification des systèmes philosophiques de Vuillemin.*

Trame de la démonstration. Il faut entendre par « pluralisme philosophique » le fait de reconnaître que les significations respectives des autres options philosophiques fondamentales ne peuvent pas être correctement *exprimées* à partir du système adopté. Le pluralisme philosophique, en ce sens précis, revient à affirmer que la conjonction de la connaissance de la classification et le choix d'un système implique le fait d'admettre que « l'amputation » des positions adverses est inévitable, quelle que soit la classe de systèmes philosophique dans laquelle on se place. Le sens de l'expression « pluralisme philosophique » étant donnée, voici maintenant la trame d'une démonstration possible de la conjecture 1.

Le choix de l'intuitionnisme implique le choix de la logique intuitionniste, tandis que le choix du platonisme implique l'adoption de la logique classique. En raison des rapports entre ces deux logiques, il y a deux sens que l'on peut donner au mot d'« amputation » dans ce contexte. Par souci de simplicité, on se place uniquement au niveau du calcul propositionnel pour distinguer *amputation extensionnelle* et *amputation intensionnelle* :

– Tous les théorèmes intuitionnistes étant aussi des théorèmes en logique classique, mais non l'inverse, la logique intuitionniste est amputée de certains théorèmes classiques dont le tiers exclu est l'exemple le plus connu. Le choix de la logique intuitionniste comme logique de base implique donc une amputation *extensionnelle* de certains théorèmes : le fait d'assumer certains énoncés ne préserve pas les conséquences admises en logique classique (par exemple $\neg\neg A \nvdash_i A$).

– L'existence d'un *plongement* de la logique propositionnelle classique dans la logique propositionnelle intuitionniste implique, comme le montre avec précision Epstein [31, Chap. X, pp. 374-400] qu'*il n'existe pas de traduction grammaticale* de la logique propositionnelle intuitionniste (**IPL**) dans la logique propositionnelle classique (**CPL**). En ce sens là, l'« amputation » relève du domaine des significations : les contre-modèles construits dans **IPL** pour montrer que certains théorèmes de **CPL** ne sont pas prouvables en logique intuitionniste, n'ont *aucune signification* du point de vue classique [56]. Le choix de la logique classique comme logique de base du système philosophique adopté (par exemple le platonisme) implique donc une amputation *intensionnelle* de la logique intuitionniste.

A partir de cette distinction entre amputation extensionnelle et amputation intensionnelle, la preuve de la conjecture 1 pourrait reposer sur l'argument suivant. Il n'est pas difficile de montrer que, si l'on en reste au niveau de la logique propositionnelle, le platonicien est contraint de reconnaître qu'il procède, comme Quine [89], à des amputations intensionnelles. Toujours au niveau de la logique propositionnelle, l'intuitionniste sera en mesure au contraire de nier qu'il procède à des amputations ontologiques, en affirmant qu'il ne fait qu'adopter une logique qui offre un plus grand pouvoir d'expression que la logique classique et qui exige plus d'informations que celles qu'apportent les preuves non constructives. En effet *si A est décidable* la formule

$$\neg\neg A \rightarrow A \tag{4.3}$$

redevient un théorème intuitionniste, et ne signifie alors dans ce cas rien d'autre que

$$\vdash_i \neg\neg\top \rightarrow \top \tag{4.4}$$

où $\top$ est la constante du vrai. Supposons enfin qu'il soit possible à l'intuitionniste d'exprimer à partir de sa logique toutes les positions philosophiques de la classification sans jamais renoncer à la sienne, alors l'intuitionniste ne serait pas contraint de reconnaître que son système est un « système d'amputations ontologiques », puisqu'il ne reconnaît comme existant que les choses au sujet desquelles on a des preuves d'existence, donc le pluralisme philosophique ne serait pas une conséquence nécessaire de la classification de Vuillemin. Tel est le fil conducteur des propositions qui suivent. □

56. Ce point devient totalement évident lorsqu'on étudie la méthode des arbres de réfutation en logique intuitionniste exposée par Bell *et alii* [6] : le contre-modèle opposé à la formule du tiers exclu n'est pas lisible en logique classique, alors qu'on peut, du point de vue intuitionniste, retrouver le raisonnement classique.

Définition 11 (Principe de bivalence ou principe de détermination des valeurs de vérité des énoncés)**.** *Tout énoncé déclaratif est vrai ou faux de manière déterminée, indépendamment de toute procédure de décision.*

Définition 12. *L'intuitionnisme se définit par le refus d'assumer le principe de bivalence.*

Remarque 7. *Cette définition est compatible avec le fait de définir l'intuitionnisme comme le fait Vuillemin, à partir d'un privilège donné aux jugements de méthode, mais seulement si par « jugement de méthode » on entend le fait de définir nécessairement la vérité de tout énoncé par sa preuve, ou sa fausseté par sa réfutation, et que l'on refuse d'appliquer le principe de bivalence aux énoncés qui ne sont ni prouvés ni réfutés.*

Proposition 19. *Certains choix philosophiques impliquent l'adoption ou le rejet de certaines règles logiques, c'est-à-dire des règles d'inférence qui sont déclarées correctes dans tous les contextes.*

Première preuve : le cas du platonisme. Le platonisme peut aussi se définir comme l'a fait Dummett [25, 23, 26] [57] par l'adoption sans restriction toutes les théorèmes de la logique classique et notamment, pour reprendre la terminologie et la notation de David *et alii* [95, p. 148] par le fait d'assumer comme loi logique universelle la règle dite « d'absurdité classique », qui affirme que si, *via* le contexte d'une théorie Γ on peut dériver une contradiction de la négation d'une proposition A, alors on peut dériver A de Γ, ce qui s'exprime par la formule :

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot_c$$

Cette règle est une conséquence du principe de bivalence : si l'on admet que tous les énoncés sont, de manière déterminée, vrai ou bien faux, alors s'il est faux que l'énoncé A est faux, alors il n'y a pas d'autre possibilité que d'en déduire que A est vrai. Le platonisme admet l'existence de vérités intelligibles qui transcendent la connaissance, donc l'existence d'énoncés qui sont vrais ou faux de manière déterminée et indépendamment de toute procédure de décision. Donc le platonisme admet le principe de bivalence et, par conséquent, il se définit aussi par le fait d'admettre que le tiers exclu et la règle d'absurdité classique sont des règles logiques (c'est-à-dire absolument et universellement nécessaires). □

57. On peut lire sous la plume de Dummett [23, p.154] :

> Despite Hilbert's act of faith that every mathematical problem is solvable, there can be for the platonist no intrisic connection between truth and intuitive provability - the latter implies the former, but not conversly.
>
> From a platonist standpoint,the fact that every mathematical statement is either true or false need not imply that every statement is either provable or refutable.

Seconde preuve : le cas de l'intuitionnisme. L'intuitionnisme se définit par le refus d'assumer le principe de bivalence et donc par le refus d'assumer la règle d'absurdité classique comme règle logique. (En raison de la définition 12, de la remarque 7 et de la fin de la preuve précédente.) □

Proposition 20. *Définir l'intuitionnisme à partir d'un privilège donné « jugements de méthode » en raison de la reconnaissance de l'activité du sujet qui accède à la vérité, est une définition correcte de l'intuitionnisme,* ***mais insuffisante d'un point de vue logique****, car en l'absence de la définition 12, la classification de Vuillemin permet de définir un intuitionnisme instable.*

Démonstration. Admettons qu'un système philosophique intuitionniste, pour prouver certaines de ses thèses, accepte l'usage de la règle d'absurdité classique alors, en raison du proposition 19 un tel système philosophique serait *instable* au sens que Vuillemin [146, pp. 288-289] donne à cette expression. □

Proposition 21. *Les désaccords logiques entre les logiciens classiques et les intuitionnistes, apparaissent au sujet de l'ensemble tous les énoncés qui, formalisés dans le symbolisme élémentaire du calcul propositionnel, sont classiquement prouvables, mais ne le sont pas en logique intuitionniste. Appelons ce terrain de la discorde « l'ensemble δ ».*

Explication. Assumer le principe de bivalence revient à accepter que la négation soit *involutive*, ce qui signifie que son application à elle-même *via* l'affirmation de la formule $\neg\neg A$ est équivalente à l'affirmation de A. En logique intuitionniste la négation de A signifie *uniquement* que l'assomption de A implique une contradiction, par conséquent $\neg\neg A$ signifie l'absurdité de l'absurdité de A, autrement dit la cohérence de A. Le fait qu'un énoncé ou une théorie soit cohérent n'implique pas qu'il soit prouvé, donc

$$\nvdash_i \neg\neg A \to A \tag{4.5}$$

Que $(A \vee \neg A)$ redevienne une formule prouvable en logique intuitionniste lorsqu'elle est précédée de la double négation, ainsi que toutes le formules de l'ensemble δ, signifie que la cohérence de ces formules logiques de δ est prouvable. Il n'y a donc pas de réfutation possible d'une quelconque formule A de δ si par « réfutation » on entend la preuve que la supposition de A implique l'absurde. Telle est la leçon philosophique du théorème de Glivenko [41] : il est absurde de tenter de démontrer l'absurdité des formules de δ.

La logique intuitionniste montre en revanche que toute formule de δ est telle qu'il est toujours possible de lui opposer un contre-exemple issu d'une théorie indécidable. En effet, si une formule du calcul propositionnel appartient à δ alors il faut supposer la décidabilité d'au moins un de ses atomes pour qu'elle soit démontrable d'un point de vue intuitionniste. Telle est la leçon philosophique du théorème de von Plato[140, 75] dont la démonstration prouve qu'une formule C est dérivable en logique classique si et seulement si la formule

$$(P_1 \lor \neg P_1) \land \cdots \land (P_n \lor \neg P_n) \to C \tag{4.6}$$

(où $P_1 \ldots P_n$ sont tous les atomes de C) est dérivable en logique intuitionniste. La critique intuitionniste à l'égard de la philosophie sous-jacente à la logique classique est donc parfaitement fondée : la logique classique présuppose l'omniscience. □

Proposition 22. *Les disputes philosophiques en logique peuvent s'exprimer à partir de l'analyse des théorèmes de « plongement ».*

Explication. Contre le choix de la logique classique comme logique de base, l'intuitionniste peut légitimement soutenir que le choix de la logique classique rend impossible le respect de la signification naturelle de chaque connecteur [58]. A partir de cet argument, le plongement de **CPL** dans **IPL** est un point en faveur de l'intuitionnisme, parce qu'il n'existe pas, en calcul propositionnel, de *traduction grammaticale* de la logique intuitionniste dans la logique classique, alors que l'inverse est vrai. Pour être capable de donner une interprétation de la logique intuitionniste dans son langage, le logicien classique doit au moins faire usage de la logique modale, en raison du plongement, démontré par McKinsey et Tarski [69], d'**IPL** dans **S4**. A partir de ce résultat, un plongement du calcul des prédicats intuitionniste dans le calcul des prédicats classique a été démontré par Motohashi [74], mais il serait erroné d'affirmer que cette démonstration donne le dernier mot à la logique classique. En effet, en 1976 Löb [65] démontre qu'il existe un plongement de la logique classique du premier ordre dans la logique propositionnelle intuitionniste du second ordre, ce qui a été développé et interprété récemment par Sørensen et Urzyczyn [110]. Plus récemment encore Dyckhoff et Negri [28] ont donné une preuve constructive et directe du plongement d'**IPL** dans **S4** que McKinsey et Tarski avaient démontré de manière non constructive.

Si l'on peut montrer qu'existe un plongement d'un théorie S dans une théorie T, alors T a certainement une procédure de décision au moins aussi complexe que S, mais aussi toute interprétation d'une formule A de S détermine une interprétation de A dans T. Enfin, la preuve de Dyckhoff et Negri montre clairement que les

58. Soit γ l'ensemble des connecteurs du calcul propositionnel : $\{\neg, \land, \lor, \to\}$. On peut démontrer en logique classique que $\{\neg, \lor\}$ et $\{\neg, \land\}$ sont des systèmes complets minimaux de connecteurs [19, pp. 53-55], ce qui veut dire que le calcul propositionnel classique pourrait faire l'économie de l'implication matérielle et de la disjonction (resp. de la conjonction) et ne rejeter aucun théorème classique. On démontre en revanche qu'en logique intuitionniste la taille de γ est irréductible, ce qui signifie qu'aucun connecteur propositionnel n'est traduisible à partir des trois autres [6, p. 211]. Sur l'importance que l'intuitionniste peut accorder à la traduction intuitive des connecteurs dans sa dispute avec le logicien classique, voir [136].

intuitionnistes interprètent toute preuve non constructive comme une requête d'informations supplémentaires que seules peuvent donner les preuves constructives, point que même un platonicien est contraint de concéder. La dispute philosophique sur la question de savoir quelle est la logique de base de la connaissance scientifique pourrait donc espérer trouver une issue si l'on parvenait à définir une logique d'ordre supérieur T au sein de laquelle tous les plongements sont fiables et permettent toujours d'interpréter, dans T, les formules logiques des théories existantes. En raison du fait que l'algèbre de Boole est un cas particulier de l'algèbre de Heyting, il semble raisonnable de conjecturer que, s'il est possible de définir cette logique d'ordre supérieur, celle-ci est intuitionniste. □

Conjecture 2. *Il est possible d'envisager l'expression adéquate des classes de systèmes philosophiques telles qu'elles sont définies par Vuillemin en partant de la logique intuitionniste comme logique de base.*

Argument en faveur de cette conjecture. La logique intuitionniste est la seule logique qui permet d'exprimer la division bipartite de la classification de Vuillemin en systèmes dogmatiques et systèmes de l'examen. De ce point de vue logique, les systèmes dogmatiques sont tous ceux qui admettent la logique classique comme logique de base ; quant au scepticisme il peut se définir comme la philosophie qui, contrairement à l'intuitionnisme, nie qu'il soit possible de parvenir à une vérité objective et donc refuse, de manière plus ou moins radicale, de tirer des conséquences ontologiques à partir de preuves effectuées par un sujet pensant. Il est remarquable que cette division bipartite ne pourrait être exprimée au niveau propositionnel, ni par tous ceux qui adoptent la logique classique comme logique de base, ni par un sceptique qui serait nécessairement conduit à déplacer la ligne de démarcation entre systèmes dogmatiques et systèmes de l'examen, car comme l'a dit Vuillemin lors d'un cours au Collège de France que je cite de mémoire, « pour un sceptique, un intuitionniste reste un dogmatique ». En ce sens là, de manière informelle on peut dire qu'il est très probablement possible de montrer l'existence d'un « plongement » de la classification de Vuillemin dans la logique intuitionniste, au sens où celle-ci pourrait traduire de manière fiable celle-là. □

Conjecture 3. *L'intuitionniste n'est ni contraint de reconnaître la vérité du pluralisme philosophique, ni contraint de concevoir l'argument de la charge de la preuve (au sens juridique) comme le type même de l'argument philosophique.*

Argument. Si la conjecture précédente est démontrable, cette dernière avec la conjecture 1 l'est aussi. Il serait alors justifié de refuser d'admettre la thèse de Vuillemin [150, p. 38] selon laquelle « la philosophie ne comporte pas de démonstration ». On privilégierait enfin l'usage scientifique de l'argument de la charge de la preuve, sur son usage juridique. □

Conclusion

La conclusion de ce mémoire contient deux sections. La première s'efforce de développer la leçon générale que l'on peut tirer des chapitres précédents, relativement à l'usage de la logique dans l'argumentation philosophique. La seconde partie développe brièvement le projet d'un autre ouvrage.

1 Logique et argumentation philosophique

A la fin du chapitre précédent, je conteste la thèse de Vuillemin selon laquelle l'argument juridique du poids de la preuve serait l'argument philosophique par excellence. Je crois que cette thèse exprime un scepticisme qui est à la racine du principe de tolérance philosophique chez Vuillemin. Mais c'est en dernière analyse une thèse ruineuse si l'on maintient jusqu'au bout qu'une dispute philosophique est toujours un dialogue rationnel.

On peut tout de suite remarquer qu'il est douteux que l'on puisse déterminer dans les disputes philosophiques une procédure de décision qui puisse toujours déterminer sur quel parti, pour telle ou telle question, doit reposer la charge de la preuve. L'exemple de la dispute entre les mathématiciens intuitionnistes et tous ceux qui admettent l'ensemble des mathématiques classiques est un exemple qui montre que l'argument du poids de la preuve ne peut pas être utilisé comme Vuillemin [149, 150] entend le faire. En tant que platonicien, Vuillemin utilise *grosso modo* l'argument suivant : « pour rendre compte de l'ensemble des mathématiques classiques, j'adopte la thèse platonicienne d'une réalité mathématique transcendante et je laisse à tous ceux qui adoptent tel ou tel système ontologiquement moins coûteux la charge de prouver qu'ils peuvent rendre compte de cette même réalité sans adopter le platonisme ». Cependant l'argument de Vuillemin est évidemment sans force pour l'intuitionniste qui n'a absolument pas pour objectif de sauver ou de fonder philosophiquement toutes les preuves non constructives des mathématiques classiques, et avec elles les théories cantoriennes ou zermeliennes des ensembles. La dispute ontologique entre intuitionnisme et platonisme se réduit alors naturellement à une dispute sur la question de savoir si l'on peut refuser d'admettre que la logique classique est « la bonne logique » ou si l'on peut au contraire considérer que la logique intuitionniste est la logique de base de la connaissance humaine.

On a vu dans le premier chapitre de ce livre que l'adoption ou le rejet du principe de bivalence, ou que l'adoption ou le rejet de l'emploi de la règle de l'absurdité classique constitue la frontière logique entre les partisans du réalisme sémantique d'un côté et les intuitionnistes de l'autre. Or il est remarquable que, dans ce contexte, si l'argument du poids de la preuve continue d'être utilisé, il ne peut plus l'être au bénéfice des platoniciens. En effet, d'une part les critiques que Brouwer [11] a formulées contre l'idée selon laquelle le principe du tiers exclu serait un principe logique universellement sûr en mathématiques, *via* ses célèbres contre exemples, sont des critiques toujours pertinentes. D'autre part, si l'on tient à utiliser encore l'argument du poids de la preuve, non seulement le partisan de la logique classique se trouve dans l'incapacité de prouver que le tiers exclu est une loi logique universelle sans présupposer du même coup la reconnaissance de vérités transcendantes, mais cette prétention de la logique classique est *réfutée* par l'usage des contre-modèles de Kripke, puisqu'il existe un contre-modèle de Kripke qui montre que le schéma $\neg A \vee A$ n'est pas prouvable d'un point de vue intuitionniste. Un des arguments principaux du premier chapitre consiste à montrer que les arguments d'un Quine qui consistent à rejeter du point de vue classique l'interprétation intuitionniste des connecteurs logiques, est un argument totalement irrecevable en raison même du fait que toutes les règles de l'algorithme de Quine en calcul propositionnel sont *également* des règles de la logique intuitionniste, exceptée la méthode elle-même, c'est-à-dire celle des tables de vérité qui présuppose l'acceptation de la bivalence.

La stratégie adéquate de l'argumentation philosophique dans une dispute de ce type est donc moins le recours à l'argument de la charge de la preuve, que la recherche de schémas logiques que l'adversaire ne peut pas ne pas reconnaître comme valides au sein même de sa théorie. Or si la dispute reste rationnelle, c'est-à-dire si l'on reconnaît qu'il est préférable d'adopter des normes communes pour décider en faveur d'une théorie plutôt que d'une autre, c'est évidemment le partisan de la logique la plus faible qui va, dans la dispute philosophique, se trouver dans la position la plus forte, car il suffit par exemple au logicien intuitionniste de montrer que les principes logiques de la logique intuitionniste ou de la logique minimale *suffisent* pour établir telle ou telle preuve pour renforcer le caractère universelle de la preuve en question, ou pour la fragiliser au contraire, si l'on est dans l'obligation de recourir à une logique plus forte comme la logique classique par exemple. Telle est la leçon de l'article sur Descartes dans ce volume : en présentant sans même le savoir une preuve de l'existence de Dieu qui est *formellement* recevable d'un point de vue intuitionniste, Descartes a peut-être exposé la preuve théologique rationnelle la plus forte que l'on peut concevoir, et c'est en cela que sa preuve est supérieure à celle d'Anselme. De la même façon, j'ai montré dans l'article sur l'argument de Diodore-Prior que les critiques de Vuillemin contre cette preuve peuvent être assez facilement rejetées dès lors que l'on adopte une interprétation intuitionniste des connecteurs logiques. Comme il est inexact qu'un platonicien ne peut accorder aucun sens à cette interprétation intuitionniste (ce que montre le premier article de ce volume), les critiques de Vuillemin contre la preuve de Prior s'effondrent.

On peut donc conclure en soutenant que l'argument philosophique par excellence n'est pas celui du poids de la preuve, mais c'est un argument qui contraint l'opposant à des conclusions qu'il ne peut pas rejeter en raison du système logique qu'il adopte et qu'il partage avec son contradicteur. L'opposant peut bien entendu poursuivre la polémique en insistant sur la nécessité d'adopter une logique plus forte pour pouvoir rendre compte d'une ontologie plus lourde ; mais dès lors c'est à lui qu'incombe la charge de montrer qu'il est nécessaire de faire usage d'une logique plus forte pour prouver au moins un énoncé de la théorie adverse.

La leçon du l'analyse de la première preuve par les effets de Descartes est qu'il n'y a probablement pas de relation évidente entre l'ontologie adoptée par un système philosophique et le système logique qu'il utlise pour dériver les conséquences de ses axiomes. Descartes est à l'évidence un philosophe intuitionniste du point de vue de son système de preuves, mais il va plus loin que bien des intuitionnistes contemporains en admettant que l'idée d'une infinité actuelle de perfections est une idée claire et distincte, autrement dit une idée qui pour le *Cogito*, existe indubitablement ; c'est une assomption ontologique qui est assumée indépendamment du système de preuves et qu'il est difficile de considérer comme conforme à l'esprit intuitionniste.

On peut aussi, c'est un autre exemple, soutenir qu'il est nécessaire d'outrepasser les scrupules ontologiques des nominalistes pour rendre compte des théories scientifiques et, comme le dit Quine [93], que l'on soit contraint de « desserrer nos ceintures ontologiques de quelques crans » ; mais cela ne prouve pas que l'on ait besoin de faire appel à l'existence de vérités transcendantes et donc à l'usage non restreint de la logique classique pour rendre compte de la science contemporaine. Autrement dit, il est tout à fait concevable, comme l'a souligné Heyting [50] que l'on puisse parvenir à fonder la physique contemporaine sur la logique et la mathématique intuitionnistes. Si cette façon de représenter les oppositions au sein de la philosophie de la connaissance est correcte, on ne voit pas pourquoi le philosophe logicien devrait désespérer de la possibilité d'un accord sur la question des fondements de la connaissance. La première tâche qui s'impose pour répondre à une telle question étant de définir la logique de base de la connaissance humaine.

2 Perspectives de travaux

Je me suis efforcé de montrer dans ce mémoire l'intérêt de l'argumentation intuitionniste en philosophie, lorsque l'on se place *d'un point de vue logique*, en signifiant par cette expression, évidemment, *du point de vue de la logique intuitionniste*.

Pour dire les choses autrement, le fait de changer la logique classique pour la logique intuitionniste, ce n'est pas changer le sujet de l'enquête, *pace* Quine, c'est faire usage d'une logique qui, certes, *prouve moins* de théorèmes que la logique classique, mais qui, par son pouvoir d'expression plus riche, permet de montrer qu'il existe des contre-modèles à certaines vérités admises par la logique classique. La logique intuitionniste invite donc à une correction ou une traduction de la logique classique, et à concevoir les conséquences logiques que l'on peut tirer à partir d'un état du savoir donné, et non indépendamment de toute information. Comme van Benthem [119] l'a bien vu, non seulement la notion d'information est cruciale pour la logique intuitionniste, mais la logique intuitionniste et ses dérivées (logiques modales, épistémiques, etc.) peut être considérée comme une théorie de l'information.

Il est cependant surprenant que seule une minorité de philosophes appartenant à la tradition de la philosophie analytique se soit intéressée sérieusement aux vertus de la logique intuitionniste du point de vue philosophique. Je crois que l'explication de cette lacune réside dans le fait que la logique intuitionniste est inévitablement plus difficile que la logique classique. Pour dire les choses brutalement, on peut évidemment penser qu'une immense majorité des enseignants en logique dans les Départements de philosophie est capable de montrer aux étudiants que la formule de Pierce

$$((P \to Q) \to P) \to P \qquad \text{(Loi de Peirce)}$$

est un théorème de la logique classique propositionnelle. On peut cependant hélas douter qu'en dépit des progrès récents de la logique intuitionniste, cette même majorité soit en mesure de donner aux étudiants un *algorithme* qui permette à ces derniers de montrer que cette formule *n'est pas* prouvable en logique intuitionniste. Il n'y a aucune condescendance et aucun mépris dans mes propos : c'est lorsque j'ai commencé à m'intéresser à la logique intuitionniste et que j'ai voulu y intéresser mes étudiants que j'ai connu l'inquiétude de ne pas être en mesure de leur donner une méthode simple et fiable qui puisse leur permettre de décider si une formule de la logique du premier ordre est valide ou ne l'est pas du point de vue intuitionniste. J'ai la faiblesse d'imaginer que mon ignorance d'alors n'est pas un cas totalement isolé [59].

Il serait pourtant inexact de dire qu'aucun travail scientifique accessible n'a été publié pour permettre aux étudiants en philosophie de comprendre la logique intuitionniste tout en offrant aussi une méthode de décision relativement simple qui permette de savoir si une formule est prouvable d'un point de vue intuitionniste ou si elle ne l'est pas. Le travail accompli par Bell *et alii* [6] est à mon avis tout à fait remarquable, puisqu'il offre une adaptation de la méthode des arbres de Beth à la logique modale et à la logique intuitionniste, entre autres. Dans un autre style, mais avec le

59. Ce sont les notes de cours que John L. Bell a mis en ligne qui m'ont aidé. Depuis j'ai de mon côté réparé cette lacune et j'ai publié mon cours sur la logique intuitionniste en ligne également : http://www.philfree.org/article401.html

même esprit, le livre de Garson [39] est aussi un modèle du genre. Il manque donc dans la littérature française un manuel de logique comparable à celui de Lepage [64] qui puisse rendre accessible la logique intuitionniste. Il est dans mes projets de combler cette lacune. Il y a évidemment, au regard des publications scientifiques récentes en théorie de la preuve [31, 75, 76], bien plus à faire pour tenter de définir ce qu'est la logique de base de la connaissance humaine, mais si c'est effectivement un projet que j'envisage, il serait présomptueux de ma part de dire à ce jour que je suis certain de pouvoir le mener à bien. A l'instar d'un homme politique qui a connu un succès récent, je ne veux faire aucune promesse que je ne sois certain d'être en mesure de tenir.

Index

Bibliographie

[1] ALQUIÉ, F. – *La découverte métaphysique de l'homme chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1950, 1987.

[2] ANSELME, (SAINT) – *Œuvres philosophiques*, Aubier, Paris, 1967, tr. fr. de *Monologion-Proslogion-De Veritate-De Libero-Arbitrio-De Concordia-De Voluntate*, par P. Rousseau.

[3] ARISTOTE – *De l'intreprétation*, Vrin, 1959.

[4] AVELLONE, A.& FIORINO, G. & MOSCATO, U. – « Optimization techniques for propositional intuitionistic logic and their implementation », *Theoretical Computer Science* **409** (2008), no. 1, p. 41–58, Elsevier Science Publishers Ltd. Essex, U.K.

[5] BARWISE, J & ETCHEMENDY, J. – *Language, proof and logic*, 1ST éd., Center for the Study of Language and Information, 1999.

[6] BELL, J.L. & DEVIDI, D. & SOLOMON, G. – *Logical Options : An Introduction to Classical and Alternative Logics*, Broadview Press, Peterborough, Ontario, Canada, 2001.

[7] BERNAYS, P. & HILBERT, P. – *Grundlagen der mathematik*, Springer, Berlin, 1939.

[8] BORNAT, R. – *Proof and Disproof in Formal Logic - An Introduction for Programmers*, Oxford University Press, New York, 2005.

[9] BOUVERESSE, J. – « Jules Vuillemin entre l'intuitionnisme et le réalisme », in Rashed, R. & Pellegrin, P. [97], p. 45–79.

[10] — , *Qu'est-ce qu'un système philosophique ? Cours du Collège de France - 2007-2008*, La philosophie de la connaissance au Collège de France, revues.org, `http://www.revues.org`, 2012.

[11] BROUWER, L.E.J. – « De Onbetrouwbaarheid der logische Principes », *Tijdrschrift voor Wijsbegeerte* (1908), p. 152–8, en. tr. in *L.E.J. Brouwer Collected Works*, I, 1975, pp. 107-11 ; trad. fr. in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, J. Largeault (ed.), Vrin, Paris, 1992, pp. 15-23.

[12] — , « Conscience, Philosophie, et Mathématique », in Largeault [62], trad. fr. de l'article « Consciousness, Philosophy, and Mathematics », *Proceedings of the tenth International Congress of Philosophy*, Amsterdam, 1948, 1, Fasc. 2, North-Holland, 1949, pp.1235-49., p. 419–440.

[13] — , « L'effet de l'intuitionnisme sur l'algèbre de la logique classique », in Largeault [62], (trad. de l'article « The Effect of Intuitionisim of Classical Algebra of Logic », *Proceed. of the Royal Irish Academy*, 1955, vol. 57, pp. 113-6), p. 459–463.

[14] BURGESS, J.P. – *Philosophical logic*, Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2009.

[15] CARGILE, J. – « On the Burden of Proof », *Philosophy* **72** (1997), no. 279, p. 59–83.

[16] CHAUVIER, S. – « La philosophie de la classification des systèmes philosophiques : criticisme et décisionisme », in Rashed, R. & Pellegrin, P. [97], p. 187–204.

[17] COOK, R.T. & COGBURN, J – « What Negation Is Not : Intutionism and '0 = 1' », *Analysis* **60** (2000), no. 1, p. 5–12.

[18] COPELAND, B.J. – « Tense Trees : A Tree System for $\mathbf{K_t}$ », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **24** (1983), no. 3, p. 318–322.

[19] CORI, R. & LASCAR, D. – *Logique mathématique*, vol. 1, Calcul propositionnel, algèbres de Boole, calcul de prédicats, Masson, Paris, 1993.

[20] CRESSWELL, M. J. – « Necessity and Contingency », *Studia Logica : An International Journal for Symbolic Logic* **47** (1988), no. 2, p. 145–149.

[21] D'AGOSTINO, M. – « Tableau Methods for Classical Propositional Logic », (d'Agostino, M. & Gabbay D.M. & Hälne, R. & Possega, J., éd.), Kluwer Academic Publishers, 1999, p. 45–123.

[22] DE SWART, H. – « Another Intuitionistic Completeness Proof », *Journal of Symbolic Logic* **41** (1976), p. 644–662.

[23] DUMMETT, D. – « Realism », [26], p. 145–165.

[24] DUMMETT, M. – *Elements of Intuitionism*, 2nd. ed. 2000 éd., Oxford University Press, Oxford, New-York, Auckland, 1977.

[25] — , « Platonism », [26], p. pp. 202–214.

[26] — , *Truth and other enigmas*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1978.

[27] DYCKHOFF, R. – « Contraction-free Sequent Calculi for Intuitionistic Logic », *Journal of Symbolic Logic* **57** (1992), no. 3, p. 795–705.

[28] DYCKHOFF, R. & NEGRI, S. – « Proof analysis in intermediate logics », *Arch. Math. Log.* **51** (2012), no. 1-2, p. 71–92.

[29] ENGEL, P. – « Jules Vuillemin, les systèmes philosophiques et la vérité », in Rashed, R. & Pellegrin, P. [97], p. 29–43.

[30] — , « Russell's Inquiry into Meaning and Truth », in *Contemporary philosophy* (J. Shand, éd.), vol. 4, Acumen, 2005.

[31] EPSTEIN, R.L. – *Propositional Logics - The Semantic Foundations of Logic*, Wadsworth, Thomson Learning, Stamford, USA ; London, UK, 2001.

[32] EWALD, W.B. – « Intuitionistic Tense and Modal Logic », *The Journal of Symbolic Logic* **51** (1986), no. 1, p. 166–179.

[33] FERRARI, M. & FIORENTINI, C. & FIORINO, G. – « fCube : An Efficient Prover for Intuitionistic Propositional Logic », in *Logic for Programming, Artificial Intelligence, and Reasoning - 17th International Conference, LPAR-17, 2010. Proceedings, LNCS, vol. 6397/2010* (Berlin, Heidelberg) (Fermüller, C. & Voronkov, A., éd.), Springer Verlag, 2010, p. 294–301.

[34] FERRARI, M & FIORENTINI, C. & FIORINO, G. – « Contraction-free Linear Depth Sequent Calculi for Intuitionistic Propositional Logic with the Subformula Property and Minimal Depth Counter-Models », *Journal of Automated Reasoning* (2012), to appear.

[35] FITCH, F. B. – *Symbolic Logic - An Introduction*, The Ronald Press Company, New York, 1952.

[36] FITTING, M. C. – *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logics*, Synthese Library, vol. 169, D. Reidel Publishing Company, 1983.

[37] FRÆNKEL, A. & BAR-HILLEL, Y. & LEVY, A. – *Foundations of set theory*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 67, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1958, 1973.

[38] GABBAY, D.M. & WANSING, H. (éd.) – *What Is Negation ?*, Applied Logic Series, vol. 13, Dordrecth, Netherlands, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[39] GARSON, J.W. – *Modal Logic for Philosophers*, Cambridge University Press, New York, 2006.

[40] GENTZEN, G. – « Untersuchungen über das logiesche Schliessen », *Matematishe Zeitschrift* **39** (1935), p. 176–210, 405–431, en. tr. in Szabo M.E., *The collected papers of Gerhard Gentzen*, Studies in Logic and the Foundation of Mathematics, North Holland, Amsterdam, pp. 68-131.

[41] GLIVENKO, V. – « Sur quelques points de la logique de M. Brouwer », in *Bulletins de la classe des sciences*, 5, vol. 15, Academie Royale de Belgique, 1929, p. 183–188.

[42] GÖDEL, K." – « Zum intuitionistischen Aussagenkalkul », *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien (Math.-naturwiss. Klasse)* **69** (1932), p. 65–66.

[43] GUENANCIA, P. – *Descartes - Bien conduire sa raison*, Gallimard, Paris, 1996.

[44] — , *Lire Descartes*, Folio Essais, Gallimard, Paris, 2000.

[45] GUEROULT, M. – *Descartes selon l'ordre des raisons*, vol. 1, Aubier - Montaigne, Paris, 1968.

[46] — , *Descartes selon l'ordre des raisons*, vol. 2, Aubier - Montaigne, Paris, 1968.

[47] HAACK, S. – *Deviant Logic, Fuzzy Logic*, 2nd. ed. 1996 éd., The University of Chicago Press, 1974.

[48] HAND, M. – « Antirealism and Falsity », in Gabbay, D.M. & Wansing, H. [38], p. 185–198.

[49] HEYTING, A. – « Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik », *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften* (1930), p. 42–56.

[50] — , *Mathematische Grundlagenforschung : Intuitionismus, Beweistheorie*, Springer, Berlin, 1934, (Trad. fr. *Les Fondements des Mathématiques - Intuitionnisme - Théorie de la Démonstration*, Paris Gauthier-Villars, Louvain E. Nauwelaerts, 1955).

[51] — , « La conception intuitiutionniste de la logique », *Les Études Philosophiques* (1956), no. 2, p. 266–233.

[52] HINTIKKA, J. – « *Cogito, Ergo Sum* : Inference or Performance ? », in Lambert, K. [59], p. 145–170.

[53] HUDELMAIER, J. – « An O(n log n)-space decision procedure for intuitionistic propositional logic. », *Journal of Logic and Computation* **3** (1993), no. 1, p. 63–75.

[54] HUGUES, G.E AND CRESSWELL, M.J – *A New Introduction to Modal Logic*, Routledge, London, New York, 1996.

[55] HUMBERSTONE, I. L. – « The Logic of Non-contingency », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **36** (1995), no. 2, p. 214–229.

[56] E. KANT – *Kritik der reinen vernunft*, August Messer, Berlin und Leipzig, 1781 et 1787, Trad. fr. Barni, Garnier-Flammarion, Paris, 1976.

[57] KAYE, R. – *The Mathematics of Logic - A guide to completeness theorems and their applications*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007.

[58] KIJANIA-PLACEK, K. & WOLENSKI, J. (éd.) – *The Lvov-Warsaw School and Contemporary Philosophy*, Synthese Library, vol. 273, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[59] LAMBERT, K. (éd.) – *Philosophical Applications of Free Logic*, New-York, Oxford, Oxford University Press, 1991.

[60] — , *Free Logics, Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, ProPhil - Projekte zur Philosophie, vol. 1, Academia Verlag, Sankt Augustin, 1997.

[61] LARCHEY-WENDLING, D. & MÉRY, D. & GALMICHE, D. – « STRIP : Structural Sharing for Efficient Proof-Search », in *IJCAR 2001* (Berlin, Heidelberg) (Goré, R. & Leitsch, A. & Nipkow, éd.), Springer-Verlag, 2001, p. 696–700.

[62] J. LARGEAULT (éd.) – *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Mathesis, Paris, Vrin, 1992.

[63] LEHRER, K. – « Why not Skepticism ? », *The Philosophical Forum* **2** (1971), no. 3, p. 283–298, Reprinted in *Essays on Knowledge and Justification*, George S. Pappas and Marshall Swain (eds), (Cornell, 1978), pp. 346-363.

[64] LEPAGE, F. – *Eléments de logique contemporaine*, Presses de l'Université de Montréal, 2001.

[65] LÖB, M.H. – « Embedding First Order Predicate Logic in Fragments of Intuitionistic Logic », *The Journal of Symbolic Logic* **41** (1976), no. 4, p. 705–718.

[66] MARION, M. – « L'épistémologie de Russell : de la logique mathématique aux vertus épistémiques », in *Philosophies de la connaissance. Contributions à une histoire de la théorie de la connaissance* (Québec, Paris) (R. Nadeau, éd.), Presses de l'Université de Laval - Vrin, 2009, p. 282–314.

[67] MCCARTY, D.C. – « Intuitionism in Mathematics », in Shapiro, S. [104], p. 356–386.

[68] MCKINSEY, J.C.C. – « Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions », *Journal of Symbolic Logic* **4** (1939), p. 411–416.

[69] MCKINSEY, J.C.C & TARSKI, A. – « Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting », *The Journal of Symbolic Logic* **13** (1948), p. 1–15.

[70] MCLAUGHLIN, S. & PFENNING, F. – « Efficient Intuitionistic Theorem Proving with the Polarized Inverse Method », in *CADE* (Schmidt, R.A., éd.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 5663, Springer, 2009, p. 230–244.

[71] MINTS, G. – *A Short Introduction to Intuitionistic Logic*, Kluwer Academic/Plenum Publisher, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, 2000.

[72] MONTGOMERY, H.A. & ROUTLEY, F.R. – « Contingency and Non-Contingency Bases for Normal Modal Logics », *Logique et Analyse* (1966), no. 35-36, p. 318–328.

[73] MOSCATO, U. – « Intuitionismo e teoria della dimostrazione. Su un'estensione dei sistemi di refutazione aderente alla semantica dell'intuitionismo », Thèse, Università di Milano, 1980.

[74] MOTOHASHI, N. – « A faithful interpretation of intuitionistic predicate logic in classical predicate logic », *Commentarii Mathematici Universitatis Sancti Pauli* **21** (1972), p. 11–23.

[75] NEGRI, S. & VON PLATO, J. – *Structural Proof Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[76] — , *Proof Analysis*, Cambridge University Press, 2011.

[77] ONG-VAN-CUNG, K.S. (éd.) – *Descartes et la question du sujet*, Débats philosophiques, Paris, Presses Universitaires de France, 1999.

[78] PARIENTE, J.-C. – « La première personne et sa fonction dans le *Cogito* », in Ong-Van-Cung, K.S. [77], p. 11–48.

[79] POSY, C. – « Intuitionism and Philosophy », in Shapiro, S. [104], p. 318–355.

[80] PRAWITZ, D. – *Natural Deduction - A Proof Theoretical Study*, Almqvist & Wilksell, Uppsala, 1965, 2nd ed. 2006 by Dover Publications, Inc. Mineola, New-York.

[81] — , « Ideas and Results in Proof Theory », in *Proceedings of the II Scandinavian Logic Symposium* (Amsterdam), North Holland, 1971, p. 235–308.

[82] PRIOR, A. – « Diodoran Modalities », *The Philosophical Quarterly* **5** (1955), no. 20, p. 205–213.

[83] — , *Past, Present and Future*, Oxford University Press, London, 1967.

[84] QUINE, W.V.O. – « On What There Is », [87, pp. 1-19], tr. fr. pp. 25-48.

[85] — , *Methods of Logic*, fourth edition, 1982 éd., Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1950, *Méthodes de Logique*, trad. fr. Clavelin, Armand Colin, Paris, 1972.

[86] — , « Two Dogmas of Empiricism », *The Philosophical Review* **60** (1951), p. 20–43, reimprim dans *From a Logical Point of View*, 1953, H.U.P., trad.fr. Vrin 2003.

[87] — , *From a Logical Point of View*, Cambridge University Press, Cambridge Mass., London, England, 1953, 1961, 1980, tr. fr. Laugier (ed.), *Du point de vue logique*, Vrin, Paris, 2003.

[88] — , *Le Mot et la Chose*, Flammarion, Paris, 1960, trad. Gochet de [89].

[89] — , *Word and Object*, The M.I.T. Press, Cambridge Mass., 1960, tr. fr. Gochet, *Le Mot et la Chose*, Flammarion, Paris, 1960.

[90] — , *Set theory and its logic*, The Belnap Press of Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1963, 1969.

[91] — , « Russell's Ontological Development », *The Journal of Philosophy* **63** (1966), no. 21, p. 657–667.

[92] — , *Ontological Relativity and Other Essays*, Columbia University Press, New York, London, 1969, tr. fr. Largeault, *Relativité de l'ontologie et autres essais*, Aubier-Montaigne, Paris, 1977.

[93] — , *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1970, tr. fr. Largeault, Aubier-Montaigne, Paris, 1975.

[94] — , *Pursuit of Truth*, Harvard University Press, New-York, 1990, *La poursuite de la vérité*, trad. fr. Clavelin, Seuil, Paris, 1993.

[95] R. DAVID & K. NOUR & C. RAFFALLI – *Introduction à la logique (théorie de la démonstration, cours et exercices corrigés)*, Dunod, Paris, 2001, 2003.

[96] RAATIKAINEN, P. – « Conceptions of truth in intuitionism », *History and Philosophy of Loic* **25** (2004), p. 131–145.

[97] RASHED, R. & PELLEGRIN, P. (éd.) – *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance - L'œuvre de Jules Vuillemin*, Collection Sciences dans l'Histoire, Paris, Albert Blanchard, 2005.

[98] RUSSELL, B. – *The Principles of Mathematics*, Allen and Unwin, London, 1903, 1st ed. Cambridge University Press ; tr. fr. Roy, *Ecrits de logique philosophique*, PUF, Paris, 1989.

[99] — , *An Inquiry into Meaning and Truth*, Allen & Unwin, 1940, tr. fr. Devaux, *Signification et vérité*, Flammarion, Paris, 1969.

[100] — , *Human Knowledge, Its Scope and Limits*, Allen and Unwin, 1948, *La connaissance humaine. Sa portée et ses limites*, tr. fr. Lavand, Vrin, Paris.

[101] RUSSELL, B. & WHITEHEAD, A. N. – *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge, 1910.

[102] SEGERBERG, K. – *Classical Propositional Operators*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

[103] SELDIN, J.P. – « On the Role of Implication in Formal Logic », *The Journal of Symbolic Logic* **65** (2000), no. 3, p. 1076–1114.

[104] SHAPIRO, S. (éd.) – *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, 2005.

[105] N. . SHORE, R.A. – *Logic for applications*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[106] SHRAMKO, Y. – « What is a Genuine Intuitionistic Notion of Falsity ? », *Logic and Logical Philosophy* **21** (2012), p. 2–23.

[107] SPECKER, E.P. – « The Axiom of Choice in Quine's New Foundations for Mathematical Logic », *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* **39** (1953), p. 972–975.

[108] SPINOZA, B. – *Oeuvres complètes*, Bibliothèque de la Pléiade, Gallimard, Paris, 1954, Traduction, présentation et notes par Callois, Francès et Misrahi.

[109] STEINER, M. – « Cartesian Scepticism and Epistemic Logic », *Analysis* **39** (1979), no. 1, p. 38–41.

[110] SØRENSEN, M.H. & URZYCZYN, P. – « A Syntactic Embedding of Predicate Logic into Second-Order Propositional Logic », *Notre Dame Journal of Formal Logic* **51** (2010), no. 457-473.

[111] TENNANT, N. – « The Law of Excluded Middle is Synthetic A Priori, if Valid », *Philosophical Topics* **24** (1996), p. 205–229.

[112] — , *The Taming of the True*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1997.

[113] — , « Negation, Absurdity and Contrariety », in *Negation* (Dordrecth) (G. . Wansing, H., éd.), Kluwer, 1999, p. 199–222.

[114] — , « Inferentialism, Logicism, Harmony, and a Counterpoint », in *Essays for Crispin Wright : Logic, Language and Mathematics* (M. . Coliva, A., éd.), 2011, forthcoming.

[115] TROELSTRA, A.S. & SCHWICHTENBERG, H. – *Basic Proof Theory*, 2nd. ed. 2000 éd., Cambridge University Press, Cambrige, UK ; New-York, USA, 1996.

[116] TROESTLA, A. & VAN DALEN, D. – *Constructivism in Mathematics*, vol. 2 vol., North-Holland, 1988.

[117] VAN ATTEN, M. – « The Development of Intuitionistic Logic », in *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, Stanford University, http://plato.stanford.edu/entries/intuitionistic-logic-development/, 2008, revision 2009.

[118] VAN ATTEN, M. & BOLDINI, P. & BOURDEAU, M. & HEINZMANN, G. (éd.) – *One Hundred Years of Intuitionism (1907-2007) - The Cerisy Conference*, Basel, Boston, Berlin, Birkhäuser Verlag AG, 2008.

[119] VAN BENTHEM, J. – « The information in intuitionistic logic », *Knowledge, Rationality & Action* (2009), no. 167, p. 251–270.

[120] VELDMAN, W. – « An Intuitionistic Completeness Theorem for Intuitionistic Predicate Logic », *Journal of Symbolic Logic* **41** (1976), p. 159–166.

[121] VIDAL-ROSSET, J. – « De Martial Gueroult à Jules Vuillemin, analyse d'une filiation », in *Le paradigme de la filiation* (Paris) (Gayon, J. & Wunenburger, J.-J., éd.), Converssciences, L'Harmattan, 1995, p. 213–225.

[122] — , « L'intuitionnisme de Gaston Bachelard », in *Actualité et Postérités de Gaston Bachelard* (Paris) (Nouvel, P., éd.), Presses Universitaires de France, 1997, p. 117–138.

[123] — , « Philosophy of Mathematics and Ontological Commitments », *Journal of Philosophy of Science Society* **33** (2000), no. 1, p. 69–81, Tokyo, Japon.

[124] — , « Dieu est-il une classe ultime ? L'antinomie relative de la première preuve par les effets dans les Méditations de Descartes », in *Une philosophie cosmopolite, Hommage à Jean Ferrari* (Dijon) (Perrot, M. & Wunenburger, J.-J., éd.), Presses Universitaires de Dijon, 2001, p. 235–242.

[125] — , « L'essentialisme d'Aristote et l'Argument Souverain de Quine », in *Logique et Métaphysique dans l'Organon d'Aristote* (Louvain-la-Neuve - Paris - Sterling, Virginia) (Bastit, M. & Follon, J., éd.), Aristote - Traduction et Etudes, Editions Peeters, 2001, p. 123–140.

[126] — , *Qu'est-ce qu'un paradoxe?*, Chemins Philosophiques, Collection dirigée par Roger Pouivet, Vrin, Paris, 2004.

[127] — , « Conceptualisme », in *Dictionnaire des Idées*, Encyclopædia Universalis, 2005, p. 180–181.

[128] — , « La distinction kantienne entre jugement analytique et jugement synthétique a-t-elle un sens? », in *Actes du Colloque « Kant et la France - Kant und Frankreich »* (Hildesheim, Zürich, New-York) (Ferrari *et al.*, éd.), Georg Olms-Verlag, 2005, p. 133–147.

[129] — , « Intuitionnisme (logique, philosophie) », in *Dictionnaire des Idées*, Encyclopædia Universalis, 2005, p. 422–424.

[130] — , « Le platonisme de Jules Vuillemin », in *Philosophie des mathématiques et théorie de la connaissance - L'oeuvre de Jules Vuillemin* (Rashed, R. & Pellegrin, P., éd.), Albert Blanchard, 2005, p. 171–186.

[131] — , « Pour introduire à une lecture de Quine », in *Lire Quine - Logique et ontologie* (Monnoyer, J.-M., éd.), Editions de l'Eclat, 2006, p. 29–64.

[132] — , « Does Gödel's Incompleteness Theorems Prove that Truth Transcends Proof? », in *The Age of Alternative Logics. Assessing philosophy of logic and mathematics today* (Berlin), Springer, 2006, p. 51–73.

[133] — , *Les paradoxes de la liberté - Arguments logiques au sujet de la contingence, du libre arbitre et du choix rationnel*, Ellipses, Paris, 2009.

[134] — , « Some Remarks on Relations bewteen Proofs and Games », in *Festschrift for Gerhard Heinzmann* (Bour & Rebuschi & Rollet, éd.), vol. Tribute Series Editor, 2010, co-authored with Galmiche D. and Larchey-Wendling, D., p. 335–353.

[135] — , « Stable Philosophical Systems and Radical Anti-Realism », in *The Realism-Antirealism Debate in the Age of Alternative Logics* (Marion, M. & Rahman, S. & Primiero, G., éd.), vol. 23, Logic, Epistemology & Unity of Science, no. 1, Springer, 2011, p. 313–324.

[136] — , « L'argument de Russell-Tennant », in *Autour des Principia Mathematica, B. Russell et A. N. Whitehead 1910-1913* (Dijon) (A. Guay, éd.), Éditions universitaires de Dijon, 2011, p. 149–177.

[137] — , « Une preuve intuitionniste de l'argument de Diodore-Prior », in *Regards croisés sur l'axiomatique, Travaux de Logique* (Joray, P. & Miéville, D., éd.), vol. 20, Université de Neuchâtel et Université de Rennes I,, 2011, p. 103–122.

[138] — , « Pluralisme philosophique versus logique intuitionniste », *Revue de Synthèse* (2012), soumis.

[139] — , « Preuves intuitionnistes touchant la Première Philosophie », in *La crise des fondements, quelle crise ?* (Montréal), sept. 2012, Actes des conférences à l'Université de Montréal, à paraître.

[140] VON PLATO, J. – « Proof Theory of Full Classical Propositional Logic », ms., 1998.

[141] VUILLEMIN, J. – « Etre et Choix - Eléments de philosophie réaliste », Manuscrit inédit des Archives Vuillemin, Université de Lorraine, Archives Poincaré, UMR 7117 du CNRS, Nancy.

[142] — , *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Paris, 1960, 1987.

[143] — , *Le Dieu d'Anselme et les apparences de la raison*, Aubier Montaigne, Paris, 1971.

[144] — , « Trois philosophes intuitionnistes : Epicure, Descartes, Kant », *Dialectica* **35** (1981), p. 21–41.

[145] — , « Les formes fondamentales de la classification : un essai de classification », in *Recherches sur la philosophie et le langage - Langage et philosophie des sciences* (Grenoble), vol. 4, Cahier du groupe de recherches sur la philosophie et le langage - Département de philosophie - Université de Grenoble, Services des Publications de l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, 1984, p. 9–30.

[146] — , *Nécessité ou Contingence, l'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Minuit, Paris, 1984.

[147] — , *What are philosophical systems ?*, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[148] — , *Necessity or Contingency - The Master Argument*, no. Lecture Notes 56, CSLI Publications, Stanford, 1996.

[149] — , « La question de savoir s'il existe des réalités mathématiques a-t-elle un sens ? », *Philosophia Scientiae* **2** (1997), no. 2, p. 275–312.

[150] — , « Formalisme et réflexion philosophique », *Bulletin de la société française de philosophie* **94e année** (2000), no. 3, Séance du 25 mars 2000.

[151] WALTON, D.N. – « Burden of Proof », *Argumentation* **2** (1988), no. 2, p. 233–254.

[152] WEINGARTNER, P. – « Forgotten and Neglected Solutions of Problems in Philosophical Logic », in Kijania-Placek, K. & Wolenski, J. [58], p. 379–393.

[153] L. WITTGENSTEIN – *Tractatus logico-philosophicus*, Routledge & Kegan Paul Ltd, 1922, trad. fr. Granger, Gallimard, Paris, 1993.

A

Logiques propositionnelles : minimale, intuitionniste et classique

A.1 Règles pour la déduction naturelle

A.1.1 Logique minimale

Les règles de la logique minimale sont les suivantes : [60]

Introduction de la conjonction

$$\begin{array}{c|ll} & \vdots & \\ e & A & \\ \vdots & \Downarrow & \\ k & G & \\ \blacktriangleright & A\wedge\cdots\wedge G & \wedge\,\mathbf{I}, e,\ldots,k \end{array}$$

Où $\Downarrow$ signifie que tout ce qui est *dérivé* entre A et G peut être mentionné dans la série de conjonctions $A\wedge\cdots\wedge G$.

Elimination de la conjonction

$$\begin{array}{c|ll} & \vdots & \\ e & A\wedge\cdots\wedge C\wedge\cdots\wedge G & \\ & \vdots & \\ \blacktriangleright & C & \wedge_n\,\mathbf{E}, e \end{array}$$

Où l'indice n sous le signe $\wedge$ indique que C est à la *nième* place dans la série des conjonctions de A à G.

Introduction de la disjonction

$$\begin{array}{c|ll} & \vdots & \\ e & C & \\ & \vdots & \\ \blacktriangleright & A\vee\cdots\vee C\vee\cdots\vee G & \vee_n\,\mathbf{I}, e \end{array}$$

Où l'indice n sous le signe $\vee$ indique que l'on se fonde sur C qui est à la *nième* place dans la série des disjonctions de A à G et qui a été prouvé à la ligne e. Il suffit que C soit prouvé pour que la disjonction $(A\vee\cdots\vee C\vee\cdots\vee G)$ le soit aussi.

60. On s'inspire ici de Barwise et Etchemendy [5].

Elimination de la disjonction

$$
\begin{array}{r|lr}
e & A \vee \cdots \vee C \vee \cdots \vee G & \\
 & \quad \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ R \end{array} & \\
f & & \\
 & \quad \Downarrow & \\
 & \quad \begin{array}{|l} G \\ \hline \vdots \\ R \end{array} & \\
k & & \\
\blacktriangleright & R & \vee\,\mathbf{E}, e, f, k
\end{array}
$$

Où $\Downarrow$ indique que l'on dérive G de chaque membre de la disjonction $(A \vee \cdots \vee D \vee \cdots \vee G)$. Dès lors on peut supprimer dans le calcul toute la série des dijonctions $(A \vee \cdots \vee C \vee \cdots \vee G)$ pour ne considérer dans la suite de la dérivation que G à la place de $(A \vee \cdots \vee D \vee \cdots \vee G)$.

Introduction du conditionnel

$$
\begin{array}{r|lr}
 & \vdots & \\
e & \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ G \end{array} & \\
h & & \\
\blacktriangleright & A \to G & \to \mathbf{I}, e, h
\end{array}
$$

Elimination du conditionnel

$$
\begin{array}{r|lr}
 & \vdots & \\
e & A \to G & \\
 & \vdots & \\
h & A & \\
\blacktriangleright & G & \to \mathbf{E}, e, h
\end{array}
$$

A peut aussi apparaître *avant* $A \to G$ et le détachement de G reste évidemment valide.

Introduction de la négation

$$
\begin{array}{r|lr}
 & \vdots & \\
e & \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \\
h & & \\
\blacktriangleright & \neg A & \neg\,\mathbf{I}, e, h
\end{array}
$$

Où la constante $\bot$ indique que l'on peut déduire une contradition sous l'hypothèse A, ce qui permet de décharger cette hypothèse et d'affirmer que l'on a une preuve de la fausseté de A autrement dit de la vérité de $\neg A$.

Elimination de la négation

$$
\begin{array}{r|lr}
 & \vdots & \\
e & A & \\
 & \vdots & \\
h & \neg A & \\
\blacktriangleright & \bot & \neg\,\mathbf{E}, e, h
\end{array}
$$

Introduction du biconditionnel

$$
\begin{array}{r|lr}
 & \vdots & \\
 & \begin{array}{|l} A \\ \hline \vdots \\ G \end{array} & \\
e & A \to G & \\
 & \begin{array}{|l} G \\ \hline \vdots \\ A \end{array} & \\
i & G \to A & \\
\blacktriangleright & A \leftrightarrow G & \leftrightarrow \mathbf{I}, e, i
\end{array}
$$

Elimination du biconditionnel

$$
\begin{array}{c|ll}
 & \vdots & \\
e & P \leftrightarrow Q & \\
 & \vdots & \\
\triangleright & P & {}_g\!\leftrightarrow \mathbf{E}, e \\
\vdots & \vdots & \\
\blacktriangleright & Q & \leftrightarrow_d \mathbf{E}, e
\end{array}
$$

Remarque 8. $(\leftrightarrow\ \mathbf{I})$ *et* $(\leftrightarrow\ \mathbf{E})$ *sont juste des cas particuliers de* $(\wedge\ \mathbf{I})$ *et de* $(\wedge\ \mathbf{E})$ *et on pourra donc les écrire* $(\wedge\ \mathbf{I})$ *et de* $(\wedge\ \mathbf{E})$.

A.1.2 Théorèmes fondamentaux de la logique minimale

Théorème 14. $\vdash_m (\neg P \leftrightarrow (P \to \bot))$

Démonstration.

$$
\begin{array}{c|ll}
 & \vdots & \\
e & \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \\
h & & \\
\blacktriangleright & \neg P & \neg\ \mathbf{I}, e, h
\end{array}
$$

est *équivalent* à :

$$
\begin{array}{c|ll}
 & \vdots & \\
e & \quad \begin{array}{|l} P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \\
h & & \\
\blacktriangleright & P \to \bot & \to \mathbf{I}, e, h
\end{array}
$$

Dès lors que l'on interprète le signe $\bot$ comme une constante propositionnelle (la constante du faux) la règle d'introduction du conditionnel fait de $\neg P$ et $P \to \bot$ deux formules logiquement équivalentes. □

Remarque 9. *Le théorème 14 est très utile dans les démonstrations puisqu'il permet de supprimer les négation via le remplacement de toute formule négative* $\neg F$ *par son expression équivalente* $F \to \bot$

Théorème 15. *La règle :*

$$
\begin{array}{r|ll}
e & P & \\
 & \vdots & \\
h & \neg P & \\
\blacktriangleright & \bot & \neg\ \mathbf{E}, e, h
\end{array}
$$

est équivalente à :

$$
\begin{array}{r|ll}
e & P & \\
 & \vdots & \\
h & P \to \bot & \\
\blacktriangleright & \bot & \to\ \mathbf{E}, e, h
\end{array}
$$

Démonstration. *Via* la règle de l'élimination de la négation, la règle de l'élimination du conditionnel et le théorème 14. □

Les règles $\neg$ **I** *et* $\neg$ **E** *peuvent donc respectivement s'écrire* $\to$ **I** *et* $\to$ **E**.

Théorème 16. $\vdash_m \bot \to \neg Q$

Démonstration.

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \quad & \bot & \mathrm{H} \\
2 & & \quad Q & \mathrm{H} \\
3 & & \neg Q & \to\ \mathbf{I}, 1, 2 \\
\blacktriangleright & \bot \to \neg Q & & \to\ \mathbf{I}, 1, 4
\end{array}
$$

□

Théorème 17. $\vdash_m \bot \to \neg\neg Q$

Démonstration.

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \quad & \bot & \mathrm{H} \\
2 & & \quad \neg Q & \mathrm{H} \\
3 & & \neg\neg Q & \to\ \mathbf{I}, 1, 2 \\
\blacktriangleright & \bot \to \neg\neg Q & & \to\ \mathbf{I}, 1, 4
\end{array}
$$

□

Remarque 10.

$$\boxed{\nvdash_m \bot \to Q} \tag{A.1}$$

La logique minimale ne permet pas d'affirmer la règle du *Ex Falso Quodlibet*.

Remarque 11.

$$\boxed{\nvdash_m \bot \to (Q \wedge \neg Q)} \tag{A.2}$$

La logique minimale ne permet pas non plus d'affirmer que la constante du faux $\bot$ est *équivalente* à une contradiction comme $(Q \wedge \neg Q)$. En effet, le théorème suivant est un théorème de logique minimale :

Théorème 18.

$$\vdash_m (P \wedge \neg P) \to \bot$$

Démonstration.

1	$(P \wedge \neg P)$	**H**
2	P	$\wedge_1$**E** 1
3	$\neg P$	$\wedge_2$**E** 1
4	$\bot$	$\to$ **E** 2,3
▶	$(P \wedge \neg P) \to \bot$	

□

Mais en revanche il est impossible de démontrer la converse à partir des seules règles de la logique minimale : pour que la formule $\bot \to (P \wedge \neg P)$ soit valide, il faut faire usage de la règle $\bot$**E** , ce qui n'est possible qu'en logique intuitionniste. [61].

A.1.3 Logique intuitionniste

La logique intuitionniste propositionnelle se définit par l'ensemble de toutes les règles de la logique minimale (A.1.1) auquel on ajoute la règle $\bot$**E** appelée aussi par David *et al.* [95, p. 148] « règle d'absurdité intuitionniste » (et étiquettée par eux $\bot_i$ à la place de $\bot$**E**) [62] :

61. John Slaney a construit un prouveur et publié en ligne le prouveur Minlog pour la logique propositionnelle minimale, par défaut, et intuitionniste si l'on ajoute l'option "-i" lorsque l'on teste la formule. Il est possible et facile de télécharger ce prouveur et de tester ces formules avec un ordinateur sous système d'exploitation Linux.
62. Le prouveur que Michel Lévy a mis en ligne, étiquette cette règle en utilisant F pour $False$, à la place du signe canonique $\bot$ et mentionne par *Efq* pour *Ex falso quodlibet* l'usage de cette règle.

$$\begin{array}{l|ll} & \vdots & \\ & \bot & \\ \blacktriangleright & Q & \bot_i \end{array}$$

A.1.4 Logique classique

La logique propositionnelle classique se définit par l'ensemble de toutes les règles de la logique intuionniste auquel on ajoute la règle $\neg\neg$**E** appelée aussi par David *et al.* [95, p. 148] « règle d'absurdité classique » (et étiquettée par eux $\bot_c$ à la place du $\neg\neg$**E** que j'emploie).[63]

$$\begin{array}{|ll} \vdots & \\ \begin{array}{|l} \neg P \\ \hline \vdots \\ \bot \end{array} & \\ \neg\neg P & \neg\,\mathbf{I} \\ P & \bot_c \end{array}$$

Cette règle qui différencie la logique classique de la logique intutionniste (et donc aussi de la logique minimale), est une règle cruciale, car elle permet de prouver la formule du tiers-exclu, rejetée par les intuitionnistes. Elle exprime le fait que la formule

$$\neg\neg P \rightarrow P \tag{A.3}$$

est valide en logique classique, mais ne l'est pas en logique intutionniste.

On peut résumer le rapport de la logique minimale, de la logique intuitionniste et de la logique classique à la Figure 1.2.2, page 46, où les signes $\vdash_m$, $\vdash_i$, $\vdash_c$ qui précèdent les formules veulent respectivement dire que la formule en question est respectivement dérivable en logique minimale, ou en logique intuitionniste ou en logique classique. Quand la formule est précédé du signe $\nvdash_m$, ou du signe $\nvdash_i$, cela signifie qu'elle n'est *pas* dérivable en logique minimale ou non dérivable en logique intuitionniste[64].

63. Le prouveur de Michel Lévy mentionne cette règle par *Raa* pour *Réduction à l'absurde*.

64. Je dois cette figure à l'aimable envoi par Neil Tennant de son fichier source que j'ai ici adapté pour les besoins du propos.

A.2 Forme générale d'une preuve à la Fitch

Remarque 12 (Sur la forme de toute preuve dans le système symbolique de Fitch)**.** *Tout argument en déduction naturelle à la Fitch se résume au schéma :*

$$
\begin{array}{r|l l}
a & \mid\ \underline{\Gamma} & \mathbf{H} \\
\vdots & \mid\ \vdots & \\
n & \mid\ F & \\
\blacktriangleright & \Gamma \to F & \to \mathbf{I},\ a,n
\end{array}
$$

où Γ est l'ensemble des hypothèses nécessaires à dérivation de F.

FIGURE A.2 – Forme générale de toute preuve dans le symbolisme de Fitch

Le schéma d'un argument *à la Fitch* permet de percevoir intuitivement ce qu'est une preuve ou un argument logique. On a vu qu'un argument est valide si et seulement si on peut à partir de la base des assomptions Γ parvenir à F en justifiant chacune des étapes par l'usage des règles qui permettent de passer de Γ à F. Il n'y a donc pas de différence sémantique entre l'introduction d'un conditionnel à la fin d'une preuve *à la Fitch*, comme par exemple dans le schéma précédent

$$\Gamma \to F$$

et l'usage du turnstile qui indique la dérivabilité :

$$\Gamma \vdash F$$

car la preuve qui permet d'introduire le conditionnel $\Gamma \to F$ atteste du fait que F est dérivable de Γ, ce qu'affirme la formule $\Gamma \vdash F$.

B

Principe de bivalence, principe du tiers exclu et formules dérivées

Cet appendice a pour fonction de préciser un certain nombre de points qui sont parfois source de confusion.

L'expression formelle de la loi dite du « tiers exclu » est toujours donnée dans le langage du calcul propositionnel :

$$P \vee \neg P \tag{B.1}$$

Si l'on remplace P par n'importe quel énoncé, on comprend assez facilement la raison pour laquelle Aristote (*De l'interprétation*, IX, 18*a*34-18*b*-17-25) met sur le même plan la validité du principe de contradiction et celle du tiers exclu. On peut lire sous la plume d'Aristote traduit par Vuillemin [146, pp. 150] :

> En effet si toute affirmation est vraie ou fausse, il est nécessaire aussi pour toute chose d'exister ou de ne pas exister. Car si quelqu'un dit que quelque chose sera, tandis que quelqu'un d'autre dit que cette même chose ne sera pas, il est évident que l'un des deux seulement dit la vérité, puisque toute affirmation est vraie ou fausse. En effet, s'appliquant à ce genre de choses [les choses singulières et futures], il n'arrivera pas que les deux disent simultanément la vérité.

On ne reprendra pas ici l'analyse que Vuillemin [146, pp. 149-187] fait de ce texte difficile d'Aristote. Mon propos consiste ici uniquement d'une part à distinguer le plus précisément possible *principe de bivalence* et *théorème du tiers exclu* et, d'autre part, à montrer qu'il existe dans le calcul des prédicats du premier ordre des expressions différentes du tiers exclu, qui n'ont pas toutes le même signification mais qui sont toutes des formules prouvables en logique classique et non prouvables en logique intuitionniste.

Le *principe de bivalence* dans le texte d'Aristote est énoncé *via* l'expression « toute affirmation est vraie ou fausse », en sous-entendant que cette propriété de vérité ou de fausseté d'une affirmation est indépendante des moyens de preuve et donc du temps de son énonciation. Si j'écris *maintenant* que Gerhard *lira* avec plaisir ce que je suis en train d'écrire, on peut considérer que cet énoncé a la propriété d'être vrai ou faux *maintenant*, c'est-à-dire indépendamment du moment futur qui vérifiera ou falsifiera l'énoncé. C'est parce que l'on admet le principe de bivalence que l'on peut admettre *en logique classique* la légitimité de la méthode des tables de vérité, et c'est précisément parce que l'on refuse d'admettre ce principe en logique intuitionniste que la méthode des tables de vérité apparaît dès lors comme une méthode inadéquate pour cette logique.

Le *principe du tiers exclu*, dans le texte d'Aristote cité plus haut, est formulé dans ces termes : « il est nécessaire pour toute chose d'exister ou de ne pas exister ». On peut remarquer que Vuillemin s'éloigne volontairement de la traduction que Tricot [3, p.96] donne : « Si, en effet, toute affirmation ou négation est vraie ou fausse, nécessairement aussi toute chose est ou n'est pas. »et qu'il tombe au contraire d'accord avec la traduction de Barnes [65] : « For if every affirmation or negation is true or false it is necessary for everything either to be the case or not to be the case. » Si on laisse de côté la délicate question du traitement de la modalité du nécessaire, il est clair qu'Aristote voit parfaitement que l'affirmation du principe de bivalence *implique* une *expression dérivée* du tiers exclu qu'il exprime ici dans le langage du calcul des prédicats du premier ordre :

$$\text{Principe de bivalence} \rightarrow \forall x(Ex \vee \neg Ex) \tag{B.2}$$

Mais c'est dans le texte de la *Métaphysique*, Γ, 7, qu'Aristote affirme de la manière la plus claire possible le lien entre la preuve d'une expression dérivée tiers exclu et l'affirmation du principe de contradiction :

> Mais il n'est pas possible non plus qu'il y ait aucun intermédiaire entre des énoncés contradictoires : il faut nécessairement ou affirmer, ou nier un seul prédicat, quel qu'il soit, d'un seul sujet. C'est est évident, d'abord, pour qui définit la nature du vrai et du faux. Dire de l'Être qu'il n'est pas, ou du Non-Être qu'il est, c'est le faux ; dire de l'Être qu'il est, et du Non-Être qu'il n'est pas, c'est le vrai ; de sorte que celui qui dit d'un être qu'il est ou qu'il n'est pas, dira ce qui est vrai ou ce qui est faux ; mais [dire qu'il y a un intermédiaire entre des contradictoires], ce n'est ni dire de l'Être, ni du Non-Être, qu'il est ou qu'il n'est pas [66].

65. http://users.ox.ac.uk/~ball0888/salamis/interpretatione.html

66. Note de Tricot : C'est donc ne rien dire du tout. [...] entre crochets une phrase explicative qui ne se trouve pas dans le texte.

Comme le précise l'article « Logical Laws » dans *Oxford Companion to Philosophy*[67], l'expression qu'Aristote se formalise par

$$\Box\forall x(Px \lor \neg Px) \tag{B.3}$$

l'opérateur de nécessité $\Box$ indiquant que la négation de cette loi logique implique une impossibilité, c'est-à-dire une contradiction. Indépendamment de la réflexion métaphysique d'Aristote, c'est bien ce que montre la preuve classique de la formule $\forall x(Px \lor \neg Px)$ *via* l'arbre de réfutation de la négation de cette formule :

Théorème 19.

$$\vdash_c \forall x(Px \lor \neg Px) \tag{B.4}$$

Démonstration.

$$\begin{array}{c} \neg\forall x(Px \lor \neg Px) ✔ \\ \exists x\neg(Px \lor \neg Px) ✔ \\ \neg Pa \\ \neg\neg Pa \\ \times \end{array}$$

□

On peut aussi remarquer que l'expression

$$\forall x(Px \lor \neg Px) \tag{B.5}$$

est la formule dérivée du tiers exclu qui est la plus ressemblante à celle du *principe de bivalence*, puisqu'il suffit de considérer que la variable x prend ses valeurs dans le domaine des énoncés et que le prédicat P symbolise le prédicat de vérité pour un énoncé x pour que cette formule dise « tout énoncé x est vrai ou ne l'est pas » ; et puisque la négation du vrai est le faux, (B.5) dit « tout énoncé est vrai ou faux », ce qui semble bien être l'expression du principe de bivalence et explique que l'on confonde parfois le tiers exclu avec le principe de bivalence.

Enfin la comparaison de la dérivation du schéma $P \lor \neg P$ en *en logique classique via* la règle de la réduction à l'absurde classique et de la dérivation de (B.5) va permettre de comprendre pourquoi il est justifié de considérer (B.5) comme une formule dérivée du tiers exclu plutôt que le tiers exclu lui-même :

67. http ://www.answers.com/topic/logical-laws

1	$\vert\ \neg(P \vee \neg P)$	**H**
2	$\vert\ \vert\ P$	**H**
3	$\vert\ \vert\ P \vee \neg P$	$\vee$**I** 2
4	$\vert\ \vert\ \bot$	$\neg$**E** 1, 3
5	$\vert\ \neg P$	$\neg$**I**, 2, 4
6	$\vert\ \neg P \vee P$	$\vee$**I** 5
7	$\vert\ \bot$	$\neg$**E** 1, 6
8	$\neg\neg(P \vee \neg P)$	$\neg$**I** 1,7
9	$P \vee \neg P$	$\bot_c$ 8

Remarquons maintenant que la dérivation de (B.5) possède une structure qui *s'appuie* sur la démonstration précédente, ce qui justifie que l'on considère qu'elle en dérive [68] :

1	$\vert\ \exists x \neg(Px \vee \neg Px)$	**H**
2	$\vert\ {}^{a}\vert\ \neg(Pa \vee \neg Pa)$	**H**
3	$\vert\ \vert\ \vert\ Pa$	**H**
4	$\vert\ \vert\ \vert\ Pa \vee \neg Pa$	$\vee_2$**I** 3
5	$\vert\ \vert\ \vert\ \bot$	$\neg$**E** 1,3
6	$\vert\ \vert\ \neg Pa$	$\neg$**I** 3 – 5
7	$\vert\ \vert\ Pa \vee \neg Pa$	$\vee_1$**I** 6
8	$\vert\ \vert\ \bot$	$\neg$**E** 2,7
9	$\vert\ \bot$	$\exists$**E** 1, 2-8
10	$\neg\exists x \neg(Px \vee \neg Px)$	$\neg$**I**, 1-10
11	$\forall x(Px \vee \neg Px)$	$\bot_c$ 11

68. Pour la vérification de ces preuves, on a fait usage du vérificateur de preuves en déduction naturelle (au style Fitch), FLiP écrit par Jonathan Jacky (`http://staff.washington.edu/jon/flip/www/index.html`)

C

Une méthode de décision pour la logique temporelle minimale

On résume ici la méthode donnée par Copeland [18].

On adopte dans un premier temps toutes les règles bien connues de la méthode des arbres de réfutation pour la logique classique (celles exposées par Lepage [64] et Bell *et alii* [6].

Supposons qu'il s'agisse de prouver une formule temporelle F dans $\mathbf{K_t}$, alors on appose sur toutes les sous-formules de F le *même* indice temporel t_n.

On supprime ensuite dans le développement de l'arbre tous les opérateurs temporels G, F, H, P en augmentant ou diminuant d'une unité l'indice temporel, selon que la formule est affirmée au sujet du futur ou au sujet du passé. On coche les formules temporelles $P\alpha$, ou $F\alpha$ pour indiquer la désactivation de l'opérateur temporel par le passage à une formule avec un nouvel indice. En revanche on ne coche *jamais* les formules de la forme $G\alpha$, $\neg F \neg \alpha$, $H\alpha$ ou $\neg P \neg \alpha$ pour indiquer que ces formules peuvent toujours recevoir un nouvel indice temporel (vers le futur ou bien vers le passé, en fonction de ce qu'elles indiquent), ce sont donc les opérateurs temporels que l'on supprime en dernier dans le développement de l'arbre. On lit le test quand l'arbre est totalement développé, c'est-à-dire lorsque tous les connecteurs binaires et tous les opérateurs temporels sont supprimés.

L'exemple que donne Copeland et légèrement modifié, permet de comprendre facilement la méthode :

Exemple 7.

Théorème 20.

$$\vdash_{k_t} (p \to \neg p) \to \neg F \neg P \neg p$$

Démonstration. –

$$\begin{array}{c}
1.\ \neg((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg F \neg P \neg p)\ \ / t_0\ \ \checkmark \\
2.\ \ (p \rightarrow \neg p)\ \ / t_0\ \ _{(1)}\ \checkmark \\
3.\ \ \neg\neg F \neg P \neg p\ \ / t_0\ \ _{(1)} \checkmark \\
4.\ \ F \neg P \neg p\ \ / t_0\ \ _{(3)}\ \checkmark \\
5.\ \ \neg P \neg p\ \ / t_1\ \ _{(4)} \\
6.\ \ Hp\ \ / t_1\ \ _{(5)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
7.\ \ \neg p\ \ / t_0\ _{(2)} & 9.\ \ \neg p\ / t_0\ _{(2)} \\
8.\ \ p\ \ / t_0\ _{(6)} & 10.\ \ p\ \ / t_0\ _{(6)} \\
\times & \times
\end{array}$$

□

D

Curriculum Vitæ

D.1 État civil

– Né le 20/10/61 à Chambéry (Savoie), nationalité française.

D.2 Formation

– 1996 : Doctorat de Lettres et Sciences Humaines - Spécialité Philosophie et épistémologie, Université de Provence (Aix-Marseille I), Aix-en-Provence - France, Mention : Très Honorable avec les félicitations, à l'unanimité des membres du jury.
– 1985 Agrégation de philosophie (concours externe), 34e ex.
– 1984 Licence de Logique (Université de Panthéon-Sorbonne, Paris 1)

D.3 Thèse de Doctorat

– Titre : *Philosophie des mathématiques et systèmes philosophiques - Essai sur les classifications de Willard van Orman Quine et de Jules Vuillemin*
– *Directeur de thèse et membres du jury* : E. Schwartz (Directrice - Université de Provence, actuellement Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand), G. Heinzmann (Université de Nancy 2), A. Michel (Université de Provence), J.-C. Pariente (Université Blaise Pascal), J. Vuillemin (Collège de France)
– *Résumé* : Cette recherche commence avec un commentaire de l'article de Quine intitulé « On what there is ». Celui-ci s'achève sur une classification des philosophie des mathématiques. La pertinence de cette classification au regard des engagements ontologiques des systèmes formels contemporains (théories des ensembles, théories des types) est analysée dans la première partie. La seconde partie montre que les deux

classes de systèmes de philosophie qui définissent la classe des « systèmes de l'examen », intuitionnisme et scepticisme, sont nécessairement passées sous silence par Quine, alors qu'elle sont aisément définies par la classification de Vuillemin (*Nécessité ou Contingence*, Minuit, Paris, 1984). Il s'agit de montrer que les définitions que Vuillemin donne des trois systèmes qui définissent la classe des « systèmes dogmatiques »(réalisme des Idées, conceptualisme, nominalisme) sont compatibles avec les trois systèmes définis par Quine. Dès lors la classification de Quine apparaît comme une partie de celle de Vuillemin.

D.4 Emplois

- *2005 - à ce jour* : Maître de conférences, Université de Lorraine, Nancy. (Enseignements : Logique, philosophie des sciences et histoire de la philosophie)
- *1997-2005* : Maître de conférences, Université de Bourgogne , Dijon (Enseignements : Logique, philosophie des sciences, histoire de la philosophie)
- *1985-1997* : Professeur agrégé de philosophie, Lycée Prieur de la Côte d'Or, Auxonne, (Enseignement : classes de terminales)

D.5 Direction de mémoires et thèses (récentes ou en cours)

- *à ce jour* : En co-direction avec Gerhard Heinzmann, Université de Lorraine (Archives Poincaré - UMR7117 CNRS), Nancy, Thèse de Doctorat de David Thomasette sur « La philosophie à l'âge de la science. Édition commentée d'un livre inachevé de Jules Vuillemin
- *à ce jour* : Direction de mémoire de Master du « parcours enseignement », Université de Lorraine (Archives Poincaré - UMR7117 CNRS), Nancy, Florian Carrasco - sujet du mémoire : « Le concept de volonté chez Spinoza »
- *Membre de jury de thèse de Doctorat* : Université de Nantes, date de soutenance, 12 nov. 2011, Thèse de Doctorat de Ghislain Le Gousse , *Liberté, responsabilité morale et déterminisme causal - Enquête sur le pouvoir d'agir autrement* sous la direction de Cyrille Michon, Professeur à l'Université de Nantes.
- *2001* : Membre du jury d'une thèse de l'UCL - Faculté des sciences philosophiques (ISP), Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Chien-Shuo Chiu (1968, Taïwan), 2 juillet 2001, G.D. « La logique déontique : l'action, la proposition et la norme » G. Gérard, président Th. Lucas, promoteur ; J. Vidal-Rosset (Université de Bourgogne), lecteur ; M. Crabbé, lecteur J. De Greef, secrétaire

D.6 Jurys de concours nationaux

- *2010 -à ce jour* : Vice-Président du concours du CAPES de philosophie, (Certificat d'aptitude au professorat du secondaire), Ministère de l'Education nationale française, sous la Présidence de Souâd Ayada, Inspectrice Générale de l'Education Nationale.
- *2001-2003* : Membre du jury de l'agrégation de philosophie, concours externe et concours interne, Ministère de l'Education Nationale française, sous la Présidence de Claudine Tiercelin, actuellement Professeur au Collège de France.

D.7 Responsabilités et activités éditoriales

- Membre du comité de rédaction et rapporteur régulier de *Philosophia Scientiae*,Revue des Archives Poincaré - UMR 7117 CNRS, Université de Lorraine, NANCY
- *2011* : Rapporteur pour *Logica Universalis*, Springer
- *2011* : Rapporteur pour *Logique et Analyse*, publications du Centre National de Recherches de Logique - Belgique

D.8 Conférences récentes

- *4-5 Mai 2012* : Conférencier et organisateur de la journée d'études sur « Classical Logic vs. Intuitionistic Logic », Archives Poincaré, Université de Lorraine, Conférenciers : Jan von Plato, Göran Sundholm, Jean-Baptiste Joinet, Didier Galmiche, Dominique Larchey-Wendling.
- *6 mai 2012* : « How and Why Intuitionistic Logic Defuses Diodorus' Master Argument », Congrès SOPHA 2012 Paris
- *7-9 oct. 2011* : « Les fondements des mathématiques selon Heyting » Université de Montréal - CANADA, **La crise des fondements. Quelle crise ?** ; colloque organisé par François Lepage et Karine Fradet
- « Which Core Logic ? », communication soumise et acceptée pour le 14ème Congrès international de logique, de méthodologie et de philosophie des sciences, Nancy, France, Colloque organisé par Gerhard Heinzmann et l'équipe des Archives Poincaré.