

DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE, VALIDATION, ET OSTENSIFS INFORMATISÉS. IMPLICATIONS DANS LA FORMATION D'ENSEIGNANTS À L'UTILISATION DE CABRI EN CLASSE DE GÉOMÉTRIE.

Martin Acosta

▶ **To cite this version:**

Martin Acosta. DÉMARCHE EXPÉRIMENTALE, VALIDATION, ET OSTENSIFS INFORMATISÉS. IMPLICATIONS DANS LA FORMATION D'ENSEIGNANTS À L'UTILISATION DE CABRI EN CLASSE DE GÉOMÉTRIE.. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00278682

HAL Id: tel-00278682

https://theses.hal.science/tel-00278682

Submitted on 13 May 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE GRENOBLE 1 – JOSEPH FOURIER
ECOLE DOCTORALE MATHEMATIQUES, SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION, INFORMATIQUE
Doctorat
Mathématiques, Informatique

UNIVERSITE DE GENEVE
ECOLE DOCTORALE SCIENCES DE L'EDUCATION
Doctorat
Sciences de l'Education

Presentée par
Martin Acosta

Démarche expérimentale, validation, et ostensifs informatisés. Implications dans la formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri en classe de géométrie. Volume I

Thèse dirigée par : ***Colette Laborde, Professeur Université Joseph Fourier***
Mireille Betrancourt, Professeur Université de Genève

Soutenue le 9 mai 2008

Jury :
Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Professeur Université d'Artois (rapporteur)
Alain Kuzniak, Professeur IUFM Centre Val de Loire (rapporteur)
Jean-Luc Dorier, Professeur Université de Genève
Daniel Peraya, Professeur Université de Genève

Un grand merci
à ma femme, qui m’a soutenu
pendant toutes les difficultés
et dont la présence à mes côtés
m’a soulagé lors des crises.

Résumé

Nous étudions les raisons pour lesquels les enseignants ont des difficultés pour intégrer Cabri dans leur pratique, comme l'ont révélé divers études, afin d'améliorer les cours de formation. Nous utilisons un cadre théorique triple, avec la Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard, l'approche Instrumentale de Rabardel, et la Théorie des Situations de Brousseau. Nous avons mis en oeuvre une ingénierie de formation d'une année, qui comprenait un cours intensif de résolution de problèmes de géométrie avec Cabri, une période de pratique accompagnée, un cours intensif d'utilisation de Cabri pour l'enseignement et un période de pratique accompagné. Nous avons montré que les nouveaux objets ostensifs de Cabri requièrent une reconstruction praxéologique qui prenne en compte le dynamisme et la complexité des relations entre objets, et que malgré une bonne assimilation d'une praxéologie mathématique avec Cabri, les enseignants ont des difficultés à assimiler une praxéologie didactique centré sur la validation.

Mots clés :

1 CABRI
2 GEOMETRIE DYNAMIQUE
3 FORMATION D'ENSEIGNANTS
4 PRAXEOLOGIE MATHEMATIQUE
5 PRAXEOLOGIE DIDACTIQUE
6 GENESE INSTRUMENTALE
7 OBJETS OSTENSIFS
8 VALIDATION

TITLE

Experimental approach, validation and computerized ostensive objects. Implications for teacher's training to use Cabri in school geometry.

Summary
We study the difficulties that teachers experience in learning to use Cabri in their teaching, as several studies have revealed, in order to improve teacher's training. We use a triple theoretical frame, with the Anthropological Theory of Didactics (Chevallard), the Instrumental Approach (Rabardel) and the Theory of Situations (Brousseau). We have implemented a long ingeniery, with an intensive course about geometric problem solving with Cabri, a period of coached practice, an intensive cours about teaching with Cabri, and a period of coached practice. We show that cabri's new ostensive objects require a praxeological reconstruction to assimilate the dynamics and the complexity and richness of relations among objects, and that despite a good assimilation of a mathematical praxeology, teachers experience difficulties in practising a didactic praxeology based on validation.

Key words
1 CABRI
2 DYNAMIC GEOMETRY
3 TEACHERS TRAINING
4 MATHEMATIC PRAXEOLOGY
5 DIDACTIC PRAXEOLOGY
6 INSTRUMENTAL GENESIS
7 OSTENSIVE OBJECTS
8 VALIDATION

TECFA, Faculté de Psychologie et Sciences de l'Education
Université de Genève
54 route des Acacias
CH-1227 Carouge
Suisse

DIAM-LIG
Université Joseph Fourier
46 av Félix Viallet
38000 GRENOBLE
France

CONTENU

CONTENU 1
1 Introduction 4
2 Cadre théorique et problématique 6
2.1 Théorie Anthropologique du Didactique 6
2.1.1 Les mathématiques comme praxéologie : tâches, techniques, technologies, théories 7
2.1.2 Les objets mathématiques : ostensifs/non ostensifs et « l'instrumentation mathématique » 7
2.1.3 Discussion de la problématique avec la TAD 8
2.2 La théorie de l'instrumentation 9
2.2.1 Le problème de l'activité instrumentée 9
2.2.2 De l'artefact à l'instrument 10
2.2.3 La double genèse : instrumentation et instrumentalisation 10
2.2.4 Instruments et apprentissage 11
2.2.5 Discussion de la problématique en utilisant l'instrumentation 11
2.3 Validation et théorie des situations 11
2.3.1 Discussion de la problématique du point de vue de la validation 12
2.4 Les Technologies de l'Information et de la Communication et l'apprentissage 12
2.4.1 Les micro-mondes 13
2.4.2 Cabri comme micro-monde 14
2.4.3 Cabri et validation 17
2.4.4 Invalidation par déplacement des constructions 'papier-crayon' 20
2.4.5 Démarche expérimentale 23
Questions de recherche 23
Questions de recherche 24
3 Description de l'ingénierie de formation d'enseignants 25
3.1 Choix issus d'hypothèses de travail 25
3.2 Choix mathématiques 26
3.2.1 Choix du type de problèmes 26
3.2.2 Choix des techniques 27
3.3 Choix didactiques: 30
3.3.1 Praxéologie didactique pour enseigner la géométrie en secondaire inférieur à l'aide de Cabri 30

3.4 Méthodologie générale 31
3.5 Population 32
3.6 Dispositifs didactiques de la partie mathématique de la formation 33
3.6.1 Démarche expérimentale 33
3.6.2 Démarche empiriste 34
3.6.3 Problématisation 34
3.6.4 Validation, invalidation, déplacement 34
3.6.5 Validation théorique 34
3.6.6 Choix de la séquence de problèmes 34
3.6.7 Organisation du travail 35
3.6.8 Données recueillies 35
3.7 Dispositifs didactiques de la partie didactique de la formation 35
3.7.1 Explicitation de la praxéologie didactique 36
3.7.2 Travail autour des phénomènes dynamiques 36
3.7.3 Instrumentation et instrumentalisation 36
3.7.4 Séquence proposée 37
3.7.5 Analyse didactique 37
3.7.6 Séquence travaillée pendant le cours présentiel 37
3.7.7 Données recueillies 38
3.8 Hypothèses de recherche 38
4 Analyse de la partie mathématique 39
4.1 Méthode et grille d'analyse 39
4.2 Cours présentiel 39
4.2.1 Premier problème : 39
4.2.2 Problème 3: 47
4.2.3 Problème 7 54
4.2.4 Problème 8 59
4.2.5 Problème 10 68
4.3 Période de pratique avec suivi à distance 72
4.3.1 Problèmes proposés : 72
4.3.2 Indices de développement d'une démarche expérimentale avec Cabri. 74
4.3.3 Le contrôle théorique des constructions, le problème de la discussion 85
4.3.4 Problème d'instrumentation des nombres dans Cabri 88
4.4 Synthèse des résultats de la partie mathématique 90
5 Analyse de la partie didactique 92

5.1 Méthode et grille d'analyse 92
5.2 Période de pratique 92
5.2.1 Assimilation de la séquence proposée pendant le cours présentiel 92
5.2.2 Traces d'éléments techniques et technologiques de la praxéologie didactique : 94
5.2.3 Analyse didactique déficiente: 98
5.3 Observation finale 99
5.3.1 Utilisation du 'jeu de construction' avec la validation par déplacement 99
5.3.2 Existence d'un canevas pour l'intervention 104
5.3.3 Utilisation du logiciel pour invalider des interprétations mathématiques fausses 107
5.3.4 Les élèves sont accaparés par certains phénomènes visuels, et ne voient pas les autres 111
5.3.5 Effets didactiques 113
5.4 Synthèse des résultats de la partie didactique 115
6 Conclusions, perspectives 116
6.1 Réponses aux questions de recherche 116
6.2 Apports et limites de la formation 120
6.3 Portée et imites de la recherche 122
6.4 Nouvelles questions et perspectives de recherche 122
6.5 Complexité de l'intégration des TICs dans l'enseignement des mathématiques ... 123
7 Bibliographie 125

1 Introduction

L'intégration des nouvelles technologies dans l'enseignement scolaire à tout niveau est devenu un objectif de politique éducative dans le monde entier. Les recherches sur l'utilisation des technologies par les enseignants montrent que cette intégration est très problématique. La grande majorité des enseignants qui utilisent les technologies dans leur exercice professionnel le font en dehors de la classe (préparation de cours et des évaluations), et ceux qui les utilisent en classe ont tendance à restreindre fortement leur utilisation par les élèves (Betrancourt, 2007). Le cas de l'enseignement des mathématiques n'est pas une exception dans ce panorama.

Dans les années 1998-2000, le Ministère de l'Education de la Colombie a développé le projet « Intégration des Nouvelles Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques ». Le but de ce projet était de générer des expériences et des recherches autour de l'utilisation des technologies informatiques pour l'enseignement des mathématiques. Dans le cadre de ce projet, a été constitué un réseau d'enseignants de mathématiques d'écoles secondaires et d'universités, pour collaborer à des expériences de formation et de recherche, en utilisant des calculatrices TI-92, qui incorporent le logiciel Cabri-géomètre de géométrie dynamique[1]. Ayant participé à ce projet dès son élaboration jusqu'à son évaluation, j'ai pris conscience du rôle fondamental de la formation des enseignants dans un projet de ce genre, et de leurs difficultés d'assimilation des nouvelles pratiques mathématiques adaptées aux nouveaux outils disponibles. En effet, on a pu constater que malgré les cours de formation intensifs à l'utilisation de la calculatrice, et la proposition d'un projet didactique autour de la résolution de problèmes, les enseignants faisaient une utilisation ostensive[2] de la technologie, avec des activités très dirigées (Acosta et al, 2004). Ruthven (2004) montre aussi que lorsqu'il y a un effort d'utilisation des logiciels de géométrie dynamique en classe, dans une grande majorité des cas, les enseignants adoptent une stratégie ostensive. Or, les recherches en didactique des mathématiques signalent cette stratégie ostensive comme source de difficultés pour l'apprentissage, étant donné que la construction du sens du savoir mathématique se produit dans l'interaction avec des problèmes auxquels ce savoir donne solution (Vergnaud 1991). C'est seulement dans le long terme qu'une évolution des pratiques commence à se développer, liée à une double expertise de la part des enseignants : expertise dans l'usage de la technologie, mais aussi dans la « lecture mathématique » qu'ils peuvent faire des actions des élèves avec la technologie (Lagrange, 2002). Dans le but d'améliorer les connaissances sur ces phénomènes, j'ai entrepris une première étude dans mon mémoire de DEA « Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et Didactique » de l'Université Joseph Fourier de Grenoble.

Cette thèse est une continuation et un approfondissement de ce travail, et s'inscrit dans une double problématique didactique. D'abord, il s'agit de l'enseignement de la géométrie euclidienne au niveau du secondaire (12-17 ans), pour lequel une approche de résolution de

[1] Les logiciels de géométrie dynamique se caractérisent par l'intention de modéliser les objets de la géométrie euclidienne, en permettant la manipulation directe à l'écran. Ils permettent non seulement d'effectuer des constructions géométriques, mais aussi de déplacer les éléments de base de ces constructions, et d'observer les modifications de la figure (qui conserve les propriétés géométriques qui ont été construites de manière explicite)

[2] Le mot ostensif est utilisé en didactique pour désigner des pratiques enseignantes qui cherchent à « montrer » des faits ou des procédures aux élèves, et qui supposent que ces derniers comprendront et assimileront de manière directe ce qu'on leur a montré.

problèmes, bien que reconnue comme la plus appropriée du point de vue didactique, se révèle très difficile dans la pratique. D'autre part, l'utilisation du logiciel Cabri géomètre, spécialement conçu pour cet enseignement, n'a pas les résultats attendus. Pourtant, selon des travaux de didactique, les logiciels comme Cabri géomètre, en rendant compte des règles théoriques de la géométrie en phénomènes perceptifs à l'écran, constituent un environnement d'interaction dans lequel les problèmes de construction et de raisonnement peuvent être dévolus aux élèves, et rendent possibles des activités de résolution de problèmes autour desquels les connaissances développent leur sens (Laborde 1995, Laborde & Capponi, 1994). Mais pour tirer profit de ces logiciels, il est nécessaire de développer une forte interaction entre les aspects perceptifs et les aspects théoriques de la géométrie, interaction complètement absente de l'enseignement actuel de la géométrie, où l'on vit plutôt un changement dramatique quant à l'utilisation de la perception, et son opposition à des procédés théoriques (Berthelot et Salin, 2000 ; Arsac, 1997).

D'autre part, les programmes français actuels demandent l'utilisation de logiciels de mathématiques afin de développer une approche expérimentale des mathématiques, position tout à fait novatrice, et qui pose aux enseignants le problème de développer cette approche expérimentale alors qu'ils ont suivi une formation centrée exclusivement sur une approche déductive.

> « L'informatique devenue aujourd'hui absolument incontournable permet de rechercher et d'observer des lois expérimentales dans deux champs naturels d'application interne des Mathématiques : les nombres et les figures du plan et de l'espace. Cette possibilité d'expérimenter, classiquement plus propre aux autres disciplines, doit ouvrir largement la dialectique entre l'observation et la démonstration, et, sans doute à terme, changer profondément la nature de l'enseignement. Il est ainsi nécessaire de familiariser le plus tôt possible les élèves avec certains logiciels : en Seconde l'usage de logiciels de géométrie est indispensable » (documents d'accompagnement du programme de seconde, 2001)

La formation d'enseignants est ainsi le principal vecteur de transformation des pratiques d'enseignement, pour permettre l'utilisation adéquate des technologies dans la classe de mathématiques. Devant l'échec avéré des formations « centrées sur l'outil », de nouveaux types de formation ont été développés dans les années 1990 selon deux principes : intégration de l'outil dès les premières utilisations dans des activités pédagogiques signifiantes et utilisation de l'outil avec l'enseignant en position d'apprenant (Kuzniak, 1996, Peraya, 2002 ; Peraya, Rickenmann, & Lombard, 2002).

Dans mon mémoire de DEA (Acosta, 2003), j'ai utilisé cette dernière stratégie, appelée d'homologie (Kuzniak, 1996), en mettant des enseignants en situation de recherche pour observer l'interaction du perceptif et du théorique dans la résolution de problèmes dans l'environnement Cabri-géomètre. Les résultats de ce travail de recherche ont montré que les enseignants, contrairement à nos attentes, n'articulent pas spontanément les points de vue perceptif et théorique quand ils sont confrontés à des phénomènes perceptifs. On a observé plutôt l'alternance des stratégies théoriques et perceptives, sans tentatives de contrôle des unes par les autres.

Le présent travail tente d'approfondir l'analyse didactique déjà commencée, de formuler des hypothèses sur les conditions à mettre en place dans une formation, puis de mettre à l'épreuve ces hypothèses en développant et réalisant une ingénierie didactique pour la formation des enseignants fondée sur ces hypothèses.

2 Cadre théorique et problématique

Ce travail a été motivé au départ par une double question:

- Pourquoi les enseignants de mathématiques ont-ils des difficultés à utiliser Cabri dans l'enseignement de la géométrie ?
- Quels sont les aspects fondamentaux que doit contenir une formation à l'utilisation de Cabri pour faciliter son intégration dans l'enseignement ?

Pour apporter d'éléments de réponse à ces questions, nous avons mené une étude théorique que nous allons présenter maintenant, qui nous conduit à des questions et des hypothèses de recherche. Pour soumettre ces hypothèses à l'épreuve de l'expérience, nous avons organisé une ingénierie de formation d'enseignants que nous présenterons par la suite.

Nous utilisons trois approches théoriques différentes qui nous permettent d'étudier les différents aspects de la problématique de manière de plus en plus ciblée :

En premier lieu, la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) nous fournit un cadre épistémologique général des mathématiques (Bosch et Gascon, 2002), qui nous permet de décrire la genèse des savoirs d'un point de vue constructiviste, mettant en scène la résolution de problèmes. Elle nous permet aussi de décrire la problématique didactique, c'est-à-dire le problème de la « transmission du savoir » comme le problème de déconstruction et reconstruction de ce savoir. Cette approche théorique a été choisie, parce que, en particulier, grâce à la dialectique objets ostensifs/objets non ostensifs, elle nous permet de décrire le rôle de Cabri-géomètre comme environnement de travail mathématique.

En deuxième, la théorie de l'instrumentation, utilisée dans tous les travaux de recherche sur l'utilisation des nouvelles technologies en mathématiques, nous permet d'avoir un regard plus attentif à l'utilisation de l'outil informatique, en tenant compte à la fois de l'appropriation technique de l'outil et de son impact dans la construction de connaissances.

En troisième, la théorie des situations comme elle a été analysée et synthétisée par Margolinas, nous fournit une orientation didactique autour de la validation comme élément clé de l'apprentissage.

Finalement, nous nous appuyons sur les conceptions cognitives qui fondent les Environnements d'Apprentissage Humain, et en particulier les micro-mondes, dont Cabri fait partie.

2.1 Théorie Anthropologique du Didactique

La Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) de Chevallard s'inscrit dans une théorie de didactique des mathématiques comme « science de l'étude et de l'aide à l'étude des questions de mathématiques » (Chevallard, 1999).

La TAD est une continuation et un élargissement de la théorie de la Transposition Didactique qui se caractérise par une volonté de sortir l'analyse didactique des cadres traditionnels qui circonscrivent ce qu'est le savoir mathématique et ce que sont le lieu et les composantes d'un enseignement des mathématiques. En assumant une position d'étude anthropologique, Chevallard refuse toute forme de pre-détermination de son objet d'étude, et se propose d'en organiser un regard dépourvu de préjugés : ainsi, dans cette approche, ce que l'on peut observer ce sont des pratiques au sein d' « institutions »- ces institutions étant constituées par des individus qui s'adonnent à une activité commune. Le savoir est caractérisé comme rapport entre les individus comme sujets des institutions, et certains objets reconnus dans l'institution. Ce rapport peut être personnel ou institutionnel.

2.1.1 Les mathématiques comme praxéologie : tâches, techniques, technologies, théories

Les mathématiques ne peuvent donc se décrire et se comprendre que comme une pratique humaine, une « praxéologie ». Les composantes d'une praxéologie sont les types de tâches, les techniques, les technologies et les théories.

Dans une institution donnée, les sujets ont des tâches à accomplir, travail qu'ils effectuent avec certains procédés appelés « techniques ». L'ensemble 'type de tâches-techniques' constitue un bloc de savoir-faire. Il faut signaler que toute institution a tendance à n'utiliser qu'une certaine technique pour accomplir ses tâches, technique qui deviendra routinière et naturalisée au point de ne pas se différencier de la tâche.

Pour qu'une technique puisse s'intégrer et survivre dans une institution donnée, elle doit être expliquée et justifiée. Le discours qui accompagne la technique pour répondre à ces besoins, est appelé « technologie » de la technique.

Mais les technologies à son tour doivent être expliquées et justifiées, par le moyen des « théories », qui constituent des « technologies des technologies ».L'ensemble 'technologies-théories' constitue le bloc du savoir théorique. Même si dans les institutions éducatives on a tendance à privilégier le savoir théorique et le présenter comme origine du savoir-faire, l'approche anthropologique situe le bloc 'tâches-techniques' comme le lieu de genèse du savoir.

On peut concevoir ainsi la (re)construction du savoir comme un processus qui part de l'acceptation d'une ou de plusieurs tâches problématiques, c'est-à-dire des tâches pour lesquelles on ne dispose pas de technique appropriée. Les sujets doivent donc produire des techniques pour résoudre ces tâches, et les perfectionner. C'est le développement du savoir-faire. Mais dans la mise au point de ces techniques, les sujets développent un discours explicatif et justificatif, discours qui constitue la technologie de ces techniques. Finalement, la théorie est le résultat du travail de systématisation de différentes technologies, en les articulant et en expliquant leurs relations.

L'enseignant est conçu comme directeur de l'étude, et comme tel, il organise différents dispositifs didactiques – activités, matériaux, organisations, tâches- (Chevallard, Bosch et Gascon, 1997) afin de mettre en scène les différents moments de l'étude. Pour notre travail, nous adoptons un type d'organisation didactique constructiviste (Bosch et Gascon, 2002), qui privilégie les moments 'technologico-théorique et exploratoire'.

La TAD considère ainsi deux praxéologies différentes, mais indissociables : une praxéologie mathématique, et une praxéologie didactique qui lui est associée. La praxéologie mathématique fait référence aux tâches, techniques, technologies et théories relatives à la problématique mathématique, la praxéologie didactique fait référence aux tâches, techniques, technologies et théories relatives au travail de l'enseignant, c'est-à-dire à la mise en scène et le développement de la praxéologie mathématique qu'il veut proposer à ses élèves.

2.1.2 Les objets mathématiques : ostensifs/non ostensifs et « l'instrumentation mathématique »

Afin de caractériser l'activité au sein des institutions, il faut définir les objets mathématiques qui se trouvent au centre de cette activité. La TAD définit deux types d'objets :

Les *objets ostensifs* sont des objets qui ont une matérialité qui peut être captée par les sens – des écritures, des sons, des gestes, etc.- et qui peuvent, de ce fait, être manipulés.

Les *objets non ostensifs* n'ont pas de matérialité, mais ils se constituent comme des contrôles qui régissent la manipulation des objets ostensifs.

Ces deux types d'objets sont à la fois indépendants et solidaires. Solidaires car on ne peut accéder aux objets non ostensifs que par la manipulation des objets ostensifs, et on ne peut manipuler les objets ostensifs que par l'activation de non ostensifs. Indépendants, puis qu'il n'y a pas de règle intrinsèque pour déterminer la relation entre certains ostensifs et certains non ostensifs. Cette association est arbitraire, et se produit au cours de l'action dans l'institution.

Une technique ne peut être décrite que comme manipulation d'objets ostensifs, réglée par des non ostensifs. De ce fait, les objets ostensifs et non ostensifs deviennent indissociables des technologies et des théories. A tel point que toute modification, si petite soit-elle, des objets ostensifs, implique une reconstitution de la praxéologie toute entière.

Les objets ostensifs ne sont pas des données naturelles, mais une construction institutionnelle. C'est pourquoi il n'est pas suffisant de les montrer pour qu'un sujet puisse les appréhender.

« Ils –les objets ostensifs- sont des instruments de l'activité mathématique, des outils matériels sans lesquels l'action ne peut pas se réaliser. La fonction sémiotique des ostensifs, leur capacité à produire du sens, ne peut en effet être séparée de leur fonction instrumentale, de leur capacité à s'intégrer dans des manipulations techniques, technologiques, théoriques » (Chevallard, 1999).

2.1.3 Discussion de la problématique avec la TAD

La TAD met en valeur le bloc du 'savoir-faire', constitué par les types de tâches et les techniques, en l'identifiant comme le lieu historique de la genèse du savoir. Tout savoir est avant tout une réponse à une question posée par une tâche déterminée. Contre une 'monumentalisation du savoir', la TAD propose de mettre en valeur les tâches problématiques, qui sont moteur de recherche de nouvelles techniques et de nouvelles technologies de ces techniques. On doit regarder alors l'introduction de Cabri dans l'enseignement du point de vue de son rôle dans l'appropriation des tâches problématiques et dans le développement des techniques adéquates pour résoudre ces tâches.

Au sein de toute institution qui vise la diffusion du savoir mathématique, on peut distinguer deux praxéologies en interaction : une praxéologie mathématique, que l'institution cherche à mettre en place, et une praxéologie didactique, par laquelle elle cherche à atteindre cet objectif. Ainsi, la praxéologie didactique est subordonnée à la praxéologie mathématique visée. L'utilisation de Cabri dans une praxéologie didactique doit être justifiée avant tout par son rôle dans la praxéologie mathématique visée. Ainsi, la légitimité didactique de Cabri doit être une conséquence de sa légitimité mathématique dans l'institution.

L'intégration d'un outil informatique comme Cabri géomètre suppose l'introduction de nouveaux objets ostensifs. On peut comprendre alors les difficultés à les prendre en compte dans une praxéologie déjà existante, car ils supposent de nouvelles tâches, de nouvelles techniques et de nouvelles technologies. Tant qu'il n'y a pas un travail de reconstruction praxéologique -cette à dire une véritable reconstruction du savoir- en utilisant les nouveaux ostensifs, on ne pourra pas les inclure dans l'activité mathématique avec un rôle qui ne soit pas marginal.

L'inclusion de l'outil informatique suppose ainsi des démarches de transposition didactique au moins à trois niveaux:

- Dans la noosphère, la production de documents d'accompagnement qui explicitent les nouvelles tâches, techniques et technologies associées aux nouveaux ostensifs.
- Pour les enseignants, l'appropriation de nouvelles tâches, techniques et technologies, c'est-à-dire la construction d'un nouveau rapport au savoir, médié par les nouveaux ostensifs informatiques.
- Au niveau de la classe, la transposition qui fait vivre aux élèves cette nouvelle praxéologie mathématique.

On peut considérer Cabri géomètre comme un dispositif qui utilise des ostensifs informatisés ; c'est à dire, des ostensifs dont le comportement ne dépend pas exclusivement de la manipulation faite par le sujet, mais aussi de la programmation du logiciel. De ce fait, le contrôle de ces objets ostensifs devient en partie interne au système, et les objets non ostensifs qui seront nécessairement associés devront rendre compte de ce contrôle aussi.

Du point de vue de la formation d'enseignants, on voit la nécessité de

- Présenter la formation non comme l'appropriation d'un outil accessoire du travail didactique, mais comme un véritable travail mathématique à l'aide d'un nouveau dispositif.
- Séparer deux moments de formation : le moment d'appropriation de Cabri-géomètre comme *outil pour faire des mathématiques*, dans lequel ils sont mis en situation de recherche mathématique et développent des techniques et des technologies en utilisant les nouveaux ostensifs. Et le moment d'appropriation de Cabri-géomètre comme *outil pour enseigner les mathématiques*, dans lequel ils organisent à leur tour la genèse praxéologique pour leurs élèves, c'est à dire pour que leurs élèves à leur tour *fassent des mathématiques* en utilisant Cabri géomètre.

2.2 La théorie de l'instrumentation

A partir des recherches en ergonomie, Rabardel (1995) s'intéresse à l'utilisation d'objets techniques dans l'apprentissage des métiers. Son point de vue cognitif le conduit à étudier les effets dans la conceptualisation des potentialités et contraintes qu'imposent certains objets techniques. L'originalité de son approche est de ne pas considérer séparément l'objet technique et le sujet qui l'utilise, mais de prendre comme unité d'analyse les influences réciproques entre l'objet et l'utilisateur. Il définit ainsi un instrument comme composé à la fois d'un artefact (objet technique) et des schèmes d'utilisation[3] (utilisateur).

2.2.1 Le problème de l'activité instrumentée

Le travail de Rabardel se centre sur l'étude de l'activité instrumentée, c'est à dire l'utilisation d'instruments dans les activités humaines, concrètement dans des environnements de travail et d'apprentissage.

Il s'oppose à une approche technocentrique, où « l'homme a habituellement une position « résiduelle » et son activité réelle n'a guère de statut propre. Pensée dans les termes mêmes de la technique, elle y perd son identité : l'homme est pensé en référence aux choses et dans les termes propres des choses » (Rabardel, 1995, p.10). Les approches anthropocentriques, « opèrent un renversement par rapport à la perspective précédente …(et) c'est l'homme qui est en position centrale depuis laquelle peuvent être pensés ses rapports aux objets et systèmes anthropotechniques et l'activité qu'il y déploie »(Ibid), mais « La sphère de l'usage reste peu

[3] Rabardel utilise la notion de schème dans le sens d'une organisation invariante (Vergnaud , 2003)

explorée et mal comprise…les processus de production de connaissances par les sujets dans l'utilisation sont, par exemple, méconnus et leur existence est, dans certains cas, niée » (Ibid).

Dans les deux cas, c'est l'objet technique qui prend le devant, imposant une normativité par rapport aux tâches à accomplir par son intermédiaire, même si dans sa conception et la définition de ses fonctionnalités, il est tenu compte de l'homme et de ses besoins.

2.2.2 De l'artefact à l'instrument

Rabardel (1995) propose donc une alternative d'analyse dans laquelle l'activité instrumentée est au centre, et renonce à privilégier certains usages par rapport à d'autres. C'est ainsi qu'il propose de définir l'instrument comme composé à la fois de l'objet technique -qu'il nomme « artefact »-, et « des schèmes d'utilisation résultant d'une construction propre ou de l'appropriation de schèmes sociaux préexistants »(Ibid, p11).

L'instrument ainsi défini n'est pas donné, mais il se construit dans l'action, dans l'interaction avec l'environnement dans le cadre des tâches à accomplir. Dans ce processus d'interaction, le sujet d'une part assimile l'artefact -en identifiant ces caractéristiques pertinentes par rapport à la tâche et en lui assignant des fonctions-, et d'autre part, il s'adapte à lui -en modifiant ses schèmes de pensée, pour tenir compte des contraintes et des potentialités de l'artefact.

Comme tout instrument est une construction personnelle, un même artefact peut s'associer à des instruments différents, produits de l'activité instrumentée.

2.2.3 La double genèse : instrumentation et instrumentalisation

C'est donc le processus de construction des instruments, appelé « genèse instrumentale » qui devient centrale dans l'analyse, processus qui suppose une dialectique entre deux pôles : l'artefact et le sujet. Ainsi, la genèse instrumentale requiert une analyse dialectique qui permette de la regarder à la fois du point de vue de l'artefact et du point de vue du sujet.

« les processus d'instrumentalisation sont dirigés vers l'artefact : sélection, regroupement, production et institution de fonctions, détournements, attribution de propriétés, transformation de l'artefact, de sa structure, de son fonctionnement, etc. jusqu'à la production intégrale de l'artefact par le sujet.

Les processus d'instrumentation sont relatifs au sujet : à l'émergence et à l'évolution des schèmes d'utilisation et d'action instrumentée : leur constitution, leur évolution par accommodation, coordination, et assimilation réciproque, l'assimilation d'artefacts nouveaux à des schèmes déjà constitués, etc. ».

Ces deux types de processus sont le fait du sujet. Ils se distinguent par l'orientation de l'activité : « dans le processus d'instrumentation, elle est tournée vers le sujet lui-même, dans le processus d'instrumentalisation, elle est orientée vers la composante artefactuelle de l'instrument » *(Ibid*, p 12)

L'unité d'analyse est constituée par les schèmes d'utilisation, définis comme invariants observables dans l'activité instrumentée. Ces schèmes peuvent être construits par le sujet de manière individuelle ou bien par la collectivité, et dans ce cas ils sont appelés schèmes sociaux d'utilisation.

« Les schèmes font l'objet de transmissions, de transfert, plus ou moins formalisés : depuis les renseignements transmis d'un utilisateur à l'autre, jusqu'aux formations structurées autour des systèmes techniques complexes, en passant par les divers types d'aides à l'utilisateur (notices, modes d'emploi, assistances diverses incorporées ou non dans l'artefact lui-même). C'est pourquoi nous avons qualifié les Sh.U. de schèmes sociaux d'utilisation. « *(Ibid*, p115)

Les schèmes d'utilisation peuvent être considérés comme le produit d'une part de l'expérience et des connaissances du sujet, d'autre part des contraintes et potentialités des artefacts sur l'action instrumentée.

2.2.4 Instruments et apprentissage

Du point de vue de l'apprentissage (Rabardel, 1999), l'approche instrumentale met en évidence des phénomènes courants dans les situations d'enseignement :

Un instrument n'est pas neutre : du fait des contraintes d'action qu'il impose et des potentialités qu'il offre, il structure l'action, et de ce fait la conceptualisation. Différents instruments produisent des conceptualisations différentes.

L'artefact n'étant qu'une partie de l'instrument, il ne suffit pas de l'inclure dans l'activité pour assurer un apprentissage déterminé. C'est l'organisation de l'action instrumentée, donc les types de tâches à accomplir, et les interactions sociales à l'intérieur de la classe qui contribueront à la genèse d'un instrument donné.

Les schèmes d'utilisation peuvent se transmettre, d'où l'intérêt d'identifier ceux qui sont pertinents par rapport à l'apprentissage visé, et leur socialisation.

2.2.5 Discussion de la problématique en utilisant l'instrumentation

Du point de vue de l'instrumentation, l'intégration de Cabri dans l'enseignement nécessite une double genèse instrumentale de Cabri : en tant qu'outil pour faire de la géométrie, et en tant qu'outil pour enseigner la géométrie. Chacune de ces deux genèses suppose un double processus de développement : l'instrumentalisation et l'instrumentation. L'interaction entre ces deux processus, et l'accent donné à chacun d'eux peut expliquer les difficultés des enseignants à intégrer Cabri dans leur enseignement. Une instrumentalisation déficiente peut empêcher le développement d'un instrument adéquat pour faire des mathématiques ou pour enseigner les mathématiques, et une instrumentation déficiente empêchera les enseignants de donner un sens à l'utilisation de Cabri.

Plusieurs recherches sur l'utilisation des technologies informatiques dans l'enseignement des mathématiques (Guin et Trouche, 2002) utilisent cette approche instrumentale pour analyser les activités avec instrument. Nous reprendrons surtout le double regard d'instrumentalisation (processus d'appropriation technique de l'outil) et d'instrumentation (modification des schèmes de pensée qui dirigent l'action). On cherchera à mettre en évidence, pendant la formation, ces deux aspects et leurs relations, comme base d'articulation des aspects perceptif et théorique de l'activité instrumentée avec Cabri-géomètre.

2.3 Validation et théorie des situations

D'après Margolinas (1993), qui se place dans le cadre de la théorie des situations (Brousseau 1998) l'élément déterminant de l'apprentissage en mathématiques est la validation. Elle définit la validation comme la possibilité qu'a l'élève de décider de la validité de ses propres actions. Après avoir montré que dans toute activité didactique il est inévitable qu'il y ait une phase de conclusion, au cours de laquelle l'élève reçoit des informations sur la validité de ses actions, elle montre comment cette phase de conclusion peut prendre deux formes différentes : l'évaluation, lorsque l'enseignant émet un jugement sur le travail de l'élève, et qui nécessairement met fin à un processus de résolution de problème, et la validation, lorsque

l'élève a la possibilité de décider par lui-même sur la validité de ses actions, et qui relance le processus de solution de problème en cas d'invalidation.

L'élément qui permet la validation est le milieu (Brousseau, 1998), qui par ses potentialités et ses contraintes assure la possibilité de cette suspension du jugement de l'enseignant. Ce milieu, qui peut inclure un dispositif matériel, permet à l'élève, sans avoir recours aux connaissances à acquérir, mais seulement à des connaissances déjà acquises, de décider de la validité de ses actions. Ces connaissances déjà acquises par l'élève, que Margolinas qualifie de *critères de validité*, permettent à l'élève d'interpréter les rétroactions d'un milieu matériel. Elles seront remplacées progressivement par de nouvelles connaissances qui permettront de se passer du milieu matériel, tout en jouant le rôle de critères de validité.

Une situation a-didactique est une situation qui utilise un milieu soigneusement choisi, grâce auquel l'élève peut travailler en autonomie par rapport à l'enseignant. C'est une situation qui définit une finalité et des moyens à mettre en œuvre pour l'atteindre. Elle doit permettre aux apprenants d'utiliser des stratégies spontanées, basées sur les connaissances acquises, stratégies qui doivent se révéler soit inefficaces, soit trop coûteuses pour atteindre le but. Cette invalidation devrait conduire les élèves à les abandonner à long terme. D'après Margolinas (1993) les élèves arrivent à construire une stratégie gagnante grâce aux interventions de l'enseignant et aux interactions avec le milieu.

Ainsi, les situations a-didactiques peuvent être considérées comme mettant en œuvre une démarche expérimentale dans laquelle les élèves, confrontés à une tâche problématique, ont l'opportunité de mettre en œuvre des stratégies spontanées ou non, mais surtout de les tester, afin de décider par eux-mêmes de la stratégie optimale. Un milieu matériel peut servir de terrain d'expérimentation, milieu qui permet certaines actions, et qui par ses rétroactions assure la possibilité de la validation.

2.3.1 Discussion de la problématique du point de vue de la validation

La possibilité d'une validation de la part des élèves est l'élément clé de l'apprentissage dans la théorie des situations. De ce point de vue, nous devons étudier les possibilités de validation avec Cabri et les possibilités de mettre en œuvre ces validations dans des activités de résolution de problèmes avec les élèves. Adopter une démarche expérimentale en mathématiques est alors un moyen de mettre en valeur la validation par l'expérience, caractéristique des situations a-didactiques.

Nous ne prétendons pas que Cabri offre un milieu matériel approprié pour toute situation a-didactique, mais nous pensons qu'il est un environnement approprié pour se livrer à des expérimentations sur les objets tracés à l'écran. Il permet notamment aux élèves d'invalider les stratégies basées uniquement sur la perception. La formation d'enseignants devra viser la mise en valeur de la validation à l'aide de Cabri, et fournir aux formés les moyens pour la mettre en scène avec leurs élèves.

Dans Cabri, l'enseignant a la possibilité de ne pas faire appel à l'évaluation comme moyen de donner à l'élève des informations sur la validité de ses actions. De ce fait, il peut favoriser la dévolution des problèmes aux élèves autant de fois que nécessaire pour mettre en échec les stratégies non géométriques.

2.4 Les Technologies de l'Information et de la Communication et l'apprentissage

D'après Betrancourt (2007), ce sont les capacités de stockage et de traitement des TIC qui leur donnent un grand potentiel dans l'enseignement et l'apprentissage. Ces capacités aident à

décharger et supporter cognitivement l'activité, libérant le potentiel cognitif des individus pour des traitements de haut niveau. Elle met en évidence trois caractéristiques des TIC qui sont particulièrement adaptés pour produire des apprentissages significatifs : le stockage d'informations complexes et/ou de masse, qui offre la possibilité d'accès rapide aux informations nécessaires à l'activité ; le traitement d'informations complexes, qui profite des capacités de calcul des machines pour « libérer le raisonnement des contraintes et de la lenteur d'opérations de bas niveau, qui constituent parfois des obstacles à l'atteinte de pensées plus abstraites » ; et la représentation et la visualisation d'informations, domaine où les TIC « offrent deux avantages : d'une part elles facilitent la production de ces graphiques, en permettant la modification et la réutilisation … et offrent la possibilité de rendre ces visualisations graphiques interactives ».

Evidemment, ces avantages ne sont que de potentialités, dont l'actualisation suppose un processus de genèse instrumentale comme le décrit Rabardel, processus qui implique non seulement l'appropriation du fonctionnement technique des logiciels, mais aussi la modification des schèmes d'action et de pensée de la part des usagers.

Parmi les Environnements d'Apprentissage Humain, qui tirent profit des TIC spécifiquement pour l'apprentissage, les micro-mondes sont des exemples prototypiques des applications à l'enseignement des capacités de traitement et de représentation.

2.4.1 Les micro-mondes

Les micro-mondes sont des logiciels dédiés à l'enseignement, sur la base d'une conception constructiviste de l'apprentissage:

> « La conception piagétienne de l'apprentissage et du développement cognitif est habituellement qualifiée de constructiviste pour signifier que l'enfant se développe à travers l'interaction continue entre, d'une part la structure cognitive qui le caractérise et son action sur le milieu et, d'autre par les informations qu'il reçoit en retour de ce milieu (difficulté, erreurs, succès, résistances…). Chaque action sur le milieu provoque ainsi une modification cognitive qui à son tour modifiera la prochaine action sur le milieu. C'est donc à partir des informations tirées de l'action sur le milieu que l'enfant construira ses connaissances nouvelles ». (Depover, 2000).

Seymourt Papert fut le premier à proposer le terme de micro-monde, avec la création du logiciel Logo, pour l'apprentissage de la programmation, des mathématiques et de la géométrie. D'après Gurtner (1996), Papert présente la construction des connaissances comme la construction de quelque chose d'extérieur : un château de sable, une machine, un programme d'ordinateur, un livre. Les micro-mondes sont donc des environnements de construction d'objets à l'écran de l'ordinateur. « [Ils sont] des réalités artificielles qui intersectent suffisamment avec les idées intuitives des élèves pour que ceux-ci puissent les manipuler immédiatement, mais dont la structure profonde va les conduire 'inévitablement' à dépasser ces perceptions et conceptions initiales » (di Sessa, 1988).

Toujours d'après Gurtner, les micro-mondes mettent en oeuvre des idées centrales dans les théories piagétiennes sur l'apprentissage : le fait de donner une place centrale à l'action, et que cette action est accompagnée d'une prise de conscience sur les actions mêmes et leurs effets, la possibilité de profiter d'une variété de représentations, et la possibilité de représenter non seulement les états, mais aussi les transformations.

Concrètement, les micro-mondes utilisent une simulation informatique qui permet aux utilisateurs d'interagir avec un monde artificiel épuré des bruits du réel avec un but défini. Les

rétroactions du système, sous forme de phénomènes visuels à l'écran, peuvent ainsi aider l'utilisateur à assimiler les règles internes de fonctionnement du système, et les intégrer dans son action afin d'obtenir les buts cherchés. De cette manière, les élèves peuvent construire un système de connaissances à la fois théoriques et pratiques.

Par exemple, dans Logo, il est possible de commander un robot tortue par l'intermédiaire de commandes simples : avancer, tourner, reculer, etc. Les élèves sont confrontés à des tâches de dessin, qu'ils cherchent à produire en assemblant des suites de commandes. Ils peuvent à tout moment contrôler l'effet de ces commandes en les faisant exécuter par la tortue, et comparer le dessin obtenu avec celui attendu. Ce faisant, ils peuvent être amenés à construire des propriétés géométriques et des procédés de tracé pour les produire.

2.4.2 Cabri comme micro-monde

Cabri est un micro-monde de dessin géométrique, caractérisé par la possibilité de la manipulation directe des objets à l'écran. Ces objets sont des représentations bidimensionnelles des objets géométriques de base : points, segments, droites, cercles, polygones, etc., et de leur relations : appartenance, intersection, parallélisme, etc. Les objets dessinés peuvent être déplacés en changeant leur position et leur grandeur, et le système assure que toutes les relations géométriques entre eux, construites avec les primitives du système, restent vraies pendant le déplacement.

Ainsi, Cabri fournit deux types principaux de rétroactions : une première rétroaction constituée par le dessin statique, produit de la construction, et une deuxième rétroaction constituée par le dessin *et* le déplacement.

Tant qu'il n'utilise pas le déplacement, l'utilisateur peut utiliser des connaissances spatiales pour produire des dessins d'objets géométriques. Mais lorsqu'il utilise le déplacement, seules les relations géométriques qui ont été explicitées par l'utilisation des primitives du système seront conservées[4].

Par exemple, face à la tâche de construire un carré, les élèves peuvent utiliser leur connaissance du carré en tant que forme globale (Gestalt), et assembler quatre segments jusqu'à obtenir une image acceptable de carré

Tableau 1: construction spatiale du carré dans Cabri

Ils commencent par un segment horizontal	

[4] Comme le dit Kuzniak (2003), les enseignants et les élèves doivent combiner leurs connaissances théoriques et leurs connaissances instrumentales (sur les outils de tracé), pour construire un Espace de Travail Géométrique, qui peut être caractérisé par sa référence à une géométrie perceptive, une géométrie qui commence à utiliser des chaînes de déductions, et une géométrie totalement axiomatisée.

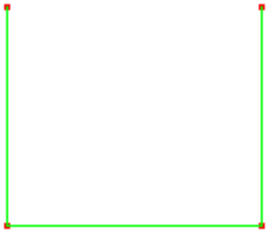
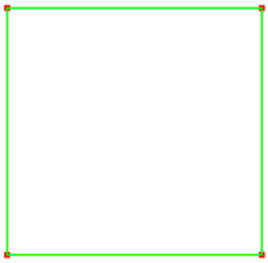
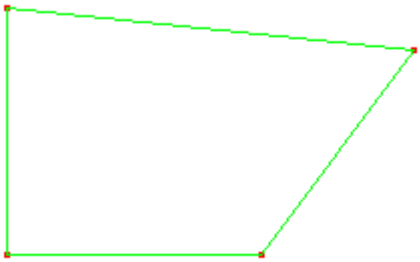
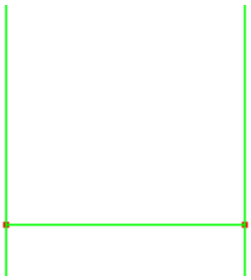
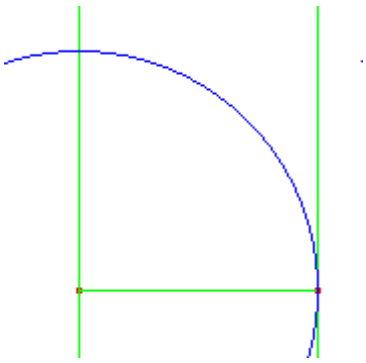
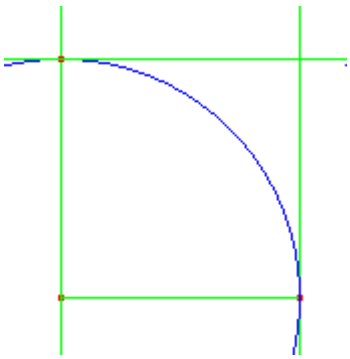
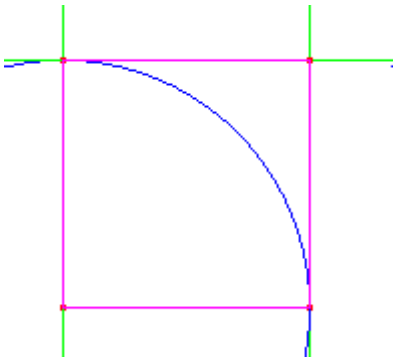
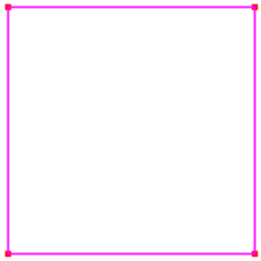
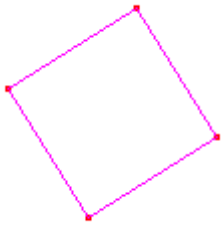
Puis deux segments verticaux de même longueur que le premier segment	
Finalement un deuxième segment horizontal. On obtient ainsi une image acceptable d'un carré.	
En déplaçant un sommet, le dessin perd sa forme de carré	

Tableau 2: construction géométrique du carré dans Cabri

On commence par un segment quelconque	
On trace des droites perpendiculaires par les extrémités du segment pour produire des angles droits.	

On trace un cercle de centre une extrémité du segment et qui passe par l'autre extrémité, pour construire sur la droite perpendiculaire un segment de même longueur	
On trace une droite parallèle au segment par l'intersection du cercle et de la droite perpendiculaire[5]	
On construit un polygone en utilisant les quatre sommets construits	
On cache les constructions auxiliaires : les droites, le cercle et le segment.	

[5] On voit comment certaines propriété de la figure n'ont pas été construites en utilisant les primitives du système, et néanmoins elles sont conservées pendant le déplacement : par exemple, la droite parallèle produit des angles droits avec les deux droites perpendiculaires au segment, sans avoir utilisé 'droite perpendiculaire'. Ces propriétés peuvent être considérées comme des théorèmes expérimentaux.

Le déplacement d'un sommet fait changer la position et la taille, mais ne détruit pas la forme	

2.4.3 Cabri et validation

La caractéristique fondamentale de Cabri par rapport aux processus de validation est le fait que toute propriété géométrique qui a été construite en utilisant les primitives du logiciel reste invariante pendant le déplacement des objets. Cette caractéristique permet de distinguer deux types de constructions avec Cabri :

Les constructions ajustées[6], dans lesquelles une ou plusieurs propriétés ne sont pas construites en utilisant les primitives, mais en déplaçant les objets jusqu'à obtenir visuellement la configuration attendue. Ces propriétés ne seront pas invariantes pendant le déplacement.

Les constructions exactes[7], dans lesquelles toutes les propriétés sont invariantes pendant le déplacement, soit parce qu'elles ont été construites en utilisant les primitives du logiciel, soit parce qu'elles sont des conséquences logiques des propriétés construites explicitement.

Evidemment, la solution d'un problème de construction doit être une construction exacte, et le déplacement des objets qui composent une construction est une forme de validation finale du processus de résolution.

Ce déplacement pour valider une construction peut utiliser deux types différents de critères de validité (Margolinas, 1993) : les formes globales, ou les relations géométriques. Par exemple, devant une construction dont on veut vérifier si elle est un carré, on pourra déplacer les sommets :

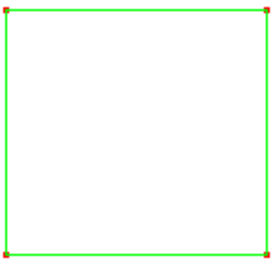
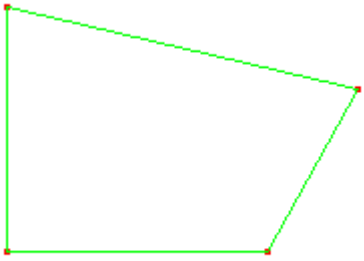
 Avant le déplacement	 Après le déplacement

Figure 1

[6] Appelées aussi 'constructions molles' par certains auteurs.

[7] Appelées aussi 'constructions robustes'.

Mais les connaissances qui permettent de décider que cette construction n'est pas un carré[8] peuvent être de nature différente :

- On peut constater que la figure après le déplacement n'a pas la *forme* d'un carré[9]
- On peut constater que la figure après le déplacement n'a pas les propriétés géométriques d'un carré : deux de ses angles ne sont pas droits, et ses côtés ne sont pas égaux.

Ainsi, il est possible d'invalider une construction ajustée sans avoir recours aux propriétés géométriques comme critères de validité, et par conséquent, de dévoluer le problème aux élèves 'sans le tuer' (Margolinas, 1993)[10].

Mais pendant le processus de résolution, il est aussi nécessaire de procéder à des validations intermédiaires, notamment des 'lectures' effectuées sur une figure (ajustée ou exacte).Dans ces cas, on peut aussi effectuer des validations sans déplacer. En effet, lorsque l'on veut vérifier une propriété géométrique sur une figure donnée, il est possible d'effectuer une des opérations suivantes :

- Produire la propriété à l'aide des primitives de Cabri, et constater visuellement si les objets ainsi construits se superposent sur les objets préexistants.
- Utiliser les mesures (distance, périmètre, aire, angle) et les calculs et comparer les nombres affichés par Cabri avec les résultats prévus par la théorie.
- Utiliser la vérification de propriétés (alignement, parallélisme, perpendicularité, appartenance, équidistance)

Par exemple, si sur la figure suivante on veut vérifier que AB est perpendiculaire à BC

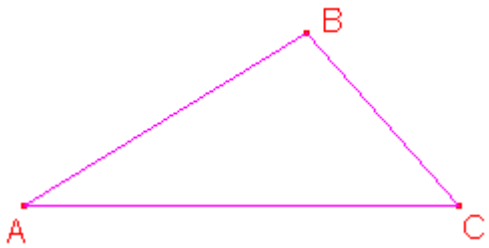


Figure 2

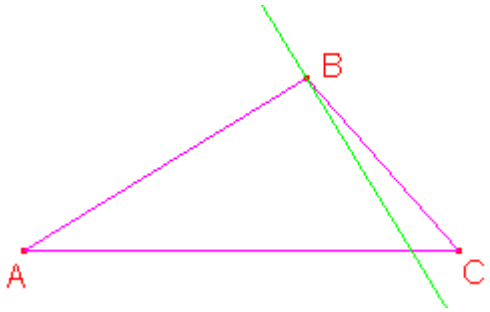
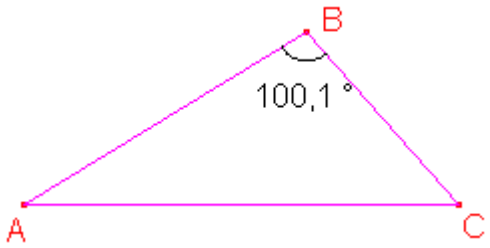
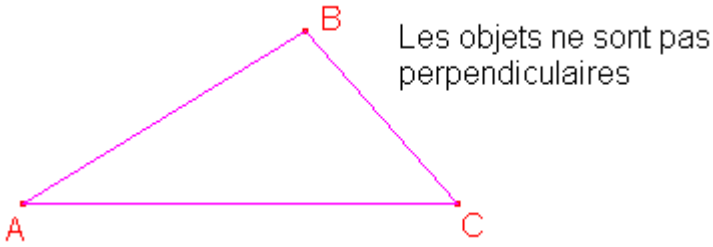
On peut réaliser l'une des trois actions suivantes:

[8] Encore faut-il que l'on accepte qu'il s'agit de la même figure avant et après le déplacement.

[9] Cette reconnaissance de *forme*, si elle est réduite à des formes prototypiques, peut invalider une construction correcte dès lors qu'elle ne correspond pas au prototype. Par exemple, un carré qui n'a pas ses côtés parallèles aux bords de l'écran peut ne pas être reconnu comme carré.

[10] Quand la validation se réduit à une évaluation de la part de l'enseignant, qui montre *sa* solution, il 'tue' le problème, puisqu'il est inutile de continuer la recherche de solution.

Tableau 3: différents moyens de validation statique

Construire une droite perpendiculaire a AB par B		On constate ainsi que la droite ne se superpose pas avec le côté BC
Mesurer l'angle ABC		On constate ainsi que l'angle ABC n'est pas de 90°
Vérifier la perpendicularité de AB et BC		Le système formule un jugement sur la propriété conjecturée

Les résultats de ces tests expérimentaux sans déplacement doivent être interprétés de manière différente s'ils s'appliquent à une construction exacte ou à une construction ajustée. En effet, sur une construction exacte, tout écart du résultat attendu peut être considéré comme un contre-exemple, tandis que sur une construction ajustée, un écart léger n'invalide pas nécessairement l'hypothèse.

Ainsi, si dans la figure suivante on veut vérifier si le point AC=AB/3,

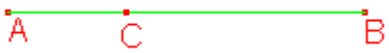


Figure 3

On peut procéder à mesurer les distances AC, AB et à calculer le quotient AB/AC :

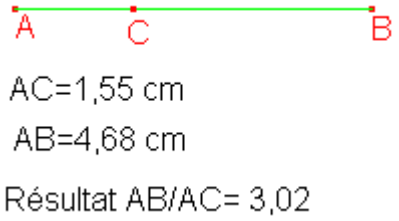


Figure 4

Si la construction est exacte, le fait que le quotient AB/AC n'est pas exactement 3 invalide l'hypothèse. Par contre, si la construction est ajustée, le petit écart obtenu peut être dû à l'imprécision du dessin, et n'invalide pas l'hypothèse[11].

Ainsi, lors de la validation sans déplacement avec Cabri, il est nécessaire de distinguer si la propriété à vérifier est obtenue par ajustement ou non.

Finalement, sur une construction exacte la validation sans déplacement ne suffit pas, il faut en plus la validation avec déplacement.

2.4.4 Invalidation par déplacement des constructions 'papier-crayon'.

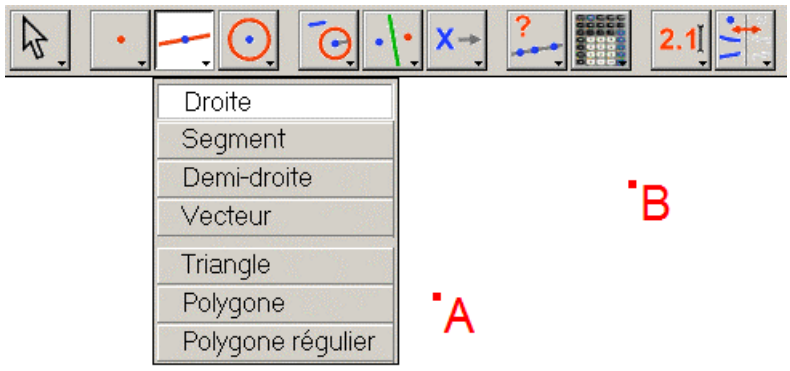
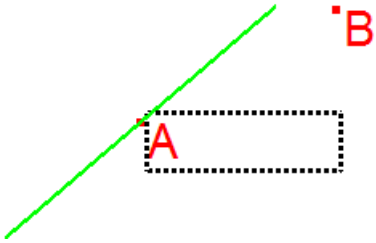
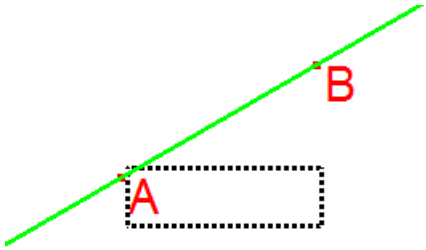
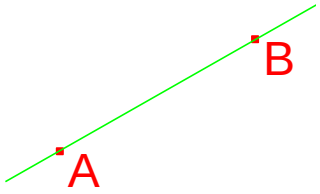
Nous avons montré comment une interprétation spatiale des objets géométriques conduit à la production de constructions ajustées. Mais ces constructions ajustées peuvent être produites aussi en utilisant des propriétés géométriques qui sont théoriquement correctes.

La transposition directe des tracés sur papier avec des instruments (règle, équerre, compas) à l'environnement Cabri produit des constructions ajustées qui sont invalidées par déplacement. En effet, ces constructions reposent sur des ajustements perceptifs des instruments et du dessin, ajustements qu'il est nécessaire d'éviter en explicitant toutes les conditions du dessin, si l'on veut obtenir une construction exacte.

Par exemple, pour tracer la droite qui passe par deux points, la technique instrumentée avec la règle consiste à placer la règle près des deux points, ce qui implique un contrôle perceptif de la précision du dessin (Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006). Si l'on transpose cette technique sur Cabri, on sélectionne 'Droite', on fait clic sur le premier point, on déplace le curseur jusqu'à ce que la droite semble passer par le deuxième point, et on fait un deuxième clic. Ceci produit comme résultat une droite qui apparemment passe par les deux points, mais si on déplace l'un des points, l'autre sort de la droite.

[11] Nous devons souligner que la distinction entre construction exacte et construction ajustée ne fait pas nécessairement référence à toute une figure, mais peut s'appliquer à des parties d'une figure. Ainsi, dans une figure construite à l'aide des primitives de Cabri, il est possible de trouver des propriétés qui ne sont pas invariantes, mais qui se vérifient pour certains cas de figure. Dans ce cas, ce sont de propriétés obtenues par ajustement.

Tableau 4

On sélectionne l'outil Droite	
On fait clic sur A, apparaît la droite	
On déplace le curseur jusqu'à voir la droite passer par B (mais le curseur ne signale pas le point B)	
On fait clic à cette position, définissant la droite par le point A et avec une pente donnée.	

Le phénomène visuel statique d'une droite passant par A et B a été obtenu par ajustement. Mais la représentation interne au système ne correspond pas à cette image : c'est une droite passant par A (uniquement). Pour cette raison, quand on déplace le point A ou le point B, le tracé obtenu n'est pas celui attendu.

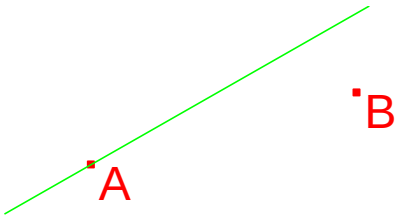
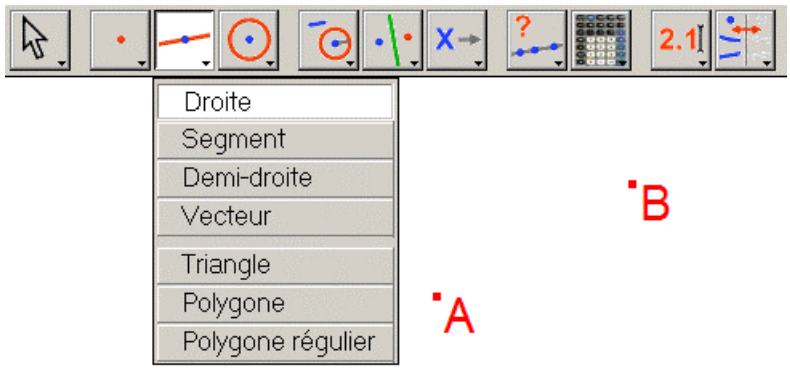
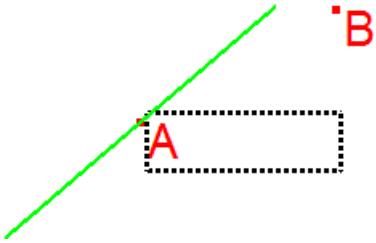
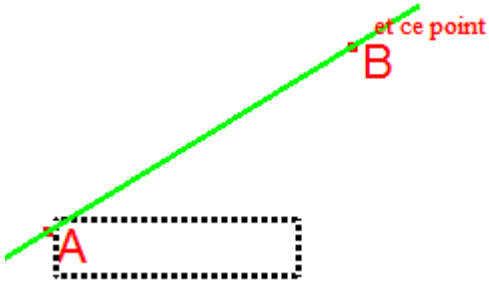
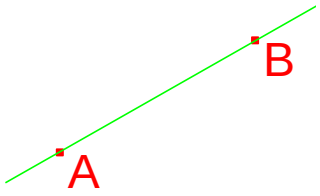
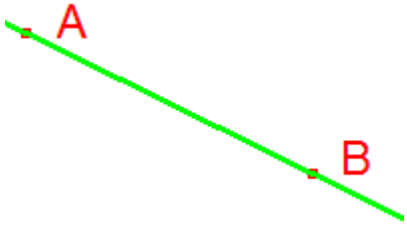


Figure 5

Afin d'obtenir une représentation interne au système de la droite qui passe par A et B, c'est-à-dire une figure dynamique qui conserve cette propriété pendant le déplacement, il est nécessaire de sélectionner le point A *et le point B.*

Tableau 5

On sélectionne l'outil Droite	
On fait clic sur A, apparaît la droite	
On déplace le curseur *jusqu'à signaler le point B* (le système affiche alors le message 'et par ce point')	
On fait clic à cette position, définissant la droite par le point A et le point B	
Le déplacement de la droite, du point A ou du point B n'invalide pas la propriété	

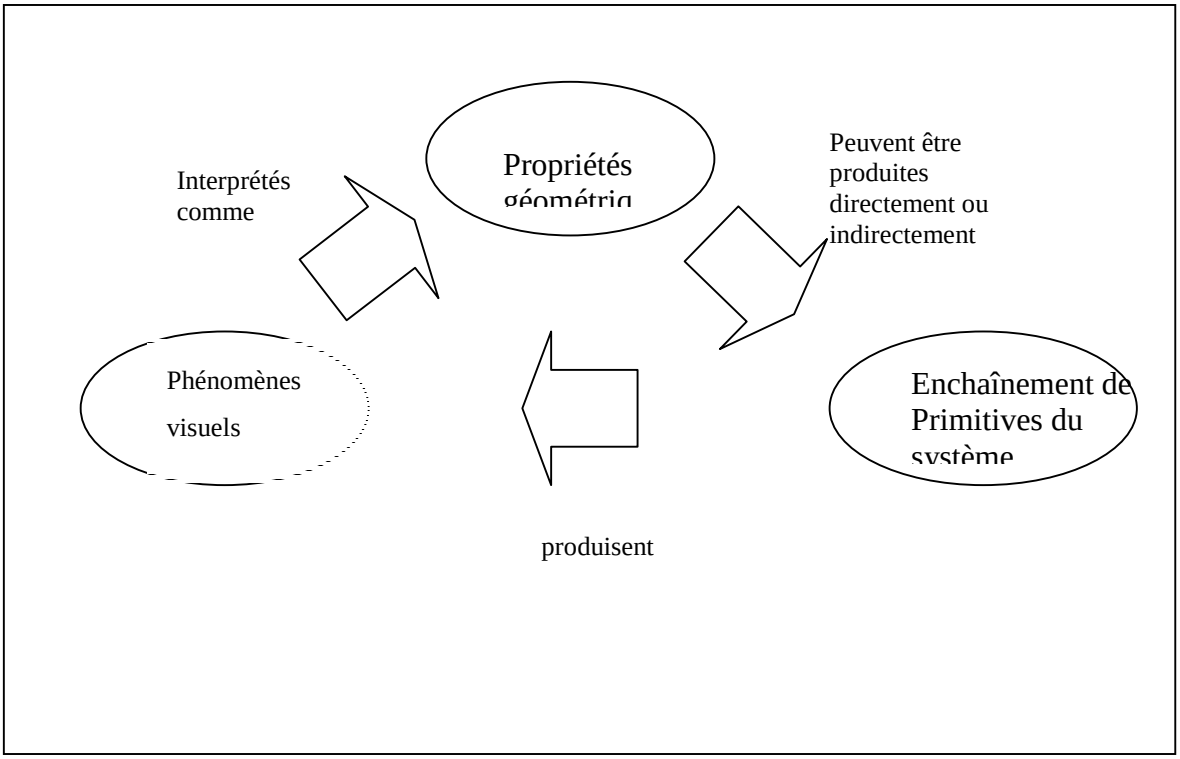
Dans Cabri, une propriété ne se réduit pas à donner lieu à un effet visuel statique, mais elle donne lieu à la combinaison de cet effet visuel statique (la droite passe par les points A et B) et d'une dépendance dynamique (lorsque je déplace le point B, la droite se déplace aussi, et passe toujours par B).

2.4.5 Démarche expérimentale

On voit comment la validation avec Cabri suppose une interaction forte entre théorie et perception : les connaissances théoriques permettent une description du résultat attendu, et donc une anticipation du phénomène visuel qui devrait se produire à l'écran ; les rétroactions du système sont des phénomènes visuels qui peuvent être contrastés avec cette anticipation et déterminer la validité ou invalidité de la construction ou de la lecture d'une propriété.

On appellera ce processus qui comprend des cycles de conjecture-expérience-validation démarche expérimentale (Kuntz, 2007), démarche qu'on cherchera à développer chez les enseignants, à qui l'on demandera ensuite de la développer chez leurs élèves.

La démarche expérimentale exploite le double rôle de la géométrie dynamique, à la fois



contexte concret de la géométrie théorique, et système de représentation. Ainsi, pour l'apprenant elle constitue une réalité objective, un ensemble de phénomènes perceptibles, et pour l'expert elle constitue un système de représentation des connaissances théoriques, donc une instanciation de la théorie.

Figure 6

Questions de recherche

Les questions de départ de notre travail, que nous avons énoncé au début de ce chapitre, peuvent être reformulées, à l'aide des cadres théoriques choisis, de la façon suivante :

1. L'utilisation de Cabri en classe de géométrie implique le développement d'une praxéologie sur la base des objets ostensifs informatisés. Quels sont les éléments praxéologiques nouveaux que les enseignants s'approprient dans leur pratique mathématique et dans leur pratique didactique ?
2. Parmi ces éléments nouveaux, les quels sont susceptibles de provoquer des conflits avec les praxéologies déjà existantes dans l'institution de l'enseignement secondaire inférieur ?
3. Quelles différences y a-t-il entre appropriation mathématique et appropriation didactique des ostensifs informatisés ?
4. Une praxéologie sur la base des nouveaux objets ostensifs informatisés, peut-elle être incluse dans l'institution scolaire de l'enseignement secondaire inférieur avec le bloc technologico-théorique existant, ou doit-elle aboutir à des nouveaux éléments théoriques ?
5. La constitution de Cabri comme instrument pour faire de la géométrie suppose une genèse instrumentale ; dans quelle mesure une instrumentalisation déficiente peut-elle empêcher une instrumentation adéquate ?
6. Normalement, les cours de formation d'enseignants à l'utilisation de Cabri prennent en charge le processus d'instrumentalisation, et négligent le processus d'instrumentation. Comment articuler ces deux processus dans une formation d'enseignants ?

3 Description de l'ingénierie de formation d'enseignants

3.1 Choix issus d'hypothèses de travail

L'analyse déjà présentée à l'aide du cadre théorique nous permet de formuler un certain nombre d'hypothèses de travail qui se traduisent par des choix didactiques relatifs à l'ingénierie.

- Il ne peut y avoir une inclusion des nouveaux ostensifs de Cabri-géomètre dans une praxéologie existante sans modifier les types de tâches, techniques et technologies.

Cette hypothèse de travail détermine le choix d'organiser la formation autour de la construction d'une praxéologie géométrique sur la base des nouveaux ostensifs offerts par Cabri-géomètre. Nous placerons les enseignants en situation de recherche, avec des tâches problématiques suffisamment familières pour qu'ils mobilisent leurs techniques, mais suffisamment non familières pour que ces techniques échouent et qu'ils doivent développer de nouvelles techniques.

- Les techniques didactiques des enseignants sont tributaires des praxéologies mathématiques de leurs institutions d'enseignement. En particulier, les enseignants ne peuvent identifier dans la genèse praxéologique de leurs élèves que des (bribes de) techniques mathématiques qui leur sont familières, et leurs interventions didactiques sont organisées en fonction de ces techniques et de leurs technologies associées.

Cette hypothèse de travail détermine le choix de séparer deux cours : un premier cours qui cherche à mettre en place une praxéologie géométrique sur la base des nouveaux ostensifs de Cabri-géomètre, c'est à dire un ensemble de tâches, techniques et technologies qui s'expriment avec les nouveaux ostensifs. Ce n'est qu'une fois que les enseignants se sont familiarisés avec ces nouvelles tâches, techniques et technologies, qu'ils pourront les utiliser dans leurs praxéologies didactiques, objet du deuxième cours.

- La genèse instrumentale de Cabri-géomètre comme outil de résolution de problèmes se développe nécessairement sur le long terme.

Cette hypothèse de travail détermine le choix de travailler sur le long terme, en organisant deux périodes de formation, l'une pour la partie mathématique, l'autre pour la partie didactique, chacune composée d'un cours intensif qui permet d'enclencher le processus d'instrumentation, et des périodes de pratique avec accompagnement qui permettent de suivre ce développement et d'intervenir si nécessaire.

- La caractéristique des nouveaux ostensifs de Cabri-géomètre réside dans le caractère visuel et manipulable des objets à l'écran, répondant à un contrôle théorique assuré par le système. La construction de Cabri géomètre en tant qu'instrument pour résoudre des problèmes mathématiques requiert une forte interaction entre perception et théorie. C'est cette interaction qui permet la naissance dialectique des couples d'objets ostensifs/non ostensifs.

Cette hypothèse de travail détermine le choix de privilégier cette interaction entre perception et théorie tout au long de la formation. On proposera des problèmes où les formés devront décrire les phénomènes visuels qu'ils identifient dans les figures modèles, et interpréter ces phénomènes visuels à l'aide de propriétés géométriques, afin de pouvoir les reproduire.

- Les activités productrices d'apprentissage sont celles qui permettent le travail autonome de l'élève autour de la résolution d'un problème, y compris la phase de validation.

Cette hypothèse de travail détermine le choix de développer dans la partie mathématique une démarche expérimentale dans la résolution de problèmes, dans laquelle les enseignants utilisent les outils de vérification de Cabri et le déplacement comme moyens de validation de leurs actions et leurs hypothèses. Dans la partie didactique, elle conduit au choix de sensibiliser les enseignants à l'importance de l'utilisation par les élèves du déplacement pour que ces derniers puissent entrer dans une démarche expérimentale.

Par ailleurs, nous faisons le choix d'utiliser une stratégie d'homologie complexe pour la formation, telle qu'elle est décrite par Abboud-Blanchard (1998). Cette stratégie implique l'utilisation d'une même praxéologie didactique pour la partie mathématique et pour la partie didactique, en mettant les enseignants en position d'apprenants pour la partie mathématique, pour ensuite expliciter les choix didactiques dans la partie didactique.

3.2 Choix mathématiques

3.2.1 Choix du type de problèmes

Historiquement, les praxéologies géométriques se sont organisées autour de deux grandes problématiques : la construction et la démonstration. D'après Knorr (1986), les problèmes de construction ont été le moteur de la recherche et la construction théorique de la géométrie grecque. Les grands problèmes de la géométrie grecque : la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle, sont des problèmes de construction. Les problèmes de démonstration, qui répondent à un besoin de systématisation et de rationalisation du savoir, influencés par le platonisme, ont imposé des conditions sur les instruments de construction acceptables (règle et compas), et sur les formes de formulation et de validation des connaissances (axiomes, postulats, théorèmes).

Le but général de la géométrie scolaire dans l'enseignement secondaire est l'introduction progressive à la problématique de la démonstration, comme il est explicité dans les programmes de mathématiques français pour le collège. Les problèmes de construction peuvent servir à donner du sens au savoir enseigné, et à introduire le besoin d'une organisation et d'une validation de ce savoir.

D'autre part, les outils de validation offerts par Cabri, basés sur un contrôle théorique embarqué dans le système et visible par les phénomènes visuels liés au déplacement des objets, sont des outils de validation de constructions géométriques[12].

Pour ces raisons, nous avons choisi les problèmes de construction comme le type de problèmes autour duquel construire une praxéologie géométrique qui utilise les ostensifs de Cabri pour donner du sens aux connaissances géométriques en tant que moyens de description des phénomènes visuels à l'écran, de production de ces mêmes phénomènes, et de validation des procédures de construction.

Les problèmes de construction demandent la production d'un tracé avec des contraintes données, et permettent de valider la construction par confrontation du tracé produit avec les contraintes. L'énoncé d'un problème de construction doit contenir trois informations :

- Les données : sont les objets et relations à partir desquelles il faut faire la construction
- Les buts : sont les objets et relations qui doivent être produits par le processus de construction

[12] Et non pas de validation de propositions, nécessaires pour la démonstration.

- Les instruments qui peuvent ou doivent être utilisés. Souvent cette information reste implicite, et peut être déduite du contexte institutionnel (à l'école les instruments incluent normalement la règle, le compas, l'équerre et le rapporteur). Dans le cas de cette formation, les instruments de construction seront tous ceux qui sont disponibles dans les menus de Cabri de la calculatrice TI-92 ou voyage200.

Pour résoudre ces problèmes, les sujets doivent effectuer les tâches suivantes:

- identifier clairement les données et les buts,
- trouver des relations entre données et buts, choisir celles qui permettent de construire les buts à partir des données.
- mettre en œuvre des procédures de construction qui assurent ces relations.

3.2.2 Choix des techniques

Les traités de géométrie qui traitent des problèmes de construction identifient en général trois grandes techniques (Both Carvalho, 2001) : l'analyse (et la synthèse), les transformations, et les lieux géométriques. Pour la formation, on a retenu l'analyse et les lieux géométriques ; le premier, par son caractère général de macro-technique pour la résolution de problèmes de construction, le deuxième par l'existence dans Cabri d'objets ostensifs relatifs aux lieux géométriques : la trace et le lieu[13].

Nous considérons la praxéologie de résolution de problèmes de construction comme constituée d'un seul type de tâche : la production d'une figure avec des propriétés données, une macro-technique : l'analyse, et deux techniques : les lieux géométriques et les divisions.

3.2.2.1 Technique d'analyse

Dans le livre Exercices de Géométrie de FGM (1920), nous trouvons la définition suivante d'analyse appliquée à un problème graphique:

> « **Analyse.** Pour traiter par l'analyse un problème graphique, on le suppose résolu ; puis on considère les rapports[14] entre des données et des inconnues, et l'on déduit des conséquences, jusqu'à ce qu'on arrive à des résultats connus. »

La transposition de cette technique dans la formation, peut être énoncé ainsi : Pour résoudre un problème de construction, on étudie une figure qui représente le problème résolu[15], pour y lire les relations entre données et buts, jusqu'à trouver les relations qui peuvent être construites.

Comme le dit FGM, l'analyse suppose un ensemble de 'résultats connus', c'est à dire des connaissances qui servent à identifier, décrire et produire les relations géométriques entre les données et les inconnues. On peut regrouper toutes ces connaissances en deux grandes familles : les propriétés relatives aux droites (alignement, concurrence, parallélisme, perpendicularité, angles) et les propriétés relatives aux cercles (cocyclicité, équidistance, angles). Ainsi, la règle heuristique 'voir plus de ce que l'on voit' peut se traduire par 'tracer des droites en utilisant les points de la figure, afin de reconnaître des relations qui peuvent

[13] La technique des transformations n'a pas été retenue d'une part pour sa complexité, d'autre part elle connaît une moindre importance dans les traités de géométrie mentionnés plus haut.

[14] Le mot rapport veut dire ici relation.

[15] Cette représentation peut prendre la forme d'un dessin statique ou dynamique.

servir à faire une construction', ou 'tracer des cercles avec les points de la figure afin de reconnaître des relations qui peuvent servir à faire une construction'. Ces propriétés sont supposées connues des enseignants et ne seront pas enseignées explicitement, mais pourront être rappelées le cas échéant.

3.2.2.2 Technique de division

Parmi les connaissances qu'on suppose disponibles pour les enseignants, on peut aussi distinguer toute la théorie des proportions, qui est la composante théorico-technologique d'une technique qu'on appellera la technique des divisions. Le type de tâche correspondant à cette technique est : déterminer la position d'un point sur un segment donné. La technique consiste à mesurer les distances du point aux extrémités du segment, et calculer le rapport de ces distances, pour essayer d'identifier un nombre rationnel ou irrationnel donné[16]. Puis construire le point en utilisant ce rapport.

La transposition de cette technique à la praxéologie de résolution de problèmes de construction avec Cabri peut être la suivante : Si dans une figure on doit déterminer la position d'un point, on considère le point comme appartenant à un segment dont on connaît les extrémités, et on calcule le rapport de la distance du point à une extrémité et de la longueur du segment. Si le résultat de ce calcul est un nombre rationnel ou irrationnel donné (identifiable ou constructible), on peut construire le point comme l'homothétique d'une extrémité par rapport à l'autre dans le rapport donné.

Cette technique, basée sur des connaissances théoriques déjà acquises, sera explicitée par le formateur, particulièrement l'utilisation de l'outil 'homothétie' pour la construction finale.

3.2.2.3 Technique des lieux géométriques

Dans le livre de FGM (1920) on trouve la description suivante de la technique de lieux géométriques :

> « Dans la plupart des cas, la résolution d'un problème graphique revient à déterminer la position d'un point.
>
> Or, en ne tenant pas compte d'une des données de la question proposée, on trouve une ligne contenant le point cherché ; puis, en prenant la condition négligée, mais en faisant abstraction d'une autre donnée, on obtient encore une ligne à laquelle appartient le point à déterminer ; donc l'intersection des deux lieux géométriques donne le point demandé. »
>
> « La détermination d'un point n'exige parfois que la construction d'un seul lieu ; cette circonstance se présente lorsque le point doit appartenir à une ligne donnée ».

La transposition de cette technique dans la formation doit tenir compte du fonctionnement de l'outil 'lieu' de Cabri, c'est-à-dire de la transposition informatique de la notion de lieu géométrique.

Dans Cabri, un lieu géométrique est la trajectoire d'un point A qui dépend d'un point B, lorsque ce point B parcourt un objet de Cabri (segment, droite, demi-droite, cercle, arc, polygone). On a besoin ainsi d'un point sur objet, et d'un point qui dépend de celui-ci.

La technique transposée peut être décrite ainsi :

---

[16] En comparant le développement décimale du nombre affiché avec le développement décimale des nombres connus.

- On produit une figure ajustée telle qu'en déplaçant un point P sur un objet o (droite, cercle, polygone, etc) on obtient à un moment donnée la configuration cherchée.
- On décrit cette position solution comme la position de la configuration au moment où un point Q, dépendant du point P, est sur un objet o' donné. Donc, on dessine (à l'aide de l'outil 'lieu' ou de l'outil 'trace' de Cabri) la trajectoire de ce point Q lorsque P se déplace sur o.
- Si on peut caractériser cette trajectoire comme un objet constructible par Cabri (droite, segment, cercle, etc.) on peut construire cet objet et son intersection Q' avec l'objet o'[17].
- A partir du point Q' on peut déterminer le point P', position de P correspondant à Q.

Supposons par exemple, que l'on doit construire la figure suivante, composée d'un carré ABCD et de deux losanges, CEFD, BGEC, à partir des points A et E.

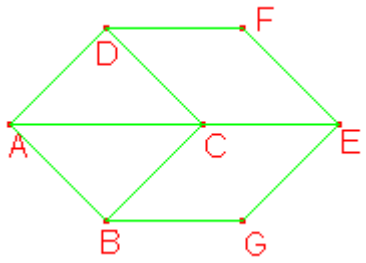


Figure 7

On peut produire une figure ajustée, en plaçant un point C sur le segment AE,

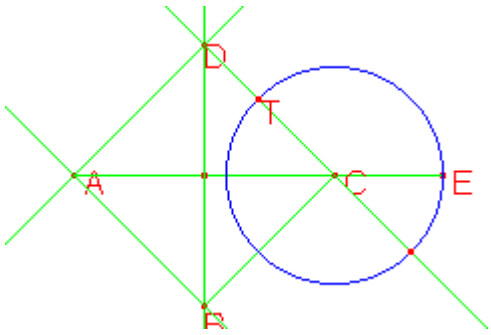


Figure 8

On obtient la solution en déplaçant C jusqu'à ce que le point T soit sur la droite AD. Le point T est l'intersection du cercle de centre C passant par E, et de la droite perpendiculaire à AD passant par C. On peut alors tracer le lieu de T quand C se déplace sur AE :

[17] La version Cabri II+ permet de construire l'intersection d'un lieu de Cabri avec un autre objet, et de raccourcir ainsi la technique, mais ce n'est pas le cas de la version pour calculatrice utilisée dans la formation.

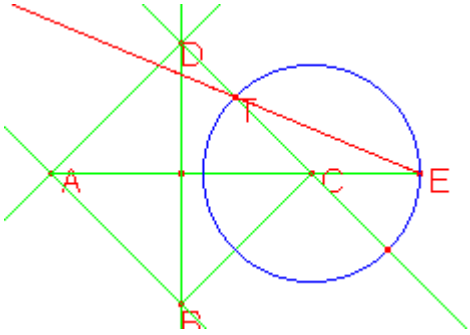


Figure 9

Ce lieu on peut le caractériser comme une droite passant par E et T. La solution est obtenu à l'intersection des droites ET et AD.

Une fois construit ce point d'intersection, il est facile de construire la position solution de C.

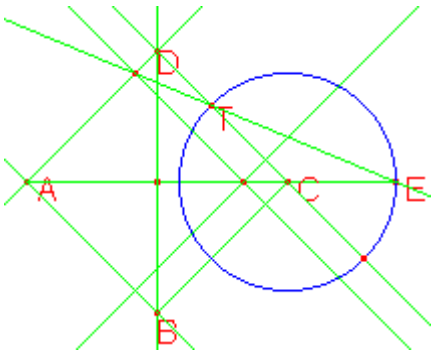


Figure 10

On voit comment cette transposition impose des conditions supplémentaires :

- La possibilité de faire une construction ajustée dans laquelle le mouvement d'un point sur objet donne la configuration cherchée.
- la nécessité de caractériser la configuration cherchée comme la position d'un point dépendant du point mobile (c'est ici qu'on va appliquer la technique décrite par FGM ; encore faut-il que le lieu trouvé soit différent de la ligne sur laquelle se déplace le point mobile)
- la nécessité d'inverser les dépendances : si on a trouvé la position solution d'un point dépendant d'un point mobile, ensuite il faut trouver la position solution du point mobile à partir de la position solution du point dépendant.

3.3 Choix didactiques:

3.3.1 Praxéologie didactique pour enseigner la géométrie en secondaire inférieur à l'aide de Cabri

Sur la base de la théorie des situations, comme nous l'avons exposée dans le cadre théorique, nous pouvons identifier trois types de tâches fondamentaux qui se posent à l'enseignant :

- l'invalidation des stratégies perceptives, basées uniquement sur des connaissances spatiales.
- l'introduction des propriétés géométriques comme connaissances qui permettent de résoudre les problèmes proposés.

- l'invalidation des constructions ajustées produit de la transposition dans Cabri des tracés sur papier avec instruments.

A ces trois types de tâche correspondent les techniques suivantes :

- déplacer ou faire déplacer les différents objets composants de la figure finale, en essayant de leur faire occuper toutes les positions possibles à l'écran. Ce déplacement produit une déformation des figures construites par ajustement, et par conséquent donne la possibilité de les invalider en utilisant des connaissances spatiales comme critères de validité.
- Présenter les propriétés géométriques comme des invariants spatiaux pendant le déplacement, résultant de l'utilisation de primitives de Cabri. De ce fait, elles servent aux élèves pour identifier et interpréter les phénomènes visuels des figures, et d'autre part elles servent à anticiper et à produire ces phénomènes visuels. Plus tard, elles pourront servir aussi à contrôler les constructions produites, et pourront devenir ainsi de nouveaux critères de validité.
- Expliciter la syntaxe des différentes primitives de Cabri, en identifiant clairement les paramètres attendus par le logiciel, et la différence entre la création explicite ou implicite de ces paramètres[18].

Nous mettons en scène ces tâches et ces techniques didactiques ainsi que la praxéologie mathématique déjà exposée, en utilisant un 'jeu générique' de construction (Brousseau, 1986):

On présente aux formés une figure dynamique dans Cabri, pour qu'ils cherchent comment elle a été construite, c'est à dire qu'ils doivent décrire cette figure (et les phénomènes visuels qui lui sont associés), et essayer de la reproduire.

S'ils utilisent uniquement des connaissances spatiales pour la description de la figure, ou s'ils transposent des procédés de tracé sur papier, ils produiront des constructions ajustées, qui pourront être invalidées par déplacement. Par contre, s'ils utilisent des relations géométriques pour décrire la figure, et ils utilisent la syntaxe correcte, ils pourront la reproduire en utilisant les primitives du logiciel et elle ne sera pas invalidée par déplacement.

Ce jeu de construction permet de mettre en scène l'invalidation par déplacement, et par conséquent la dévolution du problème aux formés, mais aussi de donner un sens aux propriétés géométriques, en reliant perception et théorie, savoir et savoir faire, application pratique et connaissance. En effet, les propriétés géométriques peuvent être présentées comme des éléments d'identification et de description de phénomènes visuels, et comme des moyens pour produire ces phénomènes.

Ce jeu met en œuvre implicitement la technique d'analyse, et il peut être étendu par la suite à tous les problèmes de construction de la géométrie, en remplaçant la figure dynamique modèle par une figure statique ou une figure ajustée qui représente la solution.

3.4 Méthodologie générale

La formation s'est déroulée pendant l'année scolaire 2005 (à Bogota).

[18] Voir 'invalidation de constructions sur papier'

Tableau 6 : planification de la formation

Janvier-Juin		Juillet-Novembre	
Partie Mathématique		Partie Didactique	
Cours présentiel	Période de pratique avec suivi à distance	Cours présentiel	Période de pratique avec suivi à distance
une semaine fin janvier	16 semaines	une semaine début juillet	6 semaines

Il est à noter que la planification originale prévoyait une période de pratique de la partie didactique de 12 semaines, nous expliquerons dans la section d'analyse les raisons pour cette modification de la planification.

3.5 Population

Pour la formation, nous avons eu recours à deux moyens de recrutement des enseignants : sur un échantillon d'écoles qui possédaient au moins 20 calculatrices avec Cabri, nous avons contacté soit la direction de l'école, qui à son tour désignait les enseignants qui devaient suivre la formation, soit un enseignant intéressé, qui à son tour faisait part à la direction de l'école de son intérêt de suivre la formation. De cette manière, nous avons recruté dix enseignants des degrés 7 à 9 (élèves entre 11 et 15 ans), travaillant dans quatre écoles différentes (dont une école privée). Les directeurs des écoles ont signé leur accord avec la formation, et se sont engagés à mettre à disposition des enseignants les calculatrices pour le travail avec les élèves. Dans trois des écoles, il y avait deux enseignants, et dans l'autre il y en avait quatre, pour assurer la possibilité d'un travail par binômes. Les enseignants étaient cinq hommes et cinq femmes, tous volontaires, intéressés par la technologie, d'expérience professionnelle et expérience d'utilisation de Cabri différents.

Tableau 7 : population

Nom (fictif)	Formation	Expérience d'enseignement	Expérience avec Cabri	Ecole
Emilia	Licenciatura[19] spécialisation[20]	Depuis 1987 18 ans	Formation avec le ministère	Instituto Técnico Industrial de Zipaquira (école professionnelle avec un enseignement de dessin technique)
Cyril	Licenciatura spécialisation	Depuis 1987 18 ans	Formation avec le Ministère	
Jorge	Licenciatura Formation continue	Depuis 1987 18 ans	aucune	Colegio Distrital Costa Rica

[19] C'est le titre universitaire requis pour exercer comme enseignant. Le cursus universitaire est de quatre ans.

[20] Etudes universitaires de deux ans, après un premier diplôme.

Hugo	Données absentes	Probablement 10 ans	aucune	
Laura	Licenciatura Formation continue	Depuis 1988 17 ans	Un petit cours	Colegio distrital General Santander
Sylvie	Lienciatura Formation continue	Depuis 1993 12 ans	aucune	
Carmen	Licenciatura Formation continue	Depuis 1965 40 ans	aucune	Colegio privado femenino Santa Clara
Ana	Licenciatura Formation continue	Depuis 1980 25 ans	aucune	
Christopher	Licenciatura	Depuis 2000 5 ans	Formation à l'université	
Loïc	Licenciatura Actuellement des études de génie civil	Depuis 2000 5 ans	Formation à l'université	

3.6 Dispositifs didactiques de la partie mathématique de la formation

Nous présentons par la suite les choix méthodologiques qui servent à opérationnaliser l'ingénierie de formation.

3.6.1 Démarche expérimentale

La démarche expérimentale en géométrie dynamique est institutionnalisée pour la formation sous forme de deux règles heuristiques : 'voir plus que ce que l'on voit', et 'douter de ce que l'on voit'. La règle 'voir plus que ce que l'on voit' demande un contrôle conscient de la perception, cherchant à échapper aux mécanismes automatiques de la vision, qui donnent à voir certains aspects de la réalité perçue et en cachent d'autres (Duval, 1994). La règle 'douter de ce que l'on voit' rappelle le caractère hypothétique de toute affirmation sur ce qui est observé, et le besoin de soumettre à l'épreuve ces hypothèses. En effet, la perception visuelle ne peut pas être prise seule comme critère de vérité, à cause du caractère ambigu de certaines représentations, et des illusions optiques qui agissent en permanence à notre insu ; mais surtout par le fait qu'une figure statique n'est pas la seule représentation d'une figure, ce qui conduit au besoin de regarder plusieurs instanciations de la même figure (en déplaçant les objets), afin de distinguer les propriétés qui sont communes à toutes les instances, de celles propres à certains cas. Ces deux règles heuristiques se traduisent en actions concrètes : 'voir plus que ce que l'on voit' demande d'enrichir le dessin, en ajoutant des objets et des

‘mesures’ composantes de la figure (diagonales, prolongement des côtés, milieux, etc.), toutes ces actions pouvant être combinées avec le déplacement ; ‘douter de ce que l’on voit’ demande d’utiliser le déplacement, les mesures et l’oracle comme outils de validation.

3.6.2 Démarche empiriste

Afin que les formés puissent expérimenter la position d’un élève avec peu de connaissances théoriques, nous les confrontons directement avec des phénomènes visuels qu’ils devront décrire et interpréter, et seulement ensuite nous expliciterons la relation entre les différents phénomènes visuels, les propriétés géométriques et les primitives de Cabri.

3.6.3 Problématisation

Suivant les idées de Bachelard sur le sens du savoir (Bachelard, 1934), nous placerons les formés face à des problèmes, et nous présenterons les nouvelles techniques comme réponse à ces problèmes ; finalement, on explicitera la syntaxe des primitives de Cabri nécessaires pour la mise en oeuvre des techniques.

3.6.4 Validation, invalidation, déplacement

Comme nous l’avons dit, nous utilisons le ‘jeu de construction’, qui demande le déplacement des objets à l’écran pour valider les constructions : toute construction est validée par déplacement. Mais on travaillera également les validations intermédiaires, statiques et dynamiques, en proposant des problèmes qui nécessitent la distinction entre construction exacte et construction ajustée.

3.6.5 Validation théorique

Nous mettons en scène également la nécessité d’une validation théorique, en proposant des constructions impossibles ou des constructions qui ne sont pas possibles dans tous les cas de figure. De cette manière, le déplacement invalide toutes les constructions, et apparaît le besoin d’une explication théorique de cette invalidation.

3.6.6 Choix de la séquence de problèmes

Nous faisons l’hypothèse que les enseignants savent identifier sur des figures les phénomènes statiques (c'est-à-dire les relations entre les composantes d’une figure). Par contre, dans leur pratique courante, ils n’ont pas été confrontés à des phénomènes dynamiques. Pour cette raison nous faisons le choix de les confronter d’abord avec les phénomènes visuels dynamiques, afin de les familiariser avec leur identification et leur interprétation mathématique.

Ensuite nous allons les confronter avec la différence entre procédures de construction ‘sur papier’ et procédures de construction dans Cabri. En même temps, nous allons travailler la démarche expérimentale et la technique de division.

Dans une troisième phase, nous travaillerons la technique de lieux géométriques, et finalement nous poserons le besoin d’un contrôle théorique des constructions

Tableau 8 : séquence de problèmes

12 problèmes	Tous visent le développement de la macro-technique d’analyse : donc, application des règles heuristiques ‘voir plus que ce que l’on voit’ et ‘douter de

	ce que l'on voit'
1 et 2	Problèmes pour l'identification des phénomènes dynamiques et leur interprétation mathématique
3-7	Problèmes pour le développement de la technique de division, la mise en échec de techniques de construction statique et le développement des techniques de construction dynamique.
8-10	Problèmes pour le développement de la technique des lieux géométriques
11 et 12	Problèmes pour poser le besoin d'une validation théorique

3.6.7 Organisation du travail

Les formés sont organisés par binômes de la même école, afin qu'ils puissent interagir même pendant la période de suivi à distance. Chaque enseignant dispose d'une calculatrice TI-92 ou TI-voyage 200, avec Cabri.

Durant le cours présentiel, ils disposent de deux heures de travail par problème, avec 10 minutes de travail individuel, 60 minutes de travail en binôme et 50 minutes de mise en commun.

Lors de la période à distance, chaque enseignant doit dédier par semaine : une heure au travail individuel, une heure au travail en binôme, et une heure de communication (rédaction et envoi d'un rapport de travail, et 'chat' pour la mise en commun)

3.6.8 Données recueillies

De la Partie Mathématique présentielle, on a enregistré en vidéo les cycles complets de résolution des 12 problèmes travaillés : travail individuel d'un membre du binôme, dialogues du binôme, et mise en commun de tous les groupes. Pour chaque problème, on a enregistré des binômes différents, pour avoir des données de tous les participants. Etant donné que nous voulions observer le développement d'une praxéologie, il était indispensable d'avoir des données sur tous les sujets de l'institution. .

De la Partie mathématique à distance, on a recueilli les rapports individuels de résolution de tous les problèmes travaillés (5 en total), les courriels échangés et les 'chats'. (seuls 3 enseignants ont envoyé régulièrement des rapports, entre 16 et 20 rapports au total)

3.7 Dispositifs didactiques de la partie didactique de la formation

L'objectif de cette deuxième partie de la formation est de mettre en place une praxéologie didactique sur la base des nouveaux ostensifs de Cabri-géomètre, en prêtant une attention spéciale au processus de genèse instrumentale de Cabri géomètre en tant qu'outil pour enseigner la géométrie. Elle comprend un cours présentiel d'une semaine et une période de pratique de six mois accompagnée à distance[21].

[21] Pour des raisons d'organisation institutionnelle des écoles, cette période s'est finalement réduite à trois mois.

Le cours présentiel comprend l'analyse didactique des activités de résolution de problèmes et des activités de classe avec Cabri réalisées pendant la première partie de la formation, afin de permettre l'identification et la caractérisation des techniques didactiques qui utilisent les nouveaux ostensifs de Cabri géomètre, et la production de scénarios d'utilisation de Cabri géomètre, afin de développer ces techniques et leurs technologies associées. On utilisera un dispositif didactique qui consiste à avoir recours à un groupe expérimental d'élèves : les enseignants doivent planifier ensemble une activité avec le formateur, qui est par la suite mise en œuvre avec le groupe expérimental d'élèves, un enseignant étant chargé du cours et les autres jouant le rôle d'observateurs ; la séance avec les élèves est suivie d'une séance d'analyse à posteriori, afin d'évaluer le déroulement de l'activité en le confrontant avec les anticipations faites.

La période pratique se propose d'installer un cycle de production-expérimentation-perfectionnement des scénarios, en utilisant deux dispositifs didactiques : des observations de classe entre collègues, et des comptes rendus d'expérimentation. Ainsi, chaque binôme doit planifier un scénario de classe en utilisant Cabri géomètre, et le mettre en pratique avec au moins deux groupes d'élèves différents, expérimentation pendant laquelle un formé a le rôle d'enseignant et l'autre d'observateur. Postérieurement, le binôme doit analyser les observations faites et les contraster avec le déroulement prévu, afin de proposer des améliorations. Les deux membres du binôme doivent rendre au formateur le scénario planifié, et le compte rendu de l'expérimentation.

3.7.1 Explicitation de la praxéologie didactique

Une partie du cours présentiel est dédiée à l'explicitation de la praxéologie didactique déjà exposée, en particulier :

- Le recours au déplacement pour invalider les constructions ajustées
- L'utilisation du 'jeu de construction' comme modèle d'activité avec Cabri
- La possibilité de présenter les propriétés géométriques comme invariants spatiaux dans les figures Cabri, comme procédures de production de ces invariants, et comme des primitives de Cabri.

3.7.2 Travail autour des phénomènes dynamiques

Comme on l'a dit dans la partie mathématique, les propriétés géométriques acquièrent une matérialité dans les ostensifs de cabri, en combinant deux types de phénomènes : la configuration spatiale et la dépendance. Par exemple, deux droites parallèles sont reconnaissables comme telles, non seulement parce qu'elles semblent ne pas se rapprocher l'une de l'autre, mais aussi parce que lors du déplacement de l'une d'entre elles, l'autre bouge aussi de manière à ce qu'elles ne se touchent jamais.

On a demandé ainsi aux enseignants de travailler de manière explicite les phénomènes de dépendance, et plus particulièrement ceux relatifs aux points : les points libres, points sur objet et points d'intersection, et ceux relatifs aux droites : droite par un point, droite par deux points, droite parallèle et droite perpendiculaire. En montrant à la fois les différents phénomènes visuels et la syntaxe de chaque primitive du système.

3.7.3 Instrumentation et instrumentalisation

On peut dire que si un élève ne peut résoudre un 'jeu de construction' avec Cabri, la raison en est:

1. Soit qu'il utilise encore des stratégies perceptives pour analyser et construire
2. Soit qu'il ne sait pas identifier, décrire ou produire une propriété géométrique donnée.

L'enseignant peut ainsi prévoir des interventions auprès des élèves pour :

1. leur demander d'utiliser les propriétés géométriques pour analyser et construire, en explicitant les propriétés en question
2. les guider dans l'identification des phénomènes visuels correspondant aux propriétés géométriques en passant d'une appréhension globale à une appréhension locale.
3. leur montrer l'existence et la syntaxe des primitives de Cabri.

De cette manière, ils accompagnent la genèse de Cabri comme instrument pour résoudre de problèmes de construction, en prêtant attention à la fois à l'instrumentalisation (identification et syntaxe des primitives) et à l'instrumentation (utilisation des primitives pour la construction).

3.7.4 Séquence proposée

Pour pouvoir mettre en œuvre le jeu de construction, il est nécessaire de suivre la séquence suivante, proposée pendant la formation, et suivie avec le groupe expérimental d'élèves :

1. *familiarisation minimale avec le dispositif*
2. *identification, interprétation mathématique et production de phénomènes dynamiques : points libres, points sur objet et points d'intersection.*
3. *travail sur des propriétés déterminées.*

3.7.5 Analyse didactique

Pour la planification et l'évaluation des activités avec les élèves (pendant le cours présentiel et la période de pratique), nous proposons d'utiliser l'analyse didactique, dans le modèle d'analyse a priori et analyse a posteriori. Concrètement, nous demandons aux enseignants d'examiner les tâches proposées aux élèves à la lumière des connaissances dont disposent ces derniers, afin de prévoir les différentes stratégies qu'ils peuvent mettre en oeuvre (anticipation du comportement des élèves), et de confronter cette anticipation avec les observations réalisés en classe.

Pour cette analyse, nous avons privilégié deux hypothèses : les élèves chercheront à produire des formes (sans utiliser des propriétés géométriques), et ils utiliseront perceptivement les primitives de Cabri.

3.7.6 Séquence travaillée pendant le cours présentiel

Tableau 9

Première séance	Familiarisation avec Cabri : tracer des points, segments, droites, cercles. Effacer, cacher/montrer, déplacer.
Deuxième séance	Identification de points libres, point sur objet et points d'intersection
Troisième séance	Boîte noire : losange construit à partir des diagonales

Quatrième séance	Boîte noire : rectangle construit sur la hauteur d'un triangle inscrit dans un demi-cercle

3.7.7 Données recueillies

De la Partie didactique présentiellle on a enregistré en vidéo les interventions de l'enseignant chargé du cours avec le groupe expérimental d'élèves, au total 4 classes.

De la Partie didactique à distance, on a recueilli les rapports de classe des formés avec leurs élèves, qui devaient inclure planification et évaluation.

Comme Observation finale, on a enregistré en vidéo une classe de chaque enseignant.

3.8 Hypothèses de recherche

Enumérons les hypothèses que nous voulons tester par l'ingénierie didactique

Hypothèse 1 : Au début de la formation, les enseignants savent identifier et interpréter géométriquement les phénomènes visuels statiques et ils ne savent ni identifier, ni interpréter géométriquement les phénomènes visuels dynamiques.

Hypothèse 2 : l'inclusion des nouveaux ostensifs de Cabri nécessite l'inclusion de nouveaux ostensifs langagiers –point libre, sur objet, etc. pour permettre le développement des nouveaux non ostensifs adéquats.

Hypothèse 3 : toute instrumentalisation déficiente (non reconnaissance des fonctions de l'outil, ou de la syntaxe), empêche une instrumentation adéquate.

Hypothèse 4 : le principe didactique de présenter d'abord le problème et le besoin de l'outil pour ensuite présenter l'outil et sa syntaxe, facilite à la fois l'instrumentation et l'instrumentalisation.

Hypothèse 5 : l'explicitation des règles heuristiques 'voir plus que ce que l'on voit' et 'douter de ce que l'on voit' contribue au développement d'une démarche expérimentale qui utilise la validation statique et dynamique en Cabri.

Hypothèse 6: l'explicitation de la validation par déplacement comme technique didactique lors de la formation, renforce son utilisation dans les interventions des enseignants auprès des élèves pour la dévolution des problèmes.

Hypothèse 7: le jeu de construction, proposé comme canevas pour des activités avec les élèves, permet aux enseignants de prendre en compte à la fois la planification de l'activité (résolution de problème, sélection de la figure modèle), l'anticipation des comportements des élèves, et l'intervention.

Les hypothèses 1 à 5 font référence à l'utilisation mathématique de Cabri, les hypothèses 6 et 7 font référence à son utilisation didactique.

4 Analyse de la partie mathématique

Rappel : la partie mathématique de la formation, organisé autour de la solution de problèmes de construction avec Cabri, suivant le modèle du 'jeu de construction', comprenait un cours présentiel d'une semaine et une période de pratique accompagnée à distance de 6 mois.

4.1 Méthode et grille d'analyse

Nous centrons l'analyse sur les différentes difficultés des enseignants dans le processus d'instrumentation et d'instrumentalisation de Cabri pour la résolution de problèmes de construction. Nous cherchons les difficultés d'instrumentalisation (non reconnaissance des primitives du logiciel, utilisation de syntaxes inappropriées pour ces primitives), d'instrumentation (utilisation de primitives non adéquates pour la réalisation de tâches de construction, présence de schèmes d'utilisation qui conduisent à des échecs), difficultés d'interprétation et de contrôle des nouveaux ostensifs, et des indices de conflits techniques ou technologiques avec des praxéologies préexistantes.

Pour l'analyse des enregistrements vidéo nous avons découpé chaque résolution de problème en épisodes de résolution (par exemple identification, interprétation d'un phénomène statique ou dynamique sur la figure modèle), et ensuite on a cherché à l'intérieur de chaque épisode des indices des difficultés déjà énumérées. Les rapports étant déjà découpés en épisodes de résolution par les enseignants, on a cherché directement les indices de difficulté ou d'écart de la praxéologie proposée.

4.2 Cours présentiel

Pour le cours présentiel, les formés étaient organisés par binômes de la même école, et disposaient chacun d'une calculatrice avec Cabri. Ils ont travaillé en total 12 problèmes, avec un temps de travail individuel, un temps de travail en binômes et une mise en commun, avec institutionnalisation de la part du formateur.

Nous avons analysé les enregistrements des douze problèmes, cherchant des indices des difficultés dans l'instrumentalisation et l'instrumentation de Cabri, et de l'influence de la formation dans la genèse instrumentale et dans le développement de la praxéologie mathématique visée par la formation. Nous présentons à continuation les analyses de 5 problèmes qui nous semblent représentatifs du travail effectué.

4.2.1 Premier problème :

Description:

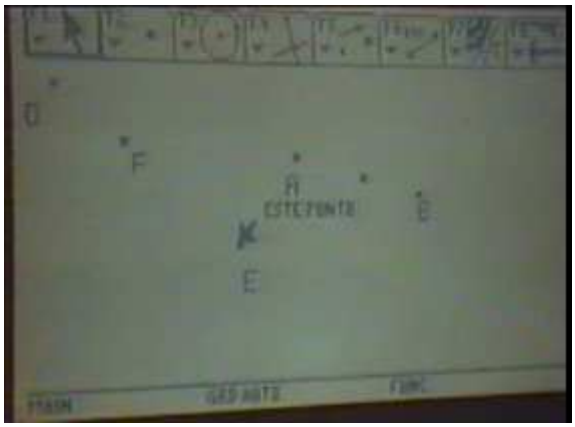


Figure 11

La figure est constitué de six points: A, B, C, D, E, F. Il n'y a pas une forme identifiable, il n'y a pas de lignes, seulement des points. C'est grâce au mouvement des points qu'on découvrira progressivement les propriétés géométriques. Ce seront surtout les phénomènes de dépendance qui seront saillants.

Volontairement cette figure ne contient pas de formes reconnaissables, afin d'empêcher la mobilisation de schèmes de reproduction d'une forme ou de techniques géométriques familières[22]. Ainsi, les sujets doivent se centrer sur les phénomènes qui apparaissent lorsqu'ils déplacent. Ce sont donc les trajectoires et les dépendances que l'on veut mettre en avant, pour poser le problème de leur interprétation mathématique et de leur reproduction. Dans la mise en commun le formateur récupérera tous les phénomènes identifiés, et montrera comment l'interprétation mathématique d'un phénomène, c'est-à-dire sa description en termes géométriques, permet sa reproduction par la mise en œuvre de cette description en utilisant les outils de construction disponibles. Les objets et relations géométriques retenus donnant lieu à phénomènes visuels sont : points libres, points sur objet, points d'intersection, et alignement.

Tableau 10

Phénomène visuel		Interprétation mathématique
Déplacements conjoints	Si je déplace A, aucun autre point ne bouge	Aucun point ne dépend de A
	Si je déplace B, A et D bougent.	A et D dépendent de B
	Si je déplace C, A, D et F bougent	A, D et F dépendent de C
	D ne se laisse pas déplacer directement	D est un point d'intersection[23]
	Si je déplace E, F et D bougent	F et D dépendent de E
	Si je déplace F, D bouge	D dépend de F
Déplacements individuels	Je peux déplacer A directement, mais je ne peux pas l'amener à n'importe quelle place de l'écran	A appartient à un sous-ensemble du plan. A n'est pas un point quelconque
	Je peux déplacer B directement à n'importe quelle place de l'écran	B est un point quelconque du plan (il ne dépend pas d'un autre objet)
	Je peux déplacer C directement à n'importe quelle place de l'écran	C est un point quelconque du plan (il ne dépend pas d'un autre objet)
	D ne se laisse pas déplacer directement	D est un point d'intersection
	Je peux déplacer E directement à n'importe quelle place de l'écran.	E est un point quelconque du plan (il ne dépend pas d'un autre objet)
	Je peux déplacer F directement, mais je ne peux pas l'amener à n'importe quelle place de l'écran	F n'est pas un point quelconque, il appartient à un sous-ensemble du plan
Configurations	A, B, C et D sont alignés	A, B, C et D sont alignés
	E, F, D sont alignés	E, F, D sont alignés

[22] Comme par exemple des procédures de construction avec règle, équerre et compas.

[23] Point d'intersection dans le sens géométrique, et non pas dans le sens d'outil de Cabri. En effet, plusieurs outils de Cabri produisent des points qui ne se laissent pas déplacer directement (milieu, symétrie, etc.). Mais tous ces outils peuvent se réduire à des combinaisons d'objets et de points d'intersection.

	D est sur deux lignes droites	D est le point d'intersection des deux droites.
Trajectoires	A bouge en ligne droite, et passe sur B et C	A appartient à la droite BC
	F tourne autour de E, la distance de F à E est constante et F passe sur C	F appartient au cercle de centre E et rayon EC.

Pour produire une figure dynamique qui réponde à ces spécifications, il est indispensable d'identifier les données du problème. Dans le cas d'une figure dynamique, cela implique qu'il faut analyser les dépendances entre les points pour trouver ceux qui ne dépendent pas des autres. La dépendance détermine un ordre de construction (par exemple, si le point A dépend du point B, on doit le construire après le point B).

Il existe deux stratégies possibles pour analyser les dépendances : utiliser les déplacements conjoints, ou utiliser les déplacements individuels.

> Si l'on utilise les déplacements conjoints, il faut procéder par élimination : si toutes les dépendances sont : A dépend de B et C, F dépend de C et E, D dépend de B, C, E et F, alors B, C, E ne dépendent d'aucun point.
>
> Si l'on utilise les déplacements individuels, on peut dire que les points qui peuvent être déplacés directement à n'importe quelle place sur l'écran ne subissent aucune contrainte, et ils sont indépendants de tous les autres ; donc, les points B, C et E sont les données. Etant la plus simple, c'est cette stratégie qui sera institutionnalisée.

Une fois qu'on a identifié les données, on peut utiliser d'autres relations pour reproduire les autres phénomènes : le point A est sur la droite BC, le point F est sur le cercle de centre E et rayon EC, le point D est l'intersection des droites EF et BC. Les points A, F et D constituent donc les buts du problème.

Les outils *point, droite par deux points, cercle, point sur objet et point d'intersection* permettent de reproduire la figure comme suit :

1. Trois points quelconques : B, C, E (*Point*)
2. la droite BC (*Droite par deux points*)
3. Un point sur objet (A) sur la droite BC (*point sur objet*)
4. un cercle de centre E passant par C (*cercle*)
5. un point sur objet (F) sur ce cercle (*point sur objet*)
6. la droite EF (*droite par deux points*)
7. le point d'intersection (D) des droites EF et BC (*point d'intersection*).

Analyse du travail individuel et du binôme conformé par Laura et Sylvie:

Dans ce tableau nous montrons quels sont les phénomènes visuels repérés par le binôme, leur interprétation (reconstruite grâce aux échanges verbaux des deux membres du binôme) et la construction faite.

Tableau 11

Phénomène visuel		Interprétation	Construction

			faite	
Déplacements conjoints	Si je déplace A, aucun autre point ne bouge	X		
	Si je déplace B, A et D bougent.	X	Les points sont unis par des tiges rigides [incorrecte]	Utilisation de *segment* comme tige rigide (par exemple, le segment AB pour obtenir le mouvement de A lorsque B bouge)
	Si je déplace C, A, D et F bougent	X		
	Si je déplace E, F et D bougent	X		
	Si je déplace F, D bouge	X		
	D ne se laisse pas déplacer directement	X	D est l'origine d'une droite [incorrecte]	Utilisation de *droite par point et direction*
Déplacements individuels	Je peux déplacer A directement, mais je ne peux pas l'emmener à n'importe quelle place de l'écran			
	Je peux déplacer B directement à n'importe quelle place de l'écran			
	Je peux déplacer C directement à n'importe quelle place de l'écran			
	Je peux déplacer E directement à n'importe quelle place de l'écran.			
	Je peux déplacer F directement, mais je ne peux pas l'emmener à n'importe quelle place de l'écran			
configurations	A, B, C et D sont alignés	X	Ils sont sur une même droite	Utilisation de *droite par point et direction,* et *point sur objet*
	E, F, D sont alignés	X		
	D est sur deux lignes droites	X	D est le point qui ne bouge pas quand la droite bouge [incorrecte]	Utilisation de *droite par point et direction.*
			D est point d'intersection	Utilisation de *point d'intersection*
Trajectoires	A bouge en ligne droite, et passe sur B et C	X	A est sur la même droite que B et C	Utilisation de *point sur objet*
	F tourne autour de E, la distance de F à E est constante et F passe sur C			

Résumé : Laura (comme presque tous les autres), a été accaparée par les phénomènes de déplacement conjoint, mais elle n'a pas su les interpréter mathématiquement ; elle a fait recours à d'autres cadres pour les interpréter. Elle n'a pas remarqué les phénomènes de déplacement individuel, ni la trajectoire circulaire du point F, peut être dû au fait qu'elle effectue des déplacements très courts, regardant l'effet sur les autres points. Elle a interprété mathématiquement l'alignement et l'intersection, qui sont des phénomènes statiques courants.

4.2.1.1 Interprétation mathématique correcte de l'alignement, technique de construction statique

Le seul phénomène que Laura a interprété mathématiquement est l'alignement de points. Elle tente de réaliser une expérience de vérification de cette hypothèse en traçant une droite par trois points. Mais elle fait une utilisation perceptive de l'outil droite : sélectionne droite, fait clic sur un des points (apparaît une droite), et modifie la direction pour qu'elle passe sur les autres deux points. Cette construction perceptive est invalidée par le déplacement des points, puisque la droite garde la direction définie, et les points sortent de la droite. Lorsqu'elle fait sa construction, elle crée une droite et met les trois points sur la droite, ce qui assure qu'ils seront alignés, mais ne produit pas les mêmes mouvements que dans la figure modèle. Elle ne développe donc pas la technique de construction d'une droite passant par deux points, malgré avoir suivi auparavant d'autres formations à Cabri .

L'invalidation par déplacement de la construction ajustée d'une droite aurait pu être interprétée comme invalidation de l'hypothèse (les trois points sont alignés), mais on peut constater dans la suite qu'elle ne renonce pas à cette hypothèse, mais tente d'autres vérifications (en utilisant segment, par exemple).

L'invalidation de sa construction de l'alignement montre la complexité de la géométrie dynamique, par rapport à la géométrie statique. Laura sait produire le phénomène d'alignement de trois points, mais elle ne sait pas reproduire les phénomènes de dépendance, qui sont absents des représentations statiques.

Les phénomènes visuels liés au déplacement, c'est-à-dire les phénomènes dynamiques, permettent de distinguer même l'orientation des objets : en géométrie dynamique, la droite AB et la droite BA ne sont pas équivalentes, et il est possible de les distinguer en regardant les intersections avec un cercle. Comme on le verra par la suite, ce niveau de complexité plus élevé requiert de nouvelles connaissances théoriques pour pouvoir décrire, anticiper et expliquer les différents phénomènes visuels. On peut dire que le dynamisme introduit une nouvelle dimension dans la géométrie, et cette dimension implique une multiplication des cas possibles pour les relations entre objets géométriques. Sur un tracé statique, les relations sont toujours symétriques : en regardant un dessin on peut dire 'c'est un point sur une droite' ou 'c'est une droite passant par un point' ; ces deux énoncés sont équivalents, et il est impossible de les distinguer. Par contre, sur un tracé dynamique, le mouvement de la droite et du point permettent de les distinguer clairement : s'il s'agit d'un point sur une droite, alors le point ne pourra pas être déplacé directement à n'importe quel endroit de l'écran, et il changera de position si l'on déplace la droite ; s'il s'agit d'une droite passant par un point, on pourra déplacer librement le point, et c'est la droite qui suivra ce mouvement.

4.2.1.2 Interprétation non mathématique du phénomène de déplacement conjoint, et de l'outil segment.

Le phénomène qui capte le plus l'attention de Laura est le mouvement conjoint. Le fait que lorsqu'elle déplace un point, un autre point bouge. Mais elle ne parvient pas à l'interpréter mathématiquement. Par exemple, si on considère que le point D est intersection des droites BC et EF, alors le mouvement de B, C, E ou F entraîne nécessairement le mouvement de D. Comme elle ne subordonne pas la dépendance à une relation d'appartenance, elle cherche une fonction du logiciel qui pourrait avoir l'effet observé. C'est pourquoi elle fait l'hypothèse que l'outil segment peut lier deux points à la manière d'une tige rigide.

> L: « C ne bouge pas du tout, n'est-ce pas? Je dois réussir à ce que C fasse bouger les points A, F et D. »
>
> L: « bien sûr, car quand je bouge C, A doit bouger… alors *je dois faire un segment* pour que quand je bouge C, A bouge, et B bouge sur cette ligne droite. »
>
> L: « je dois … quand je construis un segment de A à C, lorsque je bouge C, A bouge; n'est-ce pas? »

Naturellement, le déplacement des points A et C invalide son hypothèse, ce qui provoque en elle un conflit cognitif, et l'abandon du problème.

4.2.1.3 Interprétation non mathématique du phénomène, interprétation mathématique après coup

Le phénomène du point D, qui ne se laisse pas déplacer directement, est aussi un phénomène qui n'est pas interprété mathématiquement et qu'elle cherche à reproduire avec une fonction du logiciel :

> …mais D est un point fixe dedans (sic) la droite... c'est à dire que *D tu sais quel point c'est? Le point que lorsque l'on construit cette droite il reste là, et il ne bouge même pas par erreur.*
>
> L: je dois faire un point. Je vais lui dire que par ce point là passe une droite. T'as vu que D ne bouge vers aucun côté?
>
> L: comme cela. Tu vois? Alors c'est ce que je vais construire là. A bouge fixement. D est un point qui ne bouge pas. Pour cela je l'ai mis... *ce point D qui ne bouge pas je l'ai mis comme origine de la droite. Si tu veux le bouger il ne bougera pas...regarde voir que même si tu veux...*
>
> [elle bouge la droite]
>
> ... ah.. il bouge

A nouveau, la rétroaction du système invalide cette hypothèse. Mais alors qu'elle cherche dans les menus de Cabri une autre option qui pourrait lui convenir, elle découvre 'point d'intersection', et se rend compte qu'elle peut interpréter mathématiquement le phénomène comme un point d'intersection :

L: *ah! point d'intersection ! D est un point d'intersection entre ACD et DEF*.

L: tout au moins, c’est comme cela que nous avons les deux.... je vais mettre un autre point... F... maintenant je vais la couper avec cette droite... et les lier avec point d'intersection

Mise en commun et institutionnalisation

Comme prévu, le problème a bien fait apparaître les phénomènes dynamiques et le problème de leur interprétation mathématique.

Tableau 12

Phénomène visuel	Repéré	Interprété mathématiquement	Construit correctement
Déplacement conjoint	4 binômes		
Déplacement individuel	1 binôme	1 binôme	1 binôme
A bouge en ligne droite sur B et C	5 binômes	5 binômes	5 binômes
D est intersection de deux droites	5 binômes	5 binômes	5 binômes
F tourne autour de E	2 binômes	1 binôme	1 binôme

Quatre binômes ont repéré les phénomènes de déplacement conjoint, un seul binôme a repéré les phénomènes de déplacement individuel, et c'est le seul binôme qui effectue la reconstruction complète.

Tous les binômes ont repéré les phénomènes d'alignement.

Tous les binômes ont repéré, interprété et reconstruit le phénomène A est point de la droite BC.

Tous les binômes ont interprété D comme point d'intersection de deux droites.

Seul un binôme a repéré le déplacement circulaire de F

Dans la mise en commun un groupe a réussi la reproduction complète, permettant de montrer comment la relation entre phénomènes observés et propriétés géométriques est la clé de la résolution, exemplifiant la pertinence de la stratégie de reconnaissance des dépendances par le déplacement individuel. L'institutionnalisation a porté sur les trois types de points de Cabri, et leur interprétation géométrique ; l'institutionnalisation met en évidence la relation entre l'interprétation mathématique des phénomènes observés et l'interprétation mathématique des outils de construction de Cabri. On verra que par la suite les phénomènes de dépendance seront interprétés par le déplacement individuel et non pas par le déplacement conjoint, montrant que cette première situation aura été source d'apprentissage.

.

4.2.2 Problème 3:

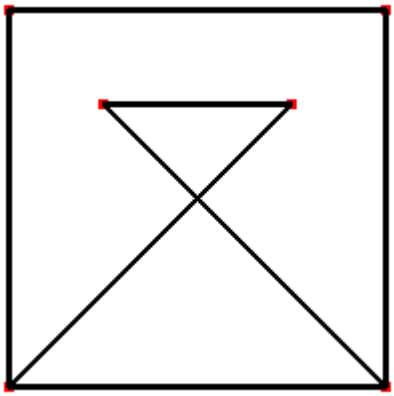


Figure 12

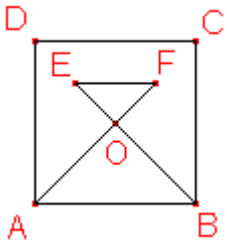
Description:

Un carré avec deux triangles rectangles isocèles à l'intérieur. La forme est saillante, elle n'appelle pas à déplacer. De plus, tous les cas de figure sont semblables entre eux. Une fois les données identifiées, on pourrait le traiter comme un problème statique. Correspondant à un type de tâche proposée sur papier, ce genre de problème est plus familier. Les techniques mobilisées habituellement en papier crayon (reconnaissance de formes) permettront de faire une description correcte de la figure. Par contre, les techniques de construction mobilisées, bien que permettant une construction statique correcte, seront invalidées par le déplacement.

A la différence des problèmes 1 et 2, pour lesquels le dynamisme était un facteur essentiel, ici la forme est saillante, et suscite la mobilisation des techniques mathématiques familières. Ces techniques de reconnaissance de relations dans un dessin et de production de tracés à l'aide d'instruments, vont s'avérer inadéquates dans le dispositif dynamique. La construction dynamique acquiert ainsi un sens mathématique nouveau : il ne suffit pas de produire une image adéquate, il faut que tous les cas de figure répondent à la description faite, et pour ce faire il est nécessaire de mettre en œuvre une propriété géométrique par l'intermédiaire des outils de construction dynamique. Egalement, il ne suffit pas de lire une propriété sur un dessin, il est nécessaire de valider cette hypothèse en déplaçant, en mesurant, en demandant à l'oracle une confirmation.

C'est le premier d'une série de problèmes qui requièrent tous la construction d'un carré. On prévoit donc une appropriation graduelle des techniques nécessaires pour construire un carré à partir d'un côté.

Tableau 13 : Phénomènes identifiables (le tableau présente directement les interprétations possibles)

Dépendances	Formes:	Configurations (relations):
 • Les points A et B sont libres • Les points D, C, E, F sont dépendants.	• il y a un carré (ABCD) • il y a deux triangles rectangles isocèles semblables, opposés par le sommet (EFO et ABO) • quand on passe le curseur sur le carré, Cabri écrit 'ce polygone'. • Quand on passe le curseur sur les triangles, Cabri écrit 'ce polygone'	• les segments (EB et AF) qui forment les angles opposés des triangles font partie des diagonales du carré • le troisième segment (EF) qui n'est pas côté du carré est parallèle à un côté du carré • le sommet commun des deux triangles (O) est le centre du carré (intersection des diagonales) • les extrêmes des segments diagonales (E et F) sont milieux du centre du carré (O) et des sommets (C et D).

Ce problème requiert la construction de quatre points (E, F, D, C) à partir des points donnés (A, B), de manière à former le carré ABCD et les triangles AOB et EOF. On fait l'hypothèse que pour la construction de ces points, une stratégie probable sera l'ajustement perceptif : construire des points quelconques (points libres) et les déplacer jusqu'à obtenir la configuration cherchée. Cette stratégie peut être invalidée facilement par déplacement. Mais elle peut intervenir pour n'importe lequel des points à construire. On peu s'attendre à une construction géométrique des points C et D, par exemple, et une construction par ajustement des points E et F. Il faut remarquer que si ces points E et F sont construits comme point sur objet des segments AC et BD, le déplacement des points donnés A et B n'invalidera pas la construction ; toutefois, cette construction pourra être invalidée en déplaçant directement les points E et F.

On fait aussi l'hypothèse que les formés mobiliseront des techniques de construction sur papier avec instruments de tracé (règle, équerre, compas). Ces techniques utilisent l'ajustement perceptif pour contrôler la position des instruments et la précision du tracé. Elles seront invalidées par déplacement.

Finalement, on peut signaler deux stratégies globales de construction :

1. A partir des points donnés A, B construire le triangle isocèle ABO rectangle en O, et l'utiliser pour construire le carré ABCD et le triangle OFE
2. A partir des points donnés A, B construire le carré ABCD et l'utiliser pour construire les segments AF, FE, BE.

C’est la deuxième stratégie la plus probable, étant donné que le carré est le contour qui englobe toute la configuration, et il sera identifié comme figure de base pour la construction (Duval, 1994).

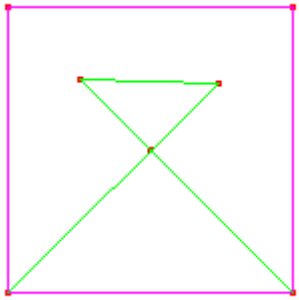
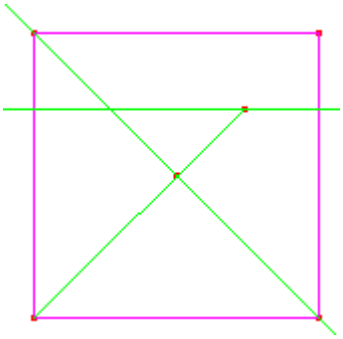
Le but de ce problème est double : d’une part l’invalidation de l’ajustement perceptif, qu’il soit utilisé directement ou associé à une technique de construction sur papier. D’autre part, l’identification des outils de construction de Cabri comme outils qui produisent des propriétés géométriques invariantes pendant le déplacement. Ainsi, la construction du carré requiert l’utilisation de l’outil *droite perpendiculaire* pour la production d’angles droits, et de l’outil *cercle* pour construire des segments égaux, que l’on peut supposer moins spontané à mettre en œuvre (Laborde, Straesser, 1990); également, l’outil *milieu* permet d’obtenir le milieu d’un segment ou de deux points.

Dans la phase de travail par binômes, le formateur rappellera, si nécessaire, le besoin de déplacer les points pour vérifier. Dans la phase de mise en commun il demandera de vérifier les constructions en déplaçant les points, ou il déplacera les points pour vérifier. Dans la phase d’institutionnalisation le formateur explicitera d’une part l’échec de l’ajustement perceptif pour les figures dynamiques, et d’autre part la relation entre outils de construction de Cabri et propriétés géométriques dynamiques.

Analyse du travail individuel et du binôme conformé par Carmen et Ana :

Tableau 14

Phénomène identifié		construction
• Il y a deux points libres	X	
• il y a quatre points dépendants	X	
• il y a un carré	X	avec polygone régulier, mais alors il a quatre points libres.
		Construction statique du carré avec deux diamètres perpendiculaires d’un cercle, invalidé par le déplacement
il y a deux triangles rectangles isocèles semblables, opposés par le sommet	X	
• les segments qui forment les angles opposés des triangles font partie des diagonales du carré	X	(ayant construit le carré comme polygone régulier, donc elles ont le centre), construisent un segment d’un sommet à un point libre placé au jugé, en le plaçant de telle manière que le segment passe par le centre, et qu’il soit les trois quarts de la diagonale.
• le troisième segment qui n'est pas côté du carré est parallèle à un côté du carré	X	Ensuite elles construisent un autre segment de la même manière à partir de l’autre sommet, mais constatent alors que le segment entre les deux

• le sommet commun des deux triangles est le centre du carré (intersection des diagonales)	X	extrémités n'est pas parallèle au côté du carré.  Alors elles effacent le deuxième segment, tracent une droite par un sommet et elles ajustent la direction pour qu'elle passe par le centre, et construisent une droite parallèle au côté du carré par l'extrémité du premier segment construit.  Elles se demandent comment effacer les morceaux de droite qui ne forment pas partie de la figure.
• les segments diagonales sont trois quarts des diagonales du carré.	X	

Resumé : Carmen et Ana ont décrit géométriquement la figure, et ont vérifié les dépendances des points. Elles ont construit un carré avec 'polygone régulier', mais il a quatre points libres, et le modèle n'en a que deux. Elles ont commencé une construction du carré en transposant dans Cabri des tracés sur papier, mais le déplacement l'a invalidé. Par suggestion du formateur, elles ont continué la construction sur le carré construit avec polygone régulier, et là à nouveau elles ont transposé des tracés sur papier (ajustés), qui ont été invalidés lors de la mise en commun.

4.2.2.1 Episodes de validation :

On trouve trois épisodes principaux de validation. Le premier, c'est la validation par déplacement du carré construit avec l'outil *polygone régulier* ; Carmen déplace systématiquement tous les sommets du carré, et constate qu'ils sont tous libres, alors qu'elle doit produire un carré avec deux sommets consécutifs libres, et les autres deux dépendants. Elle abandonne alors cette stratégie, et commence une construction géométrique d'un carré.

Le deuxième épisode de validation est la vérification par déplacement de la construction statique du carré : elle a construit un carré à partir de deux diagonales perpendiculaires, mais en utilisant une construction perceptive. Alors, la figure perd sa forme de carré lors du déplacement d'un sommet. Elle abandonne alors cette stratégie, et revient sur le polygone régulier pour essayer de 'fixer' deux des sommets.

Le troisième épisode de validation n'utilise pas le déplacement, mais c'est une invalidation perceptive d'une construction ajustée. Elles ont décidé d'utiliser le carré produit par polygone régulier, et veulent tracer les segments intérieurs au carré. Elles tracent alors un segment à partir d'un sommet du carré, et qui apparemment passe par le centre du carré jusqu'au milieu (estimé) entre le centre et l'autre sommet du carré. Ensuite elles répètent cette construction pour un autre sommet du carré, et tracent finalement le segment entre les deux points ajustés. C'est à ce moment qu'elles constatent que ce segment n'est pas parallèle au côté du carré, fait qu'elles interprètent comme une erreur de précision du dessin, et essayent de le corriger d'abord en déplaçant un des points ajustés, puis en construisant une parallèle au côté du carré.

On voit comment le déplacement a été acquis comme moyen de validation de certaines propriétés (spécifiquement celles liées au mouvement), mais il n'est pas utilisé pour vérifier l'invariance des propriétés, qui ont été d'ailleurs produites avec des techniques valables sur papier. On fait l'hypothèse que lors du deuxième épisode de validation, Carmen voulait vérifier le déplacement des sommets, et non l'invariance des angles et l'égalité des côtés. L'invalidation de ces propriétés était plutôt accidentelle, et probablement elle n'a pas été interprétée par Carmen comme invalidation de sa stratégie, mais comme erreur de procédure ; c'est-à-dire, l'invalidation n'a pas été interprété comme 'Pour construire un carré je ne peux pas partir de deux diamètres perpendiculaires d'un cercle', mais comme 'je ne sais pas comment faire pour que les sommets du carré ne se déplacent pas de cette manière'.

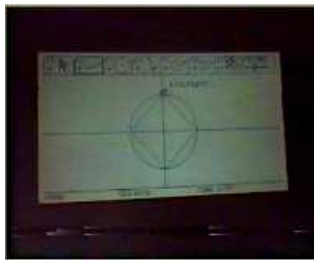
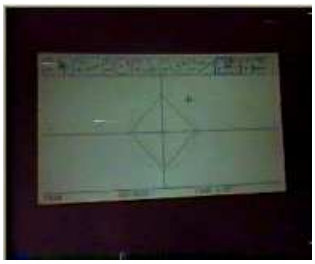
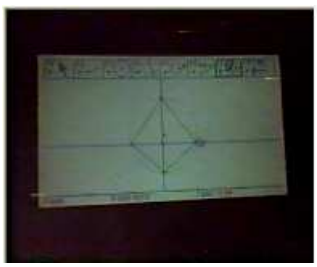
Les critères de validité utilisés dans la construction sont perceptifs ; les 'formes' que l'on peut identifier par simple observation (il n'y a d'utilisation ni de mesures, ni de l'oracle).

4.2.2.2 Interprétation mathématique des phénomènes, techniques de construction statique

A la différence du problème Points, ici de nombreux phénomènes observables sont directement interprétables mathématiquement. Ainsi, Carmen identifie immédiatement un carré et essaye d'utiliser des techniques de construction sur papier pour le produire. Mais ces techniques statiques reposant sur des ajustements perceptifs sont invalidées par déplacement.

Tableau 15

Elle trace un cercle, et un point sur le cercle.	
Une droite qui passe par ce point et (perceptivement) par le centre du cercle	 

Puis une droite perpendiculaire à cette droite par un point sur la droite, qu'elle déplace pour le faire coïncider avec le centre du cercle	 
Ensuite elle trace des segments entre les points d'intersection des deux droites et le cercle	    
Elle cache le cercle et les droites	
Finalement elle déplace le point qui est sur le cercle, et constate que la figure se déforme. Elle abandonne cette construction invalidée par le déplacement	

4.2.2.3 Les phénomènes évidents ne sont contrôlés ni à la lecture, ni à la construction

Certaines propriétés lues dans le dessin ne sont pas mises en doute, elles sont construites perceptivement, et ne sont pas vérifiées. C'est ce qui se passe avec le segment contenu dans la diagonale du carré. Elles font l'hypothèse qu'il constitue les « trois quarts de la diagonale », mais ne le vérifient pas. Lorsqu'elles le construisent, elles placent un point à l'œil entre le centre du carré et l'un des sommets supérieurs en contrôlant que le segment passe sur le centre du carré. Puis elles essayent de construire l'autre point également à l'œil, mais alors le segment qui joint les deux points n'apparaît pas parallèle au côté horizontal du carré. C'est pourquoi elles décident de tracer une parallèle au côté par le point au jugé, et de construire l'intersection avec l'autre diagonale (elle aussi construite par ajustement). C'est cette construction qu'elles présentent comme solution lors de la mise en commun. Le formateur demande de déplacer les points du carré, et la figure se déforme, à la surprise des deux dames.

Mise en commun :

En plus du binôme analysé, deux autres binômes ont présenté leur travail lors de la mise en commun.

Deux binômes ont construit les diagonales sur la figure originale, pour vérifier que les extrémités des segments intérieurs faisaient bien partie des diagonales. Un binôme a mesuré l'aire du carré et celle du polygone intérieur, et ont calculé leur rapport, constatant que ce rapport est constant pendant le déplacement. Egalement, ils ont calculé le rapport entre le côté du carré et le segment intérieur parallèle, et ont obtenu 2.

Un seul binôme a vérifié la perpendicularité des côtés. Deux binômes ont vérifié l'égalité des côtés du carré. Un binôme a utilisé l'oracle pour vérifier si les extrémités des segments intérieurs étaient sur les diagonales.

On voit ainsi une vérification systématique de toutes les propriétés lues sur la figure, vérification au moyen du déplacement, des mesures, et de l'oracle. Les critères de validité utilisés pour la validation ne sont pas que perceptifs, mais incluent des connaissances théoriques (un carré n'est pas qu'une forme, c'est un quadrilatère avec des propriétés comme la perpendicularité des côtés adjacents, l'égalité de ses côtés)

Deux binômes ont essayé de construire le carré avec polygone régulier, mais se sont aperçu que la figure n'était pas la même, à cause du mouvement des points ; alors ils ont cherché à fixer deux des sommets en utilisant l'outil *Point d'intersection*. Ces mêmes binômes ont présenté des constructions statiques de carrés, en les inscrivant dans un cercle. Dans les deux cas, le formateur a demandé de déplacer les points pour valider la construction, qui s'est déformée pour la surprise des sujets.

Le troisième binôme a présenté une construction correcte du carré à partir du côté, et a utilisé l'outil milieu entre le centre du carré et les sommets pour produire les extrémités des segments intérieurs au carré.

Conclusion

On voit comment ce problème a mobilisé des techniques de reconnaissance et de construction qui sont naturalisées dans le dispositif de papier/crayon et instruments de tracé. Lors de la mise en commun a été mise en évidence la nécessité de changer ces techniques dans le dispositif Cabri, en explicitant les points par lesquels passent les différents objets, et mettant en relation les propriétés des objets et les outils de construction. Ainsi, lors de la construction du carré, on utilise l'outil *droite perpendiculaire* pour obtenir des angles droits, et l'outil

cercle pour assurer l'égalité des côtés. Le formateur a socialisé l'outil *milieu* pour produire le milieu de deux points, et l'utilisation de l'oracle comme outil de vérification.

4.2.3 Problème 7

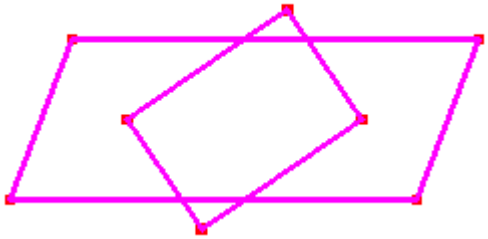


Figure 13

Ce problème propose à nouveau une figure dynamique à reproduire. Dans cette figure, il y a deux formes saillantes : un parallélogramme et un rectangle. Mais à la différence des problèmes antérieurs, les relations géométriques entre ces deux composantes de la figure ne sont pas repérables directement. Seul l'enrichissement de la figure, en traçant des droites auxiliaires permet d'identifier ces relations.

L'analyse de dépendances donne trois points libres, qui sont sommets du parallélogramme. Le parallélogramme ne conserve pas de proportion entre ses côtés, et peut être dégénéré en mettant ses sommets alignés. Le rectangle conserve sa forme, mais il n'a pas de proportions constantes non plus.

Tableau 16

Phénomènes observables	Interprétation mathématique	Utilisation pour la construction
Deux polygones : un parallélogramme et un rectangle		
Trois sommets du parallélogramme sont libres	Les données sont trois points quelconques qui déterminent le parallélogramme	On commence par ces trois points, et l'on produit le parallélogramme à partir d'eux.
5 points dépendants	Les autres 5 points sont les buts du problème	Ces 5 points doivent être construits avec *Point d'intersection*
Les diagonales des deux polygones sont concourantes		Avec les diagonales du parallélogramme, on peut déterminer le centre du rectangle
Les diagonales du rectangle passent par les milieux des côtés du parallélogramme		Avec les milieux des côtés du parallélogramme, on

		peut construire les diagonales du rectangle
Lorsque le parallélogramme devient losange, le rectangle devient un point	Si les côtés du parallélogramme sont égaux, les diagonales du rectangle deviennent de longueur 0	Les diagonales du rectangle pourraient être la différence des côtés du parallélogramme
Lorsque le parallélogramme devient rectangle, le rectangle devient carré	Lorsque les angles du parallélogramme sont droits, les diagonales du rectangle sont perpendiculaires	
Lorsque le parallélogramme est aplati, le rectangle disparaît.		
Quand un côté du parallélogramme est le double de l'autre, deux sommets opposés du rectangle sont sur les milieux de deux côtés du parallélogramme.	A ce moment-là, les diagonales du rectangle sont de longueur le côté plus petit du parallélogramme	Les diagonales du rectangle sont la différence des côtés du parallélogramme. Pourquoi en est on sûr ?

L'analyse par enrichissement de la figure peut mettre en évidence des relations constantes qui sont utilisables pour la reconstruction. On va montrer deux stratégies possibles.

Première stratégie :

On trace les droites diagonales des deux quadrilatères. On constate qu'ils ont le même centre, et que les diagonales du rectangle passent par les milieux des côtés du parallélogramme. Etant donné qu'un rectangle est inscriptible, il reste à déterminer le diamètre du cercle circonscrit pour pouvoir faire la construction.

Or, quand le parallélogramme devient losange, le rectangle se réduit à un point. Donc, lorsque les côtés du parallélogramme sont égaux, le diamètre est 0. Et lorsque le rapport entre les côtés du parallélogramme est 2, deux des sommets du rectangle sont les milieux des côtés du parallélogramme, et le diamètre est égal au côté le plus petit. Ce qui permet d'inférer que le diamètre est la différence des deux côtés du parallélogramme.

Deuxième stratégie :

On prolonge les côtés du rectangle, et on constate qu'ils passent par les sommets du parallélogramme, et correspondent aux bissectrices. Cette stratégie est moins probable, étant donné que l'alignement des points est peu perceptible.

Par contre, lors du déplacement, les sommets rectangle passent par les milieux des côtés du parallélogramme, et donc c'est plus probable que les formés s'engageront dans la première stratégie, même si elle est plus complexe, et qu'ils n'arriveront pas jusqu'au bout.

Analyse du travail du binôme conformé par Laura et Sylvie

Tableau 17

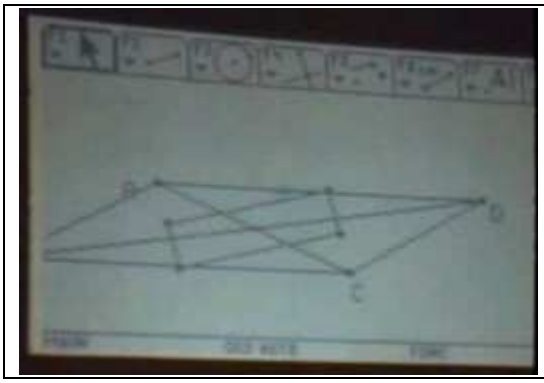
Phénomènes visuels identifiés		construction
Trois points se déplacent directement	X	Pas faite
Cinq points dépendants	X	Pas faite
Les trois points libres sont sommets d'un parallélogramme	X	Pas faite
Quatre des points dépendants forment un rectangle	X	Pas faite
Les diagonales des deux quadrilatères sont concourantes	X	Pas faite
Les diagonales du rectangle coupent les côtés du parallélogramme en leurs milieux	--	Pas faite
Les côtés du rectangle prolongés passent par les sommets du parallélogramme	--	Pas faite
Les droites côtés du rectangle sont bissectrices des angles du parallélogramme	--	Pas faite
Lorsque le parallélogramme est losange, le rectangle devient un point	X	Pas faite
Lorsque le parallélogramme est rectangle, le rectangle devient carré	X	Pas faite
Lorsque le parallélogramme est aplati, le rectangle disparaît.	X	Pas faite
Lorsqu'un sommet du rectangle est sur un côté du parallélogramme, il est milieu de ce côté	X	Pas faite

Resumé : elles ont tracé les diagonales comme segments et non pas comme droites, ce qui les empêche de trouver certaines propriétés de la figure. Elles utilisent des marques de langage pour distinguer les propriétés sur des figures ajustées. Sylvie est accaparé par le phénomène de disparition d'un point d'intersection, et à différence de Laura, elle n'accepte pas l'interprétation géométrique du formateur.

4.2.3.1 Changement dans le schème de validation

Laura fait l'hypothèse que lorsqu'un sommet du rectangle est sur le côté du parallélogramme, il est milieu de ce côté. Alors elle décide de le vérifier, en calculant la distance de ce point aux extrémités du côté. Elle obtient des valeurs différents, et semble les interpréter comme une invalidation de son hypothèse.

L- regarde, ici, apparemment touche les milieux de…



S- mais il a dit qu'il fallait faire quelque chose avec des commentaires.

M- quand vous avez une hypothèse sur une propriété géométrique vous l'écrivez dans un commentaire.

[elle mesure la distance de A au point et de D au point.]

L- non, Sylvie….je disais à Sylvie qu'à ce moment, quand je déplace le point… on analyse le point là, à ce moment, on pensait qu'il était milieu. Alors j'ai pris la distance.

Mais après, elle se rappelle que le formateur avait parlé de phénomènes visuels, comme des phénomènes visibles à l'écran, mais qui ne peuvent pas être vérifiés avec mesure, puisqu'il s'agit d'une figure ajustée.

[bouge le point A verticalement, on voit le point passer sur le côté du parallélogramme extérieur.]

L- apparemment…. Presque. Regarde, Sylvie : 2,40 et 2,39.

S- c'est une…c'est une… qu'est-ce qu'il a dit ?

L- c'est un phénomène apparent… visuel.

S- visuel.

[elle écrit la propriété observée : à ce moment les points semblent être les milieux des côtés du parallélogramme.]

S- A l'oeil, à l'oeil on voit que c'est le milieu... il l'est ?

L- pour une position déterminée du point A, de déplacement du point A.

Soulignons l'utilisation de termes qui rappellent que ce n'est pas une propriété invariante, mais obtenue par ajustement : 'apparemment', 'à ce moment', 'les points semblent être les milieux', 'pour une position déterminée du point A'.

Elles ne trouvent pas de propriétés invariantes, mais des cas de figure. Le formateur demande de caractériser simultanément les deux quadrilatères pour chaque cas.

M- vous avez découvert qu'en ce moment c'est un carré ?

S- mhm

M- à quel moment est-il carré ?

L- au moment où lorsqu'on déplace le point A… ah ! Quand celui-ci est un carré ? Quand le parallélogramme devient rectangle.

S- il se réduit à un point

M- dans quels cas il se réduit à un point ?

L- quand.... quand... quand la rotation d'un des points mobiles... qui se laissent déplacer... il devient carré...

M- mais celui de dedans est toujours un point... alors celui de dehors c'est quoi ?

S- je crois que c'est... un losange

L- un losange ? c'est un losange

M- pour quels cas celui de dedans est un point ?

S- pour quels cas celui de dedans est un point ?

L- lorsque le parallélogramme devient losange.

M- lorsque le parallélogramme extérieur est un losange

Cet inventaire de cas de figure devient nécessaire à partir du moment où l'on ne trouve pas de propriétés invariantes. Dans les problèmes précédents, les figures étaient dynamiques, mais la forme était invariante. Dans ce problème, les cas de figure permettent de trouver une solution. Mais cela suppose un changement dans l'énonciation des propriétés : ce sont des propriétés obtenues à un moment donné, pour une position donnée des points libres.

4.2.3.2 Difficulté d'interprétation d'un phénomène dynamique

Elles ont construit les points d'intersection du rectangle et du parallélogramme, et elles remarquent que ces points disparaissent lors du déplacement d'un sommet du parallélogramme. Laura fait l'hypothèse qu'il s'agit de deux plans qui tournent dans l'espace, mais Martin lui fait remarquer qu'en réalité ce sont deux polygones, non des plans, et que pour certaines positions ils se coupent, mais pour d'autres non. Laura semble accepter cette interprétation, mais Sylvie n'est pas d'accord.

L- mais pour moi c'est plutôt l'intersection de deux plans. Car regardez ce qu'on a eu là. On a fait les points d'intersection. La calculatrice génère les points d'intersection entre celui-ci et celui-ci. Et lorsqu'on déplace les points qui se laissent déplacer, ils ne se voient pas.

M- ils n'existent plus, car ils ne se coupent pas, regardez.

L- ils ne se coupent plus.

S- ils ne se coupent plus ?

M- s'ils ne se coupent alors (les points d'intersection) n'existent pas.

L- mais s'ils se coupent… ils apparaissent.

L- bien sur.

S- *non, pas sûr du tout.*

L- si deux plans se coupent, ils ont des points d'intersection.

M- il n'y a pas de plans. Ce sont des polygones.

L- si ce sont des polygones et ils ne se coupent pas, alors il n'y a pas de points d'intersection.

M- là ils n'ont pas de points d'intersection.

S- mais ici oui. Alors dites-moi pourquoi si, ici, je lui ai demandé de créer l'intersection

L- *la géométrie dynamique nous rend fous (rigole) on ne croit même pas ce que l'on sait. Deux plans, ou deux polygones...*

M- ils se coupent maintenant, regardez.

S- oui, mais…

L- il arrive un moment où ils semblent devenir un seul point.

S- mais dans d'autres on avait fait point d'intersection et il restait fixe.

M- si vous le prenez et vous essayez de le déplacer, vous ne pouvez pas. Mais si vous déplacez les objets dont il dépend, alors il bouge.

On voit comment l'interprétation de ce phénomène surprenant n'est pas facile. Plus tard, Sylvie continue à se demander ce qu'il signifie.

[elle déplace A et voit que les points d'intersection de la diagonale du rectangle et le côté du parallélogramme apparaissent et disparaissent.]

M- que voulez-vous voir, Sylvie ?

S- Pour moi c'est pas clair cette histoire de points d'intersection…

L- il se passe la même chose que si l'on avait une figure avec règle et compas…si tu fais un carré, et tu mets ici un autre carré, il y a des points d'intersection ? non. Mais si on les colle, par exemple comme ça, … et la calculatrice fait comme ça : lorsqu'il y a intersection, elle les montre ; et s'il n'y a pas d'intersection, elle les enlève…

S- je ne sais pas… il me semble que non…

Conclusion :

On constate la nouveauté de ce problème où les propriétés de la figure sont variables. En plus, le fait de considérer les diagonales uniquement comme des segments et non comme des droites, les empêche de trouver rapidement une propriété invariante qui leur aurait permis de passer à la construction. Elles sont restés donc à l'exploration de différents cas du modèle.

Par contre, les autres binômes, qui ont tracé des droites pour les diagonales, ont trouvé rapidement que les diagonales du rectangle coupaient les côtés du parallélogramme aux milieux. Un des binômes a trouvé aussi qu'un cercle de diamètre le côté du parallélogramme coupe la diagonale du rectangle à son sommet. Ce binôme a utilisé une stratégie non prévue dans l'analyse a priori, qui consiste à tracer des cercles en utilisant les points de la figure, afin d'identifier des relations d'équidistance. Comme ils avaient construit le milieu du côté du parallélogramme, ils ont fait un cercle de centre ce milieu et passant par un sommet, et ils ont vue qu'il coupait la diagonale du rectangle sur son sommet.

Un binôme a trouvé l'autre propriété qui permettait la construction, le fait que les côtés du rectangle sont sur les bissectrices des angles du parallélogramme.

4.2.4 Problème 8

« Etant données trois droites parallèles, construire un triangle équilatéral avec ses sommets sur chacune des droites ».

Il s'agit du premier des trois problèmes qui visaient l'apprentissage de la technique des lieux géométriques. La technique avait été illustrée précédemment à l'aide de deux problèmes : tracer une tangente à un cercle par un point extérieur, et tracer la tangente commune à deux cercles.

Les données sont trois droites parallèles, donc la construction doit commencer par ces trois droites : d'abord une droite quelconque par point et direction, ensuite deux droites parallèles à celle-ci par deux points libres. Nommons les droites d1, d2 et d3.

Une fois les données construites, on doit ramener la construction de la solution à la détermination d'un point. Dans ce cas, on peut poser un point A sur d1 et un point B sur d2, et construire un triangle équilatéral de côté AB.

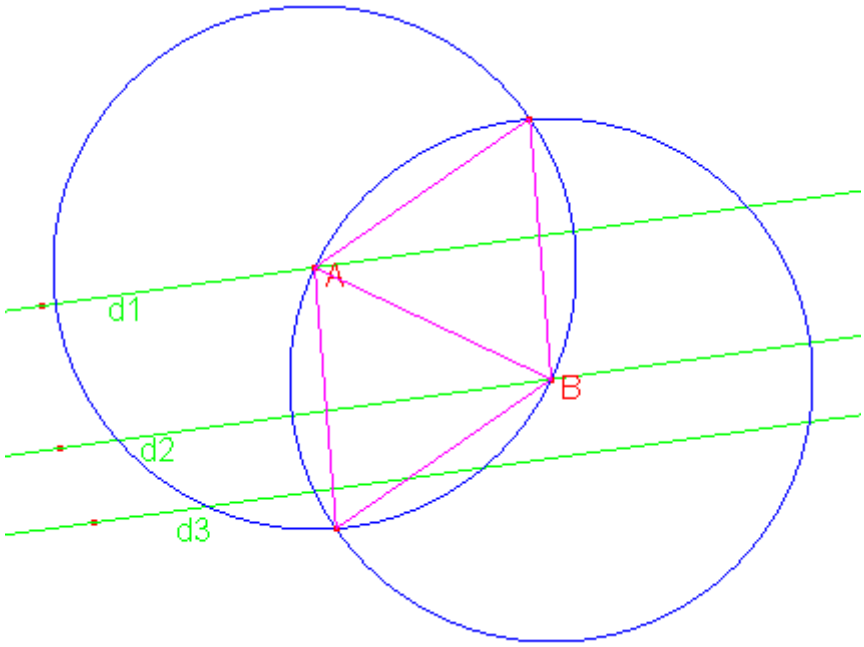


Figure 14

En déplaçant le point B (ou le point A), on peut faire en sorte que le troisième sommet soit sur la droite d3.

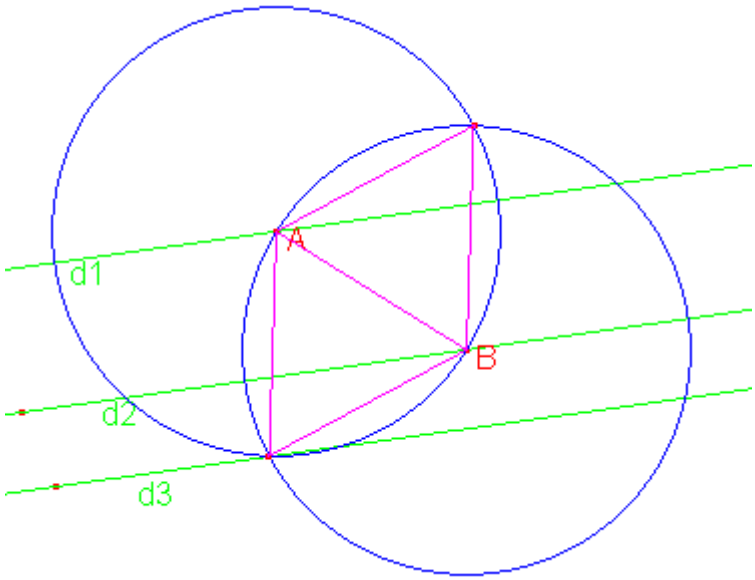


Figure 15

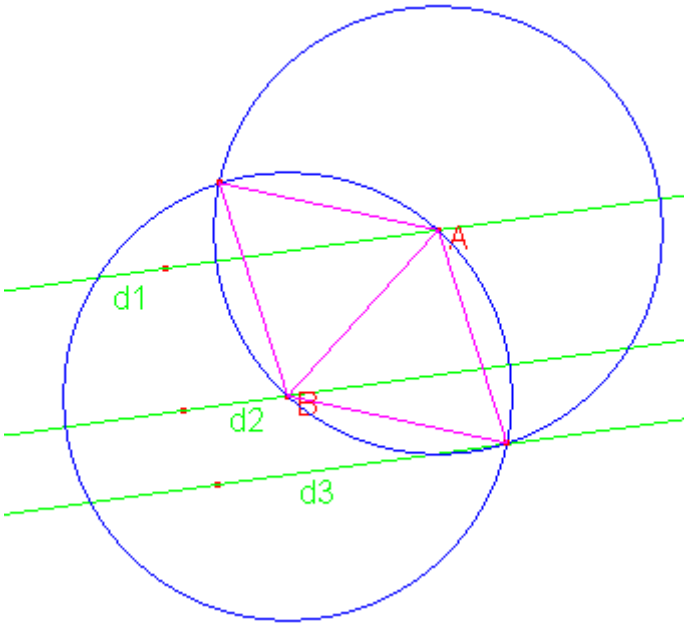


Figure 16

La position du troisième point (C) donnera la solution du problème. Ce point C doit remplir deux conditions : 1) il doit appartenir à la troisième droite, et 2) il doit former un triangle équilatéral avec les deux autres points.

Ensuite, on considère chacune des deux conditions de façon séparée, ce qui produit deux lieux géométriques : 1) tous les points qui appartiennent à la troisième droite forment le lieu géométrique de cette droite, 2) tous les points qui forment un triangle équilatéral avec A et B lorsque B se déplace sur d2, forment deux droites. Les intersections de ces deux droites avec la troisième parallèle sont les points solution cherchés.

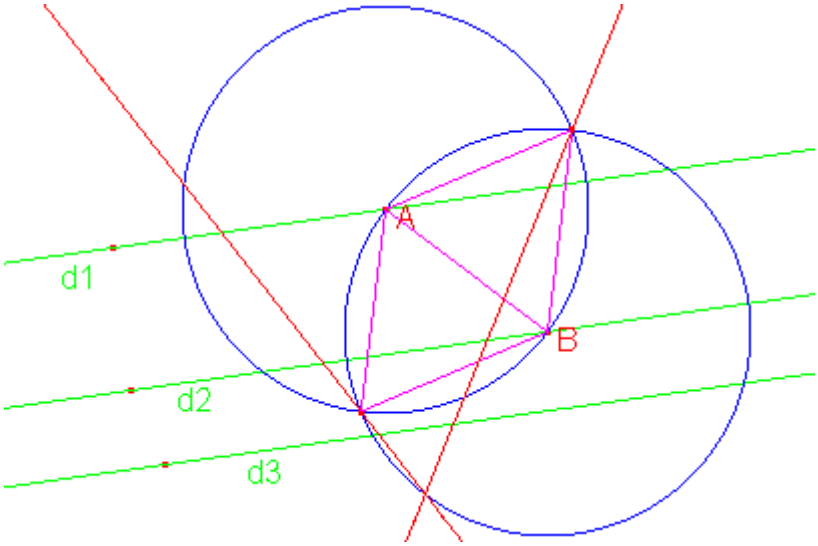


Figure 17

Il reste à construire de manière exacte ces deux droites, lieux géométriques de tous les points qui forment un triangle équilatéral avec A et B lorsque B se déplace sur d2[24]. Parmi les analyses possibles de la figure, nous retenons deux :

1) Les deux droites lieux géométriques forment un angle de 60° avec les droites parallèles et passent par les points qui forment des triangles équilatéraux de côté AB.
2) Les deux droites lieux géométriques forment un triangle équilatéral avec d1, dont une des médiatrices passe par A, et dont la hauteur est le double de la distance de d1 à d2.

Ces deux analyses permettent de construire les droites lieux géométriques de tous les points qui forment des triangles équilatéraux de côté AB lorsque B se déplace sur d2. Les intersections de ces deux droites avec la droite d3 sont deux points C1 et C2, tels qu'un des triangles équilatéraux de côté AC1 et un des triangles équilatéraux de côté AC2 ont leur troisième sommet sur d2.

[24] Avec la version de Cabri sur la calculatrice TI-92, on a une représentation du lieu géométrique, mais on n'a pas la possibilité de construire l'intersection de ce lieu avec un autre objet. On doit procéder alors à une analyse de cette figure, afin de construire les droites.

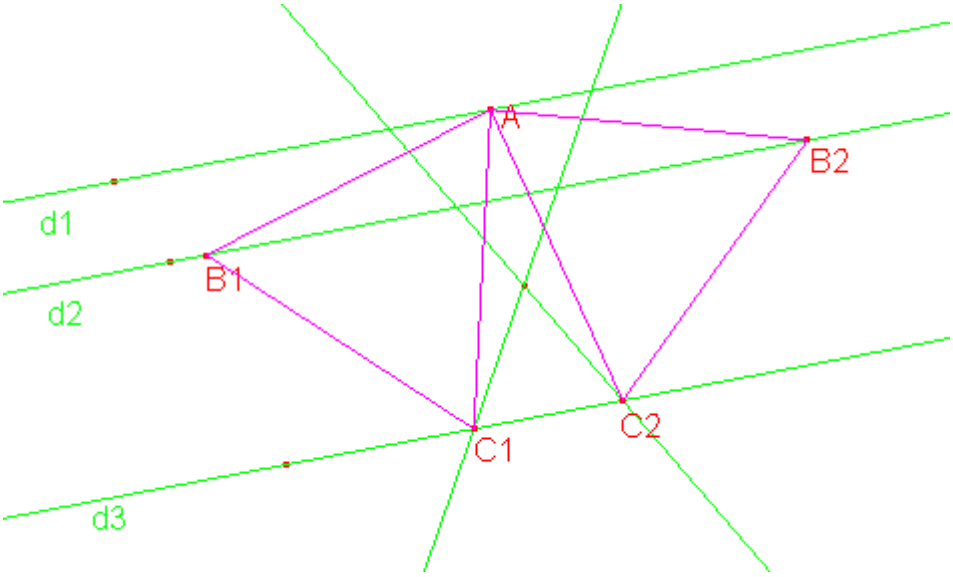


Figure 18

On peut conclure que pour chaque position de A il y a deux solutions possibles. Mais la construction avec Cabri représente tous les cas possibles, étant donné que l'on peut déplacer le point A sur la droite d1, modifier la direction des droites parallèles, ou le rapport des distances entre les trois droites.

On peut prévoir plusieurs difficultés pour les formés. D'abord, le fait que les données soient des droites, et les droites de Cabri dépendent toujours d'au moins un point, peut conduire à une confusion sur les points utilisés pour construire les triangles équilatéraux. Ensuite, le fait de considérer toutes les positions possibles de A et B peut confronter à une complexité trop grande, et il est possible que les formés ne pensent pas à fixer un des points pour considérer les positions de l'autre. Egalement, le fait que l'on peut construire deux triangles équilatéraux à partir de deux points donnés pourrait se prêter à confusion. Finalement, le fait que pour trouver la position solution de C on utilise une position donnée de B, mais cette position de B n'est pas la solution peut être déroutant pour les formés, étant donné qu'ils doivent opérer un renversement de la construction : ils doivent construire C à partir de B, mais dans la construction finale ils doivent construire B à partir de C.

Analyse du travail du binôme conformé par Christopher et Loïc

Résumé : ils occuperont leur temps à interpréter dynamiquement l'énoncé, avec plusieurs tentatives infructueuses. Loïc n'utilise pas la technique de lieux géométriques, mais essaye de 'redéfinir un objet', et malgré l'invalidation reçue par le système, il ne renonce pas à cette stratégie-là.

4.2.4.1 Difficultés d'interprétation dynamique de l'énoncé

Une grande partie du temps est consacrée à l'interprétation de l'énoncé. L'interprétation en termes de mouvements pose beaucoup de problèmes que le formateur n'avait pas prévus :

> L- c'est-à-dire que les sommets doivent pouvoir bouger sur les droites parallèles ?
> C- Oui… qu'il bouge ses sommets sur trois droites. Et si tu bouges les droites… les sommets doivent bouger

L- Non, mais bouge tous les sommets ; déplace un sommet.
C- ils ne se déplacent pas
L- c'est cela que je ne comprends pas, bouger tous les sommets.
C- pourquoi?
L- car si c'est comme tu dis… que l'on puisse déplacer tous les sommets…

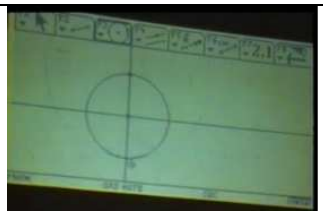
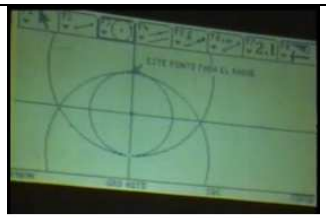
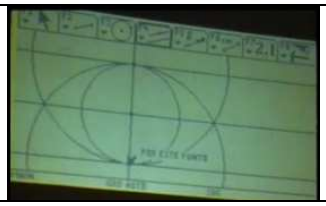
Le formateur a modifié l'énoncé par « construire un triangle équilatéral dont les sommets se déplacent sur trois droites parallèles ». Loïc interprète cela comme imposant la condition que les trois sommets doivent pouvoir se déplacer directement : ils seraient des points sur objet. Evidemment, cette condition n'est pas possible à remplir ; si l'on veut que le triangle soit équilatéral, ces trois points ne peuvent être indépendants les uns des autres.

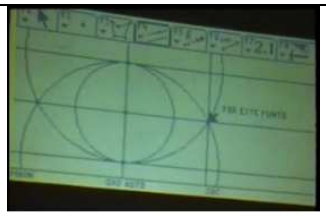
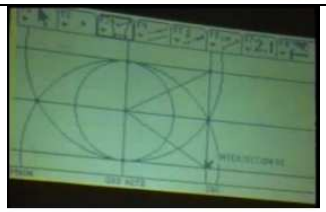
C- Mais il me dit que non, car le point doit se déplacer sur la droite, non pas la droite sur le point.
C- disons qu'il veut que ce point bouge sur la droite… et les autres partent… en s'agrandissant…

Christopher vient de montrer sa construction au formateur, et il rapporte la réponse. Il avait construit une droite et deux parallèles, mais il utilisait les points d'origine des droites pour construire le triangle. Comme ces points sont libres, ce sont les droites qui se déplacent avec les points, et non le contraire. Dans la deuxième phrase Christopher semble comprendre : il faut qu'un point soit sur objet et se déplace sur une droite, les autres doivent dépendre de celui-là et bouger en même temps, comme s'ils s'en allaient, comme si le triangle s'agrandissait.

Maintenant, Loïc essaye de mettre en œuvre ce qu'il a compris : on doit pouvoir déplacer un point, les autres doivent bouger avec celui-là. Pour cela, il fait la construction suivante :

Tableau 18

il construit une droite qu'il place horizontalement dans l'écran, place un point sur la droite (P), et construit la perpendiculaire à la droite par ce point ; puis un cercle de centre (P) et qui passe par un point sur la perpendiculaire.		
Ensuite, il construit deux cercles centrés sur la perpendiculaire de rayon le diamètre de celui-ci.		
Ensuite, il construit des droites parallèles à la droite horizontale construite au départ par les extrémités du diamètre perpendiculaire.		

Ensuite il construit une droite parallèle à la perpendiculaire par l'un des points d'intersection des grands cercles	
Et il construit un triangle équilatéral de sommets le point P et les intersections de cette dernière droite avec les parallèles	

De cette manière, il a obtenu un triangle équilatéral dont les sommets bougent sur trois droites parallèles. Il présente cette solution au formateur, qui lui dit que c'est un cas particulier.

> L- ce point bouge sur cette droite, mais il semble que non [il veut dire qu'il ne sait pas si le point bouge sur la droite, ou si c'est toute la droite qui bouge avec]
> M- si, il se déplace… c'est un cas particulier, non ?
> L- il bouge sur la droite? Mais… je ne comprends pas.
> M- ceci est un cas particulier : vous n'avez pas construit trois droites parallèles quelconques, mais vous leur avez imposé une condition de plus.
> L- ahh... alors je dois choisir trois droites parallèles quelconques. Alors je l'avais bien fait avant.
> C- Oui, je ne peux déplacer qu'un point : ce sommet
> M- non, regardez. Les droites bougent par les points, non les points sur les droites.
> C- il y a beaucoup de choses pas claires. L'idée c'est que les droites soient fixes.
> L- c'est-à-dire que j'ai ces trois parallèles quelconques. Je peux déplacer n'importe laquelle, par exemple celle-ci, et elle est toujours parallèle… et sur celle-ci
> M- sur ces droites vous placez les points.
> C- car il s'agit qu'au moins un point bouge, n'est-ce pas ? alors que dois-je faire ?
> L- …..
> C- oui, mais toi tu bouges ces deux droites ; lui, il veut que les droites soient fixes.

On voit ici combien la situation est complexe pour les formés. Les droites ne doivent pas dépendre des sommets du triangle ; mais Christopher interprète ceci comme 'les droites doivent être fixes'. En réalité les droites peuvent être déplacées, et les points doivent rester sur les droites[25].

> [L a fait une nouvelle construction avec trois droites parallèles quelconques, mais il utilise le point d'origine des droites pour construire le triangle]
> M- je peux regarder quelque chose ? [il déplace un des points]. Ce point fait bouger la droite. Je veux que le point bouge sur la droite.
> L- ah ! c'est le point avec lequel j'ai construit la droite !
> M- celui-là ne sert pas.

[25] En réalité le problème introduit trop de nouveautés, et se révèle trop complexe pour les formés. On pourrait imaginer une variante du problème où les droites sont fixes, ou bien où l'on donne les droites déjà construites.

Finalement, Loïc comprend qu'il ne doit pas utiliser le point d'origine de la droite, qui est un point libre, mais placer un autre point sur la droite construite. Le formateur va par la suite interrompre l'activité des binômes pour expliciter cette consigne.

Les difficultés d'interprétation de l'énoncé sont de nature différente. D'abord il faut distinguer les données du résultat : si on prend comme donné le triangle et comme résultat les droites parallèles, la construction est banale puisqu'elle se réduit à tracer des droites parallèles par les sommets d'un triangle équilatéral. On comprend alors que les données doivent être les trois parallèles. Or, une fois la figure tracée sur papier, il est impossible de savoir si les points dépendent des droites ou les droites des points.

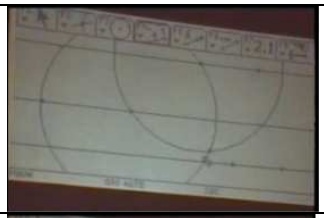
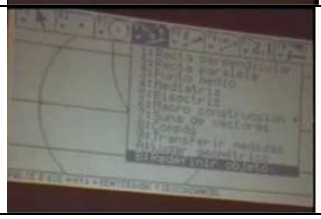
Sur Cabri il y a une difficulté différente : la représentation des données dans une figure dynamique. Les trois droites doivent être parallèles quelconques : ce qui veut dire qu'une des droites doit être quelconque, les autres deux doivent être parallèles à celle-ci par des points libres. Les sommets du triangle doivent bouger sur ces droites. Si le mouvement peut désambiguïser une figure où il apparaît un triangle équilatéral et trois droites par les sommets, il est un cas où l'ambiguïté persiste : si l'on déplace le point d'origine d'une droite *dans la direction de la droite* (ce qui peut être fait facilement si la droite est verticale ou horizontale), il est impossible de savoir si le point se déplace sur la droite, ou si la droite se déplace avec le point. C'est sur cette difficulté additionnelle que les formés butent.

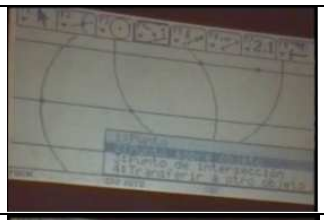
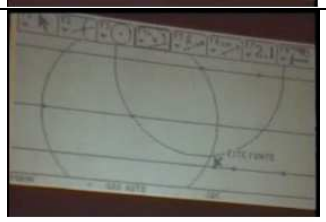
4.2.4.2 Recherche d'une stratégie logiciel :

Une fois surmontées les difficultés d'interprétation de l'énoncé, on espérait que les formés essaieraient de mettre en œuvre la technique des lieux géométriques, qui avait était présentée immédiatement avant. Dans le binôme observé, c'est la stratégie de Christopher . Par contre, Loïc va mettre en œuvre une stratégie qui revient à chercher une primitive du logiciel qui donnerait la solution du problème.

Il a construit les trois droites parallèles, et deux points sur deux des droites. Ensuite il a tracé les cercles qui définissent des triangles équilatéraux avec ces deux points pour sommets, et il a constaté que le troisième sommet n'est pas sur la troisième droite. Alors il utilise l'outil *redéfinir un objet*, afin d'ajouter au sommet du triangle équilatéral la condition d'appartenir à la troisième droite.

Tableau 19

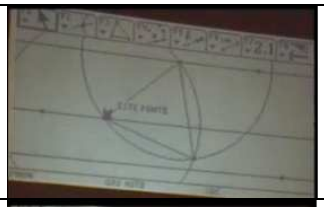
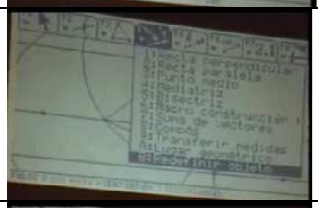
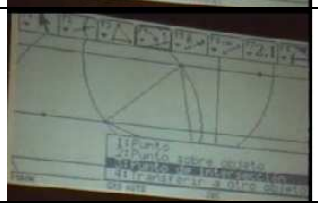
Il a construit le point qui forme un triangle équilatéral avec les points qui sont sur les deux premières droites.		
Il sélectionne l'outil 'redéfinir un objet'		

Il sélectionne l'option 'point sur objet'		
Il redéfinit le point comme point sur la troisième droite		

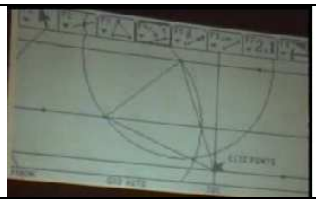
Mais cet outil n'ajoute pas de nouvelles conditions, il remplace les conditions données par des nouvelles conditions. Alors, le point perd ainsi la propriété d'être à l'intersection des deux cercles, condition qui est remplacée par la propriété d'être sur la troisième droite[26].

Malgré le fait que la rétroaction du système montre clairement l'inefficacité de cette stratégie, Loïc continuera à l'utiliser, avec des petites variantes : au lieu de redéfinir le point comme point sur objet, il essayera de le redéfinir comme point d'intersection de la troisième droite avec une droite auxiliaire, ou de l'identifier à un autre point déjà sur la droite.

Tableau 20

Il construit le triangle équilatéral		
Il trace une droite auxiliaire qui coupe les parallèles		
Il sélectionne 'redéfinir objet'		
Il sélectionne l'option 'point d'intersection'		

[26] Il s'agit de la stratégie identifiée par Hölzl (1996) qu'il appelle « the drag and link approach »

Il redéfinit le point comme intersection de la droite auxiliaire et la troisième parallèle.		

Nous faisons l'hypothèse que Loïc n'est pas sûr d'utiliser correctement l'outil *redéfinir objet* ; il interprète la rétroaction du système comme indice d'une mauvaise manipulation de sa part.

Mise en commun :

Les difficultés de ce problème se sont avérés trop grandes pour les formés. Malgré les multiples interventions du formateur pour les débloquer et suggérer la marche à suivre, aucun des formés n'a trouvé la solution. Ils sont parvenus à construire les lieux géométriques décrits dans l'analyse à priori, mais ils ne savent pas quoi faire ensuite. La mise en commun sera utilisée par le formateur pour ré expliquer la technique des lieux géométriques sur ce problème-ci, montrant qu'une fois le lieu géométrique obtenu il faut faire une analyse de cette figure afin de pouvoir construire le lieu comme objet géométrique (droite ou cercle).

Le problème suivant (construction d'un triangle équilatéral dont les sommets bougent sur trois droites concourantes), donnera aux formés l'opportunité de mettre en œuvre la technique de manière plus autonome.

4.2.5 Problème 10

« Construire un triangle avec deux bissectrices perpendiculaires ».

Analyse a priori :

Celui-ci est un problème de construction impossible, et de ce fait il suppose une rupture du contrat didactique, qui veut que tout problème proposé ait une solution. Si bien le fait de ne pas avoir trouvé une solution ne peut pas être interprété directement comme inexistence d'une solution, les rétroactions du système lors des essais de construction montrent clairement cette impossibilité.

En effet, il y a deux stratégies possibles de construction. La première consiste à construire un triangle quelconque, deux bissectrices, et déplacer les sommets en cherchant obtenir la perpendicularité des bissectrices. Avec cette stratégie il est possible de constater que les bissectrices sont perpendiculaires seulement si le sommet par lequel elles ne passent pas est sur la droite qui contient les autres sommets, et n'est pas sur le segment défini par ces deux sommets. Egalement, on peut constater que l'angle entre les bissectrices est obtus, et il diminue si le troisième sommet s'éloigne des autres deux. Il n'est pas possible d'obtenir un angle droit. Cette stratégie conduit à poser la question : Pourquoi l'angle entre les bissectrices est toujours obtus ? Question qui doit recevoir une réponse théorique, qui explique la relation entre les bissectrices et les angles d'un triangle. Soit un triangle ABC, et les bissectrices en A et en B, qui se coupent en un point I. Considérons le triangle ABI. Si l'angle ABI est droit, alors la somme des angles IAB et IBA doit être 90°, et alors la somme des angles CAB et CBA sera 180°. Si l'angle ABI est aigu, alors la somme des angles IAB et IBA doit être plus grande que 90°, et alors la somme des angles CAB et CBA sera plus grande que 180°.

La deuxième stratégie consiste à construire deux droites perpendiculaires, qui seront les bissectrices d'un triangle, tracer un segment entre deux points de ces droites, qui sera un côté du triangle, et par symétrie axiale construire les autres deux côtés. On peut constater alors que les côtés seront parallèles. Cette stratégie conduit à poser la question : pourquoi si les bissectrices sont perpendiculaires alors les côtés du triangle sont parallèles ? Cette question doit recevoir une réponse théorique qui explique la relation entre les bissectrices et les angles d'un triangle : soit ABC un triangle, α l'angle formé par AB et la bissectrice en A, β l'angle formé par la bissectrice en B. Si les bissectrices sont perpendiculaires, alors $\alpha=90-\beta$; donc, $2\alpha=2(90-\beta)=180-2\beta$; c'est-à-dire que les doubles des angles α et β sont supplémentaires, et donc ils forment des droites parallèles.

Analyse du travail individuel et du binôme conformé par Carmen et Ana :

Tableau 21

Phénomène repéré	**Description faite**	**Vérification**	**Construction**	**vérification de la const.**
quand le triangle est aplati les bissectrices sont perpendiculaires	« si l'on déplace les sommets du triangle, les bissectrices peuvent former un angle proche de 90°, et le triangle disparaît en devenant une ligne »	déplacement et mesure d'angle		
lorsque les bissectrices sont perpendiculaires les côtés sont parallèles		construction de deux perpendiculaires, construction des côtés comme symétriques par rapport aux bissectrices		

Résumé : bien que Carmen et Ana ont repéré les phénomènes visuels prévus dans l'analyse a priori, elles ne se questionnent pas théoriquement, et interprètent l'invalidation comme une faute de manipulation.

4.2.5.1 Pas de questionnement théorique, remise en cause de la procédure de construction, recherche d'une nouvelle procédure.

Ce binôme a commencé avec la première stratégie : elles ont construit un triangle, deux bissectrices, ont mesuré l'angle entre les bissectrices et ont déplacé les sommets pour obtenir une mesure de 90°

A- je ne trouve cela si simple. Regarde ce qui se passe. Regarde. Ce qui se passe ici. Tu vois que j'arrive à un moment à 89.55°? mais il a disparu...
C- non, on ne le voit plus.
A- oui?
C- (rigole)

[elle déplace encore un autre sommet]

A- j'arrive à 89.87°...mais en ce moment, le triangle disparaît.

A- (pendant qu'elle écrit) si l'on déplace les sommets du triangle, les bissectrices peuvent former un angle proche de 90°, et le triangle disparaît en devenant une ligne. Ceci est un cas. Maintenant cherchons un autre cas.

Ce binôme est constitué des enseignants le moins familiarisés avec la technologie. Elles semblent trouver les phénomènes bizarres, mais non pas étonnants du point de vue mathématique ; c'est un phénomène qui doit recevoir une explication par le fonctionnement de la machine, non pas une explication mathématique.

Elles ont décidé de commencer la construction avec les bissectrices perpendiculaires, et après discussion et réflexion elles décident d'utiliser la symétrie axiale pour construire les côtés du triangle. Elles tracent alors une droite, et construisent les symétriques de cette droite par rapport aux bissectrices.

A- symétrique de cette droite... par rapport à... cette droite...

A- mais, tu vois? elle sort...

(rire)

C- il n'y a pas d'intersection

(rire)

C- ici la calculatrice est importante...

A- nous avons deux côtés du triangle, et le même processus sur l'autre perpendiculaire.

C- mais maintenant regardons que se passe-t-il avec la droite... que sont-elles, si elles sont parallèles

A- mais... quels sont les côtés du triangle?

C- oui. Ils seraient... celui-là.

A- celui-ci c'est un point

C- et celui-ci, et là où elles se coupent; mais elles semblent parallèles...

A- celui-ci est un point, et celui-ci est un point. Ces deux sont des points.

A- celui-ci est un point, et celui-ci est un point

C- regarde, ici elles sont parallèles

A- celui-ci est un point, et celui-ci est un point

A- alors que s'est il passé ici? Regardons comme ça. Celui-ci est un point, celui-ci est un point, et celui-ci est un point. Ici il est marqué.

A- mais elles sont perpendiculaires...

A- les droites sont parallèles. la droite est parallèle à un côté.

(rire)

C- *d'abord le triangle disparaît, ensuite elles sortent parallèles...*

A- *bon, et maintenant que pouvons nous faire? Sont parallèles... elles sortent parallèles...*

C- alors, il n'y a pas de triangle.

A- bon.

C- tu as bien choisi la symétrie?

A- comment?

C- tu as choisi symétrie axiale?

A- bien sûr...

A- mais il y a une chose... nous avons...

C- ah! tu sais quoi? nous pouvons le faire avec un cercle.

A- alors on va garder ça.

C- car les bissectrices se coupent et forment le cercle inscrit.

On voit à quel point la rétroaction est surprenante, et frustrante. Elles s'attendaient à trouver le triangle dont les bissectrices sont perpendiculaires, et elles découvrent deux côtés parallèles. Il y a un conflit cognitif, mais au lieu de mettre en question le problème, elles mettent en question leur stratégie. Le passage à la justification théorique de l'impossibilité de la construction ne se fait pas, et elles cherchent une nouvelle stratégie avec le cercle inscrit.

Mise en commun

Lors de la mise en commun trois groupes ont présenté leur travail, dont deux groupes ont tiré la conclusion de l'impossibilité de la construction, sur la base des figures obtenues : ou bien deux côtés parallèles, ou bien un triangle aplati. Un des groupes justifie théoriquement le fait que les droites obtenues par symétrie par rapport aux bissectrices perpendiculaires soient parallèles. Un des groupes a justifié théoriquement pourquoi on ne peut pas construire un triangle avec les bissectrices perpendiculaires.

4.3 Période de pratique avec suivi à distance

Rappel :

Le travail était planifié de la manière suivante : dans chaque école participante, il y avait au minimum deux enseignants, qui devaient dédier 3 heures hebdomadaires pour la formation : une heure de travail individuel, une heure de travail en binôme, et une heure de communication par Internet (envoi et réception de courriels, chat). On comptait ainsi sur une interaction et un appui affectif des collègues travaillant dans la même école.

Mais les choses ne se sont pas déroulées comme prévu. En raison de différentes difficultés personnelles (maladie, changements d'horaires, surcharge de travail, problème d'accès à Internet, etc.), la plupart des formés ont travaillé individuellement, et sans régularité. Seuls trois des dix enseignants ont envoyé des rapports de tous les problèmes proposés, et ont participé à tous les chats. Deux enseignants n'ont jamais envoyé de rapport, et trois enseignants ont abandonné la formation durant la période de travail à distance de la partie mathématique : Ana, Jorge et Loïc.

On doit signaler que, en plus des difficultés dues au travail à distance (manque de rapport personnel direct, problèmes de gestion du temps, etc.), cette composante présentait l'exigence d'élaborer des rapports écrits de démarches et de résultats. Ce qui imposait des difficultés tant techniques que cognitives. En effet, les enseignants devaient maîtriser un traitement de texte pour écrire leurs rapports, et surtout la communication entre la calculatrice et l'ordinateur pour insérer des images de l'écran illustrant leurs propos. Non seulement ils devaient faire le travail de recherche d'une solution, mais aussi ils devaient prendre conscience de leurs démarches, garder des traces du travail, et organiser un résumé.

4.3.1 Problèmes proposés :

1. Reproduction d'une figure statique :

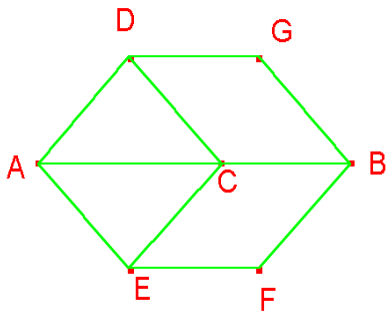


Figure 19

Reproduire cette figure à partir des points A et B en sachant que AECD est un carré, CBGD et CEFB sont des losanges

2. Production d'une figure à partir d'un énoncé textuel : construire un triangle ABC quelconque et un carré PQRS tel que ses sommets soient sur les côtés du triangle.
3. reproduction d'une figure dynamique : Un parallélogramme à partir de trois points libres, et un rectangle dont les diagonales divisent les côtés du parallélogramme au tiers, et dont la demi diagonale est égale à la valeur absolue de la différence des côtés du parallélogramme.

4. Production d’une figure à partir d’un énoncé textuel : étant donnés trois cercles concentriques, construire un triangle équilatéral tel qu’il aie ses sommets sur chacun des cercles.
5. Etant donnés trois cercles quelconques, construire un triangle équilatéral tel qu’il aie ses sommets sur chacun des cercles.

L’objectif de cette période de pratique étant de renforcer les techniques apprises pendant le cours présentiel, nous avons surtout proposé des problèmes visant la technique des lieux géométriques. Ayant travaillé suffisamment le ‘jeu de construction’ avec des figures modèles dynamiques pendant le cours présentiel, il nous semblait important de proposer des problèmes à partir d’un énoncé. Toutefois, nous avons inclus un problème de reproduction d’une figure dynamique afin de renforcer la distinction entre validation statique et validation dynamique.

Nous avons analysé tous les rapports reçus en cherchant des indices de développement d’une démarche expérimentale, des indices de développement des objets non ostensifs, et des indices de développement d’un contrôle théorique des constructions dynamiques.

4.3.2 Indices de développement d'une démarche expérimentale avec Cabri.

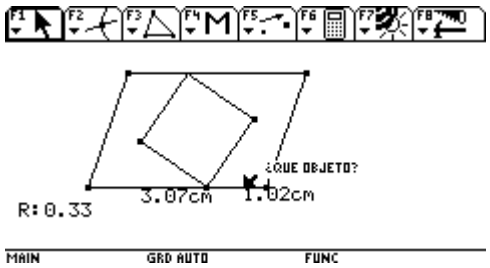
Afin d'étudier ce développement, nous allons comparer les rapports de trois enseignants, en cherchant des indices d'utilisation des schèmes de validation travaillés pendant le cours présentiel. Ces trois enseignants sont les seuls à avoir travaillé de manière régulière pendant la période de travail à distance, et ils ont envoyé des rapports hebdomadaires de leurs démarches.

Tableau 22

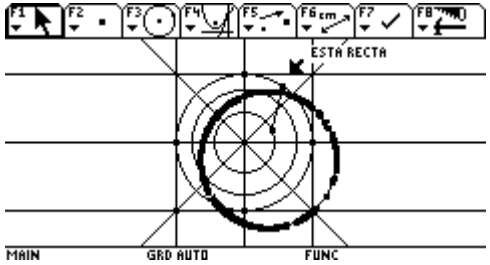
Carmen	Laura	Emilia
Utilisent le déplacement pour valider une construction, pour distinguer points libres		
P2 : Après avoir fait une construction solution sur un triangle rectangle isocèle, elle dit : "j'ai bougé la figure en déplaçant les points A et C du triangle et la figure ne s'est pas déformée".	P2 Après avoir fait la construction d'un carré inscrit, elle dit : « je déplace les sommets du triangle pour vérifier que pour n'importe quel triangle le carré reste inscrit »	P2 Après avoir fait la construction d'un carré inscrit, elle montre des images de différentes positions des sommets, et elle est surprise de voir disparaître le carré pour certaines positions.
P3 Après avoir fait une construction d'un parallélogramme et d'un rectangle elle dit : « je déplace les sommets avec la main et je trouve que […] les sommets du rectangle EFGH devraient être fixes et je dois trouver une autre construction » Et après avoir modifié sa construction, elle dit : « j'ai déplacé la figure et j'ai vérifié que […] le rectangle conserve les angles droits ».	P3 Après avoir proposé une solution, elle dit : «je déplace ABD, C est fixe. J'ai EFGH fixes. Mais EFGH est parallélogramme et non pas rectangle. Je déplace le point D et tout bouge comme sur la macro, mais FH sont fixes sur les côtés BC et AD.	P3 Après avoir proposé une solution, elle dit : « je vais vérifier les propriétés », et montre différentes images avec des positions différentes de la figure, sur lesquelles elle constate les différentes propriétés observées.

P4 après avoir construit le triangle équilatéral, elle dit : « j'ai vérifié que lors du déplacement de A et B, le triangle restait équilatéral ».	P4 Après avoir construit un triangle solution : « je déplace le point A pour vérifier la construction »	P4 Après avoir proposé une solution : « le point W était sur objet, voyons ce qui se passe quand on le déplace ».

Tableau 23

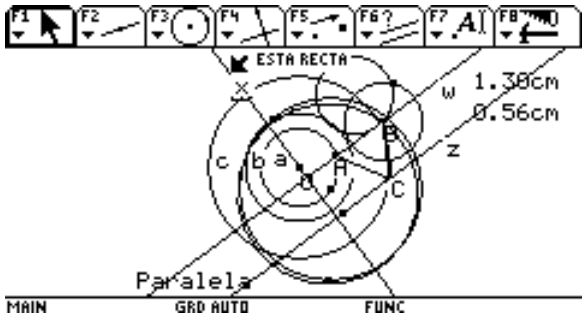
Carmen	Laura	Emilia
Ne valide pas ses hypothèses de lecture avec déplacement ou avec mesures	**Valident leurs hypothèses de lecture avec déplacement et/ou mesures (oracle)**	
P3 "J'ai mesuré les segments de la base et j'ai trouvé le rapport d'homothétie. J'ai trouvé que le segment était divisé dans le rapport 2 à 3 » 	P3 "j'ai tracé une droite qui passe par les points CE, une autre par BH, par DF et par AJ, cherchant une proportion par rapport au parallélogramme ABCD. Je mesure la distance AH, HD, BI et IA, il y en a une, je vérifie déplaçant les points A, B, C. »	P2 "je trace la diagonale qui passe par le sommet P, et la droite qui passe par les sommets P et B du triangle, mesure les angles formés, la somme des angles QBP et RPB est 45°, je vérifie avec déplacement si c'est toujours ainsi »
P4 Elle cherche à déterminer le cercle correspondant au lieu géométrique du troisième sommet du triangle équilatéral, lorsque un des points sur les cercles se déplace. Elle a	P3 "je mesure la distance entre les points AH, HD, et BF, FC et je vérifie que la proportion reste »	P2 Elle construit un parallélogramme double du triangle ABC, dont AC est une diagonale, et trace la diagonale

construit trois cercles concentriques, quatre droites tangentes au cercle extérieur formant un carré, les diagonales de ce carré, un point sur le cercle plus petit et un point sur le cercle plus grand, puis un triangle équilatéral en utilisant ses points comme sommets.



« Les cercles lieux géométriques passent par le sommet du carré »

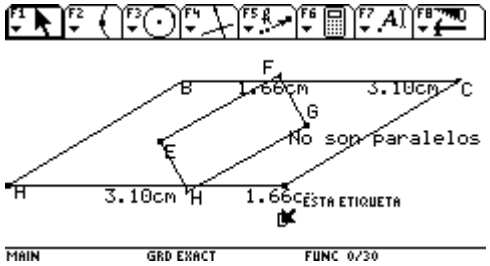
Dans un autre rapport, elle construit le triangle équilatéral ABC, avec A et C sur deux cercles concentriques, puis la droite AB, le lieu de B par rapport à A et par rapport à C.



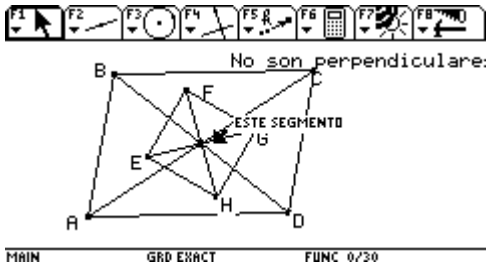
"je trace la perpendiculaire "x" à la droite "w" par le centre O et je vois qu'il passe par le point de tangence du lieu et le cercle « b »

proportion reste »

« je vérifie si HG et CD sont parallèles et ils ne le sont pas »

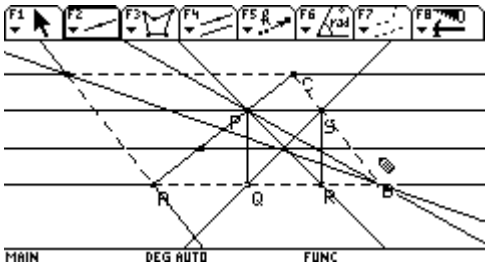


"je vérifie si les diagonales du rectangle sont perpendiculaires, je pensais qu'elles l'étaient mais je vérifie que non"

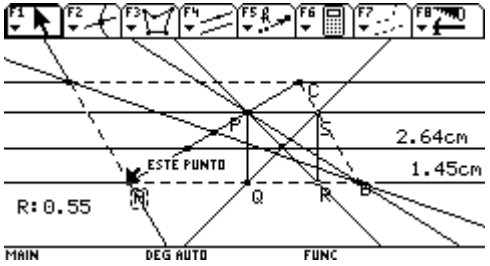


"j'ai tracé des demi-droites depuis chaque sommet du parallélogramme: AF AF, BE, DG et CH. Les demi-droites BE et DG sont parallèles, elles ont la même inclinaison. Je le vérifie en mesurant les angles ».

BD.



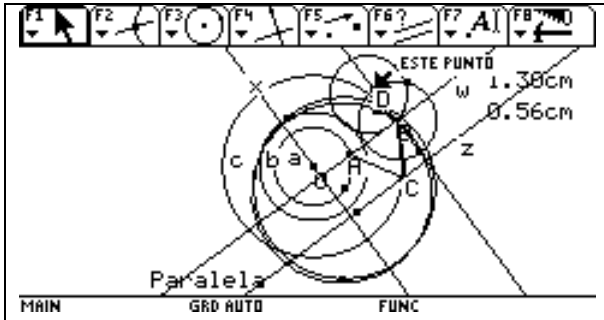
« le centre du carré semble être sur elle [la diagonale], et c'est possible qu'il y ait une proportion entre ces deux points. Vérifions ce qui se passe »



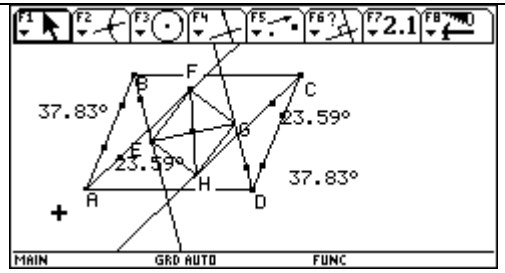
"aucune des deux conjectures est correcte".

Plus tard, elle construit un triangle, et un carré avec trois sommets sur le triangle. Elle trace le lieu du quatrième sommet par rapport à un sommet mobile du carré.

« je trace la diagonale du parallélogramme et mesure les angles entre AC et le lieu



1. “Je trace la perpendiculaire à la droite “w” et je construit le point D où elle coupe le cercle que j’avais pensé être le lieu géométrique. Ce point D est le centre du lieu géométrique de B par rapport à A.

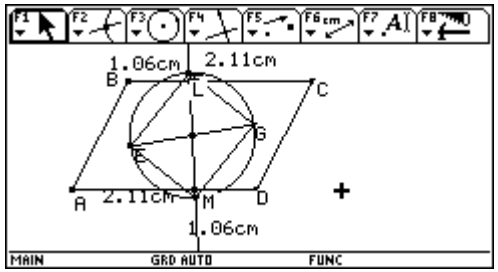


« je trace la droite LM, je construit les points d’intersection avec les côtés BC et AD. Je calcule la distance : BL, LC, AM et MD. Je calcule la distance BC : 3.17 et les quotients :

1.06/2.11 = 0.5023
1.06/3.17 = 0.3343
2.11/3.17 = 0.6656

J’utilise le déplacement pour voir s’ils se conservent :

Distance BC: 3.00
1.00/2.00 = 0.5
1.00/3.00 = 0.3333333
2.00/3.00 = 0.6666666 »

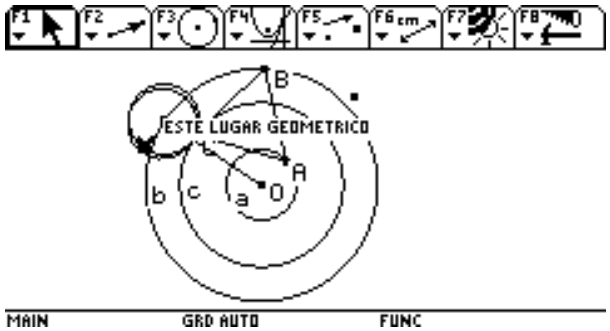


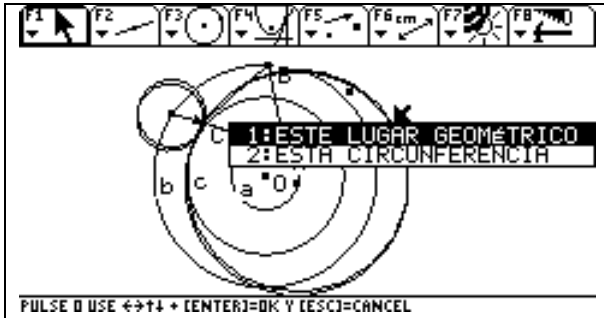
géométrique et entre le lieu géométrique et la diagonale pour voir ce qui se passe »

« c’est bien ! ils restent égaux lorsque je déplace le point R » (puis elle déplace un sommet du triangle et constate que les angles ne sont plus égaux)

« je vérifie la conjecture sur un graphique approché, car ici je ne change pas le triangle, seulement le carré …. Finalement ce n’était pas vrai »

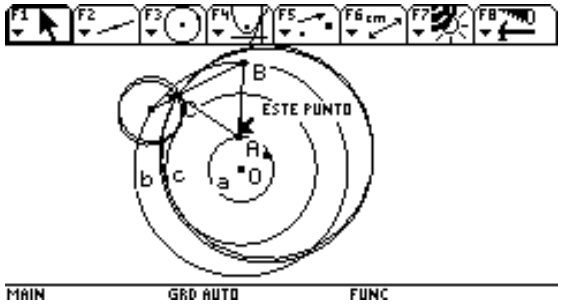
Tableau 24

Carmen	Laura	Emilia
N'interprète pas les petits écarts dans le dessin comme invalidation d'une construction	**Interprètent tout écart (si petit soit il) comme invalidation d'une construction**	
P4 Elle veut construire le lieu géométrique de C par rapport à A comme une translation du cercle a. Alors elle construit un vecteur 'à l'œil', fait la translation du cercle, et trace le lieu géométrique.  "j'ai cherché le lieu géométrique de C par rapport à A et j'ai trouvé un cercle qui se superpose à celui que j'avais construit par translation »		P4 Elle décrit une construction du lieu géométrique en utilisant une propriété observée sur la figure. Cette construction donne un cercle très près du lieu géométrique. Alors elle déplace les points sur objet, et elle constate : « lorsque l'on a mis les points sur objet, le triangle n'était plus équilatéral, c'est peut être une erreur de construction, Quand on bouge un point il n'est plus équilatéral. Nous avons essayé de lier le triangle aux cercles, avec point sur objet mais le triangle n'est plus équilatéral ; on ne l'a vu qu'à un instant, puis un des sommets n'était plus sur le cercle.



"j'ai translaté le cercle "b" selon ce vecteur et il est superposé au lieu géométrique"

« j'ai déplacé le point B et j'ai vérifié que les cercles étaient toujours superposés »



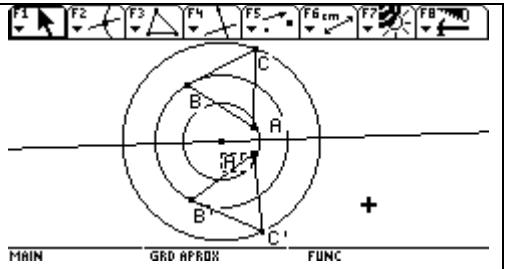
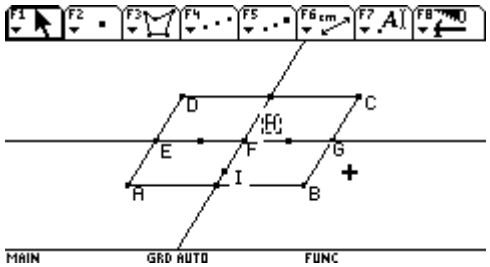


Tableau 25

<table>
<tr><td>Carmen</td><td>Laura</td><td>Emilia</td></tr>
<tr><td>Ne distingue pas entre figure ajustée et figure exacte :
N’utilise pas de marques de langage
Décrit des procédures ajustées
Utilise des objets auxiliaires indépendants des données et des buts</td><td colspan="2">Distinguent entre figure ajustée et exacte :
Utilisent des marques de langage
Evitent les procédures ajustées</td></tr>
<tr><td>P3
Elle décrit une procédure pour construire un parallélogramme et un rectangle qui dépend de ce parallélogramme : elle construit le parallélogramme, les médianes du parallélogramme et le point d’intersection des médianes, puis dit :
« j’ai cherché le milieu de EF et de FG, et j’ai pris le point H et son symétrique par rapport à F »


Ce point H est donc un point sur objet, la position est déterminée par ajustement, mais elle ne le dit pas.</td><td>P2
Laura construit un triangle, et un carré avec trois sommets sur le triangle, et elle déplace un sommet pour obtenir par ajustement que le quatrième sommet soit aussi sur le triangle. Alors elle dit :
« J’ai calculé l’aire du carré et celle du triangle. J’ai trouvé le quotient entre l’aire du carré et celle du triangle quand le point S coupe le côté CB : approximativement entre 0.41 et 0.46 »
“comme j’avais tracé la hauteur du triangle, j’ai observé que lorsque le point S coupe le côté CB, cette hauteur divise le segment PQ en deux segments égaux. J’ai vérifié cette observation en mesurant les longueurs. A ce moment j’ai obtenu 0.54 vérifiant l’observation. »</td><td>P4
Emilia cherche à construire le centre du cercle correspondant au lieu géométrique du troisième sommet du triangle équilatéral. Elle décide de prendre quatre points sur le lieu et construire l’intersection des médiatrices de deux cordes. Mais elle pense que cette procédure est approchée ; elle dit :
« essayons de trouver le centre avec une corde et une perpendiculaire par le milieu (approché) ».
Après avoir fait la construction elle se demande :
“mais comment placer exactement ces centres?”
« en observant le graphique de Cyril,</td></tr>
</table>

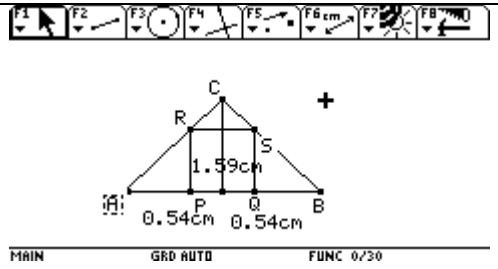
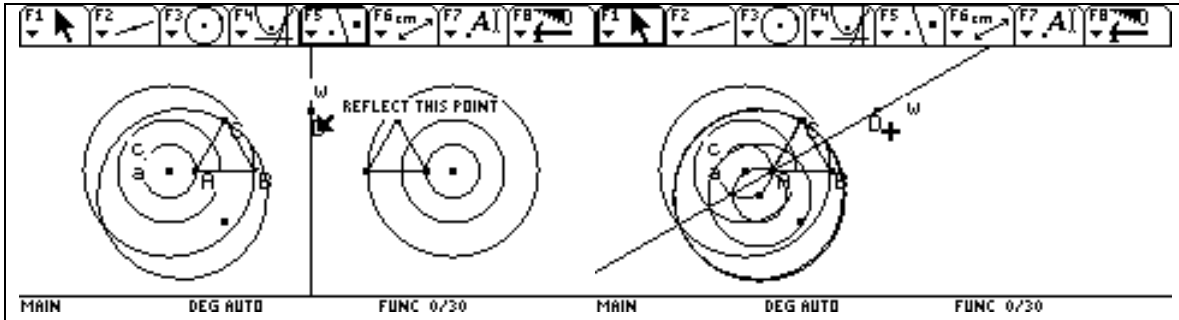
Plus tard, elle fait une autre construction qu'elle décrit ainsi: « 1. J'ai construit les trois cercles concentriques 2. J'ai mis un point sur objet sur le 1er et le 3me cercle. 3. J'ai construit le triangle équilatéral 4. j'ai tracé le rayon du cercle plus petit, j'ai mesuré et j'ai obtenu 0,68cm. 5. J'ai tracé une droite perpendiculaire au rayon passant par le centre 6. J'ai construit les lieux géométriques et *j'ai déplacé jusqu'à cette position* » Ensuite elle fait l'analyse de cette configuration, sans signaler que c'est un cas particulier.	 P4 Elle construit trois cercle concentriques, deux points A et B sur deux des cercles, et le triangle équilatérale ABC. Puis elle dit : « lorsque je déplace A j'observe que *apparemment* en deux points du cercle C3 le point C est sur elle »	et traçant les médiatrices du lieu géométrique on a vu que une des médiatrices passait par le centre des cercles, et une autre qui était perpendiculaire (*à cet instant*) et passait par un des sommets du triangle »

Tableau 26

Carmen	Laura	Emilia
Est accaparée par des phénomènes dynamiques qu'elle décrit sans les interpréter mathématiquement, ou interprète incorrectement les dépendances.	**Elles ne relèvent plus des phénomènes dynamiques sans une interprétation mathématique.**	
P2 En analysant sa solution, elle décrit : « G fait bouger la droite vers le haut et vers le bas, H fait bouger la droite vers la gauche et vers la droite et fait bouger tout le rectangle vers le haut» « je teste le mouvement de la figure et j'observe : 1. qu'elle tourne 2. à un moment donné ils deviennent une ligne 3. la figure qui était dedans sort 1. la figure peu à peu revient à sa première position "j'ai déplacé la figure et j'ai remarqué que lorsqu'elle tourne 180° les sommets s'inversent » « dépendant du sommet qui se déplace la figure tourne 180° soit verticalement, soit horizontalement » P4 Elle construit les cercles concentriques, deux points A et B sur deux cercles, et le triangle équilatéral ABC. Puis elle trace la médiatrice de AB, déplace B et dit : « le sommet C se déplace sur la médiatrice » Ce qui est une mauvaise interprétation. C ne se déplace pas sur la médiatrice, puisque la médiatrice change, mais plutôt C et la médiatrice se déplacent ensemble.		

Puis elle construit le lieu géométrique de C d'une part par rapport à A et d'autre part par rapport à B, et dit : « C est formé par l'intersection des deux lieux géométriques » Ce qui est une mauvaise interprétation, puisque ce sont les lieux qui dépendent de C. Plus tard, elle essaye d'utiliser la symétrie axiale pour construire le lieu géométrique du troisième sommet du triangle équilatéral, et elle est absorbée par les phénomènes dynamiques liés à la symétrie : « J'ai construit les symétriques de A,B,C,D. Et j'ai observé que lorsque je déplace A ou B les symétriques se déplacent en sens inverse, c'est-à-dire que si le mouvement était en sens positif, les symétriques s'approchent ou s'éloignent en sens négatif ». Elle construit le lieu de C par rapport à A et dit « j'ai essayé de faire le symétrique, mais seul un point apparaît, au lieu de tout le cercle » Puis elle trace une autre droite extérieure aux cercles, et les symétriques des cercles et des points, et dit : « Les points symétriques sont fixes. Les rotations des deux figures sont de sens contraires » Elle part des cercles a, b, c, les points A sur a, B sur B et C tel que ABC soit équilatéral. Elle trace le lieu de C par rapport à B, et une droite par un point D extérieur aux cercles qui passe apparemment par l'intersection du lieu et le cercle b. Puis elle tourne la droite jusqu'a ce qu'elle soit extérieure aux cercles, construit les symétriques des points et des cercles, et revient sur la position initiale de la droite, en faisant coïncider le cercle symétrique de b et le lieu géométrique .		



Alors elle trace une autre droite par le point D, construit les symétriques des cercles par rapport à cet axe, et déplace la droite jusqu'à faire coïncider le symétrique de b avec le lieu géométrique. Elle répète cette opération plusieurs fois et dit: "j'en conclus que par ce point on peut tracer une infinité d'axes qui sont solution"

Ces indices nous permettent de supposer que Carmen, bien qu'elle utilise Cabri dans ses démarches de résolution, et qu'elle semble avoir intériorisé que les constructions doivent conserver leurs propriétés lors du déplacement, continue à lire et interpréter les dessins comme des dessins statiques : elle fait des lectures de ces dessins sans chercher à les vérifier en utilisant les mesures, l'oracle et/ou le déplacement. Même lorsque sur le dessin on peut relever des erreurs à simple vue, elle ne les interprète pas comme une invalidation de la construction. Elle procède à des constructions qui utilisent l'ajustement sans manifester aucun contrôle : elle n'utilise pas de termes langagiers pour marquer le fait d'utiliser une figure ajustée, et comme elle utilise le déplacement uniquement pour valider des constructions qu'elle connaît (rectangle, triangle équilatéral), ces constructions sont en général erronées. Par ailleurs, elle relève de nombreux phénomènes dynamiques qui accaparent son attention, mais qu'elle décrit sans les interpréter mathématiquement.

Par contre, Laura et Emilia (et quelques autres) ont développé une démarche expérimentale : elles vérifient systématiquement les lectures qu'elles font sur les dessin, en utilisant les mesures, l'oracle et le déplacement. Elles valident leurs solutions par déplacement, et elles distinguent avec des marques de langage lorsqu'elles font des hypothèses sur un dessin ajusté. De plus, elles interprètent tous les phénomènes dynamiques de façon mathématique.

4.3.3 Le contrôle théorique des constructions, le problème de la discussion.

Les problèmes 2, 4 et 5, où la technique des lieux géométriques a été utilisée, ont conduit de manière naturelle à la discussion des problèmes. En effet, les sujets ont acquis l'habitude de déplacer les points libres une fois la construction terminée, pour vérifier que les propriétés restent invariantes. Dans le cas de ces problèmes, la solution disparaît pour certaines positions des points libres, et se pose alors la question sur les différents cas où il y a solution. C'est probablement la première fois que les enseignants sont confrontés à la discussion d'un problème de construction, et par conséquent ils ne disposent pas de techniques déjà développées.

Se pose ainsi la nécessité d'un contrôle théorique, pour décider si la disparition de la solution est due à une erreur de construction, à l'impossibilité de donner une solution dans un cas particulier, ou à une erreur du logiciel[27].

Sont analysées ci-dessous les discussions des problèmes 2 et 4 et les explications données par Laura et Emilia, qui semblent utiliser une démarche inductive pour justifier théoriquement de résultats apparemment surprenants.

Problème 2 inscrire un carré dans un triangle quelconque.

Emilia commence par résoudre le problème pour le cas particulier du triangle rectangle, et décrit la solution suivante : prendre la bissectrice de l'angle droit, dont l'intersection avec le côté opposé est un sommet du carré.

Puis elle utilise la technique des lieux géométriques pour résoudre le problème dans le cas générale, de la manière suivante : elle construit un carré qui a trois sommets sur le triangle et constate que le lieu du quatrième sommet est composé d'une ligne droite qui coupe le troisième côté du triangle. Elle trace une droite qui passe par un sommet du triangle et le quatrième sommet du carré. L'intersection de cette droite avec le troisième côté est un sommet du carré. Elle construit le carré à partir de ce point.

[27] En effet, la version de Cabri pour la calculatrice TI comporte des erreurs qui ont été corrigés pour les versions PC et Mac

Alors, elle déplace les sommets du triangle pour valider sa construction, et elle trouve que le carré disparaît. Mais, fait étonnant, elle ne parvient pas à trouver un carré lorsque le triangle est rectangle. Elle fait différents déplacements, et lorsqu'un angle s'agrandit, mais avant d'être droit, le carré disparaît. Alors elle décide d'expliquer ce phénomène de la manière suivante :

> «Je crois que c'est un défaut du logiciel, qui ne travaille pas avec des points, mais avec de petits segments, et pour cela il n'est pas exact dans certains cas comme le présent. Le logiciel considère que la base du carré sort de la base du triangle et alors le carré n'existe plus"

Ce qui se passe en réalité c'est que sa construction dépend d'un premier carré qui n'a que trois sommets sur le triangle. Lorsqu'elle déplace un sommet, ce carré-là disparaît, car un deuxième sommet n'est plus sur le triangle.

Laura :

Elle propose d'abord une solution différente de celle d'Emilia : elle remarque que le lieu géométrique est une droite qui passe par un sommet du triangle, et par le sommet du carré construit avec la hauteur du triangle comme côté.

Lorsqu'elle déplace les sommets du triangle pour valider sa construction, le carré disparaît, et elle commence une discussion en disant qu'il n'y a de solution que pour les triangles acutangles.

Mais confrontée à la construction d'Emilia, elle examine différentes positions pour lesquelles le carré disparaît, et semble chercher une classification de ces cas : elle trouve des solutions pour des triangles rectangles, obtusangles, mais pour quelques acutangles non. Alors elle dit :

> « il me manque d'observer si c'est vrai pour : un triangle équilatéral, isocèle ou scalène, car pour certains triangles acutangles fonctionne et pour d'autres non. Par ailleurs, je crois que le carré est inscrit lorsque le côté du carré dépend de la longueur du côté du triangle »

On voit que Laura et Emilia ne cherchent pas à analyser la construction, et ne considèrent pas non plus des arguments théoriques pour décider des cas où il y a solution.

Problème 4 : construire un triangle équilatéral avec ses sommets sur trois cercles concentriques.

Pour ce problème, Emilia et Laura utilisent de nouveau la technique des lieux géométriques, qui leur permet de trouver rapidement des cas pour lesquels il n'y a pas de solution. Ensuite, elles perfectionnent leurs procédures de construction des triangles solution, et varient les rayons des cercles, pour essayer de classifier les différents cas et valider les hypothèses qu'elles font.

Emilia essaye de trouver une relation entre les rayons des cercles et la longueur du côté du triangle solution, Laura fait l'hypothèse que la relation entre les rayons des trois cercles permet de dire dans quels cas il y a des solutions.

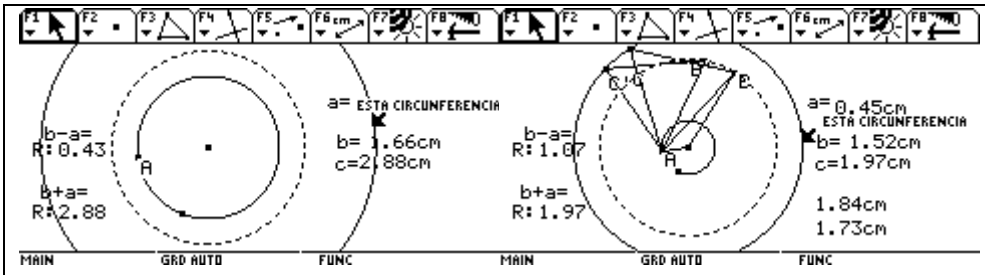
Mais les deux utilisent une démarche que l'on peut qualifier d'inductive : elles construisent les triangles solutions, puis modifient les rayons et tentent de classifier les cas où il y a des solutions, et les cas où il n'y a pas de solution. Une fois qu'elles formulent une hypothèse sur cette classification, elles la vérifient par des nouveaux déplacements.

Toutes les deux ont vérifié que le lieu géométrique du troisième sommet du triangle équilatéral est un cercle égal à celui sur lequel se déplace le point mobile, et qui a son centre

sur le cercle du point immobile. Elles savent que la solution est déterminée par l'intersection de ce lieu géométrique avec le troisième cercle. Néanmoins, elles n'utilisent pas ces propriétés pour essayer de prédire dans quels cas il y a solution. Elles multiplient les expériences et essayent de vérifier a posteriori.

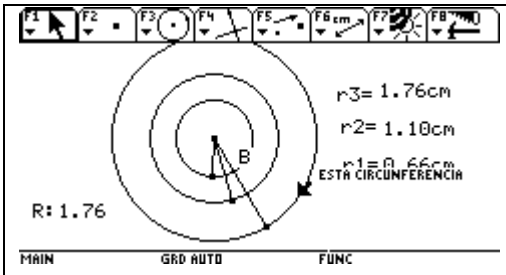
Dans cet effort de classification des cas, elles trouvent des résultats contradictoires qu'elles ne parviennent pas à expliquer :

Emilia

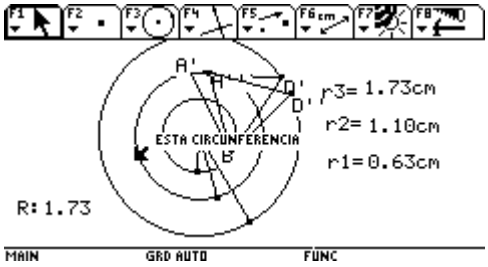


« dans les deux cas la somme des rayons est égale au rayon du troisième cercle, dans un cas il y a solution, dans l'autre non. Que se passe-t-il ? »

Laura



"lorsque R1+R2 = R3 il n'y a pas de solution"



"je viens de trouver une contradiction. Avant j'avais dit que lorsque R1+R2=R3 il n'y a pas de solution, ici j'ai trouvé une solution, je ne sais pas si c'est à cause de décimales de la calculatrice »

Il semble que le contrôle expérimental est devenu dominant, en détriment d'un contrôle plus théorique. Laura va jusqu'à faire des constructions spécifiques pour chaque cas : R1+R2=R3, R1+R2<R3, R1+R2>R3 pour résoudre la contradiction trouvée. Mais elle n'arrive pas à prévoir que lorsque R3<R1-R2 il n'y a pas non plus de solution.

Une explication possible de ce phénomène réside dans le fait que pendant la formation présentielle on a insisté surtout sur l'interprétation de phénomènes visuels en utilisant des connaissances géométriques, et non pas sur la prédiction de phénomènes visuels à l'aide de ces connaissances.

4.3.4 Problème d'instrumentation des nombres dans Cabri

Il y a une utilisation non contrôlée des nombres affichées par Cabri lors de mesures ou de calculs. Les enseignants ne semblent pas être conscients du fait que tous les nombres affichés ne sont que des expressions décimales arrondies, et ne distinguent pas entre un nombre exact et un nombre approché, malgré le fait que pendant le cours présentiel le formateur avait souligné cette distinction et avait institutionnalisé la procédure pour augmenter le nombre de chiffres décimales affichées par la calculatrice.

Exemples :

Emilia, P1[28] :

Elle a fait la construction de la figure à partir de A et C, et mesure le rapport AC/AB, afin de pouvoir construire C à partir de A et B. Elle obtient le chiffre 0,41 à l'écran, chiffre qu'elle n'interprète pas d'après la théorie. Elle l'écrit dans une nouvelle page et l'utilise comme rapport d'homothétie pour construire C à partir de A et B. Mais en agrandissant cette figure, on constate qu'elle n'est pas exacte, il y a une petite différence de mesure entre les côtés des parallélogrammes.

Le formateur intervient en lui proposant deux actions de vérification : 1) agrandir la figure, pour vérifier si elle conserve les propriétés, et 2) afficher plus de chiffres décimales. Entre temps elle a perdu sa construction, et la refait, en obtenant cette fois la valeur 0,58 (!), et elle montre plus de chiffres décimales, mais ne remet pas en question cette valeur, tellement différente de la précédente.

Emilia, P2[29] :

Elle fait la construction suivante : pose un point S sur le côté BC, trace une perpendiculaire à AB par S, nomme R l'intersection de cette droite avec le côté AB, construit un carré PQRS, et la droite BP qui coupe AC en P' ; ensuite, elle utilise ce point P' pour construire un carré inscrit dans le triangle ABC.

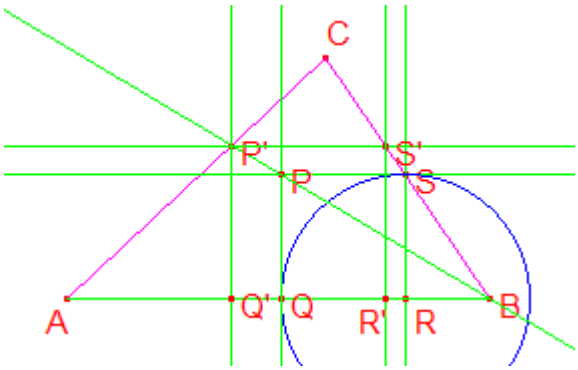


Figure 20

[28] Construction d'un carré et deux losanges à partir d'un segment.

[29] Inscrire un carré dans un triangle quelconque

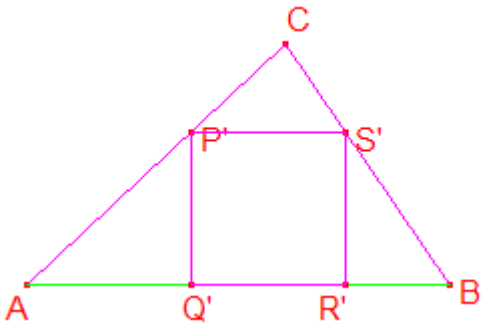


Figure 21

Lorsqu'elle déplace le sommet A pour vérifier sa construction, elle observe que le carré disparaît même avant d'arriver à un angle BAC de 90°. Ceci contredit son anticipation, selon laquelle il y a solution si les angles BAC et ABC sont aigus.

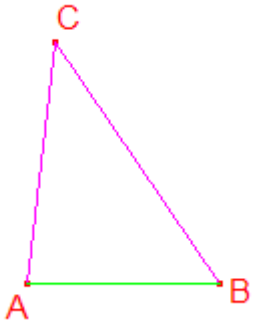


Figure 22

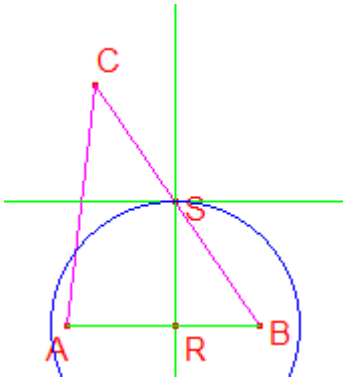


Figure 23

Alors elle interprète ce phénomène ainsi :

> «Je crois que c'est un défaut du logiciel, qui ne travaille pas avec des points, mais avec de petits segments, et pour cela il n'est pas exact dans certains cas comme le présent. Le logiciel considère que la base du carré sort de la base du triangle et alors le carré n'existe plus"

Explication totalement fausse, puisqu'en réalité (figure 15), en approchant le point A du point B, l'intersection du cercle de centre R et rayon RS avec le côté AB n'existe plus, et par conséquent le point P disparaît et le point P' aussi.

Laura, P3

Elle nomme le parallélogramme ABCD et le rectangle EFGH. Ensuite elle trace la droite CE qui coupe AB en I, la droite BH, la droite AG qui coupe CD en J et la droite FD. Ensuite elle

calcule AI/AB=0.25 et AH/AD=0,33 (valeurs affichées). Elle écrit ces nombres dans une nouvelle fenêtre et construit sa figure en utilisant l'outil homothétie ; alors elle constate que EFGH n'est pas rectangle.

Au lieu d'interpréter le nombre affiché comme écriture décimale d'un nombre rationnel correspondant au rapport des segments, elle prend ces expressions décimales (approchés) pour faire la construction.

Laura, P4

Une fois qu'elle a construit un triangle solution, elle étudie les différents cas, en construisant les solutions et en faisant varier le rayon du troisième cercle. Elle tire les conclusions suivantes :

- « Lorsque la somme des rayons des cercles C1 et C2 est plus petite que le rayon du cercle C3, il n'y a pas de solution.
- Lorsque la somme des rayons de C1 et C2 est égale au rayon du cercle C3, il n'y a pas de solution.
- Lorsque la somme des rayons des cercles C1 et C2 est plus grande que le rayon du cercle C3 il y a deux solutions. »

Elle manipule à la main les cercles, et regarde la valeur affichée des rayons, sans prendre conscience que ces valeurs ne sont pas exactes. Plus tard elle répète son expérience et dit :

> « Je viens de trouver une contradiction. J'avais dit avant que lorsque R1+R2=R3 il n'y avait pas de solution, et ici je trouve une contradiction, je ne sais pas si c'est dû aux chiffres décimales que la calculatrice affiche. Il semblerait qu'il y ait un seul triangle équilatéral. »

Alors elle décide de faire une expérience en contrôlant ces valeurs, et pour ce faire, elle construit un segment et un point sur le segment, pour représenter les 3 rayons. De cette manière elle vérifie que lorsque r1+r2=r3, il y a une solution.

4.4 Synthèse des résultats de la partie mathématique

Conformément à notre hypothèse No 1, les enseignants interprètent correctement les phénomènes statiques, et ils éprouvent des difficultés à interpréter mathématiquement les phénomènes dynamiques (mouvement conjoint, apparition disparition d'un point d'intersection). Ils utilisent d'autres cadres de référence pour interpréter ces phénomènes : par exemple, ils interprètent les segments comme des tiges rigides qui font déplacer ensemble deux points qu'elles relient. Ils ont pu invalider ces interprétations fausses à l'aide du déplacement, sans intervention du formateur. Egalement, ils ont eu des difficultés à représenter dynamiquement un énoncé géométrique : c'est le cas des 'trois droites parallèles données', qui a conduit à des multiples interprétations dynamiques, pas toujours en accord avec l'énoncé. Egalement, ils transposent directement dans Cabri les procédés de tracé avec instruments sur papier et par conséquent, malgré une interprétation géométrique correcte d'une figure, produisent des constructions ajustées qui sont invalidées par déplacement.

Une fois introduits les ostensifs langagiers pour identifier les phénomènes de dépendance (point libre, point sur objet et point fixe), et leur interprétation géométrique (point quelconque, point appartenant à un objet et point d'intersection), les formés ont commencé à les identifier et à les reproduire, ce qui confirme notre hypothèse 2, même si certaines difficultés persistent, comme l'a montré la réticence de Sylvie à accepter l'interprétation géométrique du phénomène de disparition d'un point d'intersection.

Par rapport à l'hypothèse 3, on a vu comment Laura n'a pas développé la validation de l'alignement en utilisant une droite, à cause de son incapacité à tracer une droite passant par deux points. D'autre part, l'instrumentalisation adéquate de l'outil 'redéfinir un objet' n'a pas suffit pour en faire un instrument mathématique, ainsi que la reconnaissance d'une option pour afficher plus de chiffres décimaux n'a pas garantit leur interprétation correcte par les formés.

Néanmoins, la plupart des formés ont développé des schèmes de validation en utilisant les outils de construction, les mesures et l'oracle, comme on l'a montré dans l'analyse des rapports de la pratique, ce que nous interprétons comme effet de l'utilisation des règles heuristiques 'voir plus que ce que l'on voit' et 'douter de ce que l'on voit' comme des technologies qui justifient et décrivent une démarche expérimentale (hypothèse 5), et de présenter d'abord le besoin de l'outil pour ensuite montrer sa syntaxe (hypothèse 6).

On voit que les formés se sont approprié les marques de langage pour contrôler la distinction entre construction ajustée et construction exacte, ce qui est une évidence du développement d'un non ostensif pour effectuer ce contrôle.

Egalement, on a mis en évidence deux effets didactiques : la recherche d'une stratégie logiciel (les formés pensent que la solution est une primitive du système, et l'invalidation ne met pas en cause cette hypothèse, ils pensent ne pas bien maîtriser l'outil), et l'abandon du raisonnement théorique pour expliquer un échec : ils pensent que l'erreur n'est pas contradictoire, mais produit d'une manipulation déficiente de l'outil.

5 Analyse de la partie didactique

Rappel : la partie didactique de la formation comprenait un cours présentiel de une semaine, et une période de pratique avec accompagnement à distance de 6 mois. Pendant le cours présentiel le formateur a explicité les choix didactiques du cours présentiel mathématique, et a effectué avec les formés des analyses didactiques pour produire, conduire et évaluer des activités de classe avec Cabri, avec un groupe expérimental d'élèves. Pendant la période de pratique les enseignants devaient planifier et mettre en oeuvre des activités de classe, observer la classe d'un collègue, et évaluer les activités réalisées.

Pour des motifs d'organisation administrative dans les écoles, la période de pratique s'est réduite à trois mois, et finalement les enseignants n'ont proposé plus de deux activités de classe avant l'observation finale. Par ailleurs, le dispositif didactique prévu pour cette période de pratique, qui prévoyait le travail en binômes par école, n'a pas fonctionné. Seuls deux enseignants ont ainsi observé la classe d'un collègue et ont travaillé ensemble à l'évaluation des activités.

5.1 Méthode et grille d'analyse

Dans la partie didactique, nous avons cherché à identifier des indices de la praxéologie didactique proposée. On a ainsi identifié le dispositif didactique utilisé par les enseignants, le type de problèmes proposés aux élèves, l'anticipation faite sur les stratégies des élèves, et les formes d'intervention prévues et effectives auprès des élèves.

Etant donné que pendant le cours présentiel on a enregistré le travail de l'enseignant chargé du cours pour le groupe expérimentale d'élèves, et cette activité avait été planifiée avec le formateur, ces enregistrements vidéo ne donnent pas assez d'information sur l'assimilation de la praxéologie par les enseignants, raison pour laquelle nous ne les avons pas retenus pour l'analyse. Par contre, les rapports de la période de pratique et les enregistrements de classe permettent d'identifier clairement les points où la pratique effective s'éloigne de la praxéologie proposée, et ces éléments nous permettent d'éclairer le processus de développement de la praxéologie au sein des différentes institutions.

5.2 Période de pratique

Pendant la période de pratique, chaque enseignant devait envoyer des rapports d'expérience de classe incluant la planification, les anticipations sur le comportement des élèves, et l'évaluation de l'activité développée. Nous avons analysé ces rapports en cherchant des indices du développement de la praxéologie didactique proposée pendant le cours présentiel.

5.2.1 Assimilation de la séquence proposée pendant le cours présentiel

On peut observer dans les rapports reçus une même séquence d'activité, qui correspond à la séquence proposée pendant le cours présentiel :

- familiarisation avec Cabri (outils minimaux : construire, déplacer, effacer, cacher)
- présentation et institutionnalisation de la validation par déplacement.
- identification de points libres, points sur objet et points d'intersection
- construction de droites parallèles et perpendiculaires
- autres constructions (rectangle, carré, parallélogramme, losange)

Avec le dispositif suivant :

- travail en petits groupes (deux ou trois élèves par groupe, une calculatrice par groupe)
- activités de description et reproduction de figures dynamiques ou statiques modèles
- mise en commun

Exemples :

Carmen :

Dans le premier rapport, elle présente comme objectifs de l'activité :

apprendre les lois de la géométrie dynamique[30]
distinguer les types de points[31]
identifier les outils pour effacer, cacher, déplacer, défaire.
construire une figure à partir d'un modèle dynamique donné.

Ses autres rapports montrent tous la même structure d'activité :

présentation d'une figure dynamique à décrire et à reproduire

utilisation des deux règles heuristiques : voir plus (enrichir la figure avec des constructions auxiliaires), et douter (déplacer les points).

utilisation des propriétés géométriques identifiées pour faire la construction.

Hugo :

Dans son premier rapport, il définit pour objectifs :

vérifier que les élèves utilisent correctement les outils 'nommer', déplacer, et effacer.
définir la différence entre faire un dessin et effectuer une construction[32]
Construire des droites avec une utilisation adéquate de la syntaxe.

Dans le deuxième rapport, les objectifs suivants :

déterminer le mouvement spéciale de certains points quand ils appartiennent à un élément géométrique (voir plus que ce que l'on voit)
Identifier et distinguer point quelconque, point appartenant à un élément géométrique et point d'intersection, et leurs relations avec points libres, sur objet et fixes dans Cabri.

Pour le troisième et quatrième rapport , les objectifs suivants :

construire un cercle avec centre sur un point donné et passant par un point donné.
construire un cercle avec centre et rayon donnés.
utiliser les outils 'cercle' et 'compas' de Cabri avec la syntaxe adéquate.
Identifier et distinguer droites perpendiculaires et parallèles.

[30] 'voir plus de ce que l'on voit' et 'douter de ce que l'on voit'

[31] 'libre', 'sur objet', et 'd'intersection'.

[32] C'est à dire, l'institutionnalisation de la validation par déplacement : un dessin est une construction ajustée, les propriétés se perdent pendant le déplacement, une construction garde ses propriétés pendant le déplacement.

Construire avec Cabri des droites perpendiculaires et parallèles avec la syntaxe adéquate.

Dans toutes ces activités il propose aux élèves d'examiner une figure dynamique donnée, de la décrire et de tenter de la reproduire.

Emilia :

Dans la première et deuxième activités, elle a défini les objectifs suivants :

Identifier les différentes icônes et outils de la calculatrice, en particulier 'droite', main, effacer, défaire, polygone,....
Identifier points libres, sur objet et fixes (dépendants d'autres éléments)
Identifier un point qui bouge librement sur le plan, point appartenant à une figure et point d'intersection.

Pour la troisième activité, elle a défini les objectifs suivants :

renforcer l'axiologie (sic) de construction de droites, segments, demi-droites.
distinguer droite, demi-droite, segment.
distinguer droites parallèles et perpendiculaires.
Identifier les différents parallélogrammes et ses propriétés.

Laura

Pour la première activité elle a défini les objectifs suivants:

construction de droites, droites parallèles, droites perpendiculaires, segments, milieu, points sur objet et points d'intersection.
effacer et déplacer des objets
Identifier point libre, point sur objet et point fixe.
Construire un carré et un triangle équilatérale.

Bien que tous les enseignants semblent reproduire la même séquence, cette reproduction n'est pas mécanique : on constate des différences dans le découpage temporel des activités, et dans les figures proposées aux élèves, ce qui indique une appropriation de la praxéologie proposée.

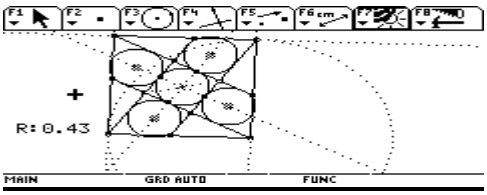
5.2.2 Traces d'éléments techniques et technologiques de la praxéologie didactique :

Dans les rapports reçus nous trouvons des traces d'éléments techniques et technologiques de la praxéologie didactique travaillée pendant le cours présentiel. Ces traces sont des indices d'une appropriation sommaire de la praxéologie. Bien que ces rapports étaient destinés au formateur, il n'était pas demandé explicitement de justifier les choix, et les exemples qui suivent sont des déclarations spontanées de la part des enseignants.

Exemples

Carmen :

On a écrit sur le cahier les deux lois : a) Voir plus que ce que l'on voit et on a montré les éléments cachés d'une construction.



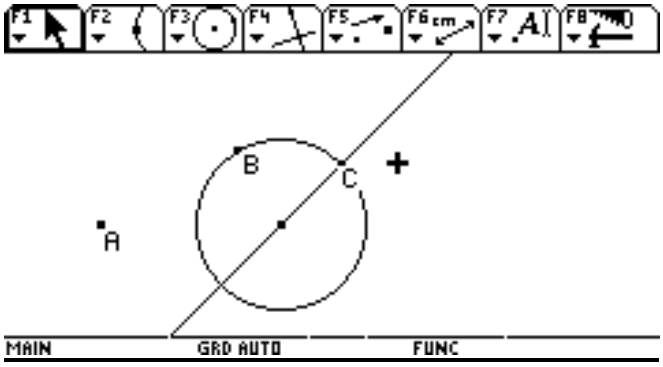
On a montré qu'il faut trouver les constructions qui ont produit le graphique

Dans la deuxième loi on a déplacé le graphique et on a observé que les propriétés restent vraies malgré que la figure tourne, s'agrandisse ou rapetisse.

Carmen reprend ici les deux règles heuristiques comme des éléments technico-technologiques qui vont régler les actions dans la suite. Elle présente ainsi le 'jeu de construction' comme une devinette : « il faut trouver les éléments cachés qui donnent origine à la construction ».

Par contre, on ne voit pas très clairement la validation par déplacement : elle montre que la figure conserve ses propriétés pendant le déplacement, mais elle ne met pas en scène l'invalidation.

b) On a fait une construction pour distinguer les types de points



On a observé que a était un point libre qui pouvait être déplacé sur tout l'écran.

B, point sur objet, se déplaçait selon la trajectoire d'un cercle.

C ne pouvait pas être pris et était un point fixe déterminé par l'intersection du cercle et de la droite

Dans la deuxième activité, elle propose une figure dynamique modèle à reproduire : un losange construit à partir d'une diagonale. On peut trouver des traces des techniques didactiques dans les anticipations faites et dans les commentaires de l'activité :

En effet, sous le titre de 'difficultés probables', elle écrit :

> «a) construire le losange avec des segments en essayant d'obtenir des angles opposés égaux et côtés égaux
>
> b) construire un carré avec polygone régulier F3, 5
>
> c) Tracer un cercle et y poser des points de manière à voir un losange »

C'est à dire qu'elle anticipe deux stratégies perceptives de la part des élèves : prendre quatre segments et les ajuster jusqu'à obtenir la forme d'un losange, ou prendre quatre points sur un cercle et les ajuster jusqu'à obtenir la forme d'un losange. Elle ne nomme pas la technique d'invalidation par déplacement dans ces cas, mais on peut supposer qu'elle est envisagée.

La troisième stratégie prévue est celle d'utiliser l'outil polygone régulier. On peut imaginer qu'elle va la disqualifier par contrat (c'est interdit d'utiliser polygone régulier), ou bien par comparaison de la classification de points : sur le modèle il n'y a que deux points libres, tandis que sur le carré produit avec polygone régulier il y en a quatre.

D'autre part, sous le titre 'consigne', elle écrit :

> « Appliquer la loi douter de ce que l'on voit pour observer si les propriétés restent invariantes »

Ce qui demande de valider par déplacement. Plus tard, lorsqu'elle décrit le déroulement de l'activité, elle dira « lors du déplacement, certains points ne remplissaient pas les conditions du problème proposé », ce qui montre qu'effectivement il y a eu une invalidation par déplacement.

(Les autres rapports présentent les mêmes éléments, tous proposent des figures dynamiques à reproduire, sur la base d'un carré. Elle prévoit des stratégies perceptives, et demande explicitement de déplacer pour valider)

Emilia :

Dans le rapport 3, l'activité proposé est construire un rectangle. Emilia demande explicitement d'énumérer les propriétés d'un rectangle pour les utiliser dans la construction. Lorsqu'elle décrit comment elle anticipe le comportement des élèves, elle dit :

> « ils ne savent pas construire des droites parallèles et perpendiculaires
>
> ils construiront des dessins avec des segments, et lors du déplacement ils perdront la forme
>
> Ils vont perdre patience en voyant que lors du déplacement la figure perd sa forme »

Elle anticipe donc des stratégies perceptives et l'invalidation par déplacement des constructions ajustées.

Plus tard, lors qu'elle décrit le déroulement de l'activité, elle écrit :

> « Quand je leur ai demandé de déplacer un sommet et si c'était un rectangle, ils ont répondu que non, avec déception. Un groupe a dit 'c'est la prof qui détruit tout !' »

Et elle décrit aussi les difficultés d'instrumentalisation de la part des élèves :

> « la plupart cherche l'outil 'perpendiculaire'... mais... 'prof, elle ne fait rien, je lui demande de faire la perpendiculaire mais il ne la fait pas'...Ils n'avaient pas tracé de droite et ils voulaient qu'il trace une perpendiculaire »-
>
> « après avoir construit les perpendiculaires ils ont des difficultés pour définir les intersections ».

Hugo :

Dans sa première activité il met en scène l'invalidation par déplacement. Il présente deux carrés ; un obtenu par ajustement et l'autre par construction, demande la description de chaque figure, puis déplace et compare. Egalement, il montre deux droites avec deux points, dans le premier cas la droite passe par les deux points, dans le deuxième cas elle passe par un seul point, l'autre est posé sur la droite par ajustement.

La consigne est décrite ainsi :

> « a. Ouvrir le fichier 'figure 1'

b. dessiner sur le cahier ce qu'ils voient sur l'écran

c. nommer les points

d. décrire ce qu'ils voient sans changer la figure

e. utiliser l'outil 'déplacer' et décrire ce qui se passe

f. construire une figure avec ces caractéristiques ».

On voit comment il met en scène la validation par déplacement, et demande d'identifier les phénomènes statiques et les phénomènes dynamiques.

Plus tard, lorsqu'il décrit le déroulement de l'activité, il dit :

> « Ils ont identifié clairement, sur la figure exemple, deux carrés, segments perpendiculaires et segments parallèles ; lors du déplacement non seulement ils ont vu que plusieurs des caractéristiques observés n'étaient pas vraies mais ils étaient surpris et par la suite ils disaient « il semble que... », et mettaient en doute ce qu'ils voyaient ».

Dans le deuxième rapport il propose une activité pour identifier les types de points de Cabri : point (libre), point sur objet et point d'intersection, et les mettre en rapport avec les concepts de point quelconque, point appartenant à un objet et point d'intersection. Il donne une figure dynamique à décrire et manipuler pour essayer de la reproduire.

Dans la description du déroulement il dit :

> « la première construction qu'ils ont montré était un « dessin » identique à la figure solicitée et tous ont été d'accord, mais ils ont sollicité de déplacer les points, et ils ont vu que ce n'était pas la construction demandée ».

Ce qui montre comment la classe s'est approprié l'invalidation par déplacement.

Dans le troisième rapport il propose une activité pour apprendre à utiliser les outils 'cercle' et 'compas'. Il décrit ainsi une partie du déroulement de l'activité :

> « Certains élèves ont fait d'abord le cercle et ensuite ils ont mis deux points sur objet pour obtenir la figure, mais lors du déplacement elle ne remplissait pas les conditions désirées. Je ne pensait pas qu'ils auraient autant de difficultés, mais finalement ils se sont rendu compte que le centre du cercle était un point fixe et les autres étaient libres ».

Laura

Dans son deuxième rapport (construction d'un parallélogramme) et son troisième rapport (construction d'un carré avec quatre cercles tangents à l'intérieur), elle décrit ainsi sa manière d'anticiper le comportement des élèves :

« Probablement les étudiants commenceront leur construction avec une stratégie similaire à celle qu'ils emploient sur papier, et tenteront d'ajuster le parallélogramme (essai erreur) en s'appuyant sur la visualisation.

A ce moment il est important de leur proposer de soumettre à déformation les constructions pour générer des conflits et les pousser à chercher d'autres stratégies plus en accord avec l'énoncé. Probablement certains proposeront la construction de figures régulières pour garantir que les côtés opposés soient parallèles »

On voit ici l'anticipation d'une stratégie perceptive, et son invalidation par déplacement (qu'elle nomme comme 'soumettre à déformation') ; en plus, on voit un élément technologique : « pour générer des conflits ». On fait l'hypothèse qu'elle fait référence aux conflits cognitifs de la théorie piagetianne (qui n'a pas été invoqué pendant la formation).

Ces traces des éléments techniques et technologiques de la praxéologie didactique proposée montrent une appropriation surtout au niveau technique, mais pas au niveau technologique, où les référents théoriques ne sont pas claires. Mais étant donné que la tâche du rapport ne demandait pas explicitement de justifier les choix, nous ne pouvons pas conclure que les éléments technologiques n'ont pas été assimilés.

5.2.3 Analyse didactique déficiente:

Dans les rapports reçus, il n'y a pas des traces d'une analyse a priori et a posteriori de l'activité, tel qu'ils ont été faits pendant le cours présentiel. Il semble que les anticipations et les observations faites par les enseignants ne font pas de référence à l'activité mathématique des élèves, mais à leur comportement (inquiets, déconcentrés, etc.) ou à leur motivation (intérêt, indifférence, etc.). Il est important de remarquer que les conditions de travail dans les écoles ne sont pas optimales, avec des groupes entre 35 et 40 élèves par groupe, et des salles très petites. De plus, ils ont une calculatrices pour 2 ou trois élèves, et le contrôle de l'attention des élèves pendant le cours est une préoccupation réelle.

Exemples

Carmen, premier rapport, évaluation de l'activité :

1. elles ont fait des efforts pour distinguer les classes de points
2. elles ont réalisé les exercices de déplacer, cacher, effacer et récupérer.
3. l'analyse de la figure était difficile
4. la construction n'a pas été finie
5. Elles n'ont pas noté les procédés
6. Elles était impatientes de ne pas trouver le résultat rapidement.

Et dans le quatrième rapport,

1. elles ont réalisé des efforts pour suivre les consignes.
2. seuls 6 filles ont fini et ont fait un rapport complet
3. les filles sont trop inquiètes et certaines donnent les solutions aux autres.
4. Quelques unes ont persévéré jusqu'à la fin, d'autres ont été déçues quand la figure se déformait en déplaçant.

Emilia

> Très peu d'élèves suivent les indications, certains cherchent les figures qu'ils avaient commencé à explorer, d'autres ne comprennent pas ce qu'ils doivent faire, et d'autres font n'importe quoi. Là, je suis comme 'une poule qui élève des canards', car les uns demandent qu'est-ce qu'il faut faire après avoir caché les droites, les autres comment ouvrir le fichier, les autres qu'est-ce qu'il faut faire avec le fichier et les autres s'impatientent car ils ne savent pas comment cacher les droites, et tous veulent des réponses immédiates.
>
> En générale le travail s'est amélioré, il y a plus d'ordre, ils ne s'impatientent pas quand je ne leurs réponds pas immédiatement ; le problème du nombre de calculatrices continue, seul dans un groupe un élève fait l'exercice et passe la calculatrice à l'autre, si non il y a un qui travaille et les autres parlent.

Hugo

> J'ai trouvé plusieurs difficultés :
>
> L'école réalise beaucoup d'activités pendant les heures de classe, et on n'a pas de régularité dans le travail.
>
> Les élèves ne sont pas habitués à faire des mises en commun et ils n'écoutent pas les autres. J'ai du interrompre le cours pour parler de l'importance d'écouter les autres et de participer dans la mise en commun.
>
> Le temps planifié se raccourcit par des éléments externes, comme le temps de changement de salle.

On ne trouve pas des références à l'activité mathématique des élèves, ni au fonctionnement de la tâche par rapport à leurs connaissances. Ils constatent des difficultés, mais ils ne tentent pas de les expliquer par une analyse mathématique de l'activité. Ceci est un indice que les enseignants ne se sont pas appropriés l'analyse didactique proposée pendant le cours présentiel. C'est peut être du aux difficiles conditions de travail et à la nouveauté de la technologie qui modifie les rapports à l'intérieur de la classe, mais aussi à leurs conceptions des mathématiques et de l'enseignement.

5.3 Observation finale

Comme observation finale, nous avons enregistré une activité de classe de chaque formé avec ses élèves. Les activités observés avaient une durée entre 45min et 90 min.

5.3.1 Utilisation du 'jeu de construction' avec la validation par déplacement

Tous les enseignants ont utilisé un 'jeu de construction' pour l'activité de classe, pour lequel la validation par déplacement fonctionne comme phase de validation.

Tableau 27

Avec modèle dynamique	Laura, Sylvie, Carmen, Hugo
Avec modèle statique	Cyril
Avec énoncé	Emilia et Christopher

Christopher a proposé un problème différent, en cherchant provoquer des stratégies plus déductives : construire un quadrilatère et un triangle avec le même aire.

Tous les enseignants ont demandé le déplacement pour valider une fois la construction finie. Je vais présenter des interventions de chaque enseignant auprès des élèves lors de la résolution des problèmes, où l'on observe cette validation.

Cyril

(il a proposé un modèle sur papier: Avec la description suivante : les carrés sont concentriques, leurs sommets sont alignés, la distance entre le carré intérieur et le carré du milieu, est égale à la distance entre le carré du milieu et celui extérieur)

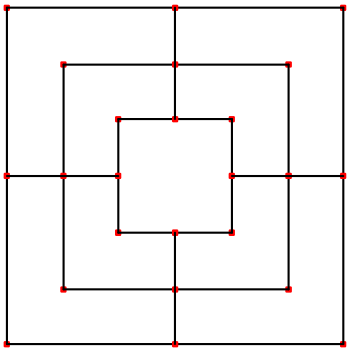


Figure 24

[les élèves montrent une figure apparemment correcte]

C: c'est bien!

C: tu peux nous raconter ta démarche?

e1: j'ai pris d'abord le petit cercle, non? et j'ai mis deux... deux... droites? pour le... milieu... ensuite nous avons pris... nous avons fait des segments... et nous avons fait ainsi avec chacun. Ensuite nous avons pris en F4 milieu, de chaque droite et nous avons pris...

e2: ensuite nous avons caché les cercles et les droites

C: vous avez tout caché.

C: *et ceci va supporter le déplacement? si je veux déplacer cette figure...*

[l'élève tente de déplacer les points, mais ils ne se laissent pas prendre]

e1: il ne se laisse pas prendre

C: regardons voir si un de ces points se laisse... Que se passe-t-il?

C: ceux qui ne se laissent pas prendre, pour quoi est-ce qu'ils ne se laissent pas prendre?

C: quel genre de points sont ils?

e1: points...

e2: points milieux

e1: points immobiles

C: oui, ce sont des points immobiles, qui ne bougent pas par eux mêmes. Mais pourquoi c'est comme cela?

e2: ils dépendent d'un segment de droite?

C: ils dépendent d'autres objets. Alors ils sont points d'intersection.... Aucun ne se laisse prendre.

C: si? tu as trouvé un?

e1: ici apparaît la petite main

[il déplace le point, le carré extérieur rapetisse, les autres non]

C: que se passe-t-il? se garde?

C: que s'est il passé? on révise? mais d'abord il faut faire quelque chose [il fait signe d'écrire]

Cyril demande de valider la construction en déplaçant les sommets. C'est intéressant de remarquer que les élèves ne semblent pas savoir quels points peuvent être déplacés, même si ce sont eux qui ont fait la construction. Cyril doit leur rappeler alors que les points d'intersection ne peuvent pas être déplacés. Finalement, l'élève parvient à déplacer un point, et seul un carré se modifie, faisant perdre la proportion des trois carrés, ce qui invalide la construction.

Emilia

(a proposé la construction d'un carré, en explicitant ses propriétés : quatre côtés égaux, quatre angles droits)

[il y a quatre droites apparemment formant un carré (horizontales et verticales), et des mesures de distance égales. le curseur signale un point au sommet supérieur droit]
e- Pourquoi il dit là 'quel objet'?
e1- parce que je suis en train de signaler là
e- non, pourquoi il dit 'quel objet'
e1- je ne sais pas
e- regarde voir, enter pour voir ce qui s'est passé là.
[il fait enter, apparaît une liste: 1.Ce point 2.ce point]
e- que s'est il passé?
e2- ce point
e- ah, qu'il y a deux points
e- s'il y a deux points tu ne pourras pas identifier avec lequel tu as travaillé
e- efface le deuxième
e1- comment je l'efface?
e- enter, tu l'as déjà identifié. Avec quoi on l'efface? [elle signale la touche]
e- oui. bon, tu as déjà effacé le point. *Maintenant bouge celui-là pour voir s'il reste carré.*
[l'élève déplace le point, qui bouge sur la droite horizontale, et la mesure change, mais les droites ne bougent pas]
e- il n'était pas sur l'intersection. Que s'est il passé là?
e1- la droite n'est pas intercepté avec le point
e- *bon, alors cherche un autre point que tu ait mis pour l'intersection pour voir si quand on le déplace...*
[il prend un autre sommet et le déplace, et la droite verticale se déplace, détruisant le carré. Il remet le point dans sa position originale]
e- que s'est il passé avec les mesures?
e1- elles sont là. Mais si je le bouge, elles bougent toutes.
e- et... il se forme un carré?
e1- non, il devrait bouger tout le carré
e- justement, l'objectif c'est un carré. C'est un carré?
e1- non, madame.
e- alors?
e1- je dois recommencer?
e- tu dois penser à nouveau pour voir ce que tu peux faire.

Emilia demande la validation par déplacement de la construction du carré. Le premier point déplacé bouge sur une droite horizontale, mais ne modifie pas la figure. Le déplacement du deuxième point modifie la pente d'une droite, invalidant la construction. C'est intéressant de

remarquer que Emilia demande d'utiliser comme critère de validité la forme, mais l'élève utilise comme critère de validité la dépendance : « il devrait bouger tout le carré », c'est-à-dire les autres points devraient bouger aussi ; comme ils ne bougent pas avec celui-là, la construction est invalidée.

Laura (a proposé un modèle dynamique avec un triangle rectangle –sommet rectangle sur un demi-cercle- et des carrés sur les côtés du triangle, configuration de pythagore)

[elles ont une figure avec un triangle et un carré construit sous sa base]

e1: il s'est effacé...

L: bien, tout à l'heure on va ramener la figure, mais je veux savoir qu'est-ce que vous faites ici dans cette partie là.

e2: nous avons tout caché, et nous avons vu un segment. Alors nous avons commencé par ce segment.

L: et ce segment qu'est-ce qu'il a..

L: ce segment... c'est le quel?

e1: celui-là

e2: de A à B

L: ah... de A à B. Bien. après?

e1: on a fait le polygone

L: vous avez caché des choses de la figure? de la construction?

e2: oui

[Laura fait cacher/montrer]

L: non, seul ce point est caché.

e1: c'est pour cela que je dis qu'il a disparu...

[*Laura prend la calculatrice et déplace le sommet supérieur du triangle*]

L: ce point c'est lequel?

L: ce point est le point C?

e1:oui

[*Laura le déplace*]

L: il se comporte de la même manière?

e1, e2: non.

L: alors, que se passe-t-il?

L: car ce point il bougeait comment?

e2: en forme d'arc.

L: en forme d'arc et il passait par où, ce point C?

e2: par A et par B.

L: exactement. Alors qu'est ce qu'on n'a pas bien fait, qu'ici est comme cela, mais pas dans notre construction.

e2: l'arc.

On voit comment elle évalue si la construction est exacte ou ajustée, non pas en déplaçant directement, mais en regardant s'il y a des objets cachés, indices d'un procédé de construction ; comme elle ne trouve pas d'objets cachés, elle déplace les points pour invalider la construction. Mais comme les élèves n'avait pas identifié le triangle comme rectangle, le changement de forme produit par le déplacement n'invalide pas la construction. Elle demande alors de comparer le mouvement des points dans la figure modèle et dans la figure construite, ce qui permet l'invalidation de la construction.

Sylvie

(même problème que Laura : configuration de pythagore)

e1: prêt prof

S: prêt?

e1: oui, madame

S: montre moi, qu'est-ce que vous avez fait

[il montre la figure modèle et une autre apparemment identique]

S: *bien, et vous avez déplacé*?

e2: oui,

e1: oui, regardez.

[il déplace le sommet rectangle du triangle, et les carrés se conservent. Mais lorsqu'il passe sur B, les carrés se superposent]

[ils rigolent]

S: que s'est il passé?

e2: que s'est il passé?

S: que s'est il passé?

On a ici un cas intéressant. Sylvie demande la validation par déplacement, et quand l'élève déplace le point C, les carrés construits sur les côtés du triangle ne se déforment pas. Néanmoins, lorsqu'il dépasse le point B, la figure ne se comporte pas de la même manière que le modèle : sur le modèle, le point C est sur un arc de cercle, donc il ne dépasse pas B, mais saute directement à A ; par contre, dans la figure construite par les élèves le point C est sur un cercle, et il peut passer sur l'autre demi-cercle. Ainsi, la construction est invalidée.

Christopher (a proposé de construire un quadrilatère et un triangle, de manière qu'ils conservent le même aire pendant le déplacement)

[l'élève a un quadrilatère et un triangle qui se superposent, et ont le même aire, elle est en train de déplacer un sommet du triangle]

C: ouille !. c'est bon?

e: mais ....

C: *il se conserve toujours ?ou non*

e: non, mais seulement vers le haut

C: seulement vers le haut? et vers les côtés? déplace-le vers les côtés.

[e déplace vers la droite, et l'aire n'est plus la même]

C: oh... que s'est il passé? regardons sous cacher montrer et tu continues à déplacer.

Ici, l'élève avait fait la validation avant le questionnement de Christopher , et le déplacement avait invalidé la construction.

5.3.2 Existence d'un canevas pour l'intervention

Malgré le fait que les enseignants savent utiliser le déplacement comme élément d'invalidation de constructions ajustées, on observe des interventions où ils ne l'utilisent pas, et où ils ne décèlent même pas l'ajustement de la construction. En examinant de près toutes les interventions de chaque enseignant, nous avons constaté qu'ils suivent un canevas pour les guider tant pour l'interprétation du travail des élèves, que pour leurs interventions auprès d'eux. Ce canevas est l'anticipation qu'ils font du comportement des élèves, d'après l'histoire didactique de la classe, et ce qu'ils savent des élèves. Il est fortement déterminé par les institutionnalisations faites précédemment.

Par exemple, Emilia avait travaillé dans les séances précédentes la construction d'un rectangle, construction qu'elle avait institutionnalisé. Dans la séance observé, elle demande de construire un carré, et elle explicite avec les élèves les propriétés qu'elle attend trouver : quatre angles droits, quatre côtés égaux. Elle s'attend alors à ce que les élèves utilisent l'outil 'droite perpendiculaire' pour produire des angles droits, mais qu'ils ne sachent pas comment produire des côtés égaux ; elle va chercher alors des constructions ajustées uniquement pour l'égalité des côtés et non pas pour les angles droits.

e- c'est un carré?

....

e- déplace un sommet pour voir ce qui se passe.

[elle déplace un sommet et la droite associé se penche. Les élèves rigolent]

e- il n'est même pas...

e1- prof, mais nous l'avons fait comme ça. [elle remet le point à sa position originale]. Là il est correct.

e rigole

e- voyons. la question est: *tu utilises perpendiculaires, n'est-ce pas? Mais là tu les a utilisées incorrectement, car quand tu déplaces, elles bougent*. La question est: jusque là tu utilises une des propriétés qui est avoir quatre angles droits. c'est ce que tu traces avec les perpendiculaires. la question est: pour qu'il soient des côtés égaux, quelle figure peux te donner côtés égaux, ou segments égaux; congruents, de même mesure. quelle figure

e1- le carré

e- le carré, mais comme c'est ce que tu vas construire, quelle autre figure

e- le carré et quelle autre?

On voit dans cette intervention, que même lorsqu'elle rencontre une construction ajustée pour les angles droits, elle affirme qu'elles ont utilisé perpendiculaires 'mais elles les ont utilisées incorrectement', et passe au problème des côtés égaux.

Dans toutes ses interventions, elle va se centrer sur le problème de comment obtenir des côtés égaux, et elle cherchera à suggérer d'utiliser le cercle, sans le dire directement. Elle pose la

question : quelle figure géométrique peux donner des côtés égaux ? Et s'attend à la réponse « le cercle ». Mais en voyant que les élèves ne répondent pas cela, elle va leur demander de se rappeler comment procède Cabri lorsqu'il construit un polygone régulier. Les élèves penseront alors au cercle, mais pas dans le sens qu'elle attend, et ils vont tenter d'inscrire le carré dans un cercle, par ajustement.

Cyril, pour sa part, avait travaillé précédemment la construction du carré, et propose une figure où il faut construire trois carrés concentriques, de manière que 'la distance du carré intérieur à celui du milieu est égale à la distance du carré du milieu à celui extérieur'. C'est à dire qu'il s'attend à trouver des constructions correctes pour les carrés, mais ajustées pour les distances égales entre carrés. C'est ce que l'on peut observer : il demande la validation par déplacement, mais lorsque les élèves montrent des constructions dans lesquelles les sommets du carré ne peuvent pas être déplacés, il ne décèle pas les procédures ajustées ; par contre, il demande la validation des distances égales.

C- montre moi

[on voit la figure demandée]

C- oh¨! très bien! tu as réussi!

C- alors, je dois te poser quelques questions. d'abord...

e2- je peux participer, pour les questions?

C- bien sûr! vous avez travaillé ensemble... excuse-moi. tu as tout à fait raison. £viens ici... je ne sais pas si c'est ma vue qui défaillit ou si c'est une question de l'écran... mais qui me garantit que la distance entre le carré extérieur jusqu'au carré du milieu est égale à la distance du carré du milieu au carré plus petit.

e1- elle n'est pas la même.

C- elle n'est pas la même.

e1- ah. Mais on peut l'effacer.

C- non, mais avant d'effacer regardons qu'est-ce qu'il faut corriger...

C- avant d'effacer, raconte moi comment vous avez fait

e2- nous avons d'abord fait les diagonales... nous avons mis le milieu et

C- comment sont ces diagonales?

e1- segments.

C- si vous avez commencé par diagonales...Vous dites, d'abord nous avons tracé des diagonales... mais pour tracer une diagonale nous avons besoin d'avoir un polygone et les sommets pour tracer la diagonale? alors on ne peut pas commencer par là... ce seraient des diagonales ou des droites?

e2- des droites

Ah... droites... et comment sont ces droites? Quelle caractéristique ont elles? ou c'était au hasard...

e1- non, car nous avons fait F2, segment, avec segment on a fait le cadre...

C- le carré.

e1- le carré

C- et qui garantit que c'est un carré? laissez moi voir ce qui est caché.

[il n'y a rien de caché]

e1- euh.. ce qui est caché c'êst ceci, mais nous n'avons pas encore caché.

C- alors vous n'avez pas travaillé avec ...(f7 1, escape). vous n'avez rien caché... votre travail c'est directement cela... mais alors on a des petits problèmes, comme les distances ne correspondent pas. Et qui nous garantit que ce soit un carré? Vous avez une vision très bonne, mais moi pas... et seulement à l'oeil c'est un peu difficile. Alors on doit vérifier si on a utilisé un des procédés que nous connaissons pour construire un carré... vous vous rappelez?

e1- oui

c- alors révisez, et prenez en compte que les distances entre carrés doivent êtres égales.

e2- nous pouvons le faire en utilisant cercle?

C- vous pouvez utiliser n'importe lequel des procédés.

On voit comment il n'a pas pensé à la validation du carré en premier lieu, mais à la validation des distances entre carrés. Alors, il a voulu vérifier si elles avaient utilisé une procédure de construction pour le carré, en montrant les objets cachés. Même à ce moment là, il n'utilise pas le déplacement pour invalider, mais fait une invalidation par contrat : elles devraient connaître deux procédures pour construire des carrés, il faut utiliser une d'entre elles.

Dans le cas de Laura, son canevas prévoit la vérification des types de points, et elle cherchera à valider d'abord la description de chaque point, et ensuite le déplacement des points de la construction. Elle demandera alors le déplacement d'un point pour le comparer avec le point homologue sur la figure modèle.

L: euh... je voudrais savoir... bon, pour pouvoir nous comprendre... tu dis que celui-ci est le point A et celui-ci est le point B?

e1: oui, madame.

L: bien. Et ce point ici?

e2: ce seraient le F et le G

L: bien. Regardons le point F comment il bouge ici à l'écran. Pour voir si dans votre construction il bouge de la même manière.

[e1 tente de déplacer F, mais il ne se laisse pas prendre]

L: là il bouge?

e1: non

L: non. Maintenant regardons le point F que tu me dis qui est là, pour voir s'il conserve la même propriété de ne pas bouger.

e2. non prof, mais...

L: ce que dans ma construction les points doivent bouger exactement de la même manière que dans la figure.

[e1 déplace le point]

L: il bouge?

e1: oui madame.

L: alors... ce n'est pas la même figure. N'est-ce pas? car le point ici il ne bouge pas, et dans ma construction il ne doit pas bouger non plus.

Hugo aussi demande une validation en utilisant comme critère de validité les types de points :

H: regarde que tu fais ce point-ci comme intersection. Ce point que tu signales, ce point ci, comme intersection. alors tu dois regarder dans la figure originale si ce point est fixe. Tu ne pourrais pas le prendre pour le déplacer. Alors regarde dans la construction originale pour voir si c'est comme cela.

H: de même tu fais pour ce point. Ce point, déplace-le... il peut être déplacé. Vers le haut, vers le bas... alors il est un point comment, s'il bouge dans tous les sens.

e1- libre

H: alors, regarde dans la construction dans l'originale pour voir s'il est libre, pour savoir si tu vas bien et tu orientes bien ton travail. Prêt?

Ces extraits montrent comment les enseignants suivent un canevas dans leurs interventions auprès des élèves, canevas défini par leur anticipation sur les réactions des élèves, leurs connaissances et leurs difficultés.

5.3.3 Utilisation du logiciel pour invalider des interprétations mathématiques fausses

Lors de l'analyse des figures, les élèves font des interprétations mathématiques fausses des phénomènes qu'ils observent à l'écran. On a observé deux enseignants qui utilisent le logiciel pour proposer des invalidations de ces interprétations fausses.

Le premier cas c'est celui de Christopher . Il intervient auprès d'une élève qui a construit un quadrilatère en utilisant l'outil 'polygone', et a affiché l'aire du quadrilatère. Mais elle dit que le nombre affiché correspond uniquement à un segment. Alors Christopher utilise l'outil 'cacher/montrer' pour invalider l'interprétation du polygone comme segment.

e- c'est un quadrilatère... mais quand je veux avoir l'aire il ne me donne l'aire que de ça [elle signale un côté] mais pas des autres.
c- comment tu peux trouver l'aire de? Je pense que... *on va cacher pour voir ce qu'il appelle polygone*. F7. il dit... ce point non. Cherche jusqu'à ce qu'il dise ce polygone. là au milieu. Maintenant scape pour voir ce qu'il prend.
[tout disparaît sauf un point et l'aire]
e- il prenait seulement un point
c- il ne prenait qu'un point?
e- oui.
c- et pourquoi le reste est disparut?
e- car il n'a pas trouvé l'aire?
c- mmm... *on va montrer à nouveau le polygone pour voir qu'est-ce que le polygone. Regarde ce qui apparaît et disparaît pour savoir ce qu'est le polygone*.
c- qu'est-ce qui était disparut?
e- il est apparu tout ceci, et disparut tout ceci [elle signale le contour du polygone]
c- alors, le polygone c'était quoi?
e- [silence] comment cela?
c- tu m'avais dit que le polygone n'était que ceci. Tu m'as signalé ceci. Alors on a caché, et quand il a caché, qu'est-ce qu'il a caché?
e- tout sauf ce point.
c- tout sauf ce point. Cela veut dire que le polygone c'est qui.

e- ce point?
c- ah, ce point c'est le polygone. pour quoi?
e- non, ceci c'est celui qui... je me suis embrouillée.
c- tu es embrouillée? alors, ce nombre d'où sort il?
e- de l'aire de ces deux. de la moitié de ces deux.
[elle montre deux points]
c- ah... de la distance? mais là il a des unités carrés. Cela peut être une mesure de distance avec des unités carrées?
e- non. ou oui?
c- je ne sais pas, c'est pour cela que je te pose la question...
e- non, non, je suis totalement embrouillée.
c- *bon, tu dois regarder. L'effet était visuel. Lorsque tu avais caché, et tu avais dit ce polygone, il a tout caché. cela veut dire que tout cet espace c'est le polygone. Et il n'est pas n'importe quel polygone, car il a quatre côtés: c'est un quadrilatère. Ceci est l'aire, et l'aire est toute la superficie de ce quadrilatère*. Maintenant comment chercher un triangle qui ait cette même surface. Comme le quadrilatère que tu as là, et comment tu peux les mettre en relation.
e- bien. Merci

L'élève confond segment et polygone, peut être à cause que le nombre affiché pour l'aire est plus près d'un côté. Christopher veut faire explicite que pour Cabri le polygone est la totalité des quatre segments, c'est pourquoi il demande de cacher le polygone, puis de le montrer. Mais l'élève ne sait pas interpréter ce nouveau phénomène, et dit que le polygone est le point qui reste après avoir caché. Apparemment l'opération mentale qui demande d'identifier ce qui est disparu est trop complexe pour elle ; on peut faire l'hypothèse que la sélection du polygone aurait mieux fonctionné pour elle, puisque l'effet de sélectionner le polygone est un clignotement de la totalité du polygone ; de cette manière elle aurait pu le nommer en présence et non en absence, comme c'est le cas qu'a utilisé Christopher .

Le deuxième cas est celui de Laura. Un élève a identifié le phénomène suivant : 'lorsque l'on déplace le point A, la figure tourne autour du point B', et l'interprète comme : le point A est un point sur cercle. Laura essaye d'abord de le faire analyser le mouvement de A indépendamment de la figure, puis elle présente implicitement une invalidation de l'interprétation du cercle, en montrant que la distance de A à B n'est pas constante.

e1- alors ils bougent circulairement aussi sur objet du point A qui bouge vers le point B. Tous les points bougent circulairement car ..... un cercle

L- montre moi qu'il bougent sur un cercle.

e1- sur un arc. demi-cercle. Ce n'est pas totalement un cercle.

L- ah... montre moi.

[e1 déplace A]

L- non. C.

[e1 déplace C].

e1- il arrive là [quand C coïncide avec A]... il est construit nos pas sur un cercle complet, mais sur la moitié. Car si c'était tout le cercle, il ferait le tour complet au carré de A et B.

e1- de même, le point A bouge circulairement.

L- A? montre moi

[il déplace A]

L- essaye de le bouger vers la gauche, pour voir si c'est possible.

...

e1- oui, prof.

L- c'est toujours circulaire?

e1- oui

L- montre moi le mouvement de B, pour voir si c'est circulaire aussi.

....

L- maintenant vers le bas.

...

L- vers la gauche. la gauche.

...

L- c'est circulaire?

e1- oui, mais il y a toujours un point...

L- B est circulaire? on bouge le point B.

e1- non, B n'est pas circulaire.

L- B non? maintenant A de nouveau.

...

L- tu m'as mis le doute... regarde bien le point, ne pas la figure. Mais le point. A bouge de manière circulaire?

...

L- que dis-tu, Giovanni? que non?

L- ton collègue dit que non. Qu'en penses tu?

e1- non plus. le A ne bouge pas non plus circulairement.

L- rapproche-le. Regardons si l'on peut rapprocher le point A du point B.

...

L- tente de rapprocher le point A du point B.

...

L- ah tu as pu le faire... A bouge de manière circulaire?

L- mmm... comment sont A et B?

e1- libres.

L- points libres car ils se laissent déplacer par tout le...

e1- l'écran.

L- l'écran. prêt.

Dans cette dernière partie on peut inférer le raisonnement implicite suivant : si A bouge sur un cercle, la distance de A à B devrait être constante, donc je ne devrait pas pouvoir rapprocher A de B ; si je peux le faire, alors A ne bouge pas sur un cercle.

Dans une autre interaction avec un autre groupe, pour la même interprétation de A comme point sur un cercle, Laura demande ‘d’éliminer tout sauf le point A’, mais quand l’élève demande s’il doit tout cacher elle lui dit de le faire uniquement mentalement.

L- bien, je veux que vous racontiez ce que vous avez trouvé sur les points
e1- que le point A bouge... c'est un point libre
e2- mais il bouge autour d'un cercle qui a son ...
L- le point A?
e1- oui
L- montre moi
e2- je ne peux pas te le montrer
[on voit un segment et trois cercles: un de diamètre le segment, deus autres de même rayon et centrés sur les extrémités]
mais je le dis. Il bouge comme un cercle. le point d'où il vient, le centre du cercle est B.
L- quel point. A?
e1- oui
L- celui-ci, celui-ci ou celui-ci [elle signale au tableau]
e1- le point A.
L- tu es sûr qu'il bouge sur un cercle?
e2- il bouge sur un cercle de centre...
L- alors enregistre cela et montre moi sur la figure modèle.
[apparaît la figure modèle]
e2- alors il bouge sur un cercle dont le centre est B.
[il déplace A]
e2- comme un cercle.
L- ah. tu crois. Bouge-le plus vers la gauche pour voir. je ne suis pas aussi sure.
e2- un cercle qui s'agrandit.
L- *pour bien observer le mouvement du point A, enlevons tout le reste. annulons toutes les figures, et regardons uniquement le point A.*
e2- on les cache?
L- non, non. ne pas les cacher. Dans votre tête faire comme si ces autres figures n'existaient pas. ne regarder que le mouvement du point A. Rien de plus. Sans les figures. déplace le. je veux vérifier si ce point bouge de manière circulaire. Bouge-le.
e1- déjà.
L- mais déplace-le plus. Es tu complètement sûr qu'il bouge de manière circulaire?
e2- euh... il est un point libre, mais qui bouge autour... comme formant un cercle. [il fait un geste circulaire]
L- si un point est libre, il se laisse déplacer sur tout l'écran. tu as ce concept clair. Mais si le point bouge sur un cercle alors il est libre? ou... un autre type de point.
e1- non. Il est libre, mais je ne sais pas l'expliquer. [il prend le crayon]
L- mais s'il est libre et bouge sur un cercle, alors il n'est pas libre.
e1- non, il bouge créant un cercle [il fait un grand geste autour d'un point, décrivant une spirale]. non qu'il est sur un cercle, mais il le crée le cercle.
e2- aélsdkfja
L- et le point B?
e1- il bouge pareil.

L- et le point C?
e1- celui-là il bouge sur un arc.
L- alors C il est point sur objet, mais A et B sont libres, mais ils bougent librement formant un cercle?
[elle prend le crayon et dessine un cercle]
L- nous avions expliqué que si un point est créé sur objet il bouge en forme circulaire sur l'objet. Mais si un point bouge sur tout le plan, il est libre sans former une figure. il peut former mille choses. Est-ce qu'il a toujours ce mouvement circulaire que vous dîtes là? qu'il est libre mais il bouge en forme circulaire? [elle prend la calculatrice et déplace A vers la gauche] mais si je le déplace comme ça...
e1- c'est droit
L- alors pas toujours se forme... il n'est pas toujours de forme circulaire.
e2- mais si vous le déplacez autour...
L- oui, mais c'est comme... qu'il bouge par tout l'écran, pas seulement comme tu veux, mais partout. Si ce point se laisse déplacer partout, que le point, non pas la figure... maintenant le point B. Ici comment il se laisse déplacer ce point.
e1- la même chose que A.
L- c'est à dire...
e1- c'est aussi un point libre.
L- ah...regarde, je le mets sur toutes les positions de l'écran. tu vois? je couvre tout l'écran. Toujours de manière circulaire?
e2- non
L- comme je l'ai bougé il fait toujours cette forme?
e1- non
L- convaincus?
e2- oui, madame.

On voit combien ce phénomène est difficile d'interpréter par les élèves qui voient un mouvement circulaire, même si 'le cercle varie'. Dans ce cas, l'invalidation qu'elle avait proposée dans l'autre groupe ne marche pas, car ces élèves parlent d'un rayon variable. Si elle avait permis le geste de cacher tout sauf le point A, ils auraient pu analyser son mouvement indépendamment de la figure.

5.3.4 Les élèves sont accaparés par certains phénomènes visuels, et ne voient pas les autres

On peut observer que lorsque les figures sont complexes (et c'est le cas de Carmen, Cyril, Hugo, Laura et Sylvie), les élèves sont accaparés par certains phénomènes visuels, et ne voient pas les autres.

Par exemple, dans le cas de Laura et Sylvie, les élèves remarquent très vite les carrés, et le fait que C se déplace sur en demi cercle ; par contre, ils ne remarquent pas que le triangle est rectangle (dans le cas de Sylvie, c'est elle qui pose la question : de quel type de triangle il s'agit ?). Dans le cas de Hugo, les élèves sont accaparés par les phénomènes de dépendance entre cercles et segments, qu'ils savent reproduire, mais ne remarquent pas le parallélisme ni la perpendicularité entre les droites ; Hugo doit intervenir à la fin de la leçon pour cacher les cercles et demander d'examiner la relation entre les droites.

H- on va faire comme cela... cache les cercles... bien....oui, toutes...maintenant, sans les cercles, regardons ce qui se passe... déplace et regardons voir les relations là.

H- que pouvez vous conclure?

H- que se passe-t-il avec les segments?

e- ils bougent

H- alors cela n'a rien à voir avec les cercles... alors...

- prof, et pourquoi le point D ne disparaît pas si le cercle sort du point D...

H- c'est car le cercle a comme centre...

H- je reprends... comme vous vous fixez sur les cercles, on les a cachés... que le cercle disparaît et non pas le point D, nous fait penser que D ne forme pas partie du cercle car il est le centre.

- mais si du point A au point B, le point D sort du rayon... pourquoi il ne s'efface pas avec le cercle.

H- le rayon c'est quoi

- le rayon est A et B.

H- quant on parle de rayon nous devons nous rappeler que le rayon du cercle est simplement la distance du centre aux points. C'est une distance, non pas un segment. quand on dit qu'on fait un cercle de centre D et rayon AB, on assume que c'est la distance AB, non pas le segment. Mais la distance. si le cercle disparaît, la distance ni le segmente ne doivent pas disparaître.

H- je répète ma question qui m'intéresse...chercher la relation qui existe entre les segments... quel relation on peut trouver entre disons deux droites... quel relation on a entre deux droites...

- un point d'intersection

H- non. elles pourraient avoir un point d'intersection. si deux droites ont un point d'intersection comment elles sont? vous vous rappelez? cela fait 5 mois qu'on a parlé de cela...ah... droites concourantes...si deux droites ont un point commun...non, ce ne sont pas concourantes... cela c'est plus spéciale, que toutes ont un seul point commun... vous avez oublié? quelle relation il y a entre les droites?

-perpendiculaires

H- ah. ici il y a une...perpendiculaires...

- obliques

- parallèles

H- parallèles... la ce sont différents types de droites... ce entre droites... ici on parle de segments... mais vous savez que les droites sont cachées... est-ce que l'on trouve une de ces relations ici?

e- ce qui est caché ce sont deux droites et les trois cercles.

H- voyons ce qui est caché... on va voir... les droites cachées... on va les montrer... les deux...regardez... bien... là on voit les droites... vous trouvez une relation entre ces droites?... déplace le point D... et on va chercher les relations qu'on a nommé... vous trouvé une relation?

H- par exemple, la droite AC et la droite DE, quelle relation il y a...

- un angle

- perpendiculaires?

H- Soraya dit qu'elles sont perpendiculaires... qu'en dites vous... les autres... quand deux droites sont perpendiculaires... quand elles ont un point commun? non... elles doivent avoir un point commun mais...

- elles ont un même angle

H- un même angle? toujours, lorsqu'elles bougent vont conserver le même angle.

-non

H- non? alors...

H- comment savoir si deux droites sont perpendiculaires

- elles forment un angle de 90°

H- alors comment savoir là si elles sont perpendiculaires... que devons nous faire

- mesurer...

H- mesurer l'angle, alors on va le mesurer l'angle... comment il doit être?

- il doit être de 90°

H- 90° quand elles bougent... maintenant, quelle relation il y a entre la droite AC et le segment DF... déplace de nouveau... quelle relation

e- ils bougent de la même façon et ils ne perdent pas le ... les 90°

- ne perdent pas la distance.

H- essayez de ne pas penser à la droite DE... pensez aux autres deux droites.

H- parallèles? quand deux droites sont parallèles?

Dans ces extraits nous pouvons constater combien les élèves sont accaparés par certains phénomènes, et combien cela peut perturber le déroulement prévu par les enseignants, qui doivent modifier en cours de route la figure pour centrer les élèves sur les phénomènes sur lesquels ils s'étaient proposé travailler.

5.3.5 Effets didactiques

Le premier effet didactique est celui dont on vient de parler : le choix des figures modèles. Lorsque la figure modèle est complexe, les élèves seront accaparés par certains phénomènes plus visibles que d'autres (en fonction de leurs connaissances), empêchant l'identification de certaines propriétés. Dans les cas de Sylvie et Laura, le fait que le triangle est rectangle passe inaperçu pour les élèves, dans le cas de Hugo ce qui n'est pas remarqué c'est le parallélisme et la perpendicularité des droites et segments. Etant donné que c'était l'objectif principal de l'activité, on voit comment cet effet peut avoir de lourdes conséquences.

Le deuxième effet didactique est une mauvaise dévolution du problème de la validation. C'est le cas de Cyril, qui insiste sur le fait qu'il existent diverses procédés de construction, et pour ce faire valide pour toute la classe des constructions qui empêchent ou limitent le déplacement des sommets des carrés. On voit comment plusieurs groupes d'élèves décident d'utiliser comme points de départ des points qui ne font pas partie de la figure, et obtiennent ainsi que les sommets des carrés soient des points d'intersection. Ce détournement du problème leur permet de déplacer la figure sans la déformer, même s'ils ont produit une construction ajustée.

C- Carlos va nous raconter sur son procédé. et il va nous le montrer. Montrez nous votre procédé, mais en silence.

e- comment?

C- montrez ce qui est caché, mais sans parler.

[on voit la figure demandée, et des droites sur les côtés des carrés]

C- certains pourrons identifier là une partie de leur travail.

C- regardons si elle résiste le déplacement

e- aucun point ne se laisse prendre

C- Aucun point ne se laisse prendre? vous avez essayé avec tous les points?

Nous avons un autre procédé. Pour Daniel, deux points permettaient le mouvement. Pour Claudia, seulement un. Maintenant aucun.

[on voit une construction avec un cercle, et des segments qui passent par le centre, mais les extrémités ne sont pas sur le cercle, mais dehors]

e- maintenant nous cachons...

e2- attend...

[elle trace un segment côté du carré, mais il n'est pas bien droit]

e- je dois effacer ici. Car celui ci est trop bas.

[elle trace les quetre segments, ils sont en peu tordus. alors elle efface]

e1- on l'a fait mais avec un point dehors.

[on voit la figure demandée et un point extérieur]

C- ah! vous avez utilisé un point extérieur.

[e1 déplace le point, la figure se déplace en translation]

C- bien, je veux que vous montriez ce travail, car des fois on a l'idée de commencer avec l'élément dont on a besoin et le bouger depuis lui même. Et ici on a une manière de montrer que vous avez pris une droite et un point dehors, et les points de la droite sont les points initiaux. N'est-ce pas? montrez le.

C (à tous) regardez ceci. regardez le point que déplace Juan Pablo. il n'a rien à voir, et pourtant... disait Galilée... pourtant il bouge.

Le fait qu'il n'y ai qu'un point libre est un indice que la figure a des points déplaçables cachés, ou des droites déplaçables. Mais il ne cherche pas à utiliser encore le déplacement pour valider la figure, il se contente avec les mouvements montrés.

Le troisième effet didactique est celui observé chez Emilia : elle veut suggérer d'utiliser le cercle pour garantir des segments égaux, et elle demande de penser à ce qui apparaît lorsque l'on utilise 'polygone régulier' ; mais alors les élèves cherchent à reproduire ce qu'ils ont vu lors de l'utilisation de cette option : construire un cercle, et y inscrire un carré. Ce qui n'est pas le procédé attendu par Emilia, et ne permet pas de garantir l'égalité des côtés.

5.4 Synthèse des résultats de la partie didactique

Conformément à notre hypothèse 7, l'analyse des rapports de la période de pratique a mis en évidence une bonne appropriation de la part des formés de la praxéologie didactique proposée dans la formation. On voit non seulement la reproduction de la séquence proposée, mais aussi des éléments techniques et technologiques relatifs à la validation par déplacement : anticipation des stratégies perceptives et leur invalidation par déplacement. L'appropriation n'est pas que reproduction, les enseignants adaptent les activités et proposent des variations.

Par contre, l'analyse didactique n'a pas été assimilée par les formés, qui font une analyse en fonction de la motivation et du comportement des élèves, et non pas en fonction des connaissances dont les élèves disposent, et des potentialités et contraintes du milieu.

Dans l'analyse de l'observation finale on a pu confirmer une bonne appropriation du jeu de construction (tous les formés ont proposé des activités de (re)production de figures, 4 à partir d'un modèle dynamique, un à partir d'un modèle statique, et deux à partir d'un énoncé). Conformément à l'hypothèse 6, les enseignants demandent tous la validation finale par déplacement. Egalement, on a constaté que le déplacement des constructions ajustées servait à l'invalidation de ces constructions de la part des élèves, qui utilisent comme critères de validité des connaissances spatiales, mais aussi la comparaison des phénomènes de dépendance entre la figure modèle et la figure construite.

On a trouvé deux cas où les enseignants utilisent les outils de Cabri pour invalider des interprétations géométriques fausses des phénomènes visuels proposées par leurs élèves.

Par contre, ils n'utilisent pas toujours le déplacement pour invalider les constructions ajustées, ce que nous avons interprété comme effet de l'existence d'un 'canevas d'intervention', d'après lequel ils identifient les phénomènes qu'ils veulent mettre en valeur, et pour lesquels ils prévoient des invalidations. Ils mettent en œuvre une technique didactique généralisée, selon laquelle une fois qu'une procédure a été institutionnalisée, les élèves ne doivent pas revenir à des stratégies antérieures.

D'autre part, on a identifié des difficultés de transposition didactique de deux types : 1) l'inclusion des activités dans le cursus officiel, qui conduit par exemple à proposer la construction d'une configuration 'de Pythagore', même si le théorème de Pythagore n'est pas travaillé en tant que tel. 2) les enseignants proposent des figures complexes dont certains phénomènes accaparent l'attention des élèves, et cachent les propriétés que l'activité visait.

Finalement des effets didactiques dans les classes : Un des enseignants n'a pas su détecter les constructions ajustées des élèves, qui avaient empêché le mouvement de certains points en les cachant. La validation de ces constructions dans la mise en commun, a conduit les élèves à interpréter la validation par déplacement comme le besoin d'empêcher le déplacement, et ont développé des stratégies de construction à partir des points en dehors de la figure, pour empêcher le déplacement des points de la figure. Un autre enseignant, dont l'intention était de mettre en scène le cercle comme outil qui permet d'obtenir des segments égaux pour construire le carré, a décidé de rappeler aux élèves 'ce que fait Cabri quand on construit un polygone régulier'. Cette suggestion a bien fait penser au cercle, mais dans un sens différent de celui prévu par l'enseignant, et les élèves ont cherché à inscrire un carré dans un cercle.

6 Conclusions, perspectives

6.1 Réponses aux questions de recherche

Nous nous proposons maintenant de donner des réponses aux questions de recherche énoncées dans le chapitre du cadre théorique et problématique.

Les deux premières questions font référence aux difficultés d'intégration d'une nouvelle praxéologie sur la base des objets ostensifs dynamiques de Cabri, à partir d'une praxéologie déjà existante dans l'institution de l'enseignement de la géométrie au niveau secondaire inférieur.

L'analyse comparative des rapports de différents enseignants durant la composante à distance de la formation mathématique laisse voir l'existence de deux praxéologies différentes pour la résolution de problèmes de construction : une praxéologie basée sur des objets ostensifs statiques (dessins produits sur papier avec des instruments de tracé), et une praxéologie basée sur des objets dynamiques (dessins produits avec Cabri).

Les actions possibles sur ces deux types d'objets ostensifs, et les effets de ces actions, conditionnent le développement de techniques différentes dans les deux praxéologies. Nous allons relier les phénomènes dégagés par l'analyse de la formation, avec les différences entre ces deux praxéologies.

La première différence fondamentale est l'existence d'une multiplicité de phénomènes visuels dynamiques, en particulier les phénomènes de dépendance. Ces phénomènes n'existent pas sur papier, et par conséquent les enseignants ne possèdent pas des ostensifs et des non ostensifs appropriés pour les traiter. C'est la source des difficultés mises en évidence dans l'analyse, comme par exemple l'interprétation de l'objet segment comme une tige rigide, dans une tentative de contrôler le déplacement conjoint de deux points, et la grande difficulté expérimentée par les formés lors du problème 7, de traduire en phénomènes dynamiques un énoncé textuel.

On constate que les formés se sont approprié les ostensifs langagiers proposés dans la formation (point libre, point sur objet, point fixe) pour identifier les phénomènes de dépendance, et on peut faire l'hypothèse qu'ils ont développé des non ostensifs qui contrôlent ces phénomènes.

La géométrie dynamique est une géométrie plus complexe que la géométrie sur papier, étant donné que les relations entre les objets ne sont pas symétriques, et que les différents cas se multiplient, et cette complexité implique des difficultés d'analyse et de contrôle théorique. En effet, sur papier, les relations 'le point P est sur la droite d' et 'la droite d passe par le point P' sont équivalentes, tandis que sur Cabri elles ne le sont pas, puisque les dépendances sont inverses. C'est-à-dire, sur papier, le produit d'une construction de la première relation est impossible à distinguer du produit d'une construction de la deuxième relation. Sur Cabri, il est possible de distinguer ces deux produits, en utilisant le déplacement : dans le premier cas, le point P pourra être déplacé directement, mais ne pourra pas occuper un endroit quelconque de l'écran, il bougera uniquement sur la droite (le point suit la droite) ; dans le deuxième cas, le point pourra être déplacé à n'importe quel endroit de l'écran, et la droite se déplacera en même temps que le point (la droite qui suit le point). Cette possibilité de distinguer les dépendances permet, comme on l'a vu pour les premiers problèmes proposés, de distinguer les données et les buts dans une figure dynamique donnée. Egalement, on peut relever la diversité de lieux géométriques obtenus par les enseignants pour le problème 2 de la partie à distance (inscrire un carré dans un triangle), diversité due à la construction du triangle et les dépendances entre les objets (voir en annexe l'étude des cas possibles).

La deuxième différence fondamentale est le fait que toute construction sur papier implique une procédure d'ajustement perceptif : on ajuste les instruments de tracé aux objets déjà tracés sur la feuille. Dans Cabri ces constructions ajustées sont invalidées par déplacement, ce qui implique un conflit de praxéologies, les techniques valides dans la première étant invalidées dans la deuxième. Toutefois, ce changement nécessaire dans les techniques est un accord avec l'objectif de passer d'une connaissance spatiale à des connaissances théoriques. En effet, dans une praxéologie construite sur les dessins statiques sur papier, les problèmes de construction peuvent être interprétés par les élèves comme des problèmes de précision de cet ajustement : le critère de validité d'une construction est la précision du tracé, et cette précision est fonction de la précision dans l'utilisation des outils de tracé. Par contre, dans une praxéologie construite sur les dessins dynamiques, les problèmes de construction deviennent des problèmes de précision dans la description géométrique des figures , qui relève d'un contrôle théorique: le critère de validité d'une construction est toujours la précision du tracé, mais celle-ci est assurée par le système, et elle dépend des primitives utilisées, et de la précision dans la communication au système des paramètres nécessaires pour ces primitives. Par exemple, lors de la solution du problème 3, Carmen et Ana veulent construire une droite parallèle au côté horizontal du carré.

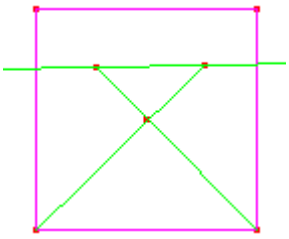


Figure 25

Mais pour elles, qui n'ont pas encore développé une praxéologie dynamique, c'est un problème de précision de tracé : elles utilisent la primitive 'droite' et il s'agit d'ajuster la droite pour qu'elle soit visuellement parallèle, et le fait d'obtenir une droite qui n'est pas visuellement parallèle au côté du carré les conduit à refaire la construction.

Par contre, une solution dynamique implique l'utilisation de la primitive 'parallèle', qui requiert de préciser deux paramètres : l'objet auquel la droite doit être parallèle, et le point par lequel elle doit passer.

Un autre conflit de techniques se présente au niveau de la validation statique : dans une praxéologie statique sur papier, qui doit tenir compte des erreurs inévitables de précision du dessin, les petits écarts obtenus dans la construction par rapport au résultat attendu, ne sont pas considérés comme une invalidation de la construction. C'est le comportement observé dans les rapports de Carmen. Mais dans une praxéologie dynamique, il est nécessaire de distinguer deux situations : si la figure est ajustée, de petits écarts n'invalident pas la construction ; par contre, si la construction est exacte, tout écart est une invalidation de la construction. Ainsi, on voit dans les rapports de Laura et Emilia une distinction claire de ces deux situations, et l'interprétation différente dans ces deux cas des écarts dans les tracés et les mesures.

On voit ainsi comment la nouvelle praxéologie commence à se greffer sur l'ancienne, et lorsqu'il y a conflit de techniques, ou bien le sujet abandonne la technique ancienne et adopte la nouvelle technique (cas de Laura et Emilia), ou bien il renonce au dynamisme pour maintenir les techniques acquises (cas de Carmen). Naturellement, on a des cas de cœxistence des deux praxéologies : par exemple, Carmen utilise le déplacement pour valider la construction finale, mais non pour valider les hypothèses d'analyse. Aussi, Emilia et Laura,

même si elles distinguent constructions ajustées et constructions exactes, n'ont pas développé de technique pour interpréter les nombres affichés par Cabri, et les utilisent comme des nombres exacts, non comme approximations décimales de nombres rationnels ou irrationnels.

De même que pour la partie mathématique, on peut constater pour la partie didactique un conflit de praxéologies, mais cette fois de praxéologies didactiques.

En effet, les enseignants sont à l'aise avec une praxéologie didactique du type cours/exercice, avec un dispositif de classe frontal. Cette organisation leur permet de contrôler l'avancement du temps didactique, et ne demande pas une analyse didactique des tâches proposées aux élèves. Le savoir mathématique est admis sans questionnement, et toute difficulté ou erreur est expliquée par des attitudes ou comportements inadéquats de la part des élèves.

A l'inverse, la praxéologie proposée dans la formation s'appuyait sur l'analyse a priori et a posteriori des activités, afin d'invalider par déplacement les stratégies de construction basées sur l'ajustement perceptif. Cette praxéologie utilisait comme dispositif didactique le travail individuel et en groupe avec les calculatrices, autour de la résolution de problèmes, avec une mise en commun.

Ce que nous avons observé, c'est une assimilation du dispositif et de l'invalidation par déplacement, sans assimilation de l'analyse didactique nécessaire au bon fonctionnement de ce dispositif. Ainsi, les enseignants ont organisé le travail par petits groupes avec une mise en commun, et bien qu'ils expriment des difficultés de leur part et de la part des élèves pour s'adapter à ce nouveau dispositif, ils rapportent une amélioration des conditions avec le temps. Mais ce dispositif n'est pas accompagné de la nécessaire analyse didactique des activités elles-mêmes, ce qui ne leur permet pas d'anticiper les difficultés que rencontreront les élèves dans les tâches proposées, ni de planifier de manière adéquate leurs interventions afin de guider le bon déroulement des activités. En effet, les figures proposées sont trop complexes pour les élèves, qui n'arrivent pas à identifier les phénomènes que les enseignants avaient prévu d'utiliser dans la mise en scène de propriétés géométriques, et ces derniers utilisent le principe selon lequel l'institutionnalisation met un point final aux stratégies erronées de la part des élèves, ce qui les a conduit à ne pas identifier des procédures perceptives de construction et à ne pas les invalider en utilisant le déplacement dans les activités qui ont suivi l'institutionnalisation.

On peut inférer de cette situation que les enseignants ont commencé à s'approprier des techniques de la nouvelle praxéologie didactique, mais que le niveau technologico-théorique est encore faible. Cette situation est peut-être due au fait d'avoir choisi de mettre en œuvre immédiatement les activités du cours présentiel avec un groupe expérimental d'élèves, sans privilégier un recul nécessaire à l'analyse et la mise en scène des composantes technologiques de la praxéologie

De même, le fait que dans la formation nous n'avons pas montré les places possibles des activités de construction dans les curricula colombiens a conduit les enseignants à inclure des activités motivées en apparence par le contenu à travailler (le théorème de Pythagore), avec deux alternatives : abandonner le contenu afin de travailler les problèmes géométriques rencontrés par les élèves, ou abandonner les problèmes géométriques rencontrés par les élèves pour forcer le travail du contenu.

On peut ainsi répondre à la troisième question, sur la différence d'appropriation des ostensifs dans la praxéologie mathématique et dans la praxéologie didactique. En effet, on voit que l'appropriation du déplacement comme outil de validation mathématique est une condition nécessaire mais non suffisante pour son appropriation didactique. Les enseignants savent utiliser le déplacement pour invalider des constructions ajustées, mais leurs schèmes

d'intervention didactique ne leur permettent pas de repérer certaines constructions ajustées, ou les amènent à préférer une invalidation par contrat.

D'autre part, le seul fait de savoir résoudre des problèmes de construction à l'aide de Cabri ne les prépare pas à construire des situations problématiques pour leurs élèves. Pour ce faire, ils ont besoin de connaissances didactiques, notamment sur les connaissances des élèves et leurs réactions face aux rétroactions du système, et sur le découpage du savoir à enseigner en utilisant les nouvelles tâches, techniques et technologies. La conception de nouvelles tâches en accord avec le curriculum demande aussi des connaissances didactiques sur l'usage de Cabri.

La quatrième question faisait référence à la nécessité d'inclure des nouveaux éléments théoriques dans la praxéologie construite sur la base des objets ostensifs dynamiques. Pour y répondre, nous allons distinguer de nouveau la praxéologie mathématique et la praxéologie didactique.

On a déjà dit que cette nouvelle praxéologie mathématique requiert des nouveaux ostensifs langagiers, des nouveaux non ostensifs, de nouvelles tâches et de nouvelles techniques. Par contre, au niveau technologico-théorique on n'a pas eu besoin d'introduire d'éléments nouveaux ; les différentes relations de dépendance peuvent être expliquées comme des conséquences des relations géométriques courantes : un point libre est un point quelconque, un point sur objet est un point qui appartient à un objet, un point qui ne peut être déplacé directement est un point d'intersection, etc. Egalement, les techniques d'analyse et de division, utilisées dans la formation, sont des techniques courantes dans l'institution de l'enseignement de la géométrie au secondaire inférieur. Seule la technique de lieux géométriques était nouvelle pour les enseignants, et nécessitait des éléments technologico-théoriques nouveaux. Néanmoins, cet élément nouveau n'était pas censé entrer dans la praxéologie mathématique des élèves, mais il était choisi pour placer les enseignants de manière authentique en position d'apprenants.

Nous n'avons pas travaillé explicitement la problématique de la démonstration, mais nous pensons que l'utilisation de Cabri conduit à inclure le mouvement dans le discours technologique des élèves, mouvement qui est exclu du bloc technologico-théorique de la géométrie euclidienne. Par contre, les développements de la géométrie du XIXeme siècle, qui ont conduit à la géométrie projective, prennent en compte le mouvement des objets, si non de manière théorique, au moins dans le discours technologique, et nous pensons que l'inclusion de ces éléments technologiques faciliterait le développement d'une démarche de démonstration à partir des ostensifs dynamiques.

Par contre, nous avons mis en évidence comment la nouvelle praxéologie didactique implique non seulement des tâches et des techniques nouvelles, mais aussi des technologies et des théories nouvelles par rapport à la praxéologie existante. La théorie des situations, sur laquelle nous avons construit les activités proposées, ne faisait pas partie des connaissances théoriques didactiques des enseignants. Cette théorie implique une manière particulière de concevoir l'activité mathématique, et l'apprentissage. Il n'est pas étonnant alors que les résultats montrent plutôt un amalgame de nouvelles techniques didactiques avec les techniques anciennes, et une appropriation du dispositif didactique, sans techniques de planification et d'intervention en accord avec la praxéologie proposée.

Les questions 5 et 6 faisaient référence à l'interrelation entre processus d'instrumentation et processus d'instrumentalisation de Cabri. Les évidences recueillies montrent l'interdépendance de ces deux processus indissociables : l'incapacité de Laura à utiliser la syntaxe appropriée (défaut d'instrumentalisation), l'a empêchée d'utiliser une droite passant par deux points comme instrument de validation de l'alignement de trois points ; la

reconnaissance de la fonction pour augmenter le nombre de chiffres décimales affichées n'a pas été suffisante pour une utilisation pertinente des nombres affichés par Cabri. Nous pouvons conclure qu'une formation centrée sur le processus d'instrumentalisation de Cabri, c'est-à-dire à la reconnaissance des primitives du logiciel et l'appropriation de leur syntaxe, n'est pas suffisante pour que les enseignants ou les élèves l'intègrent dans le travail mathématique de la classe. Egalement, une formation qui ne tient pas compte du processus d'instrumentalisation, et tente de travailler au niveau théorique, se verra affectée par les problèmes d'utilisation de l'artefact. Comme les enseignants doivent gérer ce double processus de genèse chez leurs élèves, il est indispensable qu'ils maîtrisent les problèmes liés à l'instrumentalisation et à l'instrumentation, et qu'ils développent une pratique qui intègre ces deux aspects à tout moment : lors de la préparation des activités, lors de leurs interventions auprès des élèves, et lors de l'institutionnalisation.

Nous avons trouvé des évidences de développement de certains instruments didactiques, comme par exemple l'utilisation de l'outil 'cacher/montrer' de la part des enseignants pour vérifier l'utilisation d'une procédure de construction ou pour invalider les interprétations erronées de la part des élèves. Par ailleurs, l'instrumentalisation du déplacement s'est revélé insuffisante dans certains cas, dans lesquels les enseignants n'ont pas invalidé des constructions ajustées.

Pour les enseignants est indispensable avoir une instrumentalisation adéquate afin de pouvoir identifier rapidement les problèmes liés à l'utilisation de l'artefact, et les distinguer des problèmes liés à l'utilisation de connaissances. Même si nous ne l'avons pas relevé dans notre analyse, dans les enregistrements on peut voir comment les enseignants ont appris à identifier par exemple quand les élèves créent plusieurs points superposés, ce qui crée des difficultés pour le déplacement et les mesures.

6.2 Apports et limites de la formation

Plusieurs caractéristiques de la formation se sont révélées efficaces par rapport aux objectifs fixés.

Caractéristiques générales :

Le travail de longue durée, avec une période de travail intensif et une période de pratique accompagnée a permis à la plupart des formés de développer une praxéologie de résolution de problèmes de construction sur la base des ostensifs dynamiques de Cabri. Par contre, le fait que la période de pratique de la partie didactique a été fortement réduite, a eu des conséquences sur le développement de la praxéologie correspondante.

Le fait de séparer deux volets dans la formation, et de développer d'abord une instrumentation mathématique de Cabri et ensuite une instrumentation didactique, permet de mettre l'utilisation de Cabri au centre de l'activité mathématique. On a observé ainsi peu d'activités d'ostension de la part des enseignants, qui ont donné la place à l'activité mathématique des élèves avec Cabri.

Néanmoins, les dispositifs de travail pendant les périodes de pratique n'ont pas fonctionné comme prévu : les formés n'ont pratiquement pas travaillé en binômes, et leur participation a été très irrégulière. Nous pensons que ce sont des conséquences du caractère optionnel de la formation et de l'absence de reconnaissance institutionnelle, ainsi que du fait que l'utilisation de la technologie n'est pas une priorité dans les écoles concernées.

Caractéristiques de la partie mathématique

L'organisation des activités autour du 'jeu de construction' a permis de mettre en avant les phénomènes dynamiques associés aux ostensifs de Cabri, et l'appropriation des différents schèmes de validation qui permettent la résolution de problèmes de construction. Egalement, les règles heuristiques 'voir plus que ce que l'on voit' et 'douter de ce que l'on voit' ont servi à renforcer la démarche expérimentale chez les formés.

La séquence de problèmes mise en oeuvre, et notamment le fait d'expliciter depuis le début l'existence de phénomènes de dépendance et l'invalidation par déplacement des procédés de tracé statiques, a contribué au dépassement des difficultés dues à la nouveauté des ostensifs dynamiques et aux conflits avec la praxéologie statique.

Par contre, le rôle du numérique dans la résolution de problèmes n'a pas assez été travaillé, en l'occurrence les techniques de reconnaissance de nombres rationnels ou irrationnels à partir de leur expression décimale, ce qui a conduit les formés à utiliser les nombres affichés par Cabri comme des valeurs exactes. De même, les activités proposées qui étaient centrées sur l'observation et l'interprétation des observations, ont pu conduire les formés à favoriser des techniques inductives de contrôle. Nous pensons qu'il serait possible de renforcer des techniques déductives de contrôle avec un choix adéquat d'activités : par exemple, demander d'anticiper le comportement d'une construction, avant de la manipuler, sur la base des propriétés données.

Caractéristiques de la partie didactique

L'explicitation de la praxéologie didactique proposée, concrètement l'institutionnalisation de la technique d'invalidation par déplacement des constructions ajustées, a renforcé la mise en oeuvre de la part des formés. De plus, la proposition du 'jeu de construction' comme modèle d'activité leur a permis de mettre en scène la validation par déplacement pour leurs élèves, et la nécessité des propriétés géométriques pour décrire les phénomènes visuels et les reproduire.

Le fait d'avoir explicité les relations entre une instrumentalisation adéquate et l'identification des propriétés géométriques à partir des phénomènes visuels, a aussi permis aux formés d'être attentifs aux difficultés d'instrumentalisation chez leurs élèves, et aux implications de ces difficultés dans la construction de connaissances géométriques.

Par contre, il apparaît de façon évidente deux déficiences dans la formation : les activités proposées n'ont pas permis aux formés de s'approprier les techniques d'analyse didactique nécessaires pour la planification et l'évaluation[33] des activités de classe avec leurs élèves, et nous n'avons pas travaillé de manière explicite l'articulation des activités de résolution de problèmes de construction avec les programmes de géométrie des différentes écoles.

Le dispositif didactique du cours présentiel, qui utilisait un groupe expérimental d'élèves, même s'il a permis aux formés d'avoir une première expérience d'enseignement avec Cabri dans des conditions favorables (groupe réduit d'élèves, appui du formateur), ne permettait pas de refaire la même activité plusieurs fois avec des élèves différents, et ne laissait pas de place au recul nécessaire pour l'analyse des activités, étant pris dans la nécessité d'aller de l'avant. Nous pensons qu'il serait possible d'utiliser d'autres dispositifs, comme par exemple de présenter aux enseignants de travaux (fictifs ou réels) d'élèves pour les analyser et proposer des interventions, ou travailler sur des enregistrements de classes pour analyser le travail des élèves et de l'enseignant.

[33] Evaluation de l'activité, en vue de la modifier pour sa réutilisation.

6.3 Portée et imites de la recherche

Nous pouvons signaler deux limites théoriques de cette recherche : la première concerne le fait que nous n'avons pas de suivi détaillé d'un même individu, ce qui nous empêche de mener une analyse en termes de schèmes d'utilisation. Notre analyse de la genèse instrumentale reste ainsi à un niveau général, sans pouvoir rendre compte des différents instruments développés par les formés. Dans ce contexte, nous devons limiter le concept d'instrumentation à l'utilisation de Cabri pour les tâches premières, c'est à dire orientées à la résolution de problèmes, et le concept d'instrumentalisation à l'analyse des tâches secondes, c'est-à-dire à la syntaxe des primitives du système.

D'autre part, nous n'avons pas inclus dans notre étude une analyse de la praxéologie géométrique courante dans l'institution de l'enseignement secondaire inférieur, sur la base des programmes et documents d'accompagnement. Etant donné qu'en Colombie, il n'y a pas de curriculum centralisé, les écoles pouvant définir leurs propres programmes sur la base d'un Plan Educatif Institutionnel, une telle étude est difficile à mener. Nous n'avons pas non plus analysé en détail ce que serait une praxéologie construite sur des objets ostensifs statiques, ce qui aurait permis des comparaisons plus détaillées avec la praxéologie construite sur Cabri.

Quant à la portée des résultats de la recherche, nous pensons qu'elle peut s'étendre à tous les logiciels de géométrie dynamique. Même si les logiciels de géométrie dynamique implémentent de manière différente les comportements dynamiques des objets (par exemple, sur Geometer Sketchpad un point symétrique d'un autre peut être déplacé directement, à la différence de Cabri), les analyses effectuées ne dépendent pas des ce niveau de distinction. Tous les logiciels de géométrie dynamique fonctionnent sur le principe de la manipulation directe, et par conséquent le déplacement devient le principale outil de validation, et les phénomènes de dépendance donnent sens à cette validation.

Nous pensons aussi que d'autres logiciels de mathématiques, et en particulier les Systèmes de calcul symbolique (CAS, en anglais), travaillent aussi avec des ostensifs informatisés, caractérisés pour réagir à un contrôle théorique imbriqué dans le système. De ce fait, ils peuvent comporter également des phénomènes dynamiques qui sont absents d'une praxéologie mathématique sur des ostensifs statiques sur papier. Ces ostensifs informatisés peuvent donner lieu à une démarche expérimentale, mais nous ne connaissons assez ces logiciels pour juger si les formes de validation sont accessibles aux élèves avec des critères de validité de bas niveau (comme c'est le cas pour les logiciels de géométrie dynamique). C'est cette possibilité de validation de la part des élèves qui est à la base de la praxéologie didactique proposée dans notre recherche, et nous ne pouvons pas affirmer qu'elle puisse se transposer à ces environnements de travail.

6.4 Nouvelles questions et perspectives de recherche

Revenant à la problématique générale de l'intégration de Cabri Géomètre dans l'enseignement, nous identifions différentes lignes de recherches dont les retombées peuvent améliorer la formation des enseignants.

En premier lieu, les enseignants ont besoin de connaissances didactiques sur leurs élèves, relatives à l'apprentissage avec Cabri, qui leur permettent de planifier les activités et leurs interventions didactiques. Quelques questions de recherches associées sont : quelles sont les difficultés d'instrumentalisation et d'instrumentation de Cabri comme outil pour résoudre de problèmes de construction, que rencontrent les élèves du niveau secondaire inférieur ? Quel est le degré de résistance des connaissances spatiales et des stratégies perceptives des élèves par rapport à l'invalidation par déplacement ? Quelles sont les conditions minimales

d'infrastructure et de temps pour assurer une instrumentalisation adéquate de Cabri comme outil de résolution de problèmes? Quels sont les instruments effectivement développés par les élèves, en quoi différent ils des instruments proposés, et quels sont les facteurs qui influencent cet écart ?

En deuxième lieu, les enseignants ont besoin d'activités de classe avec Cabri, qui soient intégrés dans le curriculum. A ce propos, nous proposons les questions suivantes : Quelle est l'articulation possible entre les activités de résolution de problèmes de construction avec Cabri et la construction du savoir théorique proposé par les programmes ? Quelle séquence d'activités proposer aux élèves pour accompagner la construction de connaissances théoriques ? Il me semble qu'il existe déjà des éléments de réponse à ces questions. Comment organiser les activités de synthèse (mise en commun et institutionnalisation) pour parvenir à une co-construction du savoir théorique à partir des activités de construction avec Cabri ?

En troisième lieu, les enseignants on besoin d'articuler le travail de construction de connaissances géométriques avec la construction de démarches de démonstration. Comment introduire le besoin et les techniques de la démonstration à partir des problèmes de construction en utilisant Cabri? On peut imaginer par exemple un travail autour de la justification de procédures de construction : comme nous l'avons exposé dans le cadre théorique, certaines propriétés sont obtenues par application des primitives du système, d'autres sont conséquence d'enchaînements de ces primitives. On peut imaginer une alternance de séances de résolution de problèmes de construction avec Cabri, avec des séances sans Cabri où l'enjeu est de justifier les procédures de construction. De cette manière, les élèves peuvent dresser un inventaire des procédures de construction qui fonctionneront dans les justifications à manière de théorèmes ou postulats. Postérieurement on pourrait travailler sur la structuration de ce corpus de théorèmes, en essayant de le minimiser, ce qui conduirait à produire un minimum de postulats à partir desquels il est possible de déduire les théorèmes, démarche inverse de celle expérimentée par Mariotti (2001).

En quatrième lieu, les formateurs d'enseignants ont besoin de stratégies pour développer des praxéologies didactiques nouvelles chez les enseignants. Quelques questions dans cette ligne de recherche sont : Comment mettre en échec des techniques didactiques existantes, pour mettre en valeur les nouvelles techniques didactiques proposées ? Comment développer des techniques d'analyse didactique chez les enseignants ?

Finalement, des questions sur l'intégration et l'interaction des praxéologies statiques et dynamiques : quelle place donner à chacune d'elles dans l'enseignement, comment surmonter les conflits entre elles?

6.5 Complexité de l'intégration des TICs dans l'enseignement des mathématiques

Il est courant d'invoquer les résistances des enseignants à l'utilisation de la technologie dans l'enseignement des mathématiques, comme une des raisons de l'échec de l'intégration des TIC. Après notre étude, nous pouvons dessiner un autre tableau de ce phénomène.

L'intégration de Technologies comme Cabri dans l'enseignement des mathématiques reste un exercice très complexe. Elle suppose une transformation des pratiques mathématiques des enseignants et des élèves, et surtout une transformation radicale de la praxéologie didactique courante. Les utilisations rapportées (voir introduction), sont l'effet d'une assimilation du nouvel outil, sans transformation des pratiques mathématiques et didactiques, et ne peuvent pas avoir beaucoup d'impact sur la construction de connaissances de la part des élèves.

L'ingénierie didactique que nous avons mise en œuvre montre la complexité des changements demandés aux enseignants, et malgré un très fort investissement personnel et un temps de travail considérable, les pratiques ne sont pas totalement modifiées.

Le développement d'une nouvelle praxéologie mathématique sur la base des nouveaux ostensifs informatisés, même si c'est une condition nécessaire pour l'intégration de Cabri dans l'enseignement, n'est pas suffisante : c'est le développement de la nouvelle praxéologie didactique qui s'est révélé le plus difficile, étant donné qu'il implique non seulement des nouvelles tâches et techniques, mais surtout des nouvelles technologies et théories.

Pour les enseignants, les efforts demandés sont considérables : ils doivent acquérir une grande maîtrise du logiciel, abandonner des techniques très ancrées dans leur pratique mathématique, et adopter de nouvelles théories et techniques didactiques. Ils travaillent dans des conditions difficiles, avec des classes à effectif nombreux, et sans infrastructure suffisante. Et l'aboutissement de tous ces efforts reste assez limité, circonscrit à un logiciel parmi la multitude de logiciels disponibles, qui ne sont pas compatibles entre eux[34].

Nous avons montré comment les enseignants peuvent s'approprier des nouvelles tâches autour des ostensifs informatisés, et peuvent développer des nouvelles techniques tant mathématiques que didactiques, qui intègrent ces ostensifs. Néanmoins, des développements sur plusieurs fronts sont encore nécessaires. Sur le front des recherches didactiques, pour comprendre mieux les processus d'instrumentalisation et d'instrumentation de ces outils chez les élèves et chez les enseignants, et sur les praxéologies qui leur sont associées, et leur écologie dans les différentes institutions, afin d' identifier les conditions à mettre en place pour une formation d'enseignants. Sur le plan du développement informatique, pour améliorer la compatibilité entre logiciels. Et sur le plan politique, pour fournir un appui aux enseignants avec une formation professionnelle adéquate et des programmes et documents d'accompagnement incluant les nouveaux outils.

[34] Ceci implique par exemple qu'un changement d'école, ou de politique de l'école, peut les obliger à recommencer le travail de genèse instrumentale (surtout dans sa composante d'instrumentalisation) avec un nouveau logiciel, ou que les élèves vont utiliser d'autres logiciels à la maison, sans pouvoir échanger des pratiques et des fichiers avec leur enseignant.

7 Bibliographie

ABBOUD-BLANCHARD M., (1998), Réflexions sur la formation des enseignants à l'utilisation de logiciels dans leur enseignement. Le cas DERIVE , in *: Faire des mathématiques avec un système de calcul formel, Tome1,* ed. CNDP- Ministère de l'Education Nationale, pp 137-154.

ACOSTA ET AL, (2004).*Pensamiento Geométrico y Tecnologias Computacionales.* Serie Documentos, Ministerio de Educacion Nacional, Republica de Colombia.

ACOSTA M. (2003) *La Formation d'Enseignants pour l'Utilisation de Cabri en Classe de Géométrie*. Mémoire du DEA EIAHD Environnements Informatiques d'Apprentissage Humain et Didactique, Université Joseph Fourier.

ARSAC G. (1997). *Les Limites d'un Enseignement Déductif de la Géométrie*. Dans « Petit x » n° 47, pp. 5 à 31.

ARTAUD M. (2003). *Analyser des praxéologies mathématiques et didactiques "à calculatrice" et leur écologie.* Actes du colloque européen ITEM, Reims, 20, 21, 22 juin 2003

BACHELARD G. (1934). *La formation de l'esprit scientifique.* Paris, Vrin.

BALACHEFF N. (1994) *La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique*. In: Artigue M. et al. (eds) *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* (pp.364-370). Grenoble: La Pensée Sauvage éditions.

BERTHELOT R et SALIN M. (2000). L'Enseignement de la Géométrie au Début du Collège. Comment concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive : « *Petit x* » n° 56, 5 à 34.

BETRANCOURT M. (2007) Pour des usages des TIC au service de l'apprentissage. *TICE : l'usage en travaux*, hors série de 'les dossiers de l'ingénierie éducative, Scéren-CNDP.

BLANC-BRUDE, T. (2004). *Intégration de commandes vocales dans un environnement d'apprentissage par l'action : enjeux ergonomiques*. Thèse de Sciences Cognitives de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I, sous la co-direction de Colette Laborde et Mireille Bétrancourt, Novembre 2004.

BLANC-BRUDE, T., LABORDE, C. & BETRANCOURT, M. (2003). *Utilisabilité d'une interaction vocale et multimodale dans un micro-monde d'apprentissage*. Conférence Interaction homme-Machine IHM 2003, Caen (France).

BOSCH M. ET GASCON J. (2002). *Organiser l'Etude, 2. Théories et Empiries*. Actes de la 11 Ecole d'été de didactique des Mathématiques. La pensée Sauvage.

BOTH CARVALHO N. (2001). *Le sort des problèmes de constructions dans le contexte français de l'enseignement des transformations géométriques au lycée, dans les années 1990*. Thèse doctorale de l'Université Joseph Fourier.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques.* La Pensée Sauvage, Grénoble

CHEVALLARD Y. BOSCH M. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique.* Dans Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 19, n° 1, pp.77-124.

CHEVALLARD Y. BOSCH M. ET GASCON J. (1997). *Estudiar Matematicas. El eslabon perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Cuadernos de Educacion No 22. Horsori Editorial.

DEPOVER C. (2000), Introduction à la technologie éducative. Support de cours à l'Université de Mons-Hainaut.

DUVAL R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères 17,* 121-138.

FGM (1920) *Exercices de géométrie, comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2000 questions résolues, 6ème édition.* Paris: J. Gabay, 1991. 1302 p. Reprint of the 1920 edition.

DUVAL R. (1994). Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. Repères 17, 121-138.

GUIN D.ET TROUCHE L. (2002) *Calculatrices Symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. La pensée Sauvage éditions.

HÖLZL R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. *International Journal of Computers for mathematics learning,* Vol. 1, No2. Springer.

HOYLES et al, (1991). *The Microworlds Project : 1986-1989* Final Report to the Economic and Social Research Council. Institute of Education, University of London.

KUNTZ G. (2007). *Démarche expérimentale et apprentissages des mathématiques*. Mathématice, revue en ligne No 5, mai 2007.

KNORR R. (1986). *The ancient tradition of geometric problems*. Dover Publications Inc, New York.

KUZNIAK A. ET HOUDEMENT C., (1996), *Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier dgré en mathématiques,* Recherches en Didactique des Mathématiques, 16(3), pp. 289-322.

KUZNIAK A (2003), *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie*. Irem Université Paris Diderot7

LABORDE C. ET CAPPONI B., (1994), *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique,* Recherches en Didactique des Mathématiques , 14(1.2), p.165-210.

LABORDE C. (1995) *Designing tasks for Learning Geometry in a computer based environment,* in: Technology in Mathematics Teaching - a bridge between teaching and learning, Burton L. & Jaworski B. (eds.) (pp.35-68), Londres: Chartwell-Bratt.

LABORDE C, CLAROU P ET CAPPONI B. (2001) *Géométrie avec Cabri. Scénarios pour le lycée*. Centre Régional de Documentation Pédagogique de l'Académie de Grénoble.

LABORDE C. (2003). *Technology used as a tool for mediating knowledge on the teaching of mathematics: the case of Cabri-Geometry.* Plenary Lecture at Asian Technology Conference in Mathematics.

LABORDE, J.M. ET STRAESSER, R. (1990). Cabri-Géomètre: A micro-world of geometry for guided discovery learning. *Zentralblatt fur didaktik der mathematik* 5: 171-190.

LAGRANGE JB. (2002). *Benoît, André, Robyn… et les autres. Etudes récentes sur les professeurs et la technologie,* dans Guin D.et Trouche L. (2002) Calculatrices Symboliques.

MARGOLINAS C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. La pensée sauvage éditions.

MORENO L. (2002). *Evolucion y Tecnologia*. In Seminario Nacional de Formacion de Docentes: uso de nuevas tecnologias en el aula de matematicas. Ministerio de Educacion Nacional, Republica de Colombia.

NOSS R et Hoyles C. (1996) *Windows on Mathematical Meanings*. Learning cultures and computers. Kluwer Academic Publishers, London.

OFFRE, B. PERRIN-GLORIAN M.J. et VERBAERE O. (2006). *Usage des Instruments et des Propriétés Géométriques en Fin de CM2*. Petit x 72, 6-39.

PERAYA, D. (2002). *Former aux technologies : fondements, scénarios, pratiques. Regards sur quatre expériences genevoises*. In F. Larose & T. Karsenti (Ed.), La place des TICE en formation initiale et continue (pp. 129-152). Sherbrooke : Editions du CRP, Université de Sherbrooke.

PERAYA, D., RICKENMANN, R. & LOMBARD, F. (2002). *Changement dans les rapports aux univers technique, relationnel et sémiotique*. In R. Guir (Ed.), Pratiquer les TICE. Former les enseignants et les formateurs à de nouveaux usages (pp. 77-91). Bruxelles : De Boeck.

RABARDEL P. (1995). *Les Hommes et les Technologies*. Armand Colin Editeur, Paris.

RABARDEL P. (1999). *Les Instruments en Mathématiques, Travail, Enseignement, Apprentissage*. Dans Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques.

RUTHVEN, K. HENESSY S. ET DEANEY R. (2004). *Incorporating Dynamic Geometry Systems into Secondary Mathematics Education: Didactical Perspectives and Practices of Teachers*. Paper presented at the annual conference of the British Educational Research Association, Manchester, September 2004.

VERGNAUD G. (1991). *La Théorie des Champs Conceptuels.* Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 10 n°23, pp.133-170.

VERGNAUD G. (2003) *Analyse de pratiques et professionnalité des enseignants* . Direction générale de l'Enseignement scolaire - Publié le 01 juillet 2003 Ministère de l'Éducation nationale