HAL open science

ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DES EQUATIONS, INEQUATIONS ET FONCTIONS AU SECONDAIRE : ENTRE SYNTAXE ET SEMANTIQUE

Rahim Kouki

To cite this version:

Rahim Kouki. ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DES EQUATIONS, INEQUATIONS ET FONCTIONS AU SECONDAIRE : ENTRE SYNTAXE ET SEMANTIQUE. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2008. Français. NNT : . tel-00346287v2

HAL Id: tel-00346287

https://theses.hal.science/tel-00346287v2

Submitted on 3 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 208-2008 **Année 2008**
Université Claude Bernard Lyon 1 **Université de Tunis**

Thèse en co-tutelle

Pour l'obtention du

Diplôme de Doctorat
(arrêté du 07 août 2006)

De l'Université Claude Bernard Lyon 1
De l'Université de Tunis

Présentée

Devant l'Université Claude Bernard Lyon 1

Par

Rahim KOUKI

Spécialité : Didactique des mathématiques

Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique

Soutenue publiquement le 29 novembre 2008

Sous l'avis de :

Faouzi CHAABANE	Université 7 Novembre Carthage-(Tunisie)	Rapporteur
Fernando HITT	Université du Québec à Montréal-(Canada)	Rapporteur

Devant le jury composé de :

Viviane DURAND-GUERRIER	Université Claude Bernard Lyon 1-(France)	Directeur
Mélika OUELBANI	Université de Tunis-(Tunisie)	Directeur
Faouzi CHAABANE	Université 7 Novembre Carthage-(Tunisie)	Rapporteur
Amel BEN ABDA	Université de Tunis El Manar-(Tunisie)	Examinateur
Hamid CHAACHOUA	Université Joseph Fourier Grenoble 1-(France)	Examinateur
Frank Olaf WAGNER	Université Claude Bernard Lyon 1-(France)	Examinateur

Dédicace

A mon père Hassen

A ma mère Janette

A ma femme Basma

A ma fille Rana et bientôt Malek

A mes frères Raouf, Rached, Riadh et Rajaa

A mes belles sœurs Souraya, Paivi, Saousen et mon beau frère Sadok

A, Iyed, Iheb, Saif, Amira, Rami, Sarra, Karim, Rania, Roua

Je dédie ce travail

Remerciements

Je remercie infiniment mes deux directeurs de thèse Madame *Viviane Durand-Guerrier*, maître de conférences à l'IUFM de Lyon, habilité à diriger des recherches et Madame *Melika Ouelbani*, Professeur des universités à la Faculté des Sciences Humaines et Sociales de l'Université de Tunis, qui ont accepté de co-encadrer ce travail et qui n'ont pas cessé de m'encourager durant toutes ces années. Je suis très impressionné par leur grande compétence, leur capacité de travail et la finesse de leurs jugements. Je les remercie profondément.

Toute ma gratitude va également à Monsieur *Faouzi Chaabane* Professeur des universités à l'Université 7 Novembre Carthage & Monsieur *Fenando-Hitt* Professeur des universités à l'Université du Québec à Montréal qui ont accepté de se rendre disponible pour être rapporteurs de cette thèse.

Je suis très reconnaissant à *Amel Ben Abda*, Professeur des universités à l'Université de Tunis El Manar, pour la confiance qu'elle a donné à ce travail, et pour avoir accepté d'être membre de mon jury de soutenance.

Il m'est agréable de remercier Monsieur *Hamid Chaachouaa*, Maître de conférences, à l'IUFM de Grenoble, qui a accepté également d'être membre du jury.

Mes remerciements les plus profonds à Monsieur *Frank Wagner*, Professeur des universités à l'Université Claude Bernard Lyon 1, pour l'honneur qu'il m'a fait de présider le jury de cette thèse.

Je remercie les directeurs du Laboratoire d'Etudes du Phénomène du Scientifique (Equipe LIRDHIST) de l'Université Claude Bernard Lyon 1 Monsieur *Philippe Jaussaud* ainsi que *Monsieur Bernard Tribollet* qui nous a quitté.

Je remercie également Monsieur *Kamel Gahha* le directeur de l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue de l'Université de Tunis.

Toute ma gratitude va à mes deux professeurs, Monsieur *Mahdi Abdeljaouad* et Monsieur *Claude Tisseron* qui nous a quitté, avec lesquels j'ai fais mes premiers pas dans le champ de la didactique des mathématiques.

Je remercie toute l'équipe de l'IREM de Lyon d'avoir mis à ma disposition toute la bibliothèque et le matériel pour mener à bien ce travail, je remercie particulièrement *Michel*, *Régis*, *Christiane* ainsi que *Jocelyne*.

Je remercie également mes deux directeurs, à l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, Monsieur *Mohamed Abab* & Monsieur *Lakhdar Al Kairaouani* qui m'ont encouragé moralement et matériellement pour me permettre de mener à bien ce travail.

Mes remerciements vont aussi à *Hanène Abrougui, Gilbert Arsac, Imed Ben Kilani, Véronique Battie, Isabelle Bloch, Guy Brousseau, Hugues Chabot, Faiza Chellougui, Pierre Crepel, Massimo Galuzzi, Najoua Griss, Christian Houzel* et *Regis Morélon,* avec lesquels j'ai eus des conversations très fructueuses sur ce travail.

J'adresse une sincère reconnaissance à tous les jeunes chercheurs qui m'ont soutenu. Plus particulièrement, je remercie *Sami Abdelli, Thomas Barrier, Sandie Bernard, Caroline Caspard, Mounir Dhieb, Thiery Dias, Yacine Hachaîchi, Guillaume Jouve, Amir Louizi, Badreddine Rjaîbi* et *Ali Selmi*.

Je remercie mes collègues, *Brahim*, *Fatma*, *Ilhem*, … à l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation continue qui ont su m'aider lorsque cela était nécessaire.

Mes remerciements à Monsieur *Philippe Mogental* et tous les employés de l'Institut Français de Coopération de Tunis.

Un grand merci aux enseignants et aux élèves qui ont contribué à toutes les expérimentations que nous mené.

Je remercie enfin mon fidèle ami *Zied Beldi* ainsi que ceux qui m'ont soutenu de loin ou de près tout au long de ce travail.

Table des matières

Introduction et méthodologie générale de la recherche **5**
Analyses épistémologiques et didactiques **11**
Chapitre I **13**
Etude logique et mathématique des objets équation, inéquation et fonction **13**
I. Insuffisance du calcul propositionnel pour l'analyse des discours mathématiques 13
II. Éléments pour une théorie de la quantification 15
II. 1. Fonction, argument et variable 15
II. 2. Les phrases ouvertes et la notion de satisfaction 20
II. 3. Théorie de calcul fonctionnel 23
III. Syntaxe et sémantique dans la logique des prédicats 24
III. 1. La syntaxe du calcul des prédicats 24
III. 2. La sémantique logique 25
IV. La sémantique et la syntaxe en mathématiques 27
Conclusion du chapitre 28
Chapitre II **31**
La place de l'articulation entre syntaxe et sémantique **31**
dans les travaux didactiques **31**
Introduction 31
I. Gérard Vergnaud : Une rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre 31
I. 1. Analyse 31
I. 2. Commentaire 33
II. Yves Chevallard : les rapports dialectiques entre arithmétique et calcul algébrique 33
II. 1. Analyse 33
II. 2. Commentaire 34
III. Brigitte Grugeon : Conception et exploitation d'une structure multidimensionnelle en algèbre élémentaire 35
III. 1. Analyse 35
III. 2. Commentaire 37
IV. Catherine Sackur et Maryse Maurel : Les inéquations en classe de seconde 39
IV. 1. Analyse 39
IV. 2. Commentaire 40
V. Raymond Duval 40
V. 1. Analyse 40
V. 2. Commentaire 41
Conclusion du chapitre 41
Chapitre III **43**
Etude historique et épistémologiques des objets **43**
équation, inéquation et fonction **43**
Préliminaire : « L'épistémologie comme outil pour les analyses didactiques » 43
I. La résolution des équations algébriques 45
I. 1. L'algèbre géométrique chez les grecs 45
I. 2. La résolution des équations chez les arabes 53
II. De la géométrie à l'émergence des courbes 60
II. 1. L'impact du passage de la rhétorique à l'écriture symbolique sur l'avancement des mathématiques 60
II. 2. Descartes et le passage de l'arithmétique et de la géométrie à l'algèbre 62
II. 3. Des courbes algébriques à l'émergence des fonctions 67

III. Bilan des études historiques et logiques 69
Conclusion du chapitre 70
Chapitre IV 71
Etude des programmes et des manuels Tunisiens 71
Introduction 71
I. Praxéologies ou organisations mathématiques 72
II. Eléments de transposition didactique 74
II. 1. Etude des directives du programme 74
II. 2. Etude des manuels tunisiens 86
Conclusion du chapitre 133
Investigations didactiques 135
Chapitre I 137
Etude de l'articulation syntaxe sémantique 137
auprès des élèves et des étudiants 137
Introduction 137
I. Analyse *a priori* du questionnaire 138
Préliminaire 138
I. 1. Introduction 139
I. 2. Les objets mathématiques 141
I. 3. Choix des exercices 142
I. 4. Catégorisation des méthodes de résolutions mathématiques et procédures des élèves 147
II. Analyse *a posteriori* du questionnaire 171
II. 1. La méthodologie suivie dans la classification des différentes réponses des élèves et des étudiants 174
II. 2. Analyse des différentes procédures des élèves et des étudiants 176
II. 3. Etude du profil des classes en terme de sémantique syntaxe 259
Conclusion de l'expérimentation 265
Chapitre II 267
De la parabole à la fonction trinôme au lycée 267
Introduction 267
I. Conception et mise en œuvre de la situation d'enseignement 269
Introduction 269
I. 1. Etude mathématique de l'équation $\boldsymbol{Ax}^2 + 2\boldsymbol{Bxy} + \boldsymbol{Cy}^2 + 2\boldsymbol{Dx} + 2\boldsymbol{Ey} + \boldsymbol{F} = 0$ 269
I. 2 Choix didactiques et objectifs 272
II. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement 276
Introduction 276
II. 1. Méthodologie suivie dans la classification des différentes stratégies du groupe des élèves 277
II. 2. Planification de la séance 284
II. 3. Déroulement effectif 285
III. Analyse *a postériori* de la séquence d'enseignement 286
III. 1. Question 1) : Traçage de la droite $D : y = -1$ 287
III. 2. Question 2) : Placer le point F de coordonnées $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$. 288
III. 3. Question 3) a) : La détermination de la distance *d* séparant le point *M* de la droite *D* 289
III. 4. Question 3) b) : Calcul de la distance *MF* 298

III. 5. Question 4) a) : Soit $\Gamma = \{M(x, y) \in P; MF^2 = d^2\}$. Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$. 299
III. 6. Question 4) b) : Remplir le tableau suivant sachant que x et y représentent les coordonnées du point M de Γ. 299
III. 7. Question 4) c) Placer ces points dans le repère orthonormé $\Re = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ 301
III. 8. Question 5) : Déduire et décrire ce que représente Γ 301
Conclusion 303
IV. Le point de vue des praticiens sur la séquence d'enseignement 304
Introduction 304
IV. 1. Projection de la séquence d'enseignement 305
IV. 2. Analyses des différentes réponses du groupe d'enseignants 306
IV. 3. Entretiens semi-directifs avec les six enseignants 309
Conclusion du chapitre 336
Conclusion générale et perspectives 341
BIBLIOGRAPHIE 349

Introduction et méthodologie générale de la recherche

Dans le travail de recherche que nous avons mené dans le cadre de notre mémoire de DEA de didactique des mathématiques soutenu à l'Université de Tunis en juin 2004[1], nous avons mis en évidence le fait que la logique des prédicats issue des travaux de logiciens comme Frege, Russell ou Tarski, fournit un cadre de référence permettant d'enrichir les analyses didactiques des notions d'équations et inéquations dans l'enseignement secondaire. Tout d'abord, nous avons montré que la théorie sémantique de la vérité introduite par Frege (1971) et Russell (1961, 1989) et développée par Tarski (1960, 1972 & 1974) et Quine (1972), et en particulier les notions de *phrase ouverte ; satisfaction d'une phrase ouverte par un élément ; quantification*, permettaient de mieux expliciter les notions *d'égalité et d'inégalité* d'une part, *le statut des lettres* d'autre part. Dans un deuxième temps, la partie analytique, centrée sur l'articulation sémantique / syntaxe, nous a permis de constater que, bien que le point de vue sémantique soit le premier point de vue présenté dans la définition des équations et inéquations à l'école de base[2], il occupe dans les manuels une place assez restreinte par rapport à celle des techniques syntaxiques de résolution. On retrouve pour partie cette répartition dans les réponses des élèves à notre questionnaire, bien que la mobilisation des aspects sémantiques se soit révélée plus importante que nous ne l'avions prévu dans notre analyse *a priori*.

Dans ce travail de thèse nous avons choisi de poursuivre l'étude de l'articulation sémantique / syntaxe dans l'enseignement secondaire tunisien, en ce qui concerne les concepts d'équations, inéquations et fonctions.

Les travaux didactiques de Durand-Guerrier (1996, 2000, 2003 et 2005), Durand-Guerrier & al (2000, 2003), Dubinski (2000), Selden & Selden (1995), Chellougui (2004) et Ben Kilani (2005) ont montré la pertinence du point de vue logique, et plus précisément d'une théorie de la quantification, pour l'analyse des raisonnements mathématiques dans une

[1] Suite à ce mémoire, nous avons publié en 2006, un article dans la revue française *petit X* intitulé: Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique.
[2] L'équivalent des classes de sixième, cinquième et de la quatrième de l'enseignement secondaire français.

perspective didactique. Ceci nous a conduit à adopter ce point de vue, et plus précisément à nous référer, suivant sur ce point Durand-Guerrier (2005), à la conception sémantique de la vérité, issue de la théorie élémentaire des modèles de Tarski. Cette théorie fait en particulier usage des notions de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, de désignation et d'interprétation d'un énoncé dans un domaine d'interprétation.

Notre travail se fonde sur l'hypothèse que l'analyse logique des concepts mathématiques d'équation, d'inéquation et de fonction, lesquels se situent dans le champ de l'algèbre élémentaire[3], peut enrichir de manière significative les études didactiques, nombreuses, conduites depuis un peu plus de trente ans sur ce thème. Nous nous proposons en outre d'analyser les relations qu'entretiennent les fonctions algébriques avec les équations et les inéquations au niveau de l'algèbre élémentaire.

Du point de vue de la sémantique logique, les aspects syntaxiques et sémantiques contribuent conjointement à la signification d'une expression algébrique, d'une équation ou d'une inéquation.

La syntaxe fournit des règles de transformation des équations qui préservent le plus souvent la satisfaction. Ces transformations s'identifient avec des procédures de manipulation des structures additives et multiplicatives du corps des nombres réels. Cependant, au moment de conclure sur les solutions d'une équation, il faut bien revenir, en toute rigueur, aux objets et à l'univers du discours. En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique qui peut être effectué par assignation de valeurs à la variable (ou aux variables). Plus précisément, l'ensemble des solutions de l'équation ou de l'inéquation finale peut contenir des éléments qui ne satisfont pas les équations ou les inéquations de départ. Ces problèmes ont été soulevés par Largeault à propos de l'équivalence extensionnelle selon laquelle deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites par les mêmes éléments (Frege, 1971).

Du point de vue logique, une lettre de variable est un marque-place, susceptible d'une assignation de valeur. Ce point de vue est unificateur (Durand-Guerrier & al. 2000)) mais rentre en conflit avec les pratiques mathématiques ordinaires ; il permet par contre de traiter de manière rigoureuse la question de l'articulation entre sémantique et syntaxe. Cette articulation se trouve aussi chez Wittgenstein dans le Tractatus (Durand-Guerrier).

[3] Nous n'abordons pas dans ce travail les aspects de la notion de fonction relevant de l'Analyse.

Parmi les questions fondamentales de notre travail de recherche se trouve celle de la possibilité de repérer, dans le développement des concepts d'équation, d'inéquation et de fonction~~s~~, des phénomènes liés à la dialectique sémantique / syntaxe.

Pour conduire notre étude, nous commençons par une étude logique et mathématique des objets équations, inéquations et fonctions, en référence au calcul des prédicats apparu au début du XXème siècle ; il est l'aboutissement d'un long processus dont nous retraçons quelques étapes significatives au chapitre I. Les éclairages que la sémantique logique peut apporter aux notions d'équation, d'inéquation et de fonction sont des reconstructions a posteriori qui ne suffisent évidemment pas à elles seules à nourrir l'analyse épistémologique nécessaire à notre étude didactique. Nous avons donc complété cette approche par une étude historique circonscrite de ces notions et de leurs relations mutuelles dans la perspective d'avoir une idée plus claire et plus précise sur leur formation. Afin de croiser cette étude avec notre perspective logique, nous avons également essayé d'intégrer la dialectique sémantique / syntaxe dans notre analyse. Ceci fait l'objet de notre chapitre II.

Ainsi, nous avons mené une revue de travaux de recherche en didactiques des mathématiques concernant les notions d'équation, d'inéquation et de fonction ou plus largement les travaux au niveau de l'algèbre élémentaire. Ces analyses ont été réalisées en vue de mettre en perspective notre fil conducteur, la dyade sémantique / syntaxe, avec ces travaux. Ceci constitue le chapitre III.

Une étude didactique des programmes et des manuels tunisiens concernant les niveaux d'enseignement pertinents pour notre objet d'étude fait l'objet du chapitre IV. Ces niveaux d'enseignement sont la première année secondaire, la deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique et la troisième année secondaire section mathématiques[4]. L'enseignement des équations, des inéquations, et des fonctions se déroule en effet au cours de ces trois années. Cette étude s'appuie sur la théorie anthropologique du didactique et en particulier sur la notion de praxéologie (Chevallard, 1989, 1992), afin d'expliciter et de décrire les savoirs exploités et la manière dont ils sont intégrés. Dans le cadre proposé par Chevallard, on considère que l'activité d'une personne se situant dans une position bien précise à l'intérieur d'une institution peut être décrite par différents types de tâches effectuées au moyen d'une technique qui se décrit comme une certaine manière de faire. Le couple (tâche, technique) représente le savoir faire, lequel fait appel au savoir restreint formé par une technologie justifiant la technique qui à son tour est éclairée par une

[4] L'équivalent des classes de troisième, seconde et première scientifique de l'enseignement secondaire français.

théorie. Ce cadre d'étude ne prend pas explicitement en compte l'articulation entre syntaxe et sémantique, qui relève d'un niveau métamathématique (au sens logique du terme). Nous avons donc enrichi la catégorisation obtenue dans le cadre d'analyse proposé par Chevallard, en précisant pour chaque technique si elle mobilise un point de vue sémantique et / ou syntaxique. Ce chapitre IV clôt notre première partie.

La seconde partie de la thèse est consacrée à la présentation et à l'analyse des aspects expérimentaux de notre travail. Ils consistent en un questionnaire à destination d'élèves du secondaire et de classes préparatoires aux études d'ingénieurs et une situation d'enseignement expérimentale proposée à des élèves volontaires de deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique.

Dans le questionnaire, dont la présentation et les analyses font l'objet du chapitre I, nous avons introduit des objets mathématiques en croisant des formes fonctionnelles et équationnelles et des résolutions graphiques et en favorisant le recours à des aspects sémantiques de résolution, afin de voir :

- quel point de vue pourrait être mobilisé par les élèves pour résoudre les exercices proposés ;
- si les élèves sont capables de faire certains changements dans les mises en fonctionnement des connaissances (Robert, 1998) au niveau d'un même ou de plusieurs registres de représentation sémiotique.

Pour analyser les copies des élèves issues de ce questionnaire, nous avons catégorisé les différentes méthodes et procédures de résolution mathématique que nous attendions, en nous appuyant sur nos catégorisations logiques et praxéologiques enrichies par le point de vue de Duval (1988, 1993). Cet auteur a étudié les conditions cognitives dans l'apprentissage des objets mathématiques et a montré que la diversification des représentations sémiotiques d'un même objet mathématique joue un rôle essentiel au niveau de l'activité mathématique. Cette approche, qui consiste à coordonner plusieurs registres[5] de représentation sémiotique[6] d'un concept mathématique, nous a permis de conclure que l'articulation entre syntaxe et sémantique est au cœur de l'articulation entre les registres algébriques et graphiques ; toutefois, le traitement interne dans un même registre peut également mobiliser les deux points de vue. Ainsi, nous avons classé les modalités de nos données par une catégorisation

[5] Registres graphiques, algébriques, analytiques, arithmétiques etc.
[6] Ce qui revient à dire qu'il existe une liaison entre sémiosis et néosis que peut être interprété par la conversion de registres.

des différentes procédures de réponses des élèves au questionnaire, comme par exemple des techniques de type sémantique relevant du registre algébrique qui se traitent graphiquement. Pour compléter nos analyses, nous nous sommes appuyés sur Robert (1998). Elle présente des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves relatifs à un niveau scolaire donné.

Le projet initial de la situation d'enseignement est celui de l'étude de l'articulation sémantique / syntaxe, dans la manipulation des objets équation, inéquation et fonction, en situation d'enseignement. Pour observer le plus finement possible l'activité des apprenants, au cours de l'appropriation du savoir mathématique, nous avons choisi de nous placer dans des conditions aussi proches que possible (compte tenu des contraintes diverses) des conditions réelles d'enseignement. Nous avons donc opté pour la méthodologie d'une « mini ingénierie » didactique, (Artigue, 1988) dans laquelle nous avons confronté notre analyse *a priori* et notre analyse *a posteriori*. Nous avons pu mettre en évidence un double écart entre le savoir attendu et le savoir réellement appris par l'élève. D'une part, ce savoir attendu n'est pas assez clair dans les programmes et les manuels scolaires et nous enregistrons un écart avec le savoir à enseigner. D'autre part, le contenu à enseigner lui-même peut avoir certaines différences avec le savoir réellement appris.

La méthodologie suivie pour la réalisation d'une telle séquence d'enseignement consiste à s'appuyer sur l'analyse historique de la formation de nos objets d'étude complétée par les travaux des logiciens et par les analyses des programmes et des manuels scolaires. Ces dernières analyses montrent par exemple que l'articulation entre les équations des courbes, leurs représentations graphiques et le concept de fonction n'est pas clairement explicitée, que ce soit au niveau des programmes que des manuels scolaires Tunisiens. Dans ces derniers, on peut voir que les courbes interviennent essentiellement comme représentations graphiques des fonctions au programme. Nous avons choisi d'inverser cette relation pour notre situation d'enseignement en proposant aux élèves une activité leur permettant de rencontrer la parabole à partir d'une définition géométrique et de mettre en relation la courbe obtenue avec une fonction trinôme. Compte tenu de contraintes matérielles qui ne nous ont pas permis de conduire nos observations en situation habituelle de classe, cette situation a été proposée par leur professeur à des élèves volontaires d'une même classe. Nous l'avons conduite nous-mêmes en la présence du professeur. La séquence a été entièrement filmée par une troisième personne. Le film obtenu nous a permis de réaliser notre analyse a posteriori. Nous l'avons également projeté à un petit groupe d'enseignants, tous étudiants en première année de Master de didactique des mathématiques, à la suite de quoi nous avons conduit avec chacun des

entretiens individuels visant à recueillir le point de vue de praticiens sur cette séance d'enseignement. La présentation, les analyses *a priori* et *a posteriori* de la situation, ainsi que les analyses des entretiens conduits avec les enseignants font l'objet du chapitre II qui clôt la deuxième partie.

Nous revenons dans la conclusion sur les résultats obtenus, les points en discussion et les perspectives ouvertes par ce travail.

Analyses épistémologiques et didactiques

Chapitre I
Etude logique et mathématique des objets équation, inéquation et fonction

Dans toutes les analyses logiques que nous allons expliciter ci-dessous, nous avons choisi de cerner nos objets d'étude qui, rappelons le, sont les équations, les inéquations et les fonctions.

I. Insuffisance du calcul propositionnel pour l'analyse des discours mathématiques

La logique des prédicats analyse la proposition, par opposition à la logique des propositions qui prend la proposition elle-même comme unité inanalysée. Compte tenu de la polysémie du terme *proposition*, il est nécessaire d'en préciser ici le sens : en logique, on appelle proposition, tout énoncé exprimant une pensée portant un sens complet susceptible d'être vrai ou faux, et ceci quelque soit sa structure interne[7]. On peut citer comme exemple de propositions :

« *Aristote est un philosophe* ».

« *Aristote est le philosophe qui a écrit L'Organon*[8] ».

La deuxième proposition a une structure plus complexe que la première; en effet, non seulement elle articule deux propositions, mais le pronom relatif « qui » renvoie au nom propre « Aristote ». Ceci montre que l'analyse logique de cette phrase nécessite la prise en compte du terme « Aristote ». C'est précisément ce dernier point dont la logique propositionnelle ne permet pas de rendre compte. C'est d'ailleurs Aristote qui le premier a proposé une logique des termes des prédicats, qui analyse les propositions de façon à en donner la structure.

On peut donner des exemples de propositions en mathématiques : « π *est un nombre réel* » est une proposition singulière, « tout nombre décimal est rationnel », est une

[7] La proposition est posée comme un tout.
[8] L'ensemble des traités sur l'art de raisonner rassemblés par les Aristotéliciens.

proposition universelle ou « *il existe des nombres irrationnels* », est une proposition existentielle.

Toujours en mathématiques, l'énoncé suivant est une proposition : « *Un rectangle admet deux diagonales isométriques* » sous réserve que, conformément à la pratique mathématique, l'on donne à l'article indéfini une valeur générique, et que, donc, l'on considère qu'il s'agit d'un énoncé général. Il faut noter que cette acceptation ne va pas de soi en dehors des mathématiques comme le montre les énoncés suivants : *un philosophe a écrit l'Organon versus un philosophe s'intéresse à la question de la vérité.* Et même parfois en mathématiques : *un rectangle admet deux côtés dont le rapport des mesures est égal à la racine carrée de deux.*

En logique propositionnelle, la valeur de vérité d'une proposition complexe dépend uniquement de la valeur de vérité des propositions qui la composent. Ainsi, la valeur de vérité de $[(p \vee q) \Leftrightarrow r]$ est déterminée par les valeurs de vérité des propositions élémentaires p, q et r en rapport avec la définition des connecteurs. Le calcul de la valeur de vérité se fait en manipulant des lettres de variables propositionnelles, qui s'interprètent comme des propositions[9], représentant les plus petits composants d'une analyse logique. L'insuffisance du calcul des propositions pour analyser certaines propositions complexes a conduit à élargir le système relatif au calcul propositionnel et à considérer le système du calcul des prédicats qui permet d'analyser la structure de la proposition tout en tenant compte de la quantification. En effet, selon Frege et Russell, la proposition possède une forme fonctionnelle ou prédicative qui désigne soit une propriété soit une relation qui se décompose en deux parties : l'une est dite fermée, l'autre requérant un complément (cf. Ouelbani, 2000).

Il est évident qu'un discours mathématique, aussi simple soit-il, ne peut pas en général être analysé par le calcul propositionnel. En effet, un discours mathématique parle généralement *d'objets* et de *propriétés* relatives à ces objets, ainsi que de relations entre objets, et met en jeu des questions de quantifications. La structure de la proposition et les rapports entre ses constituants sont donc importants pour l'activité mathématique. Le fait que la structure de la proposition et les rapports entre ses constituants sont importants pour le mathématicien est souligné par Tarski(1960) :

«*Le calcul des propositions, en lui-même, toutefois, ne constitue pas une base suffisante lorsqu'il s'agit de fonder les autres sciences et, en particulier, les mathématiques ;*

[9] Nous adoptons un point de vue sur la logique propositionnelle articulant une syntaxe et sur une sémantique (les tables de vérité), telle qu'il est développé dans Wittgenstein (1921). On en trouve une présentation dans Durand-Guerrier, 2005.

divers concepts des autres parties logiques apparaissent constamment dans les définitions mathématiques, dans les théorèmes et dans les démonstrations.» (Tarski, 1960, p.49).

Cori & Lascar (1994), partagent le même point de vue que Tarski et expliquent que

« *Le travail du mathématicien est d'examiner des structures, d'énoncer des propriétés à leur sujet et de se demander si ces propriétés sont vérifiées ou non.* » (Cori & Lascar, 1994, p. 11).

C'est également le point de vue développé en didactique des mathématiques par Durand-Guerrier (1996) et Durand-Guerrier & Arsac (2003) qui ont montré que le modèle théorique proposé par Raymond Duval dans le cadre de la géométrie, est insuffisant, et par suite devient inopérant, dans de nombreux cas et particulièrement au niveau de l'analyse.

« Lorsqu'on aborde les démonstrations en Analyse, il apparaît très clairement que le cadre théorique proposé par Raymond Duval pour la Géométrie devient inopérant dans de nombreux cas, en particulier lorsqu'interviennent des théorèmes existentiels. » (Durand-Guerrier & Arsac, 2003, p. 298).

Il est alors nécessaire de considérer un système de calcul qui permette d'analyser la structure des propositions.

II. Éléments pour une théorie de la quantification

II. 1. Fonction, argument et variable

Le calcul propositionnel forme une partie fondamentale de la logique. Cependant, plusieurs concepts comme, l'identité, les relations… ne font pas partie du calcul propositionnel. Contrairement à la logique des propositions, qui a pour objet la transformation de propositions au moyen des foncteurs logiques, la logique prédicative est une logique intra-propositionnelle permettant d'analyser la structure de la proposition tout en tenant compte de la quantification (lorsque les expressions sont quantifiées).

Les propositions en général, et pas uniquement dans le domaine des mathématiques, ont une nature fonctionnelle, puisqu'elles sont décomposables en deux parties : l'une dite fermée et l'autre requérant un complément. Par exemple l'énoncé suivant : « César conquit les Gaules » se décompose selon Frege en deux parties :

1. « César » est appelé *l'argument* et peut varier puisqu'on pourrait aussi bien dire : « Napoléon conquit les Gaules ».

2. « conquit les Gaules » est la *fonction* que l'on peut exprimer sous la

forme « x conquit les Gaules ».

« Ce n'est qu'après avoir rempli cette place par un nom propre ou par une autre expression qui représente un nom propre, qu'on voit naître un sens fermé sur lui-même. J'appelle fonction la dénotation de la partie non saturée. Dans ce cas, l'argument est ici « César ». » (Frege, 1971, p. 91).

L'expression (La phrase) « x conquit les Gaules » où x est une lettre de variable, un *marque-place*, que Quine appelle *« une phrase ouverte »* (Quine, 1950, 1972). Pour les logiciens Frege et Russell, inventeurs de la logique prédicative moderne, la fonction est ambiguë et n'exprime pas un sens complet, contrairement à la proposition.

Cette définition de la fonction s'applique bien sûr à tous les types d'énoncés, y compris bien sûr les énoncés mathématiques. En effet, l'équation « $2x-1=3$ » ne reçoit un sens complet, autrement dit la phrase ouverte ne devient vraie ou fausse, que si on attribue une valeur à x. C'est d'ailleurs, l'origine de la conception frégéenne de la fonction. Il ne faut pas perdre de vue que Frege est parti du concept mathématique de fonction, comme étant une expression qui contient une inconnue x, pour l'appliquer à toute sorte de proposition. Ainsi, toute proposition possède une forme fonctionnelle.

« Mon propos est de montrer que l'argument n'appartient pas à la fonction, mais que fonction et argument, pris ensemble, constituent un tout complet. De la fonction prise séparément, on dira qu'elle est incomplète, ayant besoin d'une autre chose, ou encore insaturée… » (Frege, 1971, p. 84).

En outre, l'auteur stipule que :

« …On peut envisager de décomposer les propositions affirmatives comme les ***équations, les inéquations****, et* ***les expressions analytiques****, en deux parties dont l'une est fermée sur soi et dont l'autre réclame un complément, est insaturée… »* (Frege, 1971, p. 91).

II. 1. 1. Le concept de fonction :

Les expressions contenant des variables sont appelées des fonctions désignatives ou descriptives que nous pouvons interpréter comme des termes généraux

« *Ce sont des expressions qui, dès qu'on y remplace les variables par des constantes, deviennent des désignations (« descriptions ») de chose. Par exemple, l'expression :*

$2x+1$ *est une fonction descriptive…* » (Tarski, 1960, p. 5).

Celles-ci sont nommées dans le domaine des mathématiques « fonctions ». Nous nous limitons dans notre travail aux fonctions à un seul argument.

En mathématiques, nous disons qu'une fonction est une expression ou une formule qui contient x. D'où l'expression $3x^2+1$ est une fonction de x et $3\times1^2+1$ est une fonction de1. L'interprétation, de l'expression précédente, n'est pas suffisante pour Frege

« *…en ce qu'elle ne distingue pas la forme du contenu, le signe du désigné…*» (Frege, 1971, p. 81).

Par là, Frege explique qu'une fonction est une expression de la forme, par exemple : $3(\ )+1$, qui est incomplète et a besoin d'une chose, appelée dans le langage logique, argument. L'extension du concept de fonction à toutes les catégories de propositions permet de ne plus la confondre avec le nombre. En effet, en mathématique, la valeur d'une fonction est sa valeur pour un nombre. C'est ainsi que si dans $x^2=1$, on remplace x par l'argument 1, on obtient $1^2=1$.

« *Si donc la fonction n'était rien d'autre que la dénotation d'une expression de calcul, elle serait un nombre et n'apporterait rien de nouveau à l'arithmétique.* » (Frege, 1971, p. 83).

C'est ainsi que :

« *Si je dis par exemple "la fonction* $2x^2+x$*", x ne doit pas être considéré comme appartenant à la fonction, cette lettre ne sert qu'à indiquer la nature du complément demandé de la fonction, en montrant les places où l'on doit introduire l'argument.* » (Frege, 1971, p. 85).

En termes de logique, on pourra dire que, en considérant n'importe quel type de proposition, la fonction est la partie prédicative de la phrase désignant soit une *propriété* soit une *relation*. Une propriété correspond aux prédicats unaires ou monadiques qui s'applique à un seul objet. Par exemple *avoir des diagonales qui se coupent en leurs milieux pour les quadrilatères*. Les relations correspondent aux prédicats à n places (n-aires) avec $n\geq2$ ou encore polyadiques s'appliquant à plusieurs objets. Par exemple : *être compris entre… et…*est un prédicat ternaire.

Pour récapituler, on peut rappeler ce que Frege reproche aux mathématiques :

« *On a l'habitude de lire l'équation « $y=f(x)$ » « y est une fonction de x ». C'est commettre une double faute. Premièrement, on traduit le signe d'égalité par la copule ;*

deuxièmement, on confond la fonction avec sa valeur pour un argument. Ces fautes ont fait naître l'opinion que la fonction est un nombre, dût-il être un nombre variable ou indéterminé. » (Frege, 1971, p. 168-169).

Ces propos ne peuvent que nous inciter à préciser les différences entre les concepts de fonction en logique et en mathématiques.

II. 1. 2. Fonctions et relations en mathématiques

Les fonctions ou les relations fonctionnelles ou encore les relations univoques au sens de Tarski constituent une catégorie particulière des relations. En effet, une fonction est une relation tel que à chaque objet y correspond au plus un objet x [10]. Par exemple x est la mère de y est une relation fonctionnelle puisque pour chaque y il n'existe qu'une seule personne x qui soit mère. En mathématiques, nous avons une abondance de relations fonctionnelles. Par exemple la relation $x = y^2$ peut s'interpréter comme une relation fonctionnelle puisqu'à chaque nombre réel y nous ne pouvons faire correspondre qu'un seul nombre réel x vérifiant l'égalité donnée. En outre, les valeurs de l'argument de cette fonction ne sont que des nombres réels et les valeurs de la fonction, après l'avoir saturée, sont des termes[11] ou des nombres réels positifs. Ainsi, une dénotation de cette relation fonctionnelle par le symbole f rendra la formule $x = y^2$ sous la forme $x = f(y)$[12]. D'où à une fonction sur un domaine donné[13] on peut associer une relation binaire en interprétant cette égalité comme une phrase ouverte (une équation à deux variables). En outre, dans notre exemple on a les équivalences : « $x = f(y) \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow x - y^2 = 0 \Leftrightarrow F(x, y) = 0$ », où F est une fonction de deux variables.

D'autre part, il est important de remarquer que dès les mathématiques élémentaires, nous pouvons rencontrer des relations qui ne sont pas des fonctions. Par exemple, la relation $x^2 + y^2 = 100$ n'est pas une relation fonctionnelle, puisque, à un seul et même nombre y peuvent correspondre deux nombres différents pour lesquels la relation est satisfaite. En effet, au nombre 8, par exemple, nous pouvons associer à la fois 6 et -6.

[10] Les objets y sont les valeurs de la fonction et les x sont les valeurs de l'argument.
[11] Au sens logique que nous allons expliciter ci-dessous.
[12] Evidement x et y peuvent se remplacer mutuellement.
[13] Dans notre cas le domaine est l'ensemble des nombres réels IR.

Tarski (1960) explique que :

« *Il semble, toutefois, inopportun, au moins au niveau élémentaire, de dénoter de telles relations comme des fonctions, car cette façon ne tend qu'à oblitérer la différence essentielle entre la notion de fonction et la notion plus générale de relation.* » (Tarski, 1960, p. 89).

II. 1. 3. Terme singulier, terme général, variable

Pour pouvoir parler d'un objet, on lui attribue un *nom*. En logique, un nom d'objet est un *terme* qui peut se présenter sous deux formes :

- *Terme singulier* ou nom propre qui s'applique à un seul objet bien délimité. En mathématique, par exemple, chaque nombre réel est un terme singulier.
- *Terme général* ou nom commun qui peut s'appliquer à plusieurs objets : nombre, fonction, polygone… Ces termes désignent des classes d'objets.

Ainsi, si on applique un prédicat à un ou plusieurs termes singuliers on obtient une proposition, appelée proposition singulière. Par exemple :

« 8 est un nombre impair » est une proposition fausse de l'arithmétique.

« π est inférieur à 4 » est une proposition vraie dans l'ensemble des réels muni de la relation d'ordre habituelle.

Par contre si on applique un prédicat à un terme général, on produit une expression dépourvue de valeur de vérité qui n'est donc pas une proposition. Par exemple : « x est inférieur ou égale à 3 » est une expression vraie dans certains cas et fausse dans d'autres qu'on appelle fonction propositionnelle.

« *Par fonction propositionnelle, nous entendons quelque chose qui contient une variable et exprime une proposition aussitôt qu'une valeur est assignée à* x. *C'est-à-dire qu'elle diffère d'une proposition, par delà seul qu'elle est ambiguë : elle contient une variable dont la valeur n'est pas assignée.* » (Russell, 1989, §2).

Russell et Tarski ont insisté sur la notion de variable qui est l'une des notions capitales en mathématiques. D'un point de vue logique, la variable est un marque place ; elle ne désigne rien ; elle permet l'attribution de valeurs par des objets de l'univers du discours dans une interprétation donnée :

« Le « nombre variable » x ne saurait avoir aucune propriété spécifiée, il ne saurait être, par exemple, ni positif ni négatif ni égal à zéro ; ou plutôt, les propriétés d'un tel nombre changeraient d'un cas à l'autre… » (Tarski, 1960, p. 4).

Elle permet aussi la substitution par un terme complexe. Bien que le terme variable en mathématique soit polysémique et souvent utilisé dans un sens métaphorique, on l'utilise également dans de nombreux cas avec son statut logique de marque place, particulièrement en algèbre. Le principe de substitution est par exemple au cœur de l'opération de composition des fonctions comme dans l'exemple suivant :

Soit la fonction polynôme $P(x)$ qui à x associe x^3+2x+1; soit u la fonction de IR dans IR qui à x associe $\cos x$; la fonction composée $P \circ u$ s'obtient en substituant $u(x)$ à x dans chacune des occurrences de x dans P; la fonction $P \circ u$ est donc par définition la fonction qui à x associe $\left(\cos^3(x)+2\cos(x)+1\right)$. Le principe de substitution est également constamment à l'œuvre dans l'algèbre des polynômes.

Il était alors essentiel d'introduire de nouveaux concepts afin de distinguer les propositions des fonctions propositionnelles (Frege, Russell) ou encore des *phrases ouvertes* au sens de Quine (1950, 1972)[14], qui sont dépourvues de valeur de vérité. Quine réserve la notion de fonction propositionnelle aux systèmes formels.

II. 2. Les phrases ouvertes et la notion de satisfaction

L'application d'un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes dont l'un au moins est un terme général, donne ce que Quine appelle une phrase ouverte (cf. Durand-Guerrier et al, 2000) ou une fonction propositionnelle (cf. Tarski, 1960) qui n'est pas une proposition, et n'est donc pas susceptible de recevoir une valeur de vérité.

Etant donné un domaine de référence pertinent pour la variable, une phrase ouverte peut être transformée en un énoncé clos (une proposition) de trois manières :

- En considérant sa clôture universelle : « Pour tout x, x est un nombre premier ». (1)
- En considérant sa clôture existentielle : « Il existe x tel que x est nombre premier ». (2)
- En assignant un élément du domaine de référence à la variable : « 41 est un nombre premier » (3) ; « 121 est un nombre premier » (4).

[14] Quine réserve la notion de fonction propositionnelle pour les énoncés des systèmes formels comportant une ou des variables libres.

Dans l'ensemble IN des entiers naturels (1) et (4) sont des propositions fausses ; (2) et (3) sont des propositions vraies.

Le troisième point correspond à la notion de satisfaction d'une phrase ouverte[15] par un objet qui fonde la théorie sémantique de la vérité de Tarski.

Dans cette théorie, la sémantique permet d'établir la notion de vérité ou de satisfaction d'une formule[16]. Tarski a montré que

« … *le concept de vérité est définissable à partir de la notion de satisfaction. En lui-même, un énoncé* σ *d'un langage* L *n'est ni vrai, ni faux faute de signification. Pour lui donner un sens, il faut associer aux symboles non logiques de* L *une interprétation*.» (Rivenc, 1989, p. 173).

D'ailleurs quand il (1936, 1972) introduit la notion de satisfaction d'une phrase ouverte, il renvoie à l'algèbre scolaire.

C'est ainsi que « …*Cette présentation de la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, correspond à la conception « sémantique » de la vérité dans les langages formalisés due à* Tarski *(1936), qui, lorsqu'il l'introduit, la relie explicitement à la notion de solution d'une équation familière au mathématicien.* » (Durand-Guerrier et al, 2000, p. 9).

En revanche, il suffit de remplacer chaque terme général par un terme singulier dans la phrase ouverte pour avoir une proposition. Contrairement à la proposition, la phrase ouverte est dépourvue d'une valeur de vérité.

« Le rôle des variables dans une fonction propositionnelle a été parfois très justement comparé aux blancs laissés dans un questionnaire. De même que le questionnaire n'acquiert de contenu défini qu'une fois que les blancs ont été remplis, ainsi une fonction propositionnelle ne devient une proposition qu'une fois que des constantes ont été substituées aux ***variables.*** *De la substitution des constantes aux variables dans une fonction propositionnelle, des constantes identiques prenant la place de variables identiques, peut résulter une proposition vraie ; dans ce cas, les choses dénotées par ces constantes sont dites satisfaire la fonction propositionnelle donnée. »* (Tarski, 1960, p. 5).

On peut ainsi dire que d'un point de vue logique, une équation ou inéquation est une phrase ouverte et les résoudre dans un domaine d'objet donné (appelé en logique *univers du*

[15] Fonction propositionnelle au sens de Tarski.
[16] Fonction propositionnelle ou phrase ouverte.

discours), revient à déterminer tous les objets de ce domaine qui satisfont cette phrase ouverte.

« *En ce qui concerne les équations, une terminologie spéciale est passée dans l'usage en mathématiques ; ainsi, les variables figurant dans une équation s'appellent les inconnues, et les nombres satisfaisant à l'équation, les racines de l'équation. Par exemple, dans l'équation :*

$x^2 + 6 = 5x$

la variable « x » est l'inconnue, tandis que les nombres 2 et 3 sont les racines de l'équation. » (Tarski, 1960, p. 6).

Remarquons que parmi les phrases ouvertes qui peuvent se présenter, il y a celles qui sont vraies de tous les objets de l'univers du discours, par exemple : *un nombre est divisible par lui-même* ; d'autres sont fausses de tous les objets de l'univers du discours : $x > x+1$ pour tout $x \in IR$, alors que les autres sont pour quelque(s) objet(s) vraies et fausses pour d'autre(s). e. g. « *un multiple de* 5 *est divisible par* 3 »

Tarski signale qu'en général nous ne différencions pas facilement les termes qui dénotent les objets dont traite une science.

«*On peut présumer que bien peu sont conscients du fait que des termes tel que «équations », « inégalité », « polynôme » ou « fraction algébrique», qui se rencontrent continuellement dans les manuels d'algèbre élémentaire, n'appartiennent pas, à strictement parler, au domaine des mathématiques ou de la logique, puisqu'ils ne dénotent pas des objets considérés dans ce domaine ; les équations et les inégalités sont certaines fonctions propositionnelles spéciales…* » (Tarski, 1960, p. 28).

Ceci montre que chaque théorème formulé dans le domaine des mathématiques, possède une formulation logique plus correcte.

« *Par exemple, le théorème :*

L'équation $x^2 + ax + b = 0$ *a au plus deux racines peut s'exprimer d'une manière plus correcte comme ceci :*

Il y a au plus deux nombres x tel que $x^2 + ax + b = 0$ » (Tarski, 1960, p. 28).

Dans notre travail, on s'intéresse aux équations et aux inéquations qui sont des phrases ouvertes. Afin de se rendre compte de ces nuances ou des différences, à partir desquelles une phrase ouverte quelconque se transforme en une proposition susceptible de vérité ou de

fausseté, Frege a introduit des termes indéfinis qui précèdent les prédicats, tout en donnant une formalisation de la notion de quantité de la langue naturelle. Ces termes sont : *les deux quantificateurs* universel et existentiel.

II. 3. Théorie de calcul fonctionnel

L'introduction des variables permet de formuler deux types d'énoncés qui contiennent des termes indéfinis comme : *tout, quelque...,* qui permettent de construire des propositions. Remarquons que, depuis l'antiquité, Aristote avait construit son système propositionnel en retenant trois termes qui sont : *tous, quelque* et *nul*. Cependant, la règle de conversion de : « *Nul A n'est B* » en « *Tout A est non B »*, nous permet de nous limiter à *tous* et *quelques* ; et même à l'un des deux, car formellement chacun des deux quantificateurs peut être traduit dans l'autre.

Les systèmes modernes, en logique, ont retenu deux types de quantificateurs qui sont utilisés dans le domaine mathématique. Le premier est le quantificateur universel $\forall$ qui se lit « *quelque soit* » ou « *pour tout* ». Un énoncé de la forme « Pour tout x $P(x)$ est vrai » dans un univers du discours donné si la phrase ouverte $P(x)$ est satisfaite par tous les objets du domaine ; elle est fausse sinon. Le second est le quantificateur existentiel $\exists$ qui se lit « *il existe au moins* ». Un énoncé de la forme « Il existe au moins x tel que $P(x)$ » sert à exprimer, s'il est vrai, l'existence d'un objet de l'univers du discours qui satisfait la phrase ouverte $P(x)$, sans qu'on connaisse nécessairement pour autant un tel objet.

« *Je formulerai aujourd'hui la question d'une manière un peu différente. Je dirais qu'étant donné une proposition fonctionnelle, disons* $f(x)$*, il existe un certain nombre de valeurs de* x *pour lesquelles cette fonction « a un sens », c'est-à-dire est vraie ou fausse. Si* a *est dans ce nombre, alors* $f(a)$ *est une proposition qui est vraie ou fausse. En plus de la substitution d'une constante à la variable* x*, il y a deux manières de considérer une proposition fonctionnelle : l'une est d'affirmer qu'elle est toujours vraie ; et l'autre, qu'elle est vraie quelquefois. La fonction propositionnelle : « si* x *est humain,* x *est mortel » est toujours vraie ; la fonction propositionnelle : « x est humain » est vraie quelquefois.* » (Russel, 1961, p. 101-102).

En mathématiques, et particulièrement au niveau du concept d'identité ou d'égalité, nous pouvons donner un sens précis à quelques locutions, c'est à dire qu'il est possible de donner une signification précise à certaines expressions.

Le calcul des prédicats est nécessaire pour analyser de nouvelles formes pour

lesquelles le calcul propositionnel est inopérant. De plus, le calcul des prédicats présente un intérêt philosophique. En effet, le fait de définir les quantificateurs des systèmes formels en tant que modélisateurs des notions correspondantes à la langue naturelle revient à adopter le point de vue *sémantique* en logique. Alors que le point de vue *syntaxique*, gère les règles de fonctionnement et détermine la validité des relations sans chercher à les interpréter.

N.B. Dans ce qui suit, comme c'est le cas le plus souvent en logique aujourd'hui, nous utiliserons le terme de « Prédicat » pour modéliser les propriétés et les relations, et nous réserverons le terme de « fonction » à la notion mathématique, qui à un terme, associe un nouveau terme à un terme.

III. Syntaxe et sémantique dans la logique des prédicats

III. 1. La syntaxe du calcul des prédicats

Selon Carnap (1934), la syntaxe s'occupe de cette partie de la langue qui a les caractéristiques d'un calcul, c'est-à-dire qu'elle se limite à l'aspect formel de la langue. Elle se donne un alphabet de signes dépourvus de sens et susceptibles d'être combinés suivant des règles (voir par exemple Ouelbani, 1992 et Sebestik, 1997). Le terme de syntaxe est utilisé également en logique dans un sens plus large englobant ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel du terme, en opposition avec la sémantique, qui prend en compte les interprétations.

On entend par *syntaxe logique*

« *la formulation canonique des formes d'expressions et des règles d'inférence admises dans un langage logique ou une langue formelle L, sans que référence soit faite à la signification des termes extra-logiques de L ou à celle de ses énoncés.* » (Nadeau, 1999).

Ouelbani (1992) explique que

« *Carnap parle d'une syntaxe logique du langage scientifique. Par logique de la science, il entend essentiellement une théorie formelle de ce langage, c'est-à-dire l'établissement systématique des règles valant pour ce langage et le développement des conséquences de ces règles. Cette théorie est formelle, elle ne considère donc ni la signification des termes, ni le sens des expressions.* » (Ouelbani, 1992, p. 183).

En logique, la syntaxe d'un langage formel donne donc les règles de formation et de transformations des énoncés du langage considéré ; elle permet de reconnaître si un énoncé est bien formé ou non et si le passage d'un énoncé à un autre dans une démonstration de théorème, par exemple, est valide.

Dans le calcul des propositions, on a un ensemble dénombrable de lettres de variables propositionnelles comme : p, q, r ;…, un nombre fini de connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (on peut en prendre moins ou plus, mais ce sont ceux que l'on utilise en mathématiques et des parenthèses $(;)$.

L'élément minimum est la lettre de proposition (le signe propositionnel).

Les règles de formations sont les suivantes :

P_1 Une lettre de variable propositionnelle est une formule.

P_2 Si F est une formule, $\neg F$ est une formule.

P_3 Si F et G sont des formules, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule.

Ceci permet de construire des formules du calcul propositionnel et aussi d'analyser des formules complexes.

Dans le calcul des prédicats, on ajoute des ensembles dénombrables de lettres de variables, lettres de constantes, lettres de prédicats, et quand on fait des mathématiques, on peut ajouter des lettres de fonctions (au sens mathématique du terme), qui permettent donc de générer des termes complexes).

L'élément minimum est le terme : une lettre de variable, une lettre de constante sont des termes ; une fonction saturée par des lettres de variables et/ou des lettres de constantes est un terme. Un terme s'interprète comme un nom d'objet.

Les règles de formation sont les suivantes :

P_1 Un prédicat saturé par autant de termes qu'il a de place est une formule.

P_2 Si F est une formule, $\neg F$ est une formule.

P_3 Si F et G sont des formules, $F \wedge G$, $F \vee G$, $F \Rightarrow G$, $F \Leftrightarrow G$ sont des formules.

P_4 Si F est une formule et x une lettre de variable $\exists x F$ et $\forall x F$ sont des formules.

Rien d'autre n'est une formule.

N.B. Nous ne traiterons pas ici de la théorie de la démonstration (dérivabilité formelle), car ceci déborde largement le cadre de ce que nous étudions dans ce travail.

III. 2. La sémantique logique

Étant donné un langage formalisé, comme le calcul des prédicats, *la sémantique logique* étudie les interprétations possibles des symboles utilisés ainsi que les relations entre

les diverses interprétations des formules utilisées. La théorie sémantique de la vérité due à Tarski (1936, 1944) permet d'associer une valeur de vérité à une formule donnée dans une interprétation donnée. Celui-ci définit la sémantique comme étant

« … *l'ensemble des études qui traitent des concepts, qui, en gros, expriment certaines relations entre les expressions d'un langage et les objets et états de choses auxquels ces expressions se réfèrent.* » (Tarski, 1974, p. 133).

La sémantique nécessite donc une structure interprétative : un univers du discours, des interprétations pour les lettres de prédicats, de fonctions et éventuellement de constantes et de fonctions.

Pour le calcul des propositions ; on a une construction récursive de la vérité via les tables de vérité des connecteurs : on dit qu'on a un système vériconditionnel. Ceci n'est plus vrai dans le calcul des prédicats. Tarski a résolu ce problème en proposant une construction récursive de la satisfaction d'une phrase ouverte, ce qui permet de définir la vérité des phrases closes.

La différence entre ces deux types de calcul s'explique par le fait qu'on peut absorber la quantification dans le calcul propositionnel lorsque le domaine d'objets est fini. Ce qui n'est plus le cas lorsque le domaine d'objets est infini. C'est ce que l'on retrouve le plus souvent en mathématiques. De plus, on ne peut pas le faire non plus concrètement lorsque le domaine d'objet est fini et que son cardinal est très grand.

Cette question est au cœur de l'interrogation des logiciens, déjà présente chez *Aristote*, on la retrouve chez Frege et chez Tarski (1936) qui élabore *une conception sémantique* de la vérité, dont il dit qu'elle est formellement correcte et matériellement adéquate et qui, selon Sinaceur (1991), articule la forme et le contenu.

« …Il s'agit en effet, compte tenu de tel ou tel langage, de construire une définition de l'expression « proposition vraie », définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte. » (Citation de Tarski citée in Durand-Guerrier 2004).

Cette conception s'est opposée à d'autres conceptions contemporaines telle que la conception syntaxique de la vérité, qui a été défendue par Carnap dans son ouvrage « *La syntaxe logique du langage* » de 1934.

Comme le souligne Durand-Guerrier, le point de vue de Tarski est à mettre en relation avec la pratique habituelle du mathématicien qui, dans son travail, articule le plus souvent les deux points de vue, en particulier lorsqu'il travaille avec des équations.

IV. La sémantique et la syntaxe en mathématiques

D'un point de vue logique, la signification d'une expression algébrique et en particulier d'une égalité réside à la fois au niveau de sa syntaxe, et de sa dénotation et de son sens, c'est-à-dire de son aspect sémantique. En fait,

« *La notion d'égalité propose à la réflexion quelques irrémissibles, auxquelles il n'est pas aisé de répondre.* » (Frege, 1971, p. 102).

Le travail que nous nous proposons accorde une importance aux définitions et aux exemples relatifs au sens et à la dénotation d'un signe ainsi qu'à ses valeurs de vérités.

Un signe se décompose, selon Frege, en deux éléments : son sens et sa dénotation. Son sens se réfère aux différentes désignations ou le mode de donation que nous pouvons lui associer. Quant à sa dénotation, elle est précisément ce qu'il désigne. Frege dit que

« *Le lien régulier entre le signe, son sens, et sa dénotation, est tel qu'au signe correspond un sens déterminé et au sens une dénotation déterminée tandis qu'une seule dénotation (un seul objet) est susceptible de plus d'un signe. De plus, un même sens a dans des langues différentes, et parfois dans la même langue, plusieurs expressions.* » (Frege, 1971, p. 104).

Toutefois, Frege remarque qu'il est possible de concevoir un sens à un signe sans lui faire correspondre nécessairement une dénotation. Nous pensons que son exemple sur « la suite qui converge le moins rapidement » explique bien ce cas. Néanmoins, il évoque la possibilité de concevoir une représentation du signe qui peut être interprétée comme l' « image » que le sujet se fait de ce signe.

Dans le cas de l'étude des valeurs de vérité d'une proposition Frege écrit que :

« *…le sens de ces propositions, c'est-à-dire la pensée qu'elle exprime, entre en compte autant que la dénotation, laquelle est la valeur de vérité de ces propositions. Si* $a = b$ *la dénotation de* b *est bien la même que celle de* a*, et la valeur de vérité de* $a = b$ *est aussi la même que celle de* $a = a$*. Toutefois, le sens de* b *peut être différent du sens de* a *et par là la pensée exprimée dans* $a = b$ *peut être différente de celle dans* $a = a$*. Dans ce cas, les deux propositions n'ont pas non plus la même valeur pour la connaissance.* » (Frege, 1971, p. 126).

Nous pouvons dire que Frege a étudié l'égalité mathématique en insistant sur l'idée que l'égalité n'est pas établie entre deux signes ou symboles, mais entre deux significations. C'est-à-dire que lorsque j'affirme que $a = b$, j'affirme que a et b signifient la même chose.

Pour lui, ces deux signes ont la même dénotation (ou référence), mais ils n'ont pas le même sens, sinon $a = b$ ne serait pas différent de $a = a$.

Frege définit la dénotation d'une proposition comme étant sa valeur de vérité, et son sens comme étant la pensée exprimée. Par conséquent, d'un point de vue extensionnelle « Berlin est la capitale de l'Allemagne » et « $2 + 2 = 4$ » sont équivalentes parce qu'elles ont la même valeur de vérité, bien qu'elles n'avaient évidemment pas le même sens.

Le concept d'équation apparaît également en logique. Chez Wittgenstein :

« Si j'introduis par le moyen d'une équation un nouveau signe « b », en déterminant qu'il doit remplacer un signe « a » déjà connu, j'écris alors l'égalité. » (Wittgenstein, 1993, p. 64).

Ce sont cependant les apports de Tarski qui vont permettre de donner une définition non ambiguë de la notion d'équation et d'inéquation.

Dans le langage de l'algèbre, une équation est une phrase ouverte : elle comporte une ou plusieurs variables libres. Etant donné un domaine d'objets (par exemple un ensemble de nombres, mais pas seulement), un élément de ce domaine est solution de l'équation si et seulement si il satisfait la phrase ouverte, c-à-d si et seulement si la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable est une proposition vraie dans le domaine considéré. La même définition vaut pour les inéquations[17].

Sous ce point de vue, une lettre d'inconnue est un nom d'objet et on devrait plutôt parler d'équations à deux variables (Durand-Guerrier, 2004 b). Certaines équations sont vraies de tous les objets du domaine considéré, on a alors une identité. Ceci est toujours lié au domaine considéré.

La syntaxe fournit des règles de transformations des équations qui préservent le plus souvent la satisfaction. Deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments.

De telles transformations permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe. Cependant, au moment de conclure il faut bien revenir aux objets. En outre, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique.

Conclusion du chapitre

Nous pensons avoir montré que le point de vue logique que nous avons développé

[17] Notons que Wittgenstein distingue les mathématiques de la logique. En mathématiques, nous avons à faire à des équations et en logique à des tautologies.

offre un cadre unificateur pour aborder et clarifier les concepts d'équations, inéquations et fonctions sous le double aspect syntaxique et sémantique, qui est constitutif de ces notions et permet de les relier entre elles. Toutefois, si le point de vue logique est essentiel pour les clarifications qu'il apporte, il n'en constitue pas moins une relecture *a posteriori* de ces objets, qui ne correspond pas ni à leur développement historique, ni à ce qui est enseigné aujourd'hui dans l'enseignement secondaire tunisien.

De nombreux travaux montrent par ailleurs l'importance d'une étude historique sur la genèse des différents concepts mathématiques comme prélude à une étude didactique. Ainsi, avant d'aborder l'étude proprement didactique, nous avons choisi de conduire une étude épistémologique et historique, nécessairement circonscrite à quelques auteurs, sur l'apparition et la formation de ces concepts, étude que nous présentons dans le chapitre suivant.

Chapitre II
La place de l'articulation entre syntaxe et sémantique dans les travaux didactiques

Introduction

Dans le cadre de notre travail, qui se situe au niveau de l'algèbre élémentaire, il nous paraît nécessaire d'analyser, au préalable, certains travaux didactiques antérieurs concernant nos objets d'étude.

De nombreux travaux concernant les notions d'équation, d'inéquation et fonction ou plus largement les travaux au niveau de l'algèbre élémentaire ont été conduits en didactique des mathématiques. Parmi ces travaux, principalement centrés sur le passage de l'arithmétique à l'algèbre, nous pouvons citer ceux de Barallobres (2007), Bloch (2000), Chalancon (2002), Chevallard (1984, 1989), Coppé (2002, 2006), Cortes (1999), Coulange (1998, 2000, 2001), Duval (1998), Grugeon (1997), Hitt-Espinosa (1998), Kieran (1992), Sackur (2000, 2005), Vergnaud (1987, 1989 et 1990), Wagner & Kieran (1989).

Nous proposons ici une relecture appuyée par une brève analyse des textes de certains de ces travaux didactiques qui sont dans la même direction que celle de notre champ d'étude ; afin de les mettre en perspective avec notre fil conducteur, qui est la dyade sémantique/syntaxe.

I. Gérard Vergnaud : Une rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre

I. 1. Analyse

Dans ses travaux didactiques relatifs au passage arithmétique/algèbre, Vergnaud (1987, 1989 et 1990) souligne que l'algèbre constitue une rupture épistémologique importante pour les élèves. En effet, l'arithmétique est un outil de résolution de problèmes en langage naturel ayant pour objectif : la recherche d'une inconnue par des opérations adéquates, tandis que l'algèbre scolaire, consiste à manipuler des expressions littérales liant des variables et des données numériques dont le traitement consiste à appliquer des procédures automatiques conduisant à la solution. Pour être efficace, les procédures algébriques nécessitent de mettre

entre parenthèses momentanément la question du sens comme :

« *L'algèbre représente à l'évidence une rupture par rapport à l'arithmétique, en particulier parce que le contrôle du sens des opérations faites, ne se fait plus avec les mêmes moyens.* » (Vergnaud (1987), cité In Coppe, 2002, p. 28).

Dans l'analyse de ces problèmes de rupture, Vergnaud s'intéresse aux différentes significations de l'égalité. L'égalité peut être interprétée en tant qu'annonce d'un résultat dans laquelle le signe « = » exprime une relation qui n'est ni symétrique ni transitive. Ce n'est évidemment pas la seule signification possible. En effet,

« *L'algèbre conduit à d'autres significations du signe d'égalité :*

- *Egalité de nombres, sous la contrainte d'un choix adéquat des valeurs des inconnues :* $5+3(x+6)=7x-17$.
- *Egalité de fonctions :* $\begin{array}{l} 5+3(x+6)=3x+23 \\ (a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \end{array}$.

  On remarquera que, dans l'exemple antérieur, les fonctions $5+3(x+6)$ *et* $7x-17$ *ne sont pas égales, mais seulement équivalentes : (même valeur pour x adéquatement choisi), tandis que cette fois les fonctions* $5+3(x+6)$ *et* $3x+23$ *sont bel et bien égales.* » (Vergnaud, 1987, p. 260).

Outre la question de l'égalité, l'auteur s'intéresse aussi au statut de la lettre. En effet, si la lettre utilisée comme inconnue ne semble pas poser trop de problèmes aux élèves, il n'en va pas de même avec les caractéristiques fondamentales de l'usage des lettres en algèbre : la nécessité d'opérer avec des lettres dans le cadre des structures additives et multiplicatives du corps IR, la nécessité de manipuler des égalités entre expressions algébriques sans aucune référence à des nombres. C'est là que réside, d'après Vergnaud, la rupture arithmétique/algèbre et plus particulièrement au niveau de l'équation du type « $ax+b=cx+d$ ». En effet,

« …c'est lorsque l'inconnue est présente des deux côtés du signe d'égalité que, tout à la fois, l'algèbre devient efficace par rapport à l'arithmétique, et difficile au plan cognitif. » (Filloy et Rojano, 1984, 1985; Vergnaud, 1985).

Enfin, notons que l'auteur mentionne que la dialectique, outil-objet (Douady, 1986) pourrait être un cadre pertinent pour l'apprentissage de l'algèbre. On pourrait se demander si

cette distinction recoupe ou non la distinction sémantique/syntaxique. De notre point de vue, il est clair que la réponse est négative, puisque la définition de ce qu'est une équation mobilise le point de vue sémantique, tandis que les outils de résolution s'appuient principalement sur un point de vue syntaxique. Toutefois, on peut noter que le point de vue sémantique est essentiel dans la dimension outil pour le contrôle des résultats, tout particulièrement au niveau de la modélisation et la compréhension des calculs relatifs à un domaine donné.

I. 2. Commentaire

Dans cet article, l'auteur ouvre des portes dans plusieurs directions de recherche dont certaines peuvent être abordées par un point de vue logique, en particulier en ce qui concerne un travail didactique plus systématique sur les concepts de fonction et de variables et un travail plus approfondi sur les mécanismes de contrôle, notamment lors de la mise en équation. Les catégories logiques sous-jacentes, qui offrent selon nous un cadre d'analyse pertinent pour les questions abordées dans l'article, y sont de fait présentes et ce bien qu'elles ne soient pas totalement explicitées, puisqu'en particulier, ni la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, ni la nécessité d'une articulation entre les aspects syntaxique et sémantique n'apparaissent en tant que telle. Nous allons voir ci-dessous que Chevallard (1984, 1989), quant à lui, se place explicitement dans cette dualité syntaxe / sémantique.

II. Yves Chevallard : les rapports dialectiques entre arithmétique et calcul algébrique

II. 1. Analyse

Dans son article intitulé : « *Le passage de l'arithmétique à l'algèbre l'enseignement des mathématiques au collège* » (Chevallard, 1989), l'auteur, après avoir signalé le problème d'ingénierie curriculaire qui joue un rôle fondamental dans l'introduction du savoir savant dans l'enseignement, s'intéresse en particulier au calcul arithmético-algébrique tout en soulignant l'incontournable dialectique qui existe entre l'arithmétique et le calcul algébrique qu'il interprète comme une articulation entre une syntaxe et une sémantique :

« *Lorsqu'en classe de sixième, l'enseignant passe de l'observation que* $2+3=5$ *et* $3+2=5$*, à l'écriture de la relation générale* $a+b=b+a$*, il passe alors du calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficient entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique, que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique.* » (Chevallard, 1989, p. 50).

Les difficultés des élèves sont interprétées comme l'absence de mise en relation des aspects syntaxiques (manipulation des expressions algébriques) et sémantique (substitution des valeurs dans l'expression) :

« *Le rapport de l'élève au calcul algébrique n'incorpore pas l'idée d'une relation entre manipulation algébrique de l'expression, d'une part, et substitution des valeurs numériques dans l'expression d'autre part.* » (*Chevallard*, 1989, p. 47).

L'auteur mobilise donc ici explicitement les catégories logiques dans lesquelles nous avons inscrit notre travail. Son analyse didactique du curriculum le conduit d'autre part à supposer que le travail fait au collège, qui est essentiellement de nature syntaxique, et n'articule pas avec le point de vue sémantique, va se révéler inadéquat au lycée, lorsqu'il s'agira d'utiliser l'outil algébrique dans des situations diverses.

« *La manipulation des expressions algébriques au cours du premier apprentissage organisé au collège, en effet, n'est tendu vers aucun but (mathématique) extérieur au calcul algébrique, lequel doit alors trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser, etc…). Cette particularité apparaîtra mieux, par contraste, dans des exemples d'emploi fonctionnel du calcul algébrique lequel surgira massivement au lycée, rendant évident le manque d'idoinéité du rapport au calcul algébrique officiellement inculqué au collège.* » (*Chevallard*, 1989, p. 47).

Les problèmes rencontrés lors de la transition entre collège et lycée en France, école de base et enseignement secondaire en Tunisie, se trouve donc être, selon l'auteur, un révélateur de cette absence d'articulation entre les deux points de vue syntaxique et sémantique. C'est une piste que nous avons choisie d'explorer dans le cadre de notre partie expérimentale.

II. 2. Commentaire

Il nous semble que les points de vue sémantique et syntaxique, introduits dans ce travail, n'ont pas été repris jusqu'à présent de façon approfondie, que ce soit dans les travaux de recherche ultérieurs en didactique des mathématiques, ou dans l'enseignement. Nous faisons l'hypothèse, avec Durand-Guerrier (2000), que la conception sémantique de la vérité développée dans la théorie des modèles de Tarski et la notion de satisfaction de phrases ouvertes offrent un cadre de référence pertinent pour reprendre et explorer certaines des

questions soulevées dans cet article.

III. Brigitte Grugeon : Conception et exploitation d'une structure multidimensionnelle en algèbre élémentaire

III. 1. Analyse

Dans Grugeon (1997), l'auteur étudie le problème de transition dans le système éducatif au niveau du passage arithmétique/algèbre. Son travail s'inscrit dans la continuité des travaux de Vergnaud (1987), Chevallard (1989) et Kieran (1992). La notion centrale est celle de compétence algébrique qu'elle définit comme suit :

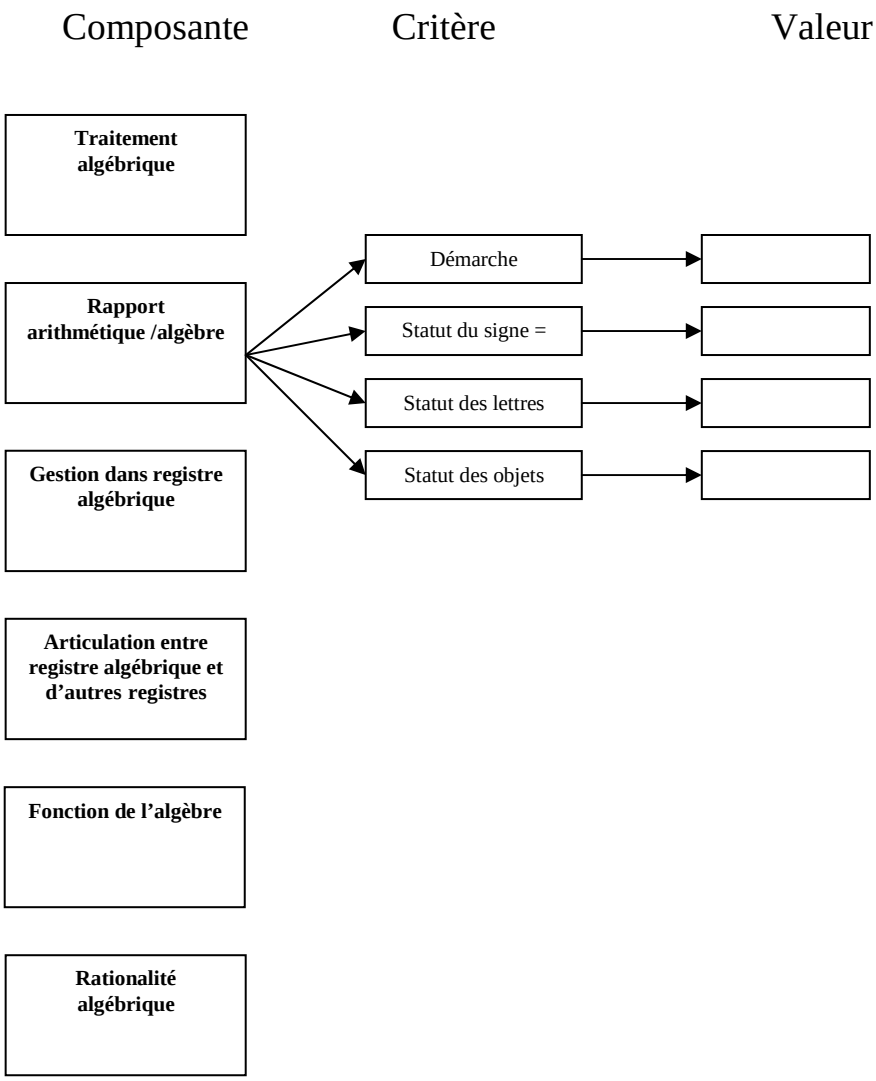
« Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions ***outil*** *et* ***objet*** *:*

- *Sur le plan outil, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension outil de l'algèbre aussi bien dans des tâches de résolution que de preuve, « l'arithmétique traditionnelle » n'en étant qu'un parmi d'autres.*

- *Sur le plan objet, nous prenons en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et ses sens. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions. »*[18] (Grugeon, 1997, p. 179).

En s'appuyant sur les recherches existantes en didactique de l'algèbre, et plus particulièrement au niveau de la rupture arithmétique/algèbre, l'auteur construit une structure multidimensionnelle d'analyse de la compétence algébrique adaptée aux niveaux d'enseignement choisi qui est mise en œuvre pour analyser des situations d'enseignement. Cette structure d'analyse est schématisée par la représentation arborescente extraite de l'annexe de l'article « *Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire* » de Grugeon (1997) que nous présentons ci-dessous.

[18] Nous nous permettons de citer ce long passage.



Représentation arborescente de la structure d'analyse

Elle comprend quatre critères au niveau du rapport arithmétique / algèbre donnés par la table suivante :

Critères	Valeurs globales
Démarche de résolution	Démarche arithmétique Démarche algébrique
Statut du signe d'égalité	Signe d'annonce de résultat Signe de relation d'équivalence
Statut des lettres	Objet (abréviation, lettre, mesure,…) Nombre (inconnue, nombre généralisé, variable,…)
Statut des objets Conception au sens de Sfard	Expression algébrique, formule, équation, fonction Structural, procédural, pseudo – structural

Table II. 1 : Structure d'analyse multidimensionnelle

Cette structure d'analyse permet à l'auteur d'étudier les rapports personnels et de les traduire en termes de profils des élèves. Au niveau de l'étude des rapports personnels et des

profils d'élèves, l'auteur a été amené à définir le profil de l'élève comme une description des principaux traits de son comportement et de son fonctionnement. Dans cette description, elle a retenu trois niveaux :

1. Niveau 1 : les compétences algébriques.
2. Niveau 2 : la cohérence de fonctionnement d'un même élève.
3. Niveau 3 : la flexibilité dans l'articulation entre registres.

C'est au niveau 3 que l'articulation sémantique / syntaxe intervient. En effet, la flexibilité réside dans les liaisons effectives et les règles de conversion entre les différents registres au niveau desquels elle s'est intéressée dans la composante du rapport arithmétique/algèbre à laquelle sont associés quatre critères prenant des valeurs globales en arithmétique et en algèbre.

Enfin, l'auteur indique l'importance du choix de la théorie anthropologique qui selon elle :

« ...a permis de capitaliser des résultats sur le fonctionnement des différents éléments du système didactique. » (Grugeon, 1997, p. 203).

et celui de la structure multidimensionnelle qui est complexe mais aussi très importante pour comprendre les phénomènes didactiques.

III. 2. Commentaire

L'auteur met au cœur de son travail d'analyse l'articulation sémantique / syntaxe qui permet selon elle de repérer la compétence algébrique suivant l'axe objet :

« *La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions.* » (Grugeon, 1997, p. 179).

Il nous semble cependant que dans la structure d'analyse multidimensionnelle, les éléments concernant l'égalité d'une part et le statut des lettres d'autre part, mériteraient d'être mieux explicités en référence aux catégories logiques.

C'est au niveau du point de vue de la relation d'équivalence ou binaire indiquée par l'auteur que :

- Dans une équation nous pensons qu'il est nécessaire de faire une extension de l'égalité entre deux expressions par exemple $2x+5=x+8$ qui pourrait être vérifiée ou pas suivant les valeurs associées aux lettres. Ceci pourrait être traduit en termes de phrases ouvertes sans valeurs de vérité c'est à dire des phrases

insaturées. Une telle phrase donne lieu à une proposition par attribution d'un objet (ici un nombre) à la variable x qui produirait un couple :

1. Le réel 3 donne le couple $(11,11)$ qui satisfait la relation $2x+5=x+8$.
2. Le réel 5 donne le couple $(15,13)$ qui ne satisfait pas la relation.

- Une identité de la forme $x+2x=3x$ qui permet de substituer $3x$ à $x+2x$ sans rien connaître de x. Ce qui donnera à x soit un statut d'élément générique pour exprimer le fait que n'importe quelle valeur attribuée à x est solution de l'équation soit un statut de variable liée par un quantificateur universel. Autrement dit : x est une variable muette et on a : $\forall x \in IR, (2x+x=3x)$. Nous pouvons dire, également, qu'une identité peut également être établie par des transformations syntaxiques. Ainsi l'identité $\forall x \in IR, (2x+x=3x)$ s'établit syntaxiquement en utilisant les propriétés de l'addition et de la multiplication et signifie que les deux programmes de calcul associés donnent le même résultat quelque soit le nombre de départ auquel ils s'appliquent.

L'auteur choisit de considérer que l'inconnue est un nombre faisant partie du domaine algébrique. De notre point de vue, l'inconnue se situe à l'interface entre arithmétique et algèbre. En effet, l'inconnue en arithmétique, est en général un nom d'objet, c'est-à-dire ici un terme singulier (un nombre) représentant la mesure d'une grandeur que l'on cherche à déterminer, donnant lieu a des énoncés singuliers, tandis qu'en algèbre, l'inconnue est interprétée le plus souvent comme une variable dans des phrases ouvertes selon le point de vue de Tarski. Par exemple : « *peut-on trouver un cube dont le volume mesuré en* cm^3 *est égal à l'aire latérale mesurée en* cm^2 *diminuée de* $25cm^2$ *et dont l'arrête soit mesurée en* cm *par un entier.* »

Supposons qu'un tel cube existe. Notons c la mesure en cm de chacune de ses arrêtes.

c vérifie l'égalité $c^3=6c^2-25$. Il y a plusieurs manières de résoudre en restant dans l'arithmétique. On peut faire des essais sachant qu'au delà de c^3 est plus grand que $6c^2$.

On peut remarquer que $c^2(6-c)=25$, donc c^2 divise 25, donc soit $c^2=1$ soit $c^2=25$ puisque c^2 est un carré.

On peut aussi passer à l'algèbre :

c est solution de l'équation de degré 3 : $x^3-6x^2+25=0$.

Comme on n'a pas actuellement de procédure syntaxique au niveau du collège, ni même du lycée, il faut chercher une première solution entière, ce qui nous renvoie aux procédures arithmétiques et au point de vue sémantique, une fois qu'on a trouvé que 5 est solution, on peut factoriser par $x-5$, on obtient $(x-5)(x^2-x-5)$. Il faut encore prouver qu'il n'y a pas d'autre solution entière ; mais bien sûr, on peut aussi résoudre sur IR tout entier.

IV. Catherine Sackur et Maryse Maurel : Les inéquations en classe de seconde

IV. 1. Analyse

Il s'agit ici d'un travail sur la résolution des inéquations en classe de seconde en France, ce qui correspond à la deuxième année de l'enseignement secondaire tunisien. L'accent est mis sur des erreurs fréquentes et tenaces en Algèbre et en particulier : « Si $a<b$ alors $ax<bx$ ».

Cette recherche se fonde sur la théorie didactique des jeux de cadres de Régine Douady d'une part, et se réfère explicitement à la logique de Frege afin de poser le problème de la nécessité des énoncés mathématiques d'autre part. Dans ce travail, Sackur & Maurel (2000) soulignent que les connaissances mathématiques des élèves risquent de se réduire à une liste de règles sans liens entre elles et supposent que le fait de connaître la nature du savoir mathématique peut aider les élèves à apprendre, exploiter et même s'intéresser aux mathématiques. En outre, le fait d'acquérir cette connaissance permettra, éventuellement, à l'élève de résoudre n'importe quel problème mathématique. En effet,

« *Nous affirmons qu'en algèbre, il ne suffit pas d'appliquer des règles formelles telles les identités remarquables, qu'il y a aussi les règles du jeu (au sens de Wittgenstein : celle qui règlent la nature de l'activité mathématique) dont découle, entre autres choses, la nécessité des énoncés. Il faudra certes institutionnaliser la règle formelle, mais aussi ce qui donne sens à cette règle dans l'ensemble des mathématiques, c'est à dire ce qui fait que si elle était autre, c'est l'ensemble de l'algèbre qui s'effondrait.* » (*Sackur*, 2000, p. 12).

Pour caractériser l'activité des élèves, les auteurs introduisent deux notions : la conformité est définie comme l'accord avec les règles édictées par autrui (professeur qui représente les mathématiciens…) et la *performance* représente l'accord avec la réalité mathématique ; que l'on peut situer au niveau de l'interprétation dans *un domaine de réalité donné* (par exemple l'ensemble ordonné des nombres réels).

L'exercice proposé aux élèves était de résoudre une inéquation du type : $\frac{3}{x} > x + 2$; l'objectif était de voir à quel point le passage conformité/performance est assuré. Les auteurs notent que cette flexibilité de passage est presque absente. Autrement dit, les élèves, ayant des connaissances locales, vont essayer de résoudre conformément à la règle : « Si $a < b$ alors $ax < bx$ ». Par contre, d'autres vont travailler en performance qui se traduit par la compréhension qui relève d'une expertise mathématique.

IV. 2. Commentaire

Il est assez rare que des travaux de didactique des mathématiques adoptent un point de vue aussi clairement appuyé sur les travaux des logiciens. Toutefois, en accord avec Durand-Guerrier, nous pensons que les travaux de Tarski constituent une avancée décisive dans le traitement des questions étudiées par Frege, fournissant pour le didacticien des outils permettant de traiter l'activité mathématique ordinaire. Il nous semble en effet que les notions de *conformité* et de la *performance*, utilisées dans cette recherche, peuvent se rapprocher de la dualité entre syntaxe et sémantique développées par notre cadre de la logique des prédicats. Cependant, si la question de la nécessité des énoncés mathématiques est de fait tout à fait essentielle, il nous semble que d'autres questions plus élémentaires font obstacle à l'appropriation de la signification des équations et inéquations, et c'est à celles-là que nous nous intéressons dans ce travail.

V. Raymond Duval

V. 1. Analyse

Dans la plupart de ses travaux didactiques, Duval (1988, 1993, 1996 et 1998) a étudié les conditions cognitives dans l'apprentissage des objets mathématiques, qui ne devrait pas être confondu avec leurs représentations. En fait,

« *La distinction entre objet et sa représentation est donc un point stratégique pour la compréhension des mathématiques.* » (Duval, 1993, p. 37).

et la diversification des représentations sémiotiques d'un même objet mathématique joue un rôle essentiel au niveau de l'activité mathématique. En effet,

« *… ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations*. » (Duval, 1993, p. 40).

Le fait qu'on réussisse à coordonner plusieurs registres de représentation sémiotique

d'un concept mathématique et à le reconnaître dans chacune des ses représentations, revient à dire qu'il existe une liaison entre sémiosis et néosis (Duval, 1998) qui peut être interprétée par la conversion de registres. De plus, Duval appelle *traitement* la transformation interne de représentation dans un même registre comme par exemple : « la substitution de nouvelles expressions dans des expressions données dans un même registre. ».

Duval a travaillé sur l'articulation des registres de représentation sémiotiques. Par exemple, il signale que plusieurs apprenants éprouvent des difficultés au niveau de l'articulation entre le registre graphique et celui des équations puisqu'il observe une impossibilité de déterminer l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique. Néanmoins, il explique que la raison profonde de ses difficultés ne réside pas au niveau des concepts mathématiques d'applications affines ; mais par la méconnaissance de la congruence sémiotique entre le registre de représentation graphique et celui des écritures algébriques.

« *En l'absence d'une prise en compte des règles sémiotiques de correspondance, les représentations graphiques restent des représentations aveugles pour la majorité des élèves de seconde et au-delà…* » (Duval, 1988, p. 236).

Cependant, il remarque que l'apprentissage spécifique ne s'effectue que dans le cas d'une démarche d'interprétation globale qui n'est autre qu'un passage de la représentation graphique à l'écriture algébrique.

V. 2. Commentaire

Nous retrouvons, dans les textes de Duval, l'idée de sens introduite par Frege. En fait, le passage de la représentation à la dénotation est commandé par la question de sens qui aidera le sujet à traiter. Néanmoins, la distinction entre sens et dénotation, déjà établie par Frege, est nécessaire pour réussir la conversion d'un registre à un autre. Par rapport a notre cadre d'étude, qui est l'algèbre élémentaire, nous pouvons dire qu'il apparaît clairement que l'articulation syntaxe / sémantique joue un rôle très important, non seulement au niveau des conversions de registres, mais également dans les traitements à l'intérieur d'un même registre.

Conclusion du chapitre

La revue de ces travaux didactiques met en lumière la pertinence d'un questionnement s'appuyant sur l'articulation sémantique et / ou syntaxique au niveau de l'algèbre et plus précisément au niveau des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue réelle, et montre que cet aspect, s'il est bien présent dans un certain nombre de travaux, est cependant relativement peu développé. Nous savons que l'arithmétique est un domaine en

étroite liaison avec le calcul numérique alors que l'algèbre, au delà du seul domaine numérique, représente une théorie formelle et un outil essentiel pour la modélisation des systèmes intra et extra mathématiques. Nous considérons que le langage des calculs des prédicats est essentiel pour traduire des propriétés de tout système considéré et par la suite, il permettra de réaliser l'aller et le retour entre les registres numériques, graphiques et algébriques ; et en plus, d'assurer le passage au cadre de l'algèbre des fonctions.

En nous plaçant, pour conduire nos analyses, dans le calcul des prédicats du premier ordre, nous choisissons un cadre de référence épistémologique offrant un point de vue unificateur permettant de résoudre un certain nombre d'ambiguïtés. D'une manière générale, nous pouvons dire avec Durand Guerrier que :

« *Le point de vue « relation entre deux expressions dépendant d'une variable » est unificateur, puisqu'il fonde aussi bien la notion d'équation que celle d'identité algébrique.* » (Durand-Guerrier et al, 2000, p. 77).

Chapitre III
Etude historique et épistémologiques des objets équation, inéquation et fonction

Préliminaire : « L'épistémologie comme outil pour les analyses didactiques »

Avant d'être admis par la communauté scientifique, les concepts d'équation, inéquation et fonction ont subi plusieurs transformations tout au long de leur édification. La naissance de ces concepts n'est pas sans intérêt pour le didacticien. En outre,

« *…toute analyse didactique doit englober un aspect de nature épistémologique…* » (Dorier, 1997, p. 18).

Ainsi, une étude historique des conditions de production des savoirs mathématiques mises en jeu dans notre recherche peut être pertinente dans la suite de nos analyses didactiques. En effet, Dorier explique que

« *… une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du texte du savoir enseigné.* » (Dorier 1997, cité In Bardini, 2003, p. 19).

Par ailleurs, l'étude historique des savoirs mathématiques permet au didacticien de localiser les erreurs, de détecter les obstacles et les conceptions erronées autour d'une notion bien déterminée.

En particulier, une étude historique circonscrite des relations entre les concepts d'équation, inéquation et fonction, nous permettra d'avoir une idée plus claire et plus précise sur la formation de ces objets de savoir, et nous aidera à conduire notre étude didactique sur l'élaboration de ces notions au sein du système d'enseignement. En outre, plusieurs travaux didactiques (Dorier 2000, Bloch 2002, Battie 2003) ont montré la pertinence de l'étude historique et épistémologique du savoir mathématique puisqu'elle permet au chercheur de prendre en compte des variables didactiques qui peuvent jouer un rôle fondamental dans la

partie de son travail que Dorier nomme

« *le travail "de terrain" observations, expérimentations, analyses de productions d'élèves, etc.* » (Dorier, 2000, p. 9).

De même, Canguilhem souligne que

«… *L'histoire d'une science ne saurait être une simple collection de biographies, ni à plus forte raison un tableau chronologique agrémenté d'anecdotes. Elle doit être aussi une histoire de la formation, de la déformation et de la rectification de concepts scientifiques.* » (G. Canguilhem in Dorier, 2000, p. 15).

Pour cela, nous avons décidé de faire une étude historique sur les objets équation, inéquation et fonction afin de retrouver des éléments indicateurs qui soient pertinents pour notre cadre d'analyse, à savoir ceux qui nous permettent de repérer la dialectique syntaxe / sémantique, d'un point de vue logique, au moment de la formation de ces concepts.

Nous nous inscrivons dans une perspective classique en didactique des mathématiques défendue en particulier par Artigue (1990).

« Certes les contraintes qui gouvernent ces genèses (artificielles) ne sont pas identiques à celles qui ont gouverné la genèse historique, mais cette dernière reste néanmoins, pour le didacticien, un point d'ancrage de l'analyse didactique, sorte de promontoire d'observation, quand il s'agit d'analyser un processus d'enseignement donné ou une base de travail, s'il s'agit d'élaborer une telle genèse.

Ceci, pour une raison évidente, à savoir que les problèmes qui ont motivé de tel ou tel concept comme ceux qui ont gouverné son évolution sont constitutifs de la signification de ce concept et que le didacticien, dans son analyse, est nécessairement confronté à ce problème de la signification du concept.» (Artigue, 1990, p. 246).

En ce qui nous concerne, nous allons essayer de mieux cerner la nature épistémologique des objets de savoir à enseigner, des concepts d'équation, inéquation, et de fonction au niveau de l'algèbre élémentaire. Nous présenterons ci-dessous quelques moments importants dans le développement de ces concepts.

Nous avons choisi de partir de l'instant où s'offrent des données pertinentes et effectives qui nous renseignent sur nos questionnements de départ, à savoir ceux qui nous permettent de repérer la dialectique sémantique / syntaxe au moment de la formation de ces concepts mis en jeu. Pour cela, nous avons décidé d'étudier, de l'antiquité jusqu'à nos jours, les différentes méthodes de résolution des problèmes dans différentes civilisations.

Nos objets d'étude se situent au cœur de l'algèbre, cependant ils entretiennent des liens avec l'arithmétique et la géométrie. Comme le souligne Rashed (1984), il est intéressant de savoir se situer entre algèbre et arithmétique d'une part et algèbre et géométrie d'autre part, puisque

« Seule cette perspective, en effet, nous a permis de saisir le rôle capital et radicalement nouveau de l'algèbre dans la formation de la rationalité mathématiques » (Rashed, 1984, p. 9).

En outre, cette double dialectique entre arithmétique et algèbre et entre géométrie et algèbre

« … s'est en effet progressivement imposée à nos yeux comme un mouvement inductif destiné à étendre chacune de ces disciplines en refondant ses bases, en généralisant ses concepts et ses méthodes, parfois au prix de la négation et de l'élimination de certains d'entre eux. » (Rashed, 1984, p. 9).

Il est important de remarquer que depuis la plus haute Antiquité et jusqu'au dix-neuvième siècle, la résolution des équations algébriques de la forme $P(x)=0$, où P est un polynôme, a constitué le cœur de l'algèbre. Ceci renforce notre point de vue qui consiste à étudier les premiers mouvements des mathématiciens au niveau de la résolution des équations algébriques en vue de dégager des éléments pertinents relatifs à nos hypothèses de travail.

I. La résolution des équations algébriques

Dans ce qui suit nous allons étudier les différentes techniques de résolution, à travers différentes civilisations, à savoir les techniques arithmétiques et algébriques qui ont conduit à la détermination des racines et les techniques géométriques qui ont joué un rôle essentiel dans ces résolutions.

Nous n'allons pas reprendre le travail d'un historien de mathématiques; mais nous allons nous appuyer sur des dates qui nous semblent essentielles dans l'apparition des techniques géométriques, des techniques arithmétiques et des techniques algébriques de résolution des équations.

I. 1. L'algèbre géométrique chez les grecs[19]

Une contribution centrale dans les mathématiques grecques, est Euclide[20].

[19] Dans ce paragraphe, nous nous appuierons principalement sur l'ouvrage de Zeuthen (1902).
[20] Fondateur de l'école de mathématiques de l'Université d'Alexandrie et il reçue sa formation mathématique à l'Académie platonique d'Athènes.

« *Nous possédons, dans ses Éléments, un traité de géométrie qui sert toujours, dans plusieurs contrées, d'œuvres didactiques et qui renferme le corps des doctrines géométriques élémentaires dont, encore aujourd'hui, les principes essentiels sont partout, sous diverses formes, à la base de l'enseignement.* » (Zeuthen, 1902, p. 11).

De plus les mathématiciens grecs comme Thalès de Milet[21], Pythagore de samos[22], Platon[23] (329-428 avant J-C), Aristote, Eudoxe, les frères Ménechme et Dino strate, Hippocrate, Euclide[24] (environ 3OO ans avant J-C), Archimède mort en 213 avant J-C[25], Apollonius[26] (environ 2OO ans avant J-C) ont pu s'employer sur les mathématiques en s'appuyant sur la collaboration de la philosophie. Plus précisément,

« *Les mathématiciens de cette période qui nous ont laissé des ouvrages importants de Mathématique pure (Géométrie) et qui ont certainement de beaucoup dépassé les autres mathématiciens notables de leur temps sont : Euclide (300environ avant J-C), Archimède mort en 213 et Apollonius (environ 200 ans avant J-C).* » (Zeuthen, 1902, p. 19-20).

En particulier, les Grecs ont donné une si grande importance à la géométrie que

« *… en même temps que l'Arpentage, et au même titre, la logistique ou calcul, fut abandonné comme non scientifique par les géomètres proprement dit : aussi les Eléments d'Euclide font-ils aussi peu de cas de l'Arpentage que des autres usages numériques des mathématiques.* » (Zeuthen, 1902, p. 22-23).

En fait, ils représentaient géométriquement des grandeurs mais

« *Sans doute les grecs ne savaient rien des quantités négatives, pas plus que des quantités imaginaires : mais, à défaut des premières, les variations de la figure peuvent en partie présenter les mêmes généralisations que nous obtenons aujourd'hui au moyen des*

[21] C'est lui qui a deviné l'éclipse solaire du 28 mai 585 avant J-C et la plupart de ses connaissances émanent des égyptiens. En plus, il était le fondateur de l'école philosophique ionienne.

[22] Pythagore de Samos était un philosophe grec responsable d'importants développements en mathématique, astronomie et musique. Il fonda une école philosophique et religieuse à Crotone et eut de nombreux adeptes. Né vers 569 avant J-C et mort vers 494 avant J-C.

[23] Disciple de Socrate et fondateur de l'école appelée *Académie*. Il n'a pas emprunté son goût mathématique à Socrate puisqu'il s'est initié aux mathématiques et à la philosophie pythagoricienne.

[24] Dans ses *Eléments*, Euclide, qui vivait vers 300 ans avant J-C, avait réalisé un traité de géométrie qui est une œuvre didactique renfermant le corps de la géométrie élémentaires. Il avait réalisé également une œuvre élémentaire intitulée d'un nom latin : *Data* et un écrit sur la *Division* des figures. Son œuvre constitue un véritable point central des mathématiques grecques.

[25] Mathématicien bien considéré qui a traité dans ses écrits : La sphère, le cylindre, mesure du cercle, les conoïdes, les sphéroïdes, les spirales, l'équilibre des figures planes, calcul de sable, quadrature de la parabole etc. En plus, il a énoncé une série de propositions appelées *lemmes d'Archimède*.

[26] Il a travaillé en Alexandrie et il a traité la section de l'espace, les contacts, les interrelations et les applications des mathématiques à l'astronomie.

quantités négatives. » (Zeuthen, 1902, p. 30).

Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à l'étude des différentes techniques, utilisées par les mathématiciens grecs, dans la résolution des équations du premier et du second degré.

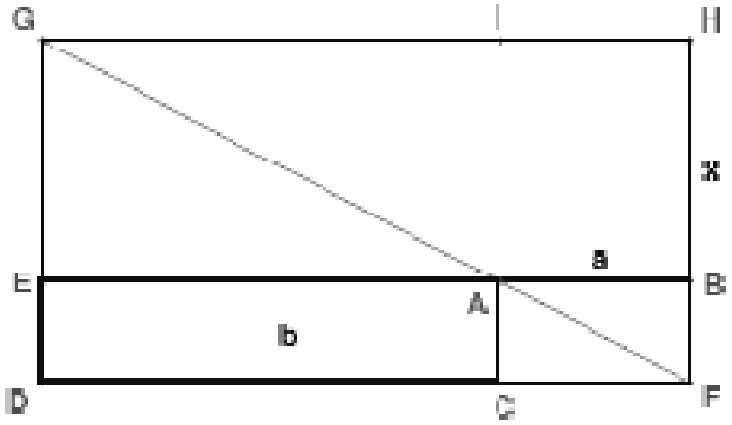
I. 1. 1. La résolution des équations du premier degré

Dans le cas des équations du premier degré, les résolutions se font à l'aide de la manipulation des grandeurs, rationnelles ou irrationnelles, qui sont représentées graphiquement par des segments rectilignes. Par ailleurs, toute opération d'addition et de soustraction se fait par prolongement de l'un des segments par l'autre ou en rapportant l'un des segments à l'autre. En plus, le produit de deux grandeurs est représenté par des rectangles ou des carrés dont les côtés représentent ces grandeurs.

La forme générale d'une équation du premier degré à une inconnue réelle est $ax = b$ ou $x = \frac{b}{a}$, où a, x et b sont des nombres positifs ou nuls. En plus, les facteurs a et x représentent, pour eux, des mesures de longueurs et le terme b est la mesure d'une aire.

Le problème du premier degré, nommé par les grecs : *application des surfaces*, se résout en se basant essentiellement sur le théorème d'Euclide dans la proposition 44 du premier élément sous une forme un peu plus générale[27]. On part d'un segment AB de longueur a et d'un rectangle $ACDE$ d'aire b. Le point A étant aligné avec les points B et E est situé entre eux. On peut donc suivre la construction des points F, G, H et I en respectant les parallélismes et les alignements dans la figure. L'inconnue x mesure la longueur du côté BH et les triangles FGH, GFD, FAB, AFC, AGI et GAE ont des aires égales par symétrie d'où les rectangle $ACDE$ et $ABHI$ ont aussi des aires égales respectivement égales à b et ax.

[27] Les rectangles sont remplacés par des parallélogrammes à angles égaux.



Commentaire

Nous pouvons dire que la figure a un double rôle dans les résolutions des équations chez les Grecs en effet elle permet

- d'interpréter et de démontrer une certaine égalité.
- D'indiquer l'algorithme de construction effective de l'inconnue x.

Ceci montre la place du graphique dans la résolution algébrique des équations du premier degré d'une part et la capacité des grecs à travailler dans le cadre géométrique. Ce que nous pouvons interpréter comme une capacité à articuler deux points de vue dont le premier est sémantique qui s'explique par l'interprétation de l'égalité et le second se résume par un point de vue syntaxique à travers lequel les Grecs exploitaient des constructions algorithmiques pour déterminer l'inconnue.

I. 1. 2. La résolution des équations du second degré

Les opérations effectuées, par les Grecs, sur les quantités qu'ils représentaient géométriquement ont un rôle similaire à celui des opérations algébriques de nos jours.

Par exemple dans nos manuels d'enseignement, la démonstration du produit de deux nombres entiers qui ne dépend pas de l'ordre des facteurs ainsi que les identités remarquables du second degré se font en s'appuyant sur des figures géométriques comme les rectangles, carrés qui sont appelés par les grecs des *nombres plans* ou *nombres carrés*.

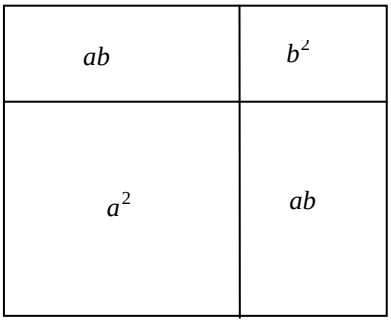
Les équations du second degré ont donné lieu à des grandeurs irrationnelles incommensurables et le grand mérite de s'être aperçu qu'on ne peut pas éviter ces grandeurs revient aux Pythagoriciens. Ainsi, toute grandeur peut être représentée en tant que longueur d'un segment d'une façon continue.

« *L'algèbre géométrique, aussi bien chez Euclide que chez d'autres, est à la base de tant de recherches que cette fréquence même constitue une preuve de la haute antiquité que nous lui pouvons attribuer, d'accord avec ce qu'on nous rapporte de la notion pythagoricienne de l'application des surfaces, et sa facile application à telle grandeurs que l'on veut, tant irrationnelles que rationnelles et, conséquemment, sa nature abstraite, conviennent bien à ce que dit Eudème de la façon dont Pythagore traitait la Géométrie, immatériellement*. » (Zeuthen, 1902, p. 30).

Zeuthen (1902) présente, d'une manière organisée, différentes techniques générales de résolution d'équations du second degré où il est parfois difficile de voir du premier coup d'œil quelles sont les parties qu'il traite, non seulement elles ne sont pas annoncées mais parfois il est nécessaire d'explorer les éléments d'Euclide[28]. En plus, il explique que la méthode d'*application des surfaces* qui consiste à représenter géométriquement des grandeurs générales par des surfaces dont l'addition ou la soustraction se basait sur l'attribution d'un côté commun, permet d'éviter l'arithmétique géométrique et en particulier l'emploie de la théorie des proportions qui reposait, au Vème siècle, sur l'usage exclusif des quantités commensurables. En outre, il explique que

« *Toutefois, les éléments d'Algèbre géométrique qui sont exposés ici, embrassent notamment des équations du second degré, c'est-à-dire le terrain sur lequel s'était fait sentir la nécessité d'une représentation autre qu'une représentation numérique, à cause de l'intervention des quantités irrationnelles : pour traiter ces équations on pouvait, il est vrai, se contenter de l'emploi de rectangles et de carrés…mais quand l'algèbre géométrique et son application se furent développées d'avantage, en particulier par la théorie des sections coniques, on l'élargit jusqu'à se servir d'autres figures.* » (Zeuthen, 1902, p. 42-43).

Les différentes techniques de résolution des équations générales du second degré se basaient sur l'utilisation de l'identité remarquable exprimée géométriquement par les Grecs[29],



[28] Les éléments explorés par Zeuthen, sont le premier, le deuxième et le sixième livre des Eléments.
[29] Notons que les notations algébriques sur la figure ne sont pas dues aux Grecs.

laquelle se présentait sous deux formes.

La première forme correspond à l'écriture moderne de nos jours : $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ que les Grecs l'exprimaient par

« Un rectangle, dont les côtés sont eux-mêmes des sommes, est la somme de tous les rectangles ayant pour côtés un terme de chacune des sommes données »

La deuxième forme correspond à celle de $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ qui est « *une différence égale au carré de l'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant pour côtés* a *et* b ».

Avant de présenter quelques exemples des techniques de résolutions, il est important de rappeler que les Grecs ont traité des équations du second degré qui donnent des racines positives, étant donné qu'ils n'avaient aucune idée sur les nombres négatifs. Par ailleurs, ils étaient obligés de traiter différentes formes de ces équations qui donnent des solutions positives. En plus, concernant les cas où les racines des équations du second degré sont des irrationnels, les Grecs n'ont pas introduit des valeurs approximatives mais ils ont poursuivi leurs calculs avec les quantités retrouvées par construction. C'est-à-dire qu'ils poursuivaient leurs résolutions en s'appuyant sur les segments retrouvés par construction.

Nous présentons ainsi deux exemples éclairants de résolution des équations du second degré

- **L'application elliptique des surfaces**

La résolution des équations, qui correspondent dans notre langage moderne aux équations de type $ax - x^2 = b^2$, relève d'un problème appelé, chez les grecs, *application elliptiques des surfaces*[30] (cf. Zeuthen, 1902, p. 37).

Ce problème a été énoncé sous différentes formes dans lesquelles on demande de

1) « *Construire, sur un segment donné* $AB = (a)$, *un rectangle* AM *égale à un carré donné* (b^2), *de telle sorte que la surface manquant, au rectangle* ax *sur* AB, *soit un carré* $BM = x^2$. »
2) « *partager un segment* AB *donné en deux autres qui forment un rectangle de surface donnée…* »

[30] Consiste à construire un segment donné de longueur a et un rectangle d'aire égale à celle d'un carré donné, égale à $(b)^2$, de telle sorte que la portion de surface manquant au rectangle d'aire ax sur soit un carré $(b^2 - x^2)$.

3) *« déterminer deux quantités dont on connait la somme et le produit*[31]*. »*

Ce type de problème entrainait un inconvénient qui s'explique par le fait que les anciens donnaient une seule des deux solutions, si elles existaient, de ce type d'équation. En revanche, ce type d'inconvénients disparait lorsqu'on résout l'équation de type $ax + x^2 = b^2$.

- **L'application hyperbolique des surfaces**

Les équations de la forme $ax + x^2 = b^2$ s'expriment, pour les anciens, sous différentes formes parmi lesquelles on a :

1) « *sur un segment donné* $AB = (a)$ *construire un rectangle* AM *égale à un carré donné* (b^2) *de telle sorte que la portion de surface* BM *excédante soit un carré* x^2*. »*

2) *« Déterminer deux quantités, connaissant leur différence et leur produit. »*

Comme nous l'avons expliqué ci-dessus et du fait que les Grecs n'avaient aucune idée sur les quantités négatives, la solution de l'équation du second degré est déterminée géométriquement. Dans ce cas, les anciens supposaient que le terme connu, qui est dans notre cas (b^2), devait être une surface.

Euclide nous montre comment il pouvait transformer un rectangle en un carré sans faire recours à la moyenne proportionnelle d'Eudoxe[32] en s'appuyant sur une construction qui repose sur les propositions (II .5 et 6)[33] des Eléments d'après lesquels on représente un rectangle sous la forme d'une différence entre deux carrés. Ainsi, le côté du carré, qui devrait être égal au côté du rectangle, se construit en s'appuyant sur le théorème de Pythagore.

Conclusion

Nous pouvons conclure d'après cette étude des techniques de résolution des équations du second degré que d'une part les Grecs donnent une justification géométrique qui permet de donner un sens, au problème algébrique, lequel permet de conclure sur l'existence de la racine et d'autre part, si la racine existe, une construction algorithmique de la quantité cherchée qui se fait à partir d'un segment donné de longueur $\frac{a}{2}$ et d'un carré d'aire b^2, permet de résoudre

[31] Zeuthen (1902) montre que d'après les Data d'Euclide les anciens ont reconnu cette forme de problème.

[32] Une théorie qui semble à Zeuthen incomplète puisqu'elle n'était valable que dans le cas des côtés commensurables.

[33] Théorème qui comporte immédiatement la solution des deux problèmes énoncés dans Zeuthen (1902, p 38-39) dont le premier est énoncé comme suit : « *partager un segment donné* AB *en deux autres qui forment un rectangle de surface donnée* » et le deuxième « *Déterminer deux segments (AD et BD) dont on donne la différence et le rectangle (égal au carré* b^2 *)* ».

le problème.

Ceci montre que les mathématiciens Grecs mariaient les procédures syntaxiques et sémantiques, comme le faisait également Aristote dans *Les Premiers Analytiques*.

I. 1. 3. La résolution des inéquations par Diophante d'Alexandrie

Nous ne pouvons pas passer sans avoir souligné l'importance des travaux de Diophante et ses apports dans la théorie des nombres. En plus, Diophante a montré qu'il connait les techniques de résolution des équations du second degré tout en les appliquant à des modèles d'inéquations.

Par exemple lorsqu'il veut résoudre l'inéquation $2x^2 > 6x + 18$[34] il commence par la résolution de l'équation $2x^2 = 6x + 18$ et par la suite il s'intéresse à déterminer des solutions rationnelles en s'appuyant sur des approximations en nombres entiers de $\sqrt{45}$. Diophante trouve que $6 < \sqrt{45} < 7$, il prend l'entier 7, comme étant la limite supérieure, qui satisfait aux conditions du problème et ensuite il exploite des techniques de résolution[35] grecques qui le conduisent à prouver qu'il y a au moins trois nombres qui doivent satisfaire le problème[36].

La résolution des inéquations ne s'est pas limitée au livre VI de Diophante ; mais elle continue d'être présente dans les livres VII, où il a résolu des doubles inégalités[37].

Conclusion

La maitrise du système opératoire sur des quantités représentées géométriquement pour résoudre des problèmes complexes relevant du domaine algébrique mobilise des aspects sémantiques (interprétations géométriques) et syntaxiques (utilisation d'algorithmes). Ceci confirme une de nos hypothèses qui consiste dans le fait que le point de vue de Duval sur les registres de représentations sémiotiques pourrait être enrichi par l'articulation sémantique / syntaxe dans les résolutions puisqu'on peut articuler les deux points de vue dans un même registre, ce que montrent bien les résolutions Grecques, qui articulent les deux points de vue dans le registre géométrique.

---

[34] Consulter Ver Eecke (1959) qui montre, dans les pages 177 à 181 du chapitre XXXIX du livre IV, la technique de Diophante pour résoudre quelques inéquations.

[35] Déterminer l'inconnue revient, pour Diophante, à déterminer les arithmes.

[36] Dont un extrait de Ver Eecke (1959) « *Lorsque nous résolvons une pareille équation, nous multiplions la moitié de la quantité d'arithmes par elle-même ; ce qui donne 9, et nous multiplions la quantité 2 des carrés d'arithme par 18 unités ; ce qui donne 36. Ajoutons à 9, ce donne 45, dont la racine n'est pas plus petite que 6 unités. Ajoutons la moitié de la quantité d'arithmes, [ce qui ne donne pas moins que 10 unités, et divisons par la quantité des carrés d'arithmes] ; ce qui ne donne pas moins que 5 unités…* ».

[37] Résolution des inéquations $k^2 + 60 > 22k$ & $k^2 + 60 < 24k$.

I. 2. La résolution des équations chez les arabes

Au début du IXème siècle, Mohamed ibn Musa Al-Khawarizmi (780-850) s'est distingué de ses prédécesseurs Babyloniens, Grecs, ou Indiens par son intérêt à justifier les algorithmes de résolution des équations. En effet, il était le premier mathématicien à avoir présenté une théorie des équations dans son ouvrage, *Kitab al-Jabr wal muquabal*[38]. Par ailleurs,

« *C'est la première fois dans l'histoire que se trouve façonné le mot « Algèbre », et qu'il apparait dans un titre pour désigner une discipline ; mais l'autonomie de celle-ci n'est pas seulement assurée par un titre qui lui soit consacré, elle est également consolidée par la conception d'un nouveau vocabulaire technique destiné à désigner les objets et les opérations.* » (Rashed, 1984, p. 17).

Al-Khawarizmi a énoncé dans son projet qu'il allait de fournir des méthodes de résolution de problèmes liés aux calculs d'héritage, les transactions commerciales, les problèmes d'arpentage des terres ou d'architecture etc. En plus, il a proposé les termes primitifs et les concepts de l'Algèbre et d'Al-Muquabala ainsi que les bases qui permettent de ramener les problèmes calculatoires à une algébrique et c'est Abdeljaouad (2003b) qui avait traduit ce qu'al-Khwarizmi avait écrit dans son projet dans lequel il explique

« *J'ai décrit les algorithmes exacts de résolution [de ces équations] et j'ai établi pour chacun un diagramme qui permet de déduire la justification [du résultat].* » (cité par Abdeljaouad EMF, 2003 b).

En plus, Rashed (1984, 2003) explique que, dans le livre d'Al-Khawarizmi, il existe deux classes des termes primitifs. D'une part, les termes purement algébriques qui ne sont, pour Al-Khawarizmi, que l'inconnue et son carré[39] et d'autre part les termes communs à l'algèbre et l'arithmétique qui sont les nombres rationnels positifs, les lois de l'arithmétique, l'égalité etc.

« *Il semble donc que, si al-Khawarizmi limite à eux l'usage des termes algébriques, cela ne tient pas à une méconnaissance des puissances supérieures de l'inconnue, mais renvoie plutôt à toute une conception de l'algèbre, de son domaine et de son extension.* » (Rashed, 1984, p. 22).

[38] Rashed montre que Al-Khawarizmi avait composé, sous le règne d'al-Ma'mun, son célèbre ouvrage entre 813 et 833.

[39] Rashed était surpris de l'ignorance d'Al Khawarizmi de la puissance cubique sachant qu'à l'époque on extrayait la racine cubique.

Parmi les principaux concepts et les notions mathématiques traités par Al-Khawarizmi nous avons les équations du premier et du second degré qui couvrent une classe infinie de problèmes géométriques ou arithmétiques, les binômes et les trinômes associés aux équations sur lesquelles il applique les différentes lois de l'arithmétique que sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. En ce qui nous concerne, nous trouvons que les objets traités par al-Khawarizmi se situent au cœur du domaine d'étude que nous réalisons. Pour cela, nous allons essayer de voir de plus près les techniques de résolution de ces équations effectuées par al-Khawarizmi.

Al-Khawarizmi retient six équations dont trois se ramènent au problème du premier degré que nous nommons aussi des équations binômes et les trois dernières à des problèmes du second degré que nous nommons par des équations trinômes. Djebbar (2005) explique que

« *…il présente, en phrases et sans aucun symbolisme, les six équations canoniques, selon un ordre qui tient compte de la nature et du nombre d'éléments dans les deux membres de l'équation. Chaque type d'équation est ensuite illustré par des exemples où l'auteur fait varier le coefficient du premier terme en le prenant égal, supérieur ou inférieur à un, puis pour chacun des exemples, l'auteur expose l'algorithme de résolution de l'équation.* » (Djebbar, 2005, p. 27).

Ces six équations sont équivalentes à celles de nos jours qui se ramènent aux formes suivantes :

1) $ax^2 = bx$

2) $ax^2 = c$

3) $bx = c$

4) $ax^2 + bx = c$

5) $ax^2 + c = bx$

6) $bx + c = ax^2$

Concernant la résolution de ces équations Rashed (1984) explique qu'on peut dire que le texte d'al-Khawarizmi se distingue de ce que l'on peut trouver dans les tablettes babyloniennes d'une part et des Arithmétiques de Diophante d'autre part. En effet, il ne s'agit plus d'une succession de problèmes à résoudre, mais d'un exposé qui parts des termes

primitifs dont les combinaisons doivent donner tous les prototypes possibles, lesquels vont constituer le véritable objet d'étude.

En plus, il exige de réduire chaque équation à la forme normale correspondante et il met en place les formules algorithmiques des solutions dont les preuves se basent essentiellement sur ce qu'il appelle des figures c'est-à-dire au moyen de l'égalité des aires qui s'inspire, vraisemblablement, par une connaissance des *Eléments* d'Euclide. Par exemple, pour résoudre l'équation quadratique de la forme $x^2 + px = q$, Al-Khawarizmi explique que la formule algorithmique en cela est que nous devons diviser la racine en deux moitiés c'est-à-dire $\frac{p}{2}$ que nous la multipliant ensuite par elle-même qui donne $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, on l'ajoute à q et on prend la racine carré du tout que nous lui retranchons la moitié des racines et nous obtenons enfin la racine carrée que nous cherchons. Ceci correspond à l'exploitation de la formule suivante : $x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$.

Remarquons que dans les deux autres cas d'équations quadratiques dont les formes sont respectivement $x^2 = px + q$ et $x^2 + q = px$ il obtient respectivement, d'après Rashed (1984),

- $x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$
- $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$, si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 > q$ et dans ce cas al-Khawarizmi précise que si $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = q$, la racine du carré est égale à la moitié des racines sans excédent ni diminution et dans le cas où $\left(\frac{p}{2}\right)^2 < q$ le problème est impossible.

Le livre d'al Khwarizmi était considéré par ses contemporains comme un ouvrage fondateur, qui pourra servir comme un outil permettant de clarifier des prémisses et consolider des bases théoriques. Toutefois, les preuves pragmatiques, qu'al-Khwarizmi avait présentées, sont basées sur une lecture de diagrammes qui n'ont pas satisfait toute la communauté des mathématiciens arabes. En effet, la communauté des géomètres comme pensaient que tout raisonnement doit s'appuyer explicitement sur les *Eléments* d'Euclide. Par contre, la communauté des nouveaux algébristes et plus particulièrement Al-Karaji (953-1029), voulait que cette tutelle Euclidienne s'estompe.

Ainsi, pour tracer de nouvelles voies et surmonter les obstacles théoriques et techniques de cette nouvelle discipline, les successeurs d'al-Khawarizmi on du s'engager sur deux courants de recherche dont les uns se sont engagés sur la voie de la continuité des idées d'al-Khawarizmi c'est-à-dire l'arithmétisation de l'algèbre comme Al-Karaji (953-1029) et Al- Samaw'al (1130-1174) et les autres sur la voie de l'opposition à ses idées en préfèrant recourir à la géométrie grecque pour résoudre certains problèmes comme Thabit ibn Qurra (826-901), Abu Kamil (850-930), Ibn Turk, Al- Mahani (mort vers 880) etc. Ainsi, toutes ces recherches et particulièrement celles qui ont été conduites par les algébristes arithméticiens, avaient contribué au projet de l'arithmétisation de l'algèbre.

« *Il s'agit d'une part, selon les termes même de l'un des successeurs d'al-Karaji, As Samaw'al, « d'opérer sur les inconnues au moyen de tous les instruments arithmétiques, comme l'arithméticien opère sur les connues » ; et d'autre part, d'opter de plus en plus pour les démonstrations algébriques, aux dépens des démonstrations géométriques.* » (Rashed, 1984, p. 27).

D'ailleurs, ceci s'est bien manifesté dans l'œuvre d'al-Karaji qui a contribué au développement du calcul algébrique abstrait.

« *C'est toujours en vue de l'extension du calcul algébrique qu'al-Karaji poursuit l'examen de l'application des opérations de l'arithmétique aux termes et aux expressions irrationnels.* » (Rashed, 1984, p. 34).

En plus, une des conséquences de ce grand projet, développé par al-Karaji, était d'étendre les concepts du Livre X des *Eléments* à toutes les quantités algébriques, ce qui se justifie lorsqu'il avait écrit

« … *immédiatement après s'être référé aux définitions d'Euclide, et sans transition : « Je montre comment ces quantités [incommensurables, irrationnelles] sont transposées en nombres.* » » (Rashed, 1984, p. 36).

Remarquons qu'al-Karaji a repris, d'une part, les équations canoniques traitées par al-Khawarizmi et il a développé la résolution des équations de degré supérieur et en plus il avait développé l'étude des systèmes linéaires traités par Abu Kamil, et, d'autre part, des interprétations algébriques de l'arithmétique de Diophante.

Nous pouvons donc supposer qu'al-Karaji, qui est un grand connaisseur de l'arithmétique de Diophante, est le véritable inventeur de l'algèbre puisqu'il a complété la boite à outil algébrique à partir des définitions, propriétés et propositions de l'arithmétique

des entiers naturels, des fractions et aussi celle des irrationnels quadratiques et en y ajoutant un maximum d'identités algébriques. Ces propositions sont :

« *…toutes démontrées géométriquement à partir des Livres II, VII et X des Eléments.* » (cité par Abdeljaouad EMF, 2003 b).

C'est à partir de cette période qu'on enregistre un détachement de la tutelle de géométrie par l'intégration des techniques simples et complexes de l'arithmétique numérique élaborée par Diophante. En effet, cette nouvelle discipline s'est développée par al-Karaji et ses héritiers.

As Samaw'al (1130-1180) qui a poursuivi les travaux d'al-Karaji à savoir

« *… comment utiliser les instruments arithmétiques dans les quantités irrationnelles (al-maqadir, al summ ?)* » (Rashed, 1984, p. 48).

Mais aussi, il a contribué à la généralisation de la division d'un polynôme à coefficients rationnels.

« *Mais al-Karaji et ses successeurs n'ont pas produit seulement dans les chapitres d'algèbre que l'on vient de voir ; leur œuvre s'étend à bien d'autres domaines : la théorie des équations bicarrées, l'analyse indéterminée, les systèmes d'équations linéaires.* » (Rashed, 1984, p. 50).

De même, al-Khayyami (1048-1131) avait développé la théorie des équations cubiques et c'est surtout chez son successeur, Sharaf al-Din al-Tusi (1135-1213), que la « fonction » est pensée au moyen des équations et des courbes puisque

« *… dans l'œuvre d'al-Khayyami et surtout dans celle d'al-Tusi, et sans entrer dans le détail de leur démonstration, on trouve parmi bien d'autres les exemples suivants :*

- *La méthode poursuivie pour résoudre* $x^3 + ax = b$ *revient à résoudre simultanément les deux équations :*

$$\left(x - \frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{b}{a}\right)^2 \text{ (équation du cercle)}$$

$x^2 = \sqrt{a}\,y$ *(équation de la parabole) où* $\sqrt{a}$ *est le double du paramètre de la parabole et* $\frac{b}{a}$ *est le diamètre du cercle.*

- *Ce qui donne l'équation :* $x\left(x^3 + ax - b\right) = 0$. *En éliminant la solution triviale on*

obtient bien l'équation cherchée.

- *La méthode poursuivie pour résoudre* $x^3 = ax + b$ *revient à résoudre simultanément les deux équations :*

  $x^2 = \sqrt{a}\,y$, *équation de la parabole*

  $x\left(\frac{b}{a} + x\right) = y^2$, *équation de l'hyperbole équilatère où* $\sqrt{a}$ *est le double du paramètre de la parabole et* $\frac{b}{a}$ *est le diamètre transversal de l'hyperbole.* » (Rashed, 1984, p. 56).

Par ailleurs, al-Tusi avait exploité des transformations affines lui permettant de réduire les équations cubiques à d'autres équations où il connait parfaitement la méthode de résolution. Houzel explique qu'al Tusi

« *… écrit ces équations sous la forme* $f(x) = c$ *en rassemblant au premier membre tous les termes de degré* ≥ 1 *(ce qui traduit des coefficients négatifs, en particulier le terme* $-x^3$*) et il ramène ainsi la discussion à la détermination du maximum de* $f(x)$ *pour* $x > 0$ » (Houzel, 1995, p. 244).

Rashed confirme ce point de vue et explique que

« *Pour résoudre ces équations, al-Tusi étudie le maximum des expressions algébriques. Il prend d'une manière systématique, sans toutefois la nommer, la dérivée première de ces expressions qui s'annule, et démontre que la racine de l'équation obtenue, substituée dans l'expression algébrique, donne le maximum.* » (Rashed, 1984, p. 59).

Dès qu'il détermine la racine r de l'équation cubique $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ il conclut que le polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d$ devient divisible par $(x - r)$ et par la suite il lui suffit de résoudre une équation du second degré où l'outil de résolution est disponible.

« *C'est ainsi que l'on voit apparaître avec ces algébristes l'emploi de la dérivée au cours de la discussion des équations algébriques et au cours de la résolution des équations numériques.* » (Rashed, 1984, p. 59).

Cependant, la notion de dérivée[40]

[40] Il s'agit ici de la dérivée au sens formel du terme, et non pas au sens de l'analyse moderne.

« *… fut condamnée à la discrétion par suite de la faiblesse du symbolisme algébrique*. » (Rashed, 1984, p. 59).

Remarquons que, pour l'école maghrébine, l'algèbre devient totalement indépendant de la géométrie et c'est Ibn al-Banna qui a montré une maitrise des méthodes de résolution des équations canoniques et une expertise au niveau de l'utilisation des identités remarquables pour justifier les algorithmes utilisés. D'ailleurs, contrairement à al-Khawarizmi et ses successeurs, il ne fait recours à aucune preuve géométrique et Abdeljaouad explique que :

« *…dans son « Kitab al-jabr wal muqabala », Ibn al-Banna n'a pas recours à la géométrie : il aborde directement la définition des nombres irrationnels et traite des diverses opérations sur ces nombres*. » (cité par Abdeljaouad EMF, 2003 b).

En plus il explique que dans la résolution des équations quadratiques

« *Ibn al-Haîm commence par prévenir qu'il n'aura pas recours aux justifications géométriques de la tradition euclidienne, mais qu'il utilisera des identités remarquables, plus commodes à comprendre par l'étudiant, même si- en définitive- la justification ultime de ces identités se trouve chez Euclide*.» (Abdeljaouad, 2003 a, p. 19).

Conclusion

Tout d'abord, il faut souligner que nous avons commencé, dans notre étude des mathématiques Arabes, à montrer la pertinence de l'algèbre qui a contribué à soulager l'imagination par l'allègement des constructions géométriques assez complexes d'une part et de ramener l'analyse arithmétique et géométrique à une étude générale des mathématiques plus claire et facile à manipuler d'autre part.

En plus, nous avons tenu à présenter quelques travaux de mathématiciens arabes, non pas pour traiter des faits historiques, mais pour montrer qu'il y a eu un changement du niveau théorique et technique dans les méthodes de résolution des équations, l'étude des courbes au moyen des équations, la localisation du discriminant dans la solution des équations cubiques qui étaient parmi les objets traités dans cette algèbre renouvelée.

C'est ainsi que l'on trouve avec ces algébristes, l'apparition, de l'usage des techniques algébriques purement syntaxiques qui sont exprimées par la rhétorique. Néanmoins, ceci pourrait nous permettre de faire l'hypothèse que les mathématiciens arabes ont travaillé dans les deux registres algébrique et géométrique où les techniques syntaxiques sont purement algébriques et les techniques sémantiques s'articulent entre le registre géométrique et le registre algébrique.

II. De la géométrie à l'émergence des courbes

II. 1. L'impact du passage de la rhétorique à l'écriture symbolique sur l'avancement des mathématiques

Les études réalisées en histoire des mathématiques depuis l'Antiquité, le moyen âge et jusqu'à la moitié du XVème siècle, montrent que les mathématiques ont été dominées par la pensée géométrique et même l'avancée remarquable des Arabes, après leur invention de l'algèbre, a rencontrée un obstacle qui semble être gênant pour l'avancée des traitements des problèmes. Cet obstacle réside dans le fait que la plupart des problèmes, quelles que soient leurs origines, étaient abordés avec un langage et des outils géométriques. C'est-à-dire que résoudre un problème revenait à donner une construction géométrique de sa solution tout en s'exprimant par la rhétorique.

Il faut attendre la fin du XVème siècle et le début du XVIème siècle pour que les premiers avancées du système d'écriture symbolique mathématique chez les Arabes ainsi que chez Viète[41] plus particulièrement permettent des avancées significatives dans ce domaine pour résoudre le problème que posait la rhétorique pour traiter des problèmes de géométrie et de calcul.

Rashed explique que

« *Parfois encore l'histoire de l'algèbre classique est relatée comme la succession de trois évènements séparés : la constitution de la théorie des équations quadratiques, la résolution plus ou moins générale de l'équation cubique, l'introduction et le développement du symbolisme algébrique.* » (Rashed, 1984, p. 43).

Cette algèbre symbolique consiste à

« *… employer systématiquement des lettres pour désigner des variables, inconnues ou constantes indéterminées. Notre* x *actuel est entièrement indépendant de la nature des éléments particuliers qu'il est censé représenter.* » (Ifrah, cité In Abdeljaouad, 2005, p. 8).

Ainsi la notation littérale algébrique a contribué à passer du particulier au général puisqu'une expression de la forme $ax+b$ ne représente plus un objet particulier, mais bien une forme générale de toute une catégorie de représentation de cette expression.

« *Cet usage généralisé des lettres de l'alphabet apparait pour la première fois chez Viète et devient opératoire avec Descartes et se conceptualise avec Leibniz…* » (Abdeljaouad, 2005, p. 8).

[41] François Viète (1540-1603) Son ouvrage célèbre fut sans doute son fameux traité de l'algèbre intitulé *In artem analyticam isagoge* publié à Tours en 1591. Dans cet ouvrage il propose une contribution originale à l'algèbre symbolique qui est sensiblement analogue à notre conception moderne.

Ceci a permis de résoudre le problème que posait la rhétorique pour traiter des problèmes de géométrie et de calcul. En plus,

« Cette invention de Viète dans l'écriture symbolique mathématique : la désignation dans le calcul de ce qu'on appela, à la suite de Leibniz, les constantes, fut en effet un élément essentiel du renversement de position entre géométrie et calcul. » (Serfati, 1999, p. 148).

Par ailleurs, la pensée géométrique, qui existait depuis l'antiquité, a continué à être dominante même après l'apparition du système symbolique d'écriture qui a contribué à l'algébrisation symbolique de la géométrie où tout est remplacé par les lettres de l'alphabet.

Comme nous venons de le remarquer ci-dessus, le système symbolique de Viète fut exploité par Descartes, Newton et Leibniz qui ont élargi ce système dans plusieurs directions et ils ont ouvert les champs pour une évolution assez remarquable des mathématiques. Parmi ces directions nous pouvons citer par exemple la résolution algébrique des équations polynomiales, les équations des courbes algébriques et transcendantales etc. Ainsi

« *était-on désormais en mesure de représenter par les équations à coefficient indéterminés les équations des courbes*. » (Serfati, 1999, p. 165).

Cette possibilité de déterminer les équations des courbes est très caractéristique du travail de Descartes que l'on retrouve même dans l'expression « équation cartésienne ».

Pour cela, nous avons décidé de voir de plus près les travaux de Descartes[42] et ses apports par rapport aux techniques de résolution des problèmes de l'algèbre et en particulier l'articulation courbe / équation. Puisque, rappelons le, l'une des hypothèses de notre travail consiste en la possibilité de faire émerger les courbes algébriques à travers une approche équationnelle.

Dans le paragraphe suivant nous n'allons pas reprendre toute l'étude historique de tous les travaux de Descartes mais nous allons essayer d'analyser de plus près ses contributions concernant les techniques qui lui ont permis de résoudre des problèmes qui se ramènent à la résolution des équations de la forme $P(x)=0$ ainsi que celles qui lui ont permis de caractériser des courbes géométrique particulières dont les équations se ramènent à celles de $P(x,y)=0$ où P est un polynôme à coefficients réels. Ceci est en vue de mettre en rapport, le cadre logique qui propose un point de vue unificateur dans le traitement des objets équation, courbe et fonction, et le cadre historique qui pourrait nous fournir des éléments indicateurs sur la formation de ses objets mathématiques et les liens qu'ils entretiennent.

[42] Il ne faut pas nier l'apport des autres mathématiciens.

II. 2. Descartes et le passage de l'arithmétique et de la géométrie à l'algèbre

Nous n'allons pas présenter Descartes[43] sans avoir remarqué qu'il avait des prédécesseurs qui ont contribué à l'édification des mathématiques modernes comme Fibonacci[44], Léonard de Vinci[45], Bombelli[46], Stevin[47], Kepler[48], Galilée[49], ou Cavalieri[50] qui étaient parmi les premiers mathématiciens ayant eu la volonté d'améliorer les modèles des œuvres grecques.

Descartes est un auteur central dans l'histoire des mathématiques modernes. Ses œuvres mathématiques et philosophiques ont contribués au développement des sciences. Il a établi ses mathématiques en s'appuyant sur la tradition des mathématiciens grecs tels qu'Euclide, Apollonius, Pappus, Archimède, etc. En outre, il s'est intéressé à des problèmes particuliers qui ont conduit à de nouvelles conceptions des objets et des démonstrations de la géométrie[51].

L'idée de ramener les courbes à des droites est tout à fait naturelle à la pensée humaine, mais le point difficile, dans cette période et même depuis l'antiquité, était de trouver des rapports qui permettent de déterminer les liens qui existent entre ces droites et ces courbes.

La contribution de Descartes à l'algèbre est assez remarquable puisqu'il avait exploité des notations algébriques comme par exemple

---

[43] René Descartes est née le 31 mars 1596 à la Haye, petit bourg entre Tours et Poitiers, mort à Stockholm le 11 février 1650. (cf. Colette, 1973-1979).

[44] Léonard de Pise (vers 1180-1250), mieux connus sous le nom de Fibonacci, ou « fils de Bonaccio ». Il étudia sous la direction d'un maître arabe et parcourt l'Egypte, la Syrie, la Grèce et la Sicile. Il composa en 1202 son ouvrage demeuré célèbre « *Liberabaci* ».

[45] Léonard de Vinci (1452-1519) est célèbre en mathématiques aux sciences et pour la théorie des perspectives.

[46] Rafael Bombelli (vers 1526-1573) il publia une *Algèbre* qui contribua à la solution de l'équation cubique.

[47] Simon Stevin (1548-1620). Ses préoccupations de nature mathématique et mécanique. Il connaissait les mathématiques d'Euclide, d'Apollonius, d'Al-Khawarizmi et la mécanique d'Archimède, Pappus, Léonard de Vinci etc.

[48] Johann Kepler (1571-1630). Astronome et mathématiciens allemand. Il a publié son « *Astronmia nova* » dans lequel il a étudié le mouvement planétaire et il a contribué à résoudre des problèmes liés à la détermination du genre de conique spécifié par un sommet donné.

[49] Galileo Galilei (1564-1642) il a étudié avec attention les œuvres des grands savants de l'Antiquité. Il a publié deux traités contenant plusieurs points de physique qui font appel aux mathématiques et fréquemment aux propriétés de l'infiniment grand et de l'infiniment petit.

[50] Bonaventura Cavalieri (1598-1647)Il écrivit des ouvrages sur les mathématiques, l'optique, l'astronomie et fut en grande partie l'artisan de l'introduction des logarithmes en Italie. Sa méthode connue en stéréométrie sous le nom de « théorème de Cavalieri » dans laquelle il énonce d'après Collette : « *Si deux solides ont même hauteur et si des sections qui sont obtenues par des plans parallèles aux bases et à égales distance de celles-ci sont toujours dans un rapport donné, alors les volumes des solides sont aussi dans le même rapport.* » (Collette, 1973, p. 197)

[51] « *La géométrie de Descartes est divisée en trois livres : le premier traite des problèmes qu'on peut construire en n'employant que des cercles et des lignes droites. Le second porte sur la nature des lignes courbes, tandis que le livre III couvre la construction « des problèmes solides ou plus que solides ».* » (Colette, 1975, p. 8)

« *…la symbolisation des inconnues par les dernières lettres de l'alphabet,* x, y, z, *et des connues par les premières,* a, b, c *; les puissances en exposant* x^3, x^4*… (sauf pour* x^2 *encore écrit* xx*) la mise en équation par l'égalité à* 0. » (Belaval, 1960, p. 280).

Ce qui a contribué à l'économie d'un grand nombre de mots mais aussi à se débarrasser de certains éléments qui occupent l'esprit au moment où on traite plusieurs choses à la fois.

« *Descartes a toujours souhaité que son lecteur soit mathématicien, ou qu'il s'exerce aux mathématiques, mais il précise aussi qu'il ne pense pas à la connaissance mathématique ordinaire de l'arithmétique et de la géométrie…, c'est qu'il a vu dans la façon générale avec laquelle le mathématicien résout les problèmes concernant toutes les coniques ce qu'il nomme « une métaphysique de la géométrie » (lettre à Mersenne du 9 janvier 1639, [5], p. 824).* » (Barbin, 1996, p. 44-45).

Hoefer (1984) écrit

« *… que les mathématiques étaient pour lui un délassement. Ce fut vers la même époque qu'il inventa par le moyen d'une parabole, « l'art de construire d'une manière générale toutes sortes de problèmes solides réduits à une équation trois ou quatre dimensions* ». » (Hoefer, 1874, p. 390).

Nous n'allons pas étudier dans ce qui suit tous les problèmes traités par Descartes mais nous essayerons d'analyser ses techniques de résolutions dans des cas de problèmes qui sont, *a priori*, en rapport avec le traitement actuel, dans l'enseignement tunisien, des équations, courbes et fonctions au secondaire. Rappelons, que Descartes a traité[52] un nombre assez important de problèmes tant en mathématiques que dans d'autres disciplines. Descartes a réussi à faire de la géométrie comme une science, dans de la mesure où non seulement, la géométrie et l'arithmétique sont des branches des mathématiques, mais également l'astronomie, l'optique[53], la mécanique, lesquelles sont englobées dans une mathématique universelle.

Il s'est inspiré des travaux d'Euclide sur les transversales[54], théorie à laquelle se

[52] *Descartes* avait traité plusieurs problèmes. Nous pouvons citer par exemple la détermination du nombre des racines en fonction du degré de l'équation, la détermination des tangentes aux courbes, la factorisation des polynômes, les tourbillons de *Descartes* qui ont été inconciliables avec les lois de la mécaniques … etc.

[53] « *Les années 1626 et 1627 de son séjour à Paris, il les employa en grande partie à des recherche sur l'optique.*» (Hoefer, 1874, p. 391)

[54] Euclide montre qu'étant donnée quatre droites issues du même point, elles forment sur une transversale, menée arbitrairement dans leur plan, quatre segments qui ont entre eux un certain rapport constant, quelque soit la transversale.

rattache le fameux problème de Pappus où il s'agissait,

« *étant données plusieurs droites, de trouver le lieu géométrique d'un point tel que les perpendiculaires, ou, plus généralement, les obliques abaissées de ce point sur ces droites, sous des angles donnés, satisfassent à la condition, que le produit de certaines d'entre elles fût dans un rapport constant avec le produit de toutes les autres.* » (Hoefer, 1874, p. 392).

Ce problème qui était traité par Euclide, Apollonius a été repris par Descartes, qui lui a associé le nom de *Problème de Pappus*.

« *Ce fut probablement à cette occasion que Descartes, contrairement à son dédain habituel pour le passé, écrivait ces lignes d'une saisissante justesse : « Je me persuade que certains germes primitifs des vérités que la nature a déposé dans l'intelligence humaine, et que nous étouffons en nous à force de lire et d'entendre tant d'erreurs diverses, avaient, dans cette simple et naïve antiquité, tant de vigueur et de force, que les hommes éclairés de cette lumière de raison qui leurs faisait préférer la vertu aux plaisirs, l'honnête à l'utile, encore qu'ils ne sussent pas la raison de cette préférence, d'étaient fait des idées vraies de la philosophie et des mathématiques, quoi qu'ils ne pussent pas encore pousser ces sciences jusqu'à la perfection. Or, je crois rencontrer quelques traces des ces mathématiques véritables dans Pappus et Diophante. » (Descartes, Règles pour la direction de l'esprit, IVème règle.)* » (Hoefer, 1874, p. 392).

Ce problème, n'a été traité géométriquement, par Euclide et Pappus, que dans le cas de trois ou quatre droites et il admet comme solution, selon Descartes, non pas seulement des sections coniques, mais aussi la circonférence d'un cercle ou une ligne droite.

A partir de ce cas de problèmes découle la propriété générale des sections coniques : « Quand un quadrilatère quelconque est inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbe à deux côtés opposées du quadrilatère est au produit des distances du même point aux deux autres côtés dans un rapport constant. ». Par ailleurs, Descartes continu la résolution de ce problème pour un nombre assez grand de lignes jusqu'à l'infini.

« *… il y faudra employer une ligne courbe encore d'un degré plus composée que la précédente & ainsi à l'infini.* » (Smith, 1954, p. 24).

En plus il explique que dans le cas où

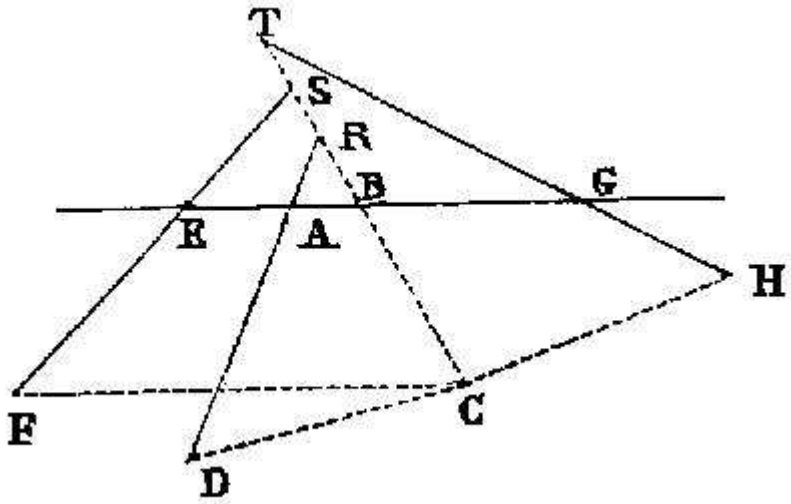
« *… toutes celles qui font d'un degré plus composées y peuvent servir, & ainsi à l'infini.* » (Smith, 1954, p. 27).

Dans notre étude, nous allons nous limiter au cas des trois ou quatre lignes traité par Descartes et qui nous parait en parfait accord avec les objets d'enseignement que nous étudions.

Descartes supposait ce cas comme étant le plus simple puisqu'il a écrit que

« En sorte que je pense avoir entièrement satisfait à ce que Pappus nous dit avoir été cherché en ceci par les anciens & je tacherai d'en mettre la démonstration en peu de mots car il m'ennuie de ça d'en tout écrire. » (Smith, 1954, p. 27).

Descartes propose dans son Livre Premier une démonstration de la résolution du problème géométrique de Pappus où il suppose le problème déjà résolu et il se base par la suite sur la figure ci-dessous.



(Figure tirée du Livre Premier de Descartes dans Smith (1954)

Ainsi, nous pouvons dire que déduire la propriété générale des coniques qui se traduit par le fait que

« *Quand un quadrilatère quelconque est inscrit dans une conique, le produit des distances de chaque point de la courbes à deux côtés opposés du quadrilatère est au produit des distances du même point aux deux autres côtés dans un rapport constant.* » (Hoefer, 1874, p. 393).

Descartes à fait du problème de Pappus sa première exploration des applications de sa géométrie où il était capable de trouver deux lignes dont l'une augmente suivant que l'autre diminue dans un rapport constant. Ce qui lui a permit de tracer des courbes mais aussi à exprimer ce phénomène d'une façon algébrique.

« … *Descartes trouva dans ces expressions tout un résumé commode, un tableau raccourci des propriétés manifestes d'une courbe, en même temps la clef de ses propriétés les*

plus abstraites. » (Hoefer, 1874, p. 397).

Après un long enchainement[55], il arrive à démontrer que la solution du problème est traduite par l'équation : $y = m - \frac{n}{z} + \sqrt{m^2 + 0x - \frac{p}{m}x^2}$

Où la solution est représentée dans notre langage mathématique actuel à l'une des équations suivantes : $y^2 = px$, $y^2 = px + \frac{p}{d}x^2$, $y^2 = px - \frac{p}{d}x^2$ qui représentent respectivement une parabole, une ellipse et une hyperbole

A la fin de sa démonstration Descartes explique que

« *Au reste a cause que les équations, qui ne montent que jusqu'au carré, sont toutes comprises en ce que je viens d'expliquer ; non seulement le problème des anciens en 3 & 4 lignes est ici entièrement achevé ; mais aussi tout ce qui appartient à ce qu'ils nommaient la composition des lieux solides ; & par conséquent aussi à celle des lieux plans à cause qu'ils sont compris dans les solides… et si cette ligne est droite, ou circulaire, on la nomme un lieu plan. Mais si c'est une parabole, ou une hyperbole, ou une ellipse, on la nomme un lieu solide… on peut venir à une équation qui contient deux quantités inconnues, & est pareille à quelqu'une de celle que je viens de résoudre.* » (Smith, 1954, p. 81).

Nous pouvons dire ainsi qu'une courbe n'est autre, au fond, qu'une solution géométrique d'un problème indéterminé qui a une infinité de solutions que les anciens appelaient *lieu géométrique*. Même s'ils n'ont pas pu exprimer les courbes par des équations, ils étaient capables de dire que ce lieu n'est autre que la suite d'une infinité de points satisfaisant à une condition bien déterminée. Nous pouvons donner comme exemple le cercle qui a été caractérisé comme étant le lieu de tous les points indiquant les sommets des angles droits qu'on peut former sur une même base donnée qui n'est autre que le diamètre du cercle.

On voit bien que Descartes a affirmé la simplicité de l'interprétation des lignes qui sont du premier degré, qui correspondent actuellement aux équations du premier degré à deux inconnues réelles, et le cercle, la parabole et l'hyperbole correspondent aux équations du second degré à deux inconnues réelles ayant l'une des formes présentées ci-dessus.

Dans ce qui suit nous exposons en quoi consiste sa catégorisation des courbes géométriques et des courbes mécaniques qui nous semble parmi les facteurs essentiels qui ont contribués, par la suite, à la genèse des fonctions.

[55] La méthode est entièrement décrite dans les livres I et II de Smith (1954).

II. 3. Des courbes algébriques à l'émergence des fonctions

Descartes a introduit les mouvements dans sa géométrie qui lui ont facilité de concevoir les lignes des Géomètres, puisqu'une ligne est engendrée par le mouvement d'un point. Comme nous venons de le voir dans le paragraphe précédent, Descartes a traité les problèmes des sections coniques qui lui semblaient élémentaires, mais il a continué à traiter des problèmes de degré supérieur à deux. Cependant,

« … *il n'accède pas à l'analyse infinitésimale : son arithmétisme du temps, son substantialisme (épistémologique) de l'étendue repoussent la considération de l'infinitésimal.* » (Belaval, 1960, p. 279).

Descartes n'a pas hésité à faire une distinction entre les courbes géométriques et les courbes mécaniques. Selon lui, il faut appeler géométriques toutes les courbes où on peut déterminer les points par une composition de mouvements, ce qui signifie qu'ils ont une relation bien déterminée. Nous pouvons citer par exemple la conchoïde[56], la cissoïde[57], etc. Par contre, la cycloïde[58], la spirale[59], dont les équations « cartésiennes » font intervenir des fonctions transcendantes[60], rentrent dans la classe des courbes mécaniques puisqu'on ne peut pas connaitre les rapports des mouvements qu'elles engendrent. D'où, il a rejeté les courbes mécaniques de la géométrie puisqu'il pense qu'elles ne rentrent pas dans la théorie qu'il a mis au point.

« *Le modèle géométrique borne l'algèbre cartésienne à l'égalité statique : elle ne s'étend pas à l'égalité dynamique à laquelle l'aurait conduite l'étude des séries.* » (Belaval, 1960, p. 289).

Après Descartes, la construction des équations à continué à intéresser un grand nombre de mathématiciens qui ont pris l'habitude de raisonner et de manipuler les équations d'une façon formelle. Ce qui a mis l'algèbre au service de la géométrie. Ceci avait permit de faciliter l'étude et la construction des courbes et le problème inverse qui consiste à expliciter

---

[56] D'équation cartésienne : $y = \frac{x}{x-a}\left(\sqrt{b^2-(x-a)^2}\right)$ ou $(x-a)^2\left(x^2+y^2\right)-b^2x^2=0$.

[57] D'équation cartésienne : $y^2(a-x)-x^3=0$.

[58] Dont l'équation paramétrée est donnée par : $x = r(t-\sin t)$, $y = r(1-\cos t)$ et l'équation cartésienne se déduit, par élimination de t, sous la forme $x = r\arccos\left(\frac{r-y}{r}\right)-\sqrt{2ry-y^2}$

[59] Qui est une courbe ayant une équation polaire $\rho = f(\theta)$ où f est une monotone sur un intervalle non borné. On peut citer par exemple la spirale logarithmique d'équation $\rho = a\exp(\cot g\psi)$ où ψ est l'angle tangentiel polaire, la spirale sinusoïdale d'équation $\rho^n = 2a^n\cos n\theta$ où $n \in IR$.

[60] En ce sens, il s'agit donc d'une extension de la notion d'équation cartésienne.

des constructions pour obtenir des valeurs approchées des racines d'équations. En plus, la distinction entre courbes algébriques et courbes transcendantales fut, plus tard, modifiée par Leibniz en les introduisant toutes dans la géométrie tout en appelant courbes algébriques celle que Descartes avait appelées courbes géométriques et courbes transcendantes celles dont l'équation renferme un nombre infini de termes, Descartes n'ayant pas fait usage de la notion de l'infini même s'il avait traité le problème sur la cycloïde.

« *Deux raisons expliquent le bannissement de l'infini dans l'Essai. D'une part, l'usage de l'infini est sujet de contestation chez les mathématiciens de l'époque. Ainsi, la solution de la quadrature de la cycloïde où Descartes approche la courbe par une infinité de lignes polygonales sera contestée, et il devra fournir une seconde solution par la méthode des indivisibles, encore que cette méthode ne soit pas considérée par un mathématicien tel que Fermat comme un moyen légitime de démonstration. D'autre part, comme le montre son traitement du problème des figures isopérimétriques, Descartes sait que l'usage de l'infini est délicat, aussi pour assurer une certitude, préfère-t-il limiter le champ du mathématicien. Y compris pour les mathématiques, la volonté de certitude est limitation.* » (Barbin, 1996, p. 50).

Il serait, peut être, trop long de nous étendre dans le cadre de ce travail sur les différents essais de Descartes. Cependant, on les retrouve partiellement exposés dans la Géométrie[61] qui formait la dernière des applications de sa méthode.

Belaval (1960) fait l'hypothèse que Leibniz a pu s'inspirer du système cartésien pour avancer dans ses recherches et introduire le concept de fonction. Il explique que

« *Leibniz, ici encore, a dépassé Descartes. Descartes décrit une courbe, dans son système de coordonnées, en la mettant en équation : aeq (x,y)=0. Leibniz introduit, avec le mot lui-même, une notion désormais fondamentale en Analyse, celle de fonction : y=f(x)... Si le mot a d'abord (1673) un sens très proche du commun- fonction organique, fonction dans une machine, etc. Il va se mathématiser à partir du problème inverse des tangentes, au moment où Leibniz se propose de déduire de l'équation d'une courbe la loi de variation…* » (Belaval, 1960, p. 342).

Houzel (1976) précise que

« *Le mot fonction avait été introduit par Leibniz dans divers contextes, puis repris par les frères Bernoulli, et l'idée de fonction commençait à devenir familière aux mathématiciens*

[61] Smith Eugene 1954.

vers le premier quart du XVIIIe siècle, mais personne avant Euler n'en avait fait un concept fondamental des mathématiques. » (Houzel, 1976, p. 130).

Et il précise la dépendance d'une fonction y par rapport à x peut être, dans certains cas, données par une équation algébrique $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme et il explique qu'Euler a développé les applications du concept de fonction à la géométrie où il précise qu'en portant les valeurs de y fonction de la variable x, qui sont portées respectivement en ordonnées et en abscisses, on obtient une courbe et réciproquement, étant donnée une courbe on peut supposer qu'elle peut être associée à une ou plusieurs fonctions. Ainsi, si nous résumons nous pouvons dire l'équation d'une courbe algébrique doit toujours ramener à la forme rationnelle $P(x, y) = 0$, où P est un polynôme dont le degré est par définition l'ordre de la courbe[62], mais la courbe définie par $y = x^{\sqrt{2}}$, par exemple, n'admet pas d'équation rationnelle et doit être considérée comme transcendante.

Nous n'allons pas ici avancer plus avant sur l'histoire du concept de fonction, qui ne fait pas directement l'objet de notre travail, puisque nous nous intéressons à un type bien déterminé de fonctions algébriques, et à leurs liens avec les équations algébriques.

III. Bilan des études historiques et logiques

Nous avons montré que dans l'Antiquité et jusqu'à la fin du premier millénaire que les résolutions des équations et des inéquations se font par des méthodes arithmétiques et / ou des méthodes géométriques. Ceci correspond à un point de vue sémantique, dans la mesure où on ne se détache pas de la signification et / ou de l'interprétation des grandeurs qu'on manipule dans un cadre purement géométrique.

On voit apparaître chez les mathématiciens arabes (Al-Khawarizmi, Al Kharaji, Ibn Al yassamin, Al Tusi,…), des algorithmes comme méthodes de résolution des équations de degré supérieur ou égal à deux exprimées par la rhétorique. Entre-autre, nous avons remarqué qu'il y avait deux courants l'un faisant recours explicitement à la géométrie euclidienne, et l'autre manifestant une certaine volonté à ce que la dépendance de la géométrie s'estompe. Ainsi, nous pouvons faire l'hypothèse que les mathématiciens Arabes ont exploité des techniques purement syntaxiques du registre algébrique dans la résolution des problèmes. En outre, les techniques sémantiques de contrôle s'articulent entre le registre algébrique et le registre géométrique.

[62] Une courbe d'ordre n a une équation de la forme $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme de degré n.

Il faudra cependant attendre le XVI ème siècle pour que le système d'écriture symbolique mathématique permette des avancées significatives dans ce domaine qui fut exploité par Descartes, Newton et Leibniz…, lesquels ont élargi ce système dans plusieurs directions parmi lesquelles la représentation des courbes par des équations, où les quantités à rechercher sont désignées par des lettres indiquant le statut de l'indéterminée. Cette possibilité de déterminer les équations des courbes et plus particulièrement les équations des lignes droites, le cercle, la parabole, l'ellipse et l'hyperbole qui est un travail très caractéristique de Descartes qui a montré que ses objets mathématiques représentent effectivement l'ensemble des solutions d'équations à deux inconnues particulières et très simples.

Ceci montre, nous semble-t-il, que la mise en relation des concepts d'équation et de fonction par le biais des relations fonctionnelles et par l'intermédiaire des courbes est en accord avec l'émergence dans l'histoire du concept de fonction, sous le point de vue algébrique qui est le nôtre.

Nous pensons ainsi, que ceci est en cohérence avec les analyses de Tarski relatives à la notion de *relations univoques* ou *fonctions* dans laquelle réside la notion de variables dépendantes et celle de variables indépendantes que nous avons rappelés dans le chapitre I et se traduit à travers la dualité entre l'équation de Descartes exprimée en $aeq(x, y) = 0$ et celle de la notion de fonction introduite par Leibniz et Euler qui est symbolisée par $y = f(x)$.

Conclusion du chapitre

Dans le premier chapitre nous avons explicité les relations logiques entre équation et fonction à partir du cadre logique et en particulier l'aspect sémantique de la vérité introduite par Tarski qui propose un point de vue unificateur de nos objets d'étude et qui consiste à faire une relecture *a posteriori* de ces relations. En plus, l'étude historique que nous avons conduit dans ce chapitre nous a montré que la mise en relation des concepts d'équation et de fonction par le biais des relations fonctionnelles et par l'intermédiaire des courbes est en accord avec l'émergence dans l'histoire du concept de fonction, sous le point de vue algébrique qui est le nôtre. Ceci nous a permit de retrouver une dualité entre les équations de Descartes et celle de la notion de fonction introduite par Leibniz et Euler. Ceci montre clairement qu'il est possible de passer aux courbes algébriques par le biais des équations algébriques et pas uniquement des fonctions.

Chapitre IV
Etude des programmes et des manuels Tunisiens

Introduction

Les objets équation, inéquation et fonction occupent une place importante au niveau du savoir scientifique comme outil de modélisation. L'étude logique que nous avons réalisé au chapitre I montre la pertinence de l'apport de la logique pour leur étude, en particulier par la prise en compte du double aspect sémantique et syntaxique, qui nous a permis de donner des définitions non ambigües de ces objets au cœur de notre travail de thèse.

Cette étude logico-mathématique, réalisée au chapitre I, se situe au niveau du savoir savant c'est-à-dire les mathématiques au sens strict, en amont de la question de leur enseignement. Elle a mis en évidence l'importance de l'articulation sémantique / syntaxique dans la définition et la manipulation de ces objets.

Conformément au point de vue de Chevallard (1998 a)[63], pour continuer cette étude didactique, il est nécessaire d'analyser ces objets de savoir du point de vue de l'enseignement, en particulier au niveau des programmes et des manuels scolaires qui prescrivent le savoir à enseigner.

La question fondamentale de notre travail est celle de la place du sémantique par rapport au syntaxique dans les traitements des problèmes liés à la manipulation des équations, inéquations et fonctions dans les programmes et les manuels du secondaire tunisien.

Pour pouvoir répondre à ces questions, nous nous plaçons dans le cadre de la transposition didactique (Chevallard, 1991, Arsac, 1992 & Arsac, 1994) des objets équations, inéquations et fonctions pour des fins de l'enseignement et à travers :

1. Une étude des programmes de mathématiques de la première année secondaire, deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique et troisième année secondaire section mathématiques[64] de l'enseignement secondaire

[63] « … parler valablement de didactique des mathématiques, par exemple, suppose que l'on parle de certains objets distinctifs-les mathématiques tout, d'abord, et ensuite solidairement, les élèves, les professeurs, les manuels, etc. » (Chevallard, 1998 a, p. 91).
[64] L'équivalent des classes de troisième, seconde et première de l'enseignement secondaire français.

tunisien.

2. Une analyse succincte des manuels scolaires de ces mêmes niveaux du secondaire tunisien.

Nous avons choisi ces trois niveaux de l'enseignement secondaire parce que ce sont les niveaux où les objets équations, inéquations et fonctions s'articulent et s'enseignent au secondaire tunisien.

Pour conduire cette analyse didactique, nous allons croiser deux approches. L'une de nature logique, s'appuyant sur une prise en compte du rôle essentiel de la dualité sémantique / syntaxe dans les résolutions des problèmes en rapport avec nos objets mathématiques, développée dans le chapitre I. L'autre de nature didactique, faisant référence aux praxéologies mathématiques développées par Chevallard (1992).

Ces analyses ont pour objectifs de questionner les deux hypothèses suivantes :

- $H1$ La catégorisation *sémantique / syntaxique* n'est pas absorbée par la catégorisation en *tâche, technique, technologie et théorie* proposée par Chevallard, qui par ailleurs, dans ses travaux sur l'algèbre (Chevallard, 1984, 1989), se place explicitement dans la dualité sémantique / syntaxique qu'il interprète comme l'incontournable dialectique qui existe entre l'arithmétique et le calcul algébrique.
- $H2$ Les types de tâches recommandées par les programmes et les manuels du secondaire tunisien favorisent peu l'articulation syntaxique / sémantique dans les résolutions des problèmes liés à la manipulation des objets, équations, inéquations et fonctions.

I. Praxéologies ou organisations mathématiques

Notre étude didactique s'appuie essentiellement sur la théorie anthropologique du didactique développée par Chavallard (1991, 1998) et plus particulièrement sur une étude, en termes de praxéologies, des programmes et des manuels scolaires afin d'expliciter et de décrire la manière dont les savoirs sont intégrés dans l'enseignement secondaire tunisien.

Relativement à ce cadre on suppose que toute activité d'une personne se situant dans une position bien précise peut être décrite en termes d'organisations praxéologiques [Tijk / tijk / qij / Qi] : où Tijk sont des types de tâches qui sont accomplies par la mise en œuvre de techniques bien déterminées tijk, lesquelles sont justifiées, rendues intelligibles et produites par des technologies qij, elles-mêmes justifiées, rendues intelligibles et produites par des théories, Qi.

Nous rejoignons le point de vue de Castela (2008) qui explique que

« *Dans le cas des mathématiques, nous considérons donc que la notion de praxéologie est un outil pertinent pour décrire les ressources produites et utilisées dans la résolution de problèmes par les diverses communautés institutionnellement confrontées à cette pratique, en particulier par les mathématiciens. Ces praxéologies sont relatives à un ensemble étendu de types de tâches, depuis ce qu'il faut plutôt considérer comme genre, celui de la résolution de problèmes en mathématiques, jusqu'à des types plus réduits qu'on a coutume de désigner comme des types de problèmes*.» (Castela, 2008, p. 148).

L'analyse de l'activité d'étude des mathématiques identifie alors deux catégories de praxéologies : les praxéologies mathématiques, qui constituent l'objet de l'étude et dont les types de tâches sont mathématiques au sens strict ; les praxéologies didactiques, qui permettent la construction et la mise en place des organisations mathématiques étudiées et dont les types de tâches sont didactiques, c'est-à-dire relatives à l'étude ou à la direction d'étude.

En ce qui nous concerne, l'analyse des programmes et des manuels scolaires s'appuie sur le modèle d'analyse praxéologique ou d'une organisation mathématique qui décrit et analyse une organisation qui peut se construire dans une classe de mathématiques.

Le bloc (tâche, technique) représente le savoir faire. Celui-ci fait appel au savoir restreint formé par une technologie justifiant la technique qui à son tour est éclairé par une théorie ; ce qui constitue le bloc (technologie, théorie).

Nous pensons que l'enseignement et l'apprentissage de la résolution des problèmes articulant des équations, inéquations et fonctions au niveau du secondaire et en particulier dans l'enseignement secondaire tunisien, ne prend pas (ou peu) en compte le bloc (technologie, théorie). Pour les objets qui nous intéressent, les technologies sont les théorèmes qui généralisent les propriétés des opérations dans le numérique et les règles qui gèrent les transformations dans la structure du corps des nombres réels. Or nous nous intéressons à l'articulation sémantique / syntaxique et nous faisons l'hypothèse que le travail algébrique auprès des élèves à ces niveaux là n'explicitent pas les technologies et les théories qui justifient ces techniques qui sont au cœur de cette étude.

Les différents types de techniques qui accomplissent certains types de tâches bien déterminées et qui sont supposées l'un des constituants du savoir faire, sont enrichies par la catégorisation logique en terme de sémantique / syntaxe. Ceci nous conduit à distinguer trois types de techniques mobilisables : les techniques sémantiques, les techniques syntaxiques et

les techniques mixtes[65].

Cette analyse se fera à partir des problèmes liés aux objets d'étude qui sont des équations, inéquations et des fonctions algébriques[66] qui font partie du programme du secondaire tunisien.

II. Eléments de transposition didactique

Dans cette section, nous allons analyser l'organisation des connaissances dans les programmes officiels et les manuels scolaires respectant ces programmes. En premier lieu, notre analyse se fait au niveau des programmes des classes de première année, deuxième année section sciences et technologie de l'informatique et de la troisième année section mathématiques de l'enseignement secondaire tunisien. En second lieu, nous analysons les chapitres relatifs aux équations, inéquations du premier degré et du second degré à une ou à deux inconnues (variables) réelles et aux fonctions algébriques qui font partie du programme de ces trois niveaux scolaires.

II. 1. Etude des directives du programme

Nous analysons, dans l'ordre, les directives des programmes officiels des niveaux du secondaire décrits ci-dessus.

L'analyse des programmes de chaque niveau se fera en deux étapes. La première est consacrée à la description des directives relatives à l'enseignement et l'apprentissage des objets équations, inéquations et fonctions. La deuxième est consacrée à des commentaires s'appuyant sur notre cadre logique en vue de repérer l'articulation sémantique / syntaxe dans ces directives.

II. 1. 1. Analyse des directives du programme de la première année secondaire

Présentation

Les objectifs du programme de la première année secondaire se résument à ce que les élèves utilisent, appliquent et apprécient des mathématiques dans des situations familières ou non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement (cf. Annexes, IV.1. p. 2-9).

[65] Les techniques sont supposées mixtes lorsqu'elles mobilisent à la fois les deux points de vue sémantique et syntaxique dans l'enseignement et le traitement des objets équations, inéquations et fonctions.

[66] Les notions mathématiques sont les objets d'étude. On étudie par exemple la notion de nombre, la notion de groupe, la notion de corps, etc.). Ces notions sont construites en prenant la forme d'une définition ou d'une construction.

Ils apprennent à :

- Pratiquer une démarche mathématique à travers des activités écrites ou orales, les élèves développent leurs aptitudes à chercher, expérimenter, conjecturer, ou contrôler un résultat
- Développer des raisonnements, Ils produisent un argument pour valider une affirmation en utilisant des inférences et des déductions, Ils produisent un contre-exemple pour montrer qu'une assertion est fausse, Ils vérifient des résultats et jugent s'ils sont raisonnables.
- Distinguer entre une implication et une équivalence.
- Communiquer dans un langage mathématique.
- Mobiliser des algorithmes et des procédures.
- Résoudre des problèmes dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement.
- Organiser et analyser l'information à travers des activités écrites ou orales et développer leurs aptitudes à identifier, organiser, sélectionner et synthétiser des informations chiffrées ou graphiques.
- Utiliser les technologies de l'information et de la communication à travers des activités numériques, algébriques, géométriques et statistiques et se familiariser avec l'outil informatique.
- Les élèves développent une méthodologie de résolution de problèmes faisant appel à un répertoire de connaissances, de techniques, de procédures appropriées validant la solution du problème, ils procèdent à une vérification en confrontant leur solution avec les données du problème.

En ce qui nous concerne, nous avons repris les directives recommandées par le programme de la première année secondaire qui sont en lien direct avec nos objets d'études.

Nous nous restreignons aux contenus définis et aux types de tâches recommandés dans les trois sections qui se rapportent aux activités numériques, activités algébriques et activités dans un repère qui se rapportent aux objets mathématiques que nous étudions.

Les contenus disciplinaires qui sont en rapport avec les objets de notre étude sont :

- Opérations dans IR – Ordre dans IR – Valeur absolue.
- Identités remarquables.
- Fonctions linéaires – Fonctions affines.
- Equations et inéquations linéaires du premier degré à une inconnue réelle.

- Systèmes linéaires de deux équations à deux inconnues réelles.
- Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine.

En plus, dans ces sections, on suggère des aptitudes à développer auprès des élèves.

Dans la section consacrée aux activités numérique on suggère que

1) Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul.
2) Les élèves mobilisent les règles et les techniques opératoires sur les nombres réels pour :
   - Calculer des expressions numériques en utilisant des opérations de base.
   - Simplifier et calculer une expression numérique en utilisant les propriétés des puissances et de la racine carrée d'un nombre positif.
   - Trouver une quatrième proportionnelle.
   - Comparer des nombres réels et les placer sur la droite réelle.
3) Les élèves résolvent des problèmes numériques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.

Dans la section consacrée aux activités algébriques on suggère que

1) Les élèves mobilisent les règles et les techniques de calcul algébrique pour :
   - Additionner, soustraire et multiplier des expressions algébriques.
   - Calculer la valeur numérique d'une expression littérale.
   - Développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables.
   - Résoudre des équations et des inéquations linéaires du premier degré à une inconnue.
   - Résoudre des systèmes linéaires de deux équations du premier degré à deux inconnues.
2) Les élèves mobilisent un algorithme ou une procédure de calcul algébrique pour :
   - Déterminer le signe d'un binôme du premier degré.
   - Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue.
   - Déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel.
   - Déterminer l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts.

3) Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers. En particulier,

- Les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines.
- Les élèves résolvent des problèmes d'optimisation ou de point de rencontre de deux mobiles.

Dans la section consacrée aux activités dans un repère on suggère que

1) Les élèves mobilisent une technique lors d'activités dans un repère d'une droite ou d'un plan pour :

- Lire graphiquement les coordonnées d'un point dans un repère.
- Calculer la distance entre deux points d'une droite munie d'un repère.
- Calculer la distance entre deux points dans un repère orthonormé.
- Déterminer les coordonnées d'un point dans un repère.

2) Les élèves mobilisent une procédure lors d'activités dans un repère d'une droite ou d'un plan pour :

- Représenter graphiquement une fonction linéaire ou affine.
- Déterminer l'expression d'une fonction linéaire ou affine à partir de sa représentation graphique.
- Déterminer graphiquement le point d'intersection éventuel de deux droites.
- Résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à une inconnue.
- Résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à deux inconnues.

3) Les élèves résolvent des problèmes dans un contexte graphique.

En particulier,

- Les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques.
- Les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation.

Commentaire

Les suggestions et les recommandations montrent que le programme est défini en contenus et types de tâches. Celles-ci requièrent l'aptitude des élèves à traiter des problèmes numériques et algébriques articulant les deux points de vue sémantique et syntaxique.

En effet, le point de vue syntaxique est clairement explicité dans les deux premières sections consacrées aux activités numériques et algébrique, lorsque les tâches demandées appellent à mobiliser des techniques relevant des règles de calcul algébriques s'appuyant sur le bloc (technologie, théorie) qui s'explique par l'exploitation de la structure du corps des nombres réels d'une part et l'utilisations de ses propriétés additives et multiplicatives appuyées par des opération de développement et factorisation pour pouvoir manipuler des expressions algébriques d'autre part. De même, les recommandations sont de nature syntaxiques lorsque l'on attend des élèves qu'ils soient capables de mobiliser des algorithmes, des techniques opératoires sur les nombres réels et des procédures de calcul algébriques pour résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations et des inéquations du premier degré à une inconnue d'un côté ; de déterminer l'expression d'une fonction linéaire connaissant l'image d'un réel et l'expression d'une fonction affine connaissant les images de deux réels distincts d'un autre côté.

Quant à l'aspect sémantique, il apparait clairement dans la troisième section consacrée aux activités dans un repère où les tâches préalables incitent les élèves à mobiliser des techniques de lecture graphique, représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine et à résoudre graphiquement une inéquation du premier degré à une inconnue, ou du premier degré à deux inconnues. En revanche, les recommandations générales qui se situent au niveau de l'introduction du programme de la première année secondaire, et qui préconisent que l'élève soit capable de valider la solution d'un problème en procédant à des vérifications, ne sont pas reprises explicitement. Elles sont présentes cependant implicitement dans des tâches de résolution qui sont susceptibles de mobiliser tant des règles de transformations syntaxiques que des aspects sémantiques : traitement, interprétation, contrôle ou vérification.

Le traitement des problèmes relevant de la modélisation laisse ouverte la possibilité de mobiliser des techniques relevant des points de vue sémantique, syntaxique ou mixtes puisque les tâches recommandées incitent l'élève à modéliser des situations réelles menant à des équations, des inéquations ou des fonctions linéaires ou affines et produisant des représentations graphiques.

Enfin, remarquons que différents types de tâches favorisent l'articulation des différents objets, équations et des inéquations du premier degré à une ou deux inconnues réelles, les fonctions linéaires et affines, dans les différents registres algébriques et graphiques. Ce sont celles qui invitent à utiliser des problèmes de modélisation qui sont internes et / ou externes au mathématiques. Ce qui, *a priori*, contribue à l'articulation des trois objets équation / courbe / fonction et par suite à l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions.

II. 1. 2. Analyse des directives du programme de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique

Présentation

Les objectifs du programme de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique se résument à ce que les élèves utilisent, appliquent et apprécient les mathématiques dans des situations familières ou non familières, dans des contextes mathématiques ou en rapport avec l'environnement (cf. Annexes, III.2. p. 2-9).

Ils apprendront à

- Pratiquer une démarche mathématique en développant leurs aptitudes à chercher, expérimenter, conjecturer, raisonner ou contrôler un résultat.
- Communiquer dans un langage mathématique en développant leurs aptitudes à expliquer ou à discuter un raisonnement, une stratégie ou la solution d'un problème.
- Mobiliser des algorithmes et des procédures en développant leurs aptitudes à élaborer une stratégie de calcul (numérique, algébrique, géométrique ou statistique).
- Résoudre des problèmes en développant leurs aptitudes à utiliser différentes approches de recherche, à élaborer des stratégies de résolution, à modéliser des situations réelles.
- Organiser et analyser l'information en développant leurs aptitudes à identifier, organiser, sélectionner et synthétiser des informations chiffrées ou graphiques.
- Utiliser les technologies de l'information et de la communication en développant leurs aptitudes à utiliser la calculatrice ou des logiciels dans leur travail de recherche, de prospection, de contrôle et de communication.
- Apprécier la contribution des mathématiques au développement de l'individu et de la société, ainsi qu'à la compréhension du monde et à son évolution.

Nous avons repris les directives recommandées par le programme de la deuxième année secondaire qui sont en lien direct avec nos objets d'études.

Nous nous restreignons aux contenus et aux types de tâches recommandées dans les quatre sections qui se rapportent aux activités numériques, activités algébriques, activités sur les fonctions et activités dans un repère.

Les contenus disciplinaires exigés en rapport avec les objets de notre étude sont :

- Problèmes du premier et de second degré.
- Equations et inéquations du second degré à une inconnue réelle.
- Notion de polynômes.
- Condition de colinéarité de deux vecteurs – Equation cartésienne d'une droite.
- Distance d'un point à une droite.
- Equation cartésienne d'un cercle.
- Fonctions du type $x \mapsto |ax+b|$; $x \mapsto ax^2+bx+c$; $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$; x $x \mapsto \sqrt{x+b}$.
- Applications à des problèmes d'optimisation.

En outre, dans ces sections, on suggère des aptitudes à développer auprès des élèves.

Dans la section consacrée aux activités numériques on suggère que

1) Les élèves connaissent et utilisent les règles opératoires sur les nombres réels pour :
   - Calculer et / ou simplifier une expression numérique.
   - Donner une valeur approchée d'un nombre.
2) Les élèves mobilisent une technique, un algorithme ou une procédure de calcul.
3) Les élèves résolvent des problèmes numériques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers.

Dans la section consacrée aux activités algébriques on suggère que

1) Les élèves mobilisent un algorithme, une technique ou une procédure de calcul algébrique pour :
   - Reconnaître un zéro d'un trinôme.
   - Factoriser un trinôme.
   - Développer, factoriser et simplifier des expressions algébriques en utilisant les produits remarquables.
   - Résoudre des équations et des inéquations se ramenant à des équations de la forme $ax+b=0$ ou à des inéquations de la forme $ax+b \geq 0$ ou $ax+b \leq 0$.

- Résoudre des équations se ramenant à des équations du second degré à une inconnue.
- Déterminer deux réels connaissant leur somme et leur produit.
- Déterminer le signe d'un trinôme de second degré.
- Reconnaître un zéro d'un polynôme.
- Factoriser un polynôme connaissant un ou plusieurs de ses zéro.
- Déterminer le signe d'une expression algébrique.
- Résoudre des inéquations se ramenant à des inéquations du second degré à une inconnue réelle.

2) Les élèves résolvent des problèmes algébriques dans des situations mathématiques ou en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers. En particulier,
   - Les élèves résolvent des problèmes d'optimisation.
   - Les élèves modélisent des situations réelles menant à des équations ou à des inéquations.
   - Les élèves résolvent le modèle mathématique.
   - Les élèves exercent leur esprit critique pour juger de la « raisonnabilité » des résultats.

Dans la section consacrée aux activités sur les fonctions on suggère que

1) Les élèves mobilisent une technique ou une procédure de calcul algébrique pour :
   - Déterminer l'ensemble de définition de l'une des fonctions du programme.
   - Déterminer l'image d'un réel par l'une des fonctions du programme.
   - Déterminer le sens de variation de l'une des fonctions du programme.
   - Déterminer le sommet et l'axe de symétrie d'une parabole en utilisant la forme réduite de la fonction qui lui est associée.
   - Déterminer les asymptotes et le centre de symétrie d'une hyperbole en utilisant la forme réduite de la fonction qui lui est associée.
   - Représenter graphiquement l'une des fonctions du programme.
2) Les élèves mobilisent une procédure lors d'activités dans un repère pour :
   - Déterminer graphiquement l'ensemble de définition, la parité, le sens de variation d'une fonction.
   - Déterminer graphiquement les extrema et les branches infinies d'une fonction.
   - Déterminer graphiquement les coordonnées d'un point d'une courbe.
   - Etudier graphiquement la position relative de deux courbes.

- Représenter graphiquement une courbe à partir d'une autre en utilisant une application du plan dans lui même (symétrie, translation ou homothétie).

3) Les élèves résolvent des problèmes dans des situations en rapport avec leur environnement dans des contextes familiers ou non familiers faisant appel à l'une des fonctions du programme. En particulier,
   - Les élèves résolvent des problèmes d'optimisation.
   - Les élèves modélisent des situations faisant appel aux fonctions de type $x \mapsto |ax+b|$; $x \mapsto ax^2+bx+c$; $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $x \mapsto \sqrt{x+b}$.
   - Les élèves résolvent le modèle mathématique.
   - Les élèves exercent leur esprit critique pour juger de la « raisonnabilité » des résultats.

Dans la section consacrée aux activités dans un repère on suggère que

1) Les élèves mobilisent une technique lors d'activités dans un repère pour :
   - Déterminer un vecteur directeur ou le coefficient directeur d'une droite connaissant une de ses équations cartésiennes ou son équation réduite.
   - Représenter graphiquement une droite.
2) Les élèves mobilisent une technique lors d'activités dans un repère orthonormé pour :
   - Calculer la distance de deux points.
   - Déterminer un vecteur normal à une droite connaissant une de ses équations cartésiennes ou son équation réduite.
   - Calculer la distance d'un point à une droite.
   - Déterminer l'équation d'un cercle connaissant son centre et son rayon.
   - Déterminer l'équation d'un cercle passant par trois points distincts.
   - Déterminer l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant $x^2+y^2+ax+by+c=0$ où a,b et c sont des réels donnés.
3) Les élèves mobilisent une procédure lors d'activités dans un repère pour :
   - Déterminer une équation cartésienne ou l'équation réduite d'une droite connaissant deux de ses points.
   - Déterminer une équation d'une droite connaissant un de ses points et un vecteur directeur.
   - Déterminer une équation d'une droite passant par un point et parallèle à une droite donnée.

- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de deux droites sécantes.

4) Les élèves résolvent des problèmes dans un contexte graphique. En particulier,
   - Les élèves résolvent des problèmes géométriques en faisant appel à l'outil analytique.
   - Les élèves analysent et interprètent une représentation graphique modélisant une situation.
   - Les élèves modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques.
   - Les élèves résolvent le modèle mathématique.

Commentaire

Le programme de la deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique défini les contenus à enseigner et les différents types de tâches afin d'institutionnaliser les techniques adéquates pour résoudre des exercices et des situations problèmes en rapport avec les mathématiques.

Les suggestions et les recommandations montrent que le programme incite les élèves à acquérir l'aptitude à traiter des problèmes numériques et algébriques.

Nous pouvons dire que tout au long de ces recommandations, les deux points de vue sémantique et syntaxique s'articulent.

D'un côté, nous remarquons que le point de vue syntaxique est clairement explicité dans les sections consacrées aux activités numériques et aux activités sur les fonctions.

- Pour la section consacrée aux activités numériques, les types de tâches recommandées appellent à mobiliser des règles de transformation opératoires sur les nombres réels pour calculer et / ou simplifier une expression numérique et des techniques s'appuyant sur un algorithme ou une procédure de calcul qui fait appel aux différentes propriétés et opérations du corps des nombres réels.
- Pour la section consacrée aux activités sur les fonctions, les types de tâches recommandées appellent les élèves à mobiliser des techniques qui s'appuient sur une reconnaissance de la forme leur permettant de déterminer le sommet et l'axe de symétrie d'une parabole, ainsi que les asymptotes et le centre de symétrie d'une hyperbole en utilisant la forme réduite des fonctions associées.

D'un autre côté, la plupart des types de tâches recommandées dans les trois autres sections relatives aux activités algébriques, sur les fonctions et dans un repère, laissent

ouverte la possibilité de mobiliser des techniques qui favorisent l'articulation des points de vue sémantique, syntaxique et mixte.

- Dans la section consacrée aux activités algébriques, les différents types de tâches demandées appellent à mobiliser des techniques, des algorithmes ou des procédures relevant des règles de calcul algébriques appuyées par des opérations de développement et factorisation pour pouvoir manipuler des expressions algébriques. Parmi ces techniques nous pouvons citer celles qui consistent à reconnaître un zéro d'un trinôme, factoriser un trinôme, déterminer le signe d'un trinôme de second degré, déterminer le signe d'une expression algébrique etc. Ces techniques appellent les élèves à mobiliser les deux points de vue sémantique et syntaxique puisque les types de tâches recommandées exigent des substitutions, vérifications relevant du point de vue sémantique et des techniques s'appuyant sur des règles de transformation qui relèvent du point de vue syntaxique. Nous classons les types de tâches qui consistent à résoudre les équations et les inéquations du premier et du second degré à une inconnues réelles comme étant des tâches qui sont ouvertes c'est-à-dire qu'elles appellent à la mobilisation des techniques pouvant s'appuyer sur l'un ou les deux points de vue sémantique et syntaxique.
- Dans la section consacrée aux activités sur les fonctions les différents types de tâches appellent à mobiliser des techniques qui consistent à déterminer l'ensemble de définition de l'une des fonctions du programme, déterminer le sens de variation de l'une des fonctions du programme et traiter des problèmes d'optimisation. Ceci consiste à mobiliser à la fois les deux points de vue sémantique et syntaxique par le biais des interprétations et des opérations de transformations algébriques. D'autre part, les techniques mobilisant des procédures pour résoudre des problèmes dans des situations en rapport avec l'environnement font appel parfois au point de vue sémantique et parfois mixtes.
- Dans la section consacrée aux activités dans un repère les différents types de tâches invitent les élèves à résoudre des problèmes dans un contexte graphique ou géométrique en faisant appel à l'outil analytique, modélisent des situations réelles en produisant des représentations graphiques etc.

Enfin, les types de tâches qui invitent à mobiliser des techniques de type sémantique apparaissent clairement dans les deux sections relatives aux activités sur les fonctions et aux activités dans un repère.

- Dans la section réservée aux activités sur les fonctions, les types de tâches invitent les élèves à la capacité de mobiliser des techniques permettant de déterminer l'image d'un réel par l'une des fonctions du programme, représenter graphiquement l'une des fonctions du programme, déterminer graphiquement l'ensemble de définition, la parité, le sens de variation d'une fonction, déterminer graphiquement les coordonnées d'un point d'une courbe, étudier graphiquement la position relative de deux courbes etc. Ces techniques mobilisables, qui consistent à effectuer des opération de substitution dans une expression algébrique, des assignations de valeurs aux variables dans les expressions des fonctions pour pouvoir déterminer les coordonnées des points appartenant à la représentation graphique de la fonction et lire graphiquement pour déterminer les coordonnées d'un point de la courbe ou d'une intersection de deux courbes, sont du types sémantiques.
- Dans la section réservée aux activités dans un repère les différents types de tâches, les élèvent sont invités à mobiliser des techniques pour déterminer l'équation d'une droite ou celle d'un cercle par différentes méthodes, déterminer l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant le cas particulier $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ où a, b et c sont des réels donnés, résoudre des problèmes dans un contexte graphique en faisant appel à l'outil analytique.

II.1.3. Analyse des directives du programme de la troisième année secondaire section mathématiques (Programme 1998[67])

Présentation

Le programme de la troisième année secondaire section mathématiques, tel qu'il a été réformé en 1998, s'intéresse, dans la partie « Analyse » à l'étude du calcul des limites, de la continuité, de la dérivabilité des fonctions, ce qui ne fait pas partie du cadre de notre étude puisqu'en effet nous nous intéressons à la relation qu'entretiennent les objets équations inéquations avec les fonctions algébriques. En revanche, nous remarquons que les objets équations et inéquations figurent dans les recommandations de la partie consacrée à l'étude des fonctions (cf. Annexes. IV. 3. p.19-23). En effet, l'exploitation des représentations graphiques des fonctions pour résoudre des problèmes en rapport avec les objets équation, inéquation, figure parmi les objectifs du programme qui invite à :

[67]Nous avons étudié le programme de la troisième année secondaire section mathématiques relatif à la réforme 1998 puisque notre investigation didactique que nous analysons dans les prochain chapitres V et VI ont été réalisées pendant l'année scolaire 2005 / 2006 alors que le nouveau programme de la troisième année secondaire section mathématiques à été mis en application pendant l'année scolaire 2006 / 2007.

- Résoudre une équation ou une inéquation ou un système d'équations ou d'inéquations.
- Mener la discussion d'équations ou d'inéquations paramétrées.
- Résoudre des problèmes d'optimisation.

Commentaire

De notre point de vue, nous pensons que le programme de la troisième année secondaire section mathématiques recommande l'articulation des points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions puisqu'on voit bien l'articulation des objets équation, inéquations et fonctions d'une manière algébrique et graphique.

Conclusion de l'étude des programmes des trois niveaux du secondaire

L'analyse des programmes officiels de l'enseignement des mathématiques au niveau du secondaire tunisien montre une prise en compte implicite de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions des problèmes liés aux traitements des équations, inéquations et fonctions.

Il ressort de cette analyse que :

- L'articulation sémantique / syntaxe est très apparente dans les recommandations liées à l'exploitation des problèmes de modélisation et plus précisément ceux qui incitent à exploiter des situations de la vie courante c'est-à-dire externes aux mathématiques.
- Le point de vue sémantique est omniprésent dans le cas de l'exploitation du registre graphique. Par contre, les différents types de tâches recommandées dans les traitements algébriques restent ouverts et ne permettent pas de dire clairement la pertinence de la mobilisation du point de vue sémantique dans certains cas de situations algébriques.
- Le point de vue syntaxique est très présent lorsqu'on recommande que l'élève soit capable de mobiliser un algorithme, des procédures de calcul algébrique et des règles opératoires etc.

II. 2. Etude des manuels tunisiens

Introduction

Les analyses que nous effectuons ci-dessous consistent à mettre en exergue le croisement entre la catégorisation logique en terme de sémantique / syntaxe et les

praxéologies mathématiques en terme de (Tâche, Technique) s'appuyant sur un appel aux différents types de techniques mobilisables pour résoudre et traiter des problèmes faisant appel à la manipulation des équations, inéquations et fonction au niveau du secondaire tunisien.

Rappelons que ces analyses ont pour but de questionner les deux hypothèses suivantes :

- $H1$ La catégorisation *sémantique / syntaxique* n'est pas absorbée par la catégorisation en *tâche, technique, technologie et théorie* proposée par Chevallard.
- $H2$ Les types de tâches recommandées par les manuels du secondaire tunisien favorisent peu l'articulation syntaxique / sémantique dans les résolutions des problèmes liés à la manipulation des objets, équations, inéquations et fonctions.

Tout d'abord, remarquons qu'il n'y a qu'un seul manuel pour chaque section d'un niveau bien déterminé. Nous avons choisi d'analyser les manuels destinés aux élèves des classes de la première année, de la deuxième année section sciences et technologies de l'informatique[68] et de la troisième année section mathématiques de l'enseignement secondaire tunisien car nos objets d'étude s'inscrivent explicitement dans ces niveaux d'enseignement.

L'analyse des manuels se fera sur tous les chapitres qui manipulent les objets ou les notions d'équations, inéquations et fonctions. En effet, il est clair que les équations cartésiennes des droites qui font partie d'un chapitre de la géométrie du manuel de la deuxième année secondaire est en lien avec les notions d'équations du premier degré à deux inconnues réelles et les fonctions affines et linéaires. De même, l'équation d'un cercle, qui est un type très particulier d'équations du second degré à deux variables réelles, pourrait être interprétée comme la représentation graphique de deux fonctions radicales etc.

Ceci nous a conduit à faire une analyse s'appuyant sur les techniques d'analyse choisies des chapitres et des manuels de la première, de la deuxième et de la troisième année section mathématique de l'enseignement secondaire Tunisien.

[68] A partir de septembre 2005 la deuxième année secondaire section sciences est devenue section sciences et technologie de l'informatique. En fait, ces deux sections ont été, avant septembre 2005, séparées et elles avaient deux programmes différents. Ensuite, ces deux sections ont été fusionnées en gardant l'ancien programme de la section sciences et qui est devenu par la suite le programme de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique.

Ces chapitres sont subdivisés en rubriques facilement repérables. Dans ces rubriques il y a celles qui visent à permettre aux élèves de consolider leurs acquis, d'autres qui ont pour but d'introduire les nouvelles notions afin de permettre de construire les savoirs et les savoirs-faire à connaître. Pour une meilleure mémorisation, les connaissances sont écrites sous une forme claire. D'autres rubriques contiennent des tests d'autoévaluation et des exercices d'application et enfin, une rubrique dans laquelle on propose des éléments d'histoire des mathématiques.

La méthodologie suivie dans l'analyse des chapitres de chaque manuel des trois niveaux étudiés s'appuie sur une prise en compte des deux éléments constitutifs du bloc praxéologique (tâche, technique).

D'une part, nous nous appuyons sur le point de vue de Castela (2008) pour la catégorisation des différents types de tâches recommandées dans les manuels. En effet, elle considère, dans le cas des mathématiques, que l'ensemble de types de tâches est étendu et par la suite nous pouvons reprendre les genres de tâches comme par exemple la résolution de problèmes en mathématiques, jusqu'à des types plus réduits qu'on a coutume de désigner comme des types de problèmes qui peuvent être posés sous forme d'une ou plusieurs questions.

D'autre part, nous classons les différents types de techniques, institutionnalisés dans chaque chapitre étudié, suivant notre catégorisation en terme de sémantique et syntaxique. Nous distinguons les techniques de type sémantique, les techniques de type syntaxique et les techniques de type mixte qui mobilisent, à la fois, les deux points de vue sémantiques et syntaxiques.

La manière qui nous permet de reconnaitre le type de technique mobilisable pour répondre à un type de tâche bien déterminé sera supposée

- Une technique sémantique lorsqu'elle mobilise des opérations de substitution, de contrôle, de vérification, de lecture graphique etc.
- Une technique syntaxique lorsqu'elle mobilise des opérations ou des transformations s'appuyant sur des règles algébriques ou géométriques qui exigent une reconnaissance d'une formule, propriété, théorème etc.
- Une technique mixte lorsqu'elle mobilise à la fois une interprétation, une compréhension et des formules, des règles qui permettent de répondre, autrement dit des techniques sémantiques et syntaxiques.

Nous analysons, ci-dessous les différents manuels des différents niveaux de

l'enseignement secondaire choisis.

Pour les manuels de la première année et de la deuxième année secondaire, notre analyse se fera sur les différentes activités, les différents exercices d'application ainsi que les exercices et les problèmes proposés en s'appuyant sur une catégorisations des différents types de tâches demandées le long de chaque chapitre et une déterminations des différentes techniques mobilisables pour traiter ces types de tâches, suivant la catégorisation sémantique, syntaxique, mixte. Nous récapitulons les différents types de tâches présentes le long de chaque partie et nous associons les différentes techniques correspondantes à ce type de tâches. Ces types de techniques peuvent être sous la forme de techniques qui ont été acquises antérieurement ou de techniques institutionnalisées. Nous allons indiquer les différents types de techniques institutionnalisées chaque fois qu'elles sont explicitées, au début de l'analyse des exercices d'application de chaque chapitre. Ces techniques vont être classées selon notre catégorisation logique et notée respectivement par :

- Tech Sé : pour les techniques du type sémantique.
- Tech Sy : pour les techniques du type syntaxique.
- Tech Mix : pour les techniques du type mixte.

II. 2 .1. Analyse du manuel de la première année secondaire :

Description du manuel de la première année secondaire tunisien

Dans le préface de ce manuel, il est indiqué que :

« *Conformément aux nouveaux programmes mis en place par la loi d'orientation de l'éducation et de l'enseignement scolaire du 23 juillet 2002, ce manuel vise à permettre à tous les élèves de développer des compétences.*

Ils apprendront à :

1) *Pratiquer une démarche mathématique en développant leur capacité à chercher, à exprimer, à conjecturer, à modéliser et à raisonner.*
2) *Mobiliser des algorithmes et des procédures dans des situations mathématiques.*
3) *Utiliser et appliquer les mathématiques pour résoudre des problèmes dans des situations familières ou non familières, en rapport avec leur environnement.*
4) *Communiquer oralement ou par écrit dans un langage mathématique.*
5) *Utiliser les technologies de l'information et de la communication dans leur travail de recherche, de prospection et de contrôle ainsi que comme moyen d'échange et de communication.*
6) *Collecter, organiser et exploiter l'information.*

7) *Apprécier la contribution des mathématiques au développement des autres disciplines, à la compréhension des phénomènes et à la prise de décision.* »

Ensuite, nous trouvons un sommaire dans lequel les auteurs décrivent l'organisation des différents chapitres. Ces chapitres sont classés en deux parties. La première partie est consacrée aux travaux géométriques contenant les chapitres intitulés respectivement par Angles, Théorème de Thalès et sa réciproque, Rapports trigonométriques d'un angle aigu & Relations métriques dans un triangle rectangle, Vecteurs et translations, Somme de deux vecteurs & Vecteurs colinéaires, Activités dans un repère, Quart de tour et enfin Sections planes d'un solide. La deuxième partie est consacrée aux travaux numériques contenant les chapitres intitulés respectivement par Activités numériques I, Activités numériques II, Activités algébriques, Fonctions linéaires, Equations et inéquations du premier degré à une inconnue, Fonctions affines, Systèmes de deux équations à deux inconnues réelles et enfin Exploitation de l'information.

Nous avons choisi d'analyser les chapitres qui sont en rapport direct avec nos objets d'étude que nous situons au niveau de l'algèbre. Ces chapitres se situent dans la partie du manuel intitulée « Travaux numériques » ; ce sont les suivants :

- Activités algébriques.
- Fonctions linéaires.
- Équations et inéquations du premier degré à une inconnue.
- Fonctions affines.
- Systèmes de deux équations à deux inconnues.

Chaque chapitre est organisé suivant les rubriques suivantes:

- La rubrique « Reprendre » : Destinée à être traitée avec l'aide du professeur et qui vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis, identifier leurs lacunes éventuelles, communiquer oralement et par écrit en utilisant un vocabulaire mathématique en relation avec les notions abordées dans le chapitre.
- La rubrique « Découvrir » : Destinée à être traitée avec l'aide du professeur dans laquelle les activités proposées visent à permettre aux élèves d'une part de développer leurs capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à raisonner et d'autre part à construire les savoirs et savoir faire à connaître.
- La rubrique « Retenir » : Dans cette rubrique, se trouvent les résultats qu'il est indispensable pour les élèves de connaître.

- La rubrique « S'auto-évaluer » : Cette rubrique vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.
- La rubrique « Mobiliser ses connaissances » : Cette rubrique vise à utiliser différentes approches de recherche, approfondir leur compréhension des notions étudiées, discuter la stratégie proposée, rechercher des stratégies alternatives et élaborer et communiquer une solution au problème.
- La rubrique « Exercices et problèmes : cette rubrique est composée de trois parties:
  - Appliquer : Comporte des exercices d'applications directes du cours qui permettront aux élèves de s'entraîner et de se familiariser avec les notions étudiées.
  - Maitriser : Les exercices et les problèmes proposés visent à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.
  - Avec l'ordinateur : Dans cette partie les élèves utiliseront un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.

II. 2. 1. 1. Analyse du chapitre 11 (Activités algébriques)

Description :

Le chapitre intitulé « *Activités algébriques* », comporte 18 activités, 6 exercices du cours et 21 exercices et problèmes.

Nous récapitulons les différents types de tâches recommandées, tout au long de ce chapitre, dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Multiplier	T_{10}	Factoriser
T_2	additionner	T_{11}	Réduire
T_3	Exprimer en fonction	T_{12}	Trouver
T_4	Donner l'expression	T_{13}	Déduire
T_5	Sans calcul	T_{14}	Expliquer
T_6	Développer	T_{15}	Lire graphiquement
T_7	Calculer	T_{16}	Vrai ou Faux
T_8	Vérifier	T_{17}	Recopier et compléter
T_9	Montrer	T_{18}	Ecrire sous la forme

Tableau II.2.1.1

Dans les trois tableaux ci-dessous relatifs à l'analyse des activités des exercices du cours et des exercices et des problèmes, nous associons à chaque type de tâches les différents

types de techniques associées qui peuvent être des techniques de type sémantique (Tech Sé), de type syntaxique (Tech Sy) ou techniques mixtes (Tech Mix).

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 18 activités dont les neufs premières se rapportent aux expressions littérales. De l'activité n°10 à l'activité n° 17 nous avons des identités remarquables et l'activité n°18 se rapporte aux égalités de deux expressions.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités sont des

- Techniques algébriques pour articuler les expressions algébriques.
- Techniques de reconnaissance des identités remarquables.
- Techniques de calcul mental.
- Techniques pour montrer l'égalité de deux expressions algébriques.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activité	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	$T_1+T_2+T_4$		****	
A2	$T_1+T_2+T_4+T_7$	*	*****	
A3	T_4+T_7	*	*	
A4	T_4	**		
A5	T_4+T_7	*	*	
A6	T_4+T_6	****	*	
A7	T_5+T_7	**		
A8	T_7		*	
A9	T_6		*	
A10	T_5	**		
A11	T_7+T_3	**	**	
A12	T_4	*		*
A13	$T_{12}+T_9$	*		**
A14	T_9+T_6		**	**
A15	$T_{11}+T_6$		*	
A16	T_{10}		*	
A17	T_5	*		
A18	$T_{11}+T_{13}+T_9$	**	***	*

Tableau II.2.1.2

Analyse des exercices du cours et d'application

La partie du chapitre, intitulée « *mobiliser ses compétences* » comporte 6 exercices du cours dont l'objectif est d'institutionnaliser les techniques indispensables pour la résolution

des exercices de ce chapitre et qui sont explicitées dans la rubrique (retenir) et qui consistent à :

- Savoir montrer l'égalité de deux expressions algébriques.
- Manipuler, exprimer des mesures et des grandeurs.
- Savoir lire graphiquement.

Les techniques institutionnalisées et indispensables pour la résolution des exercices de ce chapitre sont explicitées dans la rubrique (retenir). Ce sont les techniques de distributivité et des identités remarquables qui sont des techniques algébriques purement syntaxiques.

L'analyse des situations et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Mobiliser ses compétences et s'auto-évaluer	**Type de Tâches**	**Tech Sé**	**Tech Sy**	**Tech Mix**
S1	T_9		*	
S2	T_9+T_7	**	***	*
S3	T_4+T_7	**		*
S4	$T_{14}+T_3+T_{12}$	***	**	**
S5	$T_{15}+T_7$	*	*	
S6	T_{16}		*	

Tableau II.2.1.3

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comprend 21 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices et Problèmes	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
Ex 1	T_9			*
Ex 2	$T_3+T_6+T_{13}$		**	*
Ex 3	T_9	*		
Ex 4	T_7			*
Ex 5	T_7	****		
Ex 6	$T_{11}+T_6$		*******	
Ex 7	T_{10}			********
Ex 8	T_{10}		*******	
Ex 9	T_7		***	**
Ex 10	T_7		*	
Ex 11	T_6+T_2		**	
Ex 12	T_9		*	*
Ex 13	T_9			**
Ex 14	T_{14}			*
Ex 15	T_9			**
Ex 16	$T_{13}+T_7$	*	****	**
Ex 17	$T_{10}+T_{13}+T_7$	**	*	
Ex 18	T_7+T_4	*		*
Ex 19	T_8	**		
Ex 20	$T_{18}+T_9+T_{13}$	*	*	*
Ex 21	$T_{14}+T_7+T_{12}$	*		**

Tableau II.2.1.4

Conclusion de l'analyse du chapitre « Activités algébriques »

L'analyse en terme de catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices et problèmes de ce chapitre montre que :

- Au niveau des activités les techniques sémantiques et les techniques syntaxiques sont nettement plus présentes que les techniques mixtes pour répondre aux types de tâches demandées.
- Au niveau des exercices d'application, les différents types de techniques sont présents avec une légère dominance des techniques syntaxiques.
- Au niveau des exercices de synthèse et des problèmes, nous remarquons une présence des techniques syntaxiques et mixtes dans la résolution des exercices. En revanche, les technique sémantiques reculent et ne sont présentes que lorsque le type de tâche relève d'une lecture graphique ou dans des vérifications ou des calculs par substitution.

II. 2. 1. 2. Analyse du chapitre 12 (Fonctions linéaires)

Description

Le chapitre intitulé « *Fonctions linéaires* » comporte 4 activités, 5 exercices du cours et 16 exercices et problèmes de synthèse.

Nous récapitulons les différents types de tâches recommandées, tout au long de ce chapitre, dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Calculer l'image ou l'antécédent	T_8	Déterminer la fonction
T_2	Exprimer en fonction	T_9	Comparer
T_3	Placer le point $(x, f(x))$	T_{10}	Construire
T_4	Représenter graphiquement	T_{11}	Répondre vrai ou faux
T_5	Lire graphiquement	T_{12}	Associer
T_6	Vérifier par le calcul	T_{13}	Déterminer graphiquement
T_7	Déterminer le coefficient	T_{14}	Interpréter

Tableau II.2.1.5

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 4 activités dont les deux premières se rapportent à l'introduction des fonctions linéaires, la troisième se rapporte à la représentation graphique d'une fonction linéaire et la quatrième se rapporte à la lecture graphique.

Nous pouvons dire que les techniques institutionnalisées dans cette partie consistent à permettre à l'élève de :

- Reconnaitre une fonction linéaire.
- Représenter une fonction linéaire.
- Lire graphiquement.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	$T_1+T_2+T_{14}$	**	*	***
A2	T_1	*	*	***
A3	$T_1+T_3+T_4$	******		
A4	$T_1+T_2+T_4+T_5+T_6$	**	*****	

Tableau II.2.1.6

Analyse des exercices du cours et d'application

La partie du chapitre, intitulée « *mobiliser ses compétences* » comporte 5 exercices du cours dont l'objectif est d'institutionnaliser les techniques indispensables pour la résolution des exercices de ce chapitre et qui sont explicitées dans la rubrique (retenir) et qui consistent à :

- Déterminer graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire.
- Résoudre un problème de pourcentage.
- Construire un segment de longueur donnée.

L'analyse des situations et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Mobiliser ses compétences et s'auto-évaluer	**Type de Tâches**	**Tech Sé**	**Tech Sy**	**Tech Mix**
S1	T_7	***		
S2	T_8		***	
S3	T_2			*
S4	T_1			**
S5	T_{11}			*******

Tableau II.2.1.7

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 16 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et problèmes et l'association des différents types de techniques associées aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices et problèmes	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_1	***	*	*
E2	T_8		*	
E3	T_7		****	
E4	T_8	*	***	
E5	T_4			*
E6	T_5	***		
E7	$T_{13}+T_7+T_6$	***	***	
E8	T_5+T_1		*	**
E9	T_7+T_5			****
E10	T_4+T_7		*	*
E11	T_1		*	*
E12	T_4+T_5	***	*	
E13	T_1+T_2		*	**
E14	T_1+T_2	***	*	**
E15	T_1	**	****	
E16	T_1			*****

Tableau II.2.1.8

Conclusion de l'analyse du chapitre « Fonctions linéaires »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices et problèmes de ce chapitre montre que :

- Au niveau des activités les techniques sémantiques sont mobilisées dans toutes les activités et s'articulent entre les registres algébriques et graphiques. D'un autre côté, les techniques syntaxiques et mixtes sont présentes dans la plupart des activités.
- Dans la plupart des exercices d'application les techniques mobilisables sont d'un seul type. C'est-à-dire qu'elles sont soit du type sémantique, soit du type syntaxique, soit du type mixte. Ce qui pourrait être lié au type de tâche demandée
- Les techniques syntaxiques et mixtes sont présentes dans la plupart des exercices et problèmes de synthèse. Par contre, les techniques sémantiques sont moins présentes et l'articulation des différents registres algébriques et graphiques est assurée dans la mobilisation des différents types de techniques.

II. 2. 1. 3. Analyse du chapitre 13 (Equations et inéquations du premier degré à une inconnue)

Description

Le chapitre intitulé « *Equations et inéquations du premier degré à une inconnue* », comporte 24 activités d'approche, 9 exercices d'application du cours et 23 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Résoudre mentalement	T_{13}	Combien
T_2	Trouver	T_{14}	Justifier
T_3	Préciser	T_{15}	Regrouper et reconnaitre
T_4	Comparer	T_{16}	Rechercher une 4ème proportionnelle
T_5	Discuter le nombre de solutions	T_{17}	Mettre en équation
T_6	Donner une équation de la forme	T_{18}	Déterminer
T_7	Déceler des erreurs et rectifier	T_{19}	Etudier le signe
T_8	Résoudre (équation ou inéquation)	T_{20}	Déduire
T_9	Calculer	T_{21}	Réduire
T_{10}	Développer	T_{22}	Faire une figure
T_{11}	Factoriser	T_{23}	Vérifier
T_{12}	Exprimer en fonction de		

Tableau II.2.1.9

Analyse des activités ?

La partie « *découvrir* » comporte 24 activités dont les trois premières se rapportent à la définition d'une équation du premier degré à une inconnue réelle et la méthodologie de résolution. Dans l'activité 4 on propose aux élèves de déterminer des erreurs des problèmes proposés. De l'activité n°5 à l'activité n° 8 on indique la méthodologie de la recherche d'une quatrième proportionnelle. Dans les activités 9 et 10 on explique la méthode de la mise en équation d'un problème donné. Dans les activités 11 et 12 on résout des problèmes d'équations se ramenant aux équations du premier degré à une inconnue. De l'activité 13 à l'activité 16 on propose des résolutions d'équations se ramenant à la forme $x^2 = a$. De l'activité 17 à l'activité 22 on propose des résolutions et des modélisations pour résoudre des inéquations. Dans les deux dernières activités on explique la méthodologie de la détermination du signe des expressions de la forme $ax + b$.

Nous pouvons dire que les techniques institutionnalisées dans cette partie consistent à permettre à l'élève de :

- S'approprier la définition et les méthodes de résolution d'une équation du premier degré à une inconnue.
- Savoir déterminer une quatrième proportionnelle.
- Mettre un problème en équation.
- Résoudre des équations se ramenant à des équations du premier degré à une inconnue réelle.
- Résoudre les équations de la forme $x^2 = a$.
- Résoudre des inéquations du premier degré à une inconnue réelle.
- Déterminer le signe de l'expression $ax + b$

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	T_{15}		*	
A2	T_8		*	*
A3	T_6		***	
A4	T_7			**
A5	T_{13}			*
A6	T_{13}			*
A7	T_{18}			*
A8	T_{16}			*
A9	$T_{17}+T_{18}$		*	*
A10	$T_{17}+T_{19}$		*	*
A11	T_8		***	
A12	T_{18}			*
A13	$T_{11}+T_8$		*	*
A14	T_9			*
A15	T_{19}			*
A16	T_{18}		*	
A17	T_8+T_{23}		***	
A18	T_{16}			*
A19	T_8			*
A20	$T_{18}+T_{12}$		*	*
A21	T_{13}			*
A22	T_{18}			*
A23	$T_{20}+T_{23}$		**	
A24	T_{19}		**	

Tableau II.2.1.10

Analyse des exercices du cours et d'application

La deuxième partie de ce chapitre intitulée « *mobiliser ses connaissances* » comporte 9 situations ou exercices du cours.

Les différentes techniques institutionnalisées se résument à :

- Résoudre une équation de premier degré à une inconnue réelle.
- Résoudre une équation se ramenant à une équation produit.
- Mettre en équation un problème.
- Déterminer le signe d'un binôme du premier degré.

L'analyse des situations et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Mobiliser ses compétences et s'auto-évaluer	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	TechMix
S1	T_8		*	
S2	T_8		*	
S3	T_8			*
S4	T_8		*	
S5	T_{17}			*
S6	$T_{12}+T_{18}$			**
S7	T_{19}	*	**	
S8	T_8+T_{11}		**	*
S9	$T_{14}+T_{12}+T_{20}$			***

Tableau II.2.1.11

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 23 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices et problèmes	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_8+T_1	*	********	**
E2	T_8		****	*
E3	T_8		*	***
E4	T_{19}		****	
E5	T_2			*
E6	T_8		**********	
E7	T_9+T_8		**	
E8	$T_{10}+T_{11}+T_8$		*	**
E9	T_8+T_{19}		*	*
E10	T_8			*
E11	$T_9+T_4+T_{12}+T_{22}$		*	***
E12	T_8			*
E13	T_{18}			*
E14	T_{18}			*
E15	T_{18}			*
E16	T_8			*
E17	$T_9+T_8+T_{18}$	*	*	*
E18	T_8			*
E19	$T_{14}+T_{18}$		*	**
E20	T_{18}			***
E21	$T_{18}+T_{12}$		**	**
E22	$T_{12}+T_{18}+T_{22}$		**	*
E23	$T_{12}+T_{18}$			**

Tableau II.2.1.12

Conclusion de l'analyse du chapitre « Equations et inéquations du premier degré à une inconnue »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices et problèmes de ce chapitre montre que :

- Au niveau des activités, les techniques mobilisables s'articulent entre les techniques syntaxiques et les techniques mixtes. En revanche, les techniques sémantiques sont totalement absentes.
- Au niveau des exercices d'applications les techniques purement sémantiques ne sont présentes que dans une seule activité. Par contre, les techniques syntaxiques et mixtes s'articulent mutuellement dans tous ces exercices.
- Au niveau des exercices et des problèmes les techniques mixtes et syntaxiques sont

mobilisées dans la plupart des réponses aux différents types de tâches demandées où la tâche T_8 qui consiste à résoudre les équations et les inéquations est remarquablement présente dans les différentes activités exercices et problèmes proposés dans ce chapitre. D'autre part, les techniques purement sémantiques ne font que de rares apparitions dans deux exercices parmi les 23 exercices proposés.

II. 2. 1. 4. Analyse du chapitre 14 (Fonctions affines)

Description :

Le chapitre intitulé « *Fonctions affines* », comporte 7 activités d'approche, 5 exercices du cours et 15 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Représenter ou tracer	T_{13}	Colorer
T_2	Conjecturer	T_{14}	Placer le ou les points $(x, f(x))$
T_3	Déterminer la fonction affine	T_{15}	Calculer l'image par f
T_4	Donner une équation de la droite	T_{16}	Déterminer l'antécédent
T_5	Justifier	T_{17}	Déterminer
T_6	Déterminer le point d'intersection	T_{18}	Réduire
T_7	Déterminer graphiquement/calcul	T_{19}	Déduire
T_8	Exprimer en fonction de	T_{20}	Modéliser
T_9	Calculer	T_{21}	Vérifier
T_{10}	Lire graphiquement	T_{22}	Déterminer l'ensemble des points
T_{11}	Donner une valeur approchée	T_{23}	Déterminer le coefficient directeur
T_{12}	Exprimer en fonction de	T_{24}	Déterminer les coefficients a et b

Tableau II.2.1.13

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 7 activités dont 2 se rapportent à la définition d'une fonction affine. L'activité n°3 et n°4 se rapportent à la méthode de détermination du taux d'accroissement. Les activités n°5 et n°6 montrent les techniques de représentation d'une fonction affine et la dernière activité n°7 est consacrée à la lecture graphique.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à

- Reconnaître une application affine.
- Déterminer le taux d'accroissement.

- Déterminer l'image d'un réel.
- Déterminer l'antécédent d'un réel.
- Déterminer une fonction affine connaissant a ou b et l'image d'un réel.
- Représenter graphiquement une application affine.
- Lecture graphique (abscisse, ordonnée, ordonnée à l'origine, coefficient directeur, coordonnées des points d'intersection).
- Déterminer une fonction affine à partir de sa représentation graphique.
- Déterminer une équation cartésienne d'une droite.

Remarquons que les techniques institutionnalisées articulent les objets fonction affine, équation cartésienne (algébrique) d'une droite et représentation graphique.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	$T_{15}+T_{16}+T_{19}$	*****	****	
A2	$T_9+T_{12}+T_{17}+T_{18}$	**	****	
A3	T_9+T_{15}		**	
A4	T_{20}			***
A5	$T_{14}+T_2$	********		
A6	$T_{14}+T_1+T_2+T_{15}+T_{21}$	*******	*	
A7	T_{21}	******		

Tableau II.2.1.14

Analyse des exercices du cours et d'application

La deuxième partie de ce chapitre intitulée « *mobiliser ses connaissances* » comporte 5 situations ou exercices du cours.

Les techniques institutionnalisées à travers ces exercices du cours consistent à

- Déterminer une fonction affine f connaissant les images de deux nombres.
- Résoudre graphiquement une équation.
- Résoudre graphiquement une inéquation.

L'analyse des situations et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Mobiliser ses compétences	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
S1	T_3		**	
S2	T_3	*		*
S3	$T_{15}+T_1+T_{13}$	***	*	
S4	$T_8+T_1+T_9$	***		*
S5	$T_{10}+T_{22}$	**		*

Tableau II.2.1.15

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 15 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association avec les différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices et problème	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	$T_{15}+T_{16}$	*	*	
E2	$T_{23}+T_3+T_4$	**	*	
E3	$T_{10}+T_3+T_{25}$	**	*	
E4	T_{24}		****	
E5	T_3	***	*	
E6	T_3			*
E7	T_6	**		
E8	T_1+T_7	**	*	
E9	T_8+T_{17}		**	*
E10	T_8+T_{16}		*	*
E11	$T_8+T_{16}+T_{10}+T_{13}$	**		***
E12	$T_{15}+T_{12}+T_1+T_{10}$	***	*	*
E13	$T_{12}+T_{11}+T_{16}+T_1+T_{10}$	****	*	*
E14	$T_{22}+T_8$	*		**
E15	$T_8+T_1+T_{22}$	*	***	

Tableau II.2.1.16

Conclusion de l'analyse du chapitre « Fonctions affines »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices et problèmes de ce chapitre montre que :

- La mobilisation des techniques sémantiques est remarquablement dominante dans les activités, les exercices d'application et les exercices et problèmes. Ces techniques articulent les deux registres graphiques et algébriques pour répondre aux différents

types de tâches proposées.

- Les techniques mixtes ne sont présentes que dans une seule activité et ne font que de rares apparitions dans les exercices d'application et dans les exercices et problèmes.
- Les techniques syntaxiques son moyennement présentes dans les activités, peu présentes dans les exercices d'application et remarquablement présentes dans les exercices et les problèmes pour répondre à une majorité de types de tâches de nature algébriques. Par exemple la résolution d'une équation du premier degré pour déterminer un antécédent, détermination des coefficients d'une fonction affine par une opération d'identification de forme etc.

II. 2. 1. 5. Analyse du chapitre 15 (Système de deux équations à deux inconnues)

Description :

Le chapitre intitulé « *Système de deux équations à deux inconnues* », comporte 13 activités d'approche, 7 exercices du cours et 14 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Déterminer la relation	T_{11}	Déterminer graphiquement
T_2	Dénombrer les couples	T_{12}	Discuter suivant les valeurs de
T_3	Modéliser une situation	T_{13}	Représenter graphiquement
T_4	Déterminer	T_{14}	Résoudre le système
T_5	Mettre en équation	T_{15}	Interpréter graphiquement
T_6	Placer les points de coordonnées	T_{16}	Vérifier et interpréter
T_7	Remplacer	T_{17}	Résoudre graphiquement le système
T_8	Déduire	T_{18}	Exprimer en fonction de
T_9	Montrer	T_{19}	Additionner
T_{10}	Multiplier	T_{20}	Faire une figure

Tableau II.2.1.17

Analyse des activités

La partie découvrir comporte 13 activités dont 3 se rapportent à l'introduction et la définition d'une équation du premier degré à deux inconnues. De l'activité n°3 et n°10 on introduit les différentes méthodes de résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues. De l'activité n°11 à l'activité n°13 on montre les techniques de l'utilisation d'un graphique pour connaitre les solutions éventuelles d'un système.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à :

- Résoudre une équation du premier degré à deux inconnues réelles.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues réelles par la méthode de substitution.
- Résoudre un système de deux équations à deux inconnues réelles par la méthode d'élimination.
- Utiliser un graphique pour connaître les solutions éventuelles d'un système.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	T_1+T_2	**	**	
A2	T_3+T_4	*	*	**
A3	$T_5+T_4+T_6$	****	*	*
A4	T_5+T_4	*		*
A5	$T_5+T_{18}+T_7+T_8$	*		***
A6	$T_9+T_{10}+T_{19}+T_7+T_4$	**	***	*
A7	T_5+T_4		*	*
A8	T_5			**
A9	T_5+T_{14}		*	*
A10	T_{14}			*
A11	$T_{18}+T_{11}+T_{12}$	**		**
A12	$T_{13}+T_{11}$	**		
A13	$T_{14}+T_{15}$	*	*	

Tableau II.2.1.18

Analyse des exercices du cours et d'application

La deuxième partie de ce chapitre intitulée mobiliser ses connaissances comporte 7 situations ou exercices du cours.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités proposées dans ce chapitre sont décrites dans la rubrique (*Retenir*). En effet, l'élève est supposé capable de mobiliser les techniques suivantes :

- Modéliser un problème par une équation du premier degré à deux inconnues réelles.
- Modéliser un problème par un système d'équations à deux inconnues réelles.
- Résoudre un problème d'optimisation.

L'analyse des situations et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Mobiliser ses compétences	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
S1	T_{13}			***
S2	T_5	*	*	**
S3	$T_5+T_{18}+T_{20}$	*	****	*
S4	$T_5+T_{14}+T_{16}$	*	*	*
S5	T_5+T_{18}		*	*
S6	T_5+T_{18}	*	*	*
S7	$T_{18}+T_{11}+T_{12}$	**		**

Tableau II.2.1.19

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 14 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association avec les différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices et problèmes	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_{14}		*	
E2	T_{17}	*		
E3	T_{14}			*
E4	T_{14}			*
E5	T_{14}			*
E6	T_{14}			*
E7	T_{14}			*
E8	T_{14}			*
E9	T_{14}			*
E10	T_{14}			*
E11	T_{14}			*
E12	T_{14}			*
E13	T_{14}			*
E14	T_{14}			*

Tableau II.2.1.20

Conclusion de l'analyse du chapitre « Systèmes de deux équations à deux inconnues »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices et problèmes de ce chapitre montre que :

- Les différents types de techniques mobilisables, pour répondre aux différents types de tâches proposés dans les activités, sont assez présents. Ce qui permet de dire que

l'articulation des différents points de vue sémantique et syntaxique est présente au moment du traitement des activités.

- Les techniques mixtes sont mobilisables dans tous les exercices d'application. En revanche, nous remarquons un recul des techniques sémantiques et syntaxiques qui peut être lié au type de tâche demandé. Ceci peut s'expliquer par la présence assez remarquable des types de tâches demandés T_5, T_{18}, qui consistent respectivement à mettre en équation, interpréter et exprimer, invitent à mobiliser, le plus souvent, les techniques mixtes.
- Mis à part les deux premiers exercices de la liste des problèmes de synthèse, dont le premier mobilise une technique syntaxique de résolution algébrique et le second une technique sémantique de résolution graphique, les autres exercices ou problèmes de synthèse mobilisent des techniques mixtes. Ces exercices ou problèmes mettent tous en jeu les deux techniques T_5, $T_{14,}$ qui répondent respectivement aux deux types de tâches de mise en équation et de résolution algébrique des systèmes d'équations.

II. 2. 2. Analyse du manuel de la deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique :

Description du manuel

Le manuel de la deuxième année section sciences et technologies de l'informatique de l'enseignement secondaire tunisien est composé de deux tomes. Le tome I est composé de 9 chapitres et le tome II est composé de 10 chapitres.

Dans le préface des tomes de ce manuel, il est indiqué que :

Exception faite du chapitre « Calcul dans IR », chacun des chapitres comporte huit rubriques :

Chaque chapitre est organisé suivant les rubriques suivantes:

- *Pour démarrer* : Aborde certains pré-requis à l'enseignement et l'apprentissage des nouvelles notions.
- *Explorer* : Les activités ont pour objectifs un apprentissage progressif et graduel des nouvelles notions. Certaines de ces activités ont pour but de favoriser l'apprentissage de la modélisation et de l'application des mathématiques au monde réel.
- *Assimiler* : Comporte des exercices d'applications directes. Leur but étant de favoriser un apprentissage autonome de l'élève et de lui fournir l'opportunité de se familiariser avec de nouvelles notions ainsi que de contrôler ses acquis de base.

- *Synthèse* : Cette rubrique contient des résultats exigibles du programme pour une meilleure mémorisation des connaissances et des savoir faire essentiels.
- *Développer ses compétences* : Cette rubrique comporte des situations dont le but est de permettre à l'élève
    - D'approfondir les concepts.
    - De développer des raisonnements.
- *Utiliser les T I C* : cette rubrique est destinée à permettre aux élèves de chercher, expérimenter, conjecturer en utilisant la calculatrice ou un logiciel numérique ou géométrique.
- *Exercices et problèmes* : Les exercices sont variés et sont classés en deux catégories.
    - *Appliquer* : Cette rubrique renferme des applications directes ou indirectes du cours qui permettent aux élèves de s'entrainer et de se familiariser avec les différentes notions étudiées. Ces exercices qui présentent peu de difficultés devraient être faits par tous.
    - *Maîtriser* : Cette partie renferme des exercices et des problèmes qui permettent aux élèves la mobilisation de leurs compétences, le perfectionnement du raisonnement, la maîtrise du calcul, l'initiation à la recherche etc.
- *Math et culture*: C'est une rubrique de culture mathématique générale qui n'est pas toujours en relation directe avec le chapitre étudié.

Nous avons choisi d'analyser les chapitres qui sont en rapport direct avec les objets de notre étude que nous situons au niveau de l'algèbre. Ces chapitres se trouvent dans les deux tomes du manuel.

Dans le tome I nous allons étudier le

- Chapitre 2 : Problèmes du premier et du second degré.
- Chapitre 3 : Notions de polynômes.

Dans le tome II nous allons étudier le

- Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions.
- Chapitre 4 : Fonctions de références.
- Chapitre 6 : Géométrie analytique.

II. 2. 2. 1. Analyse du chapitre 2 (Problèmes du premier et problèmes du second degré) du tome I

Ce chapitre est composé de 38 activités, 15 exercices d'applications directes, 5 exercices de développement de compétences et 26 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Déterminer	T_{12}	Utiliser le discriminant réduit
T_2	Placer les points de coordonnées	T_{13}	Calculer en fonction de
T_3	Interpréter	T_{14}	Factoriser
T_4	Représenter	T_{15}	Déterminer le signe de
T_5	Résoudre	T_{16}	Déduire
T_6	Vérifier	T_{17}	Calculer
T_7	Montrer	T_{18}	Etudier l'existence
T_8	Déterminer graphiquement	T_{19}	Montrer sans calcul
T_9	Exprimer en fonction de	T_{20}	Déterminer l'ensemble des points
T_{10}	Ecrire sous la forme canonique	T_{21}	Préciser
T_{11}	Trouver		

Tableau II.2.2.1

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 38 activités dont les 11 premières se rapportent aux problèmes du premier degré. Dans les activités n°12 et n°13 on introduit la définition d'un problème du second degré. Dans l'activité n°14 on introduit la forme canonique de $ax^2 + bx + c$. De l'activité 15 à l'activité n°17 on introduit la méthode géométrique d'Al Khawarizmi pour la résolution d'une équation du second degré dont la solution est positive. Dans les activités n° 18 et n°19 on introduit les solutions d'une équation du second degré. Dans les activités n°20 et n°21 on introduit le discriminant réduit. De l'activité n°22 à l'activité n°26 on introduit la somme et le produit des racines d'une équation du second degré. Dans l'activité n°27 on introduit les équations se ramenant à une équation du second degré. Dans les activités n°28 et n°29 on introduit les inéquations du second degré. De l'activité n°30 à l'activité n°34 on introduit la méthode de la détermination du signe d'un trinôme du second degré. Dans l'activité n°35 on introduit les techniques du calcul du poids d'un astronaute et de l'activité n°36 à l'activité n°38, celles de résolutions des inéquations du second degré à une inconnues réelles.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à :

- Résoudre des problèmes du premier degré.
- Résoudre des problèmes du second degré.
- Reconnaitre la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.
- Reconnaitre la technique géométrique d'Al Khawarizmi.
- Méthode de la détermination d'une solution d'une équation du second degré.
- Déterminer le discriminant réduit.
- Somme et produit des racines d'une équation du second degré.
- Résoudre des équations se ramenant à une équation du second degré.
- Reconnaitre une inéquation du second degré.
- Déterminer le signe d'un trinôme du second degré.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	T_1		*	
A2	T_1			*
A3	T_1			*
A4	T_1			*
A5	T_1			**
A6	T_1			**
A7	$T_2+T_3+T_{20}+T_4$	**		***
A8	T_5			*******
A9	T_1+T_5	*		*******
A10	T_1+T_5			**********
A11	T_1+T_5			*******
A12	T_1			*
A13	T_1			*
A14	T_6+T_{14}		***	****
A15	T_1			*
A16	T_1+T_9		**	*
A17	$T_{10}+T_1$		*	**
A18	T_7+T_5		*	*
A19	T_5		*	*
A20	$T_6+T_1+T_5$	*	*	*
A21	T_1			*
A22	T_4			*
A23	$T_{17}+T_{16}$	*		*
A24	T_1+T_6	***		***
A25	T_5		**	**
A26	T_1+T_{18}			**
A27	T_1+T_5	****	****	***
A28	T_1			*
A29	T_7+T_{14}		*****	
A30	$T_1+T_{14}+T_{10}+T_{15}$		***	*******
A31	$T_{16}+T_5$	**	******	
A32	T_8+T_{15}	**		
A33	$T_9+T_1+T_5+T_{16}$	*	*	**
A34	T_1+T_5		*	*
A35	T_1+T_5		***	
A36	T_5			******
A37	T_5			*****
A38	T_1+T_5			****

Tableau II.2.2.2

Analyse des exercices du cours et d'application

L'analyse des exercices d'application directe de la partie « *Assimiler* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_5			****
E2	T_5			***
E3	T_5			****
E4	T_5			***
E5	T_{10}		***	
E6	T_5		***	
E7	T_5		***	
E8	T_5		***	
E9	T_5		***	
E10	T_1		****	
E11	T_5			**
E12	T_{14}			****
E13	T_5			****
E14	T_5	*	****	*
E15	T_5		****	*

Tableau II.2.2.3

Analyse des exercices de développement des compétences

L'analyse des exercices de développement des compétences de la partie « *Développer ses compétences* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_1			*
E2	$T_1+T_9+T_7$		*	**
E3	T_7+T_{16}		**	**
E4	T_{17}			*
E5	T_1		**	*

Tableau II.2.2.4

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 26 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes, ainsi que l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_5		***	*
E2	T_5			****
E3	T_5		***	***
E4	T_5		*	**
E5	T_{18}			*
E6	T_1			*
E7	T_5			*******
E8	T_1			*
E9	T_{11}			*
E10	T_1			*
E11	$T_9+T_{16}+T_{17}$			***
E12	T_{11}			*
E13	T_7+T_1		****	*
E14	T_1+T_7		****	
E15	T_{17}			*
E16	T_1			**
E17	T_1			*
E18	T_7+T_1		**	*
E19	T_5			**
E20	T_5+T_{14}		***	
E21	$T_6+T_{19}+T_{21}$	**	*	
E22	T_7+T_1		**	*
E23	$T_7+T_{16}+T_4$	*	**	
E24	T_1			*
E25	T_5		*	
E26	T_7+T_{21}			**

Tableau II.2.2.5

Conclusion de l'analyse du chapitre « Problèmes du premier et du second degré »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices du cours, exercices de développement des compétences et problèmes de synthèse de ce chapitre montre que :

- Au niveau des activités les différents types de techniques sont mobilisables avec une dominance des techniques mixtes.
- Au niveau des exercices du cours et d'application les techniques du type syntaxique et mixte sont présentes. En revanche, on note un remarquable recul de techniques sémantiques, puisque nous n'avons qu'un seul exercice qui exige un type de tâche mobilisateur d'une technique de résolution sémantique.

- Au niveau des exercices de développement des compétences, les techniques du type sémantiques sont totalement absentes et les techniques du type syntaxique et mixtes sont équitablement partagées.
- Au niveau des problèmes de synthèse, les techniques mixtes et syntaxiques sont les techniques les plus mobilisables. Par contre, les techniques sémantiques sont présentes dans deux exercices où le type de tâche demandé est de représenter, vérifier et sans utiliser des calculs qui correspondent respectivement aux tâches T_4, T_6 et T_{19}.

II. 2. 2. 2. Analyse du chapitre 3 (Notions de polynômes) du tome I

Ce chapitre est composé de 25 activités, 13 exercices d'applications directes, 3 exercices de développement de compétences et 19 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Déterminer	T_{12}	Vérifier
T_2	Exprimer en fonction de	T_{13}	Déterminer le polynôme
T_3	Calculer en fonction de	T_{14}	Déterminer le signe
T_4	Déterminer l'ensemble de définition	T_{15}	Simplifier
T_5	Préciser	T_{16}	Calculer
T_6	Déterminer en fonction de	T_{17}	Dresser le tableau de signe
T_7	Calculer l'image	T_{18}	Chercher
T_8	Montrer	T_{19}	Déduire
T_9	Conjecturer	T_{20}	Résoudre
T_{10}	Réduire et ordonner les polynômes	T_{21}	Existe-t-il
T_{11}	Factoriser les polynômes	T_{22}	Discuter suivant les valeurs

Tableau II.2.2.6

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 25 activités dont les 3 premières se rapportent à la notion de fonction. Dans les activités n°4 et n°5 on introduit la définition de la fonction polynôme. Dans les activités n°6 et n°7 on étudie l'égalité de deux fonctions polynômes. Dans l'activité n°8 on introduit la définition du degré d'un polynôme. Dans les activités n°9 et n°10 on introduit les techniques opératoires sur les fonctions polynômes. De l'activité n°11 à l'activité n°21 on introduit les techniques de détermination des racines et de la factorisation d'un polynôme. Dans l'activité n°22 on introduit les polynômes symétriques de degré 3. De

l'activité n°23 à l'activité n°25 on introduit les fonctions rationnelles.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à

- Reconnaitre la définition d'une fonction.
- Reconnaitre les fonctions polynômes.
- Traiter l'égalité de deux fonctions polynômes.
- Exploiter des opérations sur les fonctions polynômes.
- Factoriser un polynôme en s'appuyant sur la détermination de ses racines.
- Reconnaitre un polynôme symétrique de degré 3.
- Exploiter les fonctions rationnelles.

L'analyse des activités et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	T_1			***
A2	$T_5+T_2+T_{16}$	*	*	*
A3	T_4			****
A4	$T_5+T_2+T_{12}+T_{16}+T_{19}$	*	*	***
A5	T_1	****		
A6	$T_7+T_8+T_9$	***	*	**
A7	$T_{12}+T_1$	***		*
A8	T_1	********		
A9	$T_{10}+T_1$	**		***
A10	$T_{10}+T_5$			***
A11	T_{16}	***		
A12	T_8	***		
A13	T_1			**
A14	T_{11}		**	**
A15	$T_{12}+T_1+T_{16}$	**		**
A16	$T_8+T_{11}+T_{19}+T_9$	***	*	****
A17	$T_{12}+T_1+T_{11}$	******		
A18	$T_{12}+T_{11}$	**	**	
A19	$T_{12}+T_1$	*	**	
A20	$T_3+T_{19}+T_{11}+T_{20}$	**	**	*
A21	$T_{16}+T_{21}$	*	*	*
A22	$T_1+T_{11}+T_{22}$	*		**
A23	T_2+T_8	*	**	*
A24	$T_{12}+T_{20}+T_4+T_{15}+T_{14}$	*	**	**
A25	T_1+T_{16}		**	**

Tableau II.2.2.7

Analyse des exercices du cours et d'application

L'analyse des exercices d'application de la partie « *Assimiler* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_1	****		
E2	T_1+T_{21}			**
E3	T_1			****
E4	T_{10}		*****	
E5	T_1	***		
E6	T_{12}	****		
E7	T_{11}		*	**
E8	$T_{12}+T_{11}+T_{14}$	*	**	
E9	$T_{12}+T_{20}+T_{11}$	*		**
E10	T_{20}			**
E11	T_{20}			**
E12	T_4+T_{20}			**
E13	T_4+T_{17}		*	*

Tableau II.2.2.8

Analyse des exercices de développement des compétences

L'analyse des exercices de la partie « *Développer ses compétences* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	$\mathbf{T_{12}+T_{20}}$	*		**
E2	$\mathbf{T_1+T_{19}}$			****
E3	$\mathbf{T_8+T_7}$	*		**

Tableau II.2.2.9

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 19 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_{10}			*****
E2	T_{12}	*		
E3	T_{12}	*		
E4	T_{12}	***		
E5	T_{12}	***		
E6	$T_{12}+T_{11}+T_4+T_{15}+T_{20}$	*	*	**
E7	$T_4+T_{20}+T_{15}$		*	**
E8	$T_1+T_4+T_{15}+T_{20}$		***	*
E9	T_{20}			**
E10	T_{12}	*		
E11	T_1+T_{20}	*	*	
E12	T_1+T_{11}		**	
E13	$T_{12}+T_{11}+T_{20}$	*	*	*
E14	$T_{20}+T_1$		**	
E15	$T_7+T_{19}+T_{11}+T_{20}$	**	***	
E16	T_1			*
E17	T_7+T_{19}	*		*
E18	$T_8+T_1+T_4+T_{20}$	*	**	**
E19	T_4+T_{20}		*	**

Tableau II.2.2.10

Conclusion de l'analyse du chapitre « Notions de polynômes »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices du cours, exercices de développement des compétences et problèmes de synthèse de ce chapitre montre que :

- Au niveau des activités les différents types de techniques sont présents.
- Au niveau des exercices d'application du cours, nous remarquons une dominance des techniques mixtes par rapport aux techniques sémantiques et syntaxiques.
- Au niveau des exercices de développement des compétences nous avons une absence totale des techniques purement syntaxiques et une dominance des techniques mixtes par rapport aux techniques sémantiques.
- Au niveau des problèmes de synthèse les types de tâches les plus demandées sont T_{11}, T_{12} et T_{20} qui correspondent respectivement à la détermination de l'ensemble de définition des fonctions, la vérification et la résolution. Les différents types de techniques mobilisables sont présents avec une légère dominance du type des techniques mixtes.

II. 2. 2. 3. Analyse du chapitre 3 (Généralités sur les fonctions) du tome II

Ce chapitre est composé de 16 activités, 7 exercices d'application directes, 2 exercices de développement de compétences et 13 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Exprimer en fonction de	T_{14}	Décrire les variations
T_2	Déterminer l'ensemble de définition	T_{15}	Etudier les variations
T_3	Déterminer l'expression	T_{16}	Montrer
T_4	Placer les points $(x, f(x))$	T_{17}	Dire si f est paire, impaire…
T_5	Lire graphiquement	T_{18}	Sans calcul…
T_6	Déterminer le min ou le max	T_{19}	Déduire
T_7	Lire les images	T_{20}	Construire
T_8	Lire les antécédents	T_{21}	Représenter graphiquement
T_9	Résoudre	T_{22}	Indiquer
T_{10}	Résoudre graphiquement	T_{23}	Déterminer les points d'intersection
T_{11}	Vérifier	T_{24}	Calculer les images
T_{12}	Comparer	T_{25}	Déterminer les antécédents
T_{13}	Déduire	T_{26}	Associer … la courbe correspondante

Tableau II.2.2.11

Analyse des activités

La partie découvrir comporte 16 activités dont les 5 premières se rapportent à la représentation graphique d'une fonction. De l'activité n°6 à l'activité n°8 on étudie le maximum et le minimum d'une fonction. De l'activité n°9 à l'activité n°12 on étudie le sens de variation d'une fonction. De l'activité n°13 à l'activité n°16 on introduit la définition de la parité et de la symétrie.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à :

- Représenter graphiquement une fonction.
- Déterminer le maximum et le minimum d'une fonction.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction.
- Etudier la parité et la symétrie.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	$T_1+T_2+T_{20}+T_4+T_5$	***		**
A2	T_5	**		
A3	T_{22}	*		
A4	$T_7+T_8+T_9+T_{23}$	*****		
A5	$T_7+T_{10}+T_{12}$	*******		
A6	T_5+T_{11}	**	*	
A7	T_5	**		
A8	$T_{23}+T_6$	**	*	
A9	T_{12}	***		
A10	T_{14}	***		
A11	$T_{12}+T_{14}$	*	*	
A12	$T_1+T_{10}+T_{12}$	***		
A13	$T_{11}+T_{12}+T_{16}+T_{21}$	**		**
A14	$T_{11}+T_{12}+T_{16}+T_{11}$	**		**
A15	T_{17}	***		**
A16	T_{17}	*		

Tableau II.2.2.12

Analyse des exercices du cours et d'application

L'analyse des exercices d'application directe de la partie « *Assimiler* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	$T_2+T_{24}+T_{25}$	*	*	*
E2	$T_7+T_8+T_6+T_{10}$	****		
E3	T_{14}	***		
E4	$T_{18}+T_{15}$	*		
E5	$T_{15}+T_{21}$	*		*
E6	T_{17}	***		
E7	T_2+T_{26}	*	*	*

Tableau II.2.2.13

Analyse des exercices de développement des compétences

L'analyse des exercices de développement des compétences de la partie « *Développer ses compétences* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	$T_3+T_{24}+T_{26}$	***		
E2	$T_{16}+T_{19}+T_6$		*	***

Tableau II.2.2.14

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 13 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_2	*		***
E2	T_{25}		***	
E3	T_2+T_4			*****
E4	$T_5+T_6+T_{25}+T_{10}$	*******		
E5	$T_{16}+T_{15}$			**
E6	T_{17}	***		
E7	T_{10}	******		
E8	$T_2+T_{16}+T_{17}+T_{15}+T_{20}$		*	****
E9	T_{12}	**		
E10	$T_{16}+T_{15}$			**
E11	T_{17}		***	
E12	T_{17}	**		
E13	$T_2+T_{16}+T_{13}+T_{14}$	**	**	*

Tableau II.2.2.15

Conclusion de l'analyse du chapitre « Généralités sur les fonctions »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices du cours, exercices de développement des compétences et problèmes de synthèse de ce chapitre conduit aux résultat suivants :

- Concernant les activités et les exercices d'application, nous remarquons une dominance très remarquable de la mobilisation des techniques du type sémantique, par rapport aux techniques du type syntaxique et mixte, pour l'introduction du concept de fonction où la plupart des types de tâches recommandées sont présentes.
- Au niveau des deux exercices de développement des compétences, nous remarquons que le premier exercice mobilise des techniques du type sémantique. Par contre, le deuxième exercice mobilise des techniques syntaxiques et mixtes.
- Au niveau des exercices et des problèmes de synthèse les différents types de techniques sont présents. Toutefois, chaque type d'exercice ne mobilise qu'un seul type de technique exception faite du dernier qui articule les trois types de techniques.

II. 2. 2. 4. Analyse du chapitre 4 (Fonctions de référence) du tome II

Ce chapitre est composé de 29 activités, 8 exercices d'applications directes, 2 exercices de développement de compétences et 11 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Conjecturer	T_{15}	Donner la fonction à l'aide du graphique
T_2	Décrire ou étudier les variations	T_{16}	Déterminer les points d'intersection
T_3	Montrer	T_{17}	Résoudre
T_4	Calculer les images	T_{18}	Déterminer le signe
T_5	Calculer les antécédents	T_{19}	Retrouver par calcul
T_6	Construire la courbe	T_{20}	Comment peut-on choisir
T_7	Exprimer en fonction de	T_{21}	Lire graphiquement
T_8	Déduire que	T_{22}	Déterminer le domaine de définition
T_9	Déterminer l'axe, le sommet…	T_{23}	Résoudre graphiquement
T_{10}	Vérifier	T_{24}	Déterminer l'ensemble de points
T_{11}	Ecrire sous la forme de	T_{25}	Discuter suivant les valeurs du paramètre
T_{12}	Associer la fonction à sa courbe	T_{26}	Reconnaitre graphiquement le signe
T_{13}	Déterminer l'équation de la parabole	T_{27}	Comparer et ordonner
T_{14}	Représenter	T_{28}	Préciser l'asymptote

Tableau II.2.2.16

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 29 activités dont la première se rapportent à l'introduction des fonctions du type $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$. De l'activité n°2 à l'activité n°5 on introduit les fonctions du type $f(x)=ax^2$ où $a\neq 0$. Dans les activités n°6 et n°7 on étudie les fonctions du type $f(x)=a(x-\alpha)^2$ où $a\neq 0$. Dans les activités n°8 et n°9 on étudie les fonctions du type $f(x)=x^2+\beta$. De l'activité n°10 à l'activité n°17 on étudie les fonctions du type $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a\neq 0$. Dans les activités n°18 et n°19 on étudie les fonctions du type $f(x)=\sqrt{x+b}$. Dans les activités n°20 et n°21 on étudie les fonctions du type $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Dans les activités n°22 et n°23 on étudie les fonctions du type $f(x)=\dfrac{a}{x}$ où $a\neq 0$. Dans les activités n°24 et n°25 on étudie les fonctions du type

$f(x)=\frac{1}{x}+\beta$. Dans les activités n°26 et n°27 on étudie les fonctions du type $f(x)=\frac{a}{x+\alpha}$ où $a \neq 0$. De l'activité n°28 à l'activité n°30 on étudie les fonctions du type $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à étudier et représenter graphiquement les fonctions du type :

1) $f(x)=ax^2$ où $a \neq 0$.
2) $f(x)=a(x-\alpha)^2$ où $a \neq 0$.
3) $f(x)=x^2+\beta$.
4) $f(x)=ax^2+bx+c$ où $a \neq 0$.
5) $f(x)=\sqrt{x+b}$.
6) $f(x)=\frac{a}{x}$ où $a \neq 0$.
7) $f(x)=\frac{1}{x}+\beta$.
8) $f(x)=\frac{a}{x+\alpha}$ où $a \neq 0$.
9) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ où $c \neq 0$.

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A1	$T_1+T_2+T_3+T_4$	*****	**	
A2	$T_6+T_7+T_3$	**	*	***
A3	T_{25}	*		
A4	T_{14}	***		
A5	$T_6+T_2+T_3$	**	**	
A6	$T_3+T_8+T_{14}+T_9$	*	***	*
A7	T_9+T_{14}	***		*
A8	$T_3+T_8+T_{14}+T_9$	*	****	
A9	T_9+T_{14}		***	
A10	$T_{10}+T_{14}+T_9+T_{11}$	**	***	
A11	T_{12}	**		
A12	T_9	*		
A13	T_{13}			****
A14	T_3+T_{17}		*	*
A15	T_{17}	*		***
A16	T_{23}	*	*	*
A17	T_{26}	*****		
A18	$T_2+T_{21}+T_{23}+T_{19}$	****	**	*
A19	$T_{22}+T_2+T_3+T_{14}$	*	**	**
A20	$T_1+T_2+T_{20}+T_{14}$	**		*****
A21	T_{27}	**		
A22	T_3+T_8	*	**	
A23	$T_9+T_1+T_6$	***	*	
A24	$T_3+T_9+T_6$	*	**	
A25	$T_9+T_6+T_{16}$	***	*	
A26	$T_{22}+T_7+T_3+T_{14}+T_{28}$	*	**	**
A27	$T_6+T_2+T_9+T_{28}$	*****	*	
A28	$T_{22}+T_{10}+T_1+T_2+T_9+T_{19}+T_{23}$	**	*****	**
A29	$T_{19}+T_{23}+T_{11}$	**	***	*

Tableau II.2.2.17

Analyse des exercices du cours et d'application

L'analyse des exercices d'applications directes de la partie « *Assimiler* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_9		****	
E2	T_9		****	
E3	T_9+T_2	*	**	
E4	$T_9+T_2+T_6$	*	*	*
E5	T_6	***		
E6	T_9		***	
E7	T_9		***	
E8	T_9		***	

Tableau II.2.2.18

Analyse des exercices de développement des compétences

L'analyse des exercices de développement des compétences de la partie « *Développer ses compétences* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_{13}			*
E2	T_3		*	*

Tableau II.2.2.19

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 11 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E1	T_6+T_{23}	**		
E2	T_9	***	***	
E3	T_6+T_3	**	*	*
E4	T_6+T_{23}	******		
E5	T_9	****	****	
E6	$T_7+T_3+T_6+T_{17}$	*	**	***
E7	$T_6+T_{21}+T_{19}$	***	*	
E8	$T_6+T_{16}+T_{23}+T_3$	***	*	**
E9	$T_3+T_6+T_{23}$	**	*	
E10	$T_3+T_6+T_{21}$	***	*	*
E11	$T_{22}+T_9+T_{16}$	**	*	*

Tableau II.2.2.20

Conclusion de l'analyse du chapitre « Fonctions de référence »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans

les activités, exercices du cours, exercices de développement des compétences et problèmes de synthèse de ce chapitre montre que :

- Les techniques mobilisables, pour répondre aux différents types de tâches demandées dans les activités, sont majoritairement de type sémantique et syntaxique. Par contre les techniques mixtes sont faiblement présentes.
- Les techniques syntaxiques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches proposées par les exercices d'application, dominent remarquablement les techniques sémantiques et mixtes où le type de tâche le plus dominant est celui de la détermination de l'axe de symétrie et le sommet de l'objet parabole qui s'effectue par une reconnaissance syntaxique de la forme de la fonction trinôme données et de l'associer à la formule institutionnalisée.
- Les deux exercices de synthèse proposés mobilisent des techniques mixtes ou syntaxiques.
- Les exercices et les problèmes de synthèse mobilisent remarquablement des techniques sémantiques et ce en présence des autres types de techniques qui sont moins mobilisables. En outre, un type de tâche remarquablement présent est la T_6 qui consiste à construire les représentations graphiques des fonctions institutionnalisées et ensuite les tâches de résolutions graphiques.

II. 2. 2. 5. Analyse du chapitre 6 (Géométrie analytique) du tome II

Ce chapitre est composé de 39 activités, 21 exercices d'applications directes, 7 exercices de développement de compétences et 16 exercices et problèmes.

Nous avons récapitulé les différents types de tâches figurant tout au long de ce chapitre dans le tableau suivant.

Désignation	Type de tâche ou de question	Désignation	Type de tâche ou de question
T_1	Placer les points de coordonnées	T_{17}	Montrer la perpendicularité
T_2	Montrer que les points	T_{18}	Déterminer l'équation réduite
T_3	Vérifier que les points	T_{19}	Représenter la fonction
T_4	Traduire ou vérifier l'appartenance	T_{20}	Colorer
T_5	Montrer : colinéarité ou le parallélisme	T_{21}	Déterminer la distance
T_6	Tracer la droite	T_{22}	Justifier ou étudier l'existence
T_7	Retrouver le résultat géométriquement	T_{23}	Déterminer l'équation (cercle ou droite)
T_8	Déterminer l'ensemble des points	T_{24}	Construire (cercle ou droite)
T_9	Montrer un parallélisme de deux droites	T_{25}	Déterminer : équation de tangente
T_{10}	Déterminer les points d'intersection	T_{26}	Calculer les composantes des vecteurs
T_{11}	Déterminer graphiquement	T_{27}	Déduire
T_{12}	Retrouver par calcul	T_{28}	Résoudre l'inéquation
T_{13}	Déterminer l'abscisse	T_{29}	Prouver ou montrer : égalité ou inégalité
T_{14}	Déterminer l'ordonnée	T_{30}	Montrer que les cercles passent par un point fixe
T_{15}	Montrer l'alignement	T_{31}	Interpréter graphiquement
T_{16}	Exprimer en fonction de	T_{32}	Associer à chaque droite son équation

Tableau II.2.2.21

Dans ce chapitre nous n'allons analyser que les activités, les exercices du cours, les exercices de synthèses et les problèmes qui s'articulent avec les objets de savoir en rapport avec notre travail de recherche.

Ainsi nous n'allons nous intéresser qu'à ceux qui traitent les équations cartésiennes d'une droite, condition analytique de parallélisme de deux droites, condition analytique d'orthogonalité de deux droites, les équations réduites de droites, les fonctions du type $x \mapsto |ax+b|$, distance d'un point à une droite et équation d'un cercle.

Analyse des activités

La partie « *découvrir* » comporte 39 activités dont la première se rapporte à une activité dans un repère orthonormé. Dans l'activité n°2 on introduit les coordonnées d'un barycentre. De l'activité n°3 à l'activité n°8 on étudie les techniques de détermination d'une équation cartésienne d'une droite. De l'activité n°9 à l'activité n°12 on introduit la notion de vecteur directeur et la condition de parallélisme de droites. De l'activité n°13 à l'activité n°17 on introduit la condition analytique de parallélisme de deux droites. De l'activité n°18 à l'activité n°20 on introduit la notion de vecteur normal à une droite et celle de droites perpendiculaires. Dans l'activité n°21 on étudie la condition analytique d'orthogonalité de deux droites. Dans l'activité n°22 on introduit la droite d'Euler. De l'activité n°23 à l'activité

n°27 on détermine les équations réduites de droites et le coefficient directeur. Dans les activités n°28 et n°29 on introduit les fonctions affines par intervalles $x \mapsto |ax+b|$. De l'activité n°30 à l'activité n°33 on introduit la notion de distance d'un point à une droite. De l'activité n°34 à l'activité n°39 on introduit l'équation d'un cercle.

Les techniques institutionnalisées à travers ces activités consistent à

- Savoir exploiter un repère cartésien du plan.
- Déterminer les coordonnées d'un barycentre.
- Déterminer l'équation cartésienne d'une droite.
- Reconnaitre le vecteur directeur d'une droite.
- Reconnaitre la condition du parallélisme de droites.
- Déterminer la condition analytique de parallélisme de deux droites.
- Déterminer le vecteur normal à une droite.
- Montrer que deux droites sont perpendiculaires.
- Condition analytique d'orthogonalité de deux droites.
- Reconnaitre la droite d'Euler.
- Déterminer l'équation réduite d'une droite.
- Déterminer le coefficient directeur d'une droite.
- Etudier les fonctions affines par intervalles de la forme $x \mapsto |ax+b|$.
- Déterminer la distance d'un point à une droite.
- Déterminer l'équation d'un cercle.

En ce qui nous concerne nous allons étudier les activités suivantes :

- De l'activité n°3 à l'activité n°8 (Equation cartésienne d'une droite).
- De l'activité n°13 à l'activité n°17 (Condition analytique de parallélisme de deux droites).
- L'activité n°21 (Condition analytique d'orthogonalité de deux droites).
- De l'activité n°23 à l'activité n°39 (Equation réduite d'une droite, fonction du type $x \mapsto |ax+b|$, distance d'un point à une droite et équation d'un cercle).

Activités	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
A3	T_1+T_2	**		*
A4	T_4+T_{26}		*	*
A5	$T_3+T_5+T_{27}$	***	***	
A6	$T_3+T_4+T_6$	***		
A7	T_{32}	*		
A8	$T_{13}+T_{14}+T_{23}+T_7$	*	***	
A13	T_6+T_5	**	***	
A14	T_9+T_{10}			**
A15	T_8+T_{12}	**	*	
A16	$T_{23}+T_{13}+T_{14}+T_5$	**	***	
A17	$T_1+T_{10}+T_{15}+T_{16}$	**	**	**
A21	$T_6+T_{17}+T_4$	*	***	
A23	$T_{16}+T_3+T_{12}$	*	***	
A24	T_{18}			**
A25	T_5		**	
A26	$T_6+T_{10}+T_{13}+T_{14}$	***	*	*
A27	T_{17}		*	
A28	$T_{16}+T_{14}$	**		*
A29	$T_{19}+T_{28}+T_{20}+T_{16}$	******		**
A30	$T_{16}+T_{21}+T_{17}$	*	*	**
A31	$T_{22}+T_3+T_{21}+T_{29}$		****	*
A32	T_9+T_{25}			**
A33	$T_{23}+T_{21}$		**	
A34	$T_4+T_{29}+T_8$	**	**	*
A35	$T_8+T_{23}+T_{29}$	*	***	
A36	$T_{23}+T_{10}+T_{25}+T_{24}$	**		**
A37	$T_{23}+T_{21}+T_{10}$	*	**	*
A38	T_4			*
A39	$T_{23}+T_6+T_1+T_{21}+T_{29}+T_8$	**	****	*

Tableau II.2.2.22

Analyse des exercices du cours et d'application

L'analyse des exercices d'applications directes de la partie « *Assimiler* » se fait sur les exercices suivants :

- Exercices n°5 et n°6.
- Exercices n°15 au n°21.

Par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites et sont récapitulés dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E5	T_{23}		***	
E6	T_{6}	***		
E15	T_{18}		***	
E16	T_{17}		***	
E17	T_{19}			***
E18	T_{21}		***	
E19	T_{23}		***	
E20	T_{23}		***	
E21	T_{8}		***	

Tableau II.2.2.23

Analyse des exercices de développement des compétences

L'analyse des exercices de développement des compétences de la partie « *Développer ses compétences* » par l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E4	T_{8}			*
E6	$T_{10}+T_{30}+T_{15}$			*****

Tableau II.2.2.24

Analyse des exercices et des problèmes

Cette partie comporte 16 exercices et problèmes de synthèse.

L'analyse des exercices et des problèmes et l'association des différents types de techniques aux tâches prescrites sont récapitulées dans le tableau ci-dessous.

Exercices	Type de Tâches	Tech Sé	Tech Sy	Tech Mix
E2	$T_{13}+T_{14}+T_{23}$	*	**	*
E3	T_{23}			*
E4	$T_{18}+T_{23}$		*	**
E5	$T_{6}+T_{10}$	***		
E6	T_{23}		*	*
E7	T_{31}	*		
E9	T_{31}			*
E10	T_{12}			*
E11	T_{23}			*
E12	$T_{23}+T_{24}$	**		*
E13	$T_{23}+T_{10}$		*	*
E14	T_{23}			*
E15	T_{25}			**
E16	$T_{25}+T_{4}$			**

Tableau II.2.2.25

Conclusion de l'analyse du chapitre « Géométrie analytique »

L'analyse en terme catégorisation sémantique / syntaxe / mixte au niveau des techniques mobilisables pour répondre aux différents types de tâches et questions posées dans les activités, exercices du cours, exercices de développement des compétences et problèmes de synthèse de ce chapitre montre que :

- Les différents types de tâches proposées dans les activités mobilisent les différents types de techniques.
- Les différents types de tâches proposés dans les exercices d'application mobilisent majoritairement des techniques syntaxiques. Les techniques sémantiques et les techniques mixtes ne sont mobilisables que dans deux exercices.
- Les exercices de synthèse contiennent des types de tâches dont les types de techniques mobilisables correspondantes sont du type mixte.
- Les techniques mobilisables dans les exercices et les problèmes de synthèse sont majoritairement du type mixte. En revanche, les techniques du type sémantique et syntaxique sont peu présentes.

II. 2. 3. Analyse du manuel de la troisième année secondaire section mathématiques :

Description du manuel

Le manuel de la troisième année section mathématique de l'enseignement secondaire tunisien est composé de deux tomes. Le tome I est composé de 14 chapitres et le tome II est composé de 10 chapitres.

Ce manuel est conforme au programme de la 3ème année section mathématiques (Décret n°98-1280 du 15 juin 1998).

Nous n'allons pas faire une étude exhaustive de ce manuel, puisque l'enseignement des notions de fonctions polynomiales et rationnelles s'appuie sur des outils et des techniques qui font partie de l'analyse (limite, continuité, dérivabilité, étude du sens de variations et extrema etc.).

Nous remarquons que les problèmes d'optimisation et les résolutions graphiques des inéquations, qui favorisent l'articulation des objets mathématiques équations et inéquations à deux variables, courbes et fonctions, qui d'un point de vue logique, favorisent l'articulation sémantique / syntaxe, sont présents respectivement dans la partie consacrée à l'étude des fonctions du premier tome du manuel et plus précisément dans deux parties des deux

chapitres, dont le premier est consacré à l'étude du sens de variation et extrema d'une fonction et le second est relatif à l'étude des fonctions polynômes du second degré.

Ainsi nous pouvons dire que la présence locale de ces objets mathématiques dans des chapitres traitant des objets avec des outils de l'analyse assure une articulation entre les objets équations / fonctions et courbes.

Conclusion de l'étude des manuels

L'analyse des trois manuels de mathématiques des trois niveaux de l'enseignement secondaire tunisien montre que la prise en compte de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions des activités, exercices et problèmes liés aux traitements des équations, inéquations et fonctions dépend du type de tâche proposée. Généralement, dans le traitement des activités d'approche dans les différents chapitres des manuels scolaires, les différents points de vue sémantique, syntaxique et mixte sont mobilisables. En revanche, dans le traitement des exercices d'application et des exercices des problèmes de synthèse, les techniques mobilisables sont parfois d'une dominance syntaxique et parfois d'une dominance mixte alors que les techniques sémantiques sont remarquablement moins mobilisées que les autres types de techniques. On peut noter en outre que les techniques sémantiques sont très présents dans les activités, les exercices et problèmes des deux chapitres sur les fonctions que nous avons analysés. Ceci peut être mis en perspective avec ce que dit Chevallard sur la nécessité de pouvoir mobiliser un point de vue sémantique lors de l'étude des fonctions (cf. partie A, chapitre II). Enfin, en contrepoint, il faut souligner le primat des techniques syntaxiques dans les rubriques « *Développement des compétences* » des différents chapitres.

Conclusion du chapitre

L'analyse des programmes et des manuels scolaires actuels nous a permit de voir réellement l'articulation de ces objets mathématiques dans l'enseignement tunisien et de les confronter avec les différentes analyses logiques et épistémologiques enrichies par les praxéologies mathématiques et en particulier le bloc (tâche, technique). Cette analyse a contribuée à mettre en évidence la prédominance des techniques syntaxiques dans le traitement des équations et des inéquations au niveau des problèmes et des exercices qui sont supposés conçus pour développer les compétences des élèves. En revanche, l'introduction des fonctions s'appuie essentiellement sur un travail sémantique où les élèves sont appelés à faire

des substitutions, des interprétations par la compréhension du statut de l'image et de l'antécédent etc.

D'un autre côté, nous pensons que l'organisation des chapitres dans le manuel scolaire de la deuxième année sciences et technologie de l'informatique montre clairement que l'articulation entre les équations de courbes, leurs représentations graphiques et leurs rapports avec le concept de fonction, n'est pas clairement explicitée, dans la mesure où les courbes interviennent essentiellement comme représentations graphiques des fonctions au programme. Cette absence d'introduction des courbes comme objet autonome conduit les auteurs des manuels à dénommer ces courbes uniquement par l'expression "la courbe représentative de la fonction *untel*".

Investigations didactiques

Chapitre I
Etude de l'articulation syntaxe sémantique auprès des élèves et des étudiants

Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en rapport les objets mathématiques d'équation, inéquation et fonction par l'intermédiaire d'un outil logique qui consiste en l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique au niveau du raisonnement mathématique.

Ce faisant nous avons montré à travers cette double analyse que, d'une part, l'aspect syntaxique l'emporte le plus souvent sur l'aspect sémantique dans les résolutions au niveau de la transposition du savoir enseigné au savoir à enseigner et ce, en ce qui concerne l'enseignement des équations et inéquations et d'autre part, que l'articulation courbe / équation est absente de l'introduction des fonctions algébriques au niveau du secondaire tunisien.

Nous nous proposons à présent de poursuivre les analyses didactiques par la construction d'un questionnaire articulant les deux points de vue sémantique et syntaxique. Notre objectif est de proposer des idées dégagées à travers l'analyse épistémologique et didactique conduite dans la partie A, afin de tenter de mieux cerner le rapport implicite des élèves à l'articulation sémantiques et syntaxiques.

Cet objectif structure la mise en œuvre expérimentale et les analyses *a priori* et a posteriori du questionnaire. Ce questionnaire se compose de quatre exercices mathématiques destinés à des élèves du secondaire et des classes préparatoires aux études d'ingénieurs.

L'idée principale de ce questionnaire est d'introduire des objets mathématiques, croisant des écritures fonctionnelles et équationnelles et des résolutions graphiques, favorisant *a priori* le recours à des aspects sémantiques de résolution. Nous souhaitons ainsi pouvoir repérer le point de vue mobilisé (sémantique ou syntaxique) par les élèves dans leurs résolutions d'une part et leur capacité à faire certains changements dans les mises en

fonctionnement des connaissances au niveau d'un même ou de plusieurs registres de représentation sémiotique.

En ce qui concerne la méthodologie suivie tout au long de cette première investigation didactique, nous avons tout d'abord justifié nos choix et notre stratégie dans l'élaboration de ce questionnaire, en appui sur nos études de la partie A et sur le point de vue de Robert (1998). Nous avons ensuite conduit une analyse *a priori* des différentes méthodes de résolution attendues, puis une analyse *a posteriori* des différentes réponses des élèves. Ces analyses s'appuient essentiellement sur les catégorisations logiques et praxéologiques, enrichies par le point de vue de Duval (1988, 1993), qui a étudié les conditions cognitives dans l'apprentissage. Enfin, pour savoir si la répartition des réponses est homogène ou non selon les classes, nous avons fait une analyse comparative des classes en fonction de la catégorisation des différentes procédures mobilisées par les élèves.

Ce chapitre est composé essentiellement de deux parties. La première partie est consacrée à l'analyse *a priori* du questionnaire et la deuxième partie aux analyses de réponses obtenues.

I. Analyse *a priori* du questionnaire

Préliminaire

Dans ses travaux de recherche en didactique des mathématiques, Robert (1998) propose des outils d'analyse des notions mathématiques à enseigner au lycée et à l'université qui sont, en quelque sorte, des réponses aux questions que peut se poser un chercheur sur le niveau de connaissances, les contraintes et les spécificités en matière des contenus, sur la façon d'expérimenter.

Ces outils permettent au chercheur de prendre en compte, dans ses analyses, la spécificité et la complexité des notions mathématiques à enseigner compte tenu des programmes d'enseignement, des hypothèses sur l'enseignement et l'apprentissage qu'il veut mettre en jeu, et ce :

« … *que ce soit à des fins d'évaluation, pour des diagnostics ou d'élaboration de séquences et de scénarios.* » (Robert, 1998, p. 142)

Dans notre travail de recherche, nous nous sommes appuyés sur ces outils d'analyse pour justifier nos choix et notre stratégie dans l'élaboration de notre questionnaire.

Nous allons dans un premier temps présenter brièvement les outils d'analyse que propose Aline Robert pour éclairer certains de nos choix dans l'analyse *a priori* de notre questionnaire.

Aline Robert propose des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves relatifs à un niveau scolaire donné. Elle suppose que la disponibilité des connaissances est intimement liée à l'organisation des connaissances entre différents registres ; ceci en accord avec des auteurs comme Douady (1986) ou Duval (1988,1993) et définit trois niveaux de mise en fonctionnement.

- ✓ Le niveau technique qui correspond à des mises en fonctionnement des applications immédiates de théorèmes, propriétés, définitions, formules etc.
- ✓ Le niveau des connaissances mobilisables qui correspond à des mises en fonctionnements plus larges et dépassant les applications simples des propriétés, théorèmes, définitions etc.
- ✓ Le niveau de connaissances disponibles qui correspond au fait de pouvoir résoudre ce qui est proposé sans aucune indication. Ce niveau est lié à une familiarité importante, à la connaissance de situations de références variées que l'élève ou l'étudiant connaît.

Concernant le niveau des connaissances mobilisables, elle écrit :

« *Dans tous les cas, ce niveau teste une mise en fonctionnement où existe un début de juxtaposition de savoirs dans un domaine donné, voire d'organisation, il n'y a pas seulement application simple, les caractères outils et objets peuvent être concernés.* » (Robert, 1998, p. 166).

I. 1. Introduction

Cette étude permet de faire des hypothèses sur les manuels et les programmes à l'issue d'un processus d'enseignement.

Bien que, pour une étude complète du processus de transposition didactique, cette étude ne remplace pas l'étude de l'activité des professeurs dans la classe (Chevallard & Joshua, 1991 ; Arsac et al., 1992), nous faisons l'hypothèse que, en Tunisie, compte tenu en particulier de ce qu'il y a un seul manuel officiel pour chaque niveau d'enseignement, l'étude du savoir à enseigner nous permet de formuler des hypothèses suffisamment fondées pour pouvoir les confronter directement aux connaissances et aux savoir faire des élèves :

- ➢ *H*1 L'enseignement favorise peu le point de vue sémantique et en conséquence le point de vue syntaxique s'impose progressivement dès que les techniques sont disponibles au détriment du point de vue sémantique.

- $H2$ Les programmes et les manuels scolaires favorisent, plutôt, la subordination des courbes aux fonctions au détriment d'une articulation « équation / courbe/ fonction ».

Nous essaierons de dégager dans quelle mesure les deux aspects sémantique et syntaxique cohabitent, lorsque les élèves du secondaire sont en situation de résolution de tâches liées à la manipulation des équations, inéquations et fonctions.

Pour répondre à cet objectif, nous avons construit un questionnaire composé de quatre exercices mettant en jeu la manipulation d'écritures algébriques et plus particulièrement des équations et des inéquations du premier et du second degré à une et à deux variables réelles, des fonctions linéaires, affines et trinômes. Ce questionnaire a été présenté à deux groupes d'élèves et étudiants

Le premier groupe est composé d'élèves de deuxième année secondaire (16 à 17ans) section sciences ayant étudié avec le nouveau manuel et d'élèves de troisième année secondaire section mathématiques (17 à 18 ans) qui ont étudiés avec l'ancien manuel de la deuxième année secondaire[69].

Le deuxième groupe est composé des étudiants des classes préparatoires aux études d'ingénieurs qui ont obtenu leur baccalauréat en 2006 et ont passé ce questionnaire tout au début de l'année universitaire 2006 / 2007, avant le début des enseignements universitaires.

En nous appuyant sur les travaux de Robert (1998) sur l'analyse des contenus à enseigner et plus particulièrement sur les analyses en terme de niveaux de mises en fonctionnement des connaissances par les élèves, nous avons pu faire une distinction, *a priori*, entre les deux groupes d'élèves.

Le premier groupe d'élèves est supposé avoir un *niveau technique*[70]qui leur permettra de faire un calcul correct par la mise en jeu des applications des théorèmes, propriétés, formules, etc. De plus, ces élèves sont supposés atteindre un *niveau de connaissances mobilisables* puisqu'ils peuvent, *a priori*, identifier un savoir à mobiliser même s'il est introduit dans un contexte particulier. Ce qui signifie qu'il n'y a pas seulement des applications simples mais des caractères outil et objet, présents dans une situation de résolution, et mobilisables par les élèves. En revanche, on peut faire l'hypothèse que

[69] Le changement des manuels scolaires Tunisiens, au niveau de la deuxième année secondaire a été effectué en 2003 conformément aux nouveaux programmes fixés par la loi d'orientation du 23 juillet 2002.

[70] « *Ce mot n'a pas à avoir a priori avec le mot « technique » utilisé par Y. Chevallard, 1995, pour décrire des pratiques* ». (Robert, 1998, p. 165)

l'ensemble de ces élèves n'ont pas atteint un *niveau de connaissances disponibles* qui correspond à une capacité de résolution de ce qui est proposé sans indications.

C'est ce dernier niveau qui fait, *a priori*, une différence entre le premier groupe composé d'élèves du secondaire et le deuxième groupe composée d'étudiants des classes préparatoires.

En effet, les élèves, arrivant en classes préparatoires, sont supposés avoir une aptitude à aller chercher ce qui peut intervenir dans la résolution des problèmes liés à la manipulation formelle des équations, inéquations et fonctions, puisqu'ils peuvent reconnaître des situations de références à ces problèmes, très variées.

Ce questionnaire a été réalisé dans quatre établissements tunisiens : Lycée Zahrouni à Tunis, Lycée Pilote du gouvernorat de l'Ariana, Lycée secondaire 7 Novembre Sakiet Sidi Youssef au gouvernorat du Kef au nord ouest de la Tunisie et à l'Institut Préparatoire aux Etudes d'ingénieurs El Manar à l'Université Tunis El Manar. Les enseignants et élèves du secondaire, qui ont répondu à ce questionnaire, étaient volontaires pour le passer hors des séances d'enseignement, tandis que les élèves des classes préparatoires ont passé ce questionnaire dès la deuxième séance de la première semaine de l'année universitaire et au cours d'une séance d'enseignement du cours d'analyse.

Nous avons informé les enseignants de ces élèves que ce travail est destiné à savoir comment les élèves tunisiens raisonnent dans des exercices d'algèbre, et non pas d'évaluer les enseignants eux-mêmes.

La durée de passation était d'environ une heure et demie pour tous les groupes.

Les élèves et les étudiants avaient pour consignes de travailler silencieusement et individuellement. De plus il leur a été indiqué qu'il est possible de commencer par n'importe quelle question.

I. 2. Les objets mathématiques

L'analyse logique des objets mathématiques d'équation, d'inéquation et de fonction que nous avons conduite dans la première partie de notre travail a montré que l'articulation entre syntaxe et sémantique est également au cœur de l'articulation entre les registres algébriques et graphiques (Duval, 1988, 1993 & 1996).

De plus, rappelons que l'une des hypothèses de notre travail de recherche était de faire référence à la notion de conception sémantique de la vérité, relative à la théorie élémentaire des modèles de Tarski (1936, 1944), qui nous renvoie principalement aux notions

de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, de désignation, et d'interprétation d'un énoncé dans un domaine de vérité.

Nos analyses des travaux de Tarski sur la distinction entre fonction à une seule variable et relation, développées dans le chapitre I, montrent qu'une équation traduisant une relation de corrélation entre deux variables x et y peut être exprimée par une relation fonctionnelle mettant en jeu une fonction ou deux fonctions à deux variables que l'on peut écrire sous la forme $F(x, y) = 0$ ou $F(x, y) = G(x, y)$. Par contre, les analyses que nous avons effectuées, au niveau des programmes et des manuels scolaires, en terme de praxéologies mathématiques développées par Chevallard (1989, 1991) et appuyées par les travaux de Duval (1988, 1993) sur la coordination des registres de représentations sémiotiques et par la catégorisation logique en terme de sémantique / syntaxe, montrent que l'articulation équation / fonction est peu exploitée et intégrée explicitement. En outre, dans les programmes et les manuels scolaires, les liens entre courbes / fonctions apparaissent seulement sous la forme de la dépendance des courbes aux fonctions, et l'on ne trouve pas a fortiori d'articulation entre courbe / équation / fonction.

Les objets mathématiques que nous avons proposés dans le questionnaire sont les équations du premier et du second degré à une ou à deux inconnues réelles, les inéquations du premier degré à deux inconnues réelles, les équations de droites, les équations de cercles, les fonctions trinômes, les systèmes d'inéquation du premier degré à deux variables réelles, des écritures ensemblistes, les systèmes d'équations comportant une équation du second degré, et une équation du premier degré paramétrée ou non. A part les systèmes, ces objets font partie explicitement des programmes de la deuxième année de l'enseignement secondaire tunisien. Les systèmes d'équations et d'inéquations[71] que nous avons proposés dépassent *a priori* les connaissances acquises par les élèves de la deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique. Par contre, ils sont certainement connus par les élèves de troisième année.

I. 3. Choix des exercices

Dans ce paragraphe nous nous proposons d'expliciter et de justifier les choix que nous avons faits pour construire les exercices que nous avons proposés aux élèves. En annexe, nous proposons une correction, à l'attention du lecteur, de ce questionnaire. Enfin, nous décrivons le type de réponses et / ou de procédures de résolution *a priori* relatives aux questions

[71] Cependant, cet objet vivait avant dans le manuel de la deuxième année secondaire section : Technologie de l'informatique qui a été mit en application durant les deux années scolaires 2004 / 2005 et 2005 / 2006. Ce manuel ne fait plus partie des manuels de l'enseignement secondaire depuis l'année scolaire 2006 / 2007.

proposées dans le questionnaire.

Le premier exercice standard manipule des écritures fonctionnelles et équationnelles où l'élève est soumis à des déséquilibres au niveau de ses connaissances à cause des changements de cadres et de registres, des changements de points de vue, des mises en relation.

Nous avons également construit des exercices contenant des équations et des inéquations à deux variables réelles, dont la plupart sont reconnues par les programmes et les manuels comme les équations de droites, cercles, etc. En revanche, nous avons introduit des énoncés qui incitent les élèves à faire certains changements dans les mises en fonctionnement des connaissances, certaines adaptations dans les théorèmes, propriétés, certaines articulations entre les connaissances, etc.

Dans ces exercices, nous supposons que ces connaissances peuvent être reconnues par les élèves puisqu'elles sont des extensions des notions déjà étudiées.

« *On fait jouer l'hypothèse, constructiviste et interactionniste, que les élèves donneront du sens à la notion car ils sont en partie acteurs de la construction de leurs connaissances…* » (Robert, p. 171).

De plus, il s'agit de problèmes que les élèves ont pu rencontrer à de nombreuses reprises dans l'année, sous différentes facettes, ce qui en fait *a priori* des terrains d'investigation familiers.

Indiquons enfin que les exercices proposés favorisent le recours à des aspects sémantiques qui peuvent faciliter les tâches des élèves. Nous faisons l'hypothèse que ceci peut nous aider à repérer dans quelle mesure l'aspect sémantique est mobilisé par les élèves et à voir l'effet éventuel du contrat didactique sur les procédures de résolutions des élèves.

Dans ce qui suit, nous allons présenter les exercices proposés en indiquant les grandes lignes de nos choix didactiques et méthodologiques.

I.3. 1. Exercice 1

Le travail demandé au niveau de l'exercice N°1 consiste à résoudre dans IR l'équation : $f(x)=g(x)$ où $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=3x+2$ puis de déduire les solutions de l'équation : $f(x)=|g(x)|$.

Nous avons choisi de faire une entrée par des écritures fonctionnelles, pour amener les élèves à croiser les fonctions avec les équations dans leurs procédures de résolution. Ceci fait l'objet de la première question dans laquelle les élèves sont appelés à articuler différents

registres de représentations sémiotiques pour résoudre graphiquement et par le calcul l'équation : $f(x)=g(x)$.

C'est en effet le passage des fonctions aux équations qui leur permettra de faire une résolution algébrique et le passage des fonctions à leurs représentations qui permet la résolution graphique.

Nous avons introduit une nouvelle tâche, dans le milieu matériel des élèves, pour répondre à la question qui consiste à résoudre par deux méthodes, l'une par le calcul et l'autre par le graphique, l'équation : $f(x)=g(x)$, afin de voir s'ils vont continuer à faire des résolutions algébriques ou bien s'ils vont exploiter cette nouvelle tâche et feront appel au registre graphique pour entamer la résolution. Cet exercice est une activité très particulière permettant diverses réorganisations dans laquelle les élèves ont une variété des réinvestissements proposés. En effet, cet exercice peut provoquer des *activités de décloisonnement* (Robert, 1998) mettant en jeu plusieurs cadres ou registres pour une même notion ou plusieurs. Ceci nous permettra d'anticiper sur le niveau de mise en fonctionnement des connaissances nécessaires dans les résolutions attendues par les élèves. Les différents types de réponses attendues peuvent nous aider à mettre à l'épreuve nos hypothèses de travail. Dans les trois autres exercices, nous avons introduit différents types d'énoncés contenant des équations et des inéquations à deux variables, des fonctions à deux variables, en vue de mesurer à quel point l'outil sémantique est employé dans les résolutions.

I.3. 2. Exercice 2

L'exercice N°2 :

« Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S)\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$$ »

un énoncé est dit *non standard*, s'il dépasse *a priori* largement les connaissances des élèves.

Nous avons choisi de poser cet exercice pour voir si les élèves vont faire des changements de stratégies en tous genres et s'ils vont mettre en relation leurs acquis sur les fonctions affines et les notions d'équations cartésiennes de droites afin de pouvoir travailler sur des écritures abordables, puisqu'ils sont supposés atteindre un niveau technique leur permettant de résoudre les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues réelles.

Ce type de questions pourrait nous permettre, *a priori*, d'expliquer certains

phénomènes liés au contrat et au milieu didactique. De plus nous faisons l'hypothèse que nous pourrons mesurer à quel point l'élève peut se permettre de faire une rupture du contrat didactique et dans quelles mesures il peut exploiter le milieu dans une situation didactique et s'efforcer à faire des changements dans la mise en fonctionnement de ses connaissances et certaines adaptations à faire des articulations des connaissances dans une situation de résolution.

I.3. 3. Exercice 3

« 1) Soit $\zeta = \left\{ M(x, y); x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \right\}$ et $\Delta = \left\{ M(x, y); 4x + 3y + 9 = 0 \right\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

b) Résoudre dans IR^2 le système $(S)\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ 4x + 3y + 9 = 0 \end{cases}$.

2) Déterminer le nombre des solutions du système $(S)\begin{cases} x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0 \\ y = m \end{cases}$; où $m \in IR$. »

présente un énoncé standard même si nous avons introduit des questions qui semblent, à première vue, non abordables par les élèves, puisqu'en effet, nous avons présenté des écritures ensemblistes, des systèmes d'équations et des systèmes d'équations paramétrées que les élèves ne sont pas habitués à rencontrer.

Nous souhaitons observer si les élèves sont capables de réussir à organiser des passages entre un cadre bien connu et un cadre moins bien maitrisé car ceci nous semble fondamental dans les stratégies adoptées pour l'activité mathématique.

Nous avons proposé une première question qui consiste à déterminer la nature de deux ensembles, qui sont un cercle et une droite, caractérisés par une écriture ensembliste que les élèves ne sont pas habitués à rencontrer. En effet, dans les manuels scolaires les droites et les cercles sont introduits par leurs équations cartésiennes ou par une caractérisation littérale dans laquelle on décrit une droite ou un cercle comme étant un ensemble de points de coordonnées (x, y) vérifiant une équation à deux variables bien déterminée. En revanche, nous pensons que cette écriture ne perturbera pas les élèves, puisqu'ils sont supposés capables de surmonter des difficultés de traduction entre différentes écritures qui sont généralement peu présents dans les manuels, malgré leur pertinence pour la compréhension des notions.

Nous avons proposé cette première question en vue d'ouvrir le champ des réponses

relatives à la question 1.b que nous pouvons classer en tant que question provoquant des *activités de décloisonnement* au sens de (Robert , 1998) qui consistent à mettre en jeu plusieurs manières pour utiliser un outil de résolution d'un système d'équation que les élèves ne sont pas habitués à résoudre, puisqu'il contient une équation du second degré à deux variables réelles, dont une autre est bien connue puisqu'elle présente une équation du premier degré à deux inconnues réelles.

Mais là encore, il s'agit d'une organisation, que nous avons proposée, pour mettre les élèves dans des situations de résolution afin de repérer ce qu'ils vont mettre en œuvre comme outil pour répondre à la question.

Concernant la deuxième question de l'exercice N°3 qui consiste à résoudre un système d'équations dont l'une est paramétrée mais abordable, l'objectif de ce questionnaire ne consistant pas à mesurer les capacités des élèves à surmonter certaines difficultés dans des résolutions d'équations paramétrées complexes.

Cependant, la résolution de ce système d'équations exige une organisation des connaissances où l'élève est appelé à changer de point de vue ou de registre

Nous voulons voir jusqu'à quel point degré, le point de vue variable[72] est présent chez les apprenants.

I.3 .4. Exercice 4

Pour terminer le questionnaire, nous avons proposé un exercice (Exercice N°4) qui consiste à articuler les fonctions et les équations ou inéquations à deux variables. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble des solutions d'une inéquation à deux variables réelles.

Cet exercice a été proposé aux deux catégories des groupes d'élèves de deux façons différentes.

En outre, nous pensons que le groupe d'élèves de deuxième et de troisième année secondaire auraient des difficultés pour résoudre directement l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$. En effet, ce type de problèmes exige un niveau des connaissances disponibles, c'est-à-dire de pouvoir résoudre ce qui est proposé sans indications ; nous pensons qu'il est peu probable que ces élèves arrivent à résoudre cette inéquation. Par conséquent, nous avons introduit des questions supplémentaires pour faciliter cette résolution.

Par contre nous estimons que les élèves des classes préparatoires sont arrivés à un stade où ils disposent des repères et des acquis qui leurs permettront de résoudre directement

[72] La capacité d'interprété dans un domaine d'un point de vue logique et dans un registre d'un point de vue didactique.

l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Ceci nous a conduit à proposer cet exercice sous deux formes différentes.

- La première forme est adressée au groupe d'élèves du secondaire comme suit :

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ donc $h(x,y)$…….

b) $(x,y)=(1,3)$ donc $h(x,y)$…….

c) $(x,y)=(5,4)$ donc $h(x,y)$…….

d) $(x,y)=(-2,-1)$ donc $h(x,y)$……....

e) $(x,y)=(-1,-2)$ donc $h(x,y)$……

f) $(x,y)=(6,7)$ donc $h(x,y)$…….

3) Placer, dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A,B,C,D,E et F de coordonnées respectives : $(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6,7)$.

4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

- La deuxième forme est adressée au groupe d'élèves des classes préparatoires de la manière suivante :

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

I. 4. Catégorisation des méthodes de résolutions mathématiques et procédures des élèves

Dans cette partie nous allons décrire les différentes méthodes de résolutions mathématiques des exercices proposés dans le questionnaire. Ensuite, nous nous proposons de

décrire ce que nous attendons comme procédures de réponses des élèves en nous appuyant sur les analyses des programmes et des manuels, effectués dans le chapitre IV de la partie A, qui nous permettront de pouvoir reconnaître les connaissances mises en jeu pour répondre aux différentes questions proposées dans ce questionnaire.

L'énumération des différentes variables didactiques, relatives à chaque exercice, nous permettra d'analyser les procédures de résolutions attendues et de les catégoriser, suivant le cadre théorique que nous avons choisi pour analyser les programmes et les manuels scolaires tunisiens.

Nous allons exploiter les cadres théoriques sur lesquels nous nous sommes appuyés pour analyser les programmes et les manuels scolaires en croisant les praxéologies didactiques introduites par Chevallard, le point de vue logique et en particulier l'articulation sémantique / syntaxe se basant sur la théorie élémentaire de la vérité de Tarski et l'articulation des différents registres de représentation sémiotiques de Duval.

Ceci nous à conduit à codifier les différentes étapes de résolution de chaque exercice en terme de technique sémantique, syntaxique, ou mixte dans un registre de représentation sémiotique donné.

Nous allons noter les techniques utilisées, qui correspondent à des tâches bien déterminées, par t. Ces techniques vont être indexées comme suit : $t_{a-b-c-d-e-f}$.

Les indexes a, b, c, d, e et f correspondent à :

- a correspond à ordonner les techniques employées dans la résolution de l'exercice.
- b correspond au numéro de l'exercice du questionnaire.
- c correspond au numéro de la question dans l'exercice.
- d correspond au type des techniques qui seront notées par « $sé$ » si elle est sémantique, « sy » si elle est syntaxique et par « M » si elle est supposée mixte.
- e correspond à la classification de la technique employée dans un registre de représentations sémiotiques. On notera le registre graphique par « $grph$ », le registre numérique par « num », le registre algébrique par « $a\lg$ », le registre fonctionnel ou analytique par « anl »…etc.
- f correspond à une technique erronée employée par l'élève.

I. 4. 1. Analyse *a priori* de l'exercice N°1 :

Dans l'exercice N°1 :

Soient les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=3x+2$.

1) Résoudre dans IR, par le calcul puis graphiquement : $f(x)=g(x)$.

2) Déduire les solutions de l'équation : $f(x)=|g(x)|$.

Nous avons proposé une première question qui consiste à résoudre par deux méthodes, l'une algébrique et l'autre graphique, une équation de la forme $f(x)=g(x)$ où $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=3x+2$.

Pour la résolution algébrique, différentes transformations algébriques conduisent à l'équation équivalente : $x^2-3x-4=0$. On peut ensuite faire appel ou bien au calcul du discriminant $\Delta=(-3)^2-4\times1\times(-4)=25$, qui est une technique syntaxique notée $t_{1-1-1-sy-a\lg}$, ou bien à la règle des coefficients qui peut être utilisée dans la résolution d'une équation du second degré à une inconnue réelle de la forme : $ax^2+bx+c=0$ et dans ce cas on est ramené à deux sous cas :

1) Si $a+b+c=0$ alors les deux solutions de cette équation sont 1 et $\frac{c}{a}$.

2) Si $a-b+c=0$ alors les deux solutions de cette équation sont -1 et $-\frac{c}{a}$.

Cette règle est une technique syntaxique qu'on notera $t_{2-1-1-sy-a\lg}$.

Dans notre cas nous avons $a-b+c=0$ ceci permet de conclure que les racines sont -1 et 4 et par suite $S_{IR}=\{-1,4\}$.

La résolution de cette équation peut être faite également soit suite à la détermination d'une racine remarquable, qui est une technique sémantique notée $t_{3-1-1-sé-num}$, conduisant à une forme factorisée $(x+1)(x-4)=0$, ce qui permet de déduire que les solutions sont -1 et 4 et par suite $S_{IR}=\{-1,4\}$, soit à une procédure qui consiste à donner des valeurs à la variable x, ce qui pourrait permettre de conclure que l'ensemble des solutions de l'équation $x^2-3x-4=0$ est $S_{IR}=\{-1,4\}$ et ceci en se basant sur le fait qu'une équation du second degré admet au plus deux solutions. Dans ce cas cette procédure est supposée comme étant une technique sémantique notée $t_{4-1-1-sé-num}$.

L'équation $f(x)=g(x)$ présente une égalité entre une fonction trinôme d'une part et une fonction affine d'autre part.

La résolution graphique de cette équation, est une tâche consistant à déterminer les abscisses des points d'intersection des deux représentations graphiques des deux fonctions f et g. Les représentations graphiques de ces deux fonctions peuvent être réalisées suivant trois méthodes ou techniques différentes qui consistent en une :

1) Représentation ponctuelle par association de valeurs à la variable x pour déterminer la valeur correspondante de y, donnée par la fonction trinôme f et de la fonction affine g qui est une droite. Nous notons cette technique sémantique par $t_{5-1-1-sé-num}$.
2) Etude complète des variations de la fonction trinôme f qui consiste à déterminer son domaine de définition qui est IR et de démontrer qu'elle est paire et par la suite elle admet comme axe de symétrie l'axe des ordonnées et de dresser son tableau de variation où elle sera strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et puisque $f(0)=-2$ alors le point $S(0,-2)$ est le sommet principal de la parabole. De plus la fonction affine g peut être représentée par l'assignation de deux valeurs à la variable x permettant de déterminer le y correspondant et par la suite les deux points par lesquels passe la droite représentant g. Cette technique de résolution est notée par $t_{6-1-1-sy-grph}$.
3) Représentation graphique de la parabole et de la droite par leurs éléments caractéristiques lus sur les équations. Ce qui revient à dire qu'en se basant sur les théorèmes du cours du manuel de la deuxième année secondaire[73] on énonce que : « La courbe représentative dans un repère orthogonal de la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-2$ est une parabole ayant pour sommet le point $S(0,-2)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x=0$ ». De même, la représentation graphique, dans un repère orthogonal, de la fonction g est une droite de coefficient directeur 3 passant par le point de coordonnées $(0,2)$[74]. Par la suite une lecture graphique permet de déterminer les solutions de l'équation

[73] La technique de représentation graphique est énoncée dans le manuel de la deuxième année section sciences et technologie de l'informatique tome II à la page 65 comme suit : « *La courbe représentative de la fonction* f *définie sur* IR *par* $f(x)=a(x-a)^2+\beta$ *est une parabole de sommet* $S(\alpha,\beta)$ *et d'axe de symétrie la droite d'équation* $x=\alpha$. »

[74] Cette technique est énoncée dans le chapitre 14 sur les fonctions affines du manuel de la première année secondaire Tunisien à la page 218.

$f(x)=g(x)$. Nous notons cette technique par $t_{7-1-1-M-grph}$.

4) Représentation graphique de la parabole et de la droite par leurs éléments caractéristiques lus sur les équations. Autrement dit, en se basant sur les théorèmes du cours du manuel de la deuxième année secondaire[75], on énonce que : « La courbe représentative dans un repère orthogonal de la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-2$ est une parabole ayant pour sommet le point $S(0,-2)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x=0$ ». Cependant, la représentation graphique de la fonction g se fait par association de deux valeurs à la variable x pour pouvoir déterminer les coordonnées de deux points du repère par lesquels passe la droite représentant la fonction affine g. Dans ce cas, nous notons la technique exploitée par $t_{7'-1-1-M-grph}$.

La deuxième question consiste à déduire les solutions de l'équation $f(x)=|g(x)|$, il s'agit d'une tâche à laquelle correspondent des techniques multiples de résolution. En effet, l'équation : $f(x)=|g(x)|$, qui s'écrit $x^2-2=|3x+2|$, peut être résolue par trois méthodes algébriques :

1) On peut procéder par la détermination des valeurs des réels x pour lesquelles $x^2-2>0$, qui est une technique sémantique $t_{8-1-2-M-alg}$. Ceci revient à déterminer le domaine d'existence de l'équation ou bien le domaine dans lequel l'équation a un sens que nous appelons en logique « l'univers du discours » qui est dans notre cas $D=\left]-\infty,-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2},+\infty\right[$. Ensuite nous pouvons procéder par des transformations algébriques de type syntaxique, notée $t_{8'-1-2-sy-alg}$, et on a :

$\begin{cases} x^2-2=|3x+2| \\ x^2-2\geq 0 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x^2-2=3x+2 \ ou \ x^2-2=-3x-2 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases}$ équivalent à

$\begin{cases} x^2-3x-4=0 \ ou \ x^2+3x=0 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x^2-3x-4=0 \ ou \ x(x+3)=0 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases}$

équivalent à $\begin{cases} x=-1 \ ou \ x=4 \ ou \ x=0 \ ou \ x=-3 \\ x^2-2\geq 0 \end{cases}$ équivalent à $x=-3$ ou $x=4$

[75] La technique de représentation graphique est énoncée dans manuel de la deuxième année section sciences et technologie de l'informatique à la page 64 comme suit : « *La courbe représentative de la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^2+\beta$ est une parabole de sommet $S(0,\beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x=0$.* »

. Ainsi l'ensemble des solutions est $S_{IR} = \{-3,4\}$.

2) Nous pouvons nous lancer dans des procédures de résolution par implication, qui sont des techniques de résolution du type $t_{9-1-2-sy-a\lg}$, sans tenir compte de l'univers du discours D ce qui revient à la résolution suivante : $x^2 - 2 = |3x+2|$ alors ($x^2 - 2 = 3x + 2$ ou $x^2 - 2 = -3x - 2$) alors [$x^2 - 3x - 4 = 0$ ou $x^2 + 3x = x(x+3) = 0$] alors $x = -3$ ou $x = -1$ ou $x = 0$ ou $x = 4$ puis par substitution des valeurs trouvées des réels x, dans l'équation de départ, qui est une technique sémantique qu'on notera $t_{9'-1-2-sé-num}$, nous remarquons que -1 et 0 ne vérifient pas l'équation et par suite -3 et 4 sont les seules solutions de l'équation : $x^2 - 2 = |3x+2|$.

3) Nous pouvons procéder par une étude du signe de l'expression algébrique : $3x+2$ puisque $|3x+2| = \begin{cases} 3x+2 \ \ si \ \ 3x+2 \geq 0 \\ -3x+2 \ \ si \ \ 3x+2 \leq 0 \end{cases}$. Cette technique est de type mixte $t_{10-1-2-M_2-a\lg}$ Or $3x+2 \geq 0$ si $x \geq -\frac{2}{3}$ et $3x+2 < 0$ si $x < -\frac{2}{3}$.

Dans ce cas il suffit de résoudre les deux équations suivantes:

✓ $x^2 - 2 = 3x + 2$ si $x \geq -\frac{2}{3}$:

$x^2 - 2 = 3x + 2$ équivalent à $x^2 - 3x - 4 = 0$ dont les solutions sont déterminées par les méthodes décrites précédemment. D'où $x = -1$ ou $x = 4$ or $x \geq -\frac{2}{3}$ donc 4 est l'unique solution.

✓ $x^2 - 2 = -3x - 2$ si $x < -\frac{2}{3}$:

$x^2 - 2 = -3x - 2$ implique que $x^2 + 3x = 0$ implique que $x(x+3) = 0$ implique que $x = 0$ ou $x = -3$. Or $x < -\frac{2}{3}$ donc -3 est l'unique solution.

Ces techniques de résolution algébriques sont syntaxiques, puisqu'elles se basent sur des implications et nous les notons $t_{10'-1-2-sy-a\lg}$ et la technique de contrôle sémantique qui consiste à remplacer les valeurs $-1,4$ puis $0,-3$, pour déterminer celles qui vérifient l'équation de départ, est notée $t_{10''-1-2-M-a\lg}$.

Ainsi les solutions de l'équation $x^2 - 2 = |3x+2|$ sont -3 et 4 et par suite

$S_{IR} = \{-3,4\}$.

4) La résolution de l'équation $x^2 - 2 = |3x+2|$ peut aussi être faite par l'exploitation du graphique réalisé dans la première question. En effet, la représentation graphique effectuée dans la première question, peut servir dans la résolution de l'équation $x^2 - 2 = |3x+2|$. Dans ce cas il suffit de représenter graphiquement, dans le même repère orthonormé, dans lequel nous avons représenté les deux fonctions f et g, la fonction $|g|$. La représentation graphique de la fonction $|g|$ peut être réalisée en conservant la demi-droite située au dessus de la droite des abscisses et de remplacer l'autre demi-droite par sa symétrique par rapport à la droite des abscisses. Nous classons cette méthode comme une technique sémantique dans le registre graphique $t_{11-1-2-sé-grph}$. Ensuite, la détermination des abscisses des points d'intersection des deux courbes représentatives des fonctions f et $|g|$ permettra de déterminer les solutions de l'équation : $x^2 - 2 = |3x+2|$ qui sont -3 et 4. Cette lecture graphique est une technique sémantique de type $t_{11-1-2-sé-grph}$.

Après avoir décrit les différentes méthodes mathématiques de résolution de cet exercice, nous nous proposons d'étudier les différentes procédures de résolution qui peuvent être effectuées par les élèves.

Nous pouvons enregistrer les réponses d'élèves dans lesquelles ils reprennent l'une des techniques de résolution décrites ci-dessus qui leur permettront de pouvoir répondre convenablement aux questions demandées. En outre, nous pensons que nous pouvons avoir d'autres types de réponses qui ne mèneront pas nécessairement au résultat qui peuvent être justifiées par une absence d'un contrôle sémantique, une erreur de signe dans les opérations de transformations additives et multiplicatives, une erreur de calcul dans les substitutions, une représentation graphique erronée, …etc.

La tâche de la résolution de la première question nous semble abordable puisqu'*a priori* les élèves ont un niveau technique qui leur permettra de mettre en jeu des applications immédiates des théorèmes, propriétés, formules, … qui leurs permettront d'arriver au résultat en exploitant l'une des techniques que nous venons de décrire ci-dessus.

Par contre, les procédures de résolution de la deuxième question peuvent être différentes des méthodes que nous venons de décrire et nous pensons enregistrer différentes

procédures qui consistent à résoudre algébriquement l'équation $x^2 - 2 = |3x+2|$ par la technique $t_{9-1-2-sy-alg}$ ou la technique $t_{4-1-2-sé-alg}$ sans avoir fait un contrôle sémantique qui correspond à la technique $t_{9'-1-2-sé-num}$ ou à celle de $t_{10'-1-2-M-alg}$ qui permettent de faire des transformations qui ne préservent pas la satisfaction ce qui conduit les élèves à avoir un ensemble qui contient des éléments qui ne satisfont pas l'équation de départ, donné par $\{-3,-1,0,4\}$, qui est différent de $\{-3,4\}$. Dans ce cas on notera ces procédures par $t_{9-1-2-sy-alg-er}$ ou $t_{10-1-2-sé-alg-er}$.

I. 4. 2. Analyse a priori de l'exercice N°2 :

L'exercice N°2 consiste à :

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S)\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$$

Dans cet exercice, la tâche demandée aux élèves est de représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système d'inéquations $(S)\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$. Cette tâche peut être effectuée de deux manières :

1) La première consiste à représenter graphiquement dans un repère cartésien les deux droites qu'on notera D_1 et D_2 d'équations respectives $-x+3y-1=0$ et $2x-y-2=0$. Cette représentation graphique peut être effectuée par deux techniques. L'une de nature sémantique qu'on notera $t_{1-2-sé-grph}$ qui consiste à substituer deux valeurs à la variable x pour déterminer celles de y, ou inversement, pour placer les deux points de coordonnées (x,y) dans le repère cartésiens à partir desquels passera la première droite D_1 et la technique sera la même pour construire la deuxième droite D_2. La deuxième technique de représentation des deux droites D_1 et D_2 est mixte qu'on note $t_{2-2-M-alg-grph}$ et qui consiste à déterminer le vecteur directeur, de coordonnées $(-b,a)$ de chacune des droites à partir de leurs équations cartésiennes de la forme $ax+by+c=0$ et ensuite on détermine la valeur de y lorsque x est égale à zéro. Ce qui consiste à placer le point dont l'ordonnée est à l'origine puis de tracer la droite de même

direction que le vecteur directeur. Enfin, en notant S_1 l'ensemble des solutions de l'inéquation $-x+3y-1<0$ et S_2 l'ensemble des solutions de l'inéquation $2x-y-2\geq 0$. Si on remarque que $(0,0)\notin S_1$ et $(0,0)\notin S_2$, qui est une technique de contrôle sémantique qu'on note $t_{3-2-sé-grph}$, alors on pourra conclure que S_1 est représenté par le demi-plan ouvert de bord D_1, ne contenant pas O et S_2 est représenté par le demi-plan fermé de bord D_2, ne contenant pas O. Par suite $S=S_1\cap S_2$ est représenté par l'intersection de ces deux demi-plans.

2) La deuxième méthode consiste à faire des transformations algébriques, qu'on note $t_{4-2-sy-a\lg}$, qui consiste à transformer les inéquations afin de se ramener à des fonctions d'une variable d'où le système $(S)\begin{cases}-x+3y-1<0\\2x-y-2\geq 0\end{cases}$ devient équivalent à $(S)\begin{cases}y<\dfrac{x+1}{3}\\y\leq 2x-2\end{cases}$. Ceci nous amène à représenter les fonctions affines $f(x)=\dfrac{x+1}{3}$ et $g(x)=2x-2$ par des droites qu'on note D_1 et D_2 et de déterminer graphiquement les points dont les ordonnées sont à la fois au dessous des droites D_1 et D_2. On note cette procédure de représentation graphique par $t_{5-2-sé-grph}$.

Comme nous l'avons expliqué dans nos choix, nous savons que cet exercice dépasse les connaissances des élèves et même il est à la limite du programme. Nous pouvons dire que cet exercice exige un niveau de connaissances mobilisables[76] et nous supposons que les élèves sont capables de reconnaitre ce qu'est une équation du premier degré à deux (inconnues) variables réelles, et ils peuvent procéder par différentes méthodes de résolution et en particulier la résolution graphique qui est recommandée par les programmes et les manuels. De plus, la résolution des systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues réelles est enseignée à partir de la première année secondaire et les élèves ont, *a priori*, acquit des différentes techniques de résolution qui font appel aux différents registres de représentation.

Remarquons que ce type d'exercice peut être résolu algébriquement en s'appuyant sur l'étude des fonctions de deux variables qui ne font pas partie des programmes de l'enseignement secondaire et qui s'enseigne au niveau du premier cycle universitaire.

Ainsi, nous pouvons dire que, par rapport au niveau des élèves et des étudiants qui

[76] Ceci a été expliqué au niveau de l'introduction de ce chapitre.

forment notre population expérimentale, le seul outil qui permet d'accéder à la bonne réponse est du type sémantique du registre graphique.

Enfin, nous pensons que même si cet exercice exige une certaine capacité de maîtrise des notions mathématiques, nous nous attendons à avoir des réponses utilisant des techniques de résolution que nous venons de détailler précédemment. En outre nous pouvons avoir des procédures du type :

- Des tentatives de représentations des droites d'équations respectives $-x+3y-1=0$ et $2x-y-2=0$ qui correspondent à la technique sémantique $t_{1-2-sé-grph}$. Ces tentatives peuvent s'arrêter à ce stade puisqu'en effet ils ne disposent pas d'un niveau de connaissances disponibles.
- Des transformations algébriques qui consistent à exprimer x en fonction de y dans l'une des inéquations en vue de faire une substitution dans l'autre inéquation puisque le système (S) ressemble suffisamment à un ancien qui est un système d'équations. Nous classons ces procédures comme des procédures syntaxiques erronées du type $t_{5'-2-sy-a\lg-er}$.
- Nous pouvons enregistrer des procédures d'élèves qui consistent à placer des points dans le repère dont les coordonnées vérifient respectivement les deux équations $-x+3y-1=0$ et $2x-y-2=0$ sans, pour autant, avoir la solution finale. Dans ce cas nous noterons ce type de procédure par $t_{6'-2-sé-num-er}$.

I. 4. 3. Analyse a priori de l'exercice N°3 :

Le contenu de l'exercice N°3 est le suivant :

1) Soit $\zeta=\{M(x,y)\in IR^2; x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta=\{M(x,y)\in IR^2; 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

b) Résoudre dans IR^2 le système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$

2) Déterminer le nombre des solutions du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$; où $m\in IR$.

Au niveau de la détermination de l'ensemble ζ des points du plan cartésien dont les

coordonnées vérifient l'équation $x^2+4x+y^2-6y+9=0$ et qui est représenté par un cercle de centre $I(-2,3)$ et de rayon $r=2$; nous pouvons faire appel à deux types de techniques de calcul qui consistent à.

1) Faire des transformations algébriques, par équivalence de l'équation : $x^2+4x+y^2-6y+9=0$ afin d'avoir une forme factorisée du type : $(x+2)^2+(y-3)^2=2^2$ qui permet de conclure la nature de l'ensemble ζ. Cette technique est syntaxique algébrique que nous notons $t_{1-3-1a-M-a\lg}$.
2) Procéder par une technique purement syntaxique du domaine de l'algèbre qu'on note $t_{2-3-1a-sy-a\lg}$ qui consiste à mettre en lien la forme $x^2+4x+y^2-6y+9=0$ avec la forme générale : $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ où $\alpha=4$, $\beta=-6$ et $\gamma=9$ et par la suite il suffit de vérifier que le coefficient $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma$ [77] soit strictement positif pour déduire que ζ est un cercle de centre $I\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)=I\left(-\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)=I(-2,3)$ et de rayon $r=\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma}=\sqrt{\frac{4^2}{4}+\frac{(-6)^2}{4}-9}=2$. De plus nous avons choisi de la situer comme une technique syntaxique puisqu'il n'y a pas de discussion sur le signe de l'expression $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma$ vu que les valeurs numériques des coefficients α, β *et* γ sont données.

Concernant l'ensemble Δ qui représente un ensemble de points du plan cartésien dont les coordonnées vérifient une équation du premier degré à deux inconnues réelles de la forme $4x+3y+9=0$ et dont la représentation graphique, dans un repère cartésien, est une droite ; sa nature peut être déterminée par trois méthodes différentes.

1) La première méthode consiste à rappeler que l'équation proposée fait appel à la forme générale d'une équation d'une droite : $ax+by+c=0$. Cette méthode est

[77] Sinon, c'est-à-dire si $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma=0$ (respectivement $\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma<0$) l'ensemble ζ serait un point $I\left(-\frac{\alpha}{2},-\frac{\beta}{2}\right)$ (respectivement ζ serait l'ensemble vide).

une technique de type $t_{3'-3-1a-sy-a\lg}$ à partir de laquelle on peut conclure que Δ est une droite du plan cartésien de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ passant par un point A dont les coordonnées sont déterminées par substitution d'une valeur à l'une des variables x ou y pour déduire l'autre. Comme par exemple $(0,-3)$ dont ces coordonnées sont déterminées après avoir substituer la valeur 0 à la variable x, dans l'équation $4x+3y+9=0$, pour conclure que l'ordonnée y du point A est égale à -3. Dans ce cas nous supposons que la recherche des coordonnées du vecteur directeur à partir de l'équation cartésienne de la droite est purement syntaxique et la recherche des coordonnées du point A par substitution de la valeur à la variable purement sémantique. Ceci nous conduit à supposer que cette technique de résolution est une technique algébrique, numérique et graphique mixte qu'on note $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$.

2) La deuxième méthode consiste à effectuer des transformations algébriques sur l'équation $4x+3y+9=0$ afin d'avoir la forme réduite de l'équation d'une droite $y=-\frac{4}{3}x-3$ où $-\frac{4}{3}$ représente le coefficient directeur de la droite et -3 est l'ordonnée à l'origine. Donc Δ est représenté par une droite passant par le point de coordonnées $(0,-3)$ dont la pente est $-\frac{4}{3}$[78] et par la suite, cette technique syntaxique de type algébrique est notée $t_{4-3-1a-sy-a\lg}$. En outre, après avoir obtenu l'équation réduite $y=-\frac{4}{3}x-3$ de la droite Δ, nous avons deux stratégies :

a) La substitution de deux ou plus des valeurs aux variables x ou y peut encore permettre de déterminer les coordonnées des points par lesquels passe la droite Δ et par la suite nous pouvons supposer que cette technique est algébrique et numérique mixte que nous notons $t_{5-3-1a-M-a\lg-num}$.

b) Déterminer les coordonnées d'un point dont l'ordonnée est à l'origine qui est $(0,-3)$. Nous notons cette technique par $t_{5'-3-1a-sy-a\lg}$.

3) La troisième méthode consiste à reconnaitre ce que représente l'ensemble des

[78] La pente serait représentée en suivant la direction du vecteur directeur de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\-\frac{4}{3}\end{pmatrix}$

solutions de l'équation $4x+3y+9=0$ en se basant sur la technique $t_{3'-3-1a-sy-a\lg}$ et de substituer deux valeurs aux variables x ou y dans l'équation afin de déterminer les deux autres valeurs conséquentes (ou dont ils dépendent) qui est une opération purement sémantique et qui permet de placer deux points dans le repère cartésien et de déduire que l'ensemble Δ est représenté par la droite passant par les deux points déterminés. Cette technique est de type mixte du registre algébrique qu'on notera $t_{6-3-1a-M-a\lg-num}$.

La question 1 b) de la première partie de cet exercice consiste à résoudre le système d'équations $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$. Dans ce cas il s'agit d'une tâche qui exige un niveau de *connaissances mobilisables* pour réussir la résolution. En outre, les techniques de résolution sont variées et nous pensons que ce système d'équation peut être résolu par quatre méthodes.

1) La première technique de résolution consiste à reprendre la nature des deux ensembles ζ et Δ et à les construire dans une repère orthonormé ce qui permet par la suite de déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle ζ de centre $I(-2,3)$ et de rayon $r=2$ et de la droite et de la droite Δ. Dans notre cas ζ et Δ sont tangents et une lecture graphique précise, permettra de déterminer la solution du système d'équations (S) qui est le point de coordonnées $\left(-\frac{18}{5},\frac{9}{5}\right)$ et par la suite $S_{IR^2}=\left\{\left(-\frac{18}{5},\frac{9}{5}\right)=(-3{,}6;1{,}8)\right\}$. Nous notons cette technique sémantique graphique par $t_{7-3-1b-sé-grph}$.

2) La deuxième technique de résolution consiste à opérer des transformations algébriques exprimant x en fonction de y ou y en fonction de x dans l'équation $4x+3y+9=0$, du système, qui s'exprime comme suit : $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$ équivalent à $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ x=-\frac{3}{4}y-\frac{9}{4} \end{cases}$

équivalent à $(S)\begin{cases} \frac{9}{16}y^2+\frac{27}{8}y+\frac{81}{16}-3y-9+y^2-6y+9=0 \\ x=-\frac{3}{4}y-\frac{9}{4} \end{cases}$ équivalent à

$(S)\begin{cases}\frac{25}{16}y^2-\frac{45}{8}y+\frac{81}{16}=0\\ x=-\frac{3}{4}y-\frac{9}{4}\end{cases}$. Dans ce cas il suffit de résoudre l'équation $\frac{25}{16}y^2-\frac{45}{8}y+\frac{81}{16}=0$ qui est une équation du second degré à une inconnue réelle équivalente à $25y^2-90y+81=0$ où son discriminent $\Delta'=0$ donc elle admet une solution unique donnée par $y=\frac{9}{5}$ et par substitution, par exemple, dans l'équation : $x=-\frac{3}{4}y-\frac{9}{4}$ nous obtenons $x=-\frac{-18}{5}$. Ainsi le système (S) admet comme solution dans IR^2 le couple $\left(-\frac{18}{5},\frac{9}{5}\right)=(-3{,}6;1{,}8)$. Cette technique syntaxique et purement algébrique est notée $t_{8-3-1b-sy-a\lg}$.

3) Une troisième technique consiste à représenter graphiquement les deux ensembles ζ et Δ. Ensuite, une reprise des calculs algébriques décrits, ci-dessus, dans la deuxième technique de résolution (S) peut amener au résultat. Cette stratégie sera supposée comme étant une technique mixte algébrique et graphique que nous notons $t_{9-3-1b-M-a\lg-grph}$.

4) La quatrième technique consiste à déduire que la résolution du système $(S)\begin{cases}x^2+4x+y^2-6y+9=0\\ 4x+3y+9=0\end{cases}$ revient à déterminer l'intersection de la droite Δ et le cercle ζ. En outre, le graphique montre que Δ et ζ sont tangents et par la suite, un calcul de la distance séparant le centre du cercle ζ de la droite Δ, qui est égale à 2, permet de conclure. Ainsi une lecture graphique permet de déterminer les coordonnées du point de tangence de Δ et ζ. Nous notons cette technique par $t_{10-3-1b-M-a\lg-grph}$.

Concernant la deuxième question de cet exercice, qui consiste à déterminer le nombre des solutions du système d'équations $(S)\begin{cases}x^2+4x+y^2-6y+9=0\\ y=m\end{cases}$ où $m\in IR$, les techniques de résolution sont multiples.

Nous proposons dans ce qui suit les différentes techniques.

1) La première technique de résolution est du type graphique et consiste à interpréter l'équation $y = m$ comme étant l'équation d'une droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0, m)$. C'est-à-dire que pour chaque valeur associée au réel m correspond une droite. En outre, l'équation $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ représente l'équation du cercle $\zeta_{(I(-2,3),2)}$. Ceci nous conduit à procéder par une représentation graphique du cercle ζ tout en faisant varier la valeur du paramètre m dans IR. Ceci correspond au déplacement de la droite, parallèle à l'axe des abscisses d'équation $y = m$, suivant la direction de l'axe des ordonnées. Cette procédure de résolution graphique permet de visualiser les positions relatives de la droite d'équation $y = m$ par rapport au cercle ζ et de déduire graphiquement les valeurs du réel m pour lesquels la droite et le cercle sont concourants en deux points d'intersection, un point d'intersection ou en aucuns points d'intersection ce qui permet de déduire le nombre des solutions du système. Ainsi une lecture sur le graphique permet de conclure que :

- si $m \in]1,5[$ alors la droite d'équation $y = m$ coupe le cercle ζ en deux points dont leurs coordonnées représentent les deux solutions du système (S) et par la suite, le système d'équation admet deux solutions.
- si $m = 1$ ou $m = 5$ alors la droite d'équation $y = 1$ et la droite d'équation $y = 5$ est tangente au cercle ζ au point de coordonnées $(-2,1)$ ou au point de coordonnées $(-2,5)$ et par suite le système (S) admet une solution unique pour chaque valeur du paramètre m. Ainsi (S) admet une seule solution unique égale à : $(-2,1)$ si $m = 1$ et à $(-2,5)$ si $m = 5$.
- si $m \in]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$ la droite d'équation $y = m$ ne coupe pas le cercle ζ d'où le système d'équations (S) n'admet pas de solutions.

Dans ce cas, la technique de résolution et du type sémantique graphique et sera notée $t_{11-3-2-sé-grph}$.

2) La deuxième technique consiste à effectuer des résolutions algébriques qui se résument en une substitution de la variable y qui est égale à m dans l'équation $x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0$ qui devient par la suite une équation du second degré paramétrée en m et à une inconnue réelle. Cette transformation d'ordre

syntaxique nous ramène à l'équation suivante: $x^2+4x+m^2-6m+9=0$. Dans ce cas, il suffit de procéder par un calcul du discriminant $\Delta_m=16-4(m^2-6m+9)=-20-4m^2+24m=4\left(-m^2+6m-5\right)=\left[4(1-m)(m-5)\right]$ ou le discriminant $\Delta'_m=4-m^2+6m-9=-5-m^2+6m=\frac{\Delta}{4}=(1-m)(m-5)$.

Ensuite, un contrôle sémantique intervient à partir de cette étape puisque la reconnaissance du signe du discriminant est fondamentale dans la suite de la résolution de l'équation : $x^2+4x+m^2-6m+9=0$. En effet,

- Si $\Delta_m>0$ c'est-à-dire si $m\in\left]1,5\right[$[79] on a deux solutions distinctes : $x=\frac{-4-\sqrt{\Delta_m}}{2}=-2-\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2}=-2-\sqrt{(1-m)(m-5)}$ ou $x=\frac{-4+\sqrt{\Delta_m}}{2}=-2+\frac{\sqrt{\Delta_m}}{2}=-2+\sqrt{(1-m)(m-5)}$. Alors le système (S) admet deux solutions données par : $\left(-2-\sqrt{(1-m)(m-5)},m\right)$ et $\left(-2+\sqrt{(1-m)(m-5)},m\right)$.
- Si $\Delta_m=0$ c'est-à-dire si $m=1$ ou $m=5$ on a une solution unique $x=-2$. Alors le système (S) admet une seule solution égale à : $(-2,1)$ si $m=1$ et $(-2,5)$ si $m=5$.
- Si $\Delta_m<0$ c'est-à-dire si $m\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]5,+\infty\right[$ l'équation n'admet pas de solutions.

Dans ce cas de résolution nous notons cette technique par $t_{12-3-2-M-a\lg}$.

Ces différentes méthodes mathématiques de résolution proposées ci-dessus ne décrivent pas nécessairement toutes les procédures de résolution que peuvent effectuer les élèves. En effet, certaines réponses peuvent être similaires celles que nous avons décrites ci-dessus. En outre, nous pouvons enregistrer des réponses qui ne mèneront pas nécessairement au résultat.

En effet, la tâche de résolution de la question 1a) nous semble abordable au niveau de la détermination de la nature de l'ensemble Δ. En revanche, les réponses, au niveau de la détermination de la nature de l'ensemble ζ, peuvent être différentes de celles que nous venons de décrire et nous pensons que nous pouvons enregistrer des procédures se résumant à

[79] Puisqu'une étude du signe de $(1-m)(m-5)$ permet de conclure que $(1-m)(m-5)<0$ si $m\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]5,+\infty\right[$ et que $(1-m)(m-5)>0$ si $m\in\left]1,5\right[$ et enfin $(1-m)(m-5)=0$ si $m=1$ ou $m=5$.

des tentatives de factorisations partielles mettant les variables x et y comme facteurs communs dans l'équation $x^2+4x+y^2-6y+9=0$ se traduisant par :

$x^2+4x+y^2-6y+9=0$ équivaut à $x(x+4)+y(y-4)-9=0$ ou bien $x(x+4)+y(y-4)=-9$ et dans ce cas nous pensons que leurs procédures s'arrêteront à ce niveau puisque la factorisation ne fait plus apparaître d'autres facteurs communs. Ce type de procédure peut s'expliquer par le fait que l'élève essaye de se ramener à une factorisation qui le conduit à une forme « si $AB=0$ alors $A=0$ ou $B=0$ ». Dans ce cas nous, supposons que leurs procédures sont de type syntaxiques erronées que nous notons $t_{2-3-1a-sy-a\lg-er}$.

Au niveau de la question 1 b) qui consiste à résoudre le système d'équations $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$, nous pensons que lorsque la technique algébrique de résolution est employée, nous pouvons enregistrer quelques transformations erronées qui amèneront les élèves à trouver d'autres solutions du système et nous notons ces techniques syntaxiques par $t_{8-3-1b-sy-a\lg-er}$.

Concernant la deuxième question de cet exercice, nous pensons que la procédure de résolution basée sur la première technique sémantique $t_{11-3-2-sé-grph}$ nous amène au bon résultat sauf si la représentation graphique de départ des deux ensembles ζ et Δ est erronée. Dans ce cas, nous notons cette procédure par $t_{11-3-2-sé-grph-er}$. En outre, si la procédure de résolution est basée sur la deuxième technique $t_{12-3-2-M-a\lg}$, une absence d'un contrôle sémantique[80]peut conduire les élèves à conclure que l'équation : $x^2+4x+m^2-6m+9=0$ admet deux solutions données par : $x=-2-\sqrt{(1-m)(m-5)}$ et $x=-2+\sqrt{(1-m)(m-5)}$. Ce qui rends les réponses erronées puisque le système (S) va admettre, *a priori*, deux solutions données par : $\left(-2-\sqrt{(1-m)(m-5)},m\right)$ et $x=-2+\sqrt{(1-m)(m-5)}$ pour toute valeur du réel m. Ainsi, nous aurons un ensemble de solutions pouvons contenir des éléments qui ne satisfont pas le système (S). Dans ce cas, nous supposons cette procédure de résolution est une technique syntaxique algébrique erronée que nous notons $t_{12-2-2-M-a\lg-er}$.

[80] Sans tenir compte du signe du discriminent Δ_m.

I. 4. 4. Analyse a priori de l'exercice N°4 : adressé aux élèves du secondaire

L'exercice N°4

« Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ donc $h(x,y)=$ …….

b) $(x,y)=(1,3)$ donc $h(x,y)=$ …….

c) $(x,y)=(5,4)$ donc $h(x,y)=$ ……

d) $(x,y)=(-2,-1)$ donc $h(x,y)=$ ……...

e) $(x,y)=(-1,-2)$ donc $h(x,y)=$ ……...

f) $(x,y)=(6,7)$ donc $h(x,y)=$ ……

3) Placer, dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A,B,C,D,E et F de coordonnées respectives :

$(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6,7)$.

4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$. ».

Nous avons posé une première question qui consiste à représenter, dans un repère orthonormé direct, les courbes représentatives Γ_f et Γ_g des fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

La représentation graphique est un type de tâche pouvant être effectuées par différentes techniques.

Concernant la représentation graphique de la fonction f qui n'est autre qu'une fonction linéaire, nous pensons qu'elle peut être faite par différentes techniques.

1) La première technique, notée $t_{1-4-1-sé-grph}$, consiste à représenter Γ_f comme étant

la première bissectrice de l'angle $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) La deuxième technique, notée $t_{2-4-1-sé-a\lg-grph}$, suppose que Γ_f représente l'application linéaire f et par la suite Γ_f est une droite passant par l'origine du repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et par un point quelconque et différent de l'origine dont l'abscisse et l'ordonnée sont égaux.

3) La troisième technique interprète Γ_f comme étant la représentation graphique d'une application affine[81] représentée par une droite passant par deux points, ou plus, dont les coordonnées sont obtenus par substitution de deux ou plusieurs valeurs différentes à la variable x. Nous notons cette technique par $t_{3-4-1-sé-a\lg-grph}$.

4) La quatrième technique se résume en une articulation entre équation et fonction à partir de laquelle l'écriture fonctionnelle $f(x) = x$ se transforme en une écriture équationnelle $y = x$ ou $-x + y = 0$ et par la suite Γ_f serait interprétée comme une représentation graphique d'une droite. Dans ce cas si Γ_f est représentée par l'une des méthodes sémantiques que nous avons décrit ci-dessus ; nous notons cette technique mixte par $t_{4-4-1-M-a\lg-grph}$. En revanche, si la technique de représentation consistait à déterminer le vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$ et de tracer la droite ayant la même direction que $\vec{u}$ et passant par un point dont les abscisses et les ordonnées sont égaux. Cette technique est purement syntaxique et nous la notons par $t_{5-4-1-M-a\lg-grph}$.

Au niveau de la représentation graphique de Γ_g, nous pensons que nous sommes en présence de deux types de techniques :

1) L'une sémantique dans les registres algébriques et graphique, que nous notons $t_{6-4-1-sé-a\lg-grph}$, qui consiste à représenter, point par point, la courbe représentative de Γ_g par une attribution de quelques valeurs à la variable x pour déterminer son image correspondante par g et de placer les points de coordonnées $(x, g(x))$ dans

[81] Puisqu'une application linéaire est un cas particulier des applications affines que nous pouvons écrire sous la forme : $f(x) = ax + b = 1x + 0$.

le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2) L'autre syntaxique du registre algébrique, notée $t_{7-4-1-sy-a\lg}$, qui consiste à reconnaitre que la forme, du terme $g(x) = x^2 - 3x$, correspond à celui du terme général $g(x) = ax^2 + bx + c$ et qui peut s'écrire sous la forme $g(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ où α et β sont deux réels et par la suite on conclut que la représentation graphique de la fonction g est une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$ [82].

La deuxième tâche dans cet exercice, qui est proposée aux élèves du secondaire, consiste à déterminer le signe de la fonction de deux variables réelles h ne demande, *a priori*, qu'un seul type de technique qui consiste à substituer des valeurs numériques proposées aux variables. Dans ce cas nous notons cette technique par $t_{8-4-2-sé-a\lg-num}$. Par ailleurs, les valeurs prises de la fonction h et leurs signes en ces points sont données par :

a) Si $(x, y) = (2,1)$ alors $h(x, y) = -3 < 0$.

b) Si $(x, y) = (1,3)$ alors $h(x, y) = 22 > 0$.

c) Si $(x, y) = (5,4)$ alors $h(x, y) = 6 > 0$.

d) Si $(x, y) = (-2,-1)$ alors $h(x, y) = -11 < 0$.

e) Si $(x, y) = (-1,-2)$ alors $h(x, y) = 6 > 0$.

f) Si $(x, y) = (6,7)$ alors $h(x, y) = -11 < 0$.

En outre, la tâche demandée au niveau de la troisième question consiste à placer les points A, B, C, D, E et F de coordonnées respectives $(2,1), (1,3), (5,4), (-2,-1), (-1,-2)$ et $(6,7)$ dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Ceci exige une maîtrise de la technique de repérage des points dans le plan que nous notons $t_{9-4-2-sé-grph}$.

La quatrième question de cet exercice est une question ouverte dans laquelle le type de tâche demandé consiste à déterminer par un calcul algébrique ou par le graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x) > 0$.

Pour répondre à cette question nous faisant appel à une technique que nous notons $t_{10-4-2-M-a\lg-grph}$ qui consiste à considérer la droite d'équation $y = x$ comme étant la courbe

[82] Voir le manuel de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique vol. 1 page 65.

représentative Γ_f de la fonction f et la parabole d'équation : $y - x^2 + 3x = 0$ ou $y = x^2 - 3x$ et de sommet $S\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ comme une courbe représentative Γ_g de la fonction g.

Ce type de tâche a été introduit dans la première question de cet exercice et ce pour tenter d'enrichir le milieu objectif de l'élève afin qu'il s'en sert pour continuer la résolution.

Donc, Γ_f et Γ_g se coupent en deux points dont O est l'origine du repère orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ et un point de coordonnées $(4,4)$. D'où le plan est partagé en cinq régions que nous notons P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 (voir figure).

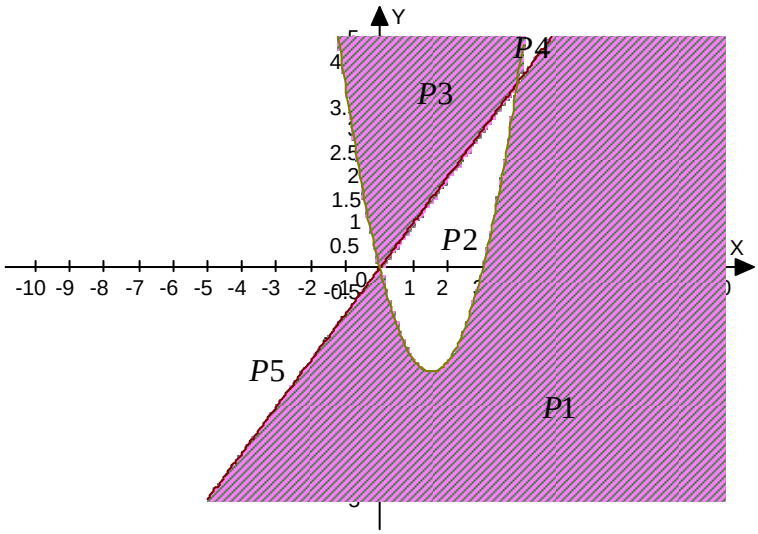
Sachant que la droite Γ_f partage le plan en deux demi plans dont le demi plan ouvert supérieur est celui des points $M(x, y)$ tels que : $y - x > 0$ et l'intérieur de la parabole Γ_g est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y - x^2 + 3x > 0$, Nous pouvons dresser le tableau suivant :

Régions	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$y - x$	-	-	+	+	+
$y - x^2 + 3x$	-	+	+	-	-
$(y - x)$ $(y - x^2 + 3x)$	+	-	+	-	-

Par la suite, nous pouvons conclure que quelque soit le point $M(x, y)$ du plan, nous avons

- $(y - x)(y - x^2 + 3x) > 0$ si et seulement si $M \in P_1 \cup P_3$.
- $(y - x)(y - x^2 + 3x) < 0$ si et seulement si $M \in P_2 \cup P_4 \cup P_5$.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation considérée est l'ensemble des couples (x, y) coordonnées des points M appartenant à $P_1 \cup P_3$.



Représentation graphique

$\{(x,y)\in IR^2;\ h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)>0\}$

$f(x)=x$

$g(x)=x^2-3x$

Figure I. 1

Nous venons de décrire la méthode mathématique de résolution de cet exercice. En outre, nous pensons que nous pouvons enregistrer d'autres types de réponses d'élèves qui ne mèneront pas nécessairement à la bonne réponse. Ces réponses peuvent être erronées, incomplètes, … suite à une absence d'un contrôle sémantique, erreur de signe dans les transformations ou les substitutions algébriques, une représentation graphique erronée etc. Remarquons que cet exercice ne peut pas être résolu d'une manière purement algébrique par les élèves du secondaire et par des étudiants qui débutent leur première année à l'université. En effet, ce type de résolution exige un niveau de connaissance qui permet d'étudier le signe de la fonction de deux variables h pour pouvoir résoudre l'inéquation $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Nous allons essayer de décrire les procédures de réponses qui peuvent être suivies par les élèves dans chaque question du questionnaire.

Ces procédures se résument en une stratégie de représentation qui consiste à effectuer un type de tâche non demandée qui consiste à faire une étude de la fonction g. Dans ce cas les techniques suivies seront décrites comme suit :

1) La première technique consiste à faire une analyse du comportement de la fonction g sur IR par une étude de sa monotonie se basant sur la technique du

taux d'accroissement dans un tableau de variation qui permet d'avoir une idée sur l'allure de la représentation graphique de la fonction g et par la suite un tableau de valeurs permet de représenter Γ_g. Nous notons cette technique par : $t_{6'-4-1-M-grph}$.

2) La deuxième technique consiste à reprendre la première technique tout en calculant les limites de la fonction g au voisinage de $\pm\infty$. Cette technique est notée : $t_{6''-4-1-M-grph}$.

3) La troisième technique se résume en une étude de la variation de la fonction g par un recours au calcul de la dérivée de la fonction g appuyé par un calcul de limites au voisinage de $\pm\infty$. Cette étude serait suivie par un tracé de la représentation graphique de la fonction g à partir d'un tableau de valeurs. Cette technique est du type $t_{6'''-4-1-M-anl-a\lg-grph}$.

Remarquons que nous avons indexé le type de techniques par M parce que nous supposons qu'elles sont mixtes puisque la première technique exploite un calcul du taux de variation qui est une technique syntaxique du calcul algébrique, alors qu'un calcul du de la dérivée et des limites aux bornes est une techniques syntaxique du domaine de l'analyse. En outre, les représentations graphiques de la fonction exigent la technique d'association de quelques valeurs à la variable pour remplir un tableau de valeurs permettant de placer quelques points de Γ_g. Dans ce cas nous allons affecter ces techniques par l'indice « er » si l'une de ces technique syntaxique employée est erronée. En outre, ces techniques seront affectées par l'indice « inc » si la représentation graphique n'a pas été réalisée.

Au niveau de la deuxième et la troisième question, nous pensons que les tâches demandées aux élèves sont des tâches routinières, puisqu'une substitution, une détermination d'un signe et un placement de points dans un repère orthonormé, ne demandent pas des techniques aussi avancées que l'on pense. Donc nous supposons que la technique qui peut être exploitée est celle qui a été décrite ci-dessus.

Concernant la quatrième question, nous pensons qu'elle dépasse largement les connaissances des élèves de la deuxième année secondaire section sciences. En revanche, elle fait partie du programme de la troisième année secondaire section mathématiques et en plus

elle figure parmi les activités élémentaires du cours du manuel[83].

Nous pensons que la variable niveau est un facteur influant sur la variété des procédures de réponses des élèves qui sont justifiées par plusieurs techniques.

1) La première procédure, que nous notons $t_{9'-4-2-sé-grph}$, consiste à affecter le signe de $h(x,y)$ à chaque point de coordonnées (x,y) données dans la deuxième question (voir figure ci-dessus). Ceci peut induire à conclure le signe de h dans chaque région délimitée par Γ_f et Γ_g.

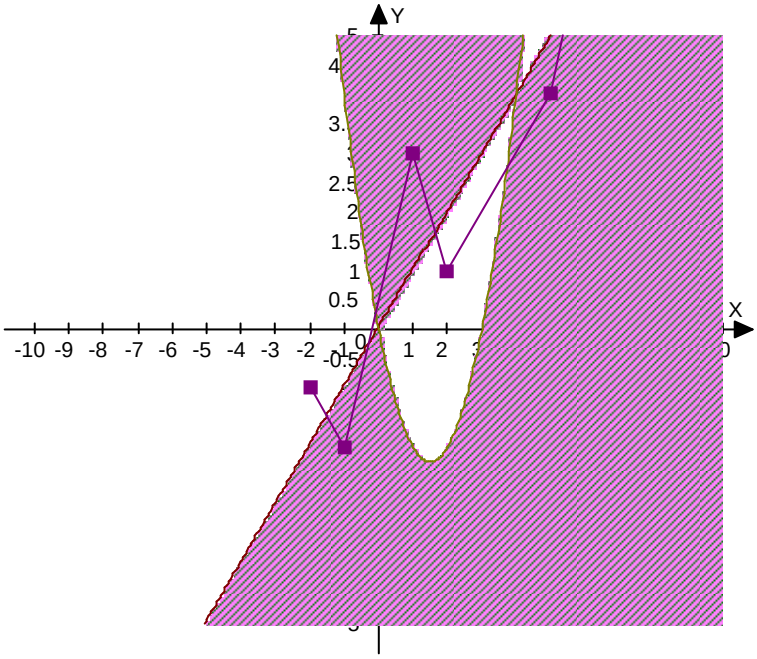


Fig I. 2 Representation graphique

Figure I. 2

2) La deuxième procédure se résume à des tentatives de résolution algébriques qui consistent à développer le premier membre de l'inéquation afin d'avoir une forme reconnue d'inéquations qu'ils peuvent résoudre. Nous notons cette technique par $t_{9''-4-2-sy-a\lg}$ parce que nous pensons que ce type de procédure ne mènera pas à priori au résultat puisque ces élèves n'ont pas appris les techniques de résolution algébriques de ces inéquations à deux variables qui font partie du programme de l'enseignement universitaire.

[83] Cours de l'ancien manuel de la troisième année secondaire qui était en application jusqu'à l'année scolaire 2006 / 2007 page 178-180.

3) La troisième procédure consiste à interpréter graphiquement le signe des deux expressions $y-x$ et $y-x^2+3x$ et de conclure à partir du produit des signes que la région dans laquelle la l'inéquation est vérifiée est $P_1 \cup P_3$. Nous notons cette technique par $t_{9^{\text{ème}}-4-2-sé-grph}$.

I. 4. 5. Analyse a priori de l'exercice N°4 : adressé aux étudiants des classes préparatoires

Le contenu de l'exercice adressé aux étudiants des classes préparatoires est le suivant :

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Comme nous venons de le remarquer au niveau du choix de nos objet mathématiques, nous estimons que les étudiants des classes préparatoires sont arrivés à un stade où ils disposent des repères et des acquis qui leurs permettront de résoudre directement l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$. Pour cela nous n'allons pas reprendre les analyses *a priori* que nous avons décrites ci-dessus et nous supposons que l'analyse *a priori* de la première et la quatrième question de l'exercice N°4 proposé aux élèves du secondaire est similaire à celle que nous avons décrite ci dessus. Surtout que les questions 2) et 3) ne jouent pas le rôle d'indicateurs pour la question 4.

II. Analyse *a posteriori* du questionnaire

Nous menons à présent une analyse *a posteriori* sur un corpus constitué de 143 copies d'élèves de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique, troisième année secondaire section mathématiques et des classes préparatoires.

Nous avons trois classes de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique , deux d'entre elles font partie du Lycée Ezzahrouni de la direction régionale de Tunis et du Lycée secondaire Sakyet Sidi-Youssef de la direction régionale du

Kef au nord ouest de la Tunisie et la troisième est une classe du lycée pilote de l'Ariana. Cette classe pilote est composée d'élèves lauréats qui ont réussi le concours national de la neuvième année de l'enseignement de base[84] en ayant les meilleures moyennes, ce qui leur a permis d'être admis dans ces lycées pilotes.

Les classes de troisième année secondaire section mathématiques font partie des mêmes lycées secondaires d'Ezzahrouni et de Sakyet Sidi Youssef.

Enfin, la classe préparatoire spécialité technologie fait partie de l'Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs de l'Université de Tunis el Manar où ces étudiants sont admis dans cet institut suite à un concours d'orientation post-baccalauréat avec des scores très élevés où leurs moyennes générales au Baccalauréat tunisien varient entre treize et dix sept sur vingt.

Remarquons que nous avons réussi à passer ce questionnaire dans ces établissements puisque nous connaissons des collègues qui enseignent dans ces établissements et qui étaient volontaires pour le faire passer auprès de leurs élèves et en dehors des heures prévues pour l'enseignement.

Concernant le déroulement de ce questionnaire, les enseignants du lycée pilote de l'Ariana et ceux du lycée secondaire de Sakyet Sidi Youssef ont réussi à s'organiser, avec ceux de leurs élèves volontaires, pour passer le questionnaire un vendredi à quatorze heure, qui est une mi-journée de repos pour ces élèves. Par contre, les enseignants du lycée Ezzahrouni, se sont organisés avec leurs élèves volontaires pour passer le questionnaire un dimanche à onze heure du matin.

La surveillance de ce questionnaire a été assurée par ces enseignants ; de plus les élèves étaient répartis dans des salles de classes où ils sont deux par table. Nous avons demandé aux enseignants d'expliquer aux élèves qu'ils pouvaient commencer par n'importe quelle question et que la durée du test est d'une heure trente minutes.

Le déroulement du test auprès des élèves du secondaire a été réalisé aux horaires et dates suivants:

- ✓ Le vendredi 14 avril 2006 à 14 heure pour les élèves de la classe de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique du lycée secondaire Sakyet Sidi Youssef.
- ✓ Le vendredi 21 avril 2006 à 14 heures pour les élèves de la classe pilote de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique du lycée pilote de l'Ariana.

[84] L'équivalent des classes de quatrième en France.

- ✓ Le vendredi 21 avril 2006 à 14 heures pour la classe de année secondaire section mathématiques du lycée secondaire Sakyet Sidi Youssef.
- ✓ Le dimanche 23 avril 2006 à 11 heures pour les élèves des deux classes de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique et de troisième année secondaire section mathématiques du lycée secondaire Ezzahrouni à Tunis.
- ✓ Le mardi 19 septembre 2006 à 13 heures et 30 minutes pour les étudiants des classes préparatoires.

Remarquons que nous avons fait passer nous-même ce questionnaire aux étudiants des classes préparatoires. D'un côté les élèves des classes de quatrième année secondaire[85] étaient pris à partir de la deuxième semaine du mois d'avril par les examens du baccalauréat des activités sportives et le bac blanc, après lesquels ils arrêtent leurs cours pour entamer la période de révision. D'un autre côté, nous estimons que le groupe élèves des classes préparatoires est un échantillon assez homogène, puisque les étudiants ont d'assez bons résultats.

L'analyse des 143 copies rendues du questionnaire est menée à partir des grilles d'analyse construites dans le cadre de l'analyse *a priori*. Les grilles ont été préalablement remplies après lecture et classification des différents types de réponses écrites dans les copies étudiées. Précisons que nous avons exploité quelques copies d'une manière progressive dans notre rédaction, en ce sens que nous les avons intégrées dans les annexes et qu'elles seront référées dans notre texte au cours de l'exploitation partielle des questions. Les différentes questions issues de l'analyse *a priori* organisent notre lecture et nos commentaire de ces différents éléments.

Dans toute la suite QP2, QS2, QZ2, QS3, QZ3 et QPT désignent respectivement les questionnaires adressés aux élèves des classes de deuxième année sciences du lycée pilote de l'Ariana, classes de deuxième année sciences du lycée Sakyet Sidi Youssef, classes de deuxième année sciences du lycée Ezzahrouni, classes de troisième année section mathématiques du lycée Sakyet Sidi Youssef, classes de troisième année section mathématiques du lycée Ezzahrouni et classes préparatoire technologie de l'IPEIM de l'Université de Tunis El Manar.

Les classes QP2, QS2, QZ2, QS3, QZ3 et QPT sont constituées respectivement de 25, 29, 27, 17, 13 et 32 élèves.

[85] L'équivalent des classes de terminales en France.

II. 1. La méthodologie suivie dans la classification des différentes réponses des élèves et des étudiants

Nous nous intéressons principalement aux questions posées dans notre analyse *a priori* à propos de l'articulation sémantique / syntaxe dans la résolution des problèmes liées à des manipulations formelles des équations, inéquations et fonctions au niveau de l'algèbre du secondaire.

Nous reprenons dans un premier temps, une analyse détaillée des différentes procédures de résolution à partir des productions écrites des élèves que nous associons ensuite à la catégorisation issue de l'analyse *a priori* du questionnaire.

En ce qui concerne la méthodologie du recueil des données, nous avons classé chaque type de procédure correspondant à un type de technique de résolution en trois sous catégories dans lesquelles nous précisons si une procédure donnée, qui est associée à une technique bien déterminée, était exacte, incomplète ou erronée.

Or, l'objectif principal du dépouillement des réponses des élèves associées aux différentes questions du questionnaire n'est pas d'analyser la nature des réponses (exactes, incomplètes ou erronées) mais de repérer le type de la technique mobilisée associée à chaque type de tâche demandé. Ainsi, nous avons croisé les types de techniques mobilisées en termes de sémantique, syntaxiques et mixtes avec la nature des réponses qui peuvent être exactes, incomplètes et erronées en vue de dégager des résultats mettant en rapport le type de technique mobilisé avec la réussite ou l'échec dans la réponse aux différentes questions proposées par le questionnaire.

Ensuite, nous avons regroupé les trois sous catégories de réponses « exacte, incomplète ou erronée » en un seul type de technique et dans ce cas nous ne tenons plus compte de la réussite dans la réponse à la question; mais du type de technique dans un registre[86] bien déterminé choisi par l'élève pour répondre à chaque question.

Ce regroupement nous a permis de classer les différentes techniques exploitées, réellement, en treize types tout au long du questionnaire.

Nous avons numéroté ces techniques de un à treize de la façon suivante :

- Technique syntaxique du registre algébrique : 1 : t_{sy-alg}
- Technique sémantique du registre numérique : 2 : $t_{sé-num}$
- Technique sémantique du registre graphique : 3 : $t_{sé-grph}$

[86] Au sens de Duval (1993).

- Technique syntaxique du registre graphique : 4 : $t_{sy-grph}$
- Technique mixte[87] du registre graphique : 5 : t_{M-grph}
- Technique mixte du registre algébrique : 6 : $t_{M-a\lg}$
- Technique mixte des registres algébrico-graphique : 7 : $t_{M-a\lg-grph}$
- Technique mixte des registres algébrique, numérique et graphique : 8 : $t_{M-a\lg-num-grph}$
- Technique sémantique des registres algébrique et numérique : 9 : $t_{sé-a\lg-num}$
- Technique mixte des registres algébrique et numérique : 10 : $t_{M-a\lg-num}$
- Technique sémantique des registres algébrique et graphique : 11 : $t_{sé-a\lg-grph}$
- Technique mixte des registres analytique et graphique : 12 : $t_{M-anl-grph}$
- Technique mixte des registres analytique, algébrique et graphique : 13 : $t_{M-anl-a\lg-grph}$

Les non réponses et les autres types de réponses que celles qui ont été prévues dans l'analyse *a priori* ont été codées respectivement par 99 et 88[88].

Pour vérifier l'hypothèse que l'enseignement favorise peu le point de vue sémantique et qu'en conséquence le point de vue syntaxique s'impose progressivement dès que les techniques sont disponibles; nous avons regroupé les différents types de techniques, articulant registres et catégorisation logique en terme de sémantique et / ou syntaxique, décrites ci-dessus, en trois composantes principales qui sont sémantique, syntaxique et mixte dans les résolutions et les traitements de nos objets d'étude. Ensuite, nous avons croisé notre catégorisation logique en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celle des registres de représentation sémiotique développée par Duval en vue de voir si cette dernière absorbe totalement notre catégorisation ou pas, tout au long des réponses relatives aux questions proposées dans les exercices du questionnaire.

Nous espérons, à travers ces types de regroupement, avoir des éléments indicateurs concernant les liens entre l'articulation syntaxe et sémantique d'un point de vue logique et celle de l'articulation entre les différents registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993).

[87] Rappelons que la mobilisation des deux points de vue sémantique et syntaxique correspond au type de technique mixte.

[88] Des exemples d'autres types de réponses se trouvent dans les annexes pour chaque type de tâche à effectuée dans le questionnaire.

Tout au long de ces questionnements nous avons choisi d'analyser les 143 copies des élèves sans tenir compte de la variable niveau des élèves et des étudiants auprès desquels nous avons passé notre expérimentation. Ceci s'explique par le fait que nous voulons voir comment ils mobilisent les deux points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions sans tenir compte du niveau.

Dans un deuxième temps, nous avons décidé de faire un regroupement des différents types de réponses, en tenant compte de la variable niveau des élèves par rapport à la mobilisation des techniques de résolution en termes de sémantiques et syntaxe. Ce qui nous permet de mesurer l'influence de la variable niveau sur les procédures de résolution des élèves qui peut nous fournir des éléments indicateurs sur la mobilisation des techniques sémantiques et syntaxiques en avançant dans le cursus.

II. 2. Analyse des différentes procédures des élèves et des étudiants

Le questionnaire a été réalisé auprès des élèves des classes de deuxième année de l'enseignement secondaire section sciences, troisième année secondaire section mathématique et auprès des étudiants des classes préparatoires. Les données recueillies sont regroupées dans différents tableaux statistiques que nous présentons dans chaque question relative à un exercice bien déterminé.

II. 2. 1. Outil d'analyse statistique des données recueillies

Dans ce paragraphe, nous justifions le choix de l'outil d'analyse statistique que nous utilisons pour analyser nos données.

Rappelons que dans l'une de nos hypothèses énoncées au début de ce chapitre ($H1$) nous supposons que l'enseignement favorise peu le point de vue sémantique et en conséquence le point de vue syntaxique s'impose progressivement dès que les techniques sont disponibles.

Nous faisons l'hypothèse que les réponses et les techniques mobilisables de la part des élèves et des étudiants des classes préparatoires vont être différentes le long du questionnaire. Ainsi, nous pouvons dire que chaque élève d'une classe bien déterminée qui a un niveau bien précis procèdera, *a priori*, par la mobilisation de différents types de techniques par rapport à un autre élève qui peut être d'une même ou d'une autre classe.

Dans cette expérimentation, nous sommes en présence de deux variables qui sont, *a priori* indépendantes. Ces variables sont le niveau des élèves d'une part et les techniques mobilisables que nous avons décrites dans l'analyse *a priori* d'autre part.

En ce qui nous concerne, nous retenons les cinq classes auprès desquelles nous avons passé ce questionnaire et qui représentent la variable niveau d'une part et nous classons les techniques mobilisées, qui représentent la deuxième variable, en trois sous catégories sémantique, syntaxique et mixtes d'autre part.

Nous utilisons le test de Khi deux, intégré dans le logiciel statistique SPSS, puisqu'il est un questionnaire d'hypothèse qui permet de tester une relation de cause à effet entre deux variables qualitatives, qui sont dans notre cas le niveau et le type de procédures, dont les données sont exprimées en termes de fréquences.

Notre objectif est de déterminer la probabilité d'indépendance des 143 élèves des cinq différents niveaux d'enseignement par rapport à la fréquence des types de techniques mobilisées pour répondre à chaque question proposée dans le questionnaire. Nous prenons compte, lorsqu'on interprète le résultat du Khi deux, de la valeur de la sensibilité à ce qu'elle soit inférieur à 5% pour que le lien d'indépendance soit statistiquement avéré. Ce test est appliqué à la fin des analyses descriptives et des commentaires que nous menons dans chaque question. Enfin, remarquons que l'outil SPSS nous permet, en plus, de déterminer les histogrammes représentant les résultats et d'interpréter graphiquement si la sensibilité est significative ou pas.

II. 2. 2. Analyse de l'exercice N°1

L'énoncé mathématique de l'exercice N°1 est le suivant :

« Soient les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x^2-2$ et $g(x)=3x+2$.

1) Résoudre dans IR, par le calcul puis graphiquement : $f(x)=g(x)$.

2) Déduire les solutions de l'équation : $f(x)=|g(x)|$. ».

Il faut rappeler tout d'abord que le type de tâches proposées aux élèves relève de celui des directives des programmes et des manuels scolaires. En effet, la résolution algébrique et graphique de l'équation $x^2-2=3x+2$ sont des types de tâches classiques. En plus, la deuxième question, même si elle exige un point de vue sémantique au niveau du signe de l'expression x^2-2, est une tâche qui ne demande qu'un niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances que nous avons détaillé dans l'analyse *a priori*.

II. 2. 2. 1. Analyse des réponses pour la résolution algébrique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$

En ce qui concerne la résolution, par le calcul, de la première question nous avons énoncé, dans l'analyse *a priori*, que nous avons quatre types de techniques de résolution dont deux sont du type syntaxique du registre algébrique et les deux autres sont du type sémantique du registre numérique.

L'examen des réponses des 143 élèves et étudiants au sujet de cette première question (Q1) montre, tout d'abord, que tous les élèves ont répondus à cette première tâche qui semble être une tâche routinière. Nous avons enregistré 56 réponses d'élèves parmi les 143, soit environ $39{,}2\%$ de la totalité qui exploitent la technique du type syntaxique qui relève du registre algébrique, notée dans l'analyse *a priori* par $t_{1-1-1-sy-a\lg}$, dont 50 réponses étaient correctes, aucune réponse incomplète et 6 réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 1. p.50-51).

Le deuxième type de technique syntaxique relevant du registre algébrique, notée dans l'analyse *a priori* par $t_{2-1-1-sy-a\lg}$, a été retrouvé dans 79 copies d'élèves et étudiants, soit $55{,}2\%$ de la totalité des copies où toutes les réponses étaient exactes (cf. Annexe. B-I. 4. 1. p.52). Par contre, le pourcentage des réponses de type sémantique est remarquablement faible et seuls 2 réponses étaient exactes sur 143 élèves et étudiants, soit environ $1{,}4\%$. Ces deux réponses étaient du type sémantique du registre numérique, notée $t_{3-1-1-sé-num}$, (cf. Annexe. B-I. 4. 1. p. 53). En revanche les techniques sémantiques du registre numérique du type $t_{4-1-1-sé-num}$, que nous avons développé dans l'analyse *a priori*, étaient totalement absentes.

Notons enfin que les autres types de réponses étaient au nombre 6, soit $4{,}2\%$ de la totalité des copies (cf. Annexe. B-I. 4. 1. p. 54).

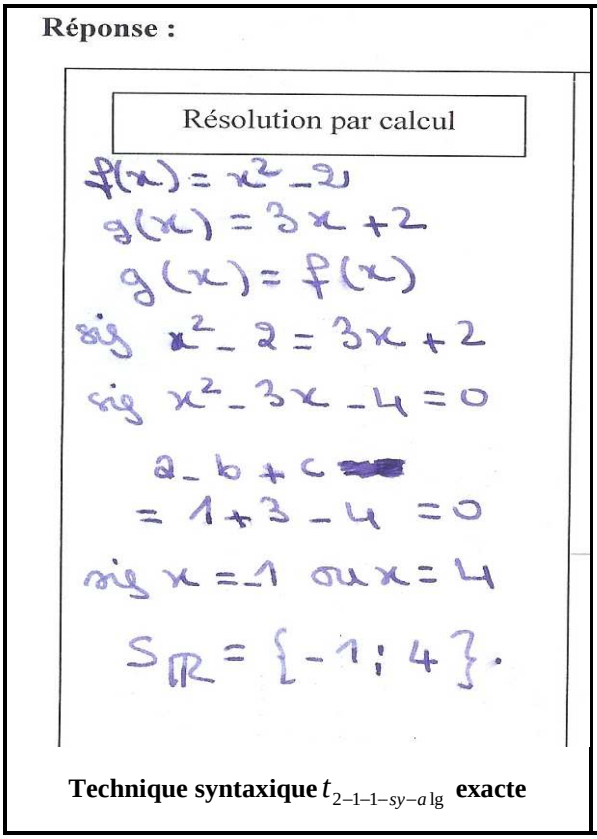
Les résultats des réponses des élèves et des étudiants concernant cette question sont présentés dans le tableau récapitulatif ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{1-1-1-sy-a\lg-exacte}$	50	35,0
$t_{1-1-1-sy-a\lg-erronée}$	6	4,2
$t_{2-1-1-sy-a\lg-exacte}$	79	55,2
$t_{3-1-1-sé-num-exacte}$	2	1,4
Autre type de réponse	6	4,2
Total	143	100,0

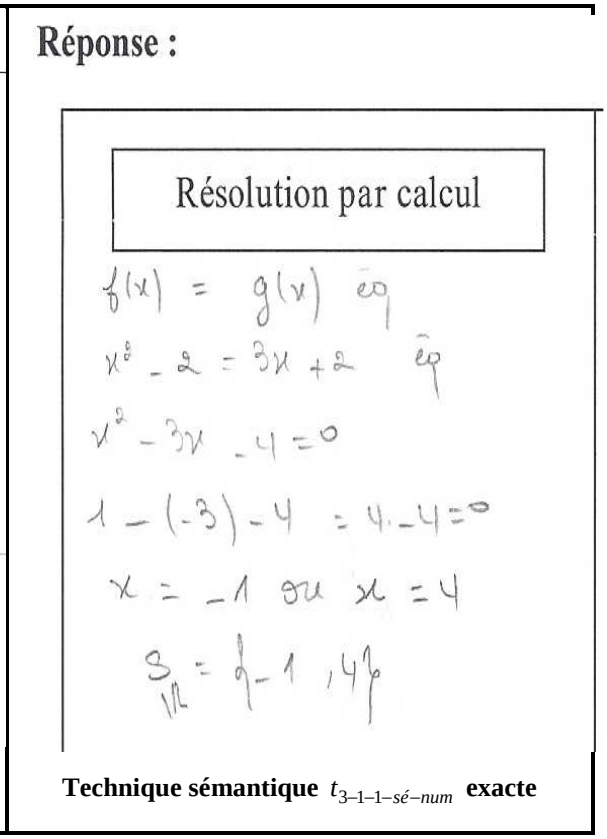
Tableau 2.2.1.1

Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixtes avec le type de réponses exactes, incomplète ou erronée montre que les procédures sémantiques sont toutes exactes même si elles ne sont que 2. Par contre les procédures syntaxiques dominantes étaient de 135, dont 6 étaient erronées et 129 correctes. Le taux de succès des procédures syntaxiques n'est pas de nature ici à inciter les élèves à en changer pour une procédure sémantique.

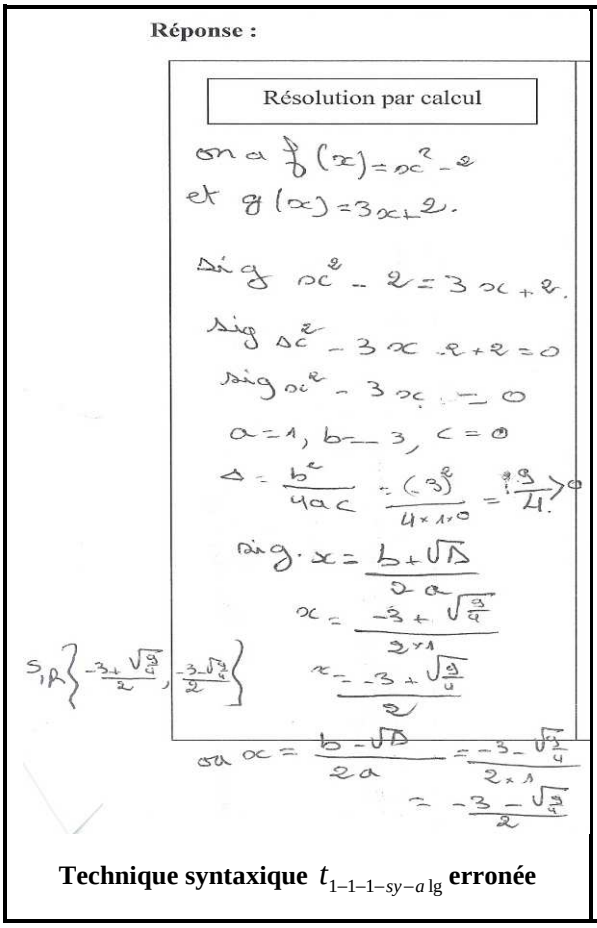
Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



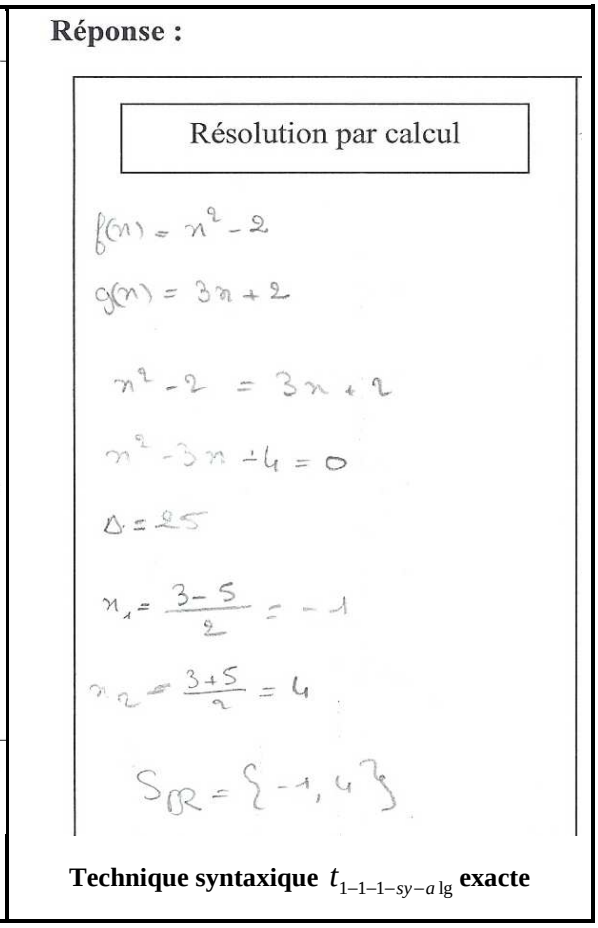
Technique syntaxique $t_{2-1-1-sy-a\lg}$ **exacte**



Technique sémantique $t_{3-1-1-sé-num}$ **exacte**



Technique syntaxique $t_{1-1-1-sy-a\lg}$ **erronée**



Technique syntaxique $t_{1-1-1-sy-a\lg}$ **exacte**

Donc nous pouvons dire que la mobilisation des deux techniques sémantique et syntaxique conduit la majorité des élèves à la bonne réponse. Ce qui confirme notre supposition, dans l'analyse *a priori*, que les élèves ont un niveau technique pour répondre à ce type de tâche.

Le regroupement des différents types de techniques de résolution algébrique, décrites ci-dessus, relativement à cette première question sans tenir compte de l'exactitude de la réponse, nous permet d'avoir deux catégories dont la première est celle des techniques du type syntaxique du registre algébrique, que nous notons $t_{sy-a\lg}$, et la deuxième est du type sémantique numérique notée $t_{sé-num}$. Nous avons ainsi 135 réponses, soit 94,4% de la totalité des élèves qui mobilisent les techniques du type $t_{sy-a\lg}$ par contre 2 réponses, soit 1,4% des élèves qui mobilisent des techniques du type $t_{sé-num}$.

Les résultats des différents types de réponses des élèves et étudiants relatives à cette première question qui consiste à résoudre algébriquement l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$ sont exprimés dans le tableau et représentés dans l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
t_{sy-alg}	135	94,4
$t_{sé-num}$	2	1,4
Autre type de réponse	6	4,2
Total	143	100,0

Tableau 2.2.1.3

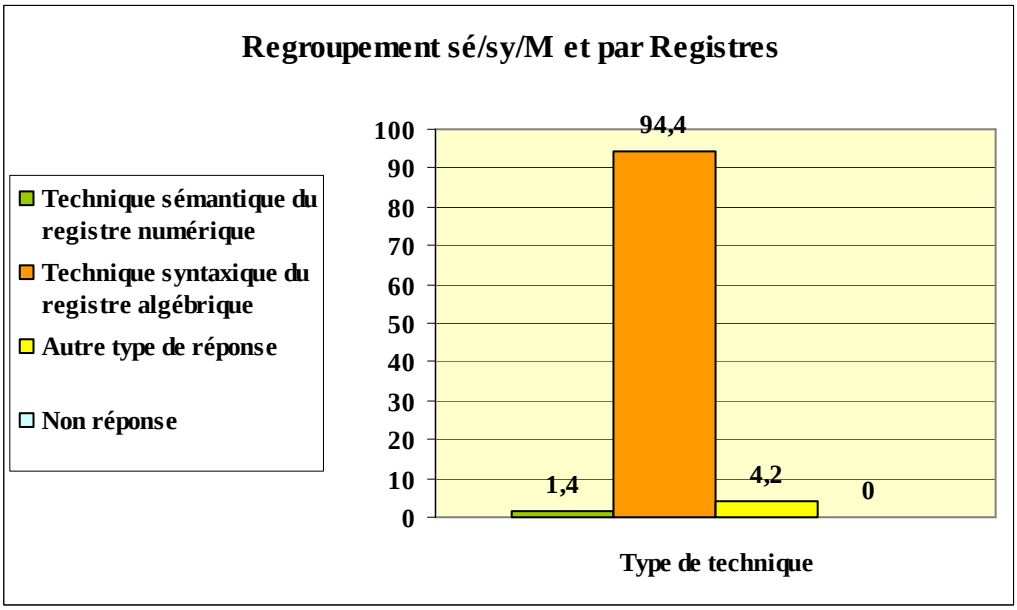


Figure II. 1 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution algébrique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$ de l'exercice N°1

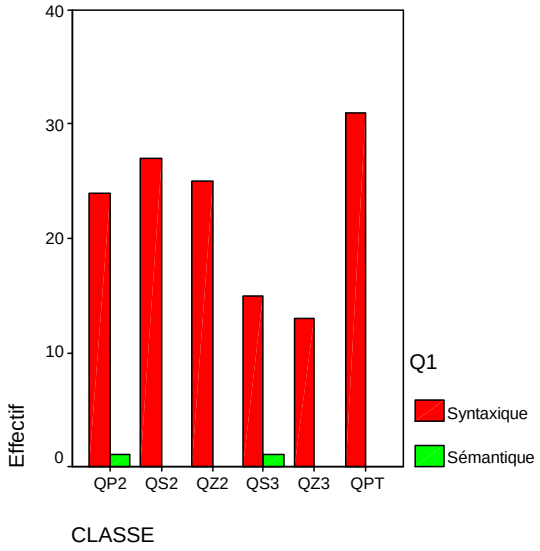
Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysée, ci-dessus, qui croise la catégorisation logique avec celle des différents registres et par la suite la mobilisation des techniques syntaxiques étaient dans un registre algébrique et les techniques sémantiques mobilisées étaient au sein du registre numérique.

Le croisement de notre catégorisation articulant les deux points de vue sémantique et syntaxique avec les registres algébriques et numériques exploités dans les résolutions des élèves et des étudiants confirme que l'aspect syntaxique mobilisé dans la résolution est au sein du registre algébrique et l'aspect sémantique est au sein du registre numérique.

	Algébrique	Numérique
Syntaxique	135	0
Sémantique	0	2

Tableau 2.2.1.4

Enfin, le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il n'y a pas de différence significative. En effet, la valeur de khi-deux est de $5{,}096$ avec une signification asymptotique au seuil de $40{,}4\% > 5\%$. Ceci est affirmé par l'histogramme ci-dessous qui montre qu'on a une dominance des procédures syntaxiques pour la résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q1

Par rapport à cette question nous pouvons dire que le point de vue syntaxique s'impose, dès que les techniques sont disponibles, au détriment du point de vue sémantique et par la suite notre hypothèse $H1$ est corroborée.

II. 2. 2. 2. Analyse des réponses pour la résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$

Dans la deuxième partie de la question N°1, le type de tâche proposé aux élèves consiste à résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ qui n'est autre que la résolution de $x^2 - 2 = 3x + 2$.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons expliqué que nous sommes en présence de quatre types de techniques de résolution dont deux sont des techniques du type mixte relevant du registre graphique que nous avons noté respectivement $t_{7-1-1-M-gph}$ et $t_{7'-1-1-M-gph}$. Les deux autres sont des techniques dont l'une est du type sémantiques du registre graphique, notée $t_{5-1-1-sé-grph}$ et l'autre est syntaxique du registre graphique, notée $t_{6-1-1-sy-gph}$.

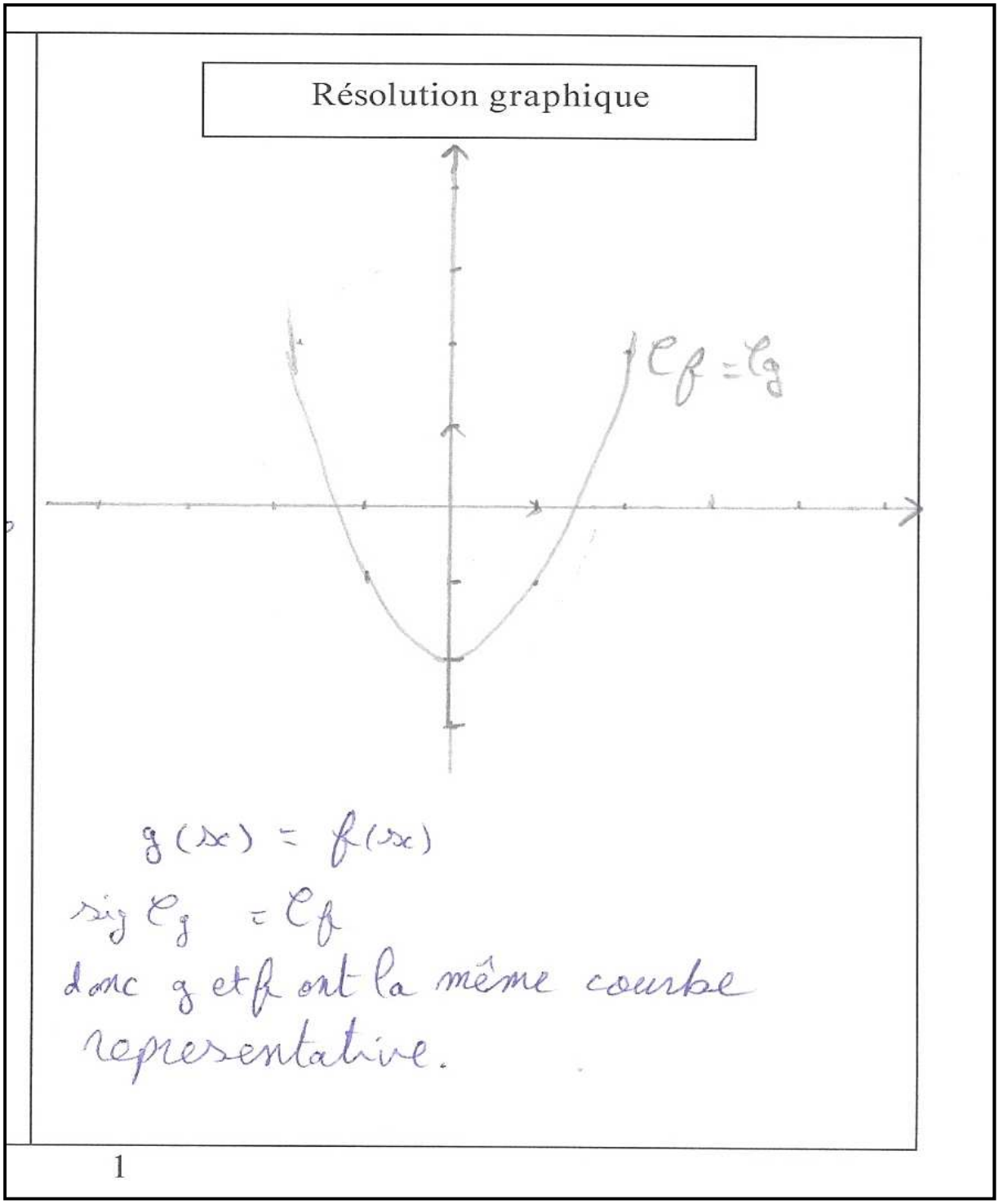
L'analyse détaillée des différents types de réponses montre que le nombre d'élèves procédant par la technique du type sémantique du registre graphique $t_{5-1-1-sé-grph}$, qui consiste à représenter les deux fonctions f et g d'une façon ponctuelle dans un repère orthonormé, était de 94, soit environ $65{,}7\%$ de la totalité des élèves, dont 51 réponses étaient exactes, 32 réponses incomplètes et 11 réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-II. 4. 2. p. 55-57).

Les procédures des élèves employant la technique syntaxique du registre graphique $t_{6-1-1-sy-gph}$, qui consiste à l'étude complète de la fonction f et à la représentation de la fonction affine g, étaient présentes même si le pourcentage était de $1{,}4\%$ qui représente 2 réponses élèves dont toutes les deux étaient exactes (cf. Annexe. B-I. 4. 2. p. 58). Les deux autres types de techniques mixtes $t_{7-1-1-M-gph}$ et $t_{7'-1-1-M-gph}$ ont été exploitées par les élèves puisque nous avons enregistré d'une part 9 réponses d'élèves, soit $6{,}3\%$ de la totalité de la population qui ont utilisé des techniques mixtes du type $t_{7-1-1-M-gph}$, dont 4 réponses étaient exactes, 1 réponse était incomplète et 4 réponses qui étaient erronées. Rappelons que cette technique s'appuie sur une application directe du théorème du cours pour représenter la fonction trinôme f, qui explique que : « La courbe représentative dans un repère orthogonal de la fonction définie sur IR par $f(x) = x^2 - 2$ est une parabole ayant pour sommet le point $S(0,-2)$ et pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$ » ensuite la représentation de la fonction affine g, qui est une droite, est faite en s'appuyant sur la technique qui consiste à déterminer le coefficient directeur de la droite, qui est 3, et passant par le point de coordonnées $(0,2)$ (cf. Annexe. B-I. 4. 2. p.59-61).

D'autre part, nous avons enregistré 5 réponses, soit environ $3{,}5\%$ de la totalité des élèves, dont 3 réponses qui étaient exactes et 2 réponses étaient incomplètes, lesquelles montrent qu'ils ont procédé par des techniques du type $t_{7'-1-1-M-gph}$ qui utilisent la même procédure que $t_{7-1-1-M-gph}$ pour représenter la fonction f mais qui consiste à représenter la

fonction affine g par association de valeurs pour placer les points de coordonnées $(x, g(x))$ par lesquels passe la droite représentant g (cf. Annexe. B-I. 4. 2. p. 62-63).

Les autres types de réponses étaient 22, soit $15{,}4\%$ de la totalité des copies d'élèves. Nous illustrons ci-dessous par un exemple (cf. Annexe. B-I. 4. 2. p. 64-67).



Notons enfin que 11 élèves, soit $7{,}7\%$ de la totalité des élèves n'ont pas proposé de réponses à cette question.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants, qui ont répondu à cette question, sont présentés respectivement dans le tableau récapitulatif et l'histogramme ci-dessous

	Effectif	Pourcentage
$t_{5-1-1-sé-grph-exacte}$	51	35,6
$t_{5-1-1-sé-grph-incomplète}$	32	22,4
$t_{5-1-1-sé-grph-erronée}$	11	7,7
$t_{6-1-1-sy-gph-exacte}$	2	1,4
$t_{7-1-1-M-gph-exacte}$	4	2,8
$t_{7-1-1-M-grph-incomplète}$	1	,7
$t_{7-1-1-M-grph-erronée}$	4	2,8
$t_{7'-1-1-M-gph-exacte}$	3	2,1
$t_{7'-1-1-M-grph-incomplète}$	2	1,4
Autre type de réponse	22	15,4
Non réponse	11	7,7
Total	143	100,0

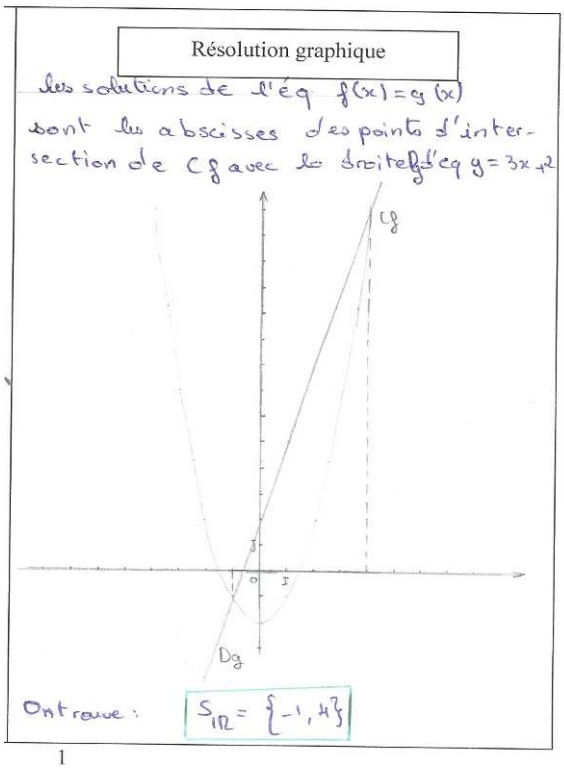
Tableau 2.2.2.1

Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre que la mobilisation des techniques sémantiques et mixtes dans un même registre graphique ne garantit pas nécessairement l'exactitude du résultat recherché. Cependant, les deux procédures syntaxiques exactes qui étaient appliquées par deux élèves, le premier faisant partie de la classe pilote et le second d'une des classes de troisième année section mathématiques du lycée Sakyet Sidi Youssef, montrent que la maîtrise de l'outil syntaxique, dans ce type de situation, permet d'aboutir au bon résultat.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	2	0	0	2
Sémantique	51	32	11	94
Mixte	7	3	4	14

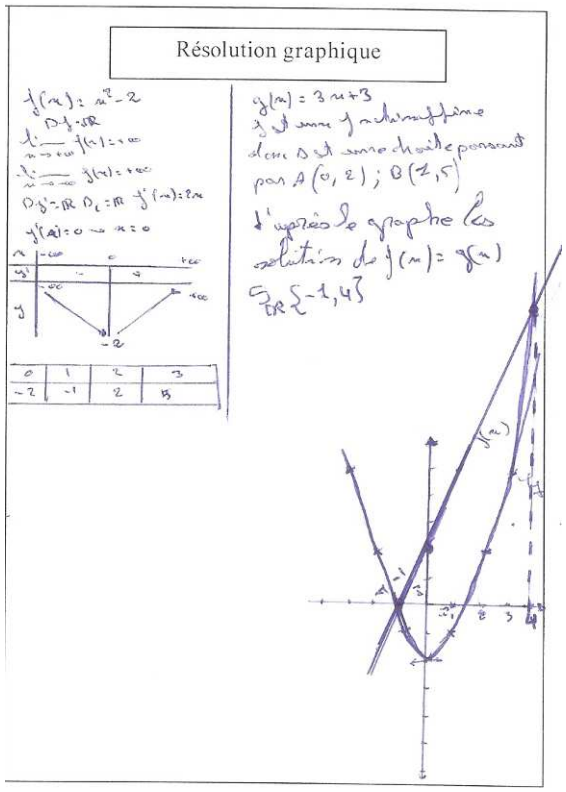
Tableau 2.2.2.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.

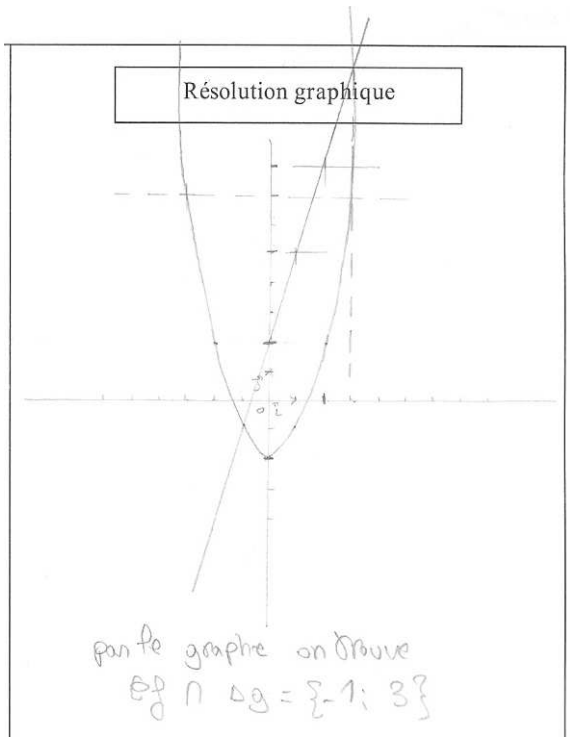


1

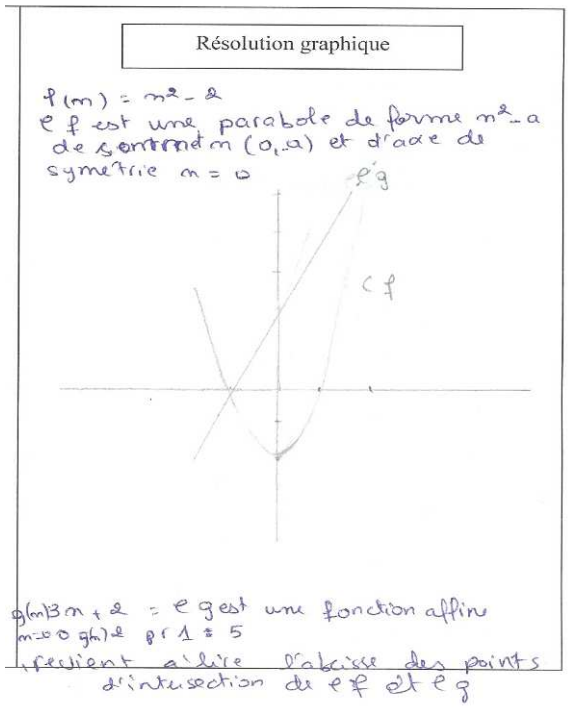
Technique sémantique $t_{5-1-1-sé-grph}$ exacte



Technique syntaxique $t_{6-1-1-sy-grph}$ exacte



Technique sémantique $t_{5-1-1-sé-grph}$ erronée



Technique mixte $t_{7'-1-1-M-grph}$ incomplète

Lorsqu'on regroupe les différentes techniques liées à ce type de tâche, qui consiste à faire une résolution graphique, en trois catégories, nous enregistrons 82 réponses sémantiques du registre graphique, soit $57{,}3\%$ de la totalité des élèves, 2 réponses syntaxiques du registre graphique, soit $1{,}4\%$ des copies et 14 copies d'élèves dans lesquelles ils donnent des réponses mixtes dans le registre graphique, soit $9{,}8\%$ de toutes les copies.

Le tableau et l'histogramme, ci-dessous, montrent les résultats du dépouillement des copies des élèves et des étudiants qui ont participé à ce questionnaire.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph}$	82	57,3
t_{sy-gph}	2	1,4
t_{M-gph}	14	9,8
Autre type de réponse	34	23,8
Non réponse	11	7,7
Total	143	100,0

Tableau 2.2.2.2

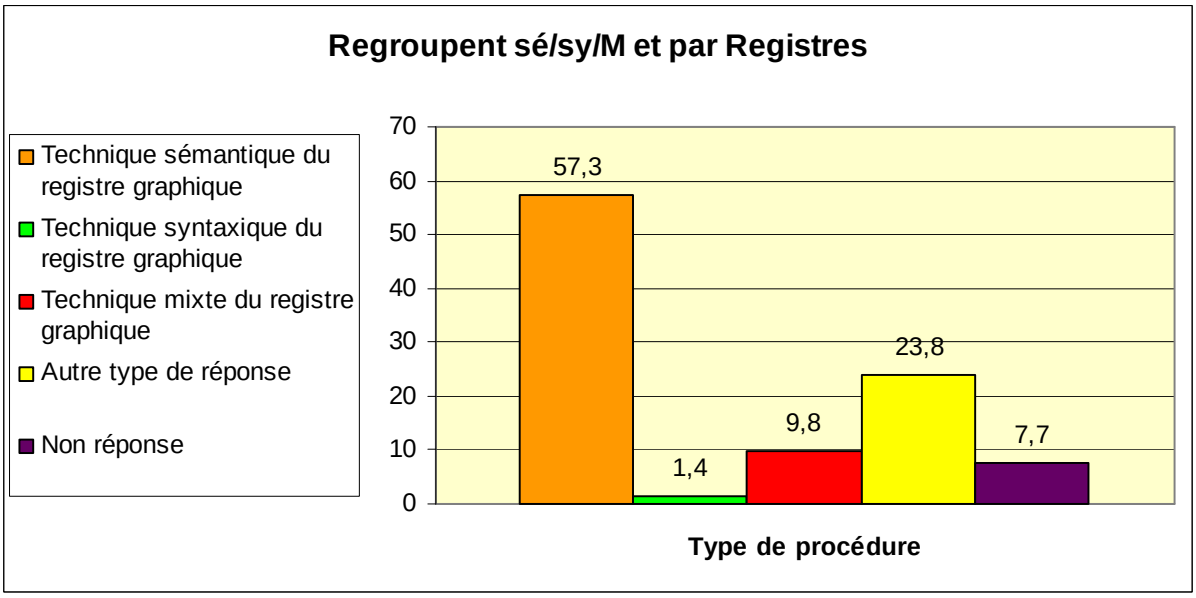


Figure II. 2 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$ de l'exercice N°1

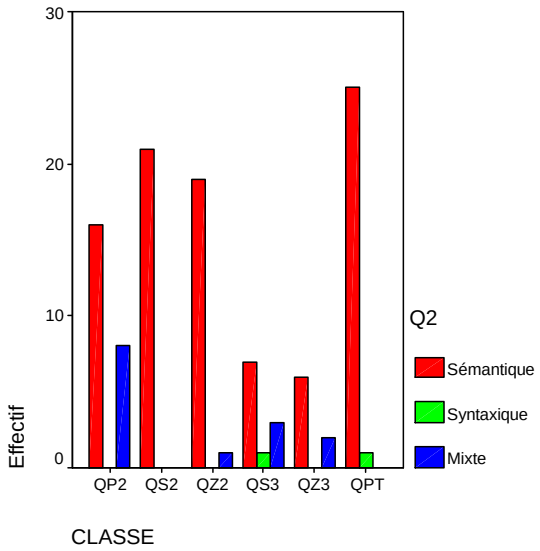
Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et

mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysé, ci-dessus, qui croise la catégorisation logique et celle des différents registres, d'autant plus que dans cette question il n'y a eu mobilisation que d'un seul registre, qui est le graphique. Ce qui est confirmé par le tableau ci-dessous qui montre que la mobilisation des points de vue sémantique et syntaxique peut être assurée au sein d'un même registre.

	Graphique
Syntaxique	02
Sémantique	82
Mixte	14

Tableau 2.2.2.4

Enfin, le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative dans les procédures des trois niveaux. En effet, la valeur de khi-deux est de $25{,}606$ avec une signification asymptotique de $4\% < 5\%$. Ceci est illustré par l'histogramme ci-dessous qui montre cette différence entre les procédures des différentes classes. En effet, on voit bien que les procédures sémantiques du registre graphiques dominent chez les élèves des classe QS2, QZ2 et QPT par contre les procédures sémantiques et / ou syntaxiques du registre graphiques sont partagées chez ceux des classes QP2, QS3et QZ3.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q2

Dans ce cas nous pouvons dire que la majorité des élèves ont réussi à mobiliser les techniques sémantiques du registre graphique surtout lorsque le type de tâche est demandé

explicitement. En revanche, les techniques syntaxiques étaient présentes chez les élèves de la classe QS3 et QPT même si c'est à un nombre assez réduit.

II. 2. 2. 3. Analyse des réponses pour la résolution de l''équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$

Dans l'analyse *a priori* de cette question, nous avons précisé que les solutions peuvent être déterminées par différents types de techniques qui s'appuient essentiellement sur des techniques de traitement, par implication ou par équivalence, algébriques ou sur des techniques de résolution sémantiques en faisant appel au registre graphique.

Nous avons choisi de supposer que la résolution algébrique de l'équation par implication suivie par une substitution des valeurs trouvées comme étant une technique syntaxique du registre algébrique qui correspond à l'association des deux techniques, $t_{9-1-2-sy-a\lg}$ et $t_{9'-1-2-sé-num}$, que nous avons détaillées dans l'analyse *a priori*. Ensuite, la résolution s'appuyant sur des équivalences est supposée comme étant une technique mixte qui exige un travail à la fois sémantique et syntaxique dans le registre algébrique en faisant appel à un contrôle sémantique qui consiste à déterminer l'univers du discours ou le domaine d'existence de l'équation et de faire des transformations purement algébriques du type syntaxique qui correspond à la technique, que nous avons noté dans l'analyse à priori par $t_{8-1-2-M_1-a\lg}$. D'autre part, nous avons un autre type de technique mixte, que nous avons noté $t_{10-1-2-M_2-a\lg}$, qui consiste à étudier et interpréter le signe de l'expression algébrique $3x+2$ sur IR et de résoudre l'équation en fonction des domaines sur lesquels $3x+2$ est positive ou négative[89]. Enfin, les techniques exploitant le graphique, sont des techniques du type sémantique du registre graphique qui ont été notées par $t_{11-1-2-sé-grph}$ et $t_{11'-1-2-sé-grph}$.

L'analyse des copies des élèves et des étudiants nous montre que nous avons un total de 127 réponses.

Les réponses du type sémantique du registre graphique, notées par $t_{11-1-2-sé-grph}$ et $t_{11'-1-2-sé-grph}$, sont au nombre de 18, soit $12{,}6\%$ de la totalité des copies dont 10 réponses correctes, 6 incomplètes et 2 réponses erronées. (cf. Annexe. B-I. 4. 3. p. 68-70)

[89] L'analyse didactique et la résolution mathématique sont décrites respectivement dans l'analyse *a priori* et les annexes.

Les réponses du type syntaxique sont au nombre de 60 et représentent $41{,}9\%$ de la totalité des réponses, dont 55 sont incorrectes et 5 incomplètes (cf. Annexe. B-I. 4. 3. p. 71-72).

Les réponses des élèves qui se sont appuyés sur des procédures se basant sur des techniques de résolutions du type mixte étaient au nombre de 28, soit environ $19{,}6\%$ de la totalité des réponses. Dans cette catégorie de réponses, nous avons enregistré les deux types de techniques que nous avons développé dans l'analyse *a priori*. Nous avons 5 élèves qui ont appliqué la technique $t_{8-1-2-M_1-a\lg}$, soit $3{,}5\%$ des réponses, dont 4 copies étaient exactes et 1 copie était erronée. En plus, nous avons 23 élèves, soit $16{,}1\%$ qui ont procédé par la technique mixte $t_{10-1-2-M_2-a\lg}$ où on a 9 bonnes réponses, 4 réponses incomplètes et 10 réponses erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 3. p.73-76).

Notons enfin que les autres types de réponses sont au nombre de 21, soit $14{,}7\%$ de la totalité des copies des élèves (cf. Annexe. B-I. 4. 3. p. 77-80) et les non réponses sont au nombre de 16, soit $11{,}2\%$ des copies des élèves.

Nous illustrons ci-dessous par un exemple notre catégorisation d'un autre type de réponse.

2) Déduire les solutions de l'équation : $f(x)=|g(x)|$

Réponse :

Les solution en x de cette equation sont tous
Les solution du point commun qui se trouve
sur l'axe (x) où audessus cet axe

Les résultats obtenus à partir des réponses des élèves et des étudiants sont représentés, respectivement, dans le tableau suivant.

	Effectif	Pourcentage
$t_{11-1-2-sé-grph-exacte}$	10	7
$t_{11-1-2-sé-grph-exacte}$	6	4,2
$t_{11-1-2-sé-grph-exacte-erronée}$	2	1,4
$t_{9-1-2-sy-a\lg-incomplète}$	5	3,5
$t_{9-1-2-sy-a\lg-erronée}$	55	38,4
$t_{8-1-2-M_1-a\lg-exacte}$	4	2,8
$t_{8-1-2-M_1-a\lg-erronée}$	1	0,7
$t_{10-1-2-M_2-a\lg-exacte}$	9	6,3
$t_{10-1-2-M_2-a\lg-incomplète}$	4	2,8
$t_{10-1-2-M_2-a\lg-erronée}$	10	7
Autre type de réponse	21	14,7
Non réponse	16	11,2
Total	143	100,0

Tableau 2.2.3.1

Le regroupement des différents types de réponses, sans tenir compte de leur exactitude, de leur incomplétude eu de leur fausseté, en s'appuyant sur le croisement des catégories logiques de sémantique et / ou syntaxe avec les différents types de registres , nous permet d'obtenir 56 réponses du type syntaxique du registre algébrique, soit $39{,}2\%$ des élèves, 28 réponses, soit $19{,}6\%$ des élèves qui mobilisent des techniques mixtes du registre algébrique et enfin, nous avons 18 réponses, soit $12{,}6\%$ des élèves qui mobilisent des techniques sémantiques du registre graphique.

Enfin, les autres types de réponses sont au nombre de 25, soit $17{,}5\%$ et les non réponses sont au nombre de 16, soit $11{,}2\%$ de la totalité des copies des élèves.

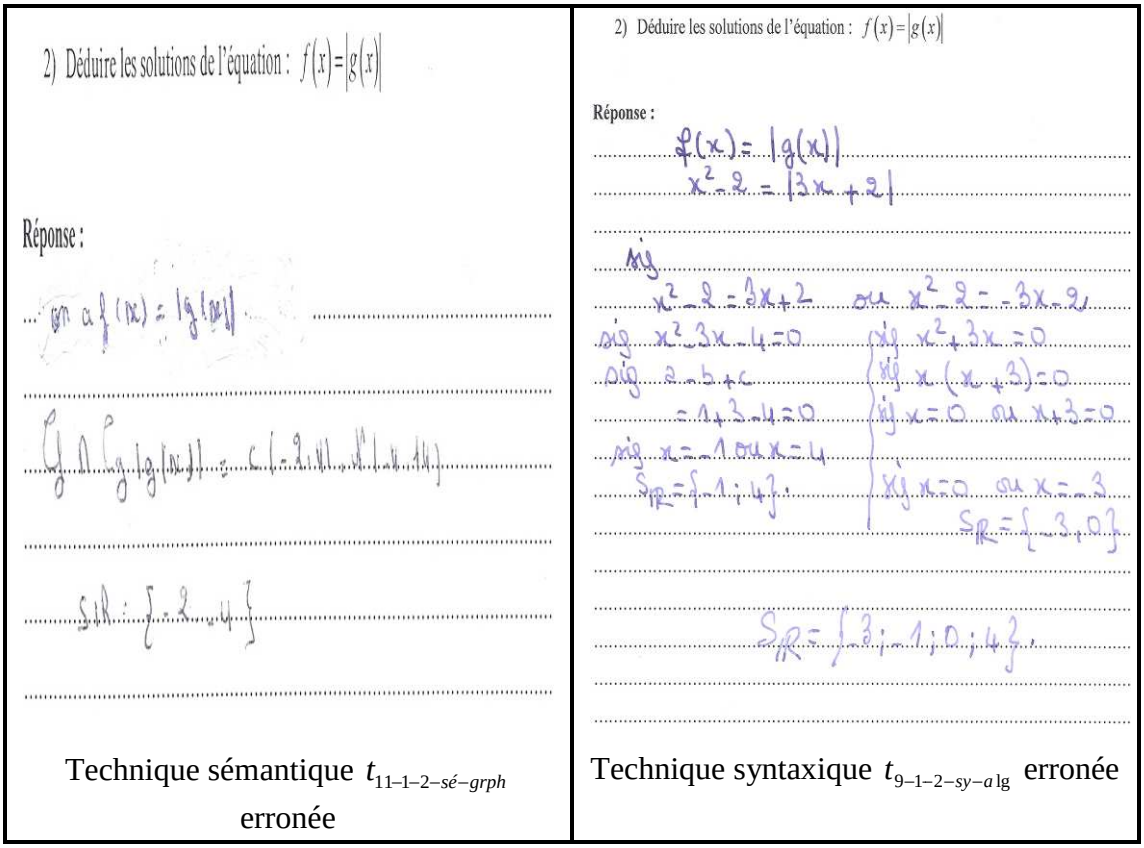
Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre que les réponses étaient majoritairement syntaxiques, aucune réponse n'étant correcte. Par contre les techniques sémantiques et mixtes comptaient 23 réponses correctes parmi les 44 de ce type.

Le tableau ci-dessous montre la répartition.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	0	5	55	60
Sémantique	10	6	2	18
Mixte	13	4	11	28

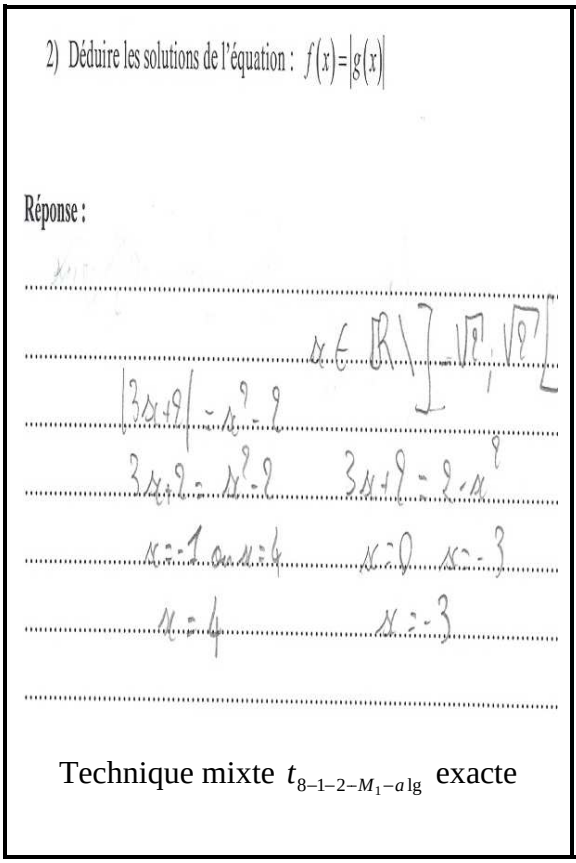
Tableau 2.2.3.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.

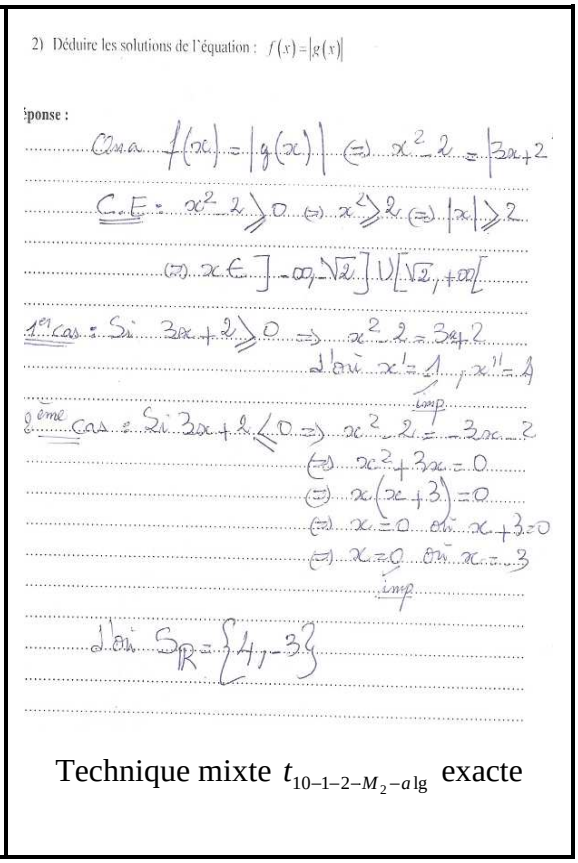


Technique sémantique $t_{11-1-2-sé-grph}$ erronée

Technique syntaxique $t_{9-1-2-sy-alg}$ erronée



Technique mixte $t_{8-1-2-M_1-a\lg}$ exacte



Technique mixte $t_{10-1-2-M_2-a\lg}$ exacte

Les résultats obtenus à partir des réponses des élèves et des étudiants sont représentés, respectivement, dans le tableau et l'histogramme suivants.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sy-a\lg}$	56	39,2
$t_{M-a\lg}$	28	19,6
$t_{sé-grph}$	18	12,6
Autre type de réponse	25	17,4
Non réponse	16	11,2
Total	143	100,0

Tableau 2.2.3.3

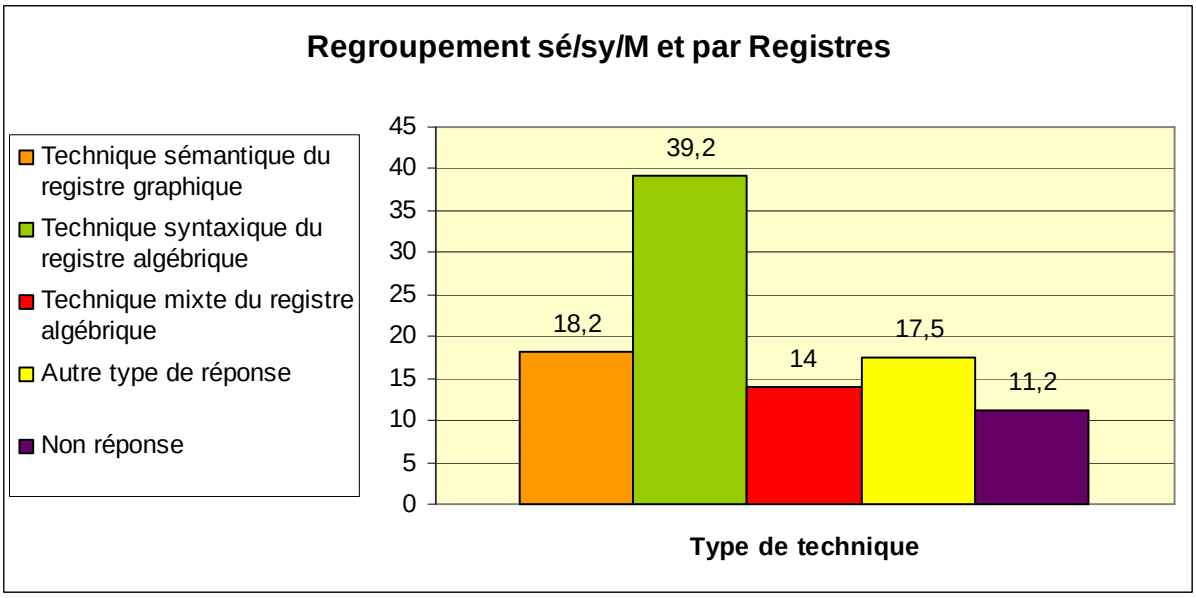


Figure II. 3 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution de l'équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$ **de l'exercice N°1**

Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysé, ci-dessus, qui croise la catégorisation logique et celle des différents registres.

Le croisement de notre catégorisation articulant les deux points de vue sémantique et syntaxique avec les registres algébriques et graphiques exploités dans les résolutions des élèves et des étudiants confirme que les deux aspects syntaxiques et mixtes sont mobilisés au sein du registre algébrique et que l'aspect sémantique est mobilisé au sein du registre graphique. Ce qui montre que l'articulation du point de vue syntaxique et mixte peut être assurée au sein d'un même registre de représentation sémiotique.

Le tableau ci-dessous montre ces analyses.

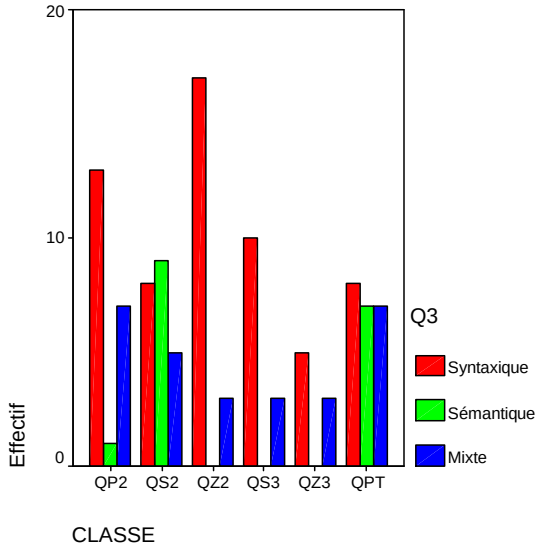
	Algébrique	Graphique
Syntaxique	56	0
Sémantique	0	18
Mixte	28	0

Tableau 2.2.3.4

Enfin, le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative dans les

procédures des trois niveaux. En effet, la valeur de khi-deux est de $29{,}294$ avec une signification asymptotique de $0{,}1\% < 5\%$. Ceci est illustré par l'histogramme ci-dessous qui montre une différence très nette entre les procédures des différents élèves des différentes classes. En effet, on voit bien que les élèves des classes QS2 et QPT exploitent équitablement les trois types de techniques par contre les trois classes QZ2, QS3 et QZ3 n'ont exploité aucune technique sémantique pour résoudre l'équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$. Les élèves de la classe pilote QP2 ont exploité les trois types de techniques mais avec une dominance des techniques syntaxiques du registre algébrique par rapport aux techniques sémantiques et mixtes.

L'histogramme montre que les techniques syntaxiques et mixtes ont été mobilisées par les élèves et les étudiants de toutes les classes. Par contre, les techniques sémantiques n'ont été mobilisées que par les élèves et les étudiants des trois classes QP2, QS2 et QPT.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q3

Conclusions relatives aux réponses des élèves et des étudiants concernant l'exercice n°1

L'analyse des réponses des élèves au sujet du premier exercice concernant l'articulation sémantique et / ou syntaxique dans les résolutions algébriques et graphiques des deux équations met en évidence les résultats suivants :

- **Pour la résolution algébrique de l'équation** $x^2 - 2 = 3x + 2$

Les procédures syntaxiques du registre algébrique l'emportent sur les techniques sémantiques du registre, puisque la majorité soit, environ $94{,}4\%$ des réponses des élèves étaient du type syntaxique du registre algébrique. Par contre, les techniques sémantiques étaient au nombre de 2, soit environ $1{,}4\%$. Ainsi, nous pouvons affirmer que, dans l'ensemble, une écrasante majorité des élèves ont répondus à cette question en s'appuyant sur différentes techniques syntaxiques de résolution qui semblent être l'outil privilégié des élèves, puisque deux réponses parmi les 137 réponses étaient du type sémantique.

Ceci confirme notre analyse *a priori*, en terme de mise en fonctionnement des connaissances au sens de Robert (1998), à savoir que les élèves sont supposés avoir un niveau technique leur permettant d'appliquer immédiatement des propriétés, des théorèmes etc.

Une raison peut expliquer cette différence enregistrée entre les différents résultats, concernant la résolution algébrique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$, réside au niveau du type de tâche demandé aux élèves et aux étudiants qui est de nature syntaxique « résoudre dans IR par le calcul » et favorise le recours à des techniques syntaxiques du registre algébrique.

- **Pour la résolution graphique de l'équation** $x^2 - 2 = 3x + 2$

Le milieu matériel des élèves et des étudiants est enrichi par un type de tâche qui les appelle à faire recours au registre graphique en les incitant à changer de registre pour faciliter la résolution. Ce type de tâche fait appel explicitement à une mobilisation des connaissances du registre graphique pour résoudre l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$. Cependant, nous remarquons une certaine résistance de procédures de résolution du type syntaxiques et mixtes qui s'est manifesté par des réponses s'appuyant sur une étude analytique de la fonction trinôme f qui étaient présentes dans deux copies dont l'une chez un élève des classes de troisième année secondaire section mathématiques et l'autre chez un étudiant des classes préparatoires.

En plus les réponses du type syntaxique et mixte étaient présentes dans 16 copies des élèves et des étudiants, soit environ $11{,}2\%$ de la totalité des copies qui nous semble être un pourcentage assez élevé par rapport au type de tâche demandé. Ce qui montre que les techniques syntaxiques sont mobilisables dès qu'elles sont disponibles.

- **Pour la résolution de l'équation** $x^2 - 2 = |3x + 2|$

La résolution de cette question s'appuie essentiellement sur deux types de techniques de résolution dont l'une est de nature algébrique et l'autre de nature graphique.

✓ ***Pour la résolution algébrique***

L'interprétation du sens de l'équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$ est un élément essentiel pour la réussite dans la résolution de ce type d'équation puisque les deux membres de l'égalité doivent être positifs.

L'étude mathématique et didactique que nous avons effectuée dans l'analyse *a priori* de ce questionnaire montre que la résolution algébrique peut s'appuyer sur des passages par équivalence où on a à déterminer l'univers du discours (domaine d'existence de l'équation) ou bien sur des implications qui se terminent par des opérations de vérification et de contrôle en substituant les solutions trouvées dans l'équation de départ.

Ce travail sémantique semble être presque absent dans les résolutions des élèves et des étudiants puisque leurs réponses s'appuyant sur des passages par implication, sont toutes incomplètes ou erronées. De plus, les résolutions par équivalences qui étaient au nombre de 28, ne contenaient que 13 réponses exactes ; l'univers du discours, qui est dans ce cas $]-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty[$, n'était pas pris en compte par 15 élèves et étudiants, qui ont travaillé par équivalence, soit environ $53{,}6\%$.

Ainsi nous pouvons dire que le contrôle sémantique au niveau de la résolution algébrique était presque absent puisque parmi les 84 réponses nous n'avons que 13 réponses correctes, soit environ $15{,}4\%$ des réponses.

Il nous semble que le nombre des réponses erronées ou incomplètes, exploitant des techniques algébriques, est élevé, soit environ $86{,}6\%$, par rapport au niveau des élèves et des étudiants qui ont passé ce questionnaire. Ceci pourrait être lié à la question du contrat didactique qui soulève un questionnement sur l'apprentissage de certaines techniques au profit d'autres d'une part, et sur la nature des tâches recommandées dans les programmes et les manuels scolaires, d'autre part.

✓ ***Pour la résolution graphique***

Les réponses du type sémantique s'appuyant sur le registre graphique, qui étaient présentes dans 18 copies, soit environ $12{,}6\%$ de la totalité, présente un nombre acceptable de réponses exactes qui est de 10 copies, soit environ $55{,}56\%$. En plus, ce type de procédure était totalement absent chez les élèves des deux classes de troisième année secondaire section mathématiques et les élèves d'une classe de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique. Cette remarque soulève un questionnement sur le travail en

classe de l'aspect sémantique et en particulier au niveau du graphique pour assurer l'articulation lors de la résolution des problèmes liés au traitement des équations algébriques.

Cependant, nous pensons que ce type de réponse a considérablement baissé car, comme nous l'avons remarqué dans l'analyse *a priori*, le milieu matériel de l'élève a été enrichi par la question intermédiaire qui consiste à effectuer la tâche de résolution de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$ qui facilitera la tâche de la résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$.

Nous pouvons faire l'hypothèse que l'exploitation des procédures graphiques était remarquablement faible suite à une absence d'un travail sémantique et d'articulation des registres algébriques et graphiques au niveau de la notion de la valeur absolue d'une expression algébrique.

En plus, nous pouvons dire que ce type de réponse reste minoritaire, ce qui semble montrer que les élèves répondent plutôt avec des critères syntaxiques.

Cette dernière question soulève un questionnement sur la pertinence et la place d'un travail sur les quantificateurs existentiels et universels dans l'enseignement au niveau du traitement des objets de l'algèbre et en particulier, les résolutions des équations au secondaire. En effet, ceci est confirmé par le pourcentage très élevé des réponses incomplètes et erronées soit environ $86{,}6\%$, s'appuyant sur des raisonnements par implication et / ou par équivalence, qui montre une absence remarquable du contrôle et de la vérification ; ce qui favorisent un travail sur la quantification, dans les raisonnements mathématiques.

Enfin, nous pensons que cet exercice a mis en œuvre diverse réorganisations dans lesquelles les élèves ont une variété des réinvestissements qui a contribuée à provoquer des activités de décloisonnement, mettant en jeu plusieurs registres pour une même ou plusieurs notions d'une part, et les résultats ont montré la place d'un travail sémantique et la pertinence du contrôle, de la vérification, de l'interprétation et du graphique dans la résolution algébriques des équations, d'autre part.

II. 2. 3. Analyse de l'exercice N°2

Dans cet exercice le type de tâche proposé aux élèves consiste à représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S)\begin{cases} -x + 3y - 1 < 0 \\ 2x - y - 2 \geq 0 \end{cases}.$$

Dans l'analyse *a priori*, nous avons remarqué qu'il est possible d'effectuer cette tâche en s'appuyant sur trois types de techniques qui peuvent être sémantiques, syntaxiques ou mixtes associés respectivement aux techniques notées $t_{sé-grph}$, $t_{sy-a\lg}$ et $t_{M-a\lg/grph}$.

Rappelons que la technique sémantique du registre graphique, notée $t_{1-2-sé-grph}$, s'appuie essentiellement sur la représentation et l'interprétation graphique de l'ensemble S qui est l'intersection des deux demi-plan S_1 et S_2 limités par les droites D_1 et D_2 dont la représentation graphique est essentiellement ponctuelle que nous avons détaillé dans l'analyse *a priori*. D'autre part, la technique syntaxique du registre algébrique, notée $t_{4-2-sy-a\lg}$ consiste à effectuer des transformations algébriques des deux inéquations du système proposé afin de déterminer l'ensemble S. Enfin, la technique mixte du registre algébrico-graphique, notée $t_{2-2-M-a\lg-grph}$, s'appuie sur la représentation des régions S_1 et S_2 qui sont étroitement liées à D_1 et D_2 dont la représentation graphique s'appuie sur des techniques algébriques utilisant les vecteurs directeurs dont les coordonnées $(-b,a)$ se déduisent des équations cartésiennes de la forme générale $ax+by+c=0$.

L'analyse détaillée des différents types de réponses au sujet de la résolution graphique du système d'inéquations $(S)\begin{cases}-x+3y-1<0\\2x-y-2\geq 0\end{cases}$ montre que les procédures s'appuyant sur des techniques du type sémantiques notées $t_{1-2-sé-grph}$ étaient de 65 qui représentent $45{,}5\%$ de la totalité des copies, dont 10 réponses étaient exactes, 24 réponses étaient incomplètes et 31 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. p. 81-85).

Les analyses montrent également que les élèves et les étudiants procédant par la technique du type syntaxique du registre algébrique, notée $t_{4-2-sy-a\lg}$, étaient 3 soit $2{,}1\%$ des copies des élèves, dont 2 incomplètes et 1 procédure erronée (cf. Annexe. B-I. 4. p. 86-88).

Notons enfin que les autres types de réponses étaient 8 soit, $5{,}6\%$ des 143 élèves et étudiants (cf. Annexe. B-I. 4. p. 89) et les non réponses étaient 67 soit, $46{,}8\%$ des élèves et des étudiants.

Nous illustrons ci-dessous notre analyse par un exemple d'autre type de réponse.

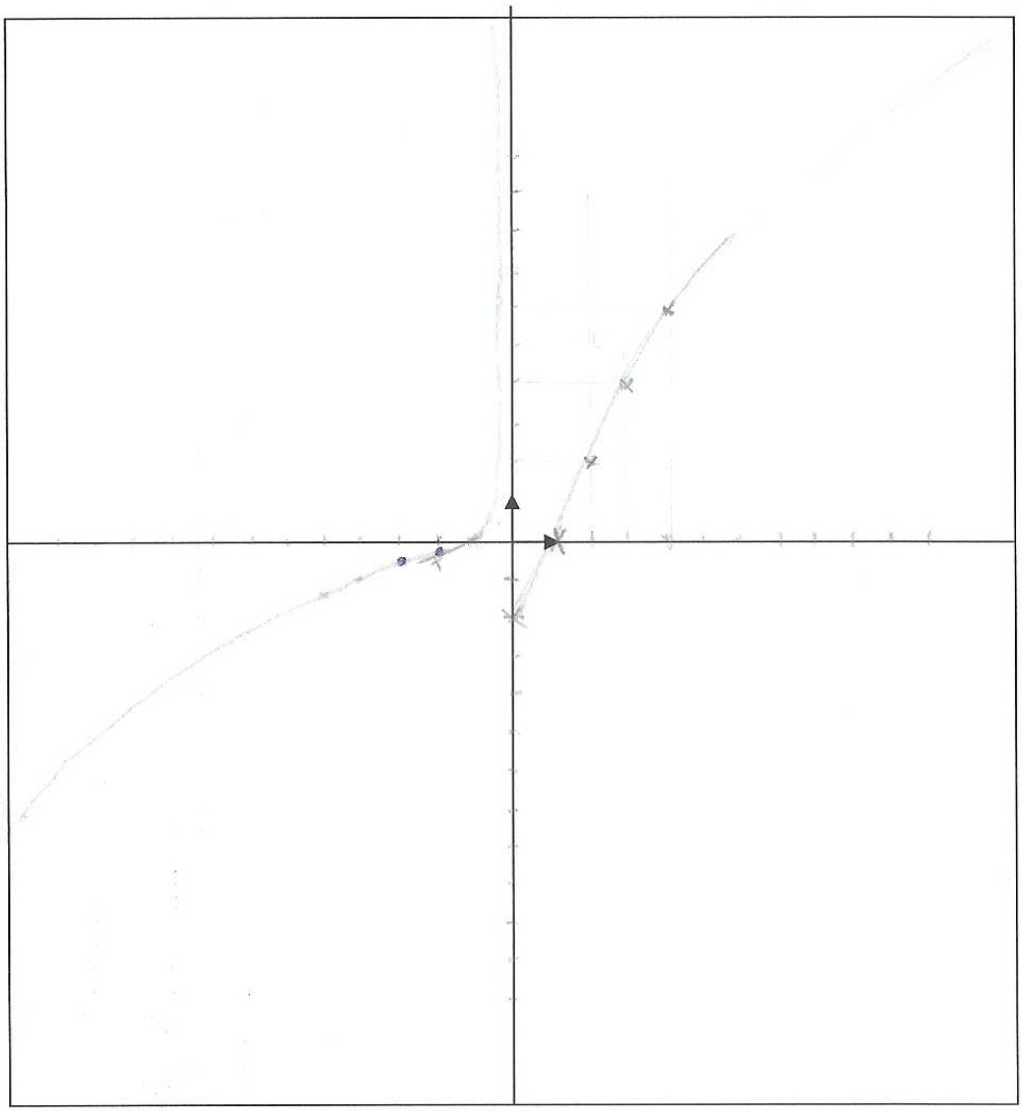
Exercice N°2 :

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

$$(S) : \begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$$

Réponse :

Résolution graphique



Remarquons que le type de techniques mixtes $t_{M-a\lg-grph}$, que nous avons détaillé dans l'analyse *a priori*, n'était présent dans aucune copies des élèves et des étudiants.

Les résultats obtenus à partir des réponses des élèves et des étudiants sont détaillés et représentés, respectivement, dans le tableau suivant.

	Effectif	Pourcentage
$t_{1-2-sé-grph-exacte}$	10	7,0
$t_{1-2-sé-grph-incomplète}$	24	16,8
$t_{1-2-sé-grph-erronée}$	31	21,7
$t_{4-2-sy-a\lg-incomplète}$	2	1,4
$t_{4-2-sy-a\lg-erronée}$	1	0,7
Autre type de réponse	8	5,6
Non réponse	67	46,8
Total	143	100,0

Tableau 2.3.1

Figure : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution graphique du système $(S)\begin{cases}-x+3y-1<0\\2x-y-2\geq 0\end{cases}$ **de l'exercice N°2**

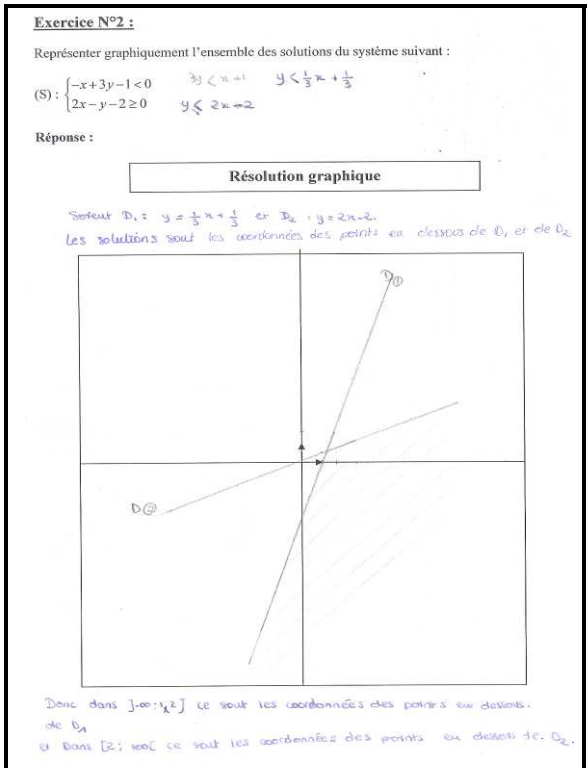
Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre que, relativement à cet exercice, les trois réponses d'élèves s'appuyant sur des procédures syntaxiques ne contenaient aucune réponse exacte. Ce qui confirme notre analyse *a priori* prévoyant que l'outil syntaxique du registre algébrique n'est pas disponible chez les élèves et les étudiants qui constituent notre population, puisque en effet ce genre d'exercice exige des connaissances sur l'étude des fonctions de deux variables réelles. En revanche, nous avons enregistré des réponses sémantiques correctes qui confirment également notre analyse *a priori* prévoyant que l'outil sémantique du registre graphique peut permettre d'aboutir au résultat correct de cet exercice.

Le tableau ci-dessous montre ces analyses.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	0	2	1	3
Sémantique	10	24	31	65

Tableau 2.3.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



Exercice N°2 :

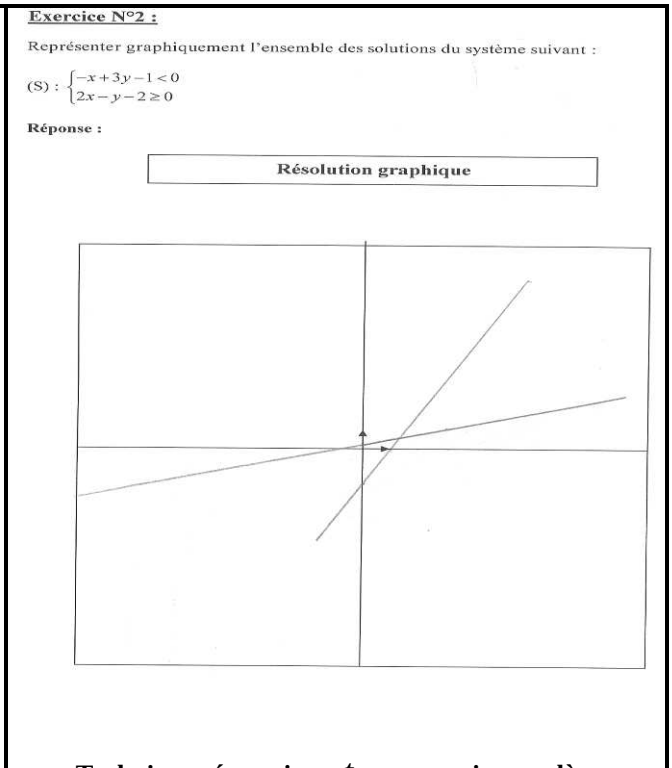
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

(S) : $\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$

Réponse :

Résolution graphique

Technique sémantique $t_{1-2-sé-grph}$ exacte



Exercice N°2 :

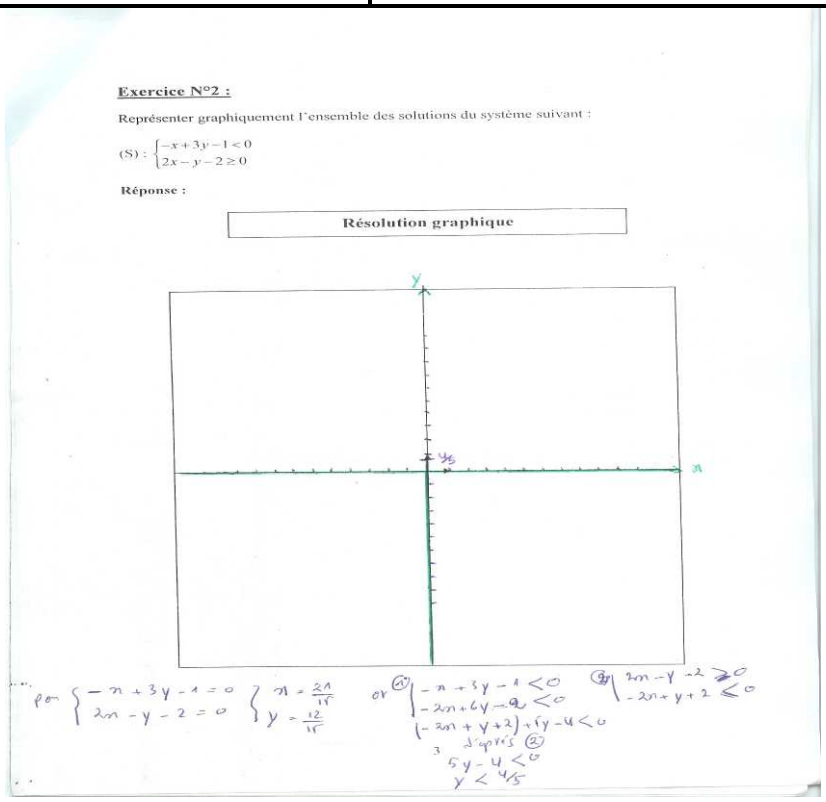
Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

(S) : $\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$

Réponse :

Résolution graphique

Technique sémantique $t_{1-2-sé-grph}$ incomplète



Exercice N°2 :

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions du système suivant :

(S) : $\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$

Réponse :

Résolution graphique

Technique syntaxique $t_{4-2-sy-a\lg}$ erronée

Le regroupement des différents types de réponses, sans tenir compte ni de leur exactitude, ni de leur complétude et ni de leur fausseté, en s'appuyant sur le croisement des catégories logiques de sémantique et / ou syntaxe avec les différents types de registres, nous montre que nous obtenons 3 réponses du type syntaxique du registre algébrique, soit environ 2,1% des élèves, 66 réponses, soit 19,6% des élèves qui mobilisent des techniques mixtes du registre algébrique.

Les résultats obtenus à partir des réponses des élèves et des étudiants sont représentés, respectivement, dans le tableau et l'histogramme suivants.

	Effectif	Pourcentage
t_{sy-alg}	3	2,1
$t_{sé-grph}$	65	45,5
Autre type de réponse	8	5,6
Non réponse	67	46,8
Total	143	100,0

Tableau 2.3.3

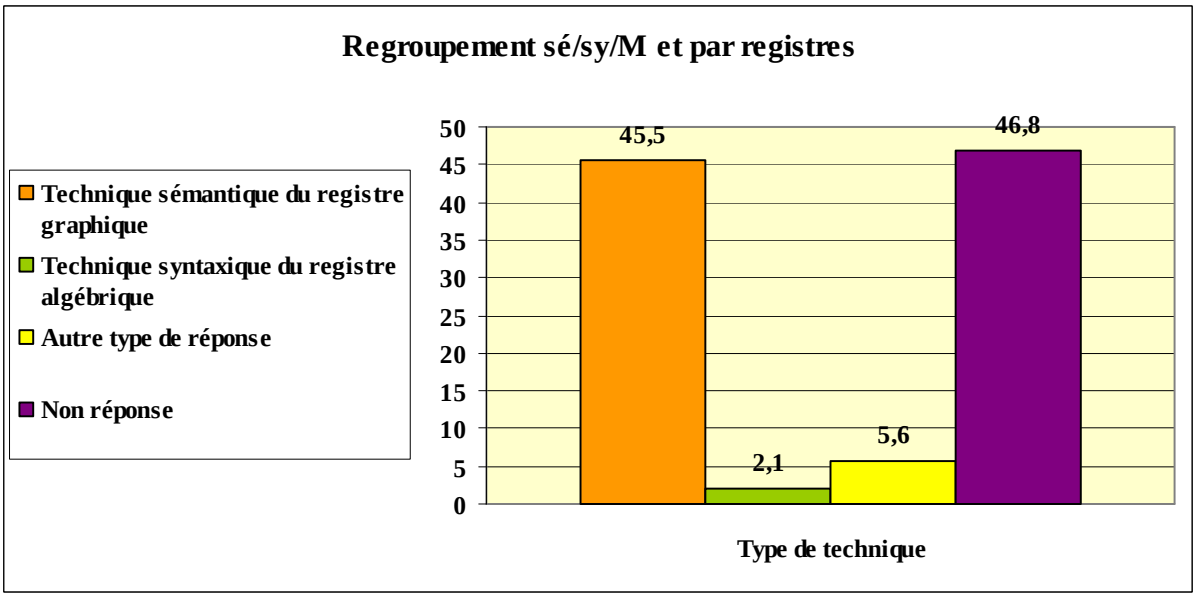


Figure II. 4 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution du système

$$(S)\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$$ **de l'exercice N°2**

Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysée, ci-dessus,

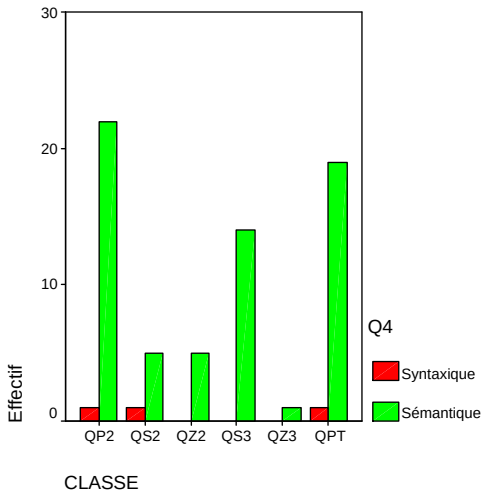
qui croise la catégorisation logique et celle des différents registres. Ce qui est confirmé par le tableau ci-dessous.

	Algébrique	Graphique
Syntaxique	03	0
Sémantique	0	66

Tableau 2.3.4

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative. En effet, la valeur de khi-deux est de $3{,}119$ avec une signification asymptotique de $68{,}2\% >> 5\%$. Ceci est affirmé par l'histogramme ci-dessous qui montre qu'il n'y a pas une différence entre les procédures, en ce sens que la majorité des élèves des différentes classes qui ont répondus à cette question ont opté pour des techniques sémantique de résolution et ce même si le nombre de réponses d'élèves est réduit à 69, soit environ $48{,}3\%$ de la population.

D'un autre côté, notre lecture de l'histogramme ci-dessous montre que les procédures du type syntaxiques étaient présentes chez 1 élève de chaque classe dont deux étaient des classes de deuxième année secondaire QP2 et QS2 et une autre chez ceux des classes préparatoires QPT. Ceci corrobore notre analyse *a priori* dans laquelle nous avons expliqué que l'outil syntaxique de résolution n'est pas disponible chez ces élèves et étudiants de ce niveau.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q4

Conclusions relatives aux réponses des élèves et des étudiants concernant l'exercice n°2

L'analyse des différentes réponses des élèves et des étudiants au sujet du deuxième exercice concernant la résolution graphique du système d'inéquation $(S)\begin{cases} -x+3y-1<0 \\ 2x-y-2\geq 0 \end{cases}$ met en évidence les résultats suivants :

Comme nous l'avons remarqué dans l'analyse *a priori*, cet exercice dépasse largement les connaissances de certains élèves, puisqu'il exige un niveau de connaissances mobilisables au sens de Robert, qui consiste à savoir résoudre ce qui est proposé sans aucune indication et qui est en étroite liaison avec une familiarité importante et la connaissance de situations de références variées, que l'élève ou l'étudiant sait qu'il connaît.

Ceci explique le fait que près de la moitié de la population choisie, où 67 sur 143 n'ont pas donné de réponses.

L'analyse des 76 copies restantes montre que les techniques prévues, dans l'analyse *a priori*, n'ont pas été totalement exploitées par les élèves puisque, nous n'avons retrouvé que des procédures exploitant des techniques sémantique du registre graphique. Celles notées par $t_{1-2-sé-grph}$, représente le dues $45{,}5\%$, dont 10 étaient valides 24 étaient incomplètes et 31 étaient incorrectes. Celles notées par $t_{4-2-sy-alg}$ représente le dues $2{,}1\%$ dont 2 étaient incomplètes et 1 était erronée.

Le pourcentage très élevé, des non réponses, peut s'expliquer par un phénomène de contrat didactique où les élèves ne répondent pas à un type de question qui n'a pas été traité en classe d'une part, et par une difficulté liée à l'articulation entre le registre algébrique auquel est attaché le système d'inéquation et le registre graphique auquel est liée la tâche de résolution, laquelle ne peut clairement être traitée qu'avec la seule technique du registre graphique, que nous avons décrit dans l'analyse *a priori* et qui permet de surmonter la difficulté de la résolution, puisque la technique algébrique n'est pas disponible chez les élèves, d'autre part.

Enfin, nous pouvons dire que parmi les $45{,}5\%$ des élèves qui ont exploité des procédures sémantiques, pour traiter cet exercice, nous avons 10 élèves, qui représentent 7% de la population totale, qui sont supposés avoir un niveau de connaissances disponibles au sens de Robert. En effet, ils ont réussi à changer de registre et interpréter sémantiquement un problème du registre algébrique dont la résolution syntaxique est impossible à ce niveau d'élèves et d'étudiants.

II. 2. 4. Analyse de l'exercice N°3

Dans cet exercice on propose le contenu suivant

1) Soit $\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta = \{M(x,y); 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

b) Résoudre dans IR^2 le système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$.

2) Déterminer le nombre des solutions du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$; où $m \in IR$.

Dans ce qui suit, nous allons analyser les copies des élèves et des étudiants question par question, en séparant pour 1) a la détermination de ζ et celle de Δ.

II. 2. 4. 1. Analyse des réponses à la question 1) a) relative à la détermination de l'ensemble ζ

Au niveau de la détermination de l'ensemble ζ nous avons enregistré les deux types de techniques que nous avons décrit dans l'analyse *a priori*.

Rappelons que nous avons d'une part un type de technique mixte du registre algébrique, notée $t_{1-3-1a-M-a\lg}$ qui consiste à factoriser l'expression $x^2+4x+y^2=0$ sur la forme $(x+2)^2+(y-3)^2=2^2$ qui est une opération du type sémantique et qui est suivie par une procédure du type syntaxique consistant à reconnaître la forme générale de l'équation d'un cercle. D'autre part, la technique syntaxique du registre algébrique, notée $t_{2-3-1a-sy-a\lg}$ consiste à mettre en relation l'équation de départ $x^2+4x+y^2=0$ avec celle de la forme générale $x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0$ pour conclure à partir du théorème du cours à partir duquel les élèves concluent directement que ζ est un cercle de centre $I(-2,3)$ et de rayon $r=2$.

L'examen des réponses des élèves et des étudiants à cette question qui ont exploité des techniques mixtes du registre algébrique étaient au nombre de 90 soit, environ 63% de la population totale, dont 65 réponses étaient exactes, 13 réponses étaient incomplètes et 12 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 5.1. p. 91-94).

24 réponses, soit environ 16,8% des techniques employées étaient du type syntaxiques du registre algébrique dont 14 étaient exactes, 4 étaient incomplète et 6 étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 5.1. p. 95-97).

Les autres types de réponses sont au nombre de 8 soit, environ 5,5% (cf. Annexe. B-I. 4. 5.1. p. 98) et le nombre des non réponses est 21 soit, environ 14,7%.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination de l'ensemble $\zeta = \{M(x,y); x^2 + 4x + y^2 - 6y + 9 = 0\}$ sont représentés dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{M-alg-exacte}$	65	45,5
$t_{M-alg-incomplète}$	13	9,1
$t_{M-alg-erronée}$	12	8,4
$t_{sy-alg-exacte}$	14	9,8
$t_{sy-alg-incomplète}$	4	2,8
$t_{sy-alg-erronée}$	6	4,2
Autre type de réponse	8	5,5
Non réponse	21	14,7
Total	143	100,0

Tableau 2.4.1.1

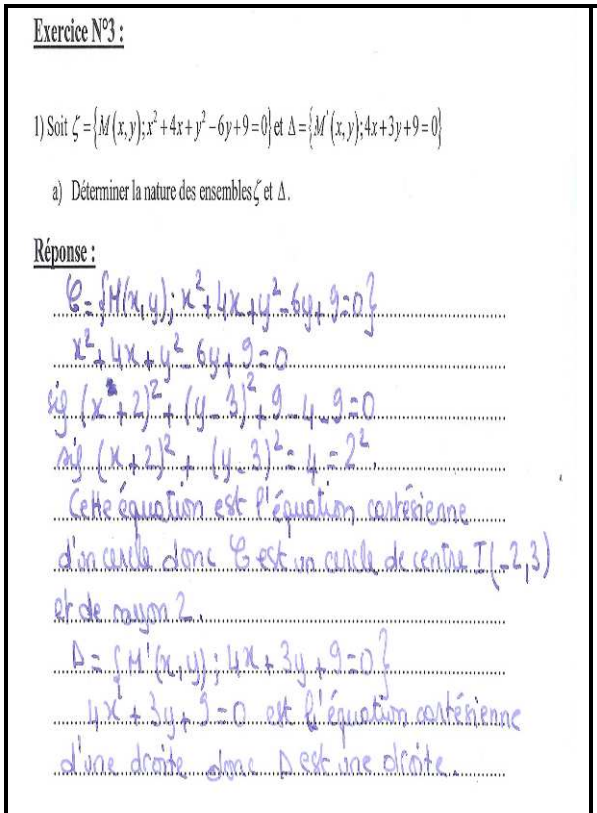
Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre que, relativement à cet exercice, la réussite des élèves et des étudiants est assez bonne, puisque 79 réponses parmi 114 réponses étaient exactes, la proportion étant meilleure parmi ceux utilisant une technique mixte (environ trois quart contre un peu plus de la moitié).

Le tableau ci-dessous montre la répartition des réponses :

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	14	4	6	26
Mixte	65	13	12	90

Tableau 2.4.1.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



Exercice N°3 :

1) Soit $\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

Réponse :

$\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$

$x^2+4x+y^2-6y+9=0$

où $(x+2)^2+(y-3)^2+9-4-9=0$

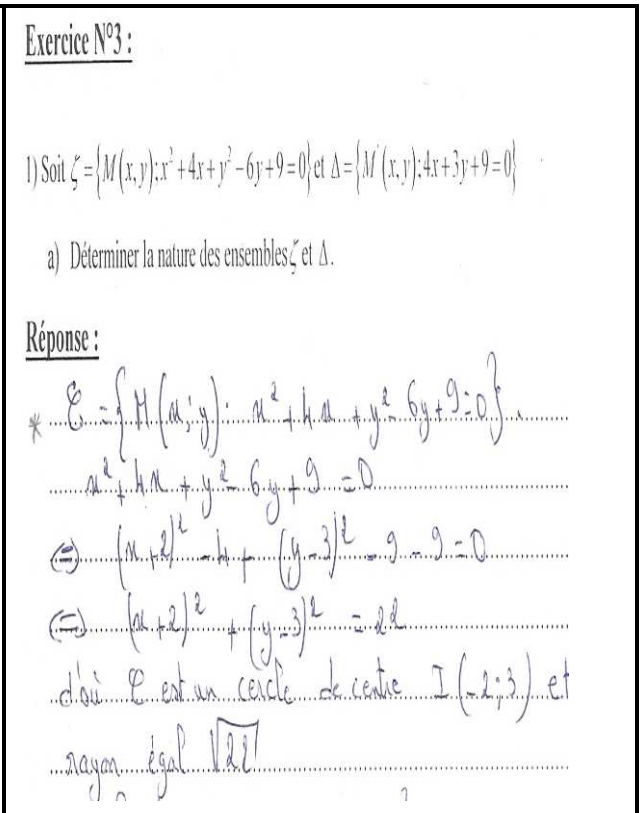
où $(x+2)^2+(y-3)^2=4=2^2$

Cette équation est l'équation cartésienne d'un cercle donc ζ est un cercle de centre $I(-2,3)$ et de rayon 2.

$\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

$4x+3y+9=0$ est l'équation cartésienne d'une droite donc Δ est une droite.

Technique mixte $t_{1-3-1a-M-a\lg}$ exacte



Exercice N°3 :

1) Soit $\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

Réponse :

* $\mathcal{C} = \{M(x;y) : x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$

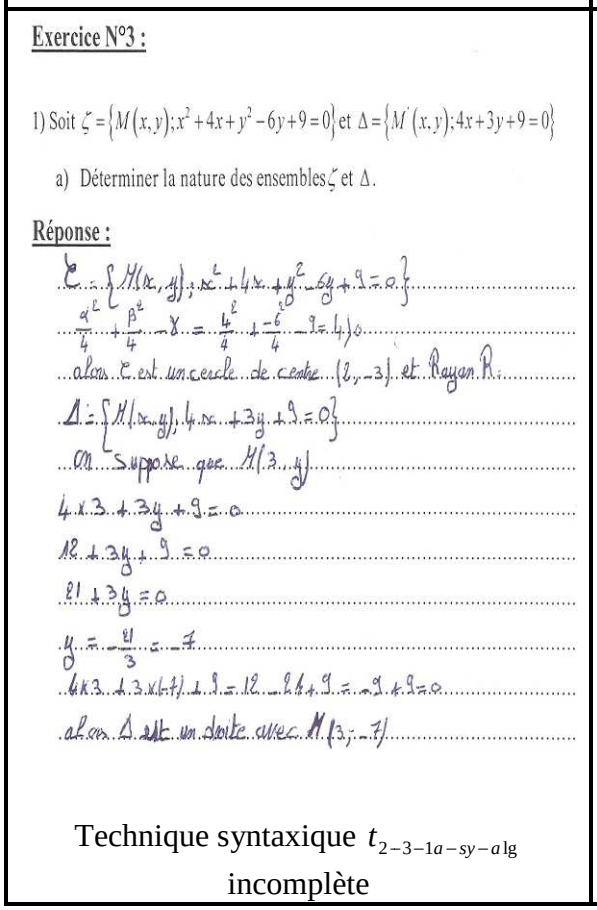
$x^2+4x+y^2-6y+9=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-4+(y-3)^2-9+9=0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2=2^2$

d'où $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I(-2;3)$ et rayon égal $\sqrt{2^2}$

Technique mixte $t_{1-3-1a-M-a\lg}$ erronée



Exercice N°3 :

1) Soit $\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

Réponse :

$\mathcal{C} = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$

$\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}-\gamma = \frac{4^2}{4}+\frac{-6^2}{4}-9=4>0$

alors $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $(2,-3)$ et Rayon R.

$\Delta = \{M(x,y); 4x+3y+9=0\}$

On suppose que $M(3,y)$

$4\times3+3y+9=0$

$12+3y+9=0$

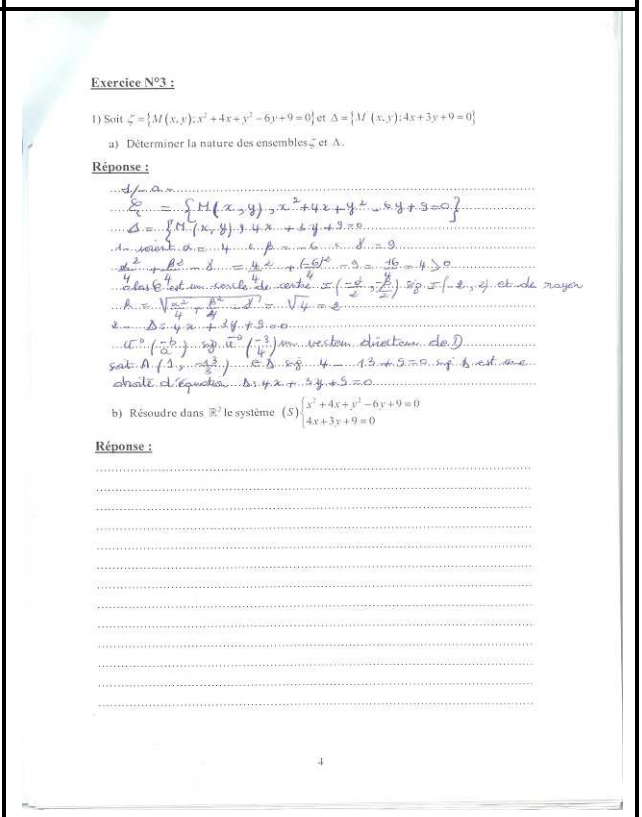
$21+3y=0$

$y=-\frac{21}{3}=-7$

$4\times3+3\times(-7)+9=12-21+9=-9+9=0$

alors Δ est un droite avec $M(3;-7)$

Technique syntaxique $t_{2-3-1a-sy-a\lg}$ incomplète



Exercice N°3 :

1) Soit $\zeta = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$ et $\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

a) Déterminer la nature des ensembles ζ et Δ.

Réponse :

$\mathcal{C} = \{M(x,y); x^2+4x+y^2-6y+9=0\}$

$\Delta = \{M'(x,y); 4x+3y+9=0\}$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$

Réponse :

Technique syntaxique $t_{2-3-1a-sy-a\lg}$ erronée

Le regroupement des différents types de techniques en deux catégories principales qui sont les techniques syntaxiques et mixtes du même registre algébrique montre que 24 réponses, soit environ 16,8% étaient du type syntaxique du registre algébrique et 90 réponses, soit environ 63% étaient du type mixte du registre algébrique.

Les résultats sont donnés dans le tableau et l'histogramme ci-dessus.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sy-a\lg}$	24	16,8
$t_{M-a\lg}$	90	63
Autre type de réponse	8	5,5
Non réponse	21	14,7
Total	143	100,0

Tableau 2.4.1.3

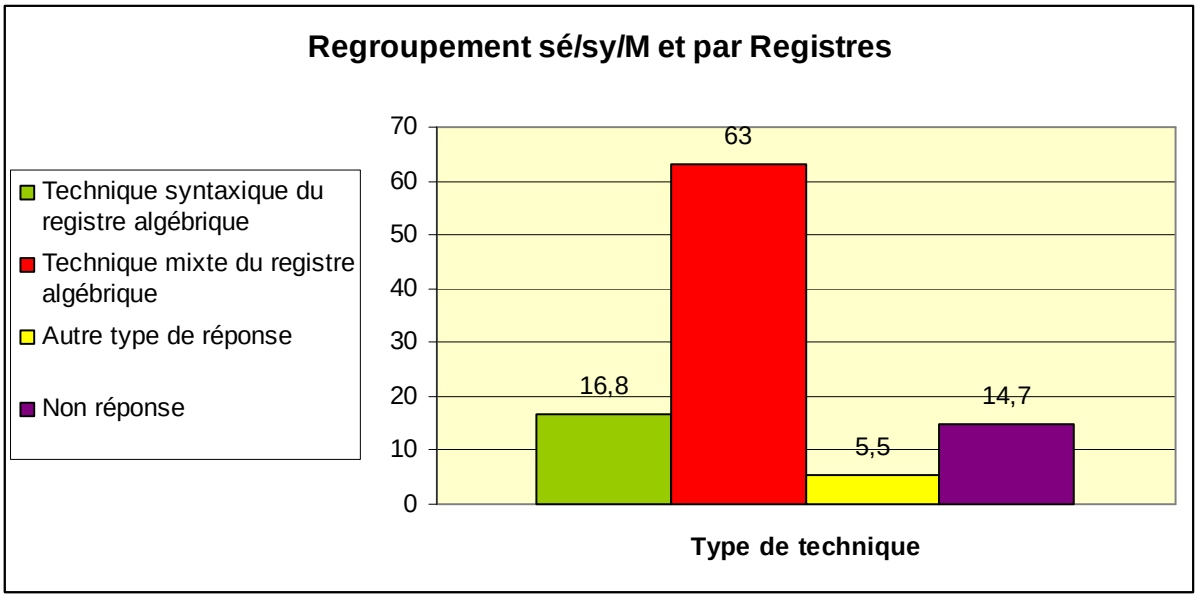
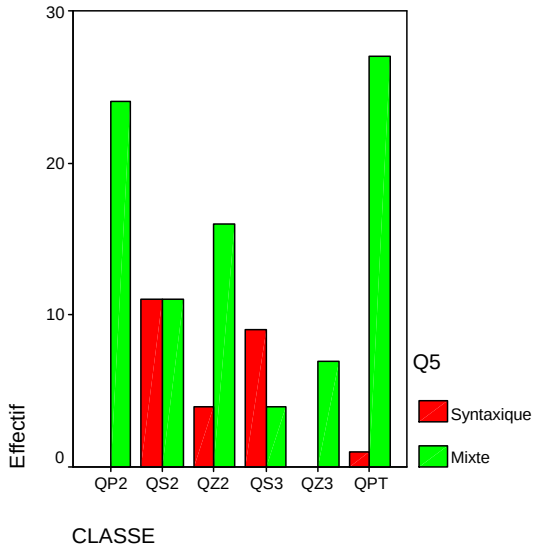


Figure II. 5 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination de la nature de l'ensemble ζ de l'exercice N°3

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative. En effet, la valeur de khi-deux est de 41,377 avec une signification asymptotique de $0,0\% << 5\%$ qui affirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes est très significative.

L'histogramme ci-dessous qui montre clairement cette différence entre les procédures des différents élèves et étudiants des différentes classes. En effet, les élèves et les étudiants de toutes les classes ont exploités les procédures de résolution mixtes ; par contre les résolutions du type syntaxique n'étaient présentes que chez ceux des classes QS2, QZ2, QS3 et QPT.

En plus, nous remarquons que les élèves de la classe de deuxième année secondaire QS2 ont mobilisé d'une manière équitable les deux techniques syntaxiques et mixtes de résolution. Par contre, nous n'avons enregistré qu'une seule réponse d'un étudiant de la classe QPT qui avait exploité une technique syntaxique d'une part et une dominance des techniques syntaxiques de résolution, par rapport à celles des techniques mixtes, pour les élèves de la classe de troisième année secondaire QS3.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q5

II. 2. 4. 2. Analyse des réponses à la question 1) a) relative à la détermination de l'ensemble Δ

Dans l'analyse *a priori* de la question 1) a) qui consiste à déterminer la nature de l'ensemble Δ, nous avons distingué quatre méthodes s'appuyant sur des techniques de résolution multiples. Ces méthodes s'appuient essentiellement sur un type de technique syntaxique du registre algébrique, une technique mixte du registre algébrique et numérico-graphique et deux types de techniques mixtes du registre algébrique.

La techniques syntaxique du registre algébrique, notée $t_{5'-3-1a-sy-a\lg}$ consiste à ramener l'équation $4x+3y+9=0$ à la forme de l'équation réduite $y=-\frac{4}{3}x-3$ et de conclure ce que

Δ représente une droite passant par le point dont l'ordonnée est à l'origine qui est supposée une opération purement syntaxique. D'autre part, nous avons la technique

La technique du type mixte du registre algébrique et numérico-graphique $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$, consiste à reconnaitre, à partir de la forme, que l'équation $4x+3y+9=0$ est celle d'une droite de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}=\vec{v}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées, par exemple $(0,-3)$ qui s'obtient par une opération de substitution de la valeur 0 associée à x pour déterminer la valeur de y correspondante à savoir -3.

Les techniques mixtes du registre algébrique et numérique sont au nombre de deux. La première, que nous avons notée $t_{5-3-1a-M_1-a\lg-num}$, consiste à déterminer la pente de la droite en s'appuyant sur les transformations algébriques qui ramènent à la forme réduite $y=-\frac{4}{3}x-3$ d'une part et les coordonnées de deux points par substitution de deux valeurs à l'une des variables pour déduire l'autre. La technique de ce même type, notée $t_{6-3-1a-M_2-a\lg-num}$, consiste à reconnaitre à partir de l'équation $4x+3y+9=0$ que Δ représente une droite et de déterminer les coordonnées de deux points appartenant à Δ par une substitution de deux valeurs à la variable x ou y.

Remarquons que nous avons choisi de classer les réponses des élèves dans lesquelles ils énoncent directement que « l'ensemble Δ représente une droite » dans la catégorie des techniques du type mixte du registre algébrique et numérico-graphique incomplète. D'autre part, les opérations qui consistent à exploiter la forme réduite de l'équation $y=-\frac{4}{3}x-3$ sans aucune précision sont supposées du type syntaxique du registre algébrique qui sont incomplètes.

L'analyse des différentes copies nous a donné 37 réponses, soit environ $25{,}8\%$ de procédures de types syntaxiques du registre algébrique du type $t_{5'-3-1a-sy-a\lg}$ dont 3 réponses étaient exactes et 34 réponses étaient incomplètes (cf. Annexe. B-I. 4. 5.2. p. 99-100).

Les techniques mixtes des registres algébriques numériques et graphiques, notées $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$ sont de 63, soit environ $44{,}1\%$ de la totalité des copies dont 12 réponses étaient exactes et 51 réponses étaient incomplètes (cf. Annexe. B-I. 4. 5.2. p.101-103).

Enfin, nous avons enregistré 2 réponses exactes, soit environ $1{,}4\%$ de la totalité des copies qui mobilisent le type de technique mixte du registre algébrique et numérique

$t_{5-3-1a-M_1-a\lg-num}$ (cf. Annexe. B-I.4.5.2. p. 104). Par contre, nous n'avons enregistré aucune réponse s'appuyant sur la technique de substitution $t_{6-3-1a-M_2-a\lg-num}$.

Les autres types de réponses étaient de 5, soit environ $3{,}5\%$ (cf. Annexe. B-I. 4. 5.2. p. 105) et les non réponses sont de 36, soit environ $25{,}2\%$ de la totalité des copies.

	Effectif	Pourcentage
$t_{5'-3-1a-sy-a\lg-exacte}$	3	2,1
$t_{5'-3-1a-sy-a\lg-incomplète}$	34	23,7
$t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph-exacte}$	12	8,4
$t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph-incomplète}$	51	35,7
$t_{M-a\lg-num-exacte}$	2	1,4
Autre type de réponse	5	3,5
Non réponse	36	25,2
Total	143	100,0

Tableau 2.4.2.1

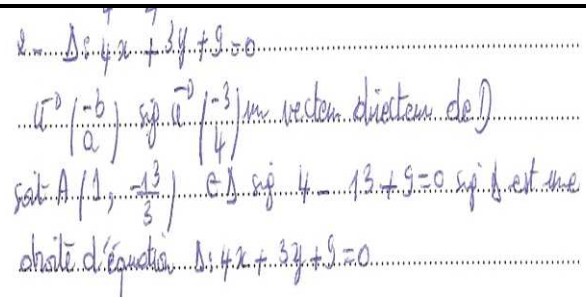
Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre qu'un nombre assez élevé des réponses étaient incomplètes, que ce soit parmi les réponses de type syntaxique, ou de type mixte ; les élèves reconnaissent par l'équation proposée que c'est une droite mais la caractérisation détaillée dans l'analyse *a priori* manque. En revanche, nous n'avons enregistré aucune réponse erronée.

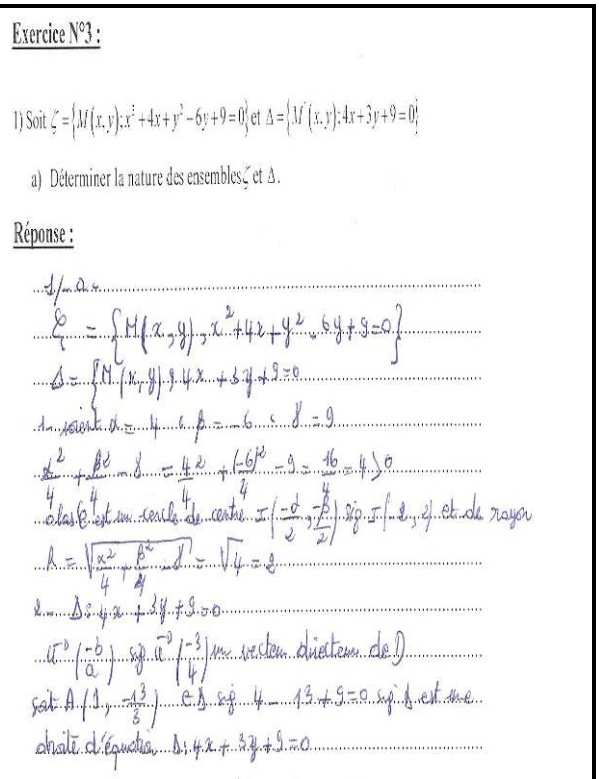
Le tableau ci-dessous montre les analyses que nous venons de faire.

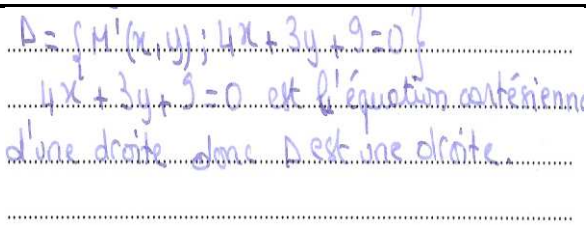
	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	3	34	0	37
Mixte	14	51	0	65

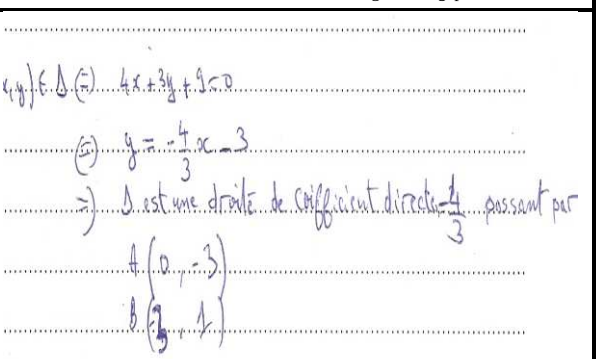
Tableau 2.4.2.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.

<table>
<tr>
<td>


Technique mixte $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$ exacte
</td>
<td>


Technique mixte $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$ exacte
</td>
</tr>
<tr>
<td>


Technique mixte $t_{3'-3-1a-M-a\lg-num-grph}$ incomplète
</td>
<td>


Technique mixte $t_{5-3-1a-M_1-a\lg-num}$ exacte
</td>
</tr>
</table>

Le regroupement des différents types de techniques en trois catégories principales montre que 37 réponses, soit environ $25{,}8\%$ des techniques étaient syntaxiques du registre algébrique, 63 réponses, soit environ $44{,}1\%$ des techniques étaient mixtes des registres algébriques numériques et graphique et 2 réponses, soit environ $1{,}4\%$ qui sont du type mixte des registre algébriques et numériques.

Les résultats sont donnés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sy-a\lg}$	37	25,8
$t_{M-a\lg-num-grph}$	63	44,1
$t_{M-a\lg-num}$	2	1,4
Autre type de réponse	5	3,5
Non réponse	36	25,2
Total	143	100,0

Tableau 2.4.2.3

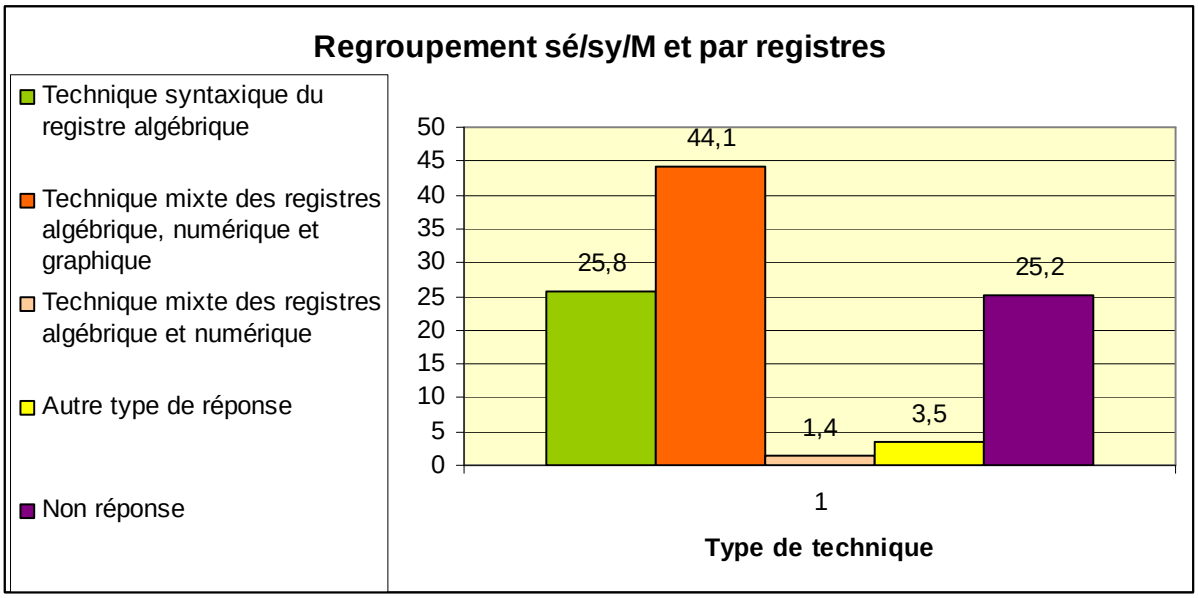


Figure II. 6 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination de la nature de l'ensemble Δ de l'exercice N°3

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / ou syntaxe dans les résolutions montre que les techniques syntaxiques sont présentes dans 37 copies, soit environ $25{,}8\%$ de la totalité des copies et que les techniques mixtes sont présentes dans 65 copies, soit environ $45{,}5\%$ de la totalité des copies.

Les résultats sont représentés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
Syntaxique	37	25,8
Mixte	65	45,5
Autre type de réponse	5	3,5
Non réponse	36	25,2
Total	143	100,0

Tableau 2.4.2.4

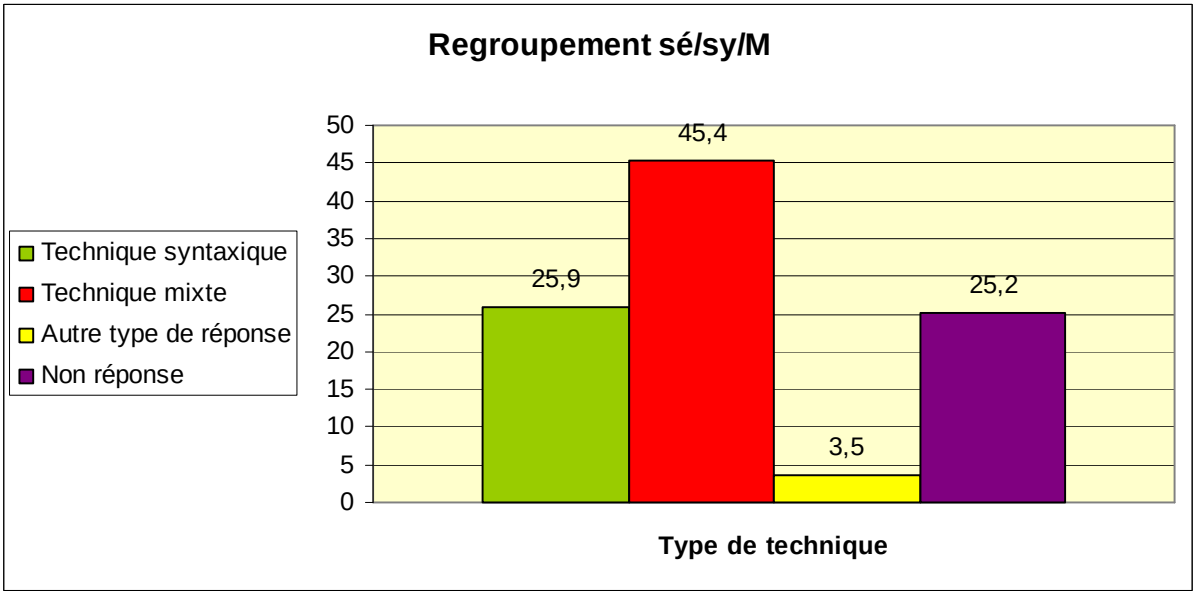


Figure II. 7 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination de l'ensemble Δ de l'exercice N°3 enrichies par la catégorisation sémantique et / ou syntaxe

Ainsi, si nous croisons la mobilisation des techniques syntaxiques et mixtes avec les différents registres algébriques, numériques et graphiques, nous remarquons que la mobilisation des techniques mixtes est assurée en articulant les deux registres numérique et graphiqued'une part, et domine celle des techniques syntaxiques du registre algébrique, d'autre part.

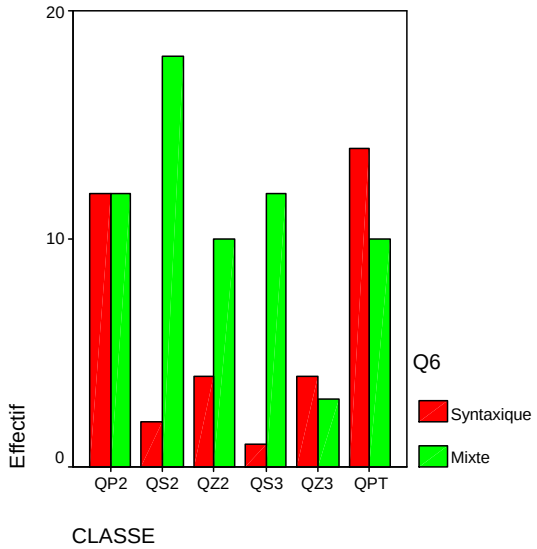
Le tableau ci-dessous illustre ces commentaires.

	Algébrique	Numérique	Graphique
Syntaxique	37	0	0
Mixte	0	2	63

Tableau 2.4.2.5

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du

niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative. En effet, la valeur de khi-deux est de $19{,}253$ et la signification asymptotique est de $0{,}2\% << 5\%$ qui affirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes est très significative. En plus, l'histogramme ci-dessous illustre que les procédures syntaxiques et mixtes sont équitablement partagées dans les réponses des élèves de la classe pilote QP2. Par contre, les procédures mixtes dominent celles des syntaxiques dans les réponses des élèves des classes QS2, QZ2 et QS3. En revanche, les techniques syntaxiques dominent chez les élèves et les étudiants des deux classes QZ3 et QPT.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q6

II. 2. 4. 3. Analyse des réponses à la question 1) b) relative à la résolution du système d'équation $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$.

Rappelons que dans l'analyse *a priori* de la question 1) b) qui consiste à résoudre le système d'équations $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$, nous avons distingué quatre méthodes de résolution s'appuyant sur des techniques de résolution multiples. Ces méthodes s'appuient essentiellement sur trois types de techniques. Le premier est celui d'un type de technique sémantique du registre graphique, notée $t_{7-3-1b-sé-grph}$, qui consiste en une lecture graphique des coordonnées du point de tangence du cercle ζ et de la droite Δ. Le deuxième type est celui d'une technique syntaxique du registre algébrique, notée $t_{8-3-1b-sy-a\lg}$, qui consiste à résoudre algébriquement et d'une manière syntaxique le système d'équation pour aboutir à la

solution représentée par le couple $\left(-\frac{18}{5},\frac{9}{5}\right)$. Le troisième type de technique est mixte et s'appuie sur deux différentes procédures relatives aux techniques notées respectivement $t_{9-3-1b-M-a\lg-grph}$ et $t_{10-3-1b-M-a\lg-grph}$ où la première s'appuie essentiellement sur une représentation graphique de ζ et Δ et une reprise des calculs algébriques et dont la deuxième s'appuie sur une représentation graphique suivie par un calcul de la distance séparant le centre du cercle ζ à la droite Δ qui permet de conclure que la distance est égale à la mesure du rayon de ζ et par la suite Δ est tangent au cercle ζ.

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 6 réponses, soit environ $4{,}2\%$ de procédures de type sémantique du registre graphique, notée $t_{7-3-1b-sé-grph}$, dont la moitié des réponses étaient incomplètes et l'autre moitié des réponses sont erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 6. p. 106-108).

Le nombre de réponses des élèves mobilisant des procédures qui s'appuient sur des techniques du type syntaxique du registre algébrique, notée $t_{8-3-1b-sy-a\lg}$, est de 99, soit environ $69{,}2\%$ de la totalité des copies des élèves et des étudiants dont 12 réponses étaient exactes et 50 réponses étaient incomplètes et 37 réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 6. p. 109-112).

Concernant les deux types de procédures s'appuyant sur des techniques mixtes du registre algébrico-graphique, du type $t_{9-3-1b-M-a\lg-grph}$, nous avons enregistré 4 réponses, soit environ $2{,}8\%$ de la totalité des copies dont une réponse était incomplète et les 3 autres erronées (cf. Annexe. B-I.4.6. p 113). D'autre part, le deuxième type de technique mixte du registre algébrico-graphique, notée $t_{10-3-1b-M-a\lg-grph}$, était présent dans les copies de 2 élèves et sont incomplètes (cf. Annexe. B-I. 4. 6. p. 114).

Enfin, nous n'avons enregistré qu'une seule réponse d'un autre type (cf. Annexe. B-I. 4. 6. p. 115-116) et les non réponses sont au nombre de 36, soit $25{,}2\%$ de la totalité des copies.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{7-2-1b-sé-grph-incomplète}$	3	2,1
$t_{7-2-1b-sé-grph-erronée}$	3	2,1
$t_{8-2-1b-sy-a\lg-exacte}$	12	8,4
$t_{8-2-1b-sy-a\lg-incomplète}$	50	35,0
$t_{8-2-1b-sy-a\lg-erronée}$	37	25,8
$t_{9-2-1b-M-a\lg-grph-incomplète}$	1	0,7
$t_{9-2-1b-M-a\lg-grph-erronée}$	3	2,1
$t_{10-2-1b-M-a\lg-grph-incomplète}$	2	1,4
Autre type de réponse	1	0,7
Non réponse	31	21,7
Total	143	100,0

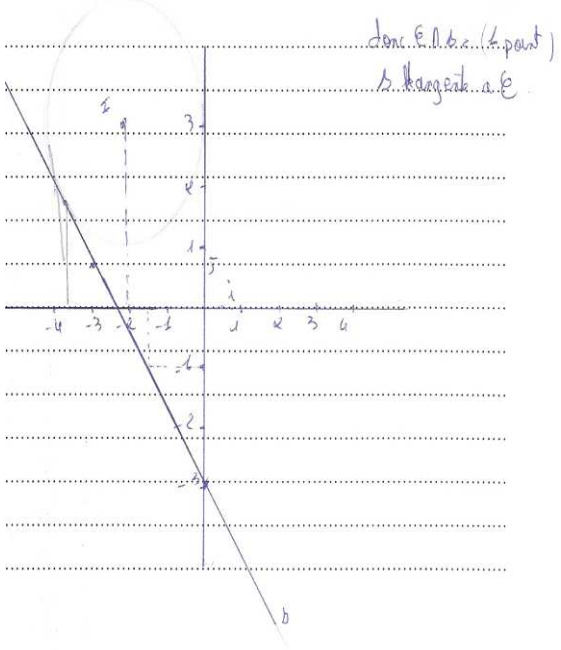
Tableau 2.4.3.1

Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre que les 12 réponses exactes étaient parmi 99 réponses des élèves et des étudiants qui s'appuyaient sur des techniques syntaxiques. Par contre, les rares réponses des élèves et des étudiants s'appuyant sur des techniques mixtes et sémantiques ne contenaient aucune réponse exacte.

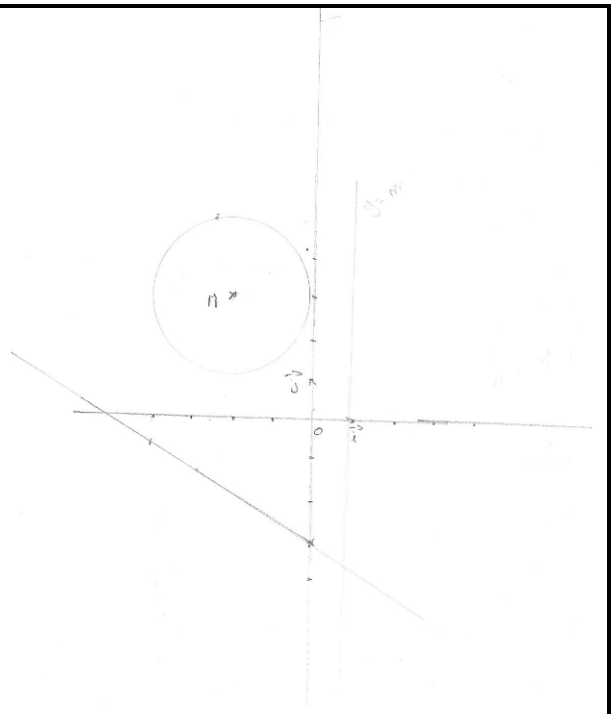
	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	12	50	37	99
Sémantique	0	3	3	6
Mixte	0	3	3	6

Tableau 2.4.3.2

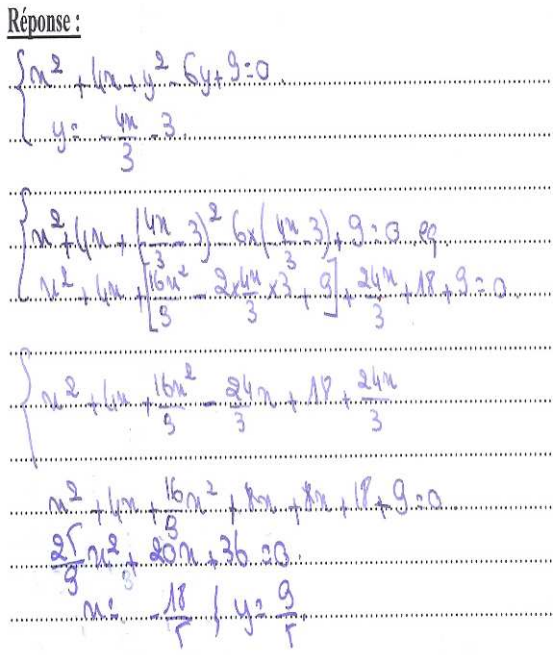
Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



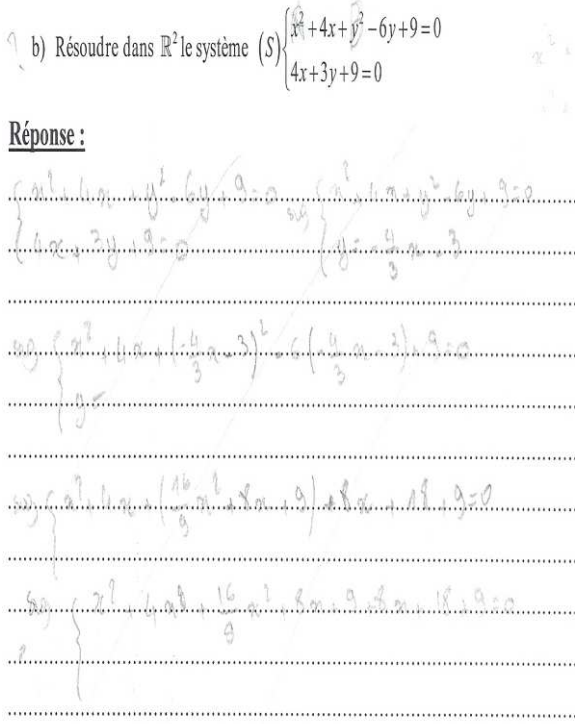
Technique sémantique $t_{7-2-1b-sé-grph}$ incomplète



Technique sémantique $t_{7-2-1b-sé-grph}$ erronée



Technique syntaxique $t_{8-2-1b-sy-a\lg}$ exacte



Technique syntaxique $t_{8-2-1b-sy-a\lg}$ incomplète

Le regroupement des différents types de techniques en trois catégories principales montre que 6 réponses, soit environ 4,2% des techniques étaient sémantiques du registre graphique, 99 réponses, soit environ 69,2% des techniques étaient du types syntaxique du registre algébrique et 6 réponses, soit environ 4,2% qui sont du type mixte des registre algébriques et graphiques.

Les résultats sont donnés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph}$	6	4,2
t_{sy-alg}	99	69,2
$t_{M-alg-grph}$	6	4,2
Autre type de réponse	1	0,7
Non réponse	31	21,7
Total	143	100,0

Tableau 2.4.3.3

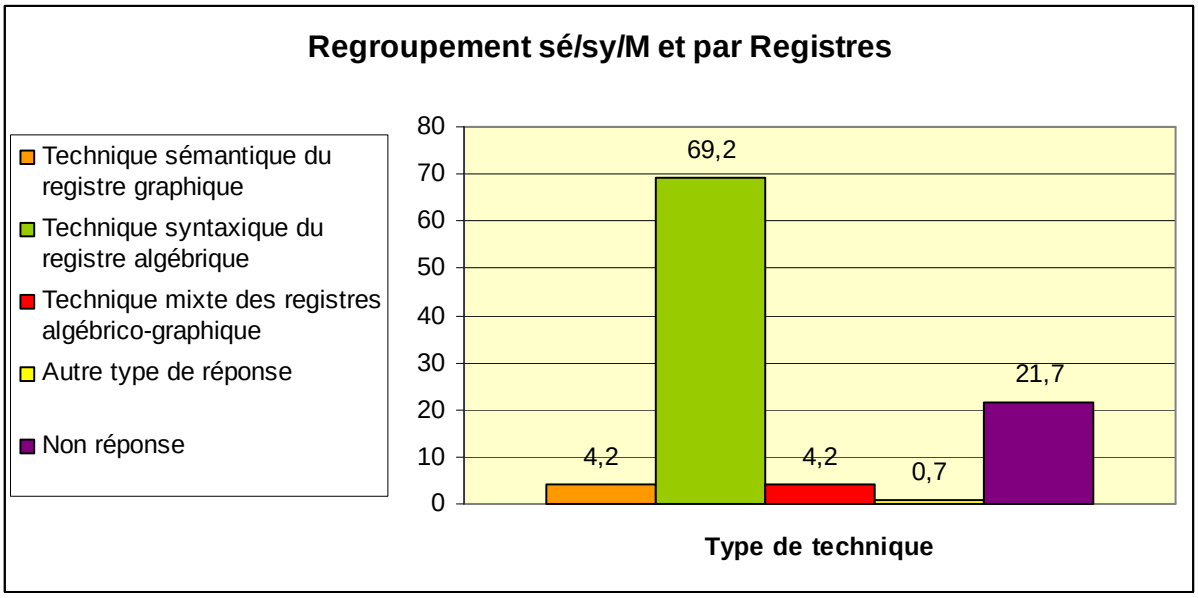


Figure II. 8 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution du système

$$(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$$ **de l'exercice N°3**

Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysé, ci-dessus, qui relie la catégorisation logique et celle des différents registres. Par contre, le croisement des

catégorisations logique en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec le registres algébriques et / ou graphique montre clairement que les techniques mixtes qui permettent de répondre à la tâche demandée contribue à l'articulation inter-registres.

Le tableau ci-dessous montre clairement ces commentaires.

	Algébrique	Graphique	Alg / Grph
Syntaxique	99	0	0
Sémantique	0	6	0
Mixte	0	0	6

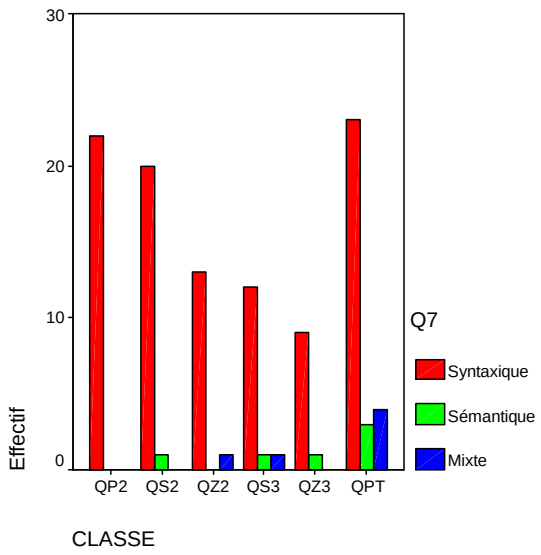
Tableau 2.4.3.4

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative dans les procédures des trois niveaux. En effet, la valeur de khi-deux est de $11{,}055$ avec une signification asymptotique de $35{,}3\% > 5\%$ qui affirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes n'est pas significative.

L'histogramme ci-dessous montre clairement que les procédures dominantes, des différents élèves et étudiants, sont du type syntaxique dont un nombre très faible, d'élèves et étudiants, ont mobilisé les autres types de techniques sémantiques et mixtes qui ne représente que $8{,}4\%$ de la population totale.

Dans l'analyse *a priori* de cette question, nous avons fait l'hypothèse que la question 1) a pouvait favoriser le recours au registre graphique autrement dit le milieu objectif de l'élève est enrichie par une question qui incite à changer de registre puisqu'elle permet déterminer les coordonnées des points d'intersection du cercle ζ et la droite Δ avec la droite, et par la suite de résoudre la tâche proposée. Or ceci n'avait fonctionné que chez 6 élèves où la majorité des élèves et des étudiants avait mobilisé les techniques syntaxiques. Ceci renforce l'hypothèse que les élèves mobilisent le point de vue syntaxique dès qu'il est disponible.

L'histogramme ci-dessous montre clairement ces analyses.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q7

II. 2. 4. 4. Analyse des réponses à la question 2 relative à la résolution du système d'équation

La tâche proposée consiste à résoudre le système d'équation $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$. Nous avons envisagé, dans l'analyse *a priori*, deux types de techniques dont l'une est du type sémantique exploitant un registre graphique, notée $t_{11-4-2-sé-grph}$, s'appuyant sur une lecture graphique qui permet de déterminer le nombre de solutions pour chaque intervalle contenant le réel m. L'autre type de technique est mixte du registre algébrique, notée $t_{12-4-2-M-alg}$, et s'appuyant sur des transformations purement algébriques suivies par un contrôle sémantique pour conclure[90].

Remarquons que nous avons classé les procédures de résolution algébriques qui ne sont pas suivies par un contrôle sémantiques dans la catégorie des réponses incomplètes, si les opérations algébriques étaient correctes et sans contrôle sémantique d'une part et dans la catégorie des réponses erronées si les transformations algébriques étaient erronées, d'autre part.

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 22 réponses, soit environ 15,4% de procédures de type sémantique du registre graphique, notée $t_{11-4-2-sé-grph}$, dont 7

[90] Les analyses didactiques et mathématiques sont détaillées dans l'analyse *a priori*.

réponses étaient exactes, 4 réponses étaient incomplètes et 11 réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 7. p. 117-1119).

Le nombre de réponses des élèves qui ont procédé par des techniques du type mixte du registre algébrique, notée $t_{12-4-2-M-a\lg}$, est de 58, soit environ $40{,}6\%$ de la totalité des copies des élèves et des étudiants dont 5 réponses étaient exactes, 35 réponses étaient incomplètes et 18 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 7. p. 120-123).

Les autres types de réponses sont au nombre de 6, soit environ $4{,}2\%$ (cf. Annexe. B-I. 4. 7. p. 124-125) et les non réponses sont 57, soit environ $39{,}9\%$ de la totalité des élèves et des étudiants.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$ sont représentés respectivement dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph-exacte}$	7	4,9
$t_{sé-grph-incomplète}$	4	2,8
$t_{sé-grph-erronée}$	11	7,7
$t_{M-a\lg-exacte}$	5	3,5
$t_{M-a\lg-incomplète}$	35	24,5
$t_{M-a\lg-erronée}$	18	12,6
Autre type de réponse	6	4,2
Non réponse	57	39,9
Total	143	100,0

Tableau 2.4.4.1

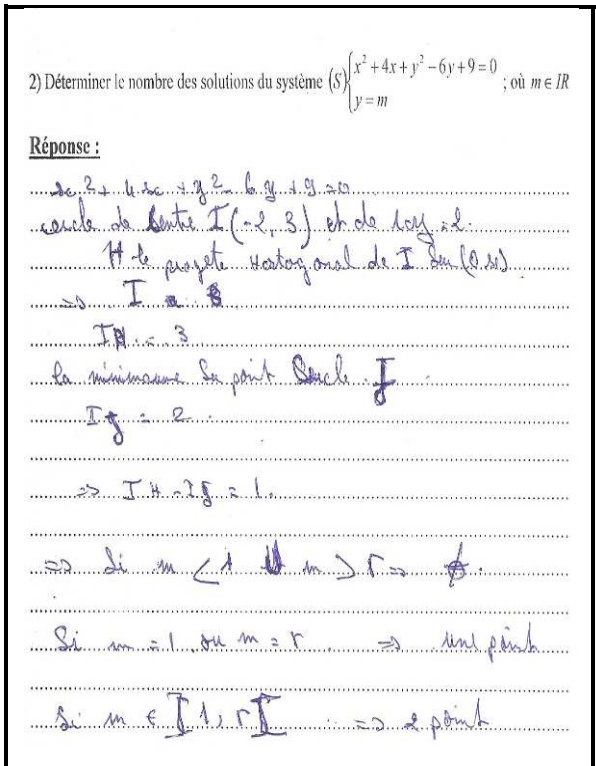
Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre clairement que les élèves et les étudiants ont mobilisé les deux types de procédure sémantique et mixte dont un nombre important de réponses erronées. D'un autre côté on remarque que les procédures mixtes dominent les procédures sémantiques.

Le tableau ci-dessous indique les répartitions.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Sémantique	7	4	11	22
Mixte	5	35	18	58

Tableau 2.4.4.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



2) Déterminer le nombre des solutions du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$; où $m \in IR$

Réponse :

$x^2+4x+y^2-6y+9=0$

cercle de centre $I(-2,3)$ et de $1 \times y = 2$.

H le projeté Hortogonal de I sur $(0,x)$

$\Rightarrow I = 3$

$IH = 3$

la minimum du point cercle J

$IJ = 2$

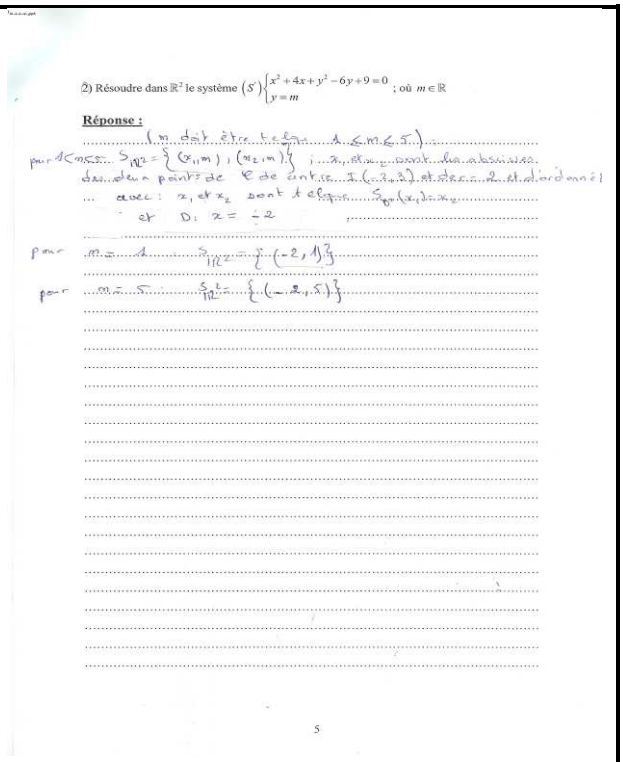
$\Rightarrow IH - IJ = 1$

$\Rightarrow$ si $m < 1$ ou $m > 5 \Rightarrow \emptyset$

Si $m = 1$ ou $m = 5 \Rightarrow$ une point

Si $m \in]1,5[\Rightarrow$ 2 point

Technique sémantique $t_{11-2-2-sé-grph}$ exacte



2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $(S')\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$; où $m \in \mathbb{R}$

Réponse :

(m doit être telque $1 \leq m \leq 5$)

pour $1 < m < 5$ $S_{\mathbb{R}^2} = \{(x_1,m),(x_2,m)\}$; x_1 et x_2 sont les abscisses des deux points de $\mathcal{C}$ de centre $I(-2,3)$ et de $r = 2$ et d'ordonnée

avec : x_1 et x_2 sont telque $S_{\mathcal{C}}(x_1) = x_2$

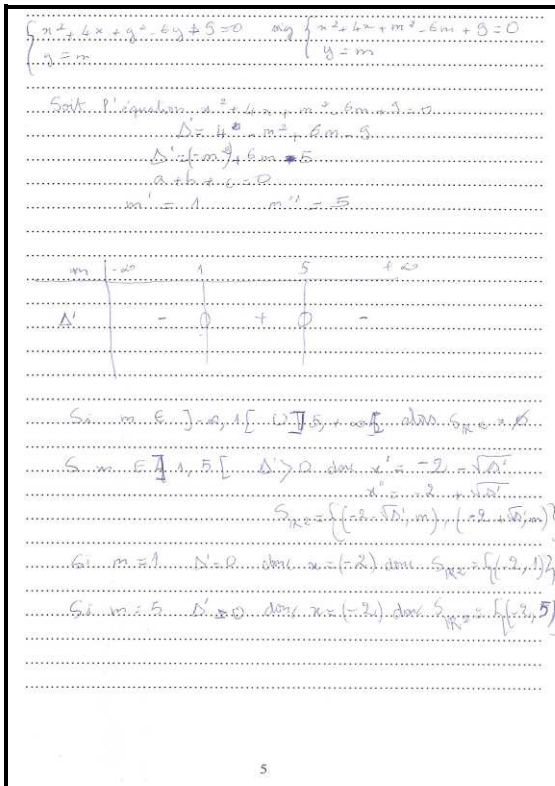
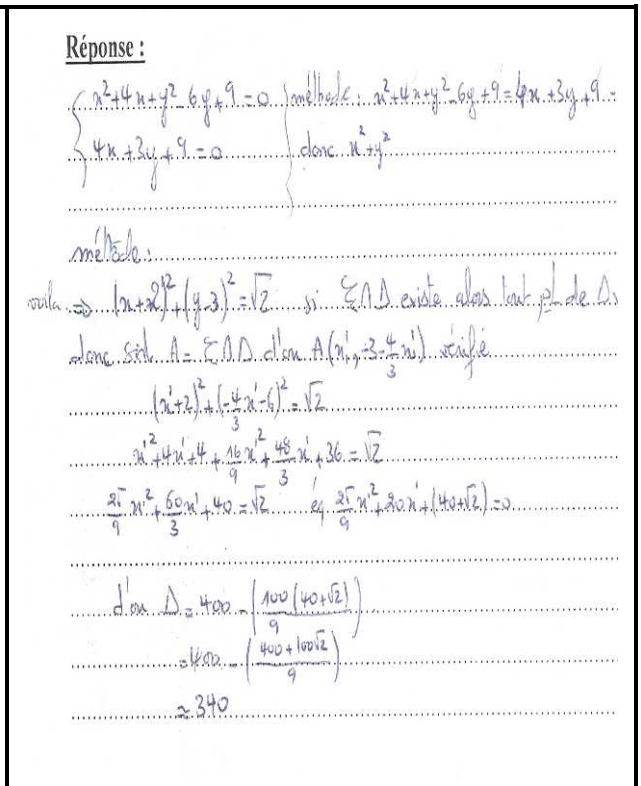
et $D : x = -2$

pour $m = 1$ $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2,1)\}$

pour $m = 5$ $S_{\mathbb{R}^2} = \{(-2,5)\}$

5

Technique sémantique $t_{11-2-2-sé-grph}$ incomplète

	
Technique mixte $t_{12-2-2-M-a\lg}$ exacte	Technique mixte $t_{12-2-2-M-a\lg}$ erronée

Le regroupement des différents types de techniques montre que nous sommes en présence de deux catégories principales dont l'une est sémantique du registre graphique et l'autre du type mixte du registre algébrique. Ainsi, nous avons 22 réponses, soit environ 15,4% des techniques étaient du type sémantiques du registre graphique, 58 réponses, soit environ 40,6% des techniques étaient du types syntaxique du registre algébrique.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$ en terme de catégorisation sémantique et / ou syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph}$	22	15,4
t_{M-alg}	58	40,6
Autre type de réponse	6	4,2
Non réponse	57	39,9
Total	143	100,0

Tableau 2.4.4.3

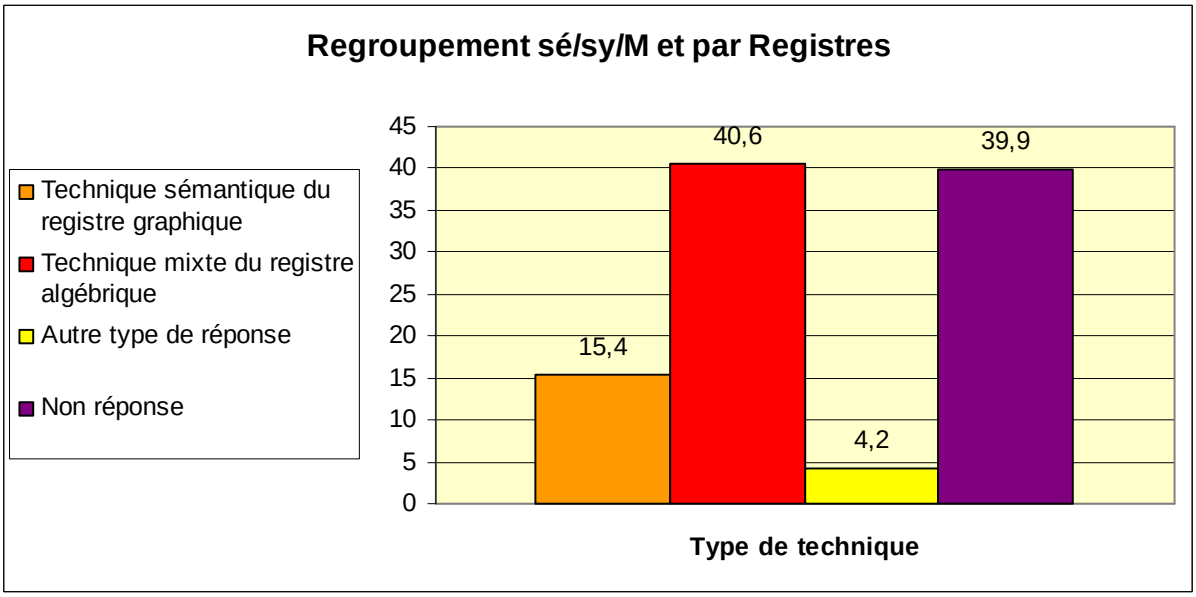


Figure II. 9 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la résolution du système

$$(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$$ **de l'exercice N°3**

Le regroupement des différents types de procédures s'appuyant uniquement sur les catégorisations logiques des réponses d'élèves en terme de : « sémantique, syntaxique et mixte » montre qu'il n'y a pas de différence avec celle que nous avons analysée, ci-dessus, qui croise la catégorisation logique et celle des différents registres.

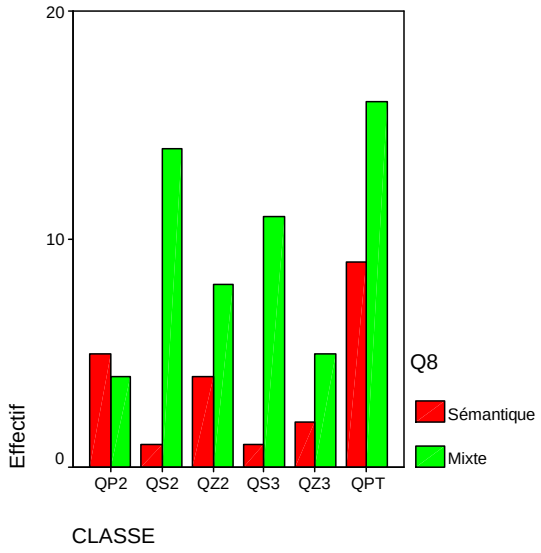
Ceci est appuyé par le tableau ci-dessous dans lequel nous croisons les catégorisations logiques et le registre algébriques et graphiques puisque la mobilisation des techniques sémantiques et mixtes est mono-registre.

	Algébrique	Graphique
Sémantique	0	22
Mixte	58	0

Tableau 2.4.4.4

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il n'y a pas une différence significative en croisant les niveaux des élèves et des étudiants avec le type de procédure s'appuyant sur la catégorisation logique. En effet, la valeur de khi-deux est de $10{,}144$ et la signification asymptotique de $7{,}1\% > 5\%$ ce qui affirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes n'est pas significative.

L'histogramme ci-dessous montre clairement que les élèves et les étudiants des différentes classes mobilisent à la fois les techniques sémantiques et les techniques mixtes dans la résolution du système d'équation proposé avec une dominance des techniques mixtes par rapport à celle des techniques sémantiques dans toutes les classes sauf dans QP2 où les techniques sémantiques dépassent faiblement celle des techniques mixtes.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q8

Conclusions relatives aux réponses des élèves et des étudiants concernant l'exercice n°3

L'analyse des différentes réponses des élèves et des étudiants au sujet du troisième exercice met en évidence les résultats suivants :

Pour la détermination de la nature de l'ensemble ζ

Les deux types de techniques, sémantiques et mixtes, que nous avons développées dans l'analyse *a priori*, étaient présentes dans les réponses des élèves. Dans ce type de tâche, les élèves et les étudiants ont montré une certaine maîtrise des techniques algébriques qui a

conduit 79 élèves et étudiant à la bonne réponse. Ce qui montre la pertinence des techniques syntaxiques et mixtes dans la résolution de certaines tâches du registre algébrique.

Pour la détermination de la nature de l'ensemble Δ

Les élèves et les étudiants ont mobilisé trois techniques parmi les quatre que nous avons développées dans l'analyse *a priori*. Ces techniques étaient de 65, soit environ $63{,}73\%$ du type mixtes exploitant à la fois l'algébrique et le graphique pour décrire l'ensemble Δ. Par contre, les techniques syntaxiques s'appuyant sur des transformations algébrique pour aboutir à la forme réduite de l'équation de la droite pour décrire ce que représente Δ, étaient présentes dans 37 réponses, soit $36{,}27\%$.

En revanche, le nombre de réponses exactes qui décrivent l'ensemble Δ était faible où un bon nombre d'élèves donnaient des réponses incomplètes

Pour la résolution dans IR^2 du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ 4x+3y+9=0 \end{cases}$

Dans l'analyse *a priori* de cette question, nous avons remarqué que la tâche de résolution de ce système d'équation exige un niveau de connaissances mobilisables qui correspond à des mises en fonctionnements plus larges et dépassant les applications simples des propriétés, théorèmes, définitions. Ce qui nous a fait penser à enrichir le milieu objectif de l'élève par la question 1) a. afin de lui conduire à exploiter le registre graphique pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux ensembles ζ et Δ.

En revanche, les réponses du type syntaxiques étaient dominantes puisque 99, soit environ $88{,}39\%$ dont 12 réponses syntaxiques exactes.

Ceci montre que ces élèves et ces étudiants mobilisent l'outil syntaxique dès qu'il est disponible d'une part, et qu'ils n'ont pas pensé à interpréter le statut de ces fonctions à deux variables ou équation du cercle ζ et de la droite Δ pour assurer l'articulation des deux registres algébriques et graphiques, d'autre part.

Pour la détermination du nombre des solutions du système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$

Tout d'abord, remarquons que le nombre des non réponses à cette question est de 57, soit environ $39{,}9\%$ des 143 copies. Ce nombre est élevé et il nous semble que ceci est lié à la difficulté de la question que nous avons remarqué dans l'analyse *a priori*.

D'une part, le système d'équation contient une équation du second degré qui dépasse largement les connaissances des élèves du secondaire et d'autre part, la notion de paramètre est peu travaillée au début du secondaire.

La résolution de ce système d'équation exige une organisation des connaissances où les élèves et les étudiants sont appelés à changer, à la fois, de point de vue sémantique et / ou syntaxique et de registre de représentation sémiotiques[91]. En plus, les deux types de techniques, proposées dans l'analyse *a priori*, dont l'une est du type sémantique du registre graphique et l'autre est du type mixte du registre algébrique étaient présentes dans les copies des élèves et des étudiants.

Cependant, le nombre des techniques du type mixte, qui est de 58 réponses, soit environ $40{,}6\%$, dépasse celui des techniques sémantiques s'appuyant sur le graphique qui sont 22 réponses, soit environ $15{,}4\%$ de la totalité des copies. Ceci montre la dominance des techniques syntaxiques dans les résolutions par rapport à un travail sémantique au niveau du registre graphique qui nous semble un milieu favorable qui facilite la tâche des élèves pour répondre à ce type de questions puisque, l'analyse des copies montre que le nombre des réponses exactes s'appuyant sur les techniques sémantiques, qui est de 7, soit environ $31{,}82\%$ des réponses sémantique, par contre les techniques mixtes (s'appuyant sur des résolutions syntaxiques) n'étaient exactes que dans 5 réponses, soit environ $8{,}61\%$ des réponses mixtes.

II. 2. 5. Analyse de l'exercice N°4

Avant de commencer l'analyse statistique des résultats relatifs à l'exercice N°4, rappelons que cet exercice a été proposé aux élèves du secondaire et aux étudiants des classes préparatoires de deux façons différentes. En effet, nous pensons que la résolution de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ exige un niveau de connaissances disponibles pour les élèves du secondaire. Par contre, les étudiants des classes préparatoires ont un niveau technique leur permettant de résoudre ce type d'inéquation. Pour cela, nous avons choisi d'intégrer la deuxième et la troisième question comme étant des questions intermédiaires permettant, *a priori*, d'enrichir le milieu des élèves du secondaire afin de surmonter la difficulté liée à la résolution de l'inéquation, tandis que la tâche des étudiants des classes préparatoire consiste à répondre, directement, à la première et à la quatrième question.

[91] Ceci est développé dans l'étude mathématique et didactique que nous avons conduite dans l'analyse *a priori*.

Nous rappelons, ci-dessous, les deux énoncés adressés respectivement aux élèves du secondaire et aux étudiants des classes préparatoires.

Enoncé adressé aux élèves du secondaire :

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ donc $h(x,y)=$ …….

b) $(x,y)=(1,3)$ donc $h(x,y)=$ …….

c) $(x,y)=(5,4)$ donc $h(x,y)=$ …….

d) $(x,y)=(-2,-1)$ donc $h(x,y)=$ ……....

e) $(x,y)=(-1,-2)$ donc $h(x,y)=$ ……

f) $(x,y)=(6,7)$ donc $h(x,y)=$ …….

3) Placer, dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, les points A,B,C,D,E et F de coordonnées respectives :

$(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6,7)$.

4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Enoncé adressé aux étudiants des classes préparatoires :

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

2) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

II. 2. 5. 1. Analyse des réponses à la question 1 relative à la représentation graphique de Γ_f

La tâche proposée aux élèves et aux étudiants consiste représenter dans un repère orthonormé la courbe représentative Γ_f de la fonction linéaire f définie sur IR par : $f(x) = x$.

Nous avons envisagé, dans l'analyse *a priori*, quatre types de techniques associées à ce type de tâche que nous avons notées respectivement par $t_{1-4-1-sé-grph}$, $t_{2-4-1-sé-a\lg-grph}$, $t_{3-4-1-sé-a\lg-grph}$ et $t_{4-4-1-M-a\lg-grph}$[92].

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 10 réponses soit environ 7% de procédures de type de technique sémantique du registre graphique, notée $t_{1-4-1-sé-grph}$, où toutes les réponses étaient exactes (cf. Annexe. B-I.4.8.1. p. 127).

Le nombre de réponses des élèves mobilisant des procédures s'appuyant sur le premier type de techniques sémantiques des registres algébriques et graphiques, notée $t_{2-4-1-sé-a\lg-grph}$, est de 40, soit environ $27{,}9\%$ de la totalité des copies des élèves et des étudiants où toutes les réponses étaient exactes (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 1. p. 128).

Le deuxième type de technique sémantique des registres algébriques et graphiques, notée $t_{3-4-1-sé-a\lg-grph}$, étaient présent dans 49 copies d'élèves et d'étudiants, soit environ $34{,}3\%$ de la totalité des copies, dont 47 réponses étaient exactes et 2 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 1. p. 129-130).

Nous avons enregistré une seule réponse exacte s'appuyant sur la technique du type mixte des registres algébriques et graphiques, notée $t_{4-4-1-M-a\lg-grph}$, soit environ $0{,}7\%$ de la totalité des copies (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 1. p. 131).

Les autres types de réponses sont au nombre de 10, soit environ 7% (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 1. p. 132-134) et les non réponses sont 33, soit environ $23{,}1\%$ de la totalité des élèves et des étudiants.

[92] Les analyses didactiques et mathématiques sont détaillées dans l'analyse *a priori*.

Nous illustrons ci-dessous notre analyse par un exemple d'un autre type de réponse.

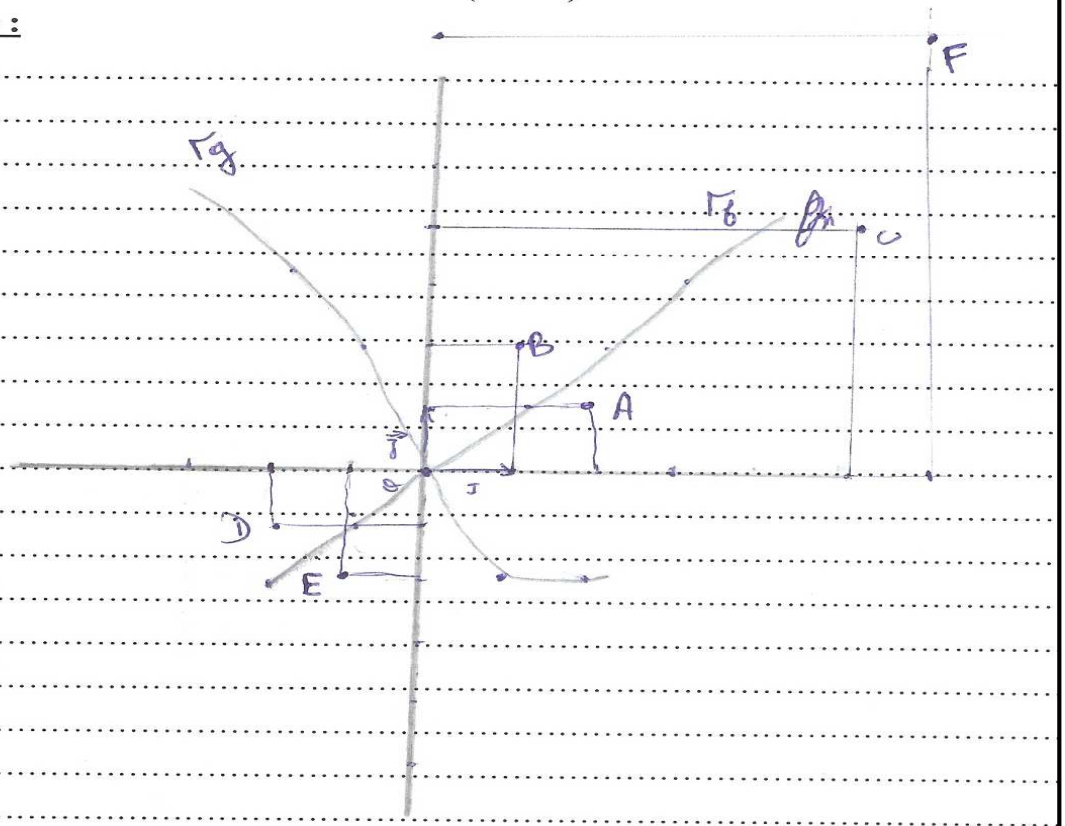
Exercice N°4 :

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x$ et $g(x) = x^2 - 3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Réponse :



Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique de Γ_f sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{1-4-1-sé-grph-exacte}$	10	7,0
$t_{2-4-1-sé-alg-grph-exacte}$	40	27,9
$t_{3-4-1-sé-alg-grph-exacte}$	47	32,9
$t_{3-4-1-sé-alg-grph-erronée}$	2	1,4
$t_{4-4-1-M-alg-grph-exacte}$	1	0,7
Autre type de réponse	10	7,0
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

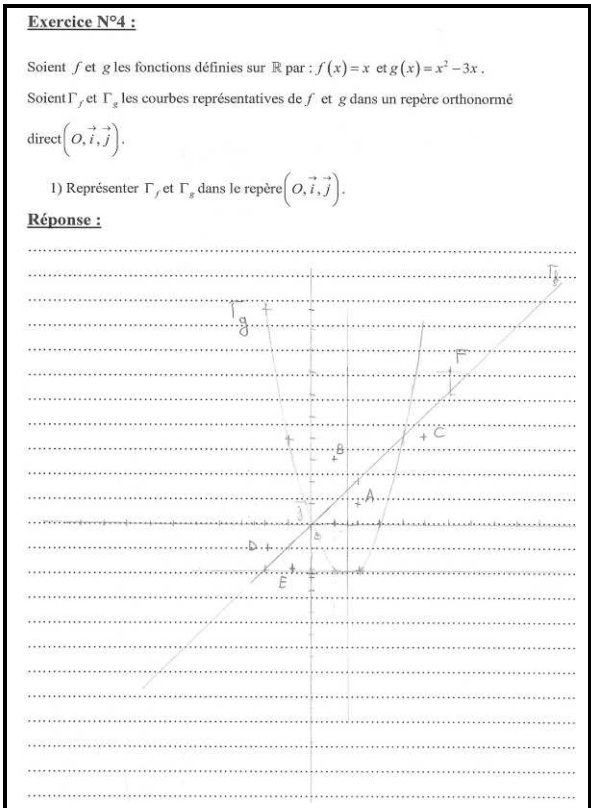
Tableau 2.5.1.1

Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixtes avec le type de réponses exactes, incomplètes ou erronées montre une réussite assez remarquable des 90 élèves qui ont répondus à cette question, puisque nous n'avons enregistré que 2 réponses erronées.

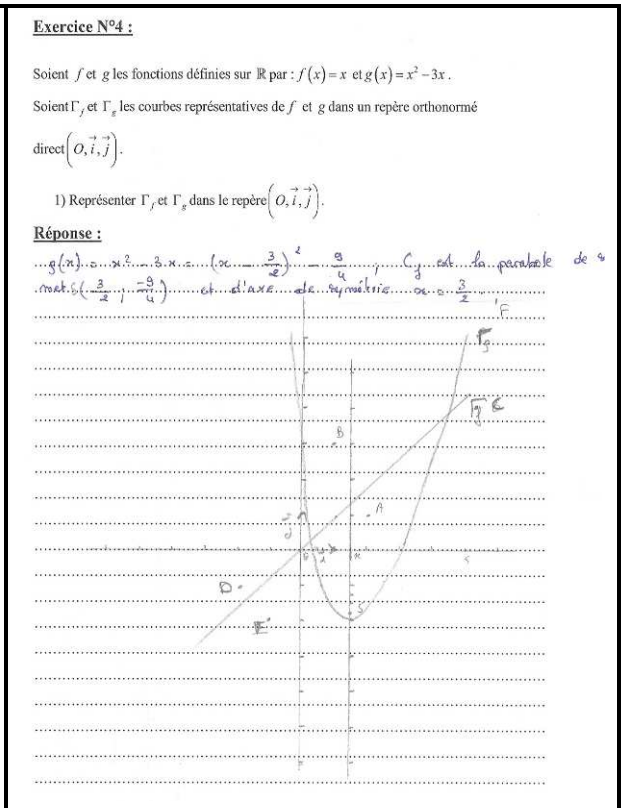
	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Sémantique	87	0	2	89
Mixte	1	0	0	1

Tableau 2.5.1.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



Technique sémantique $t_{3-4-1-sé-a\lg-grph}$ **exacte**



Technique mixte $t_{4-4-1-M-a\lg-grph}$ **exacte**

Le regroupement des différents types de techniques montre que nous sommes en présence de trois catégories principales dont la première est sémantique du registre graphique, la deuxième est du type sémantique des registres algébriques et graphiques et la troisième est du type mixte du registre graphique.

Nous avons, ainsi, 10 réponses, soit environ 7% des techniques sémantiques du registre graphique, 89 réponses, soit environ 62,2% des techniques étaient du type sémantique des registres algébriques et graphiques et les techniques mixtes des registres algébriques et graphiques sont représentées par une seule réponse qui représente 0,7% des copies.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique du graphe Γ_f en terme de catégorisation sémantique et/ ou syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph}$	10	7,0
$t_{sé-alg-grph}$	89	62,2
$t_{M-alg-grph}$	1	0,7
Autre type de réponse	10	7,0
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.1.3

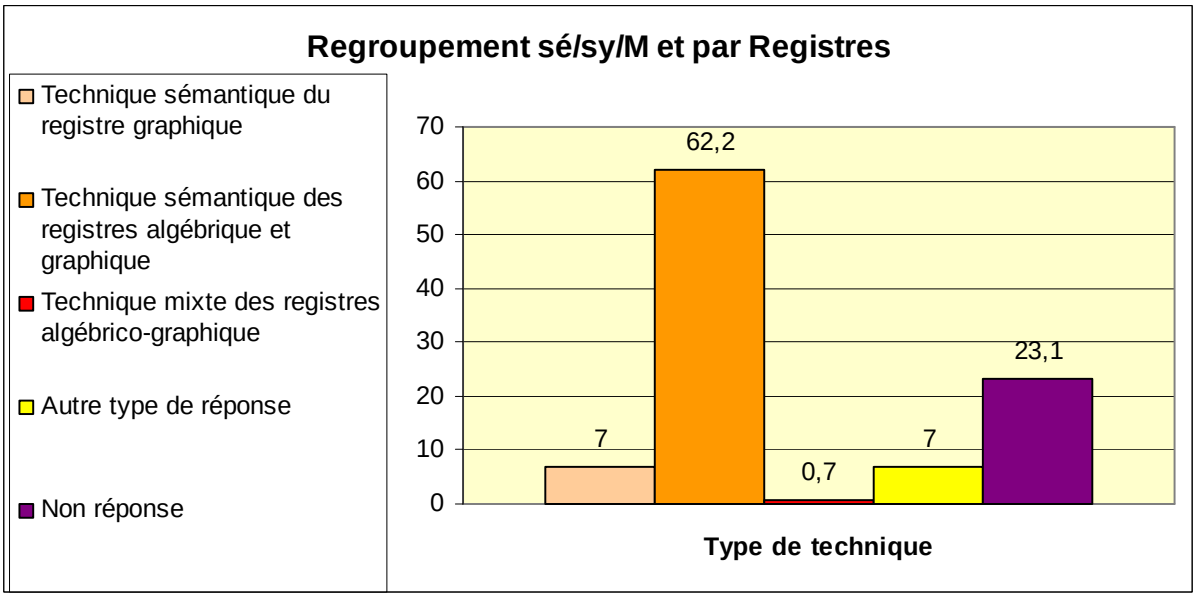


Figure II. 10 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation de Γ_f

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / ou syntaxe dans les résolutions montre que les techniques du type sémantique sont présentes dans 99 copies. Les techniques de résolution du type mixtes sont présentes dans une seule copie, soit 0,7% de la totalité des copies.

Les résultats sont représentés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
Sémantique	99	69,2
Mixte	1	0,7
Autre type de réponse	10	7,0
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.1.4

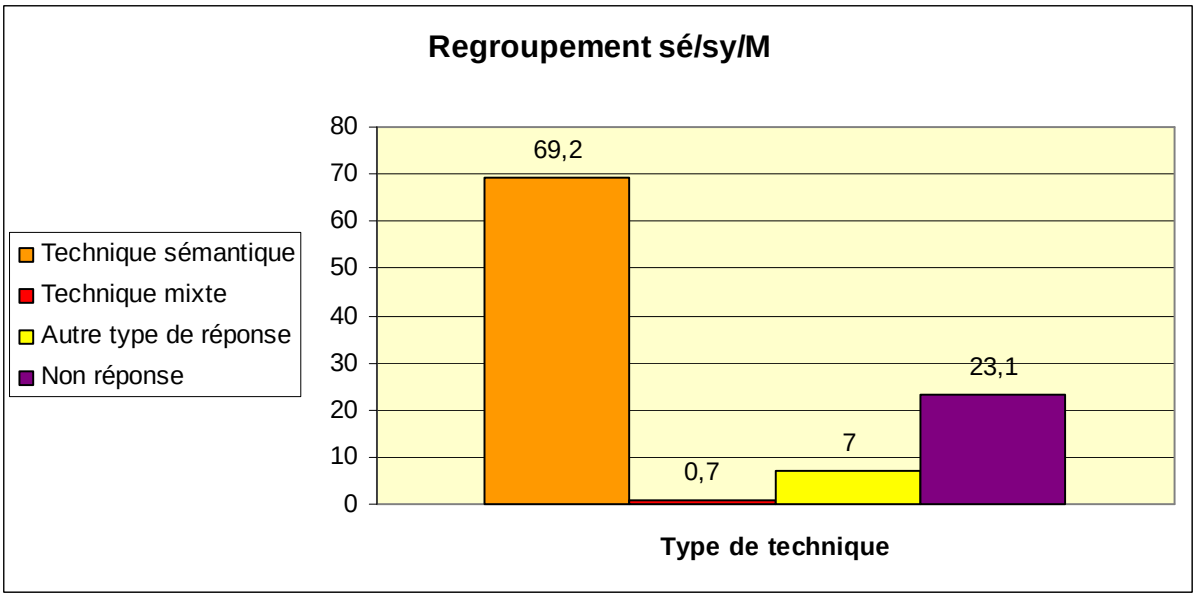


Figure II. 11 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique de Γ_f enrichies par la catégorisation sémantique et / ou syntaxe

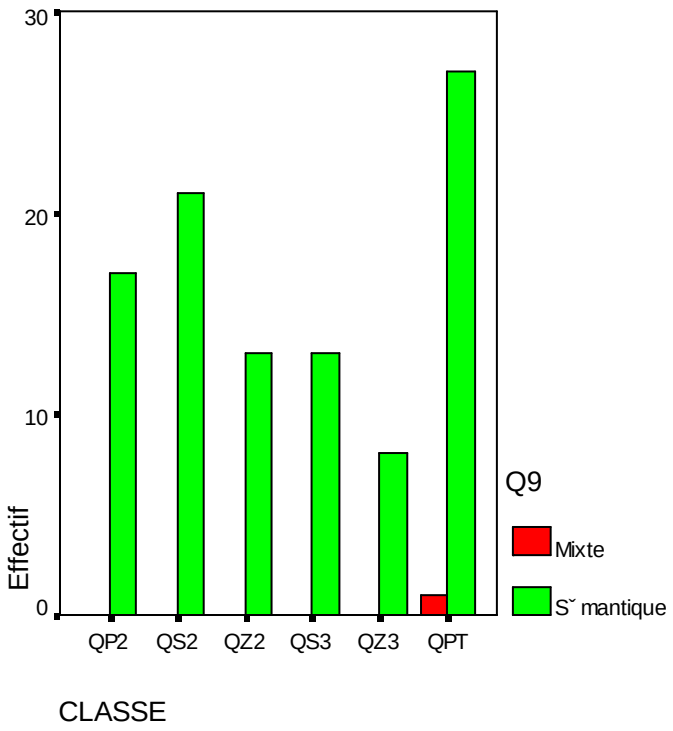
Le croisement des catégories logiques en termes de mobilisation des techniques sémantique mixtes avec les registres de représentation sémiotiques graphiques et / ou algébriques montre que le point de vue sémantique et mixtes s'articulent au sein des registres algébriques et graphiques.

	Graphique	Alg / Grph
Sémantique	10	89
Mixte	0	1

Tableau 2.5.1.5

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence non significative entre les types de procédures de résolution. En effet, la valeur de khi-deux est de 2,597 avec une signification asymptotique au seuil de $76{,}2\% >> 5\%$ qui confirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes n'est pas significative.

L'histogramme ci-dessous qui montre clairement que les procédures des différents élèves et étudiants des différentes classes ont mobilisé fortement des techniques sémantiques. Par contre, un seul étudiant de la classe QPT a mobilisé une technique mixte.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q9

II. 2. 5. 2. Analyse des réponses à la question 1 relative à la représentation graphique de Γ_g

La tâche proposée aux élèves et aux étudiants consiste à représenter dans un repère orthonormé la courbe représentative Γ_g de la fonction trinôme g définie sur IR par : $g(x) = x^2 - 3x$.

Nous avons envisagé, dans l'analyse *a priori*, deux types de techniques associées directement à ce type de tâche que nous avons noté respectivement par $t_{6-4-1-sé-grph}$ qui consiste à représenter Γ_g point par point et $t_{7-4-1-sy-a\lg}$ qui s'appuie sur une reconnaissance du théorème du cours[93]. Cependant, nous avons remarqué qu'il y a possibilité que les élèves répondent à un type de tâche non demandée en s'appuyant sur les techniques mixtes, notées respectivement par $t_{6'-4-1-M_1-grph}$, $t_{6''-4-1-M_2-grph}$ et $t_{6'''-4-1-M_3-anl-a\lg-grph}$,qui consistent à faire une étude complète de la fonction g, s'appuyant sur trois méthodes différentes[94], afin de la représenter.

[93] Ce théorème est énoncé dans l'analyse *a priori*.
[94] Ces techniques ont été détaillées dans l'analyses *a priori*.

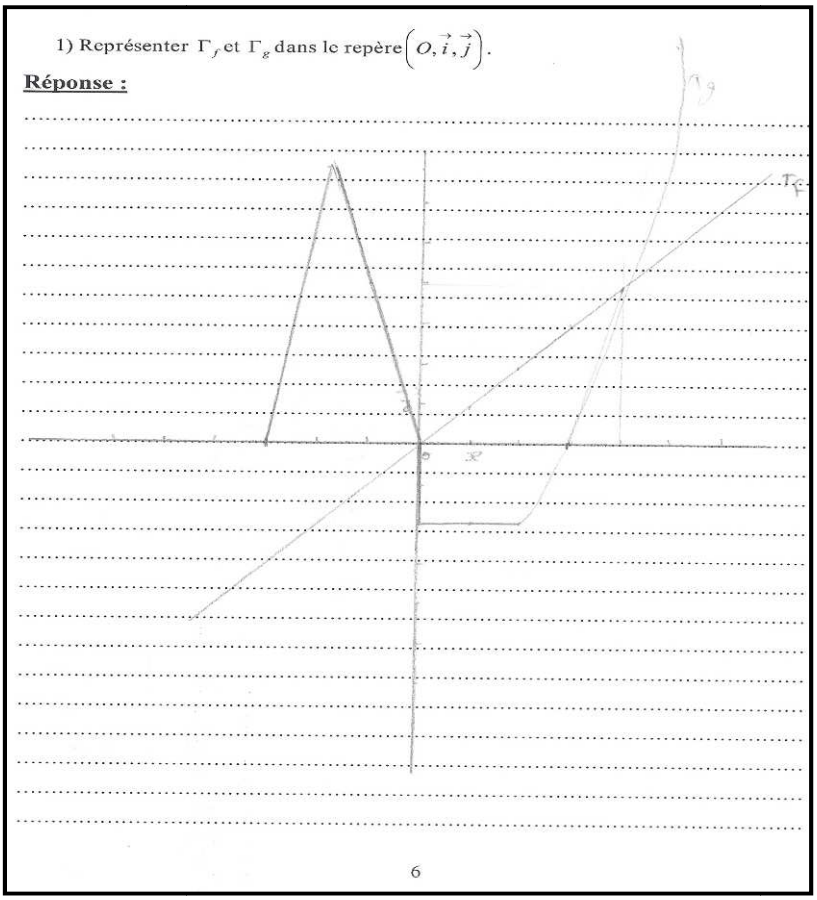
L'analyse complète des différentes copies nous a donné 74 réponses soit environ $51{,}8\%$ de procédures ou de type de technique sémantique du registre graphique, noté $t_{6-4-1-sé-grph}$, dont 57 réponses étaient exactes, 6 réponses étaient incomplètes et 11 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 2. p. 135-137).

Le nombre de réponses des élèves s'appuyant sur la technique syntaxique du registre algébrique, notée $t_{7-4-1-sy-a\lg}$, de 2, soit environ $1{,}4\%$ de la totalité des copies des élèves et des étudiants et qui étaient incomplètes (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 2. p. 138).

Concernant les techniques mixtes que nous avons détaillées dans l'analyse *a priori*, nous n'avons enregistré que celle, notée $t_{6'''-4-1-M_3-anl-a\lg-grph}$, qui s'appuie sur une étude de la variation de la fonction g par un recours au calcul de la dérivée. Ce type de technique était présent dans 11 copies, soit environ $7{,}7\%$ de la totalité des copies dont 8 réponses étaient exactes et 3 réponses étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 2. p. 139-140).

Les autres types de réponses sont au nombre de 23, soit environ 16% (cf. Annexe. B-I. 4. 8. 2. p. 141-142) et les non réponses sont de 33, soit environ $23{,}1\%$ de la totalité des élèves et des étudiants.

Nous illustrons ci-dessous par un exemple d'un autre type de réponse.


1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Réponse :

6

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique de Γ_g sont représentés respectivement dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{6-4-1-sé-grph-exacte}$	57	39,9
$t_{6-4-1-sé-grph-incomplète}$	6	4,2
$t_{6-4-1-sé-grph-erronée}$	11	7,7
$t_{7-4-1-sy-a\lg-incomplète}$	2	1,4
$t_{6'''-4-1-M_3-anl-a\lg-grph-exacte}$	8	5,6
$t_{6'''-4-M_3-anl-a\lg-grph-erronée}$	3	2,1
Autre type de réponse	23	16
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

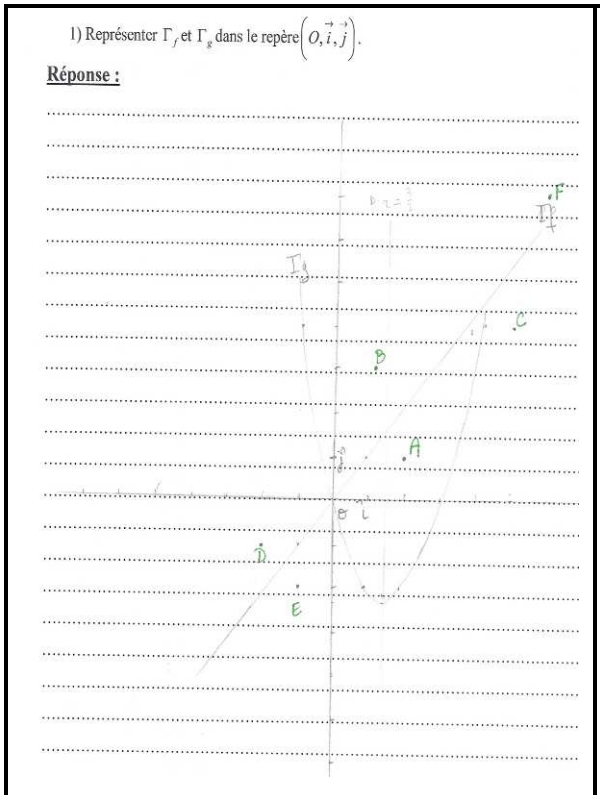
Tableau 2.5.2.1

Le croisement des catégories logiques de réponses en termes de sémantique syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète ou erronée montre clairement que les élèves et étudiants mobilisant des techniques sémantiques et mixtes ont données majoritairement des réponses exactes, soit 65 réponses exactes parmi 85. Par contre, les deux procédures syntaxiques étaient toutes les deux incomplètes.

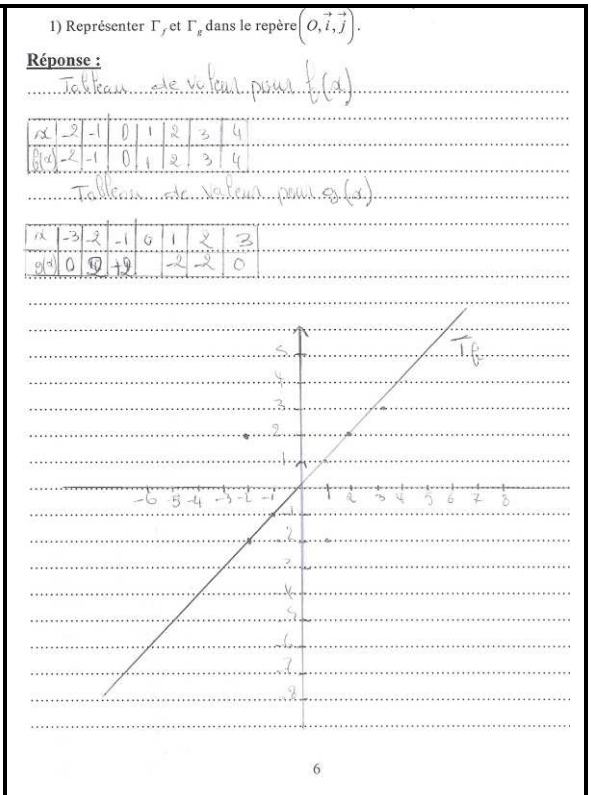
	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	0	2	0	2
Sémantique	57	6	11	74
Mixte	8	3	0	11

Tableau 2.5.2.2

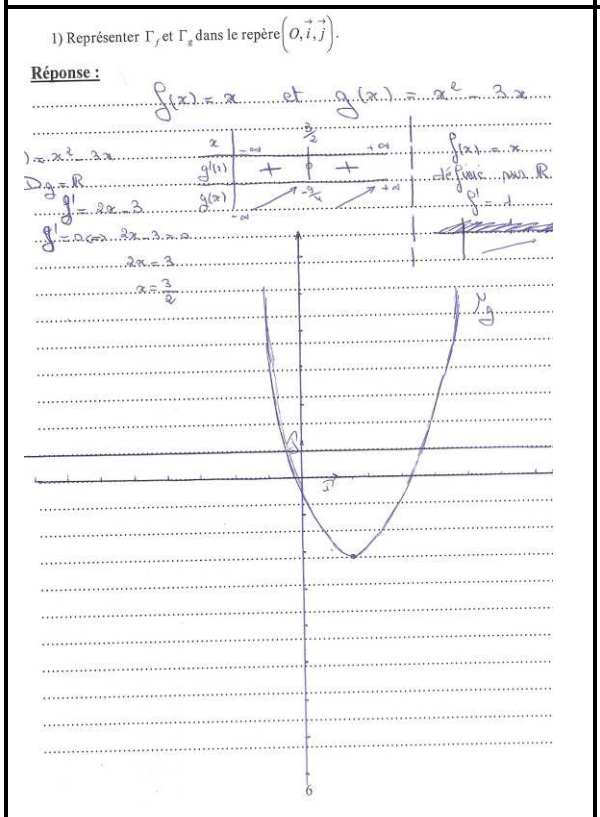
Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



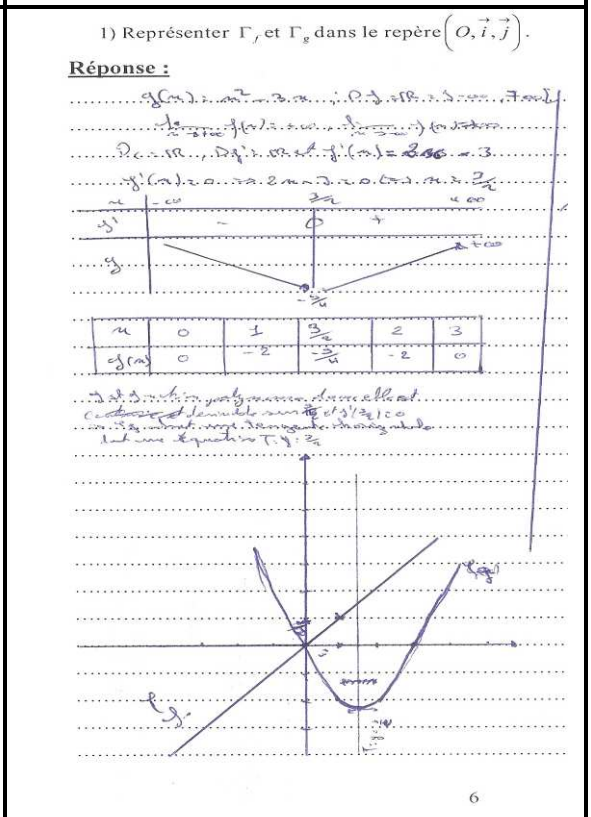
Technique sémantique $t_{6-4-1-sé-grph}$ **exacte**



Technique sémantique $t_{6-4-1-sé-grph}$ **incomplète**



Technique mixte $t_{6'''-4-1-M_3-anl-alg-grph}$ **erronée**



Technique mixte $t_{6'''-4-1-M_3-anl-alg-grph}$ **exacte**

Le regroupement des différents types de techniques montre que nous sommes en présence de trois catégories principales, dont la première est sémantique du registre algébrique et graphique, la deuxième est du type syntaxique du registre algébrique et la troisième est du type mixte articulant les registres analytiques, algébrique et graphique.

Nous avons, ainsi, 74 réponses, soit environ $51{,}8\%$ des techniques sémantiques des registres algébriques et graphiques, 2 réponses, soit environ $1{,}4\%$ des techniques étaient du type syntaxique du registre algébrique et les techniques mixtes articulant les registres analytiques, algébriques et graphiques sont représentées par 11 réponses qui représente $7{,}7\%$ des copies.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique du graphe Γ_g en terme de catégorisation sémantique et / ou syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-a\lg-grph}$	74	51,8
$t_{sy-a\lg}$	2	1,4
$t_{M-anl-a\lg-grph}$	11	7,7
Autre type de réponse	23	16
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.2.3

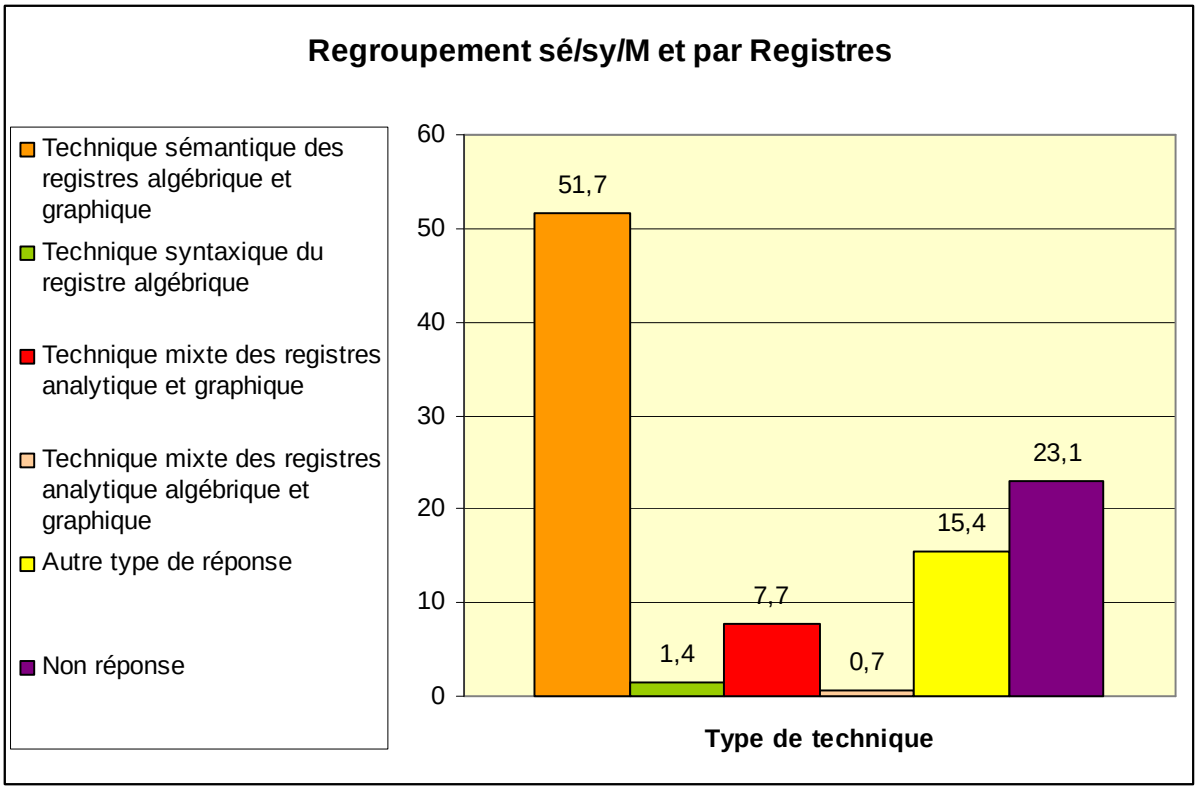


Figure II. 12 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation de Γ_g

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / ou syntaxe dans les résolutions montre que les techniques du type sémantique sont présentes dans 74 copies, soit environ 51,7% de la totalité des copies. Les nombre des réponses s'appuyant sur des techniques syntaxiques est de deux, soit environ 1,4% de la totalité des copies et les techniques de résolution du type mixtes sont présentes dans 12 copies, soit 8,4% de la totalité des copies.

Les résultats sont représentés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
Syntaxique	2	1,4
Sémantique	74	51,7
Mixte	12	8,4
Autre type de réponse	22	15,4
Non réponse	33	23,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.2.4

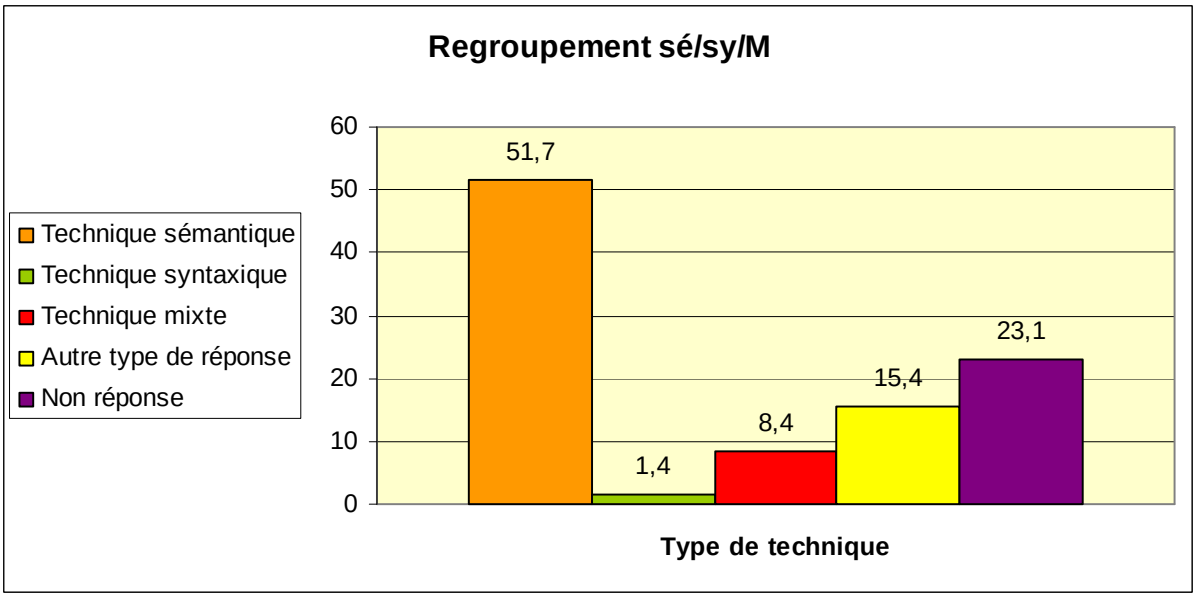


Figure II. 13 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique de Γ_g enrichies par la catégorisation sémantique et / ou syntaxe

Relativement à cette question, le croisement des catégorisations logiques en termes de sémantique, syntaxique et mixtes avec les différents registres mis en jeu montre clairement que les points de vues sémantiques et mixtes s'articulent entre les différents registres algébriques, analytiques et graphiques dans la tâche de représentation de la courbe Γ_g.

Le tableau ci-dessous montre clairement ces analyses.

	Algébrique	Alg / Grph	Anl/Alg/Grph
Syntaxique	2	0	
Sémantique	0	74	
Mixte	0	0	11

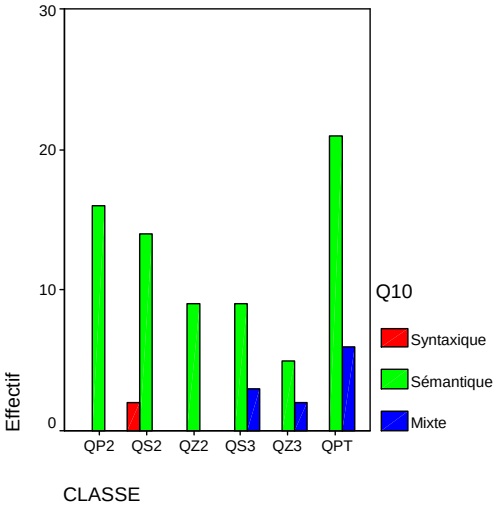
Tableau 2.5.2.5

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il y a une différence significative entre les trois types de procédures de résolution. En effet, la valeur de khi-deux est de $20{,}003$ avec une signification asymptotique au seuil de $2{,}9\% < 5\%$ qui confirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes, est très significative.

L'histogramme ci-dessous qui montre clairement cette différence entre les procédures des différents élèves et étudiants des différentes classes. En effet, les procédures sémantiques étaient présentes chez les élèves et les étudiants de toutes les classes.

Les élèves de la classe pilote QP2 et ceux de la deuxième année secondaire du lycée Ezzahrouni QZ2 n'ont exploité que ces techniques purement sémantiques. Par contre, ceux des classes QS3, QZ3 et QPT ont mobilisé, en plus, des techniques mixtes de représentation d'une part et ceux de la QS2 ont mobilisé des techniques syntaxiques d'autre part.

Ainsi, nous pouvons dire que relativement au type de tâche demandé, qui consiste à représenter graphiquement la courbe Γ_g, les élèves et les étudiants ont mobilisé majoritairement des techniques sémantiques. En revanche, les techniques syntaxiques et mixtes qui consistent à faire une étude complète de la fonction g étaient présentes. Ceci confirme notre analyse *a priori* dans laquelle nous avons estimé qu'il y aurait ce type de réponses même si le type de tâche demandé était de représenter et non pas d'étudier la fonction g.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q10

II. 2. 5. 3. Analyse des réponses des élèves du secondaire à la question 2 relative à la détermination du signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$

Le type de tâche proposé au élèves du secondaire consiste à déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x, y) = (2,1)$ donc $h(x, y) =$ …….

b) $(x, y) = (1,3)$ donc $h(x, y) =$ …….

c) $(x, y) = (5,4)$ donc $h(x, y) =$ …….

d) $(x, y) = (-2,-1)$ donc $h(x, y) =$ ……....

e) $(x, y) = (-1,-2)$ donc $h(x, y) =$ ……

f) $(x, y) = (6,7)$ donc $h(x, y) =$ …….

Cette tâche est *a priori* une tâche routinière qui ne demande qu'un niveau technique où l'élève est sensé de substituer les valeurs attribuées à x et à y pour calculer la valeur de h.

Nous n'avons qu'un seul type de technique, notée $t_{8-4-2-sé-algebrique-num}$, qui est une technique sémantique des registres algébrique et numérique.

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 33 réponses exactes, 9 réponses incomplètes et 48 réponses erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 9. p. 143-145).

Les autres types de réponses sont représentés par une seule réponse, soit environ $0{,}9\%$ (cf. Annexe. B-I. 4. 9. p. 146) et les non réponses sont 20, soit environ 18% de la totalité des élèves du secondaire.

Les résultats des réponses des élèves du secondaire relatives à la détermination du signe de l'expression $h(x, y) = (y - x)(y - x^2 + 3x)$, selon les valeurs données, sont représentés respectivement dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{8-4-2-sé-algebrique-num-exacte}$	33	29,7
$t_{8-4-2-sé-algebrique-num-incomplète}$	9	8,1
$t_{8-4-2-sé-algebrique-num-erronée}$	48	43,2
Autre type de réponse	1	,9
Non réponse	20	18,0
Total	111	100,0

Tableau 2.5.3.1

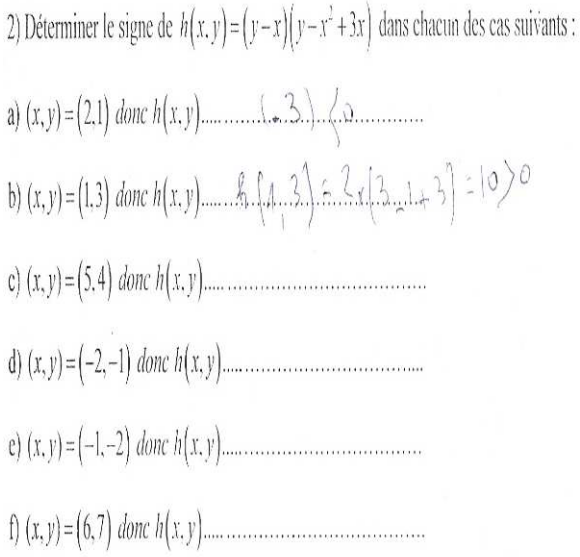
Nous avons, ainsi, 90 réponses, soit environ $81{,}1\%$ des techniques sémantiques des registres algébriques et numériques qui est le seul type de technique.

Le tableau ci-dessous montre clairement que les procédures de calcul, qui consistent à substituer des valeurs numériques dans l'expression algébrique de la fonction h, donnent lieu, pour plus de la moitié, à des réponses erronées.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Sémantique	33	9	48	90

Tableau 2.5.3.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.



2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ donc $h(x,y)$ ..... $(-3)<0$

b) $(x,y)=(1,3)$ donc $h(x,y)$ ..... $h(1,3)=2\times(3-1+3)=10>0$

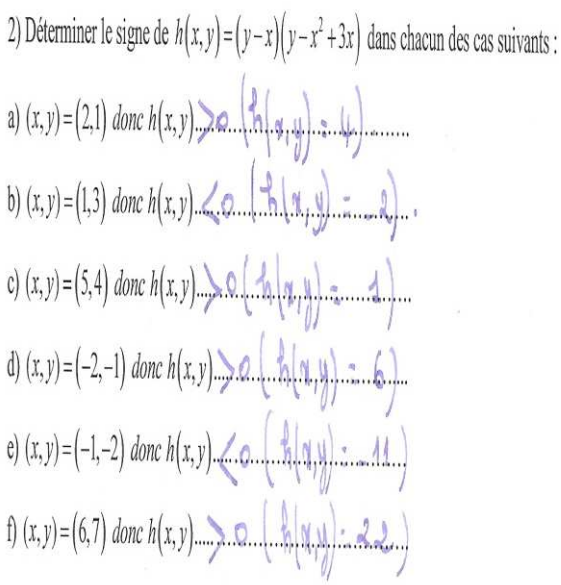
c) $(x,y)=(5,4)$ donc $h(x,y)$ .....

d) $(x,y)=(-2,-1)$ donc $h(x,y)$ .....

e) $(x,y)=(-1,-2)$ donc $h(x,y)$ .....

f) $(x,y)=(6,7)$ donc $h(x,y)$ .....

Technique sémantique $t_{8-4-2-sé-a\lg-num}$ **incomplète**



2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ donc $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=4)$

b) $(x,y)=(1,3)$ donc $h(x,y)$ <0 $(h(x,y)=-2)$

c) $(x,y)=(5,4)$ donc $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=1)$

d) $(x,y)=(-2,-1)$ donc $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=6)$

e) $(x,y)=(-1,-2)$ donc $h(x,y)$ <0 $(h(x,y)=-11)$

f) $(x,y)=(6,7)$ donc $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=22)$

Technique sémantique $t_{8-4-2-sé-a\lg-num}$ **erronée**

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

a) $(x,y)=(2,1)$ *donc* $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=4)$

b) $(x,y)=(1,3)$ *donc* $h(x,y)$ <0 $(h(x,y)=-2)$

c) $(x,y)=(5,4)$ *donc* $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=1)$

d) $(x,y)=(-2,-1)$ *donc* $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=6)$

e) $(x,y)=(-1,-2)$ *donc* $h(x,y)$ <0 $(h(x,y)=-11)$

f) $(x,y)=(6,7)$ *donc* $h(x,y)$ >0 $(h(x,y)=22)$

Technique sémantique $t_{8-4-2-sé-algebrique-num}$ **erronée**

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la représentation graphique du graphe Γ_g en terme de catégorisation sémantique et / ou syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-algebrique-num}$	90	81,1
Autre type de réponse	1	0,9
Non réponse	20	18,0
Total	111	100,0

Tableau 2.5.3.3

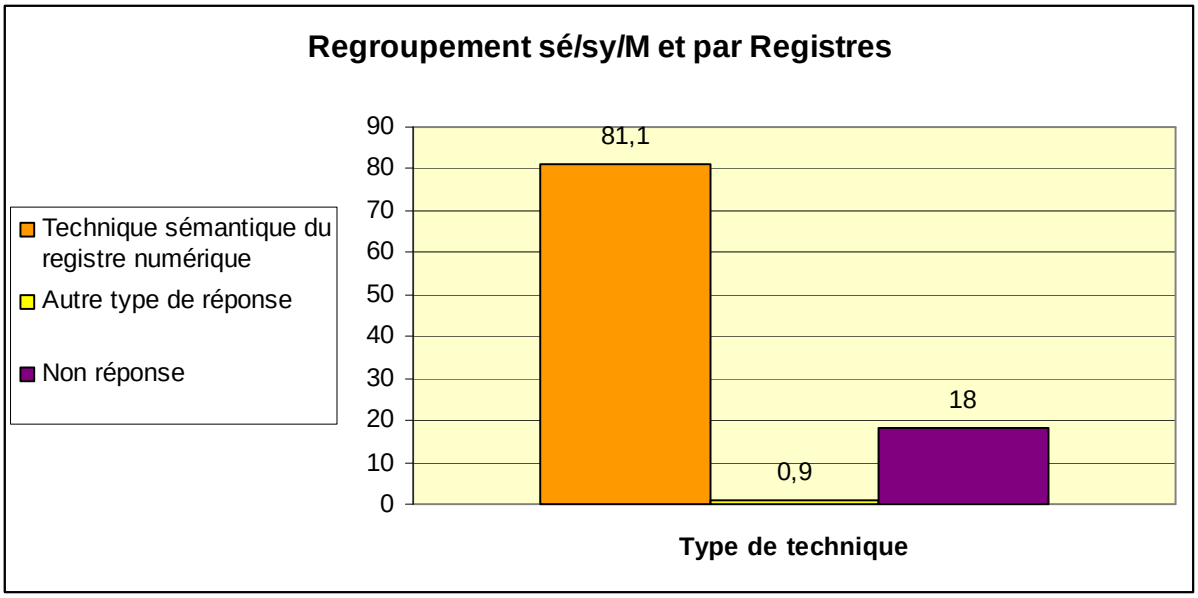


Figure II. 14 : Résultats des réponses des élèves du secondaire relatives à la détermination du signe de l'expression $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ suivant des valeurs données

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / ou syntaxe dans les résolutions montre que le seul type de techniques présent est celui des techniques du type sémantique qui représentent 90 copies, soit environ $81{,}1\%$ de la totalité des copies des élèves du secondaire.

	Alg / Num
Sémantique	90

Tableau 2.5.3.4

II. 2. 5. 4. Analyse des réponses des élèves à la question 3 qui consiste à placer des points dans un repère orthonormé direct

Rappelons que la question posée n'a été adressée qu'aux élèves du secondaire dans laquelle le type de tâche proposé consiste à placer, dans un repère orthonormé, les points A, B, C, D, E et F de coordonnées respectives : $(2{,}1)$, $(1{,}3)$, $(5{,}4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6{,}7)$. Cette tâche est *a priori* une tâche routinière qui ne demande qu'un niveau technique où l'élève est sensé placer des points de coordonnées données dans un repère orthonormé direct. Rappelons que nous avons noté la technique, associée à ce type de tâche, par $t_{9-4-2-sé-grph}$ qui est une technique du type sémantique du registre graphique.

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 68 réponses s'appuyant sur la technique sémantique du registre graphique, dont 62 réponses exactes, 2 réponses incomplètes et 4 réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 10. p. 147-150).

Les non réponses sont au nombre de 43, soit environ 38,7% de la totalité des élèves du secondaire.

Les résultats des réponses des élèves du secondaire relatives au placement des points dans le repère orthonormé direct sont représentés respectivement dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{9-4-2-sé-grph-exacte}$	62	55,8
$t_{9-4-2-sé-grph-incomplète}$	2	1,8
$t_{9-4-2-sé-grph-erronée}$	4	3,6
Autre type de réponse	0	0
Non réponse	43	38,7
Total	111	100,0

Tableau 2.5.4.1

Nous avons, ainsi, 68 réponses, soit environ 61,3% de techniques sémantiques du registre graphique qui est le seul type de technique.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants, relatives au placement des points dans le repère orthonormé direct, en terme de catégorisation sémantique et/ syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

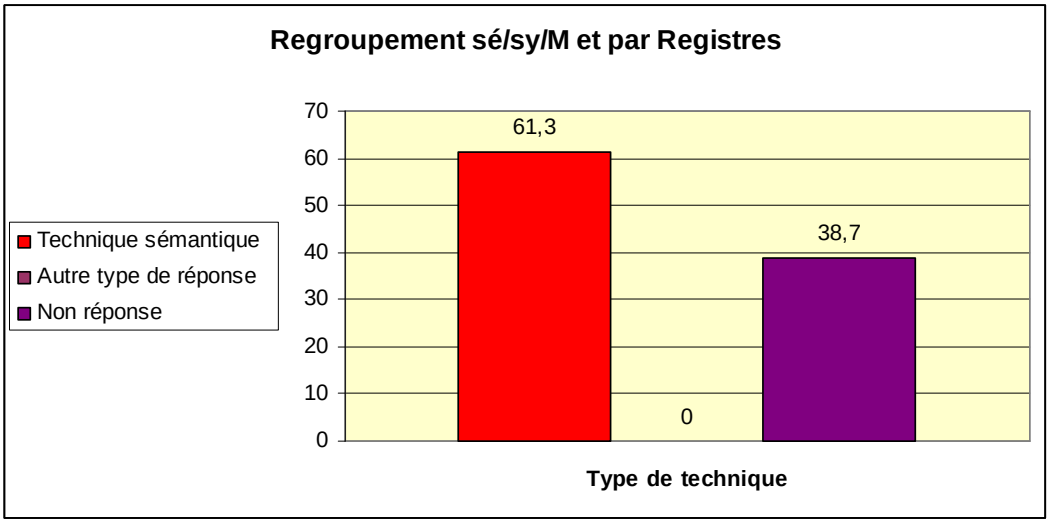


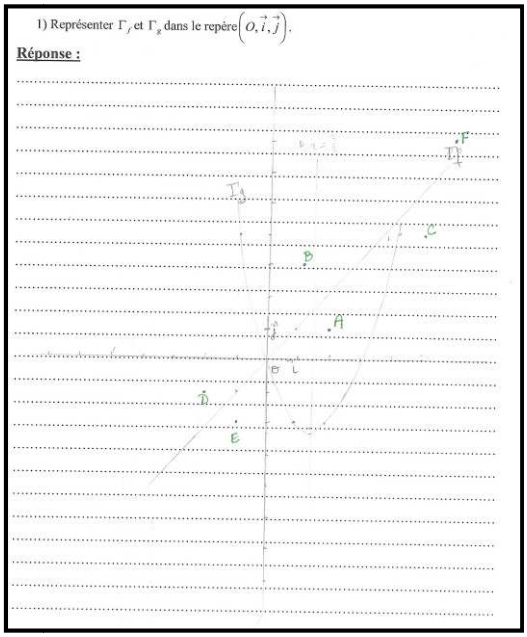
Figure II. 15 : Résultats des réponses des élèves du secondaire relatives au placement des points dans un repère orthonormé direct

Le tableau ci-dessous montre une très grande majorité de réponses exactes parmi les réponses, qui sont toutes de type sémantique.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Sémantique	62	2	4	70

Tableau 2.5.4.2

Ci-dessous un exemple illustrant notre catégorisation de réponses.



Technique sémantique $t_{9-4-2-sé-grph}$ **exacte**

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / ou syntaxe dans les résolutions montre que le seul type de techniques présent est celui des techniques du type sémantique qui représentent 68 copies, soit environ $61{,}3\%$ de la totalité des copies des élèves du secondaire.

	Grph
Sémantique	068

Tableau 2.5.4.3

II. 2. 5. 5. Analyse des réponses à la question 4 qui consiste à déterminer par le calcul ou par le graphique l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$

Cette question est adressée, à la fois, aux élèves du secondaire et aux étudiants des classes préparatoires. La tâche demandée consiste à déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ par le calcul ou par le graphique.

Nous avons détaillé, dans l'analyse *a priori*, les différentes techniques de résolution de cette question. Ces techniques sont notées respectivement, $t_{10-4-2-M-a\lg-grph}$, $t_{9'-4-2-sé-grph}$, $t_{9''-4-2-sy-a\lg}$, $t_{9'''-4-2-sé-grph}$.

L'analyse complète des différentes copies nous a donné 2 réponses, soit environ $1{,}4\%$ de technique mixte des registres algébriques et graphiques, notée $t_{10-4-2-M-a\lg-grph}$, dont la moitié des réponses étaient incomplètes et l'autre moitié était erronée (cf. Annexe. B-I. 4. 11. p. 151-152).

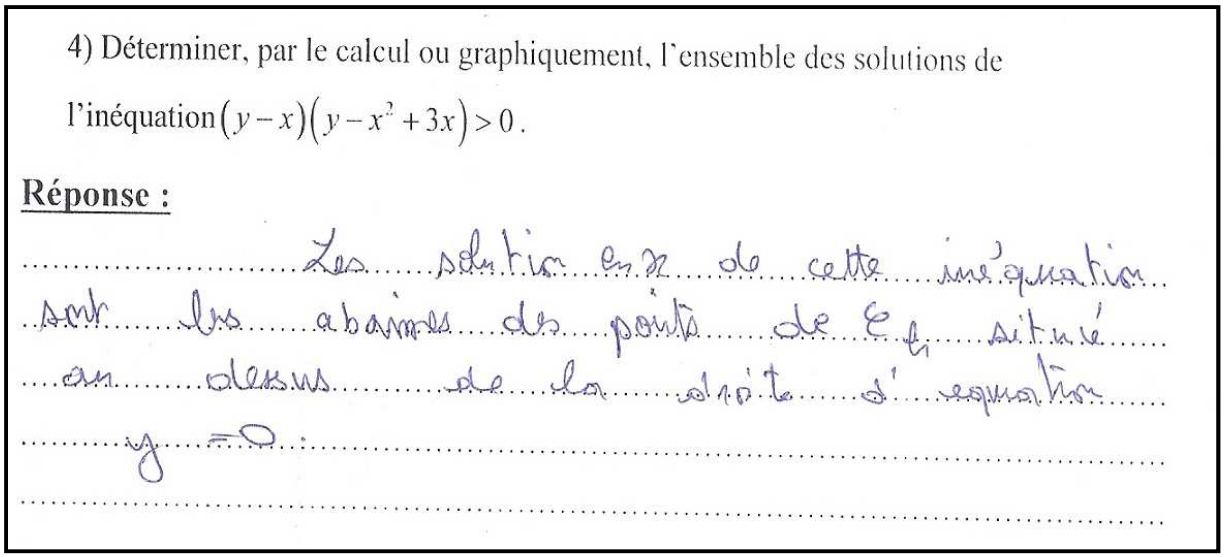
Le nombre de réponses des élèves s'appuyant sur la technique sémantique du registre graphique, notée $t_{9'-4-2-sé-grph}$, est de 8, soit environ $5{,}6\%$ de la totalité des copies des élèves et des étudiants, dont 6 une réponse étaient incomplètes et deux réponses qui étaient erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 11. p. 153-154).

Les réponses s'appuyant sur une technique du type syntaxique du registre algébrique, notée $t_{9''-4-2-sy-a\lg}$, sont au nombre de 28, soit environ $19{,}6\%$ des copies, dont 16 réponses incomplètes et 12 réponses erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 11. p. 155-156).

Le deuxième type de réponse sémantique du registre graphique notée par $t_{9'''-4-2-sé-grph}$ est représenté par 10 copies, soit environ 7% dont 4 réponses étaient exactes et les six autres réponses équitablement partagées par des réponses incomplètes et des réponses erronées (cf. Annexe. B-I. 4. 11. p. 157-159).

Les autres types de réponses sont au nombre de 19, soit environ $13{,}3\%$ (cf. Annexe. B-I. 4. 11. p. 160) et les non réponses sont 76, soit environ $53{,}1\%$ de la totalité des élèves et des étudiants.

Nous illustrons ci-dessous par un exemple d'un autre type de réponse.


4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Réponse :

Les solution en x de cette inéquation sont les abscisses des points de Cf situé au dessus de la droite d'equation y = 0.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination, par calcul ou par le graphique, de l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ sont respectivement donnés dans le tableau ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{10-4-2-M-alg-grph-incomplète}$	1	0,7
$t_{10-4-2-M-alg-grph-erronée}$	1	0,7
$t_{9'-4-2-sé-grph-incomplète}$	2	1,4
$t_{9'-4-2-sé-grph-erronée}$	6	4,2
$t_{9''-4-2-sy-alg-incomplète}$	16	11,2
$t_{9''-4-2-sy-alg-erronée}$	12	8,4
$t_{9'''-4-2-sé-grph-exacte}$	4	2,8
$t_{9'''-4-2-sé-grph-incomplète}$	3	2,1
$t_{9'''-4-2-sé-grph-erronée}$	3	2,1
Autre type de réponse	19	13,3
Non réponse	76	53,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.5.1

Le croisement des catégories logiques en termes de techniques sémantique, syntaxique et mixte avec le type de réponses exacte, incomplète et erronée montre clairement que seules les procédures sémantiques contenaient des réponses exactes. En revanche, les techniques syntaxiques et mixtes ne contenaient que des réponses incomplètes et erronées.

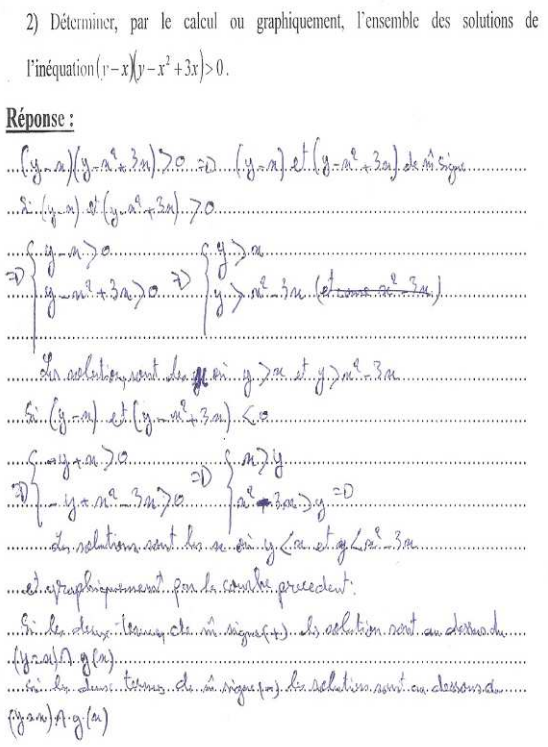
Ceci appuie notre analyse *a priori* dans laquelle nous avons expliqué que la résolution purement algébrique n'aboutira pas à la bonne réponse parce que ce type de résolution exige un niveau de connaissances non disponibles chez les élèves du secondaire faisant appel à l'étude des fonctions de deux variables réelles.

Le tableau ci-dessous présente la répartition des réponses.

	Exacte	Incomplète	Erronée	Total
Syntaxique	0	16	12	28
Sémantique	4	5	9	18
Mixte	0	1	1	2

Tableau 2.5.5.2

Ci-dessous des exemples illustrant notre catégorisation de réponses.


2) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Réponse :

$(y-x)(y-x^2+3x)>0 \Rightarrow (y-x)$ et $(y-x^2+3x)$ de m̂ signe

Si $(y-x)$ et $(y-x^2+3x)>0$

$\Rightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ y-x^2+3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y>x \\ y>x^2-3x \end{cases}$ (~~et comme x^2-3x~~)

Les solutions sont les x où $y>x$ et $y>x^2-3x$

Si $(y-x)$ et $(y-x^2+3x)<0$

$\Rightarrow \begin{cases} -y+x>0 \\ -y+x^2-3x>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>y \\ x^2-3x>y \end{cases} \Rightarrow$

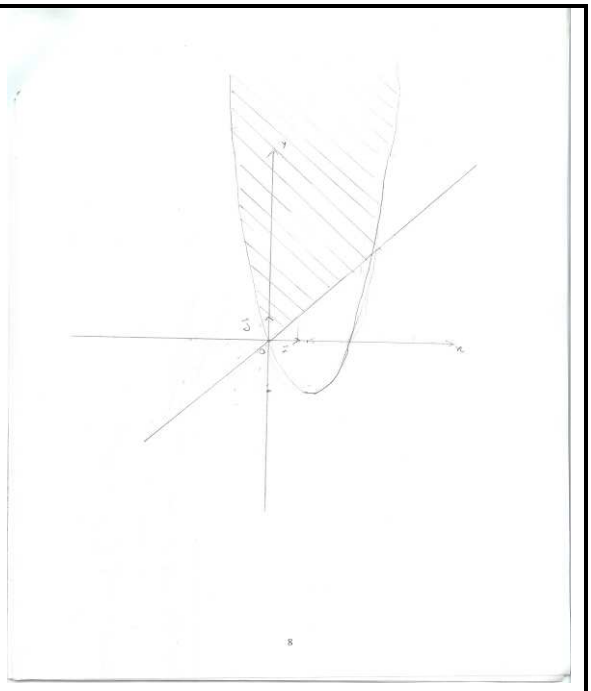
Les solutions sont les x où $y<x$ et $y<x^2-3x$

et graphiquement par la courbe precedent.

Si les deux termes de m̂ signe (+) les solution sont au dessus de $(y=x) \cap g(x)$

Si les deux termes de m̂ signe (−) les solutions sont au dessous de $(y=x) \cap g(x)$

Technique mixte $t_{10-4-2-M-a\lg-grph}$ **incomplète**



Technique sémantique $t_{9'''-4-2-sé-grph}$ **incomplète**

Le regroupement des différents types de techniques montre que nous sommes en présence de trois catégories principales, dont la première est sémantique du registre graphique, la deuxième est du type syntaxique du registre algébrique et la troisième est du type mixte articulant les registres algébrique et graphique.

Nous avons, ainsi, 18 réponses, soit environ 12,6% des techniques sémantiques du registre graphiques, 28 réponses, soit environ 19,6% des techniques étaient du type syntaxique du registre algébrique et les techniques mixtes articulant les registres algébriques et graphiques sont représentées par 2 réponses, soit environ 1,4% des copies.

Les résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination de l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ en terme de catégorisation sémantique et / ou syntaxique croisée avec les registres de représentation sémiotique sont représentés respectivement dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Effectif	Pourcentage
$t_{sé-grph}$	18	12,6
t_{sy-alg}	28	19,6
$t_{M-alg-grph}$	2	1,4
Autre type de réponse	19	13,3
Non réponse	76	53,1
Total	143	100,0

Tableau 2.5.5.3

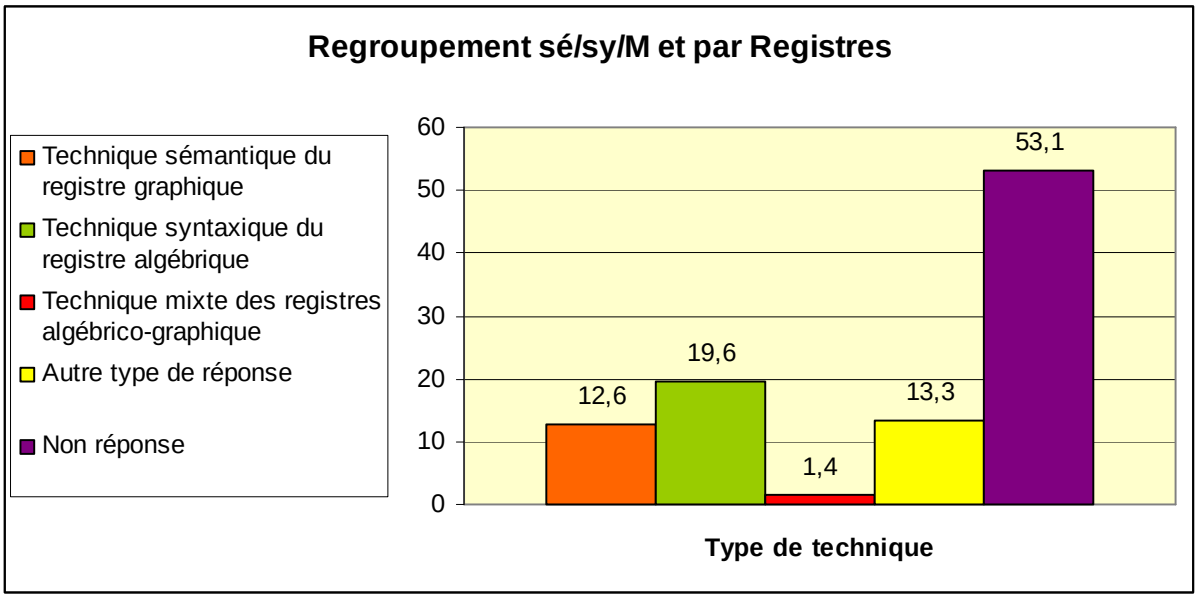


Figure II. 16 : Résultats des réponses des élèves et des étudiants relatives à la détermination, par le calcul ou par le graphique, de l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$

Le regroupement selon notre catégorisation sémantique et / syntaxe dans les résolutions montre que les techniques du type sémantique sont présentes dans 18 copies, soit

environ $12{,}6\%$ de la totalité des copies. Les nombre des réponses s'appuyant sur des techniques syntaxiques est de 28, soit environ $19{,}6\%$ de la totalité des copies et les techniques de résolution du type mixtes sont présentes dans 2 copies, soit $1{,}4\%$ de la totalité des copies.

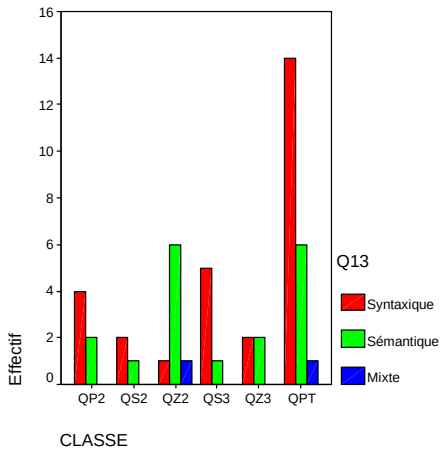
Les résultats sont représentés dans le tableau et l'histogramme ci-dessous.

	Algébrique	Graphique	Alg / Grph
Syntaxique	28	0	0
Sémantique	0	18	0
Mixte	0	0	2

Tableau 2.5.5.4

Le test de khi-deux, qui consiste à croiser les trois catégorisations logiques des différents types de procédures en termes de sémantique, syntaxique et mixte avec celui du niveau des élèves et étudiants, montre qu'il n'y pas de différence significative dans les procédures des trois niveaux. En effet, la valeur de khi-deux est de $10{,}421$ avec une signification asymptotique de $40{,}4\% > 5\%$ qui affirme que la différence, dans les procédures des élèves et étudiants des différentes classes n'est pas significative.

L'histogramme ci-dessous montre clairement que les élèves et les étudiants des différentes classes mobilisent à la fois les techniques sémantiques et les techniques mixtes dans la résolution de l'inéquation proposée même si les élèves de la classe de la deuxième année secondaire du lycée Ezzahrouni QZ2 et ceux de classes préparatoire ont mobilisé les trois types de procédures. D'un autre côté, nous remarquons que les techniques syntaxiques dominent dans les procédures des élèves et des étudiants des quatre classes QP2, QS2, QS3 et QPT. Par contre, les techniques sémantiques sont dominantes chez ceux de la QZ2 et équitablement partagées avec les techniques syntaxiques chez ceux de la classe QZ3.



Histogramme représentant les différents types de procédures suivies par chaque classe pour répondre à la question notée Q13

Conclusions relatives aux réponses des élèves et des étudiants concernant l'exercice n°4

Dans cet exercice, les élèves et les étudiants sont appelés à articuler les différentes représentations des objets équation, inéquation à une ou à deux variables et les fonctions en vue de déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation à deux variables réelles $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Pour la représentation graphique de Γ_f

Ce type de tâche est routinier et nous avons enregistré différentes manières de représentation graphique de Γ_f qui est un objet normalement bien connu par les élèves et les étudiants des niveaux concernés. Ils se sont appuyés sur différents types techniques articulant les objets équation, fonction et courbe. En effet, le premier type de technique de réponse $t_{sé-grph}$ et le deuxième type $t_{sé-alg-grph}$, que nous avons décrit par deux façons dans l'analyse *a priori*, consistent à faire le lien entre fonction linéaire et sa représentation graphique. Le troisième type de technique $t_{M-alg-grph}$ consiste à articuler le terme $f(x)=x$ et l'équation $y=x$ qui contribue à une affectation de valeurs à l'une des variables x ou y pour déduire l'autre qui permettent par la suite de représenter l'objet Γ_f. Ainsi, nous pouvons dire qu'une bonne partie des élèves articulent les objets équation, courbe et fonction linéaire qui sont des

objets acquis depuis la première année secondaire[95]. Ce qui est en accord avec nos analyses des programmes et des manuels de la première année secondaire qui montre que les objets équation du premier degré à deux inconnues réelles, les fonctions linéaires et les droites s'articulent mutuellement.

Concernant le nombre des non réponses, nous pensons qu'il est un peu élevé par rapport à la nature de l'objet en question puisque 33 réponses, soit environ $23{,}1\%$ de la totalité étaient autrement proposées.

Pour la représentation graphique de Γ_g

Les techniques exploitées par élèves et les étudiants sont multiples. En effet, d'une part, il y a ceux qui ont utilisé des techniques qui sont directement liées au type de tâche demandée (74 réponses) et d'autre part, il y a ceux qui ont répondu en s'appuyant sur des techniques, que nous avons développées dans l'analyse *a priori*, qui répondent au type de tâche demandée mais qui font appel à d'autres techniques relevant d'autres types de tâches comme par exemple l'étude complète de la fonction trinôme (s'appuyant sur le calcul du taux de variation ou sur un calcul de la dérivée) (13 réponses).

Pour la détermination du signe de l'expression $(y-x)(y-x^2+3x)$ pour des valeurs données

Ce type de tâche routinier proposé aux élèves du secondaire fait appel à des techniques de substitution des valeurs attribuées aux variables x et y en faisant appel à des calculs numériques afin de déterminer le signe de l'expression algébrique $(y-x)(y-x^2+3x)$ pour des valeurs données aux variables x et y.

Les élèves étaient capables d'effectuer la tâche, puisque 90 parmi 111, soit environ $81{,}8\%$, ont effectué des opérations de calcul algébrico-numériques. Par contre, nous n'avons enregistré que 33 réponses exactes, soit environ $33{,}67\%$ des réponses. Ceci met en question la place du calcul sur les expressions algébriques dans l'enseignement de l'algèbre au secondaire et en particulier dans les classes.

[95] L'équivalent de troisième en France.

Pour le placement des points A, B, C, D, E et F

Ce type de tâche qui consiste à placer des points dans un repère fait partie des connaissances et des compétences acquises par les élèves. En effet, nous avons enregistré 62 réponses exactes, 2 réponses incomplètes et 4 réponses erronées.

En revanche, le nombre des non réponses est assez élevé puisque 43 élèves, soit $38{,}7\%$ n'ont pas répondu à cette question. Ceci peut être lié à la contrainte du temps que nous avons donné pour répondre à ce questionnaire.

Pour la détermination de l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$

Rappelons que nous avons introduit les questions précédentes comme étant des questions intermédiaires qui, *a priori*, contribuent à enrichir le milieu objectif des élèves et des étudiants pour faciliter la tâche de résolution de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ dont la résolution algébrique n'est pas disponible chez les élèves et les étudiants de ce niveau d'études.

Le type de tâche proposé aux élèves et aux étudiants dans cette question consiste à déterminer, par un calcul ou par le graphique, l'ensemble des solutions de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Comme nous l'avons signalé dans l'analyse *a priori*, ce type de tâche dépasse largement les connaissances de la plupart des élèves et des étudiants. Ceci est confirmé par les résultats du dépouillement qui montrent que 76 copies, soit environ $53{,}1\%$ de la population n'ont pas donné de réponses. En revanche, les élèves qui ont répondu à cette question ont exploité les différents types de techniques où les techniques syntaxiques du registre algébrique étaient majoritairement dominantes avec 28 réponses parmi 48. Les techniques du type sémantique étaient au nombre de 18 et les techniques du type mixtes étaient dans deux copies d'élèves.

Les 28 réponses du type syntaxique ne contenaient aucune réponse exacte. Ceci confirme notre analyse à priori, dans laquelle nous avons expliqué que la procédure de résolution syntaxique n'est pas disponible chez ces élèves et étudiants puisque ce type de technique n'existe pas dans les programmes et les manuels scolaires et qu'il demande une maîtrise de l'étude des fonctions de deux variables réelles qui s'enseigne à un niveau universitaire assez élevé. En revanche, les réponses s'appuyant sur des techniques du type sémantique du registre graphique contenaient 4 réponses exactes.

Ceci montre d'une part la pertinence du passage au registre graphique pour résoudre certains problèmes algébriques et d'autre part la place importante que prend l'outil syntaxique chez les apprenants pour résoudre des problèmes mathématiques.

Cette question montre que 4 étudiants et élèves qui ont un niveau de connaissances mobilisables leur permettant de surmonter des difficultés d'une part, et de se détacher du contrat didactique en ayant la compétence d'articuler les différents registres algébrique et graphique dans des situations problèmes, d'autre part.

Enfin, la dominance de l'exploitation des techniques du type syntaxiques de résolution montre que la plupart des élèves et des étudiants n'étaient pas capables d'interpréter l'inéquation proposée dans les différents registres algébrique, graphique et fonctionnel d'une part, et l'enrichissement du milieu objectif des élèves, par les questions intermédiaires 1, 2 et 3, et celui des étudiants, par la question 1, n'a pas été pris en compte par la plupart des élèves, d'autre part.

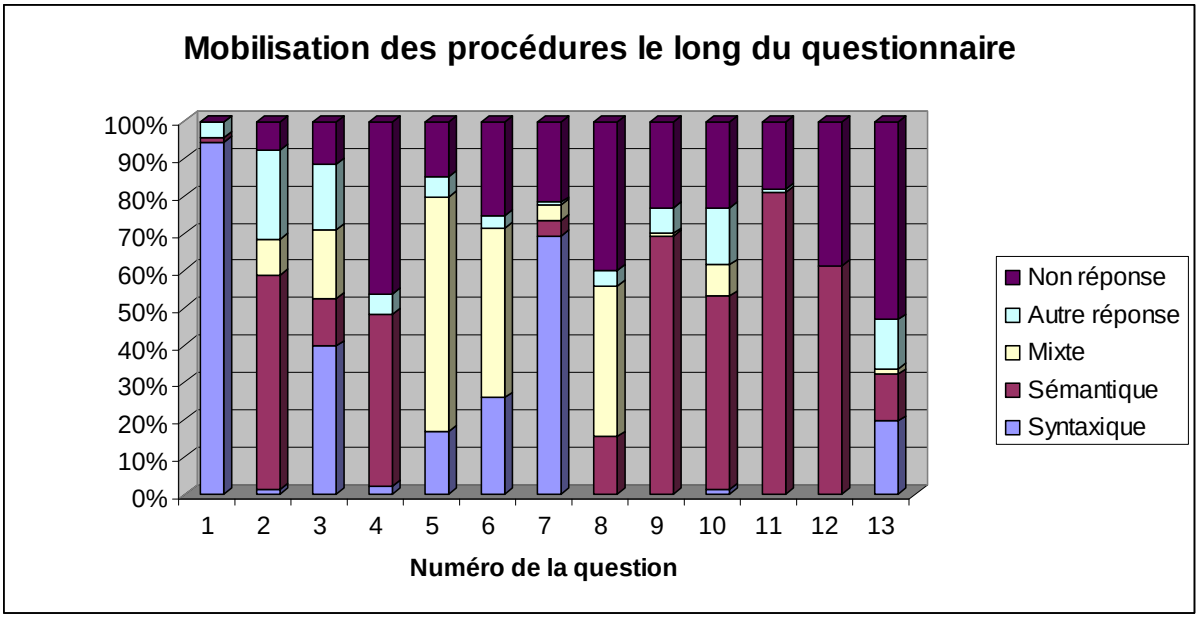
II. 3. Etude du profil des classes en terme de sémantique syntaxe

Introduction

Dans le paragraphe précédent, nous avons analysé les différentes techniques de réponse mobilisées par les élèves du secondaire et les étudiants des classes préparatoires en nous appuyant sur la catégorisation sémantique, syntaxique et mixte croisée avec différents registre de représentation sémiotiques développés par Duval.

Dans ce paragraphe, nous allons faire un récapitulatif des procédures des élèves et des étudiants, question par question, le long du questionnaire[96] et en tenant compte des cinq catégorisations principales en termes de sémantique, syntaxique, mixtes, autre réponse et non réponse. Nous obtenons ainsi l'histogramme suivant.

[96] Dans ce questionnaire nous avons 13 questions adressées aux élèves et 11 adressées aux élèves des classes préparatoires.



Nous remarquons qu'il est clair que nous ne pouvons pas conclure autre chose que ce que nous avons analysé dans le paragraphe II. 2 mais nous pensons que la question de savoir si la répartition des réponses est homogène ou non selon les classes pourrait nous éclairer sur la disponibilité ou pas d'un type de technique par rapport à l'autre et d'essayer de retrouver des réponses sur le pourcentage élevé des non réponses et les autres types de réponses dans certains types de tâches ou de questions posées dans le questionnaire.

Pour cela nous avons décidé de voir d'une façon plus précise la mobilisation des différents types de techniques, par les élèves et les étudiants de chaque classe, tout au long de 11 questions du questionnaire. Nous avons en effet écarté les questions $Q11$ et $Q12$ ne demandent qu'une mobilisation des techniques sémantiques d'une part et elles étaient proposées, uniquement, aux élèves du secondaire d'autre part.

Ainsi, nous avons repris notre grille d'analyse de départ dans laquelle nous décrivons les différentes procédures de tous les élèves et les étudiants des différentes classes et nous avons attribué à chaque groupe classe les différentes catégorisations obtenues par les élèves correspondants à ces groupes.

Ces résultats sont détaillés et analysés en s'appuyant sur un regroupement des différents histogrammes**.** Dans ces histogrammes nous notons les questions $Q1$, $Q2$, $Q3$, $Q4$, $Q5$, $Q6$, $Q7$, $Q8$, $Q9$, $Q10$, $Q13$ du questionnaire par $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

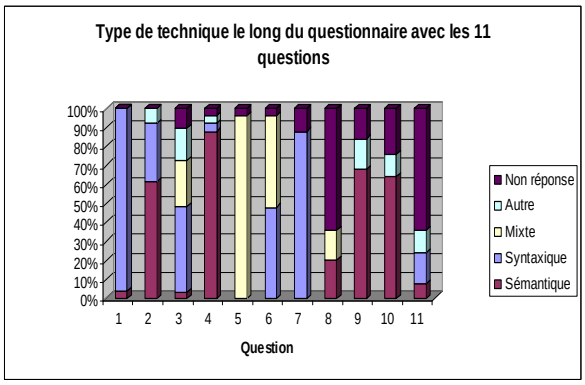
Le présent paragraphe est partagé en deux parties. D'un côté nous présentons dans un tableau récapitulatif les différents histogrammes et d'un autre côté nous effectuons nos analyses en nous appuyant sur ces histogrammes.

II. 3. 1. Récapitulatif des différents histogrammes relatif à chaque classe

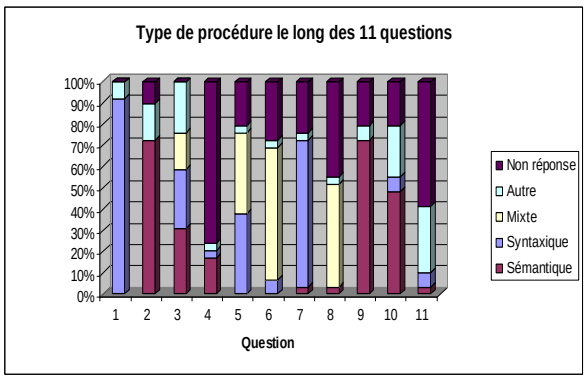
Nous présentons ci-dessous les histogrammes décrivons les différentes catégorisations des procédures de réponses des élèves et des étudiants de chaque classe (cf. Annexe, B-I. 5. 2. 1. p. 186-191). Dans ces histogrammes nous représentons nos différentes catégorisations logiques en termes de sémantiques, syntaxique et mixtes d'une part et les deux catégories de non réponse et autres types de réponses pour chaque classe.

Ci-dessous un récapitulatif des différents histogrammes représentant ces différentes catégories en fonction du niveau des différentes classes.

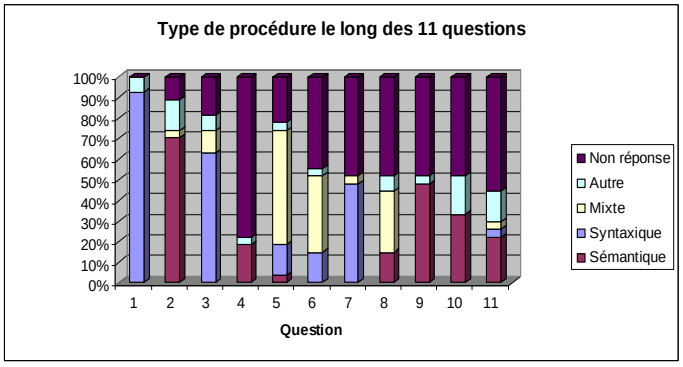
Rappelons que QP2, QS2, QZ2, QS3, QZ3 et QPT désignent respectivement la classe de deuxième année section sciences du lycée pilote de l'Ariana, la classe de deuxième année sciences du lycée Sakyet sidi youssef, la classe de deuxième année sciences du lycée Ezzahrouni, la classe de troisième année section mathématiques du lycée Sakyet sidi youssef, classes de troisième année section mathématiques du lycée Ezzahrouni et la classe préparatoire technologie de l'IPEIM de l'Université de Tunis El Manar.



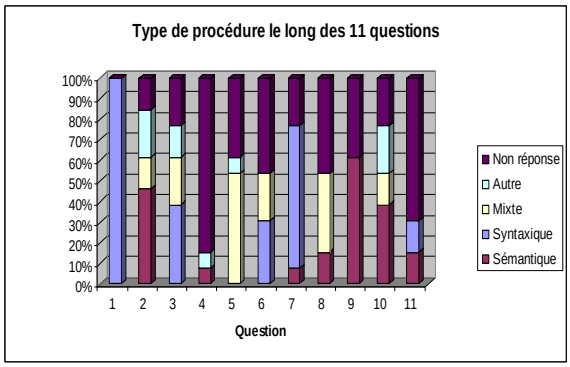
Elèves de la classe QP2



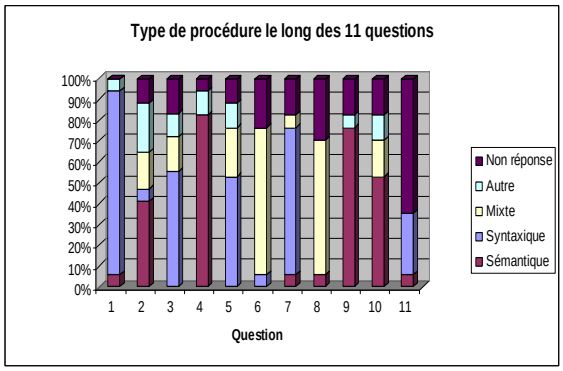
Elèves de la classe QS2



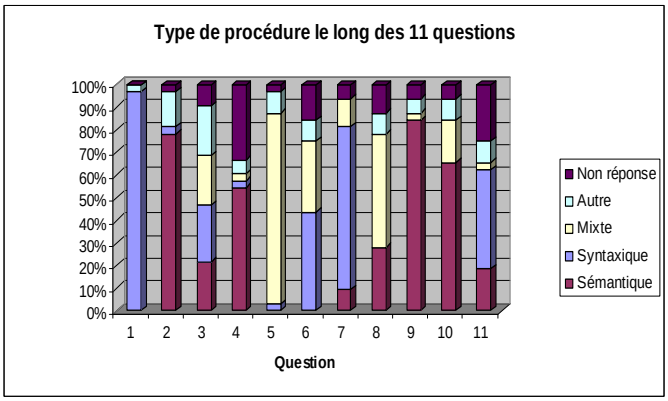
Elèves de la classe QZ2



Elèves de la classe QS3



Elèves de la classe QZ3



Elèves de la classe QPT

II. 3. 2. Analyse des résultats par classe

Tout d'abord, rappelons que les questions 1, 2 et 3 sont relatives aux questions $Q1$, $Q2$ et $Q3$ (exercice N°1), la question 4 est relative à la question $Q4$ (exercice N°2), les question 5, 6, 7 et 8 sont relatives aux question $Q5$, $Q6$, $Q7$ et $Q8$ (exercice N°3) et les questions 9, 10 et 11 sont relatives aux questions $Q9$, $Q10$, $Q13$ (exercice N°4).

La lecture des différents histogrammes relativement aux questions 1, 2 et 3 de l'exercice N°1 nous permet de confirmer les résultats de l'analyse que nous avons conduit dans le paragraphe II.2. Le pourcentage des non réponses est assez faible et il est réparti dans toutes les classes, même si on remarque qu'au niveau de la première question, seuls les élèves des classes QP2 et QS3 ont tous donné des réponses.

En revanche, la lecture des différents histogrammes relativement à la question 4 de l'exercice N°2 qui consiste à résoudre le système d'inéquation $(S)\begin{cases}-x+3y-1<0\\2x-y-2\geq 0\end{cases}$ nous permet de voir d'une part une proportion très importante de non réponses chez les élèves des classes QS2, QZ2 et QS3 et d'autre part une dominance de la mobilisation des techniques sémantiques s'appuyant sur le registre graphique chez les élèves des trois classes QP2, QZ3 et QPT, techniques qui seules permettaient aux élèves d'arriver au résultat.

Nous pouvons faire l'hypothèse que les non réponses peuvent être liées à l'absence d'une technique syntaxique permettant de résoudre ce problème et à l'insuffisance du travail d'articulation des deux registres algébrique et graphique, qui est assuré par l'interprétation des inéquations du système (S). Autrement dit, la non disponibilité d'une technique syntaxique et l'absence d'une interprétation de la part de ces élèves du système (S) peuvent avoir contribué à enregistrer ce pourcentage assez important de non réponses.

La lecture des différents histogrammes relativement aux questions 5, 6, 7 et 8 de l'exercice N°3 nous permet de dire qu'au niveau des deux premières questions 5, 6, qui consistent à déterminer les deux ensembles ζ et Δ, que les techniques syntaxique et mixtes ont été mobilisées par les élèves de toutes les classes même si nous avons enregistré un pourcentage élevé des non réponses chez les élèves des classes QZ2 et QS3. En revanche, au niveau de la question 7 qui consiste à résoudre le système d'équation $(S)\begin{cases}x^2+4x+y^2-6y+9=0\\4x+3y+9=0\end{cases}$ les élèves et les étudiants ont majoritairement mobilisé des techniques syntaxiques même si nous avons fait une tentative d'enrichir leur milieu objectif

par les questions intermédiaires 5, 6 pour les renvoyer au registre graphique qui facilite dans ce cas *a priori* la tâche de résolution. Ceci montre que les techniques syntaxiques sont mobilisées par les élèves et les étudiants dès qu'elles sont disponibles même si le milieu objectif, *a priori*, favorise le recours à la mobilisation des techniques sémantiques du registre graphique. Au niveau de la résolution de la question 8, qui consiste à résoudre le système $(S)\begin{cases} x^2+4x+y^2-6y+9=0 \\ y=m \end{cases}$ nous trouvons qu'elle a été traitée avec un pourcentage assez élevé des étudiants des classes préparatoires. En revanche, les non réponses étaient présentes avec un pourcentage assez élevé chez les élèves du secondaire, ceci alors même que la tâche demandée n'exige pas des connaissances autres que celles du secondaire aux niveaux considérés et en plus le recours au graphique permet de faciliter la tâche de la résolution.

La lecture des différents histogrammes relativement aux questions 9, 10 et 11 de l'exercice N°4 montre clairement que les élèves de la classe pilote n'ont mobilisé que des techniques sémantiques pour répondre aux deux types de tâche qui consistent à représenter les courbes Γ_f et Γ_g. Par contre, les autres élèves et étudiants ont mobilisé des techniques sémantiques, mixtes et syntaxiques, et l'on a enregistré un pourcentage assez élevé de non réponses chez les élèves de la classe QZ2. Enfin, au niveau de la dernière question qui consiste à résoudre l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$, nous remarquons que nous avons un pourcentage très élevé des non réponses chez les élèves du secondaire et assez élevé chez ceux des classes préparatoires. Ceci pourrait s'expliquer par l'absence d'un outil syntaxique disponible d'une part, et par l'absence d'une articulation entre fonction / courbe / équation. En effet, le milieu objectif de ces élèves et étudiants à été enrichie par les fonction en supposant qu'ils puissent articuler l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ avec celle de l'écriture $(f(x)-x)(g(x)-x^2+3x)>0$ en vue de conclure qu'il suffit de déterminer la région du plan que nous avons représentée dans l'analyse *a priori*. Ce type de question montre qu'en en absence d'un outil syntaxique où seul l'outil sémantique est disponible pour résoudre un certain type de tâche et le pourcentage des non réponses est assez élevé.

Pour conclure ces analyses, il ressort de notre lecture longitudinale de chaque histogramme relatif à chaque classe, les résultats suivants :

- ✓ Les élèves de la classe pilote et les étudiants des classes préparatoires ont montré une capacité à articuler les points de vue sémantiques et syntaxiques. En effet, ils ont mobilisé des techniques sémantiques lorsque le type de tâche favorise un recours au graphique (voir l'exercice n°1 question n°1 résolution graphique) d'une part, et des

techniques sémantiques pour interpréter certains problèmes relevant de l'algébrique dont la résolution purement algébrique est impossible à ce niveau d'élèves (Voir l'exercice n°2 et l'exercice n°3 questions1b) et 2. et l'exercice n°4. question 4), d'autre part.

- ✓ Les élèves des classes de deuxième année secondaire QS2 et QZ2 ainsi que ceux de la troisième année secondaire QS3 et QZ3 ont montré qu'ils ne mobilisent majoritairement l'outil sémantique que si le type de tâche l'exige (voir l'exercice n°1 question n°1 résolution graphique, la représentation graphique des deux fonctions f et g dans l'exercice n°4). Par contre, ils mobilisent prioritairement des techniques syntaxiques et mixtes dans la résolution des tâches de résolution ouvertes. En outre, il apparaît que si l'outil syntaxique de résolution n'est pas disponible à leur niveau ils ne donnent pas de réponses. C'est une question ouverte et à laquelle notre travail ne permet pas d'apporter une réponse.

Conclusion de l'expérimentation

Tout au long de ce chapitre, nous avons analysé un questionnaire qui était adressé à des élèves des niveaux de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique, troisième année secondaire section mathématiques et aux étudiants de première année universitaire des classes préparatoires aux études d'ingénieurs.

Dans ce questionnaire, nous avons articulé les objets mathématiques d'équation, inéquation et fonction faisant partie du programme de l'enseignement secondaire d'une part, et nous avons proposé des types de tâches dont la résolution fait appel parfois à plusieurs types de techniques mobilisant les points de vue sémantique et / ou syntaxique et parfois des tâches qui ne peuvent se traiter, aux niveaux concernés, qu'avec un seul type de technique, d'autre part.

D'un autre côté, nous avons essayé d'introduire des questions intermédiaires qui enrichissent le milieu objectif des élèves et des étudiants les incitant à faire des changements de registres pour pouvoir répondre au type de tâche proposé.

L'analyse du questionnaire qui s'est appuyé essentiellement sur notre catégorisation logique en termes de mobilisation des points de vue sémantiques et / ou syntaxique dans les résolutions et qui a été croisé avec la catégorisation des registres de représentation sémiotique de Duval nous a permis de conclure que

- ✓ Les élèves mobilisent les techniques syntaxiques de résolution dès qu'elles sont disponibles. Ceci est assez remarquable dans les réponses des élèves à la question de

résolution de la deuxième question de l'exercice n°1 qui consiste à résoudre l'équation $x^2 - 2 = |3x + 2|$ et ce même si le milieu des élèves à été enrichie par une question intermédiaire faisant appel à la résolution graphique de l'équation $x^2 - 2 = 3x + 2$.

- ✓ Dans le cas de certains types de tâches qui ne se résolvent pas par des techniques syntaxiques du registre algébrique mais qui font appel à un point de vue sémantique qui consiste à l'interpréter dans un registre graphique, nous remarquons que les élèves qui mobilisent prioritairement des techniques syntaxiques ne donnent le plus souvent pas de réponses. Ceci est assez remarquable chez les élèves des classes QS2, QZ2, QS3 et QZ3.
- ✓ L'articulation équation / fonction est remarquablement absente au niveau de la résolution de l'exercice n°4 alors que les questions intermédiaires incitaient les élèves à représenter les courbes Γ_f et Γ_g associées aux fonctions f et g ; la résolution de l'inéquation finale $(y - x)(y - x^2 + 3x) > 0$ n'a pas été interprétée comme inéquation faisant appel à l'étude de la positivité de l'expression $(f(x) - x)(g(x) - x^2 + 3x) > 0$ qui peut se faire en s'appuyant sur des interprétations à la fois algébriques et graphiques et qui mèneront à la bonne réponse.
- ✓ Un pourcentage assez remarquable des élèves et des étudiants et en particulier ceux des classes QZ2, QS3 et QZ3 ne mobilisent l'outil sémantique de résolution que si le type de tâche demandé l'impose. Sinon ils mobilisent majoritairement le point de vue syntaxique s'appuyant sur des techniques du registre algébrique. Ce phénomène est remarquable dans les réponses aux questions 1, 3 et 7 du questionnaire.
- ✓ La différence assez remarquable entre les différentes procédures mobilisées lors de la résolution des exercices du questionnaire entre les élèves du même niveau comme la classe pilote QP2 et les deux autres classes QS2 et QZ2 nous fait penser qu'elle pourrait être liée à la pratique des enseignants en classe. Cette question reste ouverte, et ouvre un champ de recherche à explorer.

Chapitre II
De la parabole à la fonction trinôme au lycée

Introduction

Nous avons explicité au chapitre I de la partie A les relations logiques entre équation, inéquation et fonction pour lesquelles nous avons montré que le cadre logique propose un point de vue unificateur qui consiste dans une relecture *a posteriori* de ces différentes relations.

Au chapitre IV de la partie A, l'étude des programmes et des manuels de l'enseignement secondaire tunisien a mis en évidence un recul du travail sémantique au profit du travail syntaxique même s'il y a de nombreuses applications nécessitant une articulation entre les deux points de vue. En particulier, pour ce qui concerne les relations entre courbes, équations et fonctions, nous avons vu que la parabole est introduite en tant que courbe représentative des fonctions trinômes et donnée par une équation de la forme $y = ax^2 + bx + c$, où la lettre y est le plus souvent interprétée comme nom de fonction et non pas comme une lettre de variable. La parabole apparait alors comme subordonnée à la fonction trinôme et sa construction peut se faire au moyen des techniques purement syntaxiques. En plus, l'étude expérimentale, au chapitre I de la partie B, en terme d'articulation sémantique / syntaxe des objets équations, inéquations et fonctions, effectuée auprès des élèves du secondaire et des étudiants des classes préparatoires, a montré clairement un recul de l'emploi des techniques sémantiques en faveur des techniques syntaxiques de résolution et ce même dans des cas où le type de tâche demandé est du genre sémantique que syntaxique.

D'un autre côté, l'étude historique et épistémologique que nous avons réalisée dans le chapitre III de la partie A, sur la genèse des objets mathématiques équation, inéquation et fonction, montre clairement que le concept de fonction s'inscrit dans le sens d'équation fonctionnelle et de recherche d'une relation entre une abscisse et une ordonnée qui satisfait certaines conditions. Ceci éclaire le lien essentiel entre problèmes géométriques et caractérisation algébrique.

Les résultats de ces analyses didactiques et épistémologiques renforcent notre

questionnement lié à la subordination entre courbe et fonction associée. Nous pensons ainsi, que le passage fonctions trinômes et paraboles mérite d'être mieux explicité surtout qu'on a tendance, dans l'enseignement secondaire, à associer la représentation graphique des fonctions trinômes, qui est une fonction algébrique[97] dont la représentation graphique se ramène à la forme relationnelle $f(x, y) = 0$ où f est un polynôme et dont le degré est l'ordre de la courbe, à l'objet parabole. Ce qui n'est pas toujours le cas puisque l'étude logique et historique montre bien qu'en portant en ordonnées les valeurs d'une fonction trinôme y de la variable x, dont les valeurs sont portées en abscisses, on obtient une courbe ; mais inversement, si nous avons une courbe qui est dans notre cas une parabole, on peut la considérer comme associée à une ou plusieurs fonctions trinômes. Ceci s'explique par le fait que l'équation d'une courbe algébrique est dépendante du système de coordonnées[98] si bien qu'elle ne sera plus associée à la même fonction. Ceci ouvre un possible reversement de la relation entre fonction trinôme et parabole telle qu'elle est posée actuellement dans l'enseignement secondaire tunisien.

L'examen des programmes tunisiens de la classe de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique nous a permis de faire l'hypothèse qu'il est possible de proposer à des élèves de ce niveau un travail favorisant l'articulation courbe, équation et fonction par une approche équationnelle de l'objet parabole défini par l'une de ses caractérisations géométriques, puis de mettre en rapport avec une fonction trinôme associée.

Ce présent chapitre est construit de la façon suivante. Dans un premier temps, nous avons présenté la description de la méthodologie de la conception de la situation d'enseignement proposée à un groupe d'élèves de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique. Nous faisons l'hypothèse qu'une telle situation peut nous fournir des indicateurs sur la manipulation des objets mathématiques par les élèves et leur rapport aux écritures et à ces objets. Dans un deuxième temps, nous avons passé un entretien avec des enseignants du secondaire et étudiants en première année de master en didactique des mathématiques dont l'objectif est de repérer le point de vue des praticiens sur la situation d'enseignement d'une part et sur leurs conception de la mobilisation des deux points de vue sémantique et syntaxique, dans leur enseignement d'une manière générale, et plus particulièrement dans le traitement des écritures algébriques, d'autre part.

[97] Les fonctions algébriques sont celles où la variable n'est affectée que par des opérations algébriques finies comme l'addition, la multiplication, la division, l'extraction de racines et plus généralement la résolution d'équations algébriques.
[98] Coordonnées orthogonales ou obliques.

I. Conception et mise en œuvre de la situation d'enseignement

Introduction

Avant d'aborder la conception de notre expérimentation, nous pensons qu'il est intéressant de remarquer que Trgalova (1995) a présenté une étude complète, dans laquelle elle a situé les coniques dans le savoir mathématique en indiquant les différentes phases du développement des mathématiques et de la géométrie. En plus, elle a examiné les différentes approches purement géométriques[99], géométrico-analytiques[100], géométrico-projectives[101] et géométrico-cinématiques[102] de ces coniques.

En ce qui nous concerne, notre objet d'étude est en parfaite liaison avec les équations algébriques de la forme $f(x,y)=0$ où f est un polynôme de degré deux. Pour cela, nous avons choisi de présenter la résolution mathématique de l'équation générale $f(x,y)=0$ avec $f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F$ que nous essayons de mettre en rapport avec l'objet parabole.

D'une façon générale, une conique est caractérisée par une équation du second degré à deux variables réelles. De plus, les études algébriques montrent que toute équation quadratique représente une conique propre ou dégénérée et par la suite il y aura une équivalence entre les équations algébriques de degré deux et les sections coniques. Ce qui renforce notre point de vue qui consiste à renverser la relation qui existe entre la parabole et les fonctions trinômes par le biais des équations cartésiennes.

Dans le paragraphe suivant nous essayons d'expliciter les relations qu'entretiennent les conique et en particulier l'objet parabole avec les équations cartésiennes du second degré à deux variables réelles.

I. 1. Etude mathématique de l'équation $\boldsymbol{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0}$

Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé $R=\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. Soit $(A,B,C,D,E,F)\in IR^6$. On considère la courbe Γ d'équation cartésienne : $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

[99] La théorie des coniques développée par les Grecs et en particulier Apollonius. Cette géométrie est appelée géométrie synthétique.
[100] Du 17ème siècle qui apportée un point de vue différents sur ces courbes grâce aux outils qu'offre le calcul algébrique.
[101] Du 17ème siècle qui permet de voir une conique comme représentation perspective d'un cercle.
[102] Qui a apportée l'idée du mouvement où les coniques sont définies comme des trajectoires d'un point en mouvement régulier.

Si $(A,B,C)=(0,0,0)$, l'étude de Γ est immédiate : Γ est une droite, l'ensemble vide ou le plan.

Supposons donc que $(A,B,C)\neq(0,0,0)$.

On forme le discriminant réduit : $\Delta = B^2 - AC$

1) Si $\Delta \neq 0$, alors Γ est une conique à centre, c'est-à-dire une ellipse ou une hyperbole (éventuellement le vide, un point ou deux droites sécantes). On détermine le centre $\Omega(x_0, y_0)$ de Γ en résolvant le système de deux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)=0$$

où $\begin{array}{l} f : IR^2 \to IR \\ (x,y)\mapsto f(x,y)=Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F \end{array}$ et $\frac{\partial f}{\partial x}$ est la dérivée partielle première de f par rapport à x et $\frac{\partial f}{\partial y}$ est la dérivée partielle première de f par rapport à y.

Ayant obtenu $\Omega(x_0, y_0)$, on effectue un changement d'origine. On considère le repère $R' = \left(\Omega; \vec{i}, \vec{j}\right)$ déduit de R par changement d'origine (on dit aussi : par translation). Les formules de changement de repère sont :

$x = x_0 + X$, $y = y_0 + Y$ où (x,y) désignent les coordonnées d'un point M du plan par rapport à R et (X,Y) désignent les coordonnées de M par rapport à R'.

Il existe alors $F_1 \in IR$ tel que Γ admette pour équation cartésienne dans R' :

$AX^2 + 2BXY + CY^2 + F_1 = 0$.

On effectue ensuite un changement de repère par rotation. Considérons la base ortho normale $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ déduite de $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ par une rotation d'angle θ :

$\begin{cases} \vec{I} = \vec{i}\cos\theta - \vec{j}\sin\theta \\ \vec{J} = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta \end{cases}$ et le repère orthonormal $R'' = \left(\Omega; \vec{I}, \vec{J}\right)$.

Les formules de changement de repère sont :

$\begin{cases} X = u\cos\theta - v\sin\theta \\ Y = u\sin\theta + v\cos\theta \end{cases}$ en notant (X,Y) les coordonnées d'un point M dans le repère R' et (u,v) les coordonnées de M dans R''.

En reportant dans l'équation en X et Y de la conique, on obtient une équation contenant des termes en u^2, uv, v^2. On détermine θ pour que le terme en uv (appelé terme rectangle) ait un coefficient nul.

Alors, Γ admet dans R'' une équation cartésienne du type :

$A_1u^2 + B_1v^2 + F_1 = 0$.

En isolant F_1, et (si $F_1 \neq 0$) en divisant par F_1, on se ramène à une équation du type :

$\alpha u^2 + \beta v^2 = 1$.

Selon les signes de α, β, on déduit la nature et les éléments caractéristiques de la conique Γ.

On montre :

Si $B^2 - AC < 0$, alors Γ est du genre ellipse.

Si $B^2 - AC > 0$, alors Γ est du genre hyperbole.

2) Si $\Delta = 0$, alors Γ est du genre parabole.

Alors, $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ est un carré parfait, et il existe $(\lambda, \theta) \in IR^* \times IR$ tel que, pour tout $(x, y) \in IR^2$: $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda(-x\sin\theta + y\cos\theta)^2$.

Considérons la base orthonormée $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ déduite de $\left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ par la rotation d'angle θ, et le repère orthonormé $R' = \left(O; \vec{I}, \vec{J}\right)$. Les formules de changement de repère sont :

$\begin{cases} x = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ y = X\sin\theta + Y\cos\theta \end{cases}$ où (x, y) désignent les coordonnées d'un point M dans R et (X, Y) les coordonnées de M dans R'. On a alors $Y = -x\sin\theta + y\cos\theta$, donc l'équation cartésienne de Γ dans R' est de la forme :

$\lambda Y^2 + 2\alpha X + 2\beta Y + \gamma = 0$ où $\lambda \in IR^*, \alpha, \beta, \gamma \in IR$.

En regroupant les termes en Y^2 et Y pour débuter un carré et en regroupant ensuite les termes en X et constantes, un changement de repère par changement d'origine permet d'obtenir pour Γ une équation réduite du type $v^2 = 2\mu u$ et donc Γ est une parabole.

Ainsi, les coniques peuvent être considérées comme des lieux géométriques des points du plan qui vérifient une relation géométrique et métrique donnée. Ces définitions s'appuient en général sur les propriétés focales des coniques[103].

Cette étude mathématique montre clairement les liens qui existent entre les coniques et leurs équations cartésiennes au niveau du savoir savant. En particulier, l'objet parabole avec son équation cartésienne associée : $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ où $\Delta = B^2 - AC = 0$. Ceci soutient notre investigation didactique de départ qui montre une certaine problématique liée à une subordination entre courbe et fonction puisque la caractérisation institutionnelle du passage entre fonction trinôme et parabole efface le fait que l'équation d'une courbe algébrique est dépendante du système de coordonnées qui ne sera plus associée à la même fonction.

Pour cela, nous avons envisagé de construire une situation d'enseignement qui consiste, à partir d'une définition géométrique de la parabole en termes d'équidistance à une droite et à un point donné pour déterminer son équation, à dégager la fonction associée.

I. 2 Choix didactiques et objectifs

I. 2. 1. La construction et le choix du contenu de la situation d'enseignement

Nous avons envisagé une situation qui rend possible un travail sémantique lié à l'équation cartésienne associée à la parabole, à savoir qu'elle est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées vérifient l'équation du second degré à deux inconnues réelles.

---

[103] Etant donnés un point F et une droite D, une conique est définie comme lieu des points M du plan tels que le rapport des distances du point M au point F et la droite D est constant, c'est-à-dire $\frac{MF}{MH} = e$, H étant le projeté orthogonal de M sur la droite D. Le point F est appelé foyer, la droite D est appelée directrice et le nombre e excentricité de la conique. Si la droite D ne passe pas par le point F et l'excentricité e est strictement positive, on obtient les trois cas suivants :

- ✓ Si $0 < \frac{MF}{MH} < 1$ alors la conique est une ellipse.
- ✓ Si $\frac{MF}{MH} = 1$ alors la conique est une parabole.
- ✓ Si $\frac{MF}{MH} > 1$ alors la conique est une hyperbole.

Si $F \in D$ et si $e = 1$ alors la conique est réduite à la perpendiculaire à la directrice D passant par le point F qui est le cas dégénéré d'une parabole.
Si $F \in D$ et $e > 1$ c'est une hyperbole dégénérée qui n'est autre que le cas de deux droites sécantes au point F.
Si $F \in D$ et $e < 1$ on obtient trivialement le point F et même si l'excentricité e tend vers zéro alors la distance des points M à F tends vers zéro et par la suite le lieu des points ne contient qu'un seul point qui n'est autre que le foyer F, ainsi il n'existe pas de définition du cercle par les coniques.

Cette situation est basée sur une analyse des programmes et des manuels scolaires tunisiens de la deuxième année secondaire section science appuyée par une catégorisation syntaxique et sémantique des différentes praxéologies didactiques développées par Chevallard d'une part et sur les analyses épistémologiques de la genèse et la fonction de l'objet équation et les différents liens qu'il entretient avec les objets géométriques, en particulier, l'objet parabole d'autre part. Ces analyses ont permis de repérer une certaine incohérence des programmes par rapport aux mathématiques savantes. En effet, les élèves rencontrent, pour la première fois, l'objet parabole par une approche purement fonctionnelle puisqu'il est interprété en tant que représentation graphique de la fonction trinôme. Par contre, l'étude historique et épistémologique, sur la genèse de cet objet, montre que la parabole est caractérisée, en premier lieu, par son aspect géométrique ensuite par son aspect algébrique et en particulier une caractérisation cartésienne basée sur une écriture équationnelle.

Or Robert (1998) souligne que ceci nécessite des stratégies spécifiques pour le chercheur qui doit explorer et analyser les liens correspondants que peuvent entretenir les notions mathématiques à introduire et celles déjà enseignées et construite en partie par les élèves.

Cette dimension d'analyse nous a servi comme élément indicateur sur le saut que les élèves ont à franchir pour aller aux connaissances visées et par la suite, nous avons pu mieux préciser la manière d'introduire et de mettre en fonction différentes notions avec nos objets mathématique d'étude.

Pour construire le contenu de la séquence d'enseignement, nous nous appuyons sur le point de vue de Robert (1998) qui propose quatre caractères qui ne sont pas nécessairement indépendants mais qui nous montre les différents rapports entre l'objet d'étude et les notions antérieures.

Ces caractères sont :

- ✓ Le degré de généralisation de la notion par rapport aux notions antérieures déjà présentées aux élèves.
- ✓ Le degré de formalisation attaché à la notion.
- ✓ Le caractère unificateur de la notion par rapport à certaines notions antérieures.
- ✓ La fonction que remplit la notion dans les mathématiques dont disposent les élèves.

Ces analyses du statut des notions mathématiques à enseigner nous permettent de concevoir de quelle manière nous pouvons les introduire en classe et plus particulièrement dans l'élaboration d'un problème non standard à travers lequel nous incitons les élèves à faire

certains changements de mise en fonctionnement des connaissances et certaines adaptations avec les théorèmes, les propriétés ou les définitions utilisées.

Notre objectif est de partir d'une propriété géométrique de l'objet parabole pour dégager la fonction associée. Or, l'approche géométrique de l'objet parabole s'appuie sur une définition qui n'est pas familière aux élèves du niveau considéré[104] ; mais son exploitation dans le registre algébrique en terme de calcul de distance d'un point à un autre d'une part et d'un point à une droite d'autre part sont, *a priori*, deux notions mathématiques antérieures déjà présentées aux élèves, compte tenu des programmes et des manuels actuels. Ainsi, nous avons supposé que les élèves ont une certaine compétence pour pouvoir généraliser et aborder le problème avec des connaissances antérieures sachant qu'ils sont capables de calculer une distance entre un point $M(x, y)$ dont les coordonnées sont variables et un autre point F d'un repère orthonormé de coordonnées données d'une part et de calculer la distance entre le point $M(x, y)$ et une droite D d'équation donnée d'autre part.

L'accès à la caractérisation équationnelle de l'objet parabole se déduit par une traduction de l'équidistance à travers un formalisme algébrique qui ne nécessite d'introduire aucune nouveauté et se traduit par une équation du second degré à deux variables réelles exprimant l'égalité des deux distances calculées auparavant.

Cette caractérisation équationnelle du second degré à deux variables réelles peut être introduite comme une extension de notions d'équations du premier degré à deux inconnues réelles déjà introduites. Robert (1998) ajoute que ceci peut être supposé comme étant une réponse à de nouveaux problèmes précis que les élèves peuvent comprendre mais qu'ils ne peuvent pas résoudre complètement, tel le cas des équations du second degré à deux variables ou inconnues réelles. Pour cela, nous pensons qu'une approche ponctuelle de notre objet a un caractère unificateur par rapport aux notions d'équations du premier et du second degré à deux inconnues réelles que les élèves peuvent manipuler dans un contexte de substitution de certaines valeurs numériques à la variable x pour déduire y et d'autres à la variable y pour déduire x.

Ainsi, nous supposons que les élèves sont, *a priori*, capables d'effectuer les tâches suivantes :

- ✓ Reconnaitre la construction d'une droite à partir de son équation cartésienne.
- ✓ Placer des points dans un repère orthonormé.

[104] Cette caractérisation géométrique fait parti du programme de la quatrième année secondaire section mathématique qui est l'équivalent de la terminale scientifique en France.

- ✓ Mobiliser des connaissances pour calculer la distance entre deux points ainsi que la distance d'un point à une droite.
- ✓ Interpréter certaines écritures algébriques et les mettre en rapport avec des notions antérieures.
- ✓ Montrer des égalités entre des expressions algébriques.
- ✓ Placer des points dans un repère orthonormé en s'appuyant sur une relation entre deux variables.
- ✓ Interpréter graphiquement certains objets mathématiques.

En conclusion, ces analyses du statut des notions à enseigner nous a permit de conclure qu'il est possible d'introduire, auprès des élèves des classes de deuxième année secondaire section sciences, les paraboles par le biais de la propriété de l'équidistance par rapport à une droite et un point n'appartenant pas à cette droite pour aboutir à l'équation cartésienne correspondante et par la suite à la fonction trinôme.

Dans le paragraphe suivant, nous allons préciser les objectifs visés par la situation proposée aux élèves de la deuxième année secondaire section sciences.

I. 2. 2. Les objectifs visés à travers la situation d'enseignement

La situation d'enseignement que nous avons conçue a pour objectif général de faire une approche des représentations géométriques et algébriques de l'objet parabole pour dégager la fonction trinôme associée.

L'objet parabole peut être défini par la propriété fondamentale des foyers et de la directrice, que nous appelons définition *mono-focale*, comme étant un lieu des points du plan équidistants par rapport à un point et une droite donnée. Ce qui correspond au cas où l'excentricité de la parabole est égale à un. Cette définition, que nous comptons exploiter algébriquement, permet d'avoir des écritures algébriques en relation avec les équations du second degré à deux variables réelles particulières où les élèves peuvent être soumis à des déséquilibres au niveau de leurs connaissances.

Nous rejoignons le point de vue de Robert (1998) qui explique que ceci permet d'avancer dans une construction plus élaborée, grâce à des changements de points de vue, certaines adaptations, certaines articulations entre les connaissances et des mises en relation de ces écritures algébriques même si les connaissances sont partiellement disponibles.

Les objectifs visés dans cette situation d'enseignement consistent à :

- ✓ Tester un milieu pour l'articulation sémantique / syntaxe.
- ✓ Repérer le statut des lettres et des variables chez les élèves.
- ✓ Repérer le statut, la signification et la manipulation d'une équation à deux variables chez les élèves.
- ✓ Voir, de plus près, comment les élèves articulent les différents registres de représentations sémiotiques lorsqu'ils traitent des objets mathématiques exploitant un aspect équationnel.
- ✓ Aider les élèves à faire des changements de mises en relation de certaines écritures algébriques.
- ✓ Faire rencontrer aux élèves l'objet courbe, qui est dans notre cas une parabole, à partir d'une relation entre une abscisse et une ordonnée sans faire appel à l'aspect fonctionnel.
- ✓ Voir à quel point le point de vue sémantique est mobilisable par rapport au point de vue syntaxique dans les résolutions.
- ✓ Voir ce que les élèves mobilisent pour faire la correspondance entre l'équation générale de la droite et le cas particulier traité, en s'appuyant sur les cadre d'analyse de Robert (1998) en terme de mise en fonctionnement des connaissances.
- ✓ Voir le niveau de généralisation chez les élèves.

Cette mise au point des objectifs nous permet d'avoir des outils pour analyser le déroulement de la situation d'enseignement et de voir à quel point les élèves peuvent mobiliser la représentation de l'ensemble des solutions d'une équation à deux variables pour dégager la fonction trinôme d'une part et comment mettre en relation les aspects équationnel et fonctionnel dans les raisonnements mathématiques d'autre part.

L'expérimentation est, *a priori*, une des premières occasions, dans laquelle les élèves manipulent, au même temps, des équations du second degré à deux variables réelles et des représentations graphiques des fonctions trinômes.

II. Analyse *a priori* de la séquence d'enseignement

Introduction

Le choix du contexte de notre expérimentation a déterminé le niveau des élèves que nous avons choisi pour réaliser la séquence expérimentale. En Tunisie, les équations du premier degré à deux variables réelles s'enseignent à partir de la première année secondaire et les équations cartésiennes des droites et la notion du calcul de la distance d'un point à une

droite s'enseignent officiellement au niveau de la deuxième année secondaire. De même, l'enseignement des fonctions trinômes est assuré à ce même niveau.

Pour cela nous avons décidé de travailler avec des élèves de deuxième année secondaire qui ont étudié ces objets mathématiques.

II. 1. Méthodologie suivie dans la classification des différentes stratégies du groupe des élèves

Cette activité vise d'une part à mettre en relation l'interprétation géométrique et le calcul algébrique et d'autre part, à montrer aux élèves que les coniques, et en particulier les paraboles, qui peuvent être interprétées en tant que représentations graphiques des fonctions trinômes et rationnelles, peuvent être aussi interprétés en tant que représentations graphiques de l'ensemble des solutions d'équations à deux variables.

Il va donc falloir analyser les tâches d'une manière précise pour pouvoir anticiper au mieux les mises en fonctionnement des connaissances des élèves et leur interdépendance avec les notions mathématiques mises en œuvre.

Pour cela, nous avons choisi, dans notre analyse *a priori*, de nous appuyer sur la technique d'analyse des tâches et d'activités développée par Robert (1998) qui propose quatre axes d'analyse de tâches pour mieux cerner ce que nous demandons effectivement aux élèves. Elle explique que

« … *pour nous les tâches sont associées à des énoncés d'exercices (activités, problèmes), elles tendent de rendre compte d'un fonctionnement qui est décrit sur le mode mathématique. Les activités sont associées à ce que font les élèves pour résoudre une tâche (la distinction n'est pas toujours facile à faire).* » (Robert, 1998, p. 174).

En outre, elle précise que les axes partent du général au particulier et servent à une analyse complète d'un énoncé proposé aux élèves.

La méthodologie d'analyse se base sur une description de la situation globale dans laquelle s'insèrent deux axes, dont le premier consiste à caractériser le contexte mathématique et le savoir mathématique mit en fonctionnement et le second sert à décrire le scénario didactique proposé.

Dans les deux autres axes, nous analysons les tâches *a priori* d'une part et les activités élèves attendues d'autre part.

Dans la situation que nous allons proposer aux élèves, nous avons des questions qui sont tout à fait en accord avec leurs acquis supposés. En effet, le calcul d'une distance d'un point à une droite, le calcul d'une distance entre deux points, la manipulation des expressions

à deux variables, l'exploitation du graphique, les résultats numériques sont supposés comme des notions acquises.

Le contenu de l'activité est le suivant :

« On considère un plan P muni d'un repère orthonormé direct $\Re = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Tracer, dans $\Re$, la droite $D : y = -1$.

2) Placer le point $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ dans $\Re$.

3) Soit $M(x, y)$ dans $\Re$.

a) Déterminer la distance d séparant le point M de la droite D.

b) Déterminer la distance MF séparant le point M du point F.

4) Soit $\Gamma = \left\{M(x, y) \in P ; MF^2 = d^2\right\}$.

a) Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$.

b) Remplir le tableau suivant sachant que x et y représentent les coordonnées du point M de Γ.

x	0	$\frac{1}{2}$		1		-1	-2
y			$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		

c) Placer ces points dans $\Re$.

5) Déduire et décrire ce que représente Γ. ».

Cette activité contient des questions qui sont liées avec des étapes intermédiaires où les productions demandées aux élèves sont des formules à déterminer, des démonstrations à faire, des résultats numériques à calculer et du graphique à exploiter.

Cette activité commence par une tâche, *a priori* routinière, qui consiste à représenter la directrice de la parabole, d'équation : $y = -1$, dans un repère orthonormé direct.

La production demandée est un graphique dont les stratégies de construction sont multiples. En effet, les élèves peuvent construire la droite D parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0, -1)$ en s'appuyant sur différentes stratégies :

✓ ***Stratégie 1***

L'interprétation de l'équation de la droite D leur permet de reconnaitre la

propriété du cours de la première année secondaire qui consiste à énoncer que « *Dans un repère* (O, I, J), *la représentation graphique de la fonction affine* $f : x \mapsto ax + b$ *est la droite d'équation* $y = ax + b \ldots$ *si* $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *alors la représentation graphique est la droite parallèle à la droite* (OI), *passant par le point de coordonnées* $(0, b)$ » que nous pouvons traduire logiquement par le fait que $\forall x \in IR \quad y = -1$. Ensuite une substitution sémantique qui consiste à associer une ou deux valeurs à la variable x permet de construire la droite D.

✓ ***Stratégie 2***

Appliquer des transformations algébriques d'ordre syntaxique qui consiste à ramener l'équation de la droite à la forme algébrique $D : 0x + y + 1 = 0$ afin de pouvoir identifier les coefficients de l'équation générale d'une droite qui se ramène à la forme $ax + by + c = 0$. Ensuite, les connaissances disponibles chez les élèves peuvent les conduire à rechercher un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui indique la direction de la droite. Enfin, un contrôle, par association d'une valeur à la variable x permet de déterminer les coordonnées d'un point dont l'ordonnée est à l'origine, par exemple, et par la suite, de tracer la droite D.

✓ ***Stratégie 3***

Appliquer des transformations algébriques d'ordre syntaxique qui ramènent l'équation de la droite à la forme $D : 0x + y + 1 = 0$ et par la suite, les élèves peuvent la mettre en rapport avec l'équation générale de la forme $ax + by + c = 0$. Ensuite, un simple contrôle sémantique se traduisant par une substitution de deux valeurs aux variables x ou y permet de déterminer les coordonnées de deux points par lesquels passe la droite D.

La deuxième question qui consiste à placer le point $F\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ dans le repère orthonormé direct $\Re$ est un type de tâche qui, *a priori*, ne pose aucun problème puisque ces élèves sont supposés avoir un niveau technique qui correspond à une mise en fonctionnement d'une application de contextualisation simple sans travail préliminaire.

La troisième question comprend deux questions 3) a) et 3) b).

La question 3) a) consiste à déterminer la distance d séparant un point $M(x, y)$ de

coordonnées variables et la droite D.

Rappelons tout d'abord que la distance d, d'un point $M(x, y)$ à une droite D d'équation $aX + bY + c = 0$, peut être interprétée comme étant une fonction de deux variables réelles définie par : $\begin{array}{l} d : IR \times IR \to IR_+ \\ (x, y) \mapsto \dfrac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{array}$; ceci permet de déterminer la distance d quelque soit le statut des coordonnées du point $M(x, y)$.

En revanche, les élèves du secondaire, en particulier ceux des classes de deuxième année secondaire, n'ont pas *a priori* accès à ces fonctions. Toutefois, ils ont une compétence leur permettant de calculer la distance d'un point de coordonnées données à une droite d'équation cartésienne donnée qui consiste à appliquer la formule du cours donnant l'expression analytique de la distance :

« *Le plan est muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. *Soit* D *la droite d'équation* $ax + by + c = 0$. *La distance d'un point* $A(x_A, y_A)$ *à la droite* D *est.* $d(A, D) = \dfrac{|ax_A + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ »

qui se démontre en s'appuyant sur la technique suivante :

Dans $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ on se donne le point $A(x_A, y_A)$ et la droite D : $ax + by + c = 0$ ainsi que le vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de la droite D.

Alors pour tout point du plan $H(x_H, y_H)$ projeté orthogonal du point A sur la droite D on a :

1) $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires et par suite il existe un réel k tel que $\vec{AH} = k\,\vec{n}$ et par suite la distance AH est donnée par $AH = |k|\sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Comme $H \in D$ alors on prouve facilement que $a(x_H - x_A) + b(y_H - y_A) = -(ax_A + by_A + c)$ et en déduit que $|k|(a^2 + b^2) = |ax_A + by_A + c|$ et par suite $AH = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

On voit bien que le type de tâche demandée dans cette activité oblige à mobiliser les deux points de vue syntaxique et sémantique, dont le premier consiste à appliquer la formule directe du cours et le deuxième consiste à associer un statut de variables et non pas de nombres déterminés à l'expression recherchée.

Ainsi, le type de raisonnement demandé met en jeu un raisonnement logique qui consiste à faire une analyse-synthèse permettant de conclure que le résultat n'est pas numérique mais il dépend des coordonnées du point M et donc des variables x et y. Dans ce cas, les élèves sont supposés avoir un niveau de connaissances mobilisables qui correspond à des mises en fonctionnements plus larges dépassant l'application simple d'une propriété. En effet, le fait de ne pas avoir des coordonnées données du point M nécessite un changement de point de vue pour pouvoir appliquer la formule adéquate du calcul de distance du point M à la droite D. Ce changement de point de vue consiste à faire une juxtaposition entre des coordonnées connues et des coordonnées variables.

Pour déterminer cette distance nous envisageons deux types de stratégies : une stratégie basée sur une lecture sur la figure et une autre basée sur un calcul algébrique.

- ✓ ***Stratégie 1***

Les élèves sont supposés avoir un niveau de connaissances mobilisables pour être capables d'appliquer des méthodes non prévues par un changement de point de vue et par la suite ils peuvent se contenter du registre graphique pour placer un point M quelconque dans un repère orthonormé IR de coordonnées (x, y) et déduire que, comme la droite D est parallèle à l'axe des abscisses, la distance d serait facile à déterminer puisque le point M et son projeté orthogonal H sur la droite D ont la même abscisse quelque soit la position du point M dans le repère $\Re$ et par la suite la distance serait $d = |y_M - y_H| = |y+1|$.

Cette méthode est purement sémantique et s'appuie sur une interprétation graphique de la distance d'un point à une droite parallèle à l'axe des abscisses d'une part et à reconnaitre la possibilité de généraliser le résultat avec un point de coordonnées variables, d'autre part. En plus, dans ce cas les élèves doivent prendre des initiatives pour nommer le point H projeté orthogonal du point M sur la droite D.

- ✓ ***Stratégie 2***

Les élèves ont un niveau technique permettant de faire recours au calcul algébrique, en s'appuyant sur la formule syntaxique du calcul de la distance d'un point de coordonnées

donnés à une droite donnée. Cette formule est donnée par : $d = d(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ où $M(x_0, y_0)$ et $D : ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0,0)$.

En revanche, pour la mise en rapport de la formule de calcul de distance du point M à la droite D dans laquelle les coordonnées de M ont un statut de variables et non pas de nombres connus qui permet de conclure que $d = \frac{|0x + 1y + 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = |y + 1|$, les élèves pourraient rencontrer un obstacle compte tenu de ce qu'elle nécessite la reconnaissance, au moins implicite, d'un changement de statut de variables génériques aux variables liée (cf. Durand-Guerrier, 1999-2000).

La question 3) b) consiste à déterminer la distance séparant le point M du point F.

Le calcul de la distance entre les deux points M et F s'appuie sur des applications immédiates. En effet, la première méthode peut s'appuyer sur la formule algébrique directe ou sur une stratégie s'appuyant sur le théorème de Pythagore qui s'applique suite à une interprétation et une résolution graphique. Ceci nous permettra de conclure que les élèves peuvent envisager deux types de procédures de résolution.

Stratégie 1:

Le niveau technique des élèves leur permet de se contenter de la formule directe du calcul du carré de la distance qui est

$$MF^2 = (x_F - x_M)^2 + (y_F - y_M)^2 = (0 - x)^2 + \left(-\frac{1}{2} - y\right)^2 = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Cette procédure est supposée de type syntaxique puisqu'elle consiste à appliquer une formule directe qui est une notion outil et supposée connue des élèves ; elle figure en effet dans les programmes.

Stratégie 2:

Les élèves peuvent s'appuyer sur le graphique pour déterminer le carré de la distance MF en s'appuyant sur l'application directe du théorème de Pythagore. Cette procédure, du registre graphique, est supposée du type sémantique puisqu'elle se base sur une lecture du graphique et pas sur une reconnaissance de la formule. Ce qui veut dire que l'élève sera amené à faire des mises en relations par le biais d'un changement de point de vue entre le graphique et l'algébrique.

Dans la quatrième question, on se donne l'ensemble $\Gamma = \{M(x, y) \in P; MF^2 = d^2\}$ qui caractérise une parabole.

Dans cette partie, nous allons demander aux élèves d'effectuer trois tâches dans trois questions intermédiaires qui sont éventuellement liées et dont l'objectif est d'aboutir à une institutionnalisation après la résolution.

La première tâche de la question 4) a) consiste à montrer que $M \in \Gamma$, si et seulement si $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$.

Dans ce cas, la production demandée aux élèves est une démonstration qui, *a priori*, met en œuvre un raisonnement assez simple puisqu'il suffit de mettre en jeu des applications immédiates des formules déjà retrouvées dans les questions précédentes suivies de quelques procédures de calcul et de transformations algébriques simples. Un calcul correct permet d'aboutir à l'équation demandée.

La stratégie attendue est d'élever au carré, respectivement, les distances d et MF, calculées dans les questions 3) a) et 3) b) et par suite d'obtenir : $d^2 = (y+1)^2$ et $MF^2 = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2$. Ainsi, l'écriture $MF^2 = d^2$ se traduit par $x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = (y+1)^2$ ou encore $x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = y^2 + 2y + 1$ qui se ramène après transformation à $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$.

Dans la question 4) b), la tâche demandée correspond à une mise en relation par association de quelques valeurs aux variables x et y en vue de déterminer les coordonnées de quelques points appartenant à l'ensemble Γ. Ceci revient à résoudre une équation en y si x est connu ou bien une équation en x si y est connu.

Dans ce type de résolution, les élèves vont être confrontés à des calculs classiques pour résoudre des équations très familières à leur niveau.

Nous allons essayer de décrire les réponses attendues dans chaque cas de résolution.

- ✓ Lorsque $x = 0$, l'équation à résoudre va être $0^2 - y - \frac{3}{4} = 0$, soit $y + \frac{3}{4} = 0$ ou encore $y = -\frac{3}{4}$.
- ✓ Lorsque $x = \frac{1}{2}$, l'équation à résoudre va être $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - y - \frac{3}{4} = 0$, soit $y = -\frac{1}{2}$.

- ✓ Lorsque $y=\frac{1}{4}$, nous aurons une équation de la forme $x^2-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}=0$, soit $x^2=1$ ou encore $x=\pm 1$.
- ✓ Lorsque $x=1$, l'équation à résoudre va être $1^2-y-\frac{3}{4}=0$, soit $y=\frac{1}{4}$.
- ✓ $y=\frac{5}{4}$, nous aurons une équation de la forme $x^2-\frac{5}{4}-\frac{3}{4}=0$ soit $x^2-2=0$ ou encore $x=\pm\sqrt{2}$.
- ✓ Lorsque $x=-1$, l'équation à résoudre va être $(-1)^2-y-\frac{3}{4}=0$ soit $y=\frac{1}{4}$.
- ✓ Lorsque $x=-2$, l'équation à résoudre va être $(-2)^2-y-\frac{3}{4}=0$, soit $4-y-\frac{3}{4}=0$ ou encore $y=\frac{13}{4}$.

C'est la résolution exacte de ce type d'équation qui nous permet d'évaluer le niveau technique des élèves d'une part et qui leur permettra de placer quelques points de l'ensemble Γ dans le repère orthonormé direct. Ceci permet de répondre à la dernière question (numéro 5) qui consiste à déduire la nature de l'ensemble Γ par une articulation des différentes informations recueillies tout au long de l'activité et qui permettra d'institutionnaliser la caractérisation équationnelle de l'objet parabole par le biais d'une propriété géométrique en vue de dégager une fonction trinôme.

Dans cette analyse *a priori*, de l'activité proposée, ce qui est attendu n'est pas toujours ce qui peut se passer réellement même si les traces de l'effectuation sont les bonnes. En revanche, ces analyses peuvent nous permettre de dégager certains éléments pertinents en rapport avec nos objectifs de départ à travers l'analyse *a postériori* de la situation d'enseignement.

Au paragraphe suivant nous allons essayer d'analyser la situation d'enseignement, que nous avons proposée auprès d'un groupe élèves des classes de deuxième année secondaire section sciences, en nous appuyant sur le protocole que nous avons transcrit (cf. Annexe. B-II. 2. p. 194-209).

II. 2. Planification de la séance

Pour des raisons pédagogiques et didactiques, avant de lancer notre expérimentation, nous avons préparé le contenu à proposer aux élèves pour avoir la possibilité d'improviser

tout le long de la situation d'une part et la possibilité de contrôler le temps didactique d'autre part.

En outre, nous avons pris la décision d'annoncer les étapes et les différents types de tâches prescrites, dans l'activité proposée, pour aider les élèves à anticiper et à contrôler leurs résultats, afin qu'ils puissent s'approprier le projet d'apprentissage que nous avons proposé.

II. 3. Déroulement effectif

La situation d'enseignement dont nous venons de faire l'analyse *a priori*, a été mise en place en une séance d'environ une heure, le 12 mai 2006, auprès d'un groupe composé de dix élèves d'une classe de deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique du Lycée secondaire Ezzahrouni[105] d'une banlieue de Tunis. Ces élèves étaient tous volontaires pour participer à cette expérimentation qui était organisée hors classe et en dehors du temps scolaire. En plus, ils étaient informés par leur enseignant que cette expérimentation se situe dans le cadre d'une recherche dans l'enseignement et pas dans le cadre d'une évaluation.

Cette expérimentation s'est déroulée à la fin de l'année scolaire 2005 / 2006 pour s'assurer que les différentes notions, que nous avons présentées tout au long de cette activité, ont été enseignées, d'autant plus que le chapitre relatif aux fonctions trinôme fait partie de l'objet d'enseignement au troisième trimestre de l'année.

Nous avons décidé, après l'accord des élèves, de filmer la séance et de ramasser leurs productions et ce, pour mieux analyser la séance et pour repérer la mise en œuvre du type des procédures sémantiques et / ou syntaxiques dans différentes tâches et questions demandées.

Dans cette situation, l'enseignant du groupe élève était présent et il a expliqué à ses élèves que l'expérimentateur aura la tâche de présenter le problème.

Nous avons expliqué aux élèves qu'il est préférable de travailler en groupe pour se mettre d'accord sur les stratégies à suivre, pour répondre aux questions demandées tout au long du problème proposé d'une part et nous avons remarqué que ceci ne leur interdit pas d'utiliser leurs cahiers individuels d'autre part. Cette consigne a conduit les élèves à choisir un responsable parmi eux qui a la tâche de rapporter la réponse du groupe.

La séquence s'est déroulée dans un local du gymnase du lycée, qui est équipé de tables, de chaises et d'un tableau blanc. Les dix élèves se sont répartis au hasard autour d'une table suivant le schéma ci-dessous.

[105] De la direction régionale de l'enseignement secondaire à Tunis.

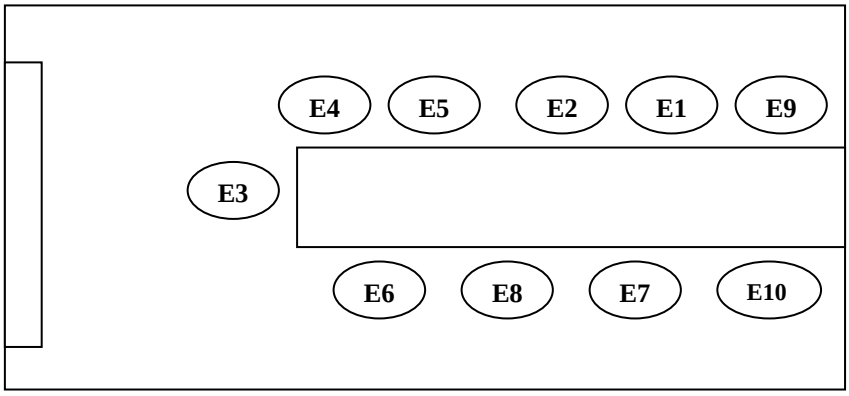


Fig : répartition des élèves dans la salle

La répartition des élèves s'était faite au hasard et nous avons choisi de travailler avec un seul groupe pour recueillir le maximum de données vidéo et audio, afin de repérer leurs gestes et leurs interactions.

D'un autre côté, nous avons considéré que le travail avec un seul groupe serait plus intéressant pour nos analyses pour deux raisons. La première raison est tout à fait pratique : le local prévu pour cette expérimentation n'était pas assez grand pour installer une deuxième caméra. La seconde raison était plus pragmatique : nous avons fait l'hypothèse que ce dispositif permettrait de mieux repérer les interactions élèves- chercheur (rappelons que c'est le chercheur qui a conduit la séance).

Notons que nous avons adressé comme consigne au caméraman qui a filmé la séquence, de couvrir le champ des élèves et d'être proche d'eux afin de s'assurer d'un maximum de recueil de données audio et vidéo.

III. Analyse *a postériori* de la séquence d'enseignement

L'analyse *a postériori* de la séquence s'appuie sur la vidéo, un recueil des observables, le document rédigé collectivement par les élèves et la transcription de la séance (cf. Annexe VI.2). Ces différents éléments nous permettent de rentrer dans des détails, ceci étant d'autant plus nécessaire que c'est le chercheur qui a conduit la séance.

Nous avons choisi d'assurer la présentation de la séance en vu de minimiser et contrôler les effets du contrat. En effet, nous faisons l'hypothèse que l'enseignant de ces élèves aurait pu être influencé par le contenu de cette activité que nous avions traitée avec lui auparavant.

Il est évident que les tâches prescrites dans cette activité ne déclenchent pas toutes les techniques de production ou les activités intellectuelles attendues. Pour cela, nous allons confronter ces analyses de la séquence avec les analyses *a priori* qui nous permettent de déterminer les pistes éventuelles qui répondent à nos questionnements de départ.

Le protocole de la séquence d'enseignement (cf. Annexe VI.2) a été découpé par type de tâche d'une part et suivant l'articulation sémantique / syntaxe au moment de la résolution et la manipulation des problèmes liés aux objets mathématiques en jeu d'autre part.

Nous conduisons les analyses question par question.

III. 1. Question 1) : Traçage de la droite $D : y = -1$

Comme prévu, le traçage de la droite D d'équation $y = -1$ n'a pas posé de difficultés aux élèves surtout que la technique de mise en œuvre exploitée pour le traçage de la droite s'appuie sur une connaissance disponible qui consiste à placer le point de coordonnées $(0,-1)$ et de tracer la droite parallèle à l'axe des abscisses à l'aide d'une équerre.

3. E_6 s'adresse à E_1 et il lui dit : *Allez Active !*

4. E_7 dit : *C'est simple !*

5. L'expérimentateur s'adresse aux élèves et il dit : *Est-ce que c'est bon ?*

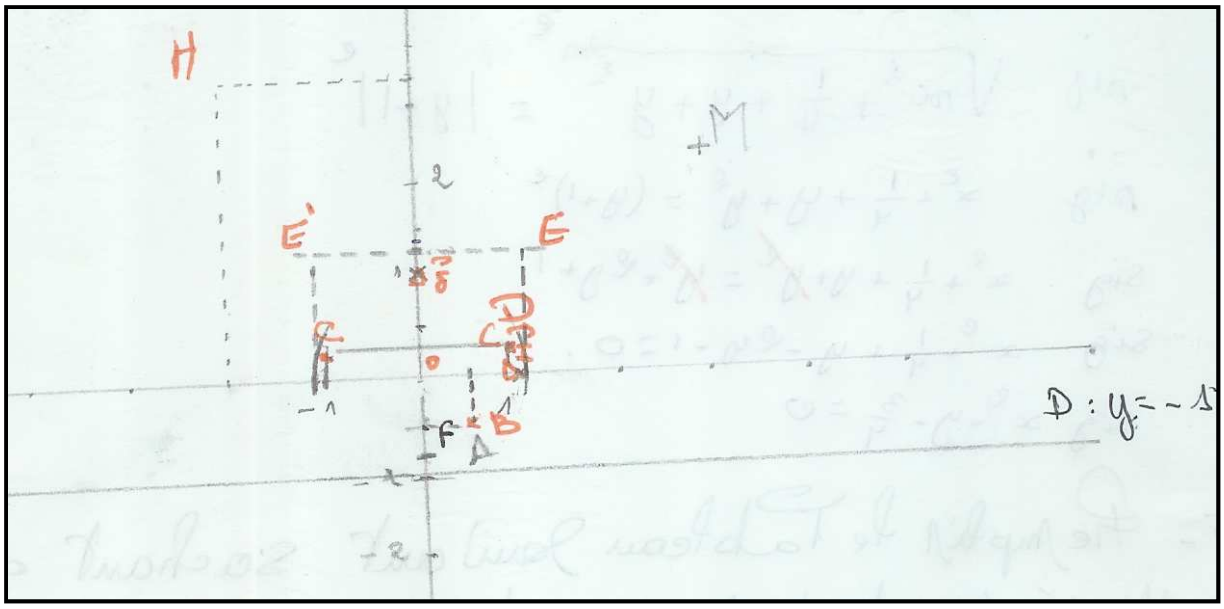
6. Le groupe d'élèves répondent : *mmm !*

En effet, l'élève E_1 a procédé avec l'appui de ses collègues E_2, E_4, E_5, E_6, E_7 et E_8, par la technique de mise en œuvre de type mixte qui consiste à appliquer la règle du cours sur les fonctions affines qui s'enseignent au niveau de la première année secondaire[106]:

« *Dans un repère* (O, I, J), *la représentation graphique de la fonction affine* $f : x \mapsto ax + b$ *est la droite d'équation* $y = ax + b \ldots$ *si* $a = 0$ *et* $b \neq 0$ *alors la représentation graphique est la droite parallèle à la droite* (OI), *passant par le point de coordonnées* $(0, b)$ [107] ».

Cette application apparait clairement sur la feuille de réponse ci-dessous.

[106] L'équivalent des classes de la troisième en France.
[107] Cette règle du cours est tirée du manuel tunisien actuel de la première année secondaire à la page 218.



Ceci leur a permis de conclure que la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées et par la suite la substitution d'une seule valeur à l'abscisse, qui est dans ce cas $x = 0$, pour la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0,-1)$.

Ainsi nous pouvons dire que d'un point de vue de niveau de mises en fonctionnement des connaissances, les élèves ont un niveau technique qui leur a permis d'effectuer le type de tâche demandé, ce qui confirme qu'il s'agit d'une tâche routinière pour les élèves.

III. 2. Question 2) : Placer le point F de coordonnées $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.

Le type de tâche qui consiste à placer le point $F\left(0,-\frac{1}{2}\right)$ n'a pas posé de difficultés même si l'élève responsable E_1 avait pris tout son temps pour effectuer cette tâche.

7. E_5 : *Je veux voir comment va-t-elle procéder !*

8. L'expérimentateur s'adresse à E_1 et lui dit : *On peut vous entendre pour nous décrire ce que tu vas faire !*

Inaudible

9. E_5 : *C'est* $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$!

Il s'agit d'une contextualisation très simple sans travail préliminaire dans laquelle l'élève est appelé à réaliser une tâche routinière.

III. 3. Question 3) a) : La détermination de la distance *d* séparant le point *M* de la droite *D*

Au niveau de cette tâche, les élèves ont choisi de suivre la stratégie 2, décrite dans l'analyse *a priori*. Elle est de type mixte et s'appuie sur un appel à la formule algébrique du calcul de la distance entre un point et une droite donnée ; ce qui est une technique du type syntaxique. En outre, le statut de variable des coordonnées du point M nécessite une interprétation du type sémantique du statut de la distance d qui dépend des coordonnées du point M et qui n'est pas bien déterminée comme ils habitués à le faire en classe.

11. L'élève E_2 s'adresse à l'expérimentateur en disant : *On commence par rappeler la règle générale puis on l'applique à notre cas !*

12. L'expérimentateur : *Quelle règle ?*

13. E_5 : *La règle de la distance et innh !*

14. L'expérimentateur : *La règle de calcul d'une distance d'un point à une droite !*

15. E_2 : *oui c'est ça.*

L'interaction entre l'expérimentateur et les élèves montre qu'ils ont un niveau technique, au sens de Robert, qui leur permet de répondre à la question demandée. En plus, les connaissances disponibles chez les deux élèves E_2 et E_5 sont du type syntaxique relevant du registre algébrique même si la plupart des objets qu'ils manipulent font partie du milieu matériel et se situent dans un registre graphique.

Remarquons que dans cette phase, l'enseignant de ces élèves était présent et il est intervenu en s'adressant à ses élèves en disant :

19. *Essayer de regarder ça géométriquement ! …Tracer la droite, placer le point et représenter la distance.*

Rappelons que le tracé a été fait sur la feuille commune, mais que les élèves pouvaient, toutefois, travailler sur leurs cahiers personnels.

Inaudible

20. En silence E_7 s'adresse à E_1 et lui montre, en pointant l'équerre, la distance qu'ils doivent déterminer.

Ainsi, nous pouvons faire l'hypothèse que l'élève E_7, avait reconnu la possibilité d'explorer le graphique mais que la formulation adéquate, pour passer du registre géométrique au registre algébrique, semble poser une difficulté d'articulation des trois registres.

La formule ou la règle de calcul de distance est dominante et les élèves ont choisit de poursuivre cette procédure afin d'aboutir au résultat. Nous pouvons dire que la proposition du professeur n'a pas été prise en compte par les élèves.

21. E_2 et E_5 rappellent la règle à E_1 et lui disent ensemble : *C'est la valeur absolue de* ax_M *plus* by_M *plus* c *sur la racine carrée de* a^2 *plus* b^2.

Les élèves sont placés dans une procédure syntaxique du registre algébrique dans laquelle ils manipulent les lettres x_M et y_M qui jouent le rôle de lettres associée à un point générique M et non pas de variables[108] qui vont nécessiter une identification.

Cependant, ils ont éprouvé des difficultés au niveau de la mise en fonctionnement de leurs connaissances puisqued'une part, la formule du calcul de la distance s'appuie sur une reconnaissance des coefficient a, b et c dans l'équation cartésienne de la droite dont la forme générale est : $ax + by + c = 0$ et d'autre part, l'équation de la droite D se présente, dans la situation, sous la forme d'un cas particulier qui nécessite une transformation de l'écriture équationnelle $D : y = -1$ pour pouvoir identifier.

Ainsi, nous pouvons dire qu'ils éprouvent une difficulté lorsqu'ils sont appelés à faire un rapport entre le cas général et le cas particulier à traiter surtout que

22. E_7 intervient en disant : $c = -1$.

23. E_2 lui répond : *Attends.*

24. E_5 s'adresse à E_7 et lui dit : *Pourquoi* ?

Les élèves se taisent et ils dirigent leurs regards à E_1.

Tout d'un coup !

25. L'élève E_2 dit : *impossible*.

26. L'expérimentateur intervient et lui dit : *C'est quoi impossible !*

27. E_2 répond : *On a* M *euh !* M *est variable (Tout en faisant tourner son doigt) et*

[108] Ceci est détaillé dans Durand-Guerrier 2005.

il faut préciser M pour savoir la distance qui sépare M à la droite D.

28. L'expérimentateur dit : *Comment ! si j'ai un point M de coordonnées (x, y) dans le plan orienté je ne peux pas déterminer la distance !*

29. E_5 : *Monsieur on peut déterminer mais pas! euh !*

30. E_2 : *C'est dans le cas général !*

31. E_5 : *Oui en cas général ! C'est tout à fait la règle et c'est tout*.

Ce débat entre les élèves d'une part et l'expérimentateur d'autre part, montre que les élèves repèrent un obstacle au niveau de la mise en correspondance entre la formule de calcul de la distance et les coordonnées du point M qui dans ce cas, sont variables, alors que les élèves sont habitués à avoir des coordonnées du point bien déterminées. Ceci confirme notre analyse *a priori* et nous amène à faire l'hypothèse que cet obstacle peut être de nature didactique, d'autant plus que les programmes incitent les élèves à pouvoir mobiliser une technique lors d'une activité dans un repère orthonormé pour calculer la distance d'un point à une droite, c'est-à-dire que les élèves apprennent à faire des opérations de calcul de distance bien déterminée.

32. L'expérimentateur : *Qu'est ce que vous voulez dire par cas général ?*

33. E_5 : *C'est-à-dire la règle de la valeur absolue de ax_M + eh ! puis elle se tait.*

34. E_2 : *On ne peut pas préciser exactement la valeur de cette distance.*

35. L'expérimentateur : *On ne vous a pas demandé de calculer la distance mais de déterminer cette distance !*

36. E_5 : *Déterminer ! Ah oui ! donc la distance serait* $d = \dfrac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

37. E_7 *et* E_{10} confirment ensemble : *oui oui c'est çà !*

On voit bien que l'élève E_2 reconnait que nous sommes en présence d'un point de vue variable où la distance à déterminer n'a pas, en terme de logique, le statut d'un objet qui est, en mathématiques, une valeur bien déterminée ; mais elle représente un terme qui s'obtient par l'application d'un prédicat à un objet. Ce terme a un statut de variable.

Ici la distance d est fonction de x_M et y_M et d'une façon générale nous savons que d

est une fonction à deux variables réelles à valeurs positives que nous définissons correctement comme suit :

$$d : IR \times IR \to IR^{+}$$
$$(x, y) \mapsto d(x, y) = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

où a, b et c sont des nombres réels.

Nous pouvons dire que l'élève à franchi la première étape qui consiste à reconnaitre le statut de la distance à calculer. Ce qui a permis de conclure qu'il est possible de passer à la deuxième phase de mise en correspondance entre la formule générale du cours et le cas étudié qui ne demande qu'un niveau technique au sens de Robert.

Nous pouvons dire que ce type de tâche ne peut être traité que par des élèves qui ont un niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponibles au sens de Robert, qui est dans notre cas l'élève E_2 et peut être l'élève E_5 qui appuyait le point de vue de l'élève E_2. Par contre les autres élèves semblent avoir seulement un niveau technique, ce qui ne leur permet pas de surmonter la difficulté liée à l'interprétation de la signification d'une distance qui a un statut variable.

Enfin, nous pensons que l'intervention de l'élève E_2 a permis à ses collègues de s'engager dans la deuxième phase d'identification et de mise en correspondance entre l'équation de la droite D et la forme générale de l'équation d'une droite.

39. L'expérimentateur : *Reprenons ce que vous venez d'écrire !*

40. E_5 prend la parole et confirme ce que E_1 venait d'écrire : *La distance d est égale à :* $\frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ *et* $ax + by + c = 0$ *est hhh !*

41. L'expérimentateur : *C'est quoi* $ax + by + c = 0$ *?*

42. E_2 : *C'est l'équation d'une droite.*

43. E_5 : *oui c'est l'équation de la droite.*

44. L'expérimentateur : *et ! quelle droite ?*

45. E_2 : *la droite euh ! (en dirigeant sa main au tableau) qui sépare euh !*

46. E_7 : $y = -1$.

47. L'expérimentateur : *l'équation de la droite* D *est euh !*

48. E_2 et E_5 répondent ensemble : *d'équation* $y = -1$.

49. E_7 : *Oui l'équation de la droite* D *est* $y = -1$.

50. L'expérimentateur : *ok ! c'est où le* a*, le* b *et le* c *?*

51. E_5 *: On peut euh ! de l'équation !*

52. E_7 *: n'importe quelle droite a une équation* $ax + by + c = 0$ *et on transforme l'équation* $y = -1$.

L'étape qui consiste en la mise en correspondance entre l'équation générale de la droite avec le cas particulier de la droite D d'équation $y = -1$ n'était pas aussi évidente. En effet, l'élève E_5 reprend l'équation $y = -1$ et essaye d'identifier les coefficients mentalement et d'une manière directe alors que l'élève E_7 reconnait, d'après sa réponse, qu'il est nécessaire de transformer l'équation de la droite D pour la ramener à la forme $R(x, y) = ax + by + c = 0$.

53. L'expérimentateur : *Donc d'une façon générale, d'après votre camarade (il veut dire l'élève* E_7*) une droite d'équation euh !* $ax + by + c = 0$ *et donc qu'est ce que ça représente le* a*, le* b *et le* c *par rapport à la question demandée ?*

54. E_5 : a *euh !* -1.

55. E_1 s'adresse à E_5 en disant : a *! zéro !*

56. E_2 et E_6 : confirment : *le* a *zéro.*

Un silence environ 5 secondes

57. E_5 : *Oui* a *zéro et dit* b *eh !* b *est* -1.

58. E_2 : *oui* b *est* -1.

59. E_6 : b *est* -1 *et* c *zéro.*

60. E_1 et E_5 s'adressent ensemble à E_2 : *Non ! c'est* $y=-1$.

61. E_7 confirme : $y=-1$.

62. E_2 : *oui* $y=-1$.

63. L'expérimentateur : *alors le* a *c'est !*

64. les élèves répondent ensemble : *zéro.*

65. L'expérimentateur : *Tout à fait et* x *c'est variable.*

66. E_1 confirme : *oui em euh !*

67. L'expérimentateur : a *c'est égale à zéro oui !*

68. E_6 : $y=-1$.

69. E_8 : *non* b *c'est* b *!*

70. L'expérimentateur : b *égale ah !*

71. E_5 : *Un c'est un !*

Inaudible

72. L'expérimentateur : *et le* c *!*

73. E_7 : *zéro.*

74. E_5 : *c'est zéro.*

L'expérimentateur se tait et un silence de 8 secondes

Inaudible

75. L'expérimentateur : *qu'est ce que ça représente ?*

76. E_5 : *ah !* -1 *c'est* -1.

77. L'expérimentateur : *qu'est ce qu'elle représente ? qu'est ce que ça représente ? comment je peux la représenter ?*

78. E_5 : *ah !* $y+1$ *est égale à zéro.*

79. L'expérimentateur : *tout à fait donc c'est* $y+1=0$ *(en écrivant au tableau) et dit zéro* x *plus un* y *plus un égale à zéro. Donc* $a=0$, $b=1$ *et* $c=1$ *et la distance ! vous allez la déterminer !... Bien sûr on ne va pas vous donner de réponses.*

80. *Les élèves (ensemble) em eh !*

Le long de ces interactions entre les élèves d'une part et l'expérimentateur d'autre part, on remarque que cette mise en correspondance entre les lettres a, b *et c et les valeurs de ces coefficients* correspond à une opération d'identification d'un point de vue syntaxique qui consiste à mettre en perspective les deux formes des équations $ax+by+c=0$ et $y=-1$. Cette mise en correspondance n'était pas aussi évidente et a obligé le chercheur ou l'expérimentateur à intervenir indirectement pour qu'ils arrivent à identifier correctement les coefficients a, b et c puisque l'erreur n'est pas permise dans cette étape qui est au cœur de l'activité.

Le calcul de la distance d est un type de tâche qui a montré la nécessité d'une bonne maitrise et interprétation des écritures pour réussir les transformations syntaxiques du registre algébrique qui permettent de mettre en relation l'équation de départ avec la forme générale de l'équation.

81. L'expérimentateur : *Vous allez vous mettre d'accord sur la distance que vous allez déterminer en fonction de !*

82. E_7 prend la charge d'écrire la réponse.

83. L'expérimentateur : *Donc vous vous êtes mis d'accord sur le fait que la distance séparant euh ! la distance d'un point et la !*

84. E_2 : *un point à une droite.*

85. L'expérimentateur : *quelle droite ?*

86. E_2 et E_5 (répondent au même temps) : D.

87. L'expérimentateur : *C'est ça ! c'est quoi ?*

88. E_2 : c'est valeur absolu d'euh $ax + by +$ *euh !*

89. E_5 : ax_A *plus.*

Inaudible

90. E_1 dit à E_7 : a *est égale à zéro.*

91. E_5 dit à E_7 : b *est égale à un.*

92. E_8 dit : *sur* $\sqrt{a^2 + b^2}$ *donc c'est égale à un.*

93. L'expérimentateur : *ok !*

Les élèves se lancent dans les calculs sur les feuilles de brouillon…

Inaudible

94. E_2 dit : *donc c'est* $\frac{|y_M + 1|}{1}$.

95. E_5 : *c'est quoi* x_M *et* y_M *?*

96. E_2 répond : *c'est des variables*.

97. E_9 s'adresse à E_2 et il lui dit : $y = -1$.

98. E_2 lui répond : x *et* y *sont des variables. Je vais t'expliquer après !*

99. E_7 intervient en disant : d *est égale à la valeur absolue de* y *plus un.*

100. E_8 dit : *oui c'est valeur absolue de* y *plus un.*

101. Les élèves répondent ensemble de $y + 1$.

La mise en relation entre les lettres a, b et c retrouvés dans l'étape précédente et les variables (inconnues) x, y qui correspondent aux coordonnées du point M, et leur substitution dans la formule générale de calcul de distance correspond à nouveau à une

opération d'identification qui relève d'un point de vue syntaxique qui consiste à mettre en perspective les deux écritures $d = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $ax + by + c = 0$, via les valeurs numériques des coefficients a, b, c déterminés précédemment.

Une fois que l'identification des écritures est effectuée, nous pouvons dire que c'est le point de vue syntaxique qui domine, tandis que l'affectation des variables, dans la formule générale du calcul de distance d'un point à une droite, relève du point de vue sémantique.

En ce qui concerne la réalisation et la compréhension de ce type de tâche, nous remarquons que les deux élèves E_2 et E_5 mènent le jeu avec l'expérimentateur. Ceci nous permet de faire l'hypothèse qu'ils partagent le même point de vue que l'expérimentateur puisqu'ils ont reconnu le statut variable de la distance séparant le point M de la droite D. Ainsi nous pouvons dire qu'ils ont un niveau de connaissances mobilisables sachant qu'ils ont pu identifier un savoir mobilisé dans un contexte particulier. C'est-à-dire qu'ils ont dépassé le stade des applications simples au stade où ils mobilisent des points de vue sémantiques et / ou syntaxiques dans les résolutions. Ce qui leur a permis de surmonter la difficulté du calcul de la distance d liée à la présence d'éléments génériques.

En plus, nous remarquons que dès que, les élèves, ont réussi à trouver la relation, ils n'utilisent plus les variables en tant que marque places mais en tant que variables au sens strict. C'est à dire qu'ils ont mis à jour ce qui est caché.

En conclusion, nous pouvons dire que ce type de tâche montre bien la nécessité d'un outil sémantique qui permet de surmonter une difficulté liée à l'interprétation du statut de variable de la distance d même si l'outil syntaxique, qui est dans ce cas la formule de calcul de distance, est disponible. Ce qui montre la complémentarité des deux points de vue sémantique et syntaxique dans certaines situations d'une part et l'importance de pouvoir disposer de l'outil sémantique lorsque l'outil syntaxique est disponible mais pas suffisant.

La réussite dans ce type de tâche ne se réalise qu'en réussissant l'activité mentale du type mixte que nous schématisons ci-dessous.

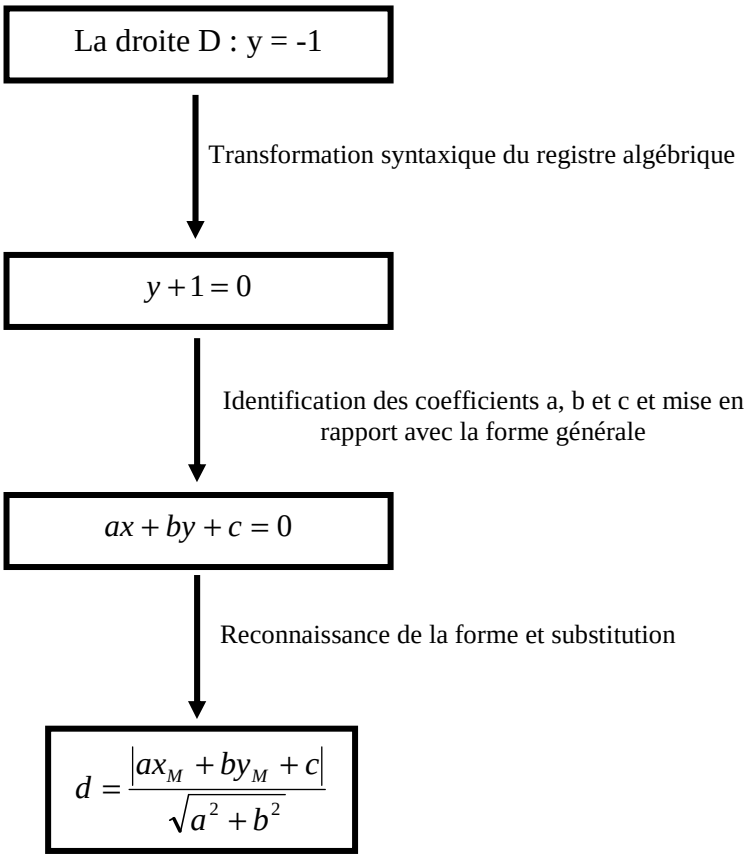


Fig 1: *représentation des différentes étapes intermédiaires pour le calcul de la distance d*

III. 4. Question 3) b) : Calcul de la distance *MF*

Les élèves reconnaissent qu'ils peuvent appliquer la formule du livre[109] qui réapparait et par la suite ils s'engagent dans un calcul numérico-littéral.

105. L'élève E_8 répond : *oui* et propose : *C'est* $\sqrt{x^2+y+\frac{1}{4}+y^2}$.

Le calcul de la distance MF n'a pas posé de difficultés aux élèves. Ceci est en accord avec notre analyse *a priori*, dans laquelle nous avons supposé que la tâche demandée n'exige des élèves qu'un niveau technique leur permettant de l'effectuer sans faire appel à un travail préliminaire de reconnaissance. Cependant, le fait que les coordonnées, du point M soient variables, n'a posé aucune difficulté au niveau de la mise en correspondance des écritures de la part des élèves, peut s'expliquer de deux manières. En effet, nous pouvons supposer qu'il y a eu apprentissage après avoir rencontré ce type de technique dans la question précédente ou bien que ces élèves ont travaillé sur ce type de question même si le programme de la première année secondaire précise que les élèves mobilisent des techniques pour calculer la distance

[109] Livre de la première année secondaire tunisien (l'équivalent de la troisième en France).

entre deux points dans un repère orthonormé. Ce qui met en question la différence entre la tâche de calcul de distance entre une droite et un point bien déterminés et celle de la détermination de la distance dans cette situation, qui *a priori* semblent être deux types de tâches différentes.

III. 5. Question 4) a) : Soit $\Gamma = \{M(x, y) \in P; MF^2 = d^2\}$. Montrer que $M \in \Gamma$ si et seulement si $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$.

Le but de cette question est d'avoir une caractérisation équationnelle de l'objet Γ où x et y sont des variables libres. Dans ce cas,

107. E_1 s'adresse à E_6 en disant : *on élève au carré* MF *et* d.

108. E_6 : *oui ils ont enlevé le carré.*

109. E_1 : *Oui c'est ça.*

Nous pouvons dire que l'élève E_1 a un niveau technique qui lui a permit de trouver un indicateur permettant aux élèves de comprendre qu'il suffit d'appliquer des transformations purement syntaxiques du registre algébrique pour obtenir l'équation demandée.

116. L'élève E_2 prend la parole en disant : On a MF et d, *on peut donc élever au carré.*

117. L'expérimentateur lui répond : *comme vous voulez.*

118. E_2 : *C'est automatique. Il suffit d'écrire*.

119. E_5 : *Oui.*

La ligne 118 montre bien que l'élève E_2 est bien dans un registre syntaxique, puisque le type de tâche demandé nécessite des transformations purement syntaxiques du registre algébrique, afin de caractériser l'ensemble Γ, ce qu'il exprime par le terme « automatique ».

III. 6. Question 4) b) : Remplir le tableau suivant sachant que x et y représentent les coordonnées du point M de Γ.

x	0	$\frac{1}{2}$		1		–	–
y			$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		

De la ligne 97 à la ligne 106 (cf. Annexe VI.2), nous enregistrons des moments d'échange entre les élèves sur un travail de calcul en groupe. La tâche demandée semble ne pas poser de difficultés. En effet, nous observons que les élèves disposent d'un niveau de connaissances mobilisable leur permettant de résoudre des équations du premier et du second degré à une inconnue réelle en s'appuyant sur des techniques syntaxiques du registre algébrique.

Le travail en groupe a cependant déclenché des débats entre les élèves et des discussions au moments de la résolution de l'équation $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$ en associant les valeurs données, aux variables x et y, dans le tableau ci-dessus. Par exemple, lorsque $y = \frac{5}{4}$, l'équation $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$ devient $x^2 - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 0$ et par la suite il suffit de résoudre $x^2 = 2$, nous avons enregistré l'échange suivant :

152. E_2 : *c'est égale à racine carrée de huit le tout sur deux.*

153. E_7 dit : *deux racine de deux sur deux.*

154. E_5 : *C'est racine de deux.*

155. E_2 confirme en disant : *c'est racine de deux.*

156. E_5 s'adresse à E_2 en disant : *ou moins racine de deux*.

157. E_2 corrige et s'adresse à l'expérimentateur en disant : *racine de deux ou moins racine de deux*.

Cet échange entre les deux élèves E_2 et E_5 nous montre la pertinence du contrôle sémantique dans la résolution des équations qui ne demandent pas un niveau de connaissances important dans la mesure où il suffit d'appliquer une technique simple suivie d'un contrôle sémantique permettant d'éviter l'erreur fréquente $x^2 = 2$ alors $x = \sqrt{2}$.

Ci-dessous le tableau qui a été rempli par l'élève E_1 représentant la réponse du groupe.

A	B	C	D	E	J	H
0	1/2	1 ou -1	1	$\frac{\sqrt{8}}{2}$ ou $-\frac{\sqrt{8}}{2}$	-1	-2
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1/4	$\frac{1}{4}$	5/4	1/4	13/4

III. 7. Question 4) c) Placer ces points dans le repère orthonormé $\Re = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Nous enregistrons une opération de nominalisation des points qui est une tâche non habituelle pour les élèves puisque habituellement ils ne sont pas obligés et ceci est souvent à la charge de l'enseignant de donner des noms aux points de coordonnées (x, y).

164. E_2 s'adresse à l'expérimentateur : *est ce qu'on peut donner des noms à chacun de ces points ?*

165. L'expérimentateur : *Oui bien sur.*

Remarquons aussi que la construction du nombre $\pm\sqrt{2}$ est une exigence dans le cours de l'enseignant[110].

166. E_7 lui confirme : *je vais tracer la diagonale !*

III. 8. Question 5) : Déduire et décrire ce que représente Γ.

Concernant la reconnaissance, sur le schéma, de la nature de l'ensemble Γ, nous remarquons.

180. L'expérimentateur dit : Γ *représente une parabole*.

En entendant un élève prononçant le mot fonction.

181. L'expérimentateur a dit : *Je viens d'entendre une chose.*

182. L'élève E_2 avait répondu : *une fonction.*

183. L'expérimentateur a dit : *fonction, parabole ! Alors qu'est ce qu'une parabole ?*

[110] L'enseignant a affirmé qu'il exige souvent la construction du réel $\pm\sqrt{2}$ c'est-à-dire qu'il préfère la méthode de la règle et le compas. En plus, ce type de tâche est recommandé par les programmes (cf. Annexes. A-VI).

184. E_5 : *c'est une parab.*

185. E_2 : *c'est une fonction trinôme.*

186. L'expérimentateur : *Maintenant la parabole est une fonction.*

187. E_5 : *Non elle représente une fonction.*

188. L'expérimentateur : *elle représente une fonction. Bien* ! *Donc* Γ *représente emm*.

189. E_5 : *une parabole de sommet* $A\left(0,-\frac{3}{4}\right)$ *et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.*

190. E_7 : *d'axe de symétrie la droite d'équation* $x=0$.

L'expérimentateur a joué le rôle du professeur lorsqu'il a posé des questions inductrices qui renvoient à ce qu'il veut voir émerger dans la situation. C'est ce que l'on voit apparaitre dans les lignes $181-183-186-188$, et se retrouve dans la phase suivante, qui se place après avoir fait la reconnaissance de l'ensemble Γ, dernière question de cette activité, et introduit une phase d'institutionnalisation.

191. L'expérimentateur : *Bien ! Nous allons faire une récapitulation de tout l'exercice*.

Il commence à poser des questions.

192. L'expérimentateur : *Est-ce qu'on a rencontré des fonctions.*

193. E_2 : *Non ! des équations.*

194. *L'expérimentateur : Très bien ! des équations.*

On remarque que l'élève E_2 articule les différentes représentations équationnelles et fonctionnelles de l'objet parabole.

Un silence

195. *L'expérimentateur : quel type d'équations.*

196. E_7 *: cartésiennes.*

197. *L'expérimentateur : des équations !*

198. E_2 *: des équations du second degré.*

Nous pouvons dire, finalement, que E_2 semble avoir repéré les enjeux du problème puisque, tout au long de la situation, on peut considérer qu'il manifeste un niveau de mise en fonctionnement de connaissances disponibles et une capacité à articuler les deux points de vue sémantique et syntaxique et qu'il a des compétences qui lui permettent de mobiliser des techniques syntaxiques (voir la ligne 118) d'une part, et de mobiliser le point de vue sémantique dans les cas où un recours aux interprétations s'avèrent nécessaires, d'autre part (voir les lignes $27-34-96-98$).

235. L'expérimentateur : *D'une façon générale qu'est ce que je peux conclure ?*

236. E_2 : *On peut passer des équations du type* $y = ax^2 + bx + c$ *aux fonctions trinômes.*

237. E_6 : *On peut transformer notre équation* $x^2 - y - \frac{3}{4} = 0$ *en une* fonction.

En conclusion, nous pouvons dire que l'objectif de l'institutionnalisation a au moins été partiellement atteint. Même si nous avons remarqué des effets de contrat tout au long de la situation. En effet, l'expérimentateur chercheur a dû poser des questions inductrices, ignorer certaines réponses argumentatives des élèves, intervenir dans les débats de la situation, ce qui correspond a des décisions didactiques « improvisées » au cours de la situation et pas nécessairement conscients, décisions qui sont susceptibles de modifier la situation.

Ces effets de contrat, qui ne font pas l'objet de notre étude, peuvent être intéressants en prenant compte du contrat didactique comme moyen d'intégrer les actions du professeur dans les analyses didactiques en termes d'interaction entre le professeur et ses élèves et d'une façon générale dans les analyses des pratiques diverses des professeurs.

Conclusion

Notre projet initial, à travers la situation d'enseignement proposée, était celui de

l'étude de l'articulation sémantique syntaxe que nous avons mis en rapport avec les objets équation, inéquation et fonction dans des situations de résolution et en particulier l'approche équationnelle de l'objet parabole.

Le fait de se placer dans les conditions d'observation de l'activité effective des apprenants nous a permis de repérer d'une manière assez fine la mobilisation des connaissances de la part des élèves. En effet, les analyses du déroulement de la séquence expérimentale montrent clairement que les élèves ont un niveau technique, au sens de Robert, du type syntaxique, puisqu'ils mobilisent, dans la plupart des cas, des formules et des transformations purement algébriques pour résoudre des types de tâches pouvant se traiter par des techniques sémantiques relatives au registre graphique et / ou algébrique. En outre, on a pu repérer chez deux élèves des traces de la mise en fonctionnement de connaissances disponibles, ce qui de notre point de vue correspond à la flexibilité dans l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique dans différents registres.

Ceci met en question l'effet du contrat didactique sur la mobilisation des connaissances de la part des élèves d'une part, et confirme nos résultats, dans l'analyse des programmes, des manuels scolaires et du questionnaire, selon lesquels la mobilisation des techniques syntaxiques l'emporte sur les techniques sémantiques dans les résolutions de problèmes liés à la manipulation des équations, inéquations et fonctions, d'autre part.

En revanche, nous faisons l'hypothèse que la situation a incité les élèves à faire certains changements de mise en fonctionnement des connaissances et certaines adaptations. Enfin, les objectifs visés par la situation, qui était conçue autour de l'articulation courbe / équation et fonction trinôme, semblent être partiellement atteints chez quelques élèves qui avaient un niveau de connaissances disponibles leur permettant d'articuler équation et courbe.

Le point de vue de Robert (1998) sur la possibilité d'avancer dans une situation plus élaborée même si les connaissances sont seulement partiellement disponibles est ainsi confirmé. Par la suite nous pouvons confirmer l'hypothèse qui consiste en la possibilité d'introduire l'objet parabole en deuxième année secondaire par le biais d'une forme équationnelle en vue d'éviter la subordination de parabole à la fonction trinôme.

IV. Le point de vue des praticiens sur la séquence d'enseignement

Introduction

Dans ce paragraphe nous cherchons à repérer le point de vue des praticiens sur la séquence d'enseignement que nous avons analysée dans le paragraphe précédent et qui a été proposée auprès des élèves de la deuxième année secondaire du lycée Ezzahrouni. Pour cela,

nous avons mis en place une expérimentation avec six enseignants en première année de master en didactique des mathématiques qui sont des novices dans cette discipline[111] et qui sont, par ailleurs, des enseignants expérimentés ayant, au moins, dix ans d'enseignement de mathématiques[112].

Dans cette expérimentation nous avons suivi une méthodologie qui consiste à

- ✓ Faire visualiser la séquence d'enseignement par ces enseignants[113].
- ✓ Repérer et analyser le point de vue de ces praticiens à travers des traces écrites.

Nous commençons ce paragraphe par une description des objectifs ainsi que des conditions du déroulement de la séance de projection de la séquence d'enseignement. Ensuite, nous décrivons la méthodologie suivie dans l'analyse des données recueillies à travers les traces écrites des enseignants en nous appuyant sur des critères d'analyse que nous détaillons ci-dessous.

IV. 1. Projection de la séquence d'enseignement

Nous avons présenté cette séquence d'enseignement auprès des enseignants. Ces enseignants disposaient du protocole de la situation[114] tout au long de la séance de projection. Enfin, nous avons donné comme seule indication le fait que cette séquence à été filmée auprès des élèves du secondaire.

IV. 1. 1. Objectifs de la projection

Nous avons choisi de présenter la séquence vidéo de la situation d'enseignement, afin de permettre aux enseignants de se représenter les conditions réelles de la situation et de voir de plus près le déroulement effectif et réel de la séance. Ceci permet de dégager le maximum d'éléments indicateurs à travers les différentes réponses aux questions proposées dans le questionnaire d'une part, et de repérer le point de vue du praticien sur la situation d'enseignement, d'autre part.

IV. 1. 2. Déroulement de la séance de projection

Nous avons obtenu l'autorisation de projeter la séquence d'enseignement, au sein de

[111] Des enseignants de la promotion de l'année universitaire 2006-2007 qui ont poursuivi leurs études de master en didactique des mathématiques à l'ISEFC de Tunis.
[112] Une place importante est attribuée à l'expérience pédagogique dans les critères de recrutement des étudiants de master en didactique des disciplines en Tunisie.
[113] Nous avons décidé de présenter le déroulement de la situation sans la dernière partie qui était consacrée à l'institutionnalisation.
[114] Nous avons donné, à chaque enseignant, une copie du protocole jusqu'à la ligne 164. C'est-à-dire avant l'institutionnalisation.

l'ISEFC[115] de Tunis, auprès des enseignants, le samedi 17 février 2007 après midi, dans une salle équipée d'un matériel audio-visuel[116].

Avant de commencer la projection, nous avons expliqué aux enseignants que nous allions projeter une séquence d'enseignement qui a été adressée à des élèves du secondaire sans préciser ni le niveau, ni le contenu de ce qui a été présenté. Nous les avons informés que la durée de la visualisation serait d'environ une heure et nous leurs avons distribué le protocole de la séquence.

Juste après la visualisation de la séquence, nous avons proposé un questionnaire ouvert (cf. Annexe. B-II. 4. p. 214) dans lequel on demande aux enseignants de répondre à certaines questions qui peuvent être traitées d'une façon individuelle ou collective. Ce questionnaire a été rendu le lendemain dimanche après les cours de master[117].

IV. 2. Analyses des différentes réponses du groupe d'enseignants

Nous avons obtenu trois copies du questionnaire adressé aux enseignants dont deux rédigées individuellement et la troisième collectivement par les quatre autres enseignants (cf. Annexes. B-I. 5. p.215-220).

IV. 2. 1. Objectifs du questionnaire

Le questionnaire que nous avons passé auprès des enseignants comporte quatre questions qui avaient pour objectif de repérer les différents points de vue des enseignants-étudiant sur

- ✓ Les connaissances visées par la situation d'enseignement et les objectifs d'apprentissage visés.
- ✓ Les connaissances mobilisées par les élèves au cours de la séance.
- ✓ Les connaissances institutionnalisées à l'issue de cette séance.
- ✓ Des remarques générales sur la séquence d'enseignement pour enrichir les analyses que nous avons effectuées à la partie III de ce chapitre.

IV. 2. 2. Analyse des réponses des enseignants

En ce qui concerne la méthodologie suivie dans l'analyse des réponses au questionnaire, nous avons choisi de repérer les différentes réponses, des enseignants, relatives à chacune des questions et de les confronter à nos objectifs de départ de la situation.

[115] L'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue de Tunis en Tunisie.
[116] La salle de conférence Avicenne à l'ISEFC de Tunis.
[117] Les cours de Master à l'ISEFC ont lieu les Vendredi, Samedi et Dimanche matin.

Analyse des réponses à la question 1 : « Quels seraient, d'après vous, les objectifs d'apprentissage et les connaissances visées dans cette situation ? »

La question consiste à décrire les objectifs d'apprentissage et les connaissances visées par la situation.

Les réponses des enseignants se résument en quatre points principaux :

- ✓ Définition de la parabole à partir d'une propriété géométrique.
- ✓ Mise en rapport d'une égalité algébrique avec un lieu de points dans un repère orthonormé.
- ✓ Consolidation des connaissances sur les notions de droite, représentation graphique d'une droite, équation d'une droite.
- ✓ Etude de la fonction trinôme $y = ax^2 + bx + c$.

Commentaire

Les réponses montrent que les objets mathématiques sont bien identifiés.

L'objectif de la situation d'enseignement n'a pas été totalement dévoilé. En effet, il est vrai que l'objet parabole et sa représentation graphique figurent dans la situation proposée. Par contre, l'objet fonction trinôme n'était pas étudié tout au long de la situation et il ne figurait même pas dans les tâches demandées par le contenu de l'activité. Nous faisons l'hypothèse qu'il y a confusion au niveau de l'identification parabole / fonction trinôme.

La deuxième réponse ouvre sur la reconnaissance des aspects sémantiques, même si le vocabulaire est absent. Au niveau de la quatrième réponse nous remarquons une association de l'écriture fonctionnelle $f(x) = ax^2 + bx + c$ et l'écriture équationnelle $y = ax^2 + bx + c$. Ceci confirme les analyses logiques du chapitre I dans lequel Frege explique que

« On a l'habitude de lire l'équation « $y = f(x)$ » « y est une fonction de x ». C'est commettre une double faute. Premièrement, on traduit le signe d'égalité par la copule ; deuxièmement, on confond la fonction avec sa valeur pour un argument. Ces fautes ont fait naître l'opinion que la fonction est un nombre, dût-il être un nombre variable ou indéterminé. » (Frege, 1971, p. 168-169).

Analyse des réponses à la question 2 : « Quelles sont, d'après vous, les connaissances travaillées par les élèves au cours de la séance ? »

La question consiste à déterminer les connaissances mobilisées par les élèves.

Les réponses des enseignants étaient :

- ✓ Construction d'une droite.

- ✓ Equation d'une droite.
- ✓ Repérage, traçage d'une droite à partir de son équation.
- ✓ Construction d'un point dans un repère orthonormé.
- ✓ Représentation d'une distance d'un point à une droite.
- ✓ Calcul de la distance entre deux points et d'un point à une droite.
- ✓ Calcul dans IR.
- ✓ Résolution des équations du premier et du second degré.
- ✓ Tracer une courbe, reconnaitre l'axe et le sommet d'une parabole à travers une représentation graphique.
- ✓ La parabole est la représentation graphique d'une fonction trinôme.

Commentaire

Les connaissances mobilisées par les élèves ont été majoritairement décrites par les enseignants.

Analyse des réponses à la question 3 : « Quels seraient, d'après vous, les connaissances que l'on pourrait institutionnaliser à l'issue de cette séance ? ».

Concernant la question qui consiste à repérer les connaissances institutionnalisées à l'issu de la situation, les enseignants ont répondu majoritairement que les connaissances institutionnalisées étaient de donner une :

- ✓ Définition de la parabole comme ensemble de points équidistants d'un point à une droite donnée (cf. Annexes. B-II. 5. p. 220).

Commentaire

Les enseignants ont repéré que la situation s'appuie sur la définition de la parabole comme lieu de points équidistant à une droite et à un point donné qui est bien un parmi ceux que l'on souhaite institutionnaliser. Nous pouvons ainsi dire que par rapport à l'objectif principal de cette situation la dévolution des enseignants est partielle.

Analyse des réponses à la question 4 : « **Question libre** : Proposez toutes vos observations sur cette séance. »

C'est une question libre dans laquelle on propose aux enseignants de commenter et de donner des observations sur la situation d'enseignement.

Nous pouvons dire que les réponses peuvent être classées en deux catégories. L'une s'inscrit dans un registre purement pédagogique et didactique et l'autre est purement technique.

Remarques pédagogiques et didactiques :

- ✓ Elèves motivés. (pédagogique)
- ✓ Bon niveau. (didactique)
- ✓ S'expriment assez correctement. (pédagogique & didactique)
- ✓ Une bonne maitrise des connaissances acquises. (didactique)

Remarques techniques :

- ✓ La qualité de l'enregistrement n'avait pas permis de suivre convenablement les interactions des élèves.

Commentaire

Les remarques des enseignants sont plutôt d'ordre pédagogique et didactique. En revanche, nous notons l'absence de commentaire sur la situation elle-même.

Conclusions

Les connaissances visées par la situation et les connaissances mobilisées par les élèves ont été repérées par la plupart des enseignants, même si nous avons remarqué quelques confusions au niveau de la distinction entre ces deux types de connaissances. En revanche, les objectifs d'apprentissage visés par la situation ne sont pas assez précis, puisque l'articulation des deux cadres algébriques et géométriques qui figure parmi les objectifs généraux de la situation n'a pas été identifiée. Par contre, le projet fondamental de la situation qui consiste dans une approche équationnelle de l'objet parabole par le biais de sa définition géométrique en vue de d'émerger la fonction trinôme.

Ceci nous a conduit à repérer de plus près le point de vue des praticiens, en particulier celui de ces enseignants. Pour cela, nous avons réalisé des entretiens semi-directifs qui peuvent, *a priori*, nous permettre de repérer ce que les enseignants ont identifié à travers cette situation, et principalement la place de l'articulation sémantique / syntaxe.

IV. 3. Entretiens semi-directifs avec les six enseignants

Introduction

L'objectif de cette expérimentation est d'avoir un maximum de recueil de données et d'informations sur le point de vue des enseignants à propos de la séquence d'enseignement proposée auprès des élèves du secondaire. Plus précisément, nous essayons de recueillir des informations sur leur interprétation de la mobilisation des points de vue sémantique et syntaxique dans l'enseignement et l'apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire.

Ceci nous a conduit à effectuer des entretiens semi-directifs qui nous ont permis, *a*

priori, de traiter un certain nombre de questions identifiées dans un guide d'entretien.

Nous avons considéré que ce type d'entretien est bien adapté à l'étude des phénomènes et des problématiques liés au travail ainsi qu'aux missions d'organisation. Il nous permet d'obtenir des informations, de recueillir des points de vue et de comprendre ce que les enseignants pensent ou peuvent penser sur le sujet traité, d'approfondir des points importants en rapport avec nos questions de recherche. D'autre part, l'entretien permet contrairement au questionnaire, de suivre l'évolution des idées des enseignants, d'intervenir et éventuellement de revenir sur certaines questions ou d'en éliminer d'autres, et ce, par rapport à l'ensemble et à l'orientation de l'entretien.

IV. 3. 1. La phase de préparation

L'entretien a été préparé en s'appuyant d'une part sur un cadre de travail dans lequel nous avons fixé nos objectifs et le planning que nous devons suivre. D'autre part, nous avons élaboré le guide d'entretien pour repérer les grandes lignes qui nous guident tout au long de l'entretien.

IV. 3. 1. 1. Le cadre

Nous avons fixé les objectifs de cet entretien à partir des informations déjà disponibles, dont celles qui ont été recueillies dans les réponses écrites des enseignants après la projection d'une part, et celles qui s'appuient sur les analyses des programmes, des manuels scolaires, ainsi que du test diagnostic que nous avons adressé aux élèves et aux étudiants en nous appuyant sur le cadre d'analyse de départ que nous avons effectué le long des chapitres I, III & IV d'autre part.

Le planning des entretiens est le suivant : un rendez-vous avec trois enseignants le vendredi 23 février 2007, un rendez-vous avec un enseignant le vendredi 09 mars 2007 et deux rendez-vous le 10 mars 2007.

IV. 3. 1. 2. Le guide d'entretien

La construction de l'entretien est basée sur deux grands thèmes. Le premier thème consiste à approfondir les questions sur la situation d'enseignement étudiée et ce en vue de repérer le point de vue de praticiens sur l'activité proposée et en particulier sur le cadre dans lequel ils pensent intégrer cette activité, les concepts mathématiques mis en jeu, les attentes et les objectifs de l'expérimentateur.

Le deuxième thème consiste à poser des questions d'ordre professionnel, en particulier les outils qu'ils exploitent pour enseigner les objets mathématiques relatifs à notre étude et plus particulièrement au niveau de résolution des équations du premier et du second degré.

Nous avons utilisé, éventuellement, des techniques assez simples pour rédiger les questions relatives à chaque thème.

IV. 3. 2. La mise en place des entretiens menés avec les enseignants de mathématiques

La motivation et l'accord de principe des enseignants ont facilité nôtre tâche pour réaliser les entretiens.

IV. 3. 2. 1. Choix du lieu

Nous avons eu l'accord de la direction de l'ISEFC de Tunis pour réaliser ces entretiens dans le laboratoire de l'audio-visuel qui nous semble être un lieu qui permet de préserver la convivialité et la confidentialité pour la réalisation des entretiens.

IV. 3. 2. 2. La phase de la réalisation et profil des enseignants

Avant de commencer à décrire la conduite de l'entretien, nous précisons que nous avons eu l'autorisation des six enseignants, pour enregistrer le déroulement des entretiens. Nous avions auparavant expliqué clairement que cet entretien se situe dans le cadre d'une recherche en didactique des mathématiques et que la durée de l'entretien ne dépasserait pas 30 minutes.

Nous avons également indiqué qu'un compte rendu sera soumis pour validation à la suite de l'entretien et que l'enregistrement de cet entretien obéit aux règles de la confidentialité.

IV. 3. 2. 3. Conduite de l'entretien

Nous avons essayé de créer un climat favorable par une attitude d'ouverture et d'écoute des interviewés en nous appuyant sur un guide. Nous sommes intervenu dans des cas où il nous semblait que les aspects des questions semblaient être complexes et ce par des reformulations ou des synthèses pour pouvoir avancer dans l'entretien et avoir plus de précisions de la part de l'interviewé.

IV. 3. 3. La phase de l'analyse des entretiens

Les analyses des entretiens s'appuient sur les transcriptions d'une part et sur une méthodologie que nous allons décrire ci-dessous.

IV. 3. 3. 1. La transcription des entretiens

Nous avons rédigé les transcriptions de ces six entretiens (cf. Annexes. B-II. 7. p.223-262) en nous appuyant sur des enregistrements numériques réalisés dans la salle de l'audio-visuel de l'ISEFC de Tunis. La qualité des enregistrements était très bonne ; ce qui nous a permis de rédiger les transcriptions de ces entretiens d'une manière très précises.

Dans ses transcriptions nous avons essayé de rédiger fidèlement tous ce qui a été prononcé tant de la part de l'intervieweur que de la part de chaque interviewé.

IV. 3. 3. 2. Objectifs et méthodologie de l'analyse des entretiens

Notons qu'à travers cette expérimentation, nous ne cherchons pas à évaluer les compétences des enseignants sur l'articulation sémantique et / ou syntaxe au niveau de l'enseignement des équations, inéquations et fonction au secondaire.

Ces entretiens réalisés avec les six enseignants visent à dégager le point de vue du praticien sur les enjeux et les spécificités de la séquence d'enseignement que nous avons réalisé auprès des élèves des classes de la deuxième année secondaire section sciences d'une part et à repérer leur conception des points de vue sémantique et syntaxique dans les résolutions des problèmes de mathématiques relatives à la manipulation des objets équations, inéquations et fonctions, d'autre part.

Il est clair que le découpage des entretiens est lié au type de question étudié le long des entretiens. Pour cela, nous avons découpé les entretiens en nous appuyant sur les changements de questions.

Tout au long des entretiens, nous avons des questions ouvertes et des questions fermées. Pour cela, nous avons choisi de récapituler les différentes réponses des enseignants, aux questions fermées, dans des tableaux suivis d'analyses et de commentaires d'une part et de faire une analyse qualitative des différentes réponses aux questions ouvertes, d'autre part.

IV. 3. 4. L'analyse effective des entretiens

L'entretien réalisé avec chaque enseignant est divisé en deux parties. La première partie consiste à dégager le point de vue du praticien sur les enjeux et les spécificités de la situation proposée au groupe d'élèves de la deuxième année secondaire section sciences du Lycée Ezzahrouni à Tunis. La deuxième partie de cet entretien consiste à dégager le profil de chaque enseignant pour voir la place d'un travail sémantique et / ou syntaxique dans les traitements, de nos objets mathématiques d'étude, de la part de ces enseignants.

Tout au long de l'analyse nous récapitulons, dans différents tableaux, le type de

réponse dans une première colonne et les lignes correspondantes à la réponse de chaque enseignant dans les transcriptions de chaque entretien dans la deuxième colonne. Si la réponse est en une seule ligne on note L. x où x est le numéro correspondant à la ligne. Si la réponse est repérée tout au long d'un paragraphe on note L. x - L. y où x est le numéro indiquant la ligne du début du paragraphe et y est le numéro de la dernière ligne du paragraphe.

Ci-dessous l'analyse de la première partie de l'entretien qui vise à dégager le point de vue des praticiens sur les enjeux et les spécificités de la séquence d'enseignement réalisée auprès des élèves.

IV. 3. 4. 1. Première partie de l'entretien

✓ **Question 1**

1) Proposeriez-vous cette activité à vos élèves ?

Dans cette première question les enseignants ont montré un grand intérêt pour l'activité proposée aux élèves. En effet, un seul enseignant (l'enseignant n°1) n'était pas d'accord sur la façon de la proposer ; il justifie son point de vue par le fait que « … *une telle avant tout ça ne se trouve pas dans le programme c'est un exercice…* ».

Les cinq autres enseignants ont exprimé leur intérêt pour ce type de problème et certains ont justifié leurs choix en s'appuyant sur le fait que l'approche géométrique remplace l'algébrique. Par exemple l'enseignant n°3 explique que

« … *c'est une façon de voir donc eh ! la nature de la parabole autre que ! c'est-à-dire géométriquement autre qu'analytiquement parce qu'ils la connaissent analytiquement puisqu'ils connaissent la fonction parabole.* » (cf. Annexe. B-II. 7).

L'enseignant n°4 justifie par le fait que « … *elle est pertinente, et il y a beaucoup de points que l'élève est obligé de réfléchir pour pouvoir les faire.* ».

L'enseignant n°5 explique que

« … *ça dépend du niveau dont on enseigne ! j'enseigne au collège donc je n'arrive pas à proposer à mes élèves ce type d'exercices mais j'imagine et je crois que si, si j'aurais euh ! si j'étais un professeur qui enseigne au lycée je peux euh ! l'enseigner à mes élèves.* ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 1.

	Enseignant 1	Enseignant 2	Enseignant 3	Enseignant 4	Enseignant 5	Enseignant 6
Réponse	Non	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
Numéro des lignes dans les transcriptions	L.2	L.6	L.6-L.8	L.8-L.14	L.4	L.8

Tableau 3.4.1.1

Commentaire

D'un point de vue didactique, il nous semble que l'enseignant n°1 est très attaché aux programmes puisqu'il essaye de justifier son choix en expliquant que ce type d'activité n'est pas recommandé par les programmes. Par contre, les autres enseignants sont intéressés par ce type d'activité ; certains ont justifié leurs choix et d'autres ont affirmé avoir abordé ce type de problème avec leurs apprenants, d'autre part. Toutefois, il reste à savoir si l'objectif visé par cette activité était le même ou pas avec celui qui était travaillé par les enseignants avec leurs élèves. Autrement dit, si cette approche était vraiment une caractérisation équationnelle ou géométrique de l'objet parabole.

✓ **Question 2**

2) A quel niveau d'enseignement secondaire proposez-vous cette activité ?

Les propositions d'enseignement de cette activité varient de la deuxième à la quatrième année secondaire en passant par la troisième année secondaire puisque, quatre enseignants parmi les six pensent qu'elle peut être proposée au niveau de la deuxième année secondaire et les deux autres enseignants proposent qu'elle soit adressée au niveau de la troisième et de la quatrième année secondaire section mathématiques[118]. En effet, l'enseignant n°1 propose qu'elle soit présentée au niveau de la quatrième année secondaire et explique que « … *De cette manière là c'est en terminale…etc.* ».

Les enseignants n° 2, 3, 5 et 6 proposent qu'elle soit présentée au niveau de la deuxième année secondaire :

L'enseignant n°2 répond « … *oui je crois, je crois que je vais donner ce genre de questions aux élèves de deuxième année secondaire.* ».

L'enseignant n°3 montre que le but de « … *l'activité est faisable au niveau de la deuxième année secondaire et l'objectif eh ! en principe se fait beaucoup plus tard c'est-à-dire en terminal…* ».

[118] Niveau première et terminale en France.

L'enseignant n°5 pense qu'il peut la proposer « … *au niveau de la deuxième année secondaire*. ».

Enfin, l'enseignant n°4 propose le niveau d'élèves en s'appuyant sur la séquence filmée en disant « … *Moi ce que j'ai remarqué je pense que vous l'aviez fais en sixième année c'est-à-dire troisième année math*. ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 2.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	4éme année secondaire	2ème année secondaire	2ème année secondaire	3ème année secondaire	2ème année secondaire	2ème année secondaire
Numéro des lignes dans les transcriptions	L.18	L.46	L.10-L.12	L.11	L.6	L.18

Tableau 3.4.1.2

Commentaire

Cette divergence dans les propositions des enseignants peut s'expliquer par le fait qu'il y a ceux qui sont attachés aux programmes et pour cela ils pensent que la propriété géométrique de l'objet parabole, que nous avons exploité dans l'activité, n'entre que dans le programme de la quatrième année secondaire section mathématiques et plus particulièrement dans le cadre de la géométrie. Par contre, d'autres enseignants semblent être plus flexibles et supposent que cette propriété est exploitable au niveau de la deuxième année secondaire surtout que tous les outils sont disponibles pour que les élèves travaillent dans ce genre de situations.

✓ **Question 3**

3) Dans quel cadre placez-vous cette activité ?

Lorsque nous avons posé cette question, nous avons observé que quelques enseignants ont éprouvé des difficultés pour comprendre ce qu'on veut dire par cadre. Ce qui nous a conduits à intervenir dans quelques entretiens afin de clarifier les idées (cf. Annexe. VI. 7).

Tout d'abord, rappelons que l'ancien manuel tunisien de la deuxième année secondaire est partagé en deux grandes parties dont la première est appelée algèbre et la deuxième est appelée géométrie. En outre, le nouveau manuel de la deuxième année secondaire section sciences est partagé en cinq parties intitulées respectivement : *activités numériques, activités algébriques, activités géométriques, activités dans un repère et activités sur les mesures des*

grandeurs.

Nous avons enregistré deux réponses des enseignants n° 4 et 6 dans lesquelles ils proposent que la solution puisse être introduite dans le cadre de l'algèbre. L'enseignante n°4 pense qu'elle se place dans le cadre de « … *étude de fonctions, fonction parabole.* » et l'enseignant n°6 propose en disant « … *je la placerai dans la partie algèbre*. ».

Par contre, les enseignants n°2 et n°5 placent cette activité dans le cadre de la géométrie puisque l'enseignant n°2 répond en insistant « … *je la place surtout en géométrie*. » et l'enseignant n°5 propose de la placer dans « … *la partie de la géométrie*. »

Enfin, les deux enseignants n°1 et n°3 pensent que cette activité est polyvalente puisque le premier conclut en disant « … *oui donc c'est les deux*. » et le second pense que c'est « … *au niveau de l'algèbre eh au niveau de la géométrie…etc*. ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 3.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Algèbre et/ou géométrie	Géométrie	Algèbre et/ou géométrie	Algèbre	Géométrie	Algèbre
Numéro des lignes dans les transcriptions	L.34-L.35	L.96	L. 26	L.20-L.21	L.15-L.18	L.20

Tableau 3.4.1.3

Commentaire

Les enseignants ont proposé toutes les combinaisons possibles, puisqu'ils pensent qu'elle peut être intégrée dans

- ✓ La partie de l'algèbre.
- ✓ La partie de la géométrie.
- ✓ L'une des deux parties c'est-à-dire l'algèbre ou la géométrie.

Ceci montre que les enseignants ont identifié la richesse potentielle de la situation et la possibilité de l'intégrer dans différents cadres, compte tenu du fait qu'elle articule les deux registres algébrique et géométrique.

✓ **Question 4**

4) Dans quel chapitre proposez-vous cette activité ?

Dans les réponses des enseignants, nous constatons qu'une majorité d'enseignants

proposent qu'elle soit introduite dans le chapitre des fonctions trinômes puisque les enseignants n°1, n°2, n°3, n°4 et n°6 ont répondu respectivement :

- « … *Si je donne cette activité comme exercice c'est-à-dire une activité de recherche c'est à partir ! qu'en fait les fonctions carrées, la représentation des fonctions carrées*… ».
- « … *oui les équations eh ! du troisième degré et les trinômes.* ».
- « … *je ne sais plus comment le chapitre s'intitule mais c'est à la suite du calcul de la distance d'un point et une droite… En principe ils ont déjà vue la eh ! dans la partie analyse l'équation d'une parabole non l'équation d'une fonct ! c'est-à-dire la parabole, la fonction du type* ax^2+bx+c… *ça se fait en parallèle*… ».
- « … *eh ! étude de fonctions, fonction parabole*… ».
- « … *l'étude des fonctions ! dans l'étude des fonctions*… ».

Dans ces réponses nous remarquons des choses intéressantes au niveau du vocabulaire. En effet, l'enseignant n°1 appelle fonction carrées les fonctions trinômes et l'enseignant n°4 appelle fonction paraboles les fonctions trinômes, ce qui pourrait s'interpréter comme une identification entre la fonction et sa courbe représentative. Ce qui renforce les résultats des analyses épistémologique et didactiques que nous avons conduites dans la première partie de notre travail de rechercher et montre que notre questionnement, lié à la subordination entre courbe et la fonction associée, mérite d'être mieux explicité même auprès des enseignants.

En revanche, l'enseignant n°5 pense que « … *cette activité je la propose dans le chapitre euh ! la distance peut être euh !... distance d'un point à une droite et distance de deux points.* ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 4.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Fonctions trinômes	Fonctions trinômes	Fonctions trinômes	Fonctions trinômes	Distance d'un point à une droite	Fonctions trinômes
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 46	L123-L.124	L. 28-L. 35	L.22-L.26	L.20-L.24	L.49-L.52

Tableau 3.4.1.4

Commentaire

Nous constatons qu'une majorité des enseignants (cinq parmi les six enseignants) propose l'intégration de l'activité dans le chapitre relatif aux fonctions trinômes. En revanche, nous n'avons enregistré qu'une seule réponse de enseignant n°5 qui propose de l'enseigner dans le chapitre intitulé dans l'ancien manuel de la deuxième année secondaire par « Activités dans un repère orthonormé » et dans le nouveau manuel de la deuxième année secondaire section sciences et technologies de l'informatique par « Géométrie analytique ».

Si nous reprenons les réponses des enseignants à la question précédente, qui consiste à proposer un cadre dans lequel nous pouvons introduire cette activité, nous remarquons que l'enseignant n°2 a changé de position, puisqu'il propose d'introduire cette activité dans le chapitre relatif aux fonctions trinômes qui ne font pas partie du cadre de la géométrie.

Ce qui renforce notre hypothèse sur un possible renversement de la relation entre fonction trinôme et parabole.

Enfin, nous remarquons que la proposition d'introduire cette activité dans le chapitre distance d'un point à une droite peut répondre à certaines questions relatives à l'activité mais pas aux objectifs principaux de la situation.

✓ **Question 5**

5) Pensez-vous qu'elle peut être placée comme une :

- ❖ Introduction d'un concept mathématique donné.
- ❖ Exercice d'application relatif à un concept mathématique bien déterminé.
- ❖ Exercice dans la liste des exercices d'un chapitre.

Les différentes propositions ont été retrouvées dans les réponses des enseignants. En plus, elles étaient équitablement partagées entre les six enseignants.

Les enseignants n°4 et n°5 proposent qu'elle soit introduite en tant qu'une introduction. En effet, l'enseignant n°4 explique que « … *c'est une introduction à la fonction parabolique…etc.* **»** et l'enseignant n°5 confirme « *une introduction d'un concept mathématique.* ».

Les deux enseignants n°2 et n°6 proposent d'introduire cette activité sous forme d'exercice d'application puisque l'enseignant n°2 répond sans hésitation « *un exercice d'application oui !* » et l'enseignant n°6 répond en justifiant en disant « … *En tout cas dans l'esprit du manuel tunisien c'est un exercice d'application tel que je connais les euh ! la*

fonction comme elle est introduite et les équations cartésiennes de droites je ne pense pas que cet exercice est programmé dans le but d'introduire et de donner un nouveau concept mathématique ; mais comme une application mais quelque soit l'objectif recherché par cet exercice moi je trouve que c'est un excellent exercice. ».

Enfin, les deux enseignants n°1 et n°3 proposent cette activité comme un exercice dans la liste des exercices du manuel scolaire. L'enseignant n°1 confirme « … *oui ! c'est un exercice de le liste des exercices*. » et l'enseignant n°3 pense que cette activité servira comme un exercice intégratif « … *dans la liste des exercices*. »

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 5.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Exercice dans la liste des exercices	Exercice d'application	Exercice dans la liste des exercices	Introduction d'un concept mathématique donné	Introduction d'un concept mathématique donné	Exercice d'application
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 86	L. 136	L.56-L. 60	L.74-L.76	L.34	L.62

Tableau 3.4.1.5

Commentaire

Il s'agit d'une activité ouverte favorisant l'articulation de différents registres d'une part et de différents objets mathématiques d'autre part. Elle ne s'inscrit donc pas naturellement dans une forme classique d'exercice d'un chapitre donné, ce qui conduit à des propositions d'introduction sous des formes diverses, qui toutes ont un certain degré de pertinence.

✓ **Question 6**

6) Pouvez-vous justifier votre choix ?

Les enseignants n°4 et n°5, qui proposent que l'activité peut être présentée comme une introduction d'un concept mathématique, pensent que cette activité introduit l'objet parabole d'une autre manière. En effet, l'enseignant n°4 confirme que l'élève « … *ne connait pas la forme d'une parabole donc c'est à lui de la découvrir, donc c'est intéressant de le faire!...* » et l'enseignant n°5 explique pourquoi il n'a pas choisi l'une des deux autres propositions puisque si elle est introduite « … *comme étant un exercice d'application, j'aurais pus trouver*

d'autres exemples et d'autres exercices plus simples. » et pense que « … *comme étant un exercice dans la liste d'exercices, je crois aussi que c'est inutile pour l'utiliser*. ».

Les enseignants n°2 et n°6 expliquent que par rapport à l'esprit des programmes et des manuels tunisiens d'une part et la motivation des élèves dans des situations d'apprentissage qui est liée directement à l'enseignement par la méthode active d'autre part ; confirment que l'activité peut être présentée sous forme d'exercice d'application. En effet, l'enseignant n°6 explique que « … *la fonction comme elle est introduite et les équations cartésiennes de droites … mais quelque soit l'objectif recherché par cet exercice moi je trouve que c'est un excellent exercice...* » et l'enseignant n°2 a montré à travers l'entretien qu'il était attiré par la situation et il explique en disant « … *c'est un exercice d'application qui est bien réussi, pour les motiver* … ».

Enfin, les enseignants n°1 et n°3 qui pensent que l'activité peut être introduite comme exercice de la liste des exercices, justifient leurs choix par le fait que c'est une activité intégrative qui s'appuie sur divers concepts ou objets mathématiques. L'enseignant n°1 raisonne par élimination et explique que s'il la propose sous forme d'introduction il doit « … *le reformuler d'une autre manière*… » et que « … *si c'est une application directe ! ce n'est pas de cette manière là que je donne une application directe ! application directe elle doit être eh ! donc c'est une application qui est bref pour fixer, donner, donc vérifier des propriétés*. ». L'enseignant n°3 pense que la situation « … *utilise plusieurs eh ! plusieurs concepts mathématiques*. » et en plus il pense qu'elle sert comme outil d'évaluation en disant « … *je ne sais pas si je vais évaluer par exemple uniquement la géométrie et s'ils ne reconnaissent pas que c'est une parabole donc quel serait le but de cette activité finalement ?* ».

Commentaire

Nous pouvons dire que la plupart des enseignants donne une place importante à l'application des directives des programmes. Cependant, nous remarquons qu'ils sont ouverts à ce type d'activité et ne sont pas attachés aux seuls exemples du manuel scolaire.

En outre, quelques enseignants ont repéré que la situation proposée articule plusieurs objets mathématiques en même temps, ce qui peut motiver l'introduction d'une telle situation en classe.

✓ **Question 7**

7) Si vous aviez la tâche de proposer cette activité, vous la proposerez

❖ Comme exercice individuel dans la classe.

- Comme devoir à la maison.
- Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement.

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 7.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Devoir à la maison	Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement	Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement	Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement	Comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement	Exercice individuel dans la classe
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 112	L. 152-L. 154	L. 78	L.92-L.95	L.54	L.70

Tableau 3.4.1.6

Nous avons enregistré les trois types de réponses proposées. En effet, l'enseignant n°1 dit qu'il peut proposer cette activité comme un devoir à la maison et explique que « … *dans ce cas là ça serait ! c'est une question de découverte, c'est un devoir de maison.* ».

L'enseignant n°6 dit qu'elle peut être proposée comme un exercice individuel dans la classe et justifie ses choix « *Euh ! Dans la classe c'est toujours bien parce qu'il y a toujours une interaction entre les élèves...* ».

Les quatre autres enseignants n°2, n°3, n°4 et n°5 proposent cette activité comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement.

L'enseignant n°2 confirme que cette activité peut être proposée « *comme travail de groupe oui !* ».

L'enseignant n°3 confirme qu'elle peut être proposée comme « … *un travail de groupe, peut être, en dehors des heures d'enseignement.* ».

L'enseignant n°4 récapitule et prend son temps et conclut en disant « … *D'accord, donc on choisit la troisième proposition.* ».

Enfin, l'enseignant n°5 approuve que c'est «… *un travail de groupe en dehors des*

heures prévues pour l'enseignement. ».

✓ **Question 8**

8) Pouvez-vous justifier votre choix ?

L'enseignant n°1 proposerait cette activité comme un devoir à la maison, il justifie son choix en s'appuyant sur le fait que cette activité se place dans le cadre d'une « … *découverte, c'est un devoir de maison, donc devoir de maison qu'il faut chercher ! même vous demandez à vos parents ! vous demandez à ça ! pour ! pour comprendre em ! pour mieux comprendre ça car ce n'est une activité au niveau de tous les élèves.* ».

L'enseignant n°6 explique qu'elle peut être proposée comme un exercice individuel dans la classe et justifie son choix en justifiant « … *Dans la classe c'est toujours bien parce qu'il y a toujours une interaction entre les élèves, entre élèves et prof donc euh ! les idées s'éclaircissent en discutant, en écoutant les remarques de quelqu'un ou une précision de l'enseignant parce que euh ! ce n'est pas un exercice, ce n'est pas un exercice facile, ce n'est pas une application directe ou d'euh ! c'est peut être une application directe de l'étude de la fonction trinôme pour rester sur la parabole c'est une application directe sur les équations de droites pour calculer la distance d'une droite à un point ; mais le plus intéressant dans l'exercice c'est de faire le lien entre les deux et de dire que cette parabole que je définissais au départ comme étant* $h(x) = ax^2 + bx + c$ *en fait pourrait être définie à partir d'autres données qui ne sont pas a priori algébriques.* ».

Les quatre autres enseignants justifient leur proposition de l'introduire comme un travail de groupes en dehors des heures prévues pour l'enseignement en s'appuyant sur les points de vue suivants :

L'enseignant n°2 semble être très intéressé par l'activité et surtout par « … *la motivation des élèves, je suis persuadée quand j'ai vue… ils sont très motivés de travailler ensemble… je crois que pour les encourager à travailler en groupe et pour qu'ils cherchent quelque chose comme si c'était un problème ouvert… c'est une autre faveur pour la donner pour les élèves.* ».

L'enseignant n°3 justifie son choix par rapport aux objets mathématiques mis en œuvre et explique que « … *parce que ce n'est pas facile, parce que le choix, déjà, de la droite d'équation y=-1 on a vu vraiment que ça avait posé des problèmes pour le calcul des distances… chose qui n'est pas évidente, par exemple pour eh ! dans un devoir… et puis eu ! pour s'attarder un petit peu sur le euh, sur la conclusion aussi pour quoi pas ! pour les bons élèves eh !*».

L'enseignant n°4 explique ses choix en les mettant en rapport avec la question du temps didactique qui contribue à l'institutionnalisation de l'objet de savoir mit en vigueur et il préfère « *… avoir du temps pour avoir la finitude, pour avoir la conclusion c'est, ça prend beaucoup de temps, donc on aime bien arriver à cette étape là, au stade de conc d'euh ! d'institutionnalisation.* ».

Enfin, l'enseignant n°5 reprend les contraintes du temps didactique en expliquant que « *… ça demande beaucoup de temps, c'est une question d'euh ! du gain de temps.* ».

Commentaire

Les justifications des enseignants relatives au sujet de la question n°7 s'appuient sur deux grands axes dont l'un est didactique et l'autre est pédagogique.

Au niveau de l'axe didactique, les enseignants expliquent leurs choix par la nature des objets mathématiques introduits dans la situation et à la nature de l'activité qui a posée quelques difficultés[119] aux élèves d'une part et par la question du temps didactique pour la mise en œuvre et l'institutionnalisation de cette situation, d'autre part.

Au niveau de l'axe pédagogique, quelques enseignants expliquent leurs choix en s'appuyant sur l'intérêt de la méthode active pour travailler avec les élèves.

✓ **Question 9**

9) Quels sont les concepts mathématiques mis en jeu dans cette activité ?

Si nous regroupons toutes les réponses des enseignants interviewés, nous retrouvons la plupart des objets mathématiques qui ont été mis en jeu tout au long de cette activité.

Les réponses individuelles ont été récapitulées dans le tableau ci-dessous.

[119] Ces difficultés sont liés au calcul de la distance entre le point M de coordonnées variables et la droite D d'équation $y = -1$ qui a été développée dans l'analyse de la situation.

	Enseignant 1	Enseignant 2	Enseignant 3	Enseignant 4	Enseignant 5	Enseignant 6
Réponse	Fonction affine Equation réduite, cartésienne, Distance Nombres Valeur absolue Fonction trinôme	Equation d'une parabole Distance Droite	Equation d'une droite, Distance Toute la géométrie analytique	Distance Droite Discriminant Equations du second degré Fonction trinôme	Parabole Distance Equation Fonction trinôme	Distance Fonction trinôme Courbe
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 114- L. 152	L. 164- L. 169	L. 87- L. 98	L.97- L. 130	L.61- L. 76	L.74 – L. 80

Tableau 3.4.1.7

Remarquons que quelques enseignants ont éprouvés des difficultés au niveau de la compréhension de ce que nous voulons dire par concepts mathématiques. Pour cela, nous avons dû intervenir afin d'expliciter ce que nous voulons dire (cf. Annexe. B-II. 7, prof 1, prof 3, prof 4).

Commentaire

Les réponses des enseignants ont décrit tous les objets ou concepts mathématiques mis en jeu à l'issu de cette situation.

Notons que nous retrouvons ici les questions liées au vocabulaire. En ce qui concerne les objets fonction trinôme et parabole (cf. Annexe. B-II. 7. prof 4. L 122) l'enseignant n°2 est le seul à avoir énoncé explicitement l'expression « équation d'une parabole », qui est l'un des objets principaux de la situation.

Enfin, il nous semble que l'enseignant n°6 avait repéré l'objectif principal de cette situation (cf. Annexe. B-II. 7. Prof 6. L 80).

✓ **Question 10**

10) Quels sont les attentes de l'enseignant dans la séquence d'enseignement?

Les différents points de vue des enseignants sur les attentes du chercheur à l'issue de cette situation sont récapitulés dans le tableau suivant à partir de ce qui ressort des transcriptions des entretiens.

Tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 10.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Montrer une propriété géométrique d'une conique (parabole)	Reconnaitre l'équation de la parabole	Approche géométrique de la parabole pour passer aux fonctions	Elaboration des concepts mathématiques sans l'intervention du professeur	Approche géométrique de la parabole	Reconnaitre une courbe d'une fonction qu'aucun des élèves ne s'attendait à ce qu'elle soit une parabole
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 154- L. 160	L. 190- L. 200	L. 100- L. 104	L.32- L. 140	L.78- L. 86	L.82 – L. 80

Tableau 3.4.1.8

Commentaire

La majorité des enseignants avait repéré que l'articulation des deux registres algébriques et géométriques est la composante principale de la situation. Par contre, il n'y a que l'enseignant n°3 qui a réussi à préciser les enjeux de la situation.

Par ailleurs, un enseignant a fait une remarque très intéressante, en ce sens que pour lui cette situation a été élaborée pour que l'enseignant n'intervienne pas. Ce qui renvoie au cas des situations a-didactiques.

Conclusions relatives à la première partie de l'entretien

Tout au long de cette première partie de l'entretien, la plupart des enseignants ont montré leur intérêt pour la situation d'enseignement proposée même si l'enseignant n°1 était très attaché aux directives des programmes. En outre, les propositions de mise en œuvre de la situation, qui variaient d'une introduction à un exercice de la liste des exercices en passant par l'exercice d'application, nous a montré la possibilité que ce type d'activité trouve sa place dans les classes.

D'un autre côté, l'objectif final de cette situation qui consiste à dégager à partir d'une équation cartésienne du second degré à deux variables réelles la fonction trinôme associée, semble ne pas avoir été repéré par une bonne partie des enseignants, ce que pouvait laisser

prévoir l'analyse des programmes et des manuels.

Dans ce qui suit, nous présentons l'analyse de la deuxième partie de l'entretien qui vise à dégager la conception des enseignants des points de vue sémantiques et syntaxiques dans les résolutions des problèmes de mathématiques relatives à la manipulation des objets équations, inéquations et fonctions.

IV. 3. 4. 2. Deuxième partie de l'entretien : (questions d'ordre professionnel)

✓ **Question 1**

1) Qu'est ce que vous dites à vos élèves lors de la résolution des équations ?

Les conseils des enseignants à leurs élèves lorsqu'ils résolvent des équations sont très variés.

L'enseignant n°1 articule les deux points de vue sémantique et syntaxique dans l'enseignement des équations. En effet, il attribue une place importante à l'univers du discours et explique que « … *avant tout … il faut chercher … le domaine de validité quand est ce que cette équation elle est valide.* ». De plus, il s'intéresse à la vérification et au statut de la solution d'une équation qui est de « … *trouver dans ce domaine là des ! une valeur qui vérifie ! chercher l'ensemble des valeurs dans ce domaine là qui vérifient cette équation.* » ce qui relève du point de vue sémantique. En plus, il n'hésite pas de dire que « … *il faut faire des démarches pour arriver à isoler l'inconnue pour travailler l'équation.* » qui relève du point de vue syntaxique.

L'enseignant n°2 pointe son apprentissage sur l'aspect sémantique dans les résolutions et explique d'une autre manière. En effet, il insiste qu'il faut « … *bien faire attention aux hypothèses c'est-à-dire au domaine de définition où on travaille dès le début.* » et s'intéresse au contrôle et à la vérification « … *il faut s'assurer que chaque solution est bien dans le domaine de définition fixé au départ parce qu'on peut travailler sur IR comme on peut travailler sur une partie restreinte de IR dès le début.* ». En plus, il s'intéresse aux deux cas extrêmes qui relèvent de la sémantique « … *l'ensemble des solutions il va être l'ensemble vide.* » ou bien « … *vous allez trouver c'est-à-dire toujours une solution et eh ! pour les équations.* ».

L'enseignant n°3 a une tendance plus syntaxique que sémantique. En effet, il explique en disant « … *ce que je dis, c'est-à-dire pour qu'ils retiennent, il faudra ramener l'équation, euh ! l'équation se ramènera toujours au type ax=b, par exemple s'il s'agit d'une équation du*

premier degré. » et confirme que la vérification n'a pas une grande place dans les traitements et il montre que « … *si x différent est égale euh si a eh si on trouve que a est nul il faut revenir sur l'équation c'est-à-dire on remplace zéro x égale eh en fait je ne leur dit pas grand-chose c'est-à-dire finalement je ne conclus pas vraiment...* ».

L'enseignant n°4 s'exprime explicitement sur la nécessité de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique en insistant à « … *Ne pas apprendre des algorithmes n'importe comment, ça veut dire les équations, par exemple du second degré il n'y a pas que les discriminant pour faire la résolution, on peut leur donner des cas où la résolution sans discriminant est beaucoup plus simple et puis euh ! et dans le moins de pièges.* ». Il prend le cas des inéquations en s'appuyant sur un exemple se traitant d'une manière sémantique très simple que la méthode syntaxique en expliquant « … *par exemple si je leur donne* x^2-4x+4 *... ça donne* $(x-2)^2$ *si je leur dit c'est supérieur ou égale à zéro ou même égale à zéro, il n'a pas de faire, de faire le euh ! ni de tableau de signe, ni la résolution qui se fait à l'aide de delta, c'est beaucoup plus simple de travailler la, l'autre partie...* ».

L'enseignant n°5 accorde une place importante aux techniques syntaxiques de résolution, puisqu'il pense que « … *au cours de la résolution, l'élève doit être capable de résoudre une équation c'est de savoir comment il manipule euh ! les techniques de résolution…* ».

Enfin, l'enseignant n°6 insiste sur le travail syntaxique de résolution en expliquant que « *Dans la résolution, alors euh ! moi ce que je dis souvent en mathématiques en général, pas seulement dans la résolution des équations, toutes les, toutes les situations qui font appel à une sorte d'algorithmes, résoudre une équation eh ! il y a des gestes à faire et les gestes on les réussie mieux quand on les fait toujours de la même manière. Bien sûr il y a toujours les eh ! des élèves euh ! entre guillemets « brillants », qui pourraient s'euh pour voir des astuces ; mais pour l'élève d'une manière générale, moi je conseille toujours de procéder de la même manière pour acquérir, pour acquérir un certain mm, une certaine manière assez élégante de faire les équations…* ». Cependant il précise que dans le cas des équations du second et du troisième degré en disant « … *c'est à des niveaux plus élevés, d'abord il faut reconnaître dans quel type d'équations nous sommes, si c'est une équation, si c'est une inéquation, s'il y a des solutions évidentes, s'il y'en a pas, ensuite la solution dans quel ensemble je suis en train de résoudre, faire attention ! à l'univers donc euh ! une fois est ce que chaque que je trouve une solution elle est valable, est ce qu'elle doit vérifier par la suite des conditions d'appartenance.* ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif repérant les réponses des enseignants à la question 1 de la deuxième partie de l'entretien et qui sont transcrites dans les annexes (cf. Annexe. B-II. 7).

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 182- L. 190	L. 214- L. 224	L. 129- L. 145	L.144- L. 154	L.92- L. 114	L.90 – L. 96

Tableau 3.4.2.1

Commentaire

Les enseignants n°1, n°2 et dans une moindre mesure l'enseignant n°6 expliquent d'une manière générale la pertinence de l'articulation sémantique syntaxe dans les résolutions des équations en s'appuyant sur la méthodologie générale de la résolution qui consiste à déterminer l'univers du discours, résoudre l'équation et vérifier ou substituer les solutions dans l'équation de départ. Par contre, l'enseignant n°4 est très explicite en donnant un exemple pertinent qui montre la place de la sémantique dans des cas de résolution où les techniques syntaxiques s'avèrent opérationnelles mais très compliquées. L'enseignant n°6 quand à lui réserve les procédures sémantiques pour les bons élèves ou les étudiants avancés.

D'autre part, nous remarquons que, d'après leurs déclarations, les deux enseignants n°3 et n°5 privilégient explicitement les techniques syntaxiques dans les résolutions.

- ✓ **Question 2**

2) Comment introduisez-vous le second degré ?

Les enseignants introduisent le second degré en s'appuyant sur différentes méthodes. L'enseignant n°1 est attaché à une méthode purement algébrique qui consiste à commencer par des exemples de « … *équations simples qu'on connait puis on passe à des équations telles qu'on peut utiliser les produits remarquables qu'on peut résoudre.* » ensuite il passe à des « … *équations simple c'est-à-dire des équations du second degré qu'on peut qu'on peut factoriser pour trouver la solution.* » enfin il propose des « … *équations c'est-à-dire des équations du second degré qu'on ne peut pas utiliser directement il faut faire la forme cano ! canonique donc je commence par ajouter un nombre pour trouver une forme d'un début d'un produit remarquable après j'introduis les formes ! les formes canoniques pour aboutir à trouver delta.* ».

L'enseignant n°2 n'a pas donné de réponse sachant qu'il est détaché et ne se souvient

plus des répartitions des chapitres… « … *non, en fait je ne maîtrise pas la répartition des chapitres, je ne peux pas vous répondre.* ».

On voit bien que l'enseignant n°3 favorise le point de vue syntaxique et explique que « *Pour les équations du second degré, donc on procède par la factorisation tout d'abord... ensuite d'écrire sous forme d'euh ! c'est-à-dire de ramener à la forme canonique… pour pouvoir ensuite factoriser et eh ! ensuite passer au discriminant c'est-à-dire faire la eh ! dans le cas général* ». En plus, il avait traité l'exemple qu'il avait proposé en s'appuyant sur des techniques syntaxiques « … *Par exemple, s'il s'agit là de* $x^2 - a = 0$ *c'est* $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$ *ou alors* $x^2 = a$ *et* a *positif c'est euh !* $\pm\sqrt{a}$ *par exemple, chose qu'ils oublient euh ! au fur et à mesure qu'on avance dans l'année.* ».

L'enseignant n°4 ne nie pas la place du syntaxique dans la résolution des équations du second degré mais il remarque qu'il enseigne « … *avec des cas particulier, justement, le discriminant n'est pas très pertinent, trop long, l'élève n'arrive à nous suivre, surtout les élèves moyens n'arrivent pas à suivre la théorie d'euh ! de delta c'est la forme canonique etcetera, il vaut mieux le faire à l'aide de cas particuliers c'est-à-dire que c'est un algorithme que l'élève doit apprendre avec les cas particuliers et puis il vas appli, il va démontrer avec la forme canonique et puis il aura le discriminant…* ».

L'enseignant n°5 enseigne au collège et se réfère explicitement aux programmes du collège ; il dit en effet qu'il « … *introduit le second degré en utilisant les équations du premier degré en utilisant la factorisation à ce moment… on ne donne pas d'équations à résoudre en utilisant le discriminant… les procédures, c'est d'utiliser les factorisations… et le produit égale à zéro et que chacun des membres égale à zéro.* ». Ces techniques d'enseignement relèvent plutôt d'un aspect syntaxique que d'un aspect sémantique.

Enfin la réponse de l'enseignant n°6 confirme ce que nous venons de repérer à travers la question précédente où il réserve les procédures sémantiques pour les élèves les plus avancés. Il dit en effet que « … *il faut donner des exemples sur les eh ! qui tombent directement sur les équations du second degré parce que euh euh ! la grande question des élèves c'est systématiquement, quand on introduit un chapitre nouveau ou quelques choses, à quoi ça va servir, pourquoi ceci, pourquoi cela, donc si on introduit par un exercice très simple par exemple la surface d'un carré, d'un rectangle dont les côtés vérifient une relation bien particulière et les élèves, bon euh ! par exemple commencent par le côté x et x+5 et on donne des valeurs à la surface qui pourrait s'écrire visiblement par x fois x+5 et puis on change dans le deuxième exemple et l'élève se trouve confronté à cette difficulté donc déjà*

quand vous dites je vais résoudre une équation du second degré dans le cas général il a au moins son exemple en tête et il va s'accrocher à la méthode générale et il ne reste que pour connaître comment ça fonctionne pour son exemple à lui. ».

Ci-dessous, une indication des lignes des morceaux des transcriptions indiquant les différentes manières d'introduire le second degré proposées par les enseignants qui sont récapitulées dans le tableau suivant (cf. Annexe. B-II. 7).

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 194-L. 198	L. 230-L. 253	L. 153-L. 175	L. 156	L.116-L. 126	L.98 –L. 100

Tableau 3.4.2.2

Commentaire

Les enseignants s'appuient sur différentes approches pour introduire le second degré auprès des élèves du secondaire. Les enseignants 1, 3, 5 & 6, proposent des approches s'appuyant sur des techniques syntaxiques du cadre algébrique, même s'ils remarquent qu'il y a des cas particuliers à traiter, et ce, en faisant appel à la forme canonique et au calcul du discriminant.

Par contre, l'enseignant n°4 propose une entrée sémantique, explique la complexité de la théorie ramenant au discriminant et pense que l'apprentissage ne sera assuré qu'avec un traitement des cas particuliers.

✓ **Question 3**

3) Qu'est ce que vous faites pour faire vivre l'aspect sémantique chez vos élèves ?

Tout d'abord, remarquons que nous étions obligés d'intervenir, auprès de tous les enseignants, pour expliquer ce que nous voulons dire par aspect sémantique.

Voici quelques extraits des enseignants.

✓ Enseignant n°1 « *je ne comprends pas la question c'est ça l'effet sémantique qu'est ce que ça veut dire ?* ».

✓ Enseignant n°2 « *l'aspect sémantique !... c'est-à-dire euh !* ».

✓ Enseignant n°3 « *Non je n'ai pas compris, justement !* ».

- ✓ Enseignant n°4 « *Je ne t'avais pas compris.* ».
- ✓ Enseignant n°5 « *l'aspect sémantique ! j'ai un problème avec ce mot !* ».
- ✓ Enseignant n°6 « *Qu'est ce que vous entendez par aspect sémantique ?* ».

Après notre intervention les enseignants ont retrouvé leurs repères pour pouvoir répondre à cette question.

L'enseignant n°1 donne un exemple dont la résolution sémantique permet l'économie au recours aux transformations syntaxiques et explique « … *comme j'ai dit, l'exemple* $x^2-5=0$ *ce n'est pas la peine de faire delta ! donc il faut factoriser.* ». Ainsi, l'enseignant n°1 reprend l'aspect syntaxique de la résolution en faisant recours à la factorisation alors que $x^2-5=0$ se résout facilement sans recours à des transformations algébriques complexes où $x^2=5$ et alors $x=\pm\sqrt{5}$.

L'enseignant n°2 insiste « … *toujours après, à la fin euh ! la vérification* » et il évoque la place de la substitution « … *et puis dans le domaine de définition* ».

L'enseignant n°3 comprend rapidement que « … *l'égalité est une phrase mathématique* » et commence à expliquer que « … *j'attire leur attention sur ça, c'est des phrases mathématiques et il vraiment que ça ait un sens* » et remarque « … *je leur dit qu'il ne faut pas perdre de vue, par exemple que deux équations sont équivalentes si et seulement si elles ont le même ensemble de solutions.* » et il insiste sur la pertinence d'un travail par équivalence qui favorise l'articulation entre les transformations et le contrôle mais qui ne couvre pas tout ce qu'on veut dire par point de vue sémantique dans la résolution des équations algébriques.

L'enseignant n°4, qui insiste implicitement, tout au long du questionnaire, sur l'aspect sémantique, pense qu'il a répondu à cette question « *Je n'ai pas répondue lorsque euh !* » et continue à donner des exemples dont le traitement sémantique est une question principale pour avancer dans les résolutions et il reprend « … *lorsqu'on donne, faite la valeur absolue de* $|x-5|=-2$ *? là c'est un sens à l'équation, ces propriétés il faut les avoir en tête c'est-à-dire on peut piéger l'élève en leur donnant des équations où il, il n'aura pas du temps à perdre !* » et précise que « *en deuxième année ! donc il faut regarder la condition d'existence avant tout euh ! regarder quand est ce que nous avons une intersection, quand est ce que nous avons une réunion ça c'est un obstacle pour les élèves, c'est ça ce que ça veut dire donner un sens à une équation, comprendre notre résolution ce n'est pas, n'est pas de le faire d'une manière automatique.* ».

Il apparaît clairement ici que pour l'enseignant n°4 la mobilisation des techniques purement syntaxiques ne doit pas être automatique. Il insiste sur la pertinence de la vérification et du contrôle dans les traitements des équations, et attire l'attention sur les questions de compréhension dans les cas d'impossibilités (qui relèvent d'un point de vue sémantique) :

« *Justement, le bon moyen lorsque vous donnez une solution qui ne marchera pas, l'élève il est très content le* S_{IR} *on l'a écrit, en remplaçant, il n'arrive euh, il trouve quelque choses d'impossible, surtout si on fait les simplifications euh ! on ne fait pas les simplifications, on ne fait pas les simplifications avec la valeur qu'il rend l'écriture impossible et là l'élève ne comprend pas zéro sur zéro là il ne comprend rien.* ».

L'enseignant n°5 s'exprime en disant « … *je crois que faire approprier l'élève à des situations de problèmes, surtout de la vie courante… comme j'ai dis, euh ! je parle des problèmes de la vie courante et de modéliser les situations euh !* ». Donc il pense que donner du sens aux écritures mathématiques revient à modéliser et donner des exemples de la vie courante.

Enfin, l'enseignant n°6 reprend la même idée que l'enseignant n°5 qui pense que donner du sens aux écritures mathématiques revient à donner des problèmes de vie courante… En outre, l'enseignant n°6 soulève la question des langages naturels, logique et mathématique en expliquant que « … *il faut habituer l'élève aussi à traduire des phrases simples bien sûr à son niveau qui sont énoncés dans le langage, dans le langage à nous qui est le langage naturel et c'est lui qui utilisera euh ! une écriture symbo, symbolisée pas nécessairement quantifiée mais juste symbolisée à la limite il traduira le quelque soit x dans son langage exceptera… quand il se demandera qu'est ce que je dois mettre ici, qu'il comprendra que euh ce que le prof écrit n'est pas rien et c'est des choses qui ont un sens, c'est des choses qui doivent être interprétés correctement pour pouvoir avancer dans les résolutions dans n'importe quelle situation classe.* ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 3 de la deuxième partie de l'entretien.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Problème de vie courante Application faciles et directes	Raisonnement par équivalence		Sens interne aux écritures mathématiques Univers du discours Contrôle Substitution Contre exemples	Situation problème : modélisation Problèmes de la vie courante	Vérification Contrôle Univers du discours et condition d'existence Contre exemple
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 200- L. 220	L. 254- L. 348	L. 177- L. 207	L. 158- L. 178	L.128- L. 152	L.102 – L. 114

Tableau 3.4.2.3

Commentaire

La question de sens semble être une notion assez complexe et on voit bien que les points de vue des enseignants sont assez différents au niveau de l'interprétation des objets mathématiques. En effet, il y a ceux qui pensent que le sens est à l'intérieur des mathématiques (intra-mathématique) en incitant les élèves à donner de l'importance à la vérification, au contrôle, aux contres exemples, à déterminer l'univers du discours…etc d'autres pensent que le sens se donne aux objets mathématiques en cherchant des exemples extérieurs au mathématiques (extra-mathématique) par l'introduction des exemples de problème de vie courante et / ou de modélisation.

✓ **Question 4**

4) Est ce que vous explicitez les vérifications ?

Les enseignants ont répondu librement et sans aucun complexe à cette question.

L'enseignant n°1 répond sans hésitation *« oui pourquoi ! ils vérifient bien sûr ils doivent vérifier les résultats parce que si dans un problème si une fois on fait une faute il faut vérifier est ce que c'est ! ce qu'on a trouvé, la solution qu'on a trouvé est ce qu'elle est valide ou n'est pas valide.* ».

L'enseignant n°2 confirme « *ah ! oui, oui* ».

L'enseignant n°3 infirme « *Ah ! non… mais pas tout le temps.* ».

L'enseignant n°4 assure que « *Logiquement c'est à la dernière étape, c'est-à-dire, on peut donner des questions auparavant, vérifier si 1 est une solution euh ! vérifier euh ! on peut le faire ; mais est ce que c'est pertinent de le faire au début, parce qu'ici, des fois c'est pertinent quand on le fait au début, déjà l'idée même de remplacer n'est pas évidente chez l'élève et y a plus euh ! des fois l'élève a mis le* S_{IR} *sans savoir que ce* S_{IR} *vérifie l'équation et si vous prenez tout le travail il ne le sait pas le faire donc peut être au début de la résolution d'équations il fallait lui proposer quelques solutions ou bien des non solutions et puis on fait notre résolution, une fois qu'on la faite on pourrait revenir à nos vérifications et c'est intéressant.* ».

L'enseignant n°5 affirme « … *oui je demande toujours aux élèves de vérifier… en fin de la résoudre je demande aux élèves de toujours d'euh ! de vérifier.* »

L'enseignant n°6 témoigne « *euh ! pas de manière systématique moi je ne suis pas pour la vérification d'une manière systématique peut être pour un début, peut être pour des situations euh ! ambigües pour les élèves par exemple ils commencent euh, il y a des équations que les élèves voient et ils vous disent non c'est impossible avant même de faire quoi que ce soit comme calculs, là euh ! on pourrait travailler et trouver un exemple et vérifier que ça marche etcetera, mais eh ! vérifier systématiquement les solutions que peut retrouver même pour une équation du premier degré qui est simple, euh ! moi je trouve que ça enlève euh ! sa crédibilité quand même dans le processus mathématique parce que ces élèves là ils vont apprendre, maintenant, des choses très simples, vérifiables, d'ailleurs rapidement, mais au fur et à mesure qu'ils avancent dans leur cursus ils vont apprendre des choses plus compliqués qui ne sont peut être pas facilement vérifiables et euh ! et ils ne vont pas être bloqués à chaque fois de s'assurer si ça marche ou ça ne marche pas pour pouvoir avancer.* ».

Ci-dessous le tableau récapitulatif des réponses des enseignants à la question 4 de la deuxième partie de l'entretien.

	Enseignant 1	**Enseignant 2**	**Enseignant 3**	**Enseignant 4**	**Enseignant 5**	**Enseignant 6**
Réponse	Oui	Oui	Non	Oui En dernier et en premier lieu	Oui	Oui mais pas systématiquement
Numéro des lignes dans les transcriptions	L. 222- L. 226	L. 350	L. 209- L. 214	L. 194	L. 154- L. 158	L.118

Tableau 3.4.2.4

Commentaire

Pour certains, comme les enseignants n°1, n°2, n°3, n°5 et n°6 la vérification à une place assez timide dans leurs enseignements. Parmi-eux ceux qui pensent que la vérification est la dernière étape dans la résolution des équations ; il y a même ceux qui sont contre l'automatisation du contrôle et de la vérification et il y a ceux qui font appel à la vérification de temps en temps.

Pour l'enseignant n°4, en accord avec l'ensemble de ses réponses, la vérification, la substitution et l'interprétation ont une place importante dans l'apprentissage de la résolution des équations.

Conclusions relatives à la deuxième partie de l'entretien

Les questions que nous avons posé aux enseignants tout au long de cette deuxième partie de cet entretien qui étaient en lien avec nos questionnements de départ sur la place de l'articulation des deux points de vue sémantiques et syntaxiques dans les résolutions des problèmes de l'algèbre manipulant des équations, inéquations et fonction au niveau du secondaire, ont montré, d'une part, que sauf pour un enseignant, la mobilisation du point de vue sémantique semble occuper une place restreinte dans leur enseignement et d'autre part que lorsqu'elle est évoquée, elle renvoie largement à des problèmes extra mathématiques.

Conclusion des entretiens

L'analyse globale de l'entretien que nous avons mené avec les six enseignants, qui sont des étudiants en première année de master en didactique des mathématiques, permet de

mettre en évidence les résultats suivants.

D'une part, la situation d'enseignement proposée auprès des élèves de la deuxième année secondaire section sciences et technologie de l'informatique était, pour eux, intéressante même si l'objectif principal du chercheur n'était pas totalement déterminé. Les réponses des enseignants, aux questions intermédiaires posées, ont montré d'un côté que les enseignants ont identifié la richesse de la situation qui articule, à la fois, plusieurs objets mathématiques et les registres algébrique et graphique et d'un autre côté que la plupart seraient prêt à l'introduire et ce bien que ce type de situation soit absent des manuels scolaires du secondaire tunisien.

D'autre part, un bon nombre d'enseignants favorisent l'outil syntaxique de résolution au profit de l'outil sémantique. En effet, plusieurs enseignants ont affirmé le recours minime aux techniques de contrôle et de vérification qu'ils appliquent, parfois, à la fin de la résolution. Cependant, la mobilisation de l'outil sémantique dans les résolutions n'est pas totalement absente chez ces enseignants puisque certains d'entre eux ont soulevé les questions d'interprétation des écritures mathématiques, lesquelles peuvent relever d'un ou plusieurs registres. Enfin, nous pouvons dire que, pour l'enseignant n°4, l'entrée sémantique est clairement privilégiée.

Conclusion du chapitre

Notre projet, à travers la situation d'enseignement proposée, est l'étude de l'articulation sémantique syntaxe que nous avons mis en rapport avec les objets équation, inéquation et fonction dans des situations de résolution et en particulier l'approche équationnelle de l'objet parabole.

Les analyses du déroulement de la séquence expérimentale montrent clairement que les élèves ont un niveau technique, au sens de Robert, du type syntaxique puisqu'ils mobilisent, dans la plupart du temps, des formules et des transformations purement algébriques pour résoudre des type de tâche pouvant se traiter par un autre type de techniques sémantiques relatives au registre graphique et / ou algébrique qui s'est traduit dans le cas du calcul de distance d'un point à une droite ou dans les résolutions des équations pour déterminer les coordonnées des points de la parabole étudiée. En plus, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponibles, qui de notre point de vue correspond à la flexibilité dans l'articulation des deux points de vues sémantiques et syntaxiques dans différents registre est repéré chez un ou deux élèves.

Ceci renvoie à la question de l'effet potentiel du contrat didactique (Brousseau, 1998)

selon lequel les techniques syntaxiques devraient être préférées aux techniques sémantiques dans les résolutions de problèmes liés à la manipulation des équations, inéquations et fonctions qui est en accord avec les résultats des analyses des programmes, des manuels scolaires et du questionnaire.

En revanche, nous pensons que la situation a conduit les élèves à faire certains changements de mise en fonctionnement des connaissances et certaines adaptations pour pouvoir avancer suite à des nécessités rencontrées dans leurs milieu. Ce qui nous conduit à conclure que le processus de dévolution était localement repérable dans cette situation et par la suite, le point de vue de Robert (1998) sur la possibilité d'avancer dans une situation plus élaborée même si les connaissances sont partiellement disponibles est ainsi confirmé et par la suite nous pouvons confirmer l'hypothèse qui consiste en la possibilité d'introduire l'objet parabole par le biais d'une forme équationnelle en vue d'éviter la subordination de parabole à la fonction trinôme.

Concernant les résultats des entretiens, il apparaît que les connaissances visées par la situation et les connaissances mobilisées par les élèves ont été repérées par la plupart des enseignants, en particulier l'articulation des deux cadres algébrique et géométrique qui figure parmi les objectifs généraux de la situation, et ceci même si nous avons observé quelques confusions au niveau de la distinction entre ces deux types de connaissances. Par contre, le projet fondamental de la situation qui consiste à proposer une activité mathématique permettant de rencontrer la parabole à partir d'une définition géométrique, afin de mettre en relation la courbe obtenue, avec une fonction trinôme par le biais de son équation cartésienne, n'a pas été clairement identifié par la majorité des enseignants.

D'autre part, cinq enseignants parmi les six favorisent l'outil syntaxique de résolution au détriment de l'outil sémantique. Cependant, la mobilisation de l'outil sémantique dans les résolutions n'est pas totalement absente chez ces enseignants, puisque certains d'entre eux ont soulevé les questions d'interprétation des écritures mathématiques qui peut relever d'un ou plusieurs registres. Ceci rejoint notre hypothèse selon laquelle le seul point de vue syntaxique ne saurait suffire à traiter les problèmes mobilisant des équations, inéquations et fonctions au secondaire.

Enfin, en mettant en perspective les résultats concernant les profils des classes étudiés dans la partie A et les réponses des enseignants, nous faisons l'hypothèse que les différences observés quand à la mobilisation des techniques sémantiques et syntaxiques pourraient être, pour partie, liées aux modalités de la pratique enseignante en classe.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

La recherche que nous avons présenté dans ce mémoire se fonde sur l'hypothèse que l'analyse logique des concepts mathématiques d'équation, d'inéquation et de fonction, qui se situent dans le champ de l'algèbre élémentaire, peut enrichir de manière significative les études didactiques, nombreuses, conduites depuis un peu plus de trente ans sur l'enseignement et l'apprentissage de ces notions.

Pour mener à bien ce projet, nous avons été amené à motiver le choix d'une approche logique sous le double aspect sémantique et syntaxique de nos objets d'étude d'une part, et a nous situer par rapport à quelques travaux francophones de recherche en didactique des mathématiques choisis en raison de la résonance avec nos questionnements, d'autre part.

S'appuyant sur les travaux de Frege, Quine, Russell, Wittgenstein et Tarski, l'analyse logique a contribué à donner des définitions non ambigües des notions d'équation, inéquation et fonction. Les notions de phrase ouverte, de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément et les questions de quantification, en particulier, nous ont permis de mieux expliciter les notions d'égalité et d'inégalité et le statut des lettres qui sont au cœur de notre recherche.

Après avoir stabilisé cette approche, notre recherche s'est naturellement orientée dans un premier temps vers un travail d'analyse logique, historique et épistémologique qui a constitué un préalable à la réflexion didactique et a montré la pertinence du cadre logique comme outil d'analyse de l'émergence des objets équation, inéquation et fonction depuis l'Antiquité et jusqu'au XVIIIème siècle.

Pour l'analyse du champ réellement exploité par l'institution scolaire, nous avons conduit des analyses des programmes et des manuels scolaires actuels de l'enseignement secondaire tunisien en nous appuyant sur des grilles d'analyses croisant les catégories logiques en termes de sémantique / syntaxe avec les praxéologies mathématiques développées par Yves Chevallard et en particulier le bloc (tâche, technique) qui représente le savoir faire. D'un autre côté, nous avons conduit des investigations didactiques (sur le terrain) qui sont un complément indispensable de l'analyse institutionnelle, appuyées d'une part sur un questionnaire destiné aux élèves du secondaire et aux étudiants des classes préparatoires, et d'autre part, sur une mini ingénierie dans laquelle nous avons proposé aux élèves une activité

mathématique leur permettant de rencontrer la parabole à partir d'une définition géométrique et de mettre en relation la courbe obtenue avec une fonction trinôme par le biais des équations.

Nous rendons compte à présent des résultats auxquels nous sommes parvenu à l'issue des différentes phases de notre recherche et nous terminerons par des ouvertures et des perspectives de prolongement de cette recherche.

L'analyse logique

La fonction de l'analyse logique a été de mettre en rapport les relations logiques entre équation et fonction en référence à l'aspect sémantique de la vérité introduite par Tarski.

Nous avons distingué deux points de vue au cœur du raisonnement logique, le point de vue *sémantique* et le point de vue *syntaxique*. Le premier est développé dans la théorie sémantique de la vérité due à Tarski et permet d'associer une valeur de vérité à une formule donnée dans une interprétation donnée, ce qui nécessite une structure interprétative : un univers du discours, des interprétations pour les lettres de prédicats, et éventuellement de constantes et de fonctions. Le second est associé aux règles de combinaisons au sein d'un système formel indépendamment de la question du sens, et, dans un sens plus large, englobe ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel du terme, en opposition avec le point de vue sémantique, qui prend en compte les interprétations. Nous avons cherché à préciser les différentes formes sous lesquelles ces deux points de vue peuvent subsister au niveau des objets équation, inéquation et fonction ainsi que la façon dont ils sont susceptibles de s'articuler et ce, en s'appuyant sur des éléments de la théorie de la quantification.

Cette analyse nous a permis de montrer que le point de vue logique offre un cadre unificateur pour aborder et clarifier nos objets d'étude sous le double aspect syntaxique et sémantique constitutif de ces notions et permet de les relier entre elles. Toutefois, si le point de vue logique est essentiel pour les clarifications qu'il apporte, il n'en constitue pas moins une relecture *a posteriori* de ces objets, qui ne correspond pas ni à leur développement historique, ni à ce qui est enseigné aujourd'hui dans l'enseignement secondaire tunisien.

Avant d'aborder l'analyse proprement didactique, nous avons choisi de conduire une étude historique et épistémologique, sur l'apparition et la formation de nos objets d'étude.

L'analyse historique et épistémologique

L'analyse épistémologique que nous avons conduite avait pour objectif de recueillir des indicateurs pertinents pour notre cadre d'analyse, à savoir ceux qui nous permettent de repérer la dialectique syntaxe / sémantique, d'un point de vue logique, au moment de la formation des notions équation, inéquation et fonction.

Nos objets d'étude se situent au cœur de l'algèbre et entretiennent des liens avec l'arithmétique et la géométrie. Nous avons adopté le point de vue de Rashed (1984) qui pense qu'il est intéressant de savoir se situer entre algèbre et arithmétique d'une part, et algèbre et géométrie d'autre part. Ce qui nous a conduit à étudier, de l'Antiquité jusqu'au XVIIIème siècle, différentes méthodes de résolution des problèmes dans différentes civilisations (Grecque, Arabe,) ce qui nous a permis de repérer que la dialectique sémantique / syntaxe était présente lors de l'émergence des concepts étudiés.

En outre, nous avons montré que la mise en relation des concepts d'équation et de fonction par le biais des relations fonctionnelles et par l'intermédiaire des courbes est en accord avec l'émergence dans l'histoire du concept de fonction, sous le point de vue algébrique qui est le nôtre. Celle-ci se traduit à travers la dualité entre l'équation de Descartes exprimée en $aeq(x, y) = 0$ et celle de la notion de fonction introduite par Leibniz et Euler qui est symbolisée par $y = f(x)$.

L'analyse didactique : Etude des programmes et des manuels

L'analyse des programmes et des manuels scolaires actuels nous a permis de voir réellement l'articulation de ces objets mathématiques dans l'enseignement tunisien et de les confronter avec les analyses logique et épistémologique. Dans cette perspective, nous nous sommes appuyés sur une grille d'analyse dans laquelle nous avons croisé les praxéologies mathématiques et plus particulièrement le bloc (tâche, technique) avec les catégorisations logiques en termes de sémantique et syntaxe. Ce croisement nous a permis de montrer la pertinence de notre catégorisation en termes de sémantique / syntaxe des types de techniques institutionnalisées et mobilisables, laquelle a contribué à mettre en évidence la prédominance des techniques syntaxiques dans le traitement de ces objets mathématiques dans les différents chapitres des manuels analysés. D'un autre côté, l'organisation des chapitres et l'étude des différents types de tâches recommandées dans le manuel scolaire de la deuxième année

secondaires section sciences et technologie de l'informatique, ont montré que l'articulation entre les équations de courbes, leurs représentations graphiques et leurs rapports avec le concept de fonction, n'est pas clairement explicitée, dans la mesure où les courbes interviennent essentiellement comme représentations graphiques des fonctions au programme.

Investigation didactique (1) : Le questionnaire

Dans la seconde partie de notre travail de recherche, nous avons construit notre investigation didactique en nous appuyant sur les potentialités des analyses logiques en termes de sémantique et syntaxe dans le raisonnement mathématique d'une part et les analyses historiques et institutionnelles d'autre part.

Dans cette perspective nous avons dégagé des idées qui nous ont permis de construire un questionnaire en introduisant des objets mathématiques, croisant des écritures fonctionnelles et équationnelles et des résolutions graphiques, favorisant le recours à des aspects sémantiques de résolution pour mieux cerner le rapport implicite des élèves à l'articulation sémantique / syntaxe dans les raisonnements mathématiques.

À travers l'analyse des productions finies des élèves et des étudiants nous avons conclu que les élèves mobilisent des techniques sémantiques, lorsqu'elles sont recommandées explicitement par des types de tâches. En revanche, les techniques syntaxiques de résolution sont mobilisées dès qu'elles sont disponibles.

Le résultat qui nous semble peut-être le plus intéressant provient des analyses des réponses aux types de tâches pour lesquelles les techniques syntaxiques ne sont disponibles qu'à un niveau mathématique très élevé. Pour réussir à résoudre la tâche, aux niveaux que nous avons étudiés, il faut donc nécessairement faire appel à un point de vue sémantique et, éventuellement, quitter le registre algébrique. Dans ce cas, la plupart des élèves n'accèdent pas à la solution. Ce résultat est remarquablement présent dans le cas des deux problèmes d'optimisation proposés (exercices n°2 et n°4 du questionnaire), dont la résolution purement algébrique exige des théories assez complexes et un niveau mathématique très pointu, inaccessibles aux élèves et étudiants de notre population.

Investigation didactique (2) : une « mini-ingénierie »

Comme on l'a vu précédemment tant dans les programmes que dans les manuels scolaires tunisiens, les courbes interviennent essentiellement comme représentations graphiques des fonctions au programme, ce qui limite la possibilité d'un travail sémantique sur les courbes. Nous avons choisi, pour notre situation d'enseignement, d'inverser cette relation, en proposant aux élèves une activité mathématique leur permettant de rencontrer la parabole à partir d'une définition géométrique et de mettre en relation la courbe obtenue avec une fonction trinôme. Les analyses de cette situation expérimentale montrent clairement que la plupart des élèves ont un niveau technique, au sens de Robert (1998), leur permettant de mobiliser des formules et des transformations purement algébriques pour résoudre certains types de tâches pouvant se traiter par un autre type de techniques sémantiques relatives au registre graphique et / ou algébrique. D'un autre côté, le niveau de mise en fonctionnement des connaissances disponibles, qui de notre point de vue correspond à la flexibilité dans l'articulation des deux points de vues sémantique et syntaxique dans différents registres est repéré chez un nombre assez réduit d'élèves. On peut bien sûr se demander si l'on n'observe pas là un effet du contrat didactique selon lequel la mobilisation des techniques syntaxiques devraient être préférées aux techniques sémantiques dans les résolutions de problèmes liés à la manipulation des équations, inéquations et fonctions, ceci étant en accord avec ce que montre l'analyse des manuels.

Les analyses des questionnaires et des entretiens que nous avons réalisé avec les enseignants montrent que les enseignants interrogés envisagent la possibilité d'introduire une telle situation dans les classes de deuxième année secondaire, en particulier parce qu'elle contribue à introduire l'objet parabole par le biais d'une forme équationnelle. Cependant, les enjeux en termes d'articulation entre syntaxe et sémantique sont peu repérés, et les réponses des enseignants interviewés montrent que la dimension sémantique est plutôt associée aux problèmes extra mathématiques.

Perspectives de recherche

Notre analyse logique clairement appuyée par les points de vue de Frege, Quine, Russell, Wittgenstein et Tarski a mis en évidence la potentialité de la dualité sémantique / syntaxe pour mener des recherches didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage des

objets de l'algèbre élémentaire. Les analyses didactiques ont montré, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre sémantique et syntaxe, qui relève d'un niveau logico-mathématique, pour enrichir les catégorisations d'analyse proposées par Chevallard. D'un autre côté, nos investigations didactiques ont permis de mettre en évidence la pertinence du croisement de la catégorisation sémantique / syntaxe pour enrichir les analyses en termes de fonctionnement cognitif de la pensée qui font appel aux différents registre de représentation sémiotiques introduites par Duval.

Au-delà de ces résultats, l'exploitation de l'outil d'analyse, que nous avons croisé avec les praxéologies mathématiques d'une part et les registres de représentation sémiotiques d'autre part, a montré sa pertinence pour les analyses didactiques tant au niveau du savoir à enseigner qu'au niveau du savoir enseigné. Plusieurs perspectives nous semblent ouvertes suite à ce travail de recherche.

La première concerne l'investigation des mêmes notions d'équation, inéquation et fonctions dans des domaines autres que le domaine numérique, qui apparaissent dans l'avancée du cursus. On peut en effet faire l'hypothèse que les difficultés s'amplifient au niveau de l'université où les notions se complexifient, que l'on pense à l'algèbre des matrices, au travail algébrique sur les fonctions, aux développements limités, aux fonctions à plusieurs variables, aux équations différentielles, ou aux équations aux dérivées partielles. A ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques[120].

La seconde concerne la situation d'apprentissage de l'objet parabole que nous avons conduit, en nous appuyant sur des analyses logiques, épistémologiques et didactiques. Celle-ci nous a permis d'illustrer la possibilité de travailler sur les coniques, actuellement présentes dans les programmes et les manuels des classes de terminales en Tunisie, dès la deuxième année section sciences et technologies de l'informatique du secondaire tunisien. Ceci offre en effet *a priori* un milieu d'exploration approprié pour travailler explicitement avec les élèves l'articulation syntaxe / sémantique, en rendant visible la richesse potentielle de certaines procédures sémantiques selon les situations considérées.

La troisième s'appuie sur la mise en perspective entre l'un des résultats du questionnaire, qui montre une différence significative entre les classes pour ce qui est de la mobilisation des techniques sémantiques et des entretiens avec les enseignants, qui montrent que, si la plupart d'entre eux privilégient dans leur enseignement les aspects syntaxiques, un

[120] Les travaux d'Artigue sur les équations différentielles (Artigue, 1989) montrent selon nous qu'une perspective sémantique permettrait d'éclairer certaines difficultés.

enseignant au moins déclare clairement privilégier les aspects sémantiques. Ceci montre qu'il serait pertinent d'étudier dans quelle mesure les pratiques des enseignants[121] concernant l'articulation sémantique / syntaxe dans leur enseignement peut ou non avoir un effet sur ce que les élèves et les étudiants mobilisent et ce, au-delà du seul niveau d'enseignement.

Enfin, le cadre logique que nous avons adopté le long de notre travail de recherche nous semble également offrir des pistes pour mener des travaux de recherche s'appuyant sur les analyses en termes de fonctionnement cognitif introduites par Duval. En effet, la dialectique sémantique / syntaxe est inter-registres mais aussi intra-registres. Ce point de vue rejoint celui de Durand-Guerrier qui soutient la thèse de la pertinence de la prise en compte de la dimension sémantique pour faire émerger des interprétations sous l'angle *pragmatique* en se référent au contexte, à la situation et aux connaissances du sujet[122].

[121] S'appuyant sur le point de vue de Robert (2001), Rogalski (2003), Roditi (2005)
[122] Au sens de Gardies (1994).

BIBLIOGRAPHIE

ABDELJAOUAD Mahdi. *Sharh al-Urjuza al-Yasminiya*. Tunis: Publications de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques, 2003 a. 123 p (partie française) et 304 p (partie arabe).

ABDELJAOUAD Mahdi. *Les équations canoniques dans Sharh al-Urjuza al-Yasminiya d'Ibn al-Haîm* [En ligne].
Disponible sur : <http://membres.lycos.fr/mahdiabdeljaouad/Abdeljaouad.pdf> (le 16 juillet 2006).

ABDELJAOUAD Mahdi. *Le manuscrit de Jerba, une pratique des symboles algébriques maghrébins en pleine maturité*. In : Colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes. (Marrakech, 30-31 Mai et 1er Juin 2002). Actes du septième colloque maghrébin sur l'histoire des mathématiques arabes. vol. 2. Marrakech : Ecole normale supérieure, 2005. p. 9-98.

ARSAC Gilbert, L'évolution d'une théorie en didactique : L'exemple de la transposition didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1992, vol. 12, n° 1, p. 7-32.

ARSAC Gilbert, et al. *La transposition didactique à l'épreuve*. Grenoble : La pensée sauvage, 1994, 180 p. (Recherches en didactique des mathématiques)

ARTIGUE Michèle, Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1988, vol. 9, n° 3, p. 281-308.

ARTIGUE Michèle, Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1989, vol. 2, p. 173-190.

ARTIGUE Michèle, Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1990, vol. 10, n° 2.3, p. 241-285.

BARALLOBRES Gustavo, Introduction à l'algèbre par la généralisation : problèmes didactiques soulevés. *For the Learning of Mathmatics*, 2007, vol. 27, n° 1, p. 39-44.

BARBIN Evelyne, CAVEING Maurice. *Les philosophes et les mathématiques*. Paris : Ellipses, 1996, 320 p. (IREM)

BARDINI Caroline. *Le rapport au symbolisme algébrique : Une approche didactique et épistémologique*, 297 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Paris 7, Université Denis Diderot : 2003.

BATTIE Véronique. *Spécificités et potentialités de l'Arithmétique élémentaire pour l'apprentissage du raisonnement mathématique*, 493 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Paris 7, Université Denis Diderot : 2003.

BELAVAL Yvon. *Leibniz, critique de Descartes*. Paris : Gallimard, 1960, 560 p. (Bibliothèque des idées)

BEN KILANI Imed Eddine. *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*, 453 p +157 p annexes. Thèse : Didactique des mathématiques : Lyon 1 : 2005.

BLOCH Isabelle. *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée / université Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation* [En ligne]. 390 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Bordeaux : 2000.
Disponible sur :<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/06/60/35/PDF/Bloch_these_total.pdf> (le 18 juin 2007).

BROUSSEAU Guy. *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-1990)*. Grenoble : La pensée sauvage, 1998, 332 p. (Recherches en didactique des mathématiques)

CASTELA Corine, Travailler avec, Travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique Des mathématiques*, 2008, vol. 28, n° 2, p. 135-182.

CAVAILLES Jean. Postface. Dans : Jan Sebestic. *Sur la logique et la théorie de la science*. [En ligne], 1997, p. 91-142.
Disponible sur :
<http://books.google.fr/books?id=Nu9SeY6Ksh0C&printsec=frontcover#PPP1,M1> (le 18 août 2008).

CHALANCON Franck et al. Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, 2002, n° 58, p. 23-41.

CHAUVAT Gérard, Courbes et fonctions au collège. Petit x, 1999, n°51, p. 23-44.

CHELLOUGUI Faiza. *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*, 323 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Lyon 1 : 2004.

CHEVALLARD Yves, Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - première partie : l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 1984, n° 5, p. 51-94.

CHEVALLARD Yves, Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x*, 1989, n° 19, p. 43-72.

CHEVALLARD Yves, JOSHUA Marie-Alberte. *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné suivi d'un exemple de la transposition didactique*. Grenoble : La pensée sauvage, 1991, 240 p.

CHEVALLARD Yves, Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1992, vol. 12, n°1, p. 73-112.

CHEVALLARD Yves. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*. In : Noirfalise R. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques, juillet 1998, actes de l'Université d'été de la Rochelle. Ed IREM de Clermont-Ferrand, 1998 a, p. 91-120.

CHEVALLARD Yves. Organisations Didactiques : Les cadres généraux. *Notice du « Dictionnaire de didactique des mathématiques 1997-1998 » pour la formation des élèves professeurs de mathématiques* [En ligne], 1998 b, p. 1-33.
Disponible sur : <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=38> (le 28 avril 2008).

COLETTE Jean-Paul. *Histoire des mathématiques*. vol.1. Canada : Vuibert / Renouveau Pédagogique, 1973. 228 p.

COLETTE Jean-Paul. *Histoire des mathématiques* .vol.2. Canada : Renouveau Pédagogique, 1979. 359 p.

COPPE Sylvie et al. Les vérifications dans les équations, les inéquations et en calcul littéral. *Petit x*, 2002, n° 58, p. 23-41.

COPPE Sylvie et al. Eléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x*, 2006, n°71, p. 29-60.

CORI René, LASCAR Daniel. *Logique mathématique*. Paris : Masson, vol. 1, 1994, 385 p. (Axiomes)

CORI René, LASCAR Daniel. *Logique mathématique*. Paris : Masson, vol. 2, 1994, 347 p. (Axiomes)

CORTES Anibal, KAVAFIAN Nelly, Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x*, 1999, n° 51, p.47-73.

COULANGE Lalina, Les problèmes concrets à mettre en équation dans l'enseignement. *Petit x*, 1998, n° 47, p. 33-58.

COULANGE Lalina. *Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équation en classe de troisième*, 381 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Grenoble 1 : 2000.

COULANGE Lalina, Enseigner les systèmes d'équations en troisième une étude économique et écologique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2001, vol. 21, n°3, p. 305-354.

DJEBBAR Ahmed. *L'algèbre arabe* : Genèse d'un art. Paris: Vuibert, 206 p.

DORIER Jean-Luc, Premières approches pour l'étude de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 1993, vol. 5, n° 5, p. 95-123.

DORIER Jean-Luc. (1997), *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire - Perspective théorique sur leurs interactions*. Habilitation à diriger des recherches en didactique des mathématiques. Université Joseph Fourier Grenoble 1.
Disponible sur :
<http://wwwleibniz.imag.fr/LesCahiers/2OOO/Cahier12/ResumCahier12.html> (le 11 juillet 2005).

DOUADY Régine, Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1986, vol. 7, n° 2, p. 5-31.

DURAND-GUERRIER Viviane. *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*, 291 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Lyon1 : 1996.

DURAND-GUERRIER Viviane, L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x*, 1999, n° 50, p. 57-79.

DURAND-GUERRIER Viviane, et al. *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. Lyon : IREM, 2000, 117 p.

DURAND-GUERRIER Viviane, ARSAC Gilbert, Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ?. *Recherche en didactique des mathématiques*, 2003, vol 23, n° 3, p. 295-342.

DURAND-GUERRIER Viviane. *Apport de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement*, 159 p. Habilitation à diriger des recherches : Didactique des mathématiques : Lyon1 : 2005.

DUVAL Raymond, Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988, vol. 1, p. 7-25.

DUVAL Raymond, Graphiques et Équations : l'articulation des deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1988, vol. 1, p. 235-279.

DUVAL Raymond, Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1993, vol. 5, p. 37-65.

DUVAL Raymond, Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1996, vol. 16, n° 3, p. 349-382.

DUVAL Raymond, Signes et objets : questions relatives à l'analyse de la connaissance. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1998, vol. 6, p. 139-163.

FREGE Gottlob. *Ecrits de logique et philosophiques*. Paris : Seuil, 1971, 256 p. (Points Essais)

GARDIES Jean-Louis. *Les fondements sémantiques du discours naturel*. Paris : VRIN, 1944, 248 p. (Problèmes & Controverses)

GRUGEON Brigitte, Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1997, vol. 17, n° 2, p. 167-210.

HITT-ESPINOSA Fernando, Système sémiotiques de représentation lié au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1998, vol. 6, p. 7-26.

HOEFER F. *Histoire des mathématiques depuis leurs origines et jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle* [En ligne]. Paris : Hachette, 1874, 602 p. Format PDF.
Disponible sur : <http://gallica.bnf.fr/document?O=N024629> (le 13 novembre 2006)

HOUZEL Christian, et al. *Philosophie et calcul de l'infini*. Paris : François Maspero, 1976, p. 123-156. (Algorithme)

HOUZEL Christian, Sharaf al-Din al-Tusi et le polygone de Newton. *Arabic sciences and philosophy*, 1995, Vol. 5, n° 2, p. 239-262.

KIERAN Carolyn. The Early learning of Algebra : A structural Perspective . In: WAGNER Sigrid & KIERAN Carolyn. *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston, VA : National Council of Teachers of Mathematics, 1989, p. 33-56.

KIERAN Carolyn, The Learning and Teaching of School Algebra. *Handbook of research on mathematics teaching and learning* ed. Grouws. New York: MacMillan Publishing Company, 1992, p. 390-419.

KOUKI Rahim. *La logique des prédicats comme cadre d'analyses didactiques : Le cas des équations et inéquations du premier degré à une inconnue réelle au début du secondaire*, 134 p. Mémoire de DEA : Didactique des mathématiques : Université de Tunis : 2004.

KOUKI Rahim, Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x*, 2006, n° 71, p. 7-28.

LACASTA ZABALZA Eduardo. *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques : illusions et contrôles*, 277 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Bordeaux 1 : 1995.

NADEAU Robert. *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie*. Paris : P.U.F, 1999, 904 p. (Premier cycle)

OUELBANI Melika. *Le projet constructionniste de Carnap*. Tunis : Faculté des Sciences Humaines et Sociales de Tunis, 1992, 230 p.

OUELBANI Melika (dir). Carnap, un philosophe analytique entre l'empirisme et le logicisme. Dans : *Empirisme et philosophie analytique*. Tunis : Faculté des Sciences Humaines et Sociales de Tunis, 1998, p. 81-95.

OUELBANI Melika. *Introduction à la logique*. Tunis : Centre de Publication Universitaire, 2000, 138 p.

PIAGET Jean. *Epistémologie de psychologie de la fonction*. Paris : P.U.F, 1968, 239 p. (Etude d'épistémologie génétique)

QUINE Willard Van Orman. *Methods of logic*. New York : Harvard University Press; Traduction française Paris : Armand Colin, 1972, 295 p.

RACHED Roshdi. *Entre arithmétique et algèbre. Recherche sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : Les belles lettres, 1984, 320 p. (Sciences et philosophie arabes - Etudes et reprises)

RASHED Roshdi (dir). *Histoire des sciences arabes*. Paris : Seuil, 2003, 336 p.

ROBERT Aline, Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 1998, vol. 18, n° 2, p. 139-190.

ROBERT Aline, Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2001, vol. 21, n° 1. 2, p. 57-80.

ROGALSKI Janine, Y a-t-il un pilote dans la classe ? Une analyse de l'activité de l'enseignant comme gestion d'un environnement dynamique ouvert. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2003, vol. 23, n° 3, p. 343-348.

RIVENC François. *Introduction à la logique*. Paris : Payot, 1989, 271 p. (Petite bibliothèque Payot)

RIVENC François; ROUILHAN Philipe de. *Logique et fondements des mathématiques : Anthologie* (1850-1914). Paris : Payot, 1992, 447 p. (Bibliothèque scientifique Payot)

RODITI Eric. *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan, 2005, 196 p.

RUSSELL Bertrand. *Histoire de mes idées philosophiques*. Paris : Gallimard, 1961, 352 p. (Les Essais, n° 100)

RUSSELL Bertrand. *Ecrits de logique philosophique*. Paris: P.U.F, 1989, 520 p. (Epimethée)

SACKUR Catherine, Les inéquations en classe de seconde : une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*, 2000, n° 53, p.5-26.

SACKUR C, et al. L'expérience de la nécessité épistémique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 2005, vol. 25, n° 1, p. 57-90.

SELDEN John, SELDEN Annie, Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 1995, vol. 29, p. 123-151.

SERFATI Michel. *La recherche de la vérité*. Argentan : Les éditions du kangourou, 1999, p. 145-174. (L'écriture des mathématiques)

SMITH Eugene David, LATHAM Marcia.L. *The geometry of Rene Descartes*. New York : Dover Publication, 1954, 264 p.

TARSKI Alfred. *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars, 1960, 224 p. (Collection de logique mathématique)

TARSKI Alfred. *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944*. Armand Colin, vol. 1, 1972, 276 p. (Philosophies pour l'âge de la science)

TARSKI Alfred. *Logique, sémantique, mathématique : 1923-1944*. Armand Colin, vol. 2, 1974, 314 p. (Philosophies pour l'âge de la science)

TRGALOVÀ Jana. *Etude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-géomètre*, 293 p. Thèse : Didactique des mathématiques : Grenoble 1 : 1995.

VER EECKE Paul. *Diophante d'Alexandrie. Les Six Livres Arithmétiques et le Livre des Nombres Polygones*. Paris : Albert Blanchard, 1959, 302 p.

VERGNAUD Gérard, et al. Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles problèmes épistémologiques et didactiques. In : *Actes du colloque de didactique et acquisition des connaissances* (Sèvres, 25, 26 et 27 Mai 1987). France : CIEP, 1987, p. 259-279.

VERGNAUD Gérard. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In Nadine. Bednarz et C Garnier (1989). Construction des savoirs Obstacles et conflits. CIRADE.

VERGNAUD Gérard, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1990, vol. 10, n° 2.3, p. 133-170.

WITTGENSTEIN Ludwing. *Tractatus logico-philosophicus*. Paris : Gallimard, 1993, 132 p. (Bibliothèque de Philosophie)

ZEUTHEN Hieronymus Georg. *Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge* (Traduit par Jean MASCART) [En ligne]. Paris : Gautier-Villars, 1902, 296 p. Format PDF. Disponible sur : <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k994301> (le 21 juin 2007).

Programmes officiels et Manuels scolaires Tunisiens

Ministère de l'éducation, Direction des programmes, Programmes officiels de l'enseignement secondaire, Annexes XI, Mathématiques, Tunis : Centre National Pédagogique, 1998.

Ministère de l'éducation et de la formation, Direction générale des programmes et de la formation continue, Programmes de mathématiques 1ère & 2ème année secondaire.
Disponible sur
<http://www.edunet.tn/ressources/reforme/nouv_prog/programmes/sciences/mathematique/math_1_2anne.pdf > (le 25 juillet 2006)

MCHAREK Rachid, et al. *Mathématiques pour la première année de l'enseignement secondaire*. Tunis : Centre. National. Pédagogique, 1999, 272 p.

RAHMOUNI Ali, et al. *Mathématiques pour la deuxième année de l'enseignement secondaire : Section sciences et technologie de l'informatique*. Tunis : Centre. National. Pédagogique, vol. 1, 2005, 164 p.

RAHMOUNI Ali, et al. *Mathématiques pour la deuxième année de l'enseignement secondaire : Section sciences et technologie de l'informatique*. Tunis : Centre. National. Pédagogique, vol. 2, 2005, 199 p.