L'applicabilité des mathématiques

Daniele Molinini, Marco Panza

L'applicabilité des mathématiques

Daniele Molinini et Marco Panza

1 Quel rapport entre les éléphants et la bourse de New York ?

Les mathématiques s'appliquent avec succès au monde qui nous entoure et nous aident à raisonner sur les phénomènes empiriques (tant naturels que sociaux), c'est-à-dire sur des faits qui font l'objet d'expériences par l'observation et l'expérimentation. Cela ne fait aucun doute.

Un grand nombre de théories scientifiques, et pas seulement en physique, sont très mathématisées et font usage, de manière cruciale, de divers outils mathématiques qui s'avèrent indispensables pour atteindre les résultats souhaités. Quelques exemples suffiront à le montrer.

Les géométries non euclidiennes s'appliquent avec succès à la théorie de la relativité générale. La théorie des groupes, née au sein de la théorie des équations algébriques (sur la naissance de la structure de groupe voir la section 2 du chapitre 3 de ce volume), a ultérieurement été appliquée à la mécanique (classique comme quantique), notamment depuis la découverte par Emmy Nœther d'un lien intime entre groupes de symétrie et lois de conservation. Le calcul différentiel, dans certains de ses aspects les plus sophistiqués (équations aux dérivées partielles, intégrales stochastiques, etc.), se trouve à la base des principales théories financières.

Le problème (philosophique) de l'applicabilité des mathématiques surgit immédiatement dès qu'il faut se mesurer à ces exemples (et à de nombreux autres semblables). Les objets qu'étudient les géométries non euclidiennes ne sont pas des faits cosmologiques, ceux qu'étudient la théorie des groupes ne sont pas des systèmes physiques conservatifs, ceux qu'étudient le calcul différentiel et stochastique ne sont pas des transactions financières. Les mathématiques utilisées pour l'étude des mouvements des planètes nous disent que dimanche prochain à onze heure, avec une bonne approximation, la planète Vénus se trouvera en un point spécifique du ciel. Il sera alors facile de pointer un télescope et de confirmer, par un fait empirique, la prédiction obtenue mathématiquement. Dans ce cas (comme dans les autres mentionnés plus haut, ou qu'on pourrait mentionner), les mathématiques non seulement s'appliquent mais le font avec succès. Et cela en dépit de l'hétérogénéité entre leurs objets et ceux qu'étudient les théories scientifiques. Qu'est-ce qui rend cela possible ? Voici donc la question : comment peut-on expliquer le fait que les mathématiques s'appliquent avec succès dans les sciences empiriques ?

Plusieurs réponses ont été proposées et, ces dernières années, la question a été au centre de discussions très animées dans différents domaines de la philosophie des mathématiques et des sciences. Les exemples précédents montrent comment le problème apparaît à un observateur extérieur qui se penche sur le fonctionnement des sciences. Cependant, aux yeux d'un philosophe, éclairés (ou bien brouillés) par l'habitude du raisonnement abstrait, le problème se présente autrement. Les mathématiques traitent d'entités qui ne jouent pas de rôle causal et n'ont pas de localisation spatio-temporelle : comme on dit en philosophie, elles traitent d'« objets abstraits ». Les sciences empiriques, en revanche, traitent d'entités causalement actives et qui ont une localisation spatiale et temporelle ; elles étudient également (et à juste titre) des relations causales situées dans l'espace et dans le temps. Comment est-il donc possible que les propriétés des entités qu'étudient les mathématiques puissent nous renseigner sur les propriétés des entités étudiées par les sciences empiriques ?

Pour le dire autrement, et de façon plus directe, lorsque l'on étudie un phénomène empirique en utilisant les mathématiques et leurs structures formelles, on fait appel à des résultats qui, en tant que tels, n'ont apparemment rien à voir avec l'objet (empirique) de nos recherches. Et pourtant, les prédictions ainsi obtenues se trouvent souvent confirmées. C'est un peu comme si nous utilisions nos connaissances sur l'anatomie ou sur l'évolution des éléphants pour prévoir l'évolution de la Bourse de New York ou pour décider dans quelles actions investir — et que cela nous permettait d'engranger des bénéfices financiers excellents. Comment est-ce possible ?

Ce n'est pas tout. Nous avons tous les jours affaire à de nombreuses entités abstraites ; mais parmi celles-ci, seules les entités mathématiques interviennent aussi largement, aussi massivement et avec tant de succès dans diverses pratiques scientifiques qui ne relèvent pas directement d'elles. On n'a jamais entendu dire que les événements advenus au Pays des Merveilles, la structure sémantique de certaines propositions, la classification des liens de parenté ou les valeurs d'un credo religieux aient aidé à comprendre des phénomènes empiriques. Et s'il est vrai que chaque science emploie des entités abstraites qui lui sont propres, comme la trajectoire d'un mouvement, le spin d'un électron ou le prix d'une option financière, en général ces entités ne semblent pas jouer de rôle au-delà des sciences qui en traitent directement ; de plus, ces entités abstraites sont souvent elles-mêmes définies au moyen de notions ou d'objets mathématiques.

Cette dernière remarque permet de mieux cerner le problème. Celui-ci ne concerne pas tant le rôle d'entités qui seraient définies à l'aide d'une théorie mathématique, mais appartiendraient à des théories scientifiques particulières (comme les trajectoires, les spins ou les prix), que la façon dont certaines propriétés d'entités purement mathématiques, définies au sein de théories mathématiques pures, participent au fonctionnement de théories scientifiques, entre autres en permettant de définir ou d'utiliser des entités abstraites propres à ces théories. En guise d'exemples, on peut mentionner les mêmes que précédemment : les géodésiques d'une surface à courbure constante, les groupes de symétrie, les intégrales stochastiques. Mais c'est aussi, plus simplement, le cas des nombres et des ensembles. Une manière de dissoudre le problème (plutôt que de le résoudre) serait de nier qu'il existe des théories mathématiques pures ; ce serait une option radicale (et assez difficile à défendre) que nous n'envisagerons pas ici comme telle, même si nous la retrouverons au sein de certaines idées discutées plus loin.

Il semble donc plus correct de parler d'applicabilité des théories mathématiques pures, bien qu'il soit plus fréquent de parler, comme nous l'avons déjà fait (et comme, pour simplifier, nous continuerons à le faire), d'applicabilité des mathématiques *tout court*.

Indépendamment de la façon dont on peut le concevoir, le problème de l'applicabilité des mathématiques n'a pas été et n'est pas l'apanage des philosophes. Le prix Nobel de physique Eugene Paul Wigner, par exemple, en a fourni une formulation bien connue. Il parle d'une « déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles » (Wigner [1960]). Beaucoup d'autres physiciens ont devancé ou suivi Wigner dans son idée que cette efficacité est « déraisonnable » (c'est-à-dire que, du moins à première vue, elle n'admet pas d'explication plausible). On pourrait mentionner, entre autres, Heinrich Rudolf Hertz (voir Dyson [1964]) ou encore Richard Feynman, qui a affirmé : « Je trouve assez surprenant qu'il soit possible de prédire ce qui va se passer à l'avenir au moyen des mathématiques, qui consistent à suivre des règles qui n'ont rien à voir avec l'objet d'étude de départ » (Feynman [1967], p. 171). Beaucoup de mathématiciens se sont posé la même question. David Hilbert remarque par exemple lors d'un cours de 1919 que « nous nous trouvons confrontés au fait remarquable que la matière semble se plier tout à fait au formalisme des mathématiques », ce qui fait surgir « un accord imprévu entre l'être et la pensée, qu'il nous faut pour le moment accepter comme un miracle » (Hilbert [1992], p. 69).

Derrière tout cet étonnement se cachent des conceptions et des attitudes bien différentes. Wigner, par exemple, semble vouloir défendre une position antiréaliste à propos des mathématiques et de leurs objets (Wigner [1960], p. 2 ; pour une analyse plus fine de la manière dont Wigner pense le problème de l'applicabilité des mathématiques et suggère de le résoudre, voir Islami [2017]). À l'inverse, d'autres physiciens, comme Paul Davies et Roger Penrose, adoptent une position que l'on retrouve chez de nombreux philosophes sous la forme du soi-disant argument d'indispensabilité (sur lequel nous reviendrons plus loin, et qui est aussi traité en détail dans le chapitre 7 du présent volume) : ils pensent que le succès des mathématiques dans les sciences empiriques donne des raisons de défendre une forme de réalisme mathématique (Davies [1992], p. 140-160 ; Penrose [1989], p. 556-557).

Cette multiplicité de positions découle en partie du fait que différents auteurs insistent sur différents aspects du problème. On peut se demander, par exemple, comment les mathématiques interviennent dans les théories scientifiques et nous permettent de découvrir de nouvelles lois. On peut se demander quelles sont les caractéristiques d'un modèle mathématique qui le rendent efficace pour traiter tel ou tel phénomène empirique. On peut également soutenir l'idée que le succès des mathématiques dans les sciences empiriques découle du fait que les objets mathématiques existent indépendamment de nous (ce qui conduit à des positions comme celles de Davies et Penrose) ; on peut alors se demander comment expliquer ou comprendre cette existence indépendante, c'est-à-dire se demander de quel genre d'existence il s'agit (dans la mesure où il faut penser que le mot 'exister' a plusieurs sens). Symétriquement, on peut aussi penser que les mathématiques ne pourraient être appliquées avec succès aux sciences empiriques si les théories de ces dernières décrivaient véritablement une réalité externe et indépendante, et donc voir l'applicabilité des mathématiques comme un symptôme du fait que ces théories ne sont que des constructions susceptibles de « sauver les phénomènes », des outils empiriquement efficaces mais sans aucune valeur ontologique concernant un prétendu monde extérieur. Récemment, Otávio Bueno a même suggéré que le problème de l'applicabilité des mathématique n'a aucune spécificité propre et se réduit *de facto* à plusieurs problèmes différents qui relèvent respectivement de la philosophie des sciences, des mathématiques et même de la logique (voir Bueno [2017b,a]; Bueno et French [2018]).

Nous avons décidé de réduire ici le champ de notre réflexion en nous limitant à la question d'expliquer comment les mathématiques peuvent s'appliquer avec succès aux sciences empiriques, en mettant de côté les questions de la nature des objets mathématiques et des théories scientifiques, de l'existence de ceux-là ou du pouvoir descriptif de celles-ci (à propos des questions de la nature et de l'existence des objets mathématiques, on pourra consulter le chapitre 7 du présent volume).

2 Quelques positions philosophiques classiques sur l'applicabilité des mathématiques

Avant d'examiner les principales positions des philosophes des mathématiques contemporains, il est important de rappeler que le problème est loin d'être récent. On peut faire remonter sa longue histoire au moins jusqu'au projet pythagoricien d'une réduction de tous les phénomènes physiques à des systèmes de relations numériques (projet initialement motivé, entre autres, par des résultats importants de la théorie musicale). La découverte de l'incommensurabilité entre le côté d'un carré et sa diagonale — résultat qui, en termes modernes, équivaut à l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais qui était, dans les mathématiques anciennes, conçu comme l'impossibilité de trouver deux nombres (entiers positifs) m et n tels que m fois le côté soit égal à n fois la diagonale— fut de fait le premier obstacle à surmonter en ce qui concerne l'applicabilité des mathématiques à l'étude du monde physique : si les nombres (entiers positifs) ne suffisaient pas pour décrire les rapports entre objets géométriques, comment auraient-ils pu suffire pour décrire le monde physique dans son ensemble ?

Ainsi conçu, le problème dépend de l'hypothèse que la géométrie est capable de décrire les formes des objets physiques, ce qu'Aristote explique à travers sa théorie de l'abstraction comme soustraction : les mathématiques tirent leur origine du fait de soustraire aux corps physiques leur matière, de sorte qu'il ne reste que leur forme ; elles peuvent étudier la courbe décrite par un nez camus vu de profil, mais non le nez en lui-même (*Physique*, 193b31–194a12). Mais si cette théorie rend compte de l'applicabilité des mathématiques à la physique, elle implique que les premières ne peuvent s'appliquer qu'à une partie de la seconde, car (tant pour Aristote que pour tous ses successeur et pour nous) la physique ne peut certes pas s'occuper uniquement des formes des corps, mais doit aussi traiter des corps eux-mêmes. À supposer que l'on puisse rendre compte de cette manière, par exemple, de l'astronomie géométrique, qu'Euclide et Ptolémée développent peu après l'époque d'Aristote, dont on admet qu'elle puisse utiliser les mathématiques et même constituer une véritable science mathématique, il n'en reste pas moins que cette théorie ne peut constituer qu'une partie de la physique. Et ce précisément parce qu'elle ne porte que sur la forme et les trajectoires des corps célestes, alors que la physique, quant à elle, est aussi censée étudier leurs attributs essentiels (*ibid.*, 193b22–30).

La théorie de l'abstraction d'Aristote répond, en la renversant, à la théorie des idées de Platon. À l'inverse d'Aristote, Platon conçoit les corps terrestres comme des copies dégénérées de formes idéales. Il oppose par exemple l'arithmétique pratiquée par les philosophes, qui s'occupe des nombres en eux-mêmes, c'est-à-dire conçus comme composés d'unités indistinctes, à celle que pratique le peuple, qui porte sur des nombres de choses particulières (*Théétète*, 195e–196a). Cela suggère que, si les mathématiques s'appliquent au monde physique, c'est parce qu'elles constituent une science portant sur les formes idéales dont le monde physique provient par dégénérescence (ou du moins sont la meilleure approximation d'une telle science qui soit possible pour nous).

Les théories d'Aristote et Platon (fortement influencées par l'école de Pythagore) représentent les deux premières tentatives générales, opposées entre elles, d'expliquer l'applicabilité des mathématiques, et ce n'est pas par hasard qu'elles se trouvent à la base de la philosophie occidentale (ou, comme l'on devrait dire plus précisément, de la philosophie de filiation grecque, arabe et latine). Leurs explications fournissent deux paradigmes qui, sous de nombreuses variantes, survivront jusqu'à l'époque moderne. Galilée lui-même s'inspire des ces théories (de manière significative, des deux en même temps) pour justifier sa nouvelle science, beaucoup plus imprégnée de mathématiques que celle qu'il prétendait remplacer. En effet, si d'un côté Galilée se fait l'écho de Platon lorsqu'il affirme, dans le *Saggiatore*, que le livre de la nature (l'Univers) « est écrit dans la langue mathématique » et que « ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot » ([Galilei, 1909, vol. VI, p. 232] ; [Galilei, 1979, p. 144]), il adopte de l'autre une conception aristotélicienne lorsqu'il déclare, dans le *Dialogo*, que « quand le philosophe géomètre veut reconnaître dans le concret [*in concreto*] les effets qu'il a démontrés dans l'abstrait [*in abstracto*], il doit défalquer les empêchements dus à la matière » ([Galilei, 1909, vol. VII, p. 234] ; [Galilei, 2000, p. 333]), c'est-à-dire qu'il doit faire abstraction de beaucoup d'aspects du phénomène étudié : c'est seulement si l'on néglige ces aspects que la structure mathématique de la nature peut se manifester et devenir l'objet de notre étude.

Cette explication, tout à la fois platonicienne et aristotélicienne, était sans doute suffisante pour les partisans de la nouvelle démarche scientifique initiée par Galilée, qui consistait à étudier les phénomènes naturels en tant que tels, en s'appuyant certes sur des outils mathématiques pour en décrire des aspects spécifiques, mais sans s'aventurer à introduire de nouveaux objets d'étude intrinsèquement mathématiques en leur nature même (Gingras [2001] ; Panza [2002]). Ainsi, Galilée étudie le mouvement naturel des corps en chute libre, en particulier la variation de leur vitesse, plutôt que le mouvement rectiligne uniforme, défini comme un mouvement d'un point, le long d'une ligne droite, dont l'accélération est constante. Face à la construction mathématique beaucoup plus complexe qui, un demi-siècle seulement plus tard, aboutit à la mécanique et à la théorie de la gravitation de Newton, une réponse différente devint, donc, nécessaire : une réponse capable d'expliquer de quelle façon l'étude d'objets nouveaux, intrinsèquement mathématiques, pouvait donner les clés pour comprendre et prévoir le cours d'événements réels.

C'est la question qui est posée par Kant : comment une science mathématique de la nature peut-elle être possible ? Kant ne sera pas le seul, au lendemain des formidables résultats de Newton, à revenir à la question de l'applicabilité. Euler, d'Alembert et Laplace, entre autres, se sont aussi penchés sur le problème, chacun à sa manière et avec une attitude étroitement liée à sa propre pratique scientifique. C'est pourtant la réponse de Kant, dans la *Critique de la Raison pure* (1781, 1787) et dans les *Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science* (1783), qui a sans doute été la plus complète (sur la conception kantienne des mathématiques, voir le chapitre 2).

D'après Kant, l'expérience n'est possible qu'à condition de remplir des concepts par des intuitions : les concepts sont issus du travail de l'entendement, les intuitions de celui de la sensibilité, et l'expérience de leur travail conjoint. Dans la vision kantienne, l'expérience consiste à accéder à des objets, mais ces objets ne sont pas des données originaires accueillies passivement. Bien que l'on puisse supposer qu'il existe une réalité ultime, faite des choses en elles-mêmes (ou noumènes), ce n'est pas de cette réalité-là que l'on fait l'expérience et elle ne participe pas davantage, en tant que telle, au processus conduisant à la connaissance empirique, issue de l'expérience. Ce processus commence par notre accès aux phénomènes, identifiés au contenu indifférencié des intuitions ; les phénomènes sont essentiellement distincts des noumènes pour une raison que nous expliquerons plus loin. À partir de ceux-ci, on passe ensuite, grâce à l'intervention de concepts appropriés, aux objets, puis finalement à des jugements, qui résultent de l'articulation de plusieurs de ces concepts, eux-mêmes remplis par les intuitions correspondantes. Ces jugements donnent lieu à une forme de connaissance que Kant qualifie de connaissance *a posteriori*. Toutefois, ce n'est pas la seule forme de connaissance possible, et les jugements qui lui donnent lieu, qualifiés de synthétiques, ne sont pas les seuls jugements possibles. Au contraire, pour que cette connaissance et ces jugements soient possibles, il faut que soit réalisé un ensemble complexe de conditions, qui présupposent une autre forme de connaissance, dite cette fois *a priori*, impliquant d'autres jugements, dont, comme nous allons le voir, certains sont analytiques et d'autres synthétiques. C'est justement de l'identification de ces conditions et de l'explication de cette connaissance *a priori* — pensée comme condition de possibilité de l'expérience et, par conséquent, de la connaissance *a posteriori* — que résulte la réponse de Kant au problème de l'applicabilité des mathématiques.

Kant partage avec les empiristes l'idée que la science de la nature trouve sa source ultime dans l'expérience. Cela implique bien entendu que la science de la nature comporte une grande part de connaissance *a posteriori*, qui lui est indispensable : sans elle, ce ne serait pas une science de la nature, proprement dite. Cela ne signifie pourtant ni que toute connaissance soit *a posteriori*, ni que la science de la nature ne se compose que de connaissances *a posteriori*. C'est en fait la manière dont Kant conçoit la connaissance scientifique *a posteriori* dans son lien intrinsèque avec une connaissance et des jugements *a priori* qui lui permet d'expliquer comment la science de la nature peut être mathématique tout en étant naturelle, c'est-à-dire basée sur l'expérience.

Le rôle des mathématiques au sein de la science de nature est donc, pour Kant, constitutif. Sa thèse repose sur la différence essentielle qu'il établit entre phénomènes et noumènes : alors que les seconds se présentent comme la cause (présumée, en tant qu'elle nous est inaccessible) des changements internes enregistrés par notre sensibilité, les premiers constituent le contenu même de notre expérience, se présentant à nous comme situés dans l'espace et dans le temps, qui ne sont pas (comme ils l'étaient pour Newton) des réceptacles externes et absolus, mais des formes pures de l'intuition. Plus précisément, l'espace et le temps sont respectivement la forme du sens externe et celle du sens interne, ce qui permet à nos intuitions de s'organiser, avant même d'être façonnées par des concepts, à la fois au sein d'un ordre temporel qui nous est interne et au sein d'un ordre spatial qui nous est externe. Mais, bien qu'il s'agisse seulement de formes, et qu'ils soient donc dépourvus d'existence en tant que tels, l'espace et le temps se prêtent néanmoins à une étude autonome, qui est rendue possible par une forme d'intuition non pas sensible mais « pure », pour le dire comme Kant lui-même, qui s'exerce de concert avec d'autres concepts eux aussi purs ; ces concepts purs sont dérivés de concepts fondamentaux, les catégories de la quantité et de la qualité, dont notre intellect est doté indépendamment de toute expérience et dont le contenu de l'expérience dépend. Les résultats de cette étude autonome de l'espace et du temps sont, respectivement, la géométrie (euclidienne), science pure de l'espace, et l'arithmétique, science pure du temps. Ces deux sciences donnent lieu à une forme de connaissance indépendante de l'expérience, donc *a priori*, mais toujours synthétique (c'est-à-dire constituée de jugements synthétiques) puisque provenant de l'intuition pure, c'est-à-dire d'une source pure mais non uniquement conceptuelle (tandis que, d'après Kant, la connaissance analytique n'est issue que de relations entre concepts, indépendamment des intuitions qui les remplissent). Cette connaissance est, comme nous l'avons dit, constitutive du contenu même de la connaissance *a posteriori*, et donc de la science de la nature, non seulement parce qu'elle dépend des catégories de la qualité et de la quantité, mais aussi parce qu'elle façonne d'autres concepts qui participent aussi à la constitution du contenu de notre expérience et donc des objets mêmes de la science de la nature. Cela explique non seulement l'applicabilité des mathématiques à la science de la nature, mais aussi le caractère inévitablement mathématique de cette dernière.

Toutefois, Kant veut aller plus loin. Il veut aussi montrer que la théorie de Newton est, en un sens, inévitable. Pour lui, cette théorie ne correspond pas seulement à une forme possible, parmi d'autres, de la science de la nature (qui est inévitablement mathématique) ; elle en constitue la seule forme possible. Bien sûr, cet aspect de la solution kantienne au problème de l'applicabilité, articulé dans les *Premiers principes métaphysiques de la science de la nature* (1786), est le plus caduc, et on peut ici le mettre de côté ; pourtant, on voit difficilement comment le cadre théorique de la *Critique de la Raison pure* et des *Prolégomènes* pourrait, sans modifications profondes, permettre une conception pluraliste des mathématiques et de la science, qui leur laisserait adopter des formes différentes de celles que Kant leur attribue.

C'est la raison fondamentale qui a conduit à abandonner la solution kantienne, bien que son idée fondamentale subsiste aujourd'hui encore au sein de nombreuses autres solutions, différentes de celle de Kant. Cette idée fondamentale consiste à inverser le rapport de dépendance existant entre l'objet de la science et la science elle-même, en pensant la science comme constituant son objet plutôt que comme un miroir plus ou moins fidèle de celui-ci.

C'est précisément cette idée qui, fondamentalement, distingue la solution kantienne de la conception empiriste avec laquelle Kant partage, comme nous l'avons déjà dit, l'idée que la science de la nature doit être issue de l'expérience. Mais est-il possible de préserver cette dernière idée en rejetant la solution de Kant, sans pour autant s'en remettre, de manière plus ou moins sophistiquée, à la théorie aristotélicienne de l'abstraction comme soustraction ? Quelques décennies après la mort de Kant, une réponse est apportée par le *System of Logic* de John Stuart Mill (1843). D'après Mill, les mathématiques sont elles-mêmes empiriques : les vérités mathématiques ne sont que des généralisations dérivées de l'expérience. L'arithmétique traite par exemple des régularités physiques issues des combinaisons d'objets concrets, et les nombres ne sont que des propriétés d'agrégats de ces objets : le nombre 3 est, par exemple, une propriété des agrégats constitués de trois objets concrets. Cela permet à Mill non pas tant de résoudre que de dissoudre le problème de l'applicabilité. En effet, de son point de vue, il n'y a aucune discontinuité essentielle entre le contenu des mathématiques et celui des sciences naturelles : c'est une manière de nier qu'il y ait quelque chose comme des mathématiques pures.

À supposer même que l'on puisse trouver plausible la thèse que les mathématiques sont une science empirique, on pourrait rétorquer, cependant, que la dissolution du problème ne peut être ici que partielle. Pour le comprendre, il suffit de s'en tenir à une distinction introduite par Mark Steiner entre applications « canoniques » et « non canoniques » d'une théorie mathématique (Steiner [2005]). Une application est canonique si la théorie correspondante a été développée expressément pour décrire les régularités empiriques qui font l'objet de cette application ; une application est non canonique si la théorie a été développée indépendamment d'elle. Il existe de nombreux cas limites, qui ne peuvent que difficilement être classés dans l'une ou dans l'autre catégorie, mais dans bien des cas, la distinction est claire (à ce sujet, voir aussi Molinini [2020]). Parmi les cas douteux, le plus simple est celui de l'application de l'arithmétique élémentaire au comptage d'objets concrets ; celui de l'application du calcul différentiel à la description du mouvement accéléré en est un autre, bien que Steiner y voie au contraire un exemple évident d'application canonique (il se fonde en effet sur la thèse, historiquement discutable, d'après laquelle Newton aurait développé son calcul précisément dans ce but : *ibid.*, p. 627). Un cas clair d'application canonique est celui de l'application des séries trigonométriques à la diffusion de la chaleur (proposée par Fourier dans sa *Théorie Analytique de la Chaleur*, 1822). À l'inverse, les applications de la théorie des groupes dans de nombreuses branches de la physique fournissent des exemples clairs d'applications non canoniques ; un autre exemple en est l'application de la théorie des sections coniques à l'étude des orbites planétaires. Quel que soit le jugement que l'on porte sur ces exemples et la manière dont on préfère articuler la distinction, le point crucial est ici que la solution de Mill ne vaut, au mieux, que pour les applications canoniques, car, comme Steiner le remarque lui-même (*ibid.*, p. 647), l'idée que les mathématiques seraient empiriques ne tient que si l'on se restreint aux théories ou outils issus d'applications (que l'on considère comme) canoniques (à moins de supposer que toutes les mathématiques dérivent, en dernière instance, d'applications canoniques, ce qui est très difficile à défendre).

L'empirisme arithmétique de Mill a été vigoureusement critiqué par Gottlob Frege, que l'on considère comme le fondateur tant de la logique moderne que de la philosophie des mathématiques d'orientation analytique (voir le chapitre 2, section 3, et le chapitre 7, section 5.1). Frege estime (Frege [1884], § 9) que la thèse de Mill dérive d'un malentendu quant à la nature même des vérités arithmétiques, ou plutôt d'une confusion entre les vérités arithmétiques et certaines de leurs interprétations particulières : conçues en tant que telles, les vérités arithmétiques sont manifestement universelles, ce qui fait qu'elles ne peuvent être empiriques ni dériver de généralisations inductives (*ibid.*, § 10). Néanmoins, Frege (*ibid.*, § 99 et Frege [1903], §§ II.86-

137) critique aussi, de manière tout aussi féroce, les conceptions formalistes des mathématiques qui les réduisent à un pur système de signes sans contenu, comme si elles étaient un jeu dont les règles, à l'instar des signes qu'elles utilisent, n'avaient aucune signification extérieure (il ne faut pas confondre cette position avec celle que défendra plus tard Hilbert, qui est souvent mal interprétée et identifiée à tort à la précédente). D'après Frege, au contraire, les mathématiques ont un contenu précis qui leur est en quelque sorte extérieur et peut être exprimé en termes logiques ; c'est du moins le cas, pour lui, de l'arithmétique, qui étudie les extensions de concepts (car les nombres naturels ne sont rien d'autre que celles-ci), et de l'analyse réelle, qui étudie les rapports entre grandeurs (car les nombres réels ne sont rien d'autre que ceux-là).

La position de Frege n'implique pourtant pas de nier l'applicabilité de l'arithmétique et de l'analyse réelle ; bien au contraire, elle permet de l'expliquer sans difficulté particulière. Pour Frege, la logique se caractérise en effet par sa généralité. Soutenir, comme il le fait, que la théorie des nombres naturels ainsi que celle des nombres réels sont de nature logique (quoique pas tout à fait dans le même sens dans les deux cas — une différence que nous sommes contraints de laisser de côté ici), revient alors à attribuer à ces théories la généralité de la logique, qui est celle de la pensée elle-même (une position soutenue à la même époque, de manière différente, par Dedekind). Mais il y a plus. En effet, Frege considère comme fondamental le principe suivant, que les philosophes analytiques d'aujourd'hui appellent « contrainte de l'applicabilité » (*application constraint*) ou encore « contrainte de Frege » (*Frege's constraint*) : « Une fondation satisfaisante d'une théorie mathématique doit, d'une manière ou d'une autre, incorporer ses applications, actuelles et potentielles, dans son noyau central, c'est-à-dire dans le contenu qu'elle attribue aux énoncés de la théorie » (Wright [2000], p. 324).

Selon Frege, les nombres naturels dépendent de certains concepts — que l'on appelle 'concepts sortaux' (ce sont les concepts sous lesquels tombent des objets que l'on peut distinguer les uns des autres) —, et doivent être définis en tant que tels, plus précisément en tant que cardinaux de ces concepts, de telle sorte que deux concepts sortaux aient le même cardinal si et seulement si les objets qui tombent sous eux sont en bijection, un principe qui est aujourd'hui connu sous le nom de 'principe de Hume'. Cela signifie que faire une affirmation portant sur des nombres naturels, tant au sein de l'arithmétique pure qu'en-dehors d'elle, revient à faire une affirmation portant sur des concepts sortaux : pour ne prendre que l'un des exemples de Frege, dire que le carrosse de l'empereur est tiré par quatre chevaux revient à assigner le nombre (cardinal) quatre au concept sortal CHEVAUX QUI TIRENT LE CARROSSE DE L'EMPEREUR. Les nombres réels, quant à eux, sont des rapports entre grandeurs : en tant que tels, ils doivent être définis, non pas, comme on le fait souvent, à partir de l'arithmétique des nombres naturels, mais sur la base d'une théorie générale des grandeurs (cela conduit Frege à s'opposer aux définitions des nombres réels proposées par Dedekind et Cantor, et à proposer une définition logiquement très sophistiquée des domaines de grandeurs). Dès lors, parler de nombre réels, quel que soit le contexte, revient à traiter de ce qui reste inchangé lorsque l'on passe de deux grandeurs d'un certain type à deux grandeurs du même type ou d'un autre ayant entre elles le même rapport que les premières.

C'est précisément parce que les nombres naturels et réels sont ainsi que, d'après Frege, l'arithmétique et l'analyse réelle s'appliquent à nos théories scientifiques. En effet, ces nombres, pour ce qu'ils sont effectivement (c'est-à-dire respectivement des cardinaux de concepts sortaux, invariants lorsque l'on passe à un autre concept équinumérique au premier, et des rapports de grandeurs, invariants lorsque l'on remplace des grandeurs par d'autres qui leur sont proportionnelles), sont des objets tant de l'arithmétique et l'analyse réelle que de nos théories scientifiques.

La position de Frege est réaliste : pour lui, les nombres sont des objets qui existent indépendamment de nous ainsi que des théories qui leur sont consacrées ; ces théories, de plus, s'articulent au sein d'un système logique. Cette dernière position a eu une influence importante sur le positivisme logique, un mouvement philosophique développé entre les années 1930 et 1960 qui revendique le primat de l'expérience dans la connaissance et le rôle de la logique dans l'analyse de la science. Pour autant, le réalisme mathématique de Frege ne pouvait avoir prise sur des empiristes aussi radicaux que les positivistes logiques. C'est peut-être la raison pour laquelle, du moins d'après certains commentateurs, comme T. Wilholt (Wilholt [2006]), le problème de l'applicabilité des mathématiques est devenu moins central pour eux. Sur ce point, cependant, les opinions sont partagées.

D'après les positivistes logiques, les mathématiques, en tant que discipline non empirique, n'ont pas (ou, du moins, sont conçues comme n'ayant pas) de contenu. Les théorèmes mathématiques sont certes des vérités, mais seulement en raison de leur forme logique, et donc indépendamment de toute considération ontologique ; ce sont donc, au sens que les positivistes logiques donnent à ce terme (qui diffère assez radicalement de celui de Frege), des énoncés analytiques. Ainsi, les mathématiques ne peuvent rien faire de plus que nous fournir un cadre (*framework*) linguistique pour parler de ce qui existe, c'est-à-dire des objets d'expériences possibles — une idée énoncée pour la première fois par Hahn (Hahn [1933]) puis adoptée sous différentes formes par d'autres positivistes logiques, comme Carnap.

Carnap explicite sa position dans la section 84 de sa *Syntaxe logique du* *langage* (Carnap [1934]). Il y affirme, en accord avec les formalistes (parmi lesquels il ne mentionne que Hilbert) et au contraire de Frege, que les mathématiques pures peuvent certes être réduites à des systèmes formels qui ne tiennent aucun compte de la signification de leurs symboles, mais que de tels systèmes ne sauraient suffire, à eux seuls, ni à fournir un « fondement logique » aux mathématiques, ni à permettre leur applicabilité. Pour ce faire, ces systèmes doivent être complétés par des « règles générales de formation concernant [...] les occurrences de symboles mathématiques dans les énoncés descriptifs, ainsi que [par] des règles d'inférence pour de tels énoncés », de manière à permettre « l'inclusion du calcul mathématique dans le langage total » en fournissant une « interprétation » du calcul mathématique. Du fait qu'ils sont descriptifs, ces énoncés sont, pour Carnap, « synthétiques », mais peuvent néanmoins appartenir aux mathématiques appliquées, qui, en tant qu'elles sont appliquées, font partie des sciences empiriques. Carnap distingue ainsi la « géométrie mathématique » de la géométrie « physique », cette dernière étant « une partie de la physique » et découlant de la première « par le truchement de la construction de [...] définitions corrélatives » qui assignent une signification et donc une portée descriptive aux symboles mathématiques.

3 Le débat contemporain

Parallèlement au déclin du positivisme logique et de son influence sur la philosophie des mathématiques, au cours d'une période durant laquelle la philosophie des mathématique s'éloigne progressivement d'une attention presque exclusive au problème du fondements des mathématiques (à ce sujet, voir le chapitre 2 du présent volume), on assiste à un regain d'intérêt pour le problème de l'applicabilité. Paradoxalement, l'un des facteurs ayant le plus fortement contribué à susciter cet intérêt est un célèbre article de Paul Benacerraf, « Mathematical Truth » (Benacerraf [1973]), dont le but principal était de participer à un débat métaphysique sans rapport direct avec la pratique mathématique et scientifique (voir ce volume, chapitre 7).

L'argument avancé par Benacerraf, et la manière dont il a orienté une grande partie des débats ultérieurs en philosophie analytique des mathématiques, sont présentés dans le chapitre 7 du présent volume (voir aussi Panza et Sereni [2013]). Ici, nous pouvons nous en tenir à la thèse centrale de Benacerraf, qui identifie un dilemme : une position platoniste en philosophie des mathématiques, d'après laquelle les mathématiques traitent d'objets abstraits qui existent en tant que tels, indépendamment de nous, doit se mesurer à la difficulté d'expliquer comment nous pouvons avoir connaissance de ces objets ; à l'inverse, une position « combinatoire [*combinatorial*] », comme le dit Benacerraf, qui soutient que les mathématiques ne possèdent aucun contenu objectif qui leur serait fourni par une réalité extérieure et que les énoncés mathématiques prennent leurs valeurs de vérité « sur la base de certains [...] fait syntaxiques », propres aux théories mathématiques elles-mêmes, doit se mesurer à la difficulté d'expliquer comment leurs énoncés peuvent être vrais, en un sens suffisamment fort du terme 'vrai' — le même que celui que l'on emploie lorsque l'on dit qu'il est vrai que la Terre est (approximativement) sphérique ou que la France est une République.

La tâche que Benacerraf assigne aux positions combinatoires peut être vue comme une manière de poser le problème de l'applicabilité : si les deux énoncés 'Il y a 11 satellites américains et 10 satellites russes en orbite autour de la Terre' et '$11 + 10 = 21$' ne sont pas vrais dans le même sens du terme 'vrai', et si les termes '10', '11' et '21' n'ont pas la même signification dans ces deux énoncés, comment est-il possible d'en déduire le troisième énoncé 'Il y a 21 satellites américains ou russes orbitant autour de la Terre' ? Pour garantir la validité de cette inférence, sans laquelle aucune application de l'arithmétique ne serait possible, il faut fournir une interprétation du vocabulaire de l'arithmétique qui soit valable tant dans des contextes purement mathématiques que dans des contextes extra-mathématiques. D'un côté, cet argument peut donner l'impression que seule une position platoniste est en mesure de justifier l'applicabilité des mathématiques ; mais de l'autre, la position platoniste se heurte au premier problème soulevé par Benacerraf. Comment sortir, alors, de cette difficulté ? Ainsi, le problème de l'applicabilité réapparaît au sein de l'argument de Benacerraf sous la forme d'un problème sémantique.

Une solution possible, compatible avec une position nominaliste, a été proposée par Hartry Field (Field [1980, 1982] ; sur ce point, voir encore une fois le chapitre 7 du présent volume). Field nie l'existence d'objets mathématiques mais accepte que les énoncés mathématiques admettent la sémantique habituelle, d'après laquelle l'énoncé 'a est P' ne peut être vrai que s'il existe un objet dont 'a' est le nom ; il en arrive donc à la conclusion qu'aucun énoncé mathématique n'est vrai (ou alors que ceux qui le sont ne le sont que de manière vide, c'est-à-dire à la manière de l'énoncé 'pour tout x, si $P(x)$, alors $Q(x)$' dans le cas où '$P(x)$' est faux pour tous les x). Pour concilier sa conclusion avec l'usage omniprésent des mathématiques en sciences, Field soutient que tout énoncé scientifique faisant usage d'un vocabulaire mathématique peut être reformulé de manière à éliminer ce vocabulaire. À titre d'exemple, il montre comment accomplir cette réécriture dans le cas des énoncés de la théorie newtonienne de la gravitation : il indique comment transformer chaque énoncé traitant de nombres réels en un énoncé où il n'est question que de points ou de régions de l'espace-temps — que Field considère comme des objets concrets —, et reformule les énoncés comme ‘Il y a n P’ pour en éliminer les termes numéraux, en transformant ‘Il y a 0 P’ en ‘Aucun x n’est un P’ et ‘Il y a k P’ en ‘il y a un x qui est un P et $k-1$ y qui sont des P et qui sont différents de x’ (sur la proposition de Field, voir aussi Malament [1982]).

Néanmoins, même si l’on accorde que cette reformulation est possible, il reste encore à expliquer comment l’usage des mathématiques dans les sciences peut aboutir à des résultats satisfaisants, ou comme l’écrit Field, à des conclusions vraies. Sa réponse est que les « bonnes » mathématiques (celles qu’aucun fait empirique ne saurait falsifier) sont « conservatives » sur des théories « nominalistes » cohérentes. Une théorie (resp. un énoncé) est dite ‘nominaliste’ si son vocabulaire ne renvoie à aucune entité abstraite (ni à des propriétés, relations ou fonctions portant sur de telles entités) ; une théorie mathématique M est dite ‘conservative’ sur une théorie nominaliste N si (et seulement si) $M + N$ est une extension conservative de N, c’est-à-dire si tout énoncé nominaliste φ est une conséquence de $M + N$ (si et) seulement s’il est aussi une conséquence de N uniquement. Il suffit d’observer que, définie de la sorte, la conservativité de M sur N ne requiert pas la vérité de M, pour comprendre comment Field peut expliquer que l’usage de (bonnes) mathématiques dans les sciences puisse aboutir à des résultats satisfaisants : bien que ses théorèmes ne soient pas vrais (sinon peut-être de manière vide), leur emploi dans le cadre d’une théorie empirique peut aider à en dériver des conséquences nominalistes vraies. Certes, si l’on suppose N complète, cela veut dire que l’on pourrait parvenir au même résultat sans l’aide des mathématiques, mais cela pourrait exiger un effort plus important, et il se pourrait même que l’effort requis soit si grand que cela soit impossible en pratique.

En un sens, la solution que Field apporte au problème de l’applicabilité est négative : elle se résume à l’idée que les mathématiques s’appliquent avec succès aux sciences parce que ces dernières pourraient, en règle générale, se passer d’elles. Les arguments de Field pour défendre cette dernière thèse sont très discutables. Si on la rejette, c’est-à-dire si on admet qu’il existe des théories scientifiques qui font appel de manière indispensable à des théories mathématiques, alors le problème appelle une autre solution, positive cette fois. À première vue, il est plus facile de trouver une telle solution si l’on adopte une attitude de type kantien : si les mathématiques sont applicables, ce n’est pas tant à cause de la façon dont le monde est fait que parce que les mathématiques fournissent les méthodes qui, *pour nous*, sont les plus adaptées pour l’étudier. L’idée est de ne pas nier que les sciences empiriques puissent utiliser les mathématiques pour décrire le monde, mais d’insister sur le fait que, s’il s’agit de description, celle-ci ne saurait être purement passive.

Pour clarifier cette idée, une possibilité est d'affirmer, comme Mark Steiner (Steiner [1989, 1998]), que le rôle des mathématiques dans les sciences repose sur l'usage d'analogies mathématiques, en insistant sur le fait que ces analogies n'ont souvent aucune base empirique, c'est-à-dire qu'elles ne dépendent pas du fait que « certaines propriétés mathématiques sont "équivalentes" à certaines propriétés physiques » (Steiner [1989], p. 453). Dans un texte très influent (Hesse [1966]), Mary Hesse a étudié le rôle des analogies en science, en considérant la relation d'analogie comme une généralisation de la relation mathématique de proportionnalité entre quatre grandeurs prises deux à deux, et a distingué entre analogies « formelles » et analogies « matérielles ». Les premières tiendraient à une « correspondance biunivoque entre différentes interprétations de la même théorie formelle », alors que les secondes seraient plutôt des relations « pré-théoriques » entre certains couples « d'observables » qui rendent certaines prédictions possibles, par exemple la relation entre les propriétés du son et du ton d'une part, et les propriétés de la lumière et de la couleur d'autre part ([Hesse, 1966, p. 68]). Les analogies mathématiques auxquelles Mark Steiner fait référence sont explicitement « formelles » et sont une conséquence des outils mathématiques particuliers que nous employons, ceux-ci étant choisis pour leur commodité relativement à nos critères cognitifs. C'est une idée qui fait écho au conventionnalisme géométrique de Poincaré, pour qui le choix de décrire (localement) le monde physique en utilisant la métrique euclidienne plutôt qu'une autre n'est qu'une simple affaire de commodité. Mais Steiner va bien au-delà de Poincaré : il défend l'idée que les applications scientifiques des mathématiques résultent de l'adoption d'une « stratégie anthropocentrique » qui adapte la science à des « critères humains de beauté et commodité » (Steiner [1998], p. 7).

Giorgio Israel (Israel [1996, 2002]) souligne lui aussi, bien qu'en un sens différent, le rôle de l'analogie dans les applications scientifiques des mathématiques, notamment dans la « modélisation mathématique ». Israel définit un modèle mathématique comme un « schéma conceptuel censé représenter un ensemble de phénomènes à l'aide du langage des mathématique », et précise qu'un tel modèle « n'est pas un reflet exact du phénomène », et ne prétend ni en donner « la seule représentation possible », ni représenter un seul phénomène : le même phénomène peut être représenté par des modèles différents, souvent susceptibles de proposer des « perspectives différentes mais compatibles », et à l'inverse, un même modèle « peut être employé pour représenter des phénomènes différents, entre lesquels il instaure une sorte d' "homologie" structurelle » (Israel [2002], p. 234). C'est précisément lorsque des phénomènes différents peuvent être représentés (du moins sous l'un de leurs aspects) par un même modèle qu'apparaît « une analogie mathématique ». D'après Israel, c'est d'ailleurs souvent en prêtant attention aux aspects d'un phénomène qui le rendent analogue à d'autres que l'on peut développer un « modèle mathématique » de ce phénomène. Il s'avère par exemple qu'un modèle mathématique particulier, visant initialement à décrire des processus oscillatoires typiques des circuits électroniques utilisés en radiocommunications, fournit un traitement unifié de plusieurs autres phénomènes, dont la turbulence hydrodynamique et la cinétique chimique (*ibid.*, p. 234-235). Toutefois, la pratique contemporaine de la modélisation mathématique est relativement récente. Auparavant, l'attention des sciences se portait plutôt sur des analogies physiques que les mathématiques pouvaient, tout au plus, aider à décrire et à étudier correctement.

D'un côté, cela signifie que le problème de l'applicabilité des mathématiques prend une forme spécifique dans la pratique scientifique récente ; de l'autre, cela peut suggérer que la solution de ce problème, sous sa forme contemporaine, doit passer par une étude de la manière dont les mathématiques permettent d'identifier, d'isoler et, donc, d'étudier en tant que tels des propriétés structurelles (ou formelles, dans la terminologie de Steiner) communes à des phénomènes empiriques différents. Cette perspective conduit à favoriser les solutions du problème qui sont en accord avec celle d'Aristote, d'après lequel les mathématiques soustraient la matière aux corps physiques pour en étudier uniquement la forme, mais sans pour autant accepter ni le réalisme inhérent à l'idée aristotélicienne d'abstraction comme soustraction, ni la marginalisation du rôle des mathématiques inhérente à l'idée que les sciences doivent étudier les propriétés intrinsèques de leurs objets empiriques.

C'est là l'idée fondamentale de la solution au problème de l'applicabilité proposée par la « théorie de la mesure » (*measurement theory*) défendue par Patrick Suppes et son école (Krantz *et al.* [1990]). D'après cette théorie, l'application des mathématiques à l'étude d'un phénomène particulier est justifiée par la démonstration d'un « théorème de représentation » qui établit qu'un certain domaine d'objets (identifiés et isolés de manière appropriée) remplit des conditions précises permettant de leur attribuer des mesures qui, à leur tour, remplissent des conditions mathématiques appropriées.

C'est une généralisation de cette idée qui sous-tend la solution proposée, plus récemment, par Christopher Pincock (Pincock [2004, 2007b,a, 2012]). Pour lui, l'applicabilité des mathématiques dans les sciences empiriques résulte de la possibilité de mettre en correspondance, *via* un homomorphisme (*mapping*) adapté, les systèmes étudiés — qu'il appelle systèmes cibles (*target systems*) — et des modèles mathématiques ; à travers cette correspondance, les modèles mathématiques préservent certaines caractéristiques de leurs cibles (essentiellement des propriétés structurelles) mais en éliminent d'autres. Un homomorphisme (ou plus simplement morphisme) est une application entre deux structures qui préserve certaines propriétés, relations et

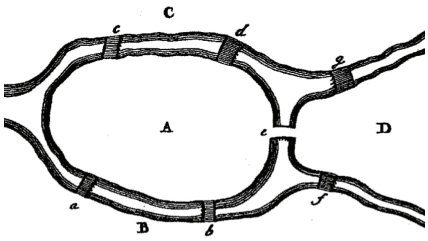

Figure 1: Plan de Königsberg avec les sept ponts et les quatre zones séparées de terre ferme.

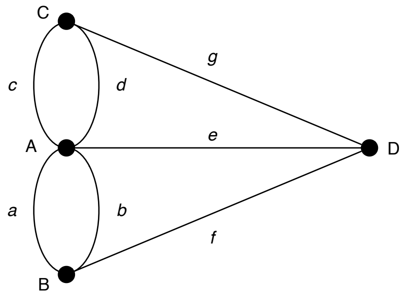

Figure 2: Représentation du système des ponts de Königsberg sous la forme d'un graphe.

fonctions définies sur ces structures. L'idée de Pincock est qu'il est possible de rendre compte de chaque application des mathématiques en identifiant le type d'homomorphisme qui met en relation le système cible en question avec un certain modèle ; cela lui permet au passage d'expliquer en quel sens on peut dire qu'un énoncé « mixte », comme « Le satellite a a une masse de n Kg », est vrai. Ainsi, pour lui, chaque application est basée sur un homomorphisme approprié, qui doit être identifié en tant que tel. Aujourd'hui, cette idée est généralement nommée '*mapping account*' dans la littérature de langue anglaise.

Pour la présenter plus en détails, examinons un cas aussi simple que célèbre : le problème des sept ponts de Königsberg, abordé (et résolu) par Euler en 1736. Était-il possible de se promener dans la ville Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) en traversant une et une seule fois chacun des sept ponts qui reliaient (à l'époque) les quatre zones séparées de terre ferme qui composaient la ville (cf. Fig. 1), de manière à revenir à la fin à son point de départ ? Pour répondre à cette question, on peut concevoir les quatre zones de terre ferme comme les sommets d'un graphe et les sept ponts comme des liens (« arêtes ») entre ces sommets (Fig. 2) ; on obtient ainsi une représentation de ces aspects de la ville sous la forme d'un graphe (plus précisément de ce que l'on appelle parfois un « multigraphe »). L'examen de ce graphe montre qu'il est connexe, c'est-à-dire qu'il existe un chemin entre n'importe quelle paire de sommets. On peut alors faire appel au théorème suivant de la théorie des graphes : dans un graphe connexe, il existe un chemin qui commence et se termine au même sommet et parcourt chaque arête une et une seule fois si et seulement si le graphe ne comprend pas de sommets dont le degré — c'est-à-dire le nombre d'arêtes qui en part — est impair. Ce théorème permet immédiatement de conclure que la réponse à la question de départ est négative : en effet, dans le graphe correspondant à Königsberg, tous les sommets ont un degré impair. Dans cet exemple, l'homomorphisme adapté (qui relie le graphe aux zones de la ville munies de leurs ponts) est un isomorphisme, c'est-à-dire une application bijective entre deux structures qui préserve toutes les relations structurelles. C'est l'existence de cet isomorphisme qui permet d'étudier le système cible en étudiant son modèle, c'est-à-dire le graphe.

L'idée n'est pas du tout neuve. Giorgio Israel en fait par exemple grand usage dans ses travaux déjà mentionnés, quoiqu'il ne limite pas les relations possibles entre système étudié et modèle mathématique aux cas où l'on est capable d'identifier un homomorphisme précis. Le mérite de Pincock n'est pas tant d'avoir étudié diverses variantes de cette idée, ce qu'Israel avait déjà fait, mais plutôt d'avoir remis cette idée au centre de la discussion philosophique en identifiant méticuleusement ses présupposés et ses conséquences générales, dans un langage facilement accessible à la communauté actuelle des philosophes analytiques des mathématiques et des sciences. Son travail a donné lieu à une discussion animée (cf. Imocrante [2017], Chap. 10). Otávio Bueno et Mark Colyvan ont par exemple proposé d'affiner son *mapping account* en y ajoutant une « conception inférentielle » de l'application des mathématiques (Bueno et Colyvan [2011] ; voir aussi Bueno et French [2018]). Leur idée est que toute application des mathématiques comporte trois phases : une phase d'« immersion », où l'on établit un homomorphisme entre le système cible et une structure mathématique particulière ; une phase de « dérivation », dans laquelle on obtient des résultats en travaillant sur la structure mathématique ; enfin, une phase d'« interprétation », où les résultats obtenus sont interprétés dans le système cible au moyen d'un homomorphisme qui n'est pas obligatoirement identique au premier ni même motivé par lui. Le choix des homomorphismes utilisés pour la première et la dernière phase dépend, d'après ces auteurs, du type de question que l'on se pose sur le système cible, ce qui leur permet de prendre en compte des facteurs contextuels. Par ailleurs, la relative indépendance du second homomorphisme par rapport au premier leur permet d'expliquer le rôle de considérations pragmatiques. Pour le comprendre, examinons un exemple que donnent Bueno et Colyvan eux-mêmes : les différentes interprétations que Paul Dirac a donné des solutions à énergie négative de l'équation qui porte aujourd'hui son nom (*ibid.*, p. 364). Initialement, Dirac considérait ces solutions comme « non physiques » ; dans un second temps, sur la base de certains résultats théoriques (notamment le principe d'exclusion de Pauli), il a émis l'hypothèse que ces solutions pouvaient correspondre à des « trous dans une mer d'électrons » ; enfin, pour que son interprétation ne contredise aucune donnée empirique et pour qu'elle soit compatible avec les résultats théoriques acceptés sur la masse du proton et de l'électron, il est arrivé à la conclusion que ces solutions correspondaient à de nouvelles particules, les positrons. Il est clair qu'aucune de ces interprétations ne lui est imposée par l'homomorphisme initial, ni par des considérations de nature structurelle concernant le modèle mathématique considéré. Elles sont plutôt issues de considérations pragmatiques (cf. Bueno [2005, 2016], Bueno et French [2018]).

Le *mapping account*, en tant que solution générale au problème de l'applicabilité, semble dépendre de l'idée qu'à chaque phénomène empirique significatif correspond une structure mathématique particulière, qui lui est liée par un homomorphisme approprié (pour une critique de l'idée que le *mapping account* serait applicable en général à toutes les formes d'application des mathématiques, cf. Rizza [2013]). Ce présupposé est néanmoins discutable, comme le montre le rôle que jouent les idéalisations dans les sciences (cf. Batterman [2010]). D'une manière générale, les sciences empiriques représentent les systèmes réels en altérant délibérément certaines de leurs caractéristiques. Cette démarche sert, tout simplement, à rendre le problème mathématiquement abordable, mais dépend de l'hypothèse que les altérations effectuées n'ont pas d'impact significatif sur le résultat final. Ainsi, lorsque l'on étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil, on considère que la Terre a une forme parfaitement sphérique et que sa masse est concentrée en son centre ; lorsque l'on modélise les oscillations d'un pendule, on suppose que la force gravitationnelle est uniforme ; pour étudier le mouvement d'un fluide passant dans un tuyau, on emploie les équations de Navier-Stokes, qui traitent le fluide comme un milieu continu et non comme un système de molécules. Dans tous ces cas, on ne se contente pas de simplifier le phénomène ou d'en traiter seulement certains aspects au détriment d'autres. Il s'agit d'authentiques déformations, qu'aucun homomorphisme ne permettrait de faire correspondre à des aspects réels de ces phénomènes (Cartwright [1989]). Pourtant, le formalisme mathématique que l'on applique sur la base de ces déformations s'avère fructueux et permet de mieux comprendre certains aspects du phénomène étudié, voire de le prédire ou de le contrôler.

Il existe plusieurs stratégies pour traiter ce problème tout en préservant une conception structuraliste de l'applicabilité. Pincock en a avancé une dans le contexte de sa proposition (cf. Pincock [2007a, 2012, 2014]), mais en il existe aussi une autre, qui repose sur l'adoption d'une forme de « réalisme structurel ». On fait habituellement remonter cette position à un article influent de John Worrall (Worrall [1989]). D'après lui, nos théories scientifiques décrivent correctement la structure des phénomènes empiriques qu'elles étudient (ces phénomènes possèdent, donc, la structure correspondante), mais pas nécessairement la nature des entités qui satisfont cette structure. Une force de cette position est qu'on ne peut pas lui opposer le soi-disant argument de la méta-induction pessimiste (Laudan [1981]). Cet argument part du constat qu'au cours de l'histoire des sciences, de nombreuses théories largement acceptées se sont finalement révélées incorrectes ou ont été abandonnées pour de bonnes raisons, et en conclut qu'il est très peu plausible que nos théories scientifiques actuelles puissent être des descriptions correctes de la réalité (ou, comme l'on dit souvent, soient vraies, au moins approximativement). La réponse du réalisme structurel est que, bien que nos principales théories scientifiques successives aient été contradictoires entre elles (ou tout simplement fausses) en ce qui concerne l'existence ou la nature de certaines entités, elles sont en revanche en accord sur certaines structures qu'elles attribuent aux phénomènes : elles attribuent la même structure aux phénomènes, ou bien transforment progressivement cette structure selon une logique de progrès.

Au cours des dernières années, cette position a été au centre d'une discussion très animée à laquelle ont pris part de nombreux philosophes des sciences, que nous ne pourrons pas tous citer. Disons seulement que deux versions différentes de cette position, clairement distinguées par James Ladyman (Ladyman [1998]), se sont affirmées. Selon la première, dite « réalisme structurel épistémique », défendue par exemple par Mauro Dorato (cf. Dorato [2000]), si nos théories ne décrivent correctement que la structure des phénomènes, c'est parce que cette structure est la seule chose que nous pouvons connaître des phénomènes et donc la seule dont les sciences traitent (ou devraient traiter) ; selon la seconde version, dite « réalisme structurel ontique » et défendue, entre autres, par Steven French et James Ladyman lui-même (cf. French et Ladyman [2011]), c'est plutôt parce que la réalité n'est rien d'autre que cette structure.

Le réalisme structurel est fréquemment associé à l'idée que les théories scientifiques se distinguent les unes des autres par leurs modèles (au sens que ce terme prend en logique, dans la branche qui s'appelle, justement, théorie des modèles) et qu'on peut les « représenter », de manière complète et sans rien perdre de ce qui a une importance scientifique, par leurs modèles (voir, par exemple, French [2000, 2014] et French *et al.* [2002]). Lorsqu'on parle de la structure des phénomènes empiriques, on fait donc référence à ces modèles (et uniquement à eux) ; ainsi, quand on affirme qu'une théorie décrit correctement la structure des phénomènes, on dit donc seulement que ses modèles sont partiellement isomorphes ou homomorphes à un autre modèle, que l'on identifie avec le phénomène réel (ou mieux, à la structure réelle). Par ailleurs, lorsqu'on affirme qu'au cours de l'histoire des sciences, la structure attribuée aux phénomènes se transforme progressivement, on affirme en fait que les théories successives d'un même phénomène ont (ou sont représentées par) des modèles reliés entre eux par des homomorphismes partiels. Mais que veut-on dire au juste quand on dit que deux modèles sont *partiellement* homomorphes ou isomorphes ? C'est en répondant à cette question, comme nous le verrons, que le réalisme structurel se donne les moyens de résoudre la difficulté posée au *mapping account* par le problème des idéalisations, et plus généralement des altérations que les théories scientifiques font subir aux phénomènes qu'elles étudient.

Dans ce contexte, le terme 'structure' a une signification logique (ou algébrique) précise. Une structure est identifiée à un couple $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$, où D est un ensemble non vide d'individus (formant le domaine de la structure) et $(R_i)_{i\in I}$ une famille de relations n_i-aires, conçues de manière extensionnelle comme des ensembles de n_i-uplets d'éléments de D (où $n_i > 0$). Une structure 'partielle' est un couple $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ où les R_i sont, non plus des ensembles de n_i-uplets, mais des triplets $\langle R_{i,1}, R_{i,2}, R_{i,3}\rangle$ d'ensembles de n_i-uplets (d'éléments de D) mutuellement disjoints et tels que $R_{i,1}\cup R_{i,2}\cup R_{i,3} = D^{n_i}$. Il faut ici comprendre $R_{i,1}$ comme l'ensemble de n_i-uplets appartenant à R_i (ou plus précisément, dont on sait qu'ils lui appartiennent), $R_{i,2}$ l'ensemble des n_i-uplets qui n'appartiennent pas (ou dont on sait qu'il n'appartiennent pas) à R_i et $R_{i,3}$ l'ensemble des n_i-uplets dont on ne sait pas s'ils appartiennent ou non à R_i. (Notons que $R_{i,3}$ peut être vide pour certains i : dans ce cas, R_i s'identifie à $R_{i,1}$, qui est alors une relation n_i-aire au sens habituel du terme ; si c'est le cas pour tout i dans I, la structure partielle se réduit à une structure au sens habituel.) Étant données deux structures partielles $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ et $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$, on dit alors que $f\ : D \mapsto D'$ est un homomorphisme (ou isomorphisme) partiel si les conditions qui en feraient un homomorphisme (ou isomorphisme) au sens habituel valent pour $R_{i,1}$ et $R_{i,2}$, mais pas pour $R_{i,3}$: ainsi, f est un homomorphisme partiel si pour tout $i \in I$ et tous $x_1, \ldots, x_{n_i}$ dans D, $R_{i,1}[x_1, \ldots, x_{n_i}] \Rightarrow R'_{i,1}[f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})]$ et $R_{i,2}[x_1, \ldots, x_{n_i}] \Rightarrow R'_{i,2}[f(x_1), \ldots, f(x_{n_i})]$.

C'est précisément parce qu'elle utilise des structures et homomorphismes partiels et qu'elle soutient que seules les structures sont importantes (et non la nature spécifique des éléments de leurs domaines) que cette position peut rendre compte des idéalisations et plus largement de la manière dont les théories scientifiques altèrent les phénomènes qu'elles décrivent. Si une certaine structure partielle $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ est identifiée à la structure réelle d'un phénomène, une autre structure $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$ partiellement isomorphe ou homomorphe à la première peut aussi donner une description correcte de ce phénomène, même si les éléments de D' (ou certains d'entre eux) ne sont pas identiques à ceux de D et ne se trouvent pas dans les mêmes relations qu'eux. De la même manière, considérons deux théories scientifiques qui ont deux structures $\langle D, R_i\rangle_{i\in I}$ et $\langle D', R'_i\rangle_{i\in I}$ comme modèles, c'est-à-dire qui sont représentées par, voire identifiées à, ces structures (ou à des familles de structures dans le cas où les théories en question ne sont pas catégoriques, c'est-à-dire admettent plusieurs modèles différents) : toutes deux peuvent être considérées comme correctes, même si elles sont essentiellement distinctes (c'est-à-dire ni isomorphes ni mêmes homomorphes, et telles que les éléments de D et de D' soient de nature différente), pourvu qu'elles soient reliées par une série d'homomorphismes partiels. (Pour une présentation plus complète des notions de structure et d'homomorphisme partiel dans le contexte de la représentation scientifique, voir Bueno *et al.* [2002] et Da Costa et French [2003].)

Il est alors facile de voir comment une telle approche de la représentation scientifique, fondée sur des structures et homomorphismes partiels, peut être utilisée pour élaborer une approche structuraliste de l'applicabilité. On peut par exemple l'employer pour adapter la conception inférentielle de l'application des mathématiques, introduite plus haut : si l'on utilise des homomorphismes partiels pour caractériser les trois phases d'application des mathématiques qu'elle décrit (immersion, dérivation et interprétation), on obtient un modèle plus flexible, capable de rendre compte d'un plus grand nombre d'applications et notamment des cas où les représentations mathématiques utilisent des idéalisations (cf. Bueno et French [2018], Chap. 9).

Tant le *mapping account* que le réalisme structurel (épistémique ou ontique) semblent tenir pour acquis que toute application des mathématiques à un phénomène empirique repose sur, ou contient en elle-même, une sorte de compréhension du phénomène — ou du moins une représentation de ce phénomène que l'on estime, en un sens ou en un autre, fidèle. Mais sommes-nous sûrs que les choses se passent toujours ainsi ?

Examinons un exemple issu du domaine mathématique de l'analyse de données (ou '*data analysis*', comme on dit souvent, même en France) : celui des *Big Data*, la branche de ce domaine qui traite de l'acquisition et de l'étude d'énormes quantités des données les plus diverses pour en tirer des prédictions ou résoudre des problèmes spécifiques concernant toutes sortes de phénomènes empiriques. Les dimensions colossales des matrices de données qui sont généralement utilisées dans ce domaine, non seulement empêche souvent tout traitement manuel des données et rend indispensable l'emploi d'ordinateurs puissants pour les classifier et les analyser, mais empêche même tout traitement informatique fondé sur des algorithmes qui seraient justifiés par une compréhension préalable du phénomène étudié. Étant dans l'incapacité d'identifier des relations causales précises entre variables (ou de repérer l'absence de telles relations) qui permettraient de réduire le nombre de variables à prendre en compte et donc de diminuer les immenses dimensions des matrices étudiées, on n'a d'autre choix que de faire confiance à des algorithmes de classification et/ou d'interpolation qui essaient de manière répétée d'assigner de nombreuses distributions de poids aux différentes variables, et qui fonctionnent de manière totalement indépendante de la structure des données en question. Ce sont ces méthodes que l'on appelle généralement *machine learning*, et qui forment une branche désormais très importante et variée de l'intelligence artificielle ; il y existe plusieurs familles d'algorithmes, dont ceux issus des réseaux de neurones artificiels, qui sont aujourd'hui appliqués aux cas les plus divers et les plus éloignés des phénomènes cérébraux pour l'étude desquels ils avaient initialement été conçus.

L'un des deux auteurs du présent article, dans un travail conjoint avec d'autres spécialistes, a parlé à ce propos de « méthodes aveugles » et de « science agnostique » (Napoletani *et al.* [2011, 2014, 2017]), parce que ces nouvelles méthodes semblent préfigurer une forme d'application des mathématiques très différentes des applications plus traditionnelles. Ce sont ici les algorithmes eux-mêmes, choisis sur la base de considérations intra-mathématiques, qui produisent une classification des données ou qui révèlent une invariance formelle, celle-ci émergeant indépendamment de toute connaissance préalable de la structure ainsi mise au jour. Le cas des « puces à ADN » ('*DNA microarrays*') est symptomatique. C'est une méthode permettant l'examen simultané d'un très grand nombre d'échantillons d'ADN, issus d'un très grand nombre d'individus ; il en résulte une vaste matrice de données, ensuite soumise à des analyses statistiques qui produisent des classifications dont les fondements biologiques ne sont souvent pas connus, mais qui possèdent d'importantes applications pratiques. L'application de techniques statistiques dans cet exemple fournit donc un exemple de ce que les auteurs appellent '*forcing*' : des techniques mathématiques sont appliquées de force à des phénomènes empiriques en dépit de la nature de ces derniers, et ce en raison de l'avantage calculatoire de ces techniques (une idée qui n'est pas sans rappeler, bien que dans un contexte techniquement plus précis, les analogies formelles de Steiner). Il est toutefois clair que cette idée ne peut pas, en tant que telle, fournir une solution complète au problème de l'applicabilité. Son intérêt général est de montrer que, du moins dans certains cas, on ne peut imaginer de solution qui ne passe pas par une étude précise des méthodes mathématiques impliquées et par une identification de la classe de phénomènes auxquels ces techniques peuvent être appliquées avec succès. Par exemple, les méthodes que nous venons de décrire (dont les puces à ADN sont un exemple paradigmatique) semblent ne s'appliquer qu'à certains types de phénomènes, ceux que les auteurs cités plus haut qualifient d'« historiques », au sens où leur développement n'est soumis qu'à des contraintes locales et obéit à l'optimisation de fonctions différentes à différents moments (Napoletani *et al.* [2014], p. 486).

Les considérations précédentes devraient nous permettre de changer de perspective sur l'étonnement de Wigner quant à la « déraisonnable efficacité des mathématiques ». Bien qu'on ne puisse pas affirmer que le problème de l'applicabilité ait été résolu, on peut, du moins, espérer que l'efficacité des mathématiques n'apparaisse plus comme déraisonnable. Il semblerait, en effet, que cet étonnement provienne d'une erreur : celle de ne prêter attention qu'au résultat final du processus complexe qu'est l'application des mathématiques, en oubliant que ce processus implique souvent de créer *ex novo* de nouvelles branches des mathématiques, d'importer en mathématiques des techniques venues des sciences empiriques elles-mêmes (cf. Urquhart [2008]), de faire directement des observations empiriques (cf. Azzouni [2000]), ou, plus souvent encore, d'employer diverses stratégies pour absorber les phénomènes étudiés au sein même de nos méthodes mathématiques, par le biais d'homomorphismes, de modélisations, d'exclusions, de déformations, d'interprétations voire de coups de force (ou simplement de « renormalisations » : cf. Steiner [1992] et Maddy [1997], Chap. 6).

Certains sont allés plus loin encore en affirmant que, à y bien regarder, l'applicabilité des mathématiques ne concerne que certains morceaux du monde, qui, sans doute, se prêtent mieux que les autres à une étude mathématique, et qu'en fin de compte, nous ne traitons mathématiquement que les problèmes empiriques qui sont solubles au moyen des méthodes mathématiques dont nous disposons. On ne fait qu'obtenir « ce que l'on cherche » (Colyvan [2012], p. 105). Il s'agit d'une conception que Mark Wilson a nommée « opportunisme mathématique » (Wilson [2000]). Selon lui, l'application des mathématiques découle de notre capacité à identifier des conditions spéciales qui permettent à tel ou tel domaine des mathématiques de nous dire quelque chose d'utile à propos des systèmes empiriques qui se trouvent satisfaire ces conditions ; mais, ajoute-t-il, on est malgré tout souvent confronté à des situations où les mathématiques ne s'appliquent pas avec succès (le septième chapitre de Pincock [2012] rapporte quelques exemples symptomatiques de ces « défaillances »).

Il n'en reste pas moins que les applications des mathématiques couvrent aujourd'hui un spectre si vaste, et en expansion si rapide (que l'on pense seulement, par exemple, au développement des techniques mathématiques en biologie, neurologie, éthologie, géologie, sociologie, etc.), que cette position ne semble pas tenir. Bien que les mathématiques ne soient pas toutes-puissantes et ne sont pas véritablement omniprésentes, l'expansion constante des phénomènes auxquels elles s'appliquent ne nous permet pas d'évacuer leur efficacité comme un effet fortuit ou purement local. En revanche, ce qui semble très clair, c'est qu'expliquer l'applicabilité des mathématiques ne saurait être possible aujourd'hui sans une analyse détaillée des mathématiques elles-mêmes, et des nombreuses et diverses formes que prennent leurs applications (pour une étude de différentes formes d'application des mathématiques, cf. Rizza [2008] et Bueno et French [2018]).

4 Liens avec d'autres problèmes

Dans les pages précédentes, nous avons essayé de présenter le problème de l'applicabilité des mathématiques ainsi que les lignes directrices des solutions qui en ont été proposées. Pour ce faire, nous en avons brièvement retracé l'histoire, et avons mentionné les positions les plus récentes et plus importantes sur le sujet. Il y a cependant des thématiques que nous n'avons pas pu approfondir, et des aspects du problème que nous avons dû laisser de côté.

Nous nous sommes par exemple concentrés sur l'applicabilité externe des mathématiques, notamment dans les sciences empiriques, et avons laissé de côté le problème, probablement plus complexe encore, de leur applicabilité interne (à ce propos, cf. Steiner [1998, 2005]) : les mathématiques permettent d'interpréter certaines de leurs théories au sein de certaines autres, ainsi que d'utiliser simultanément les résultats de théories différentes en les faisant interagir entre elles. Ainsi, les groupes de Lie nous permettent d'étudier certaines propriétés des équations différentielles (Olver [1993]), c'est-à-dire que la théorie de groupes s'applique (entre autres) à celle des équations différentielles ; en théorie des nombres, Andrew Wiles a pu démontrer le grand théorème de Fermat grâce à la combinaison de progrès accomplis dans des théories mathématiques très variées, notamment celles des courbes elliptiques, des formes modulaires et des représentations galoisiennes (pour un aperçu de la démonstration de Wiles, voir Parrochia *et al.* [2012], Chap. 5).

Ces exemples, parmi bien d'autres, peuvent laisser penser que de nombreuses théories mathématiques ordinairement considérées comme distinctes ne sont en fait que des parties d'une même théorie plus générale, ce qui rendrait le problème de l'applicabilité interne des mathématiques dépourvu de réel intérêt philosophique. Il faut observer, cependant, que l'unification des mathématiques en une théorie unique est loin d'être accomplie, et que même les unifications plus réussies, comme celle qui a été réalisée (ou que l'on espère pouvoir réaliser) par la théorie des ensembles, découlent davantage de l'identification d'un cadre (ou *framework*) commun, peut-être seulement linguistique, que de l'identification d'une unité plus profonde (au contraire, par exemple, des liens entre théorie des groupes et calcul intégral ou entre théorie des nombres et géométrie algébrique). Il s'ensuit que la question de l'unité (ou de l'unification) des mathématiques reste un thème de recherche important, auquel la question de l'applicabilité interne se rapporte directement (c'est un thème abordé dans le chapitre 4 du présent volume).

D'ailleurs, pour revenir à l'applicabilité des mathématiques aux sciences empiriques, il faut noter que les problèmes de l'applicabilité externe et de l'applicabilité interne, bien que probablement différents, sont souvent intimement liés. En effet, l'applicabilité externe peut reposer sur notre capacité à étudier le modèle mathématique d'un phénomène empirique au moyen de techniques issues d'autres théories mathématiques que celles du modèle en question.

Nous avons également laissé de côté le problème, plus lié encore à celui de l'applicabilité, de l'explication mathématique de phénomènes empiriques (voir Molinini [2011, 2014] et Lange [2016]). Expliquer un phénomène empirique P signifie répondre à la question 'Pourquoi P se produit-il ?'. Par exemple, pourquoi une partie de la Terre se trouve-t-elle dans l'ombre lorsque la Lune se place devant le Soleil et occulte totalement le disque solaire (éclipse totale de Soleil) ? On pourrait vouloir répondre à cette question en alléguant par exemple que, dans cette configuration astronomique particulière (Terre, Lune, Soleil), la face cachée de la Lune absorbe la lumière provenant d'une partie de la Terre, ou que le diamètre de la Lune est égal à (ou plus grand que) celui du Soleil et donc que la Lune bloque la lumière venue du Soleil. Cependant, nous savons que ces explications sont incorrectes, et que la bonne explication doit invoquer les faits suivants : un corps (la Lune) vient s'interposer entre deux corps (la Terre et le Soleil) ; la Lune et le Soleil présentent le même diamètre *apparent* dans le ciel (parce que le diamètre du Soleil est 400 fois plus grand que celui de la Lune mais la distance entre le Soleil et la Terre est 390 fois plus grande que celle entre la Lune et la Terre) ; la Lune absorbe une partie de la lumière qui provient du Soleil, celle précisément qui, en se propageant en ligne droite dans l'espace, devrait éclairer la partie de la surface terrestre qui se retrouve dans l'ombre. Proposer une théorie de l'explication scientifique revient, d'une part, à isoler ce qui permet d'aller au-delà d'une connaissances purement descriptive d'un phénomène P pour répondre à la question 'Pourquoi P se produit-il ?', et d'autre part à identifier, s'ils existent, les traits caractéristiques qui élèvent une explication en général au rang d'explication « scientifique ».

De nombreuses théories de l'explication scientifique ont été proposées en philosophie des sciences. La plupart se fondent sur l'idée qu'une bonne explication doit identifier un mécanisme causal (sous une forme ou une autre) ; la notion d'explication est alors clarifiée en termes d'une relation causale entre le phénomène à expliquer (ou l'*explanandum*) et ce qui l'explique (ou *explanans*). Mais il faut noter, d'une part, que le débat sur l'explication causale est assez complexe, plusieurs conceptions de la causalité ayant été proposées (par exemple la théorie mécanique-causale de Wesley Salmon Salmon [1984], ou la théorie manipulationniste développée principalement par James Woodward (Woodward [2003]), et d'autre part que plusieurs auteurs ont avancé l'idée qu'il existe des explications « non causales » de phénomènes empiriques, c'est-à-dire de (bonnes) explications dont le pouvoir explicatif ne provient pas de l'identification d'un mécanisme causal. Parmi les explications de ce genre, on en trouve certaines dont le pouvoir explicatif semble venir des mathématiques (cf. Mancosu [2008], Mancosu et Pincock [2012]). On parle alors d'explication « mathématique » de phénomènes empiriques (sur la notion d'explication mathématique de résultats mathématiques, qui est généralement traitée par les philosophes comme une notion distincte de celle considérée ici, voir la section 1 du chapitre 8 du présent volume) .

Pour mieux comprendre la question, reprenons un exemple déjà discuté plus haut : celui des sept ponts de Königsberg. On pourrait se demander pourquoi il n'est pas possible, en se promenant dans cette ville, de traverser une et une seule fois chacun des sept ponts tout en revenant finalement à son point de départ. Dans ce cas, on ne peut pas identifier de mécanisme causal fonctionnant comme *explicans*. Même si l'on tentait de reconstruire une forme d'historique causal (par exemple en disant qu'on a parcouru notre chemin en allant du pont a au pont b puis du pont b au pont c etc.), cet historique n'aurait aucune utilité explicative. En revanche, si l'on néglige les détails causaux et que l'on conçoit le système ponts/zones de terre ferme comme un graphe (comme expliqué plus haut), on peut invoquer un théorème de la théorie des graphes qui établit qu'un parcours commençant et se terminant au même sommet, et parcourant une et une seule fois chacun des sept arcs, est impossible dès lors qu'au moins un des sommets est de degré impair. Ce sont donc les mathématiques qui nous disent pourquoi il est impossible d'achever notre promenade. C'est pour cette raison que Pincock parle, dans ce cas, d'explication mathématique, et plus précisément d'explication « abstraite » (Pincock [2007b]).

On pourrait rétorquer que l'impossibilité d'accomplir un certain chemin n'est pas à proprement parler un phénomène empirique. D'autres exemples moins douteux sont décrits dans la littérature (cf. Baker [2005], Lyon et Colyvan [2008], Pincock [2011], Lange [2013]) ; quoi qu'il en soit, cet exemple suffit tout de même à illustrer ce que l'on entend par une explication mathématique. Par ailleurs, il illustre aussi le lien entre applicabilité et explication. Il ne saurait y avoir d'explication mathématique de phénomènes empiriques si les mathématiques ne s'appliquaient pas avec succès aux sciences consacrées à ces phénomènes, bien qu'une application réussie ne conduise pas nécessairement à une explication. Rendre compte de la possibilité d'une explication mathématique requiert donc davantage que la seule justification de l'application correspondante. (On peut toutefois aussi soutenir que si les mathématiques sont applicables avec succès aux sciences empiriques, elles ne fournissent cependant pas d'explication des phénomènes étudiés, et que leur pouvoir explicatif découle en réalité du fait que l'applicabilité des mathématiques se conforme au *mapping account* : cf. Bueno et Colyvan [2011], p. 351).

Le thème de l'applicabilité joue également un rôle important dans les discussions sur l'ontologie et l'épistémologie des mathématiques suscitées par l'argument d'indispensabilité. Cet argument, qui joue un rôle crucial dans le débat actuel entre platonisme et nominalisme, est présenté en détail dans le chapitre 7 du présent volume. Il convient cependant de revenir ici sur l'idée même d'indispensabilité. Lorsque l'on parle d'indispensabilité des mathématiques dans les sciences empiriques, qu'est-ce qui dans les mathématiques est supposé indispensable, au juste ? Et que signifie exactement 'indispensable' ? L'idée originale de Putnam (Putnam [1971], p. 347), inspirée par de nombreuses remarques de Quine, était de constater que de nombreuses théories scientifiques exigent de quantifier non seulement sur des entités physiques, mais aussi sur des entités mathématiques, de sorte que notre engagement ontologique envers les premières devrait aller de pair avec un engagement ontologique (de même nature) envers les secondes. Pour dire les choses plus simplement, si l'on accepte l'existence des objets physiques dont parlent nos théories scientifiques, on devrait faire de même avec les objets mathématiques dont elles parlent aussi — pourvu qu'elles en parlent de manière indispensable. Mais que veut-on dire au juste quand on dit qu'il est *indispensable* de quantifier sur des entités mathématiques ? Et qu'est-ce qui est indispensable exactement ?

Alors que, sur la seconde question, les opinions diffèrent (du moins *prima facie*), la première a curieusement été très peu examinée au cours des discussions sur l'argument. Commençons par la seconde. Mark Colyvan et Alan Baker (Colyvan [2001], Baker [2005]) semblent considérer que ce sont les entités ou objets mathématiques eux-mêmes qui sont indispensables. Mais comment peut-on admettre, au sens littéral, que des objets soient indispensables (dans n'importe quel sens du terme) si l'on n'admet pas déjà qu'ils existent ? Il semblerait donc qu'accepter comme prémisse que certains objets mathématiques soient (d'une manière ou d'une autre) indispensables en sciences introduirait dans l'argument une circularité fatale. Cela suggère que, lorsque l'on dit que ce sont les *objets* mathématiques qui sont indispensables, ce n'est en fait qu'une façon de parler. D'après Michael Resnik (Resnik [1995]), ce qui est indispensable est en fait de présupposer la vérité de certains énoncés mathématiques, tandis que pour Jody Azzouni (Azzouni [2009]), c'est de pouvoir faire un certain usage d'énoncés mathématiques. Quant à nous (Panza et Sereni [2013], ch. 6 ; Panza et Sereni [2015] ; Panza et Sereni [2016] ; Molinini [2016]), nous avons soutenu que ce qui doit être considéré comme indispensable, au sein de n'importe quelle version de cet argument, ce sont au fond certaines *théories* mathématiques, et que celles-ci ne peuvent être considérées comme indispensables, à leur tour, que pour des *théories* scientifiques.

Cela suggère de comprendre l'indispensabilité des mathématiques pour les sciences comme ceci : une théorie mathématique M est indispensable pour une théorie scientifique T employant le vocabulaire (ou une partie du vocabulaire) de M dès lors que T ne peut pas être reformulée sans utiliser ce vocabulaire (même en partie). Cette idée suppose de penser une théorie comme un ensemble d'énoncés. Si l'on admet cela, reformuler une théorie signifie produire une nouvelle théorie équivalente à la première. Le problème est alors d'identifier la bonne relation d'équivalence à utiliser. En tant que théorie scientifique, T poursuit certainement des buts que lui sont propres et sont dictés par la pratique scientifique dont elle participe. Il semble alors naturel de considérer qu'une reformulation de T ne peut être équivalente à T que si elle poursuit et/ou réalise les mêmes buts. C'est ici que la discussion sur l'argument d'indispensabilité rejoint, ou du moins devrait rejoindre, celle sur l'applicabilité des mathématiques : en effet, clarifier la notion d'indispensabilité semble exiger de clarifier les buts qu'une théorie scientifique peut atteindre grâce à la contribution des mathématiques (comme l'observe, par exemple, Ginammi [2016]). Ainsi, si parmi les buts d'une théorie scientifique se trouve, par exemple, celui d'expliquer des phénomènes empiriques, on peut alors imaginer que certaines théories mathématiques participent de manière indispensable à ce but (c'est-à-dire qu'aucune reformulation d'une certaine théorie scientifique T capable d'apporter l'explication demandée ne peut faire l'économie du vocabulaire d'une certaine théorie mathématique M, ou du moins d'une théorie mathématique parmi plusieurs possibles). Sous cette forme, l'argument d'indispensabilité en vient à dépendre d'une forme d'indispensabilité explicative des mathématiques (comme l'a d'abord suggéré Baker [2009]).

On voit alors comment le débat sur l'indispensabilité des mathématiques pour les théories scientifiques peut rejoindre (comme cela s'est de fait produit ces dernières années) celui sur l'explication mathématique de phénomènes empiriques. Nous avons voulu insister sur cette question, de même que sur celle de l'applicabilité interne des mathématiques, pour mettre en évidence les relations du problème de l'applicabilité des mathématiques (dans les sciences empiriques) avec d'autres problèmes. Il existe beaucoup d'autres relations de ce genre ; les travaux mentionnés tout au long de cet article, ainsi qu'ailleurs dans le présent volume, peuvent servir de point de départ pour en explorer la plupart.

Pour finir, tournons-nous vers une question qui, assez étrangement, n'a presque pas été abordée dans la littérature sur le problème de l'applicabilité, mais dont l'importance pour ce sujet est claire dès que l'on examine la pratique scientifique réelle. Dans de nombreux domaines des sciences empiriques, on utilise massivement des approches mathématiques de nature probabiliste afin de prévoir ou de rendre compte de divers phénomènes. Par exemple, depuis l'émergence de la mécanique quantique, les probabilités sont utilisées pour étudier le domaine atomique, qui échappe à toute appréhension sensorielle directe. Cette approche s'est avérée extrêmement efficace pour rendre compte de phénomènes physiques auparavant incompréhensibles, ou pour en prévoir de nouveaux. Mais l'on rencontre également des application des probabilités ailleurs qu'en mécanique quantique : les probabilités, sous différentes formes, sont appliquées avec grand succès dans les contextes scientifiques les plus divers, par exemple en biologie et en géologie, mais aussi en économie et en psychologie, pour n'en nommer que quelques-uns.

D'où la question suivante : comment pouvons-nous expliquer le succès de ces applications ? Peut-être est-il possible d'y répondre en s'appuyant sur l'une des solutions générales au problème de l'applicabilité qui ont été présentées dans cet article, par exemple la conception inférentielle élaborée par Otávio Bueno et Mark Colyvan. Peut-être, au contraire, ces solutions sont-elles insuffisantes et le cas des applications probabilistes requiert-il un modèle différent de ceux qui ont été proposés jusqu'ici. Ces deux pistes philosophiques restent à ce jour ouvertes et encore inexplorées. Quoi qu'il en soit, il est clair qu'une telle investigation ne saurait faire abstraction du débat complexe, qui aujourd'hui encore reste vif, entre les différentes interprétations du concept de probabilité. Sur ce débat, nous renvoyons à l'Annexe ci-dessous, rédigée par Maria Carla Galavotti.

Les pages qui précèdent ont donné un bref aperçu de quelques thèmes intimement liés au problème philosophique de l'applicabilité des mathématiques. Dans tous les cas, le cœur du problème reste le même : lorsque nous employons les mathématiques pour prévoir des phénomènes empiriques, pour les expliquer, pour en étudier certains aspects ou encore pour résoudre des problèmes qu'ils soulèvent, faisons-nous vraiment la même chose que quelqu'un qui entreprendrait de prévoir l'évolution de la Bourse de New York en étudiant l'anatomie des éléphants ? Nous espérons avoir démontré que la réponse est négative, non pas tant parce que les phénomènes empiriques mathématisés se comportent différemment de la Bourse de New York (qui, comme n'importe quel autre domaine de la finance, fait l'objet de plusieurs théories mathématisées très sophistiquées) que parce que les mathématiques sont très différentes de l'étude de l'anatomie des éléphants.

Bibliographie

Azzouni, J. (2000). Applying mathematics : An attempt to design a philosophical problem. *The Monist*, 83:209–227.

Azzouni, J. (2009). Evading truth commitments : The problem reanalyzed. *Logique & Analyse*, 206:139–176.

Baker, A. (2005). Are there genuine mathematical explanations of physical phenomena ? *Mind*, 114:223–238.

Baker, A. (2009). Mathematical explanation in science. *British Journal for the Philosophy of Science*, 60:611–633.

Batterman, R. (2010). On the explanatory role of mathematics in empirical science. *British Journal for the Philosophy of Science*, 61:1–25.

Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. *Journal of Philosophy*, 70: 661–680.

Bueno, O. (2005). Dirac and the dispensability of mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 36(3):465–490.

Bueno, O. (2016). An anti-realist account of the application of mathematics. *Philosophical Studies*, 173(10):2591–2604.

Bueno, O. (2017a). *The Dispensability of Mathematics.* Manuscrit non publié.

Bueno, O. (2017b). *How to Dissolve the Problem of the Application of Mathematics.* Manuscrit non publié.

Bueno, O. et Colyvan, M. (2011). An inferential conception of the application of mathematics. *Noûs*, 45(2):345–374.

Bueno, O. et French, S. (2018). *Applying Mathematics : Immersion, Inference, Interpretation.* Oxford University Press, Oxford.

Bueno, O., French, S. et Ladyman, J. (2002). On representing the relationship between the mathematical and the empirical'. *Philosophy of Science*, 69:497–518.

Carnap, R. (1934). *Logische Syntax der Sprache.* Julius Springer, Vienne.

Cartwright, N. (1989). *Nature's capacities and their measurement.* Oxford University Press, Oxford.

Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics.* Oxford University Press, Oxford.

Colyvan, M. (2012). *An introduction to the philosophy of mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Da Costa, N. et French, S. (2003). *Science and Partial Truth : A Unitary Approach to Models and Scientific Reasoning.* Oxford University Press, New York, NY, USA.

Davies, P. C. W. (1992). *The mind of God.* Penguin Book, London. (Trad. fr. par P. Couturiau, *L'esprit de Dieu*, Rocher, Monaco, 1995).

Dorato, M. (2000). Substantivalism, relationism and structural spacetime realism. *Foundations of Physics*, 30:1605–1628.

Dyson, F. J. (1964). Mathematics in the physical sciences. *Scientific American*, 211:128–146.

Feynman, R. P. (1967). *The character of physical law.* MIT Press, Cambridge (MA). (Trad. fr. par H. Isaac et J.M. Lévy-Leblond, *La nature des lois physiques*, Paris, L. Laffont, 1970).

Field, H. (1980). *Science without numbers : A defence of nominalism.* Blackwell, Oxford.

Field, H. (1982). Realism and anti-realism about mathematics. *Philosophical Topics*, 13:45–69.

Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik : Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl.* Koebner, Breslau. (Trad. fr. C. Imbert, *Les fondements de l'arithmétique*, Seuil, Paris, 1969).

Frege, G. (1893-1903). *Grundgesetze der Arithmetik*, volume 2 Voll. Pohle, Jena.

French, S. (2000). The reasonable effectiveness of mathematics : partial structures and the application of group theory to physics. *Synthese*, 125: 103–120.

French, S. (2014). *The Structure of the world : Metaphysics and representation.* Oxford University Press, Oxford.

French, S., Bueno, O. et Ladyman, J. (2002). On representing the relationship between the mathematical and the empirical. *Philosophy of Science*, 69:452–473.

French, S. et Ladyman, J. (2011). In defence of ontic structural realism. *In* Bokulich, A. et Bokulich, P., éditeurs : *Scientific structuralism*, pages 25–42. Springer, Berlin.

Galilei, G. (1890-1909). *Le opere di Galileo Galilei : edizione nazionale sotto gli auspici di sua maestà il re d'Italia*, volume 20 Voll. A cura di A. Favaro. Barbera, Firenze.

Galilei, G. (1979). *L'Essayeur de Galilée.* Traduction et introduction de Christiane Chauviré, Les Belles Lettres, Annales littéraires de l'Université de Besançon, Paris.

Galilei, G. (2000). *Dialogue sur les deux grands systèmes du monde.* Traduit de l'italien par René Fréreux avec le concours de François De Gandt, Seuil, Paris.

Ginammi, M. (2016). The applicability of mathematics and the indispensability arguments. *Lato Sensu : revue de la Société de philosophie des*

sciences, 3(1).
GINGRAS, Y. (2001). What did mathematics do to physics ? *History of Science*, 39:383–416.
HAHN, H. (1933). Logik, mathematik und naturerkennen. *In* MCGUINNESS, B., éditeur : *Hans Hahn : Empirismus, Logik, Mathematik*, pages 141–172. Suhrkamp, Frankfurt, 1988.
HESSE, M. B. (1966). *Models and analogies in science*. University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana.
HILBERT, D. (1992). *Natur und mathematisches Erkennen : Vorlesungen, gehalten 1919-1920 in Göttingen*. Ed. by D. E. Rowe. Birkhäuser, Basel.
IMOCRANTE, M. (2017). *Which epistemology for applied mathematics ? From classical debates to structural accounts*. Thèse de doctorat, Università San Raffaele - Université Paris 1 Panthéon Sorbonne.
ISLAMI, A. (2017). A match not made in heaven : on the applicability of mathematics in physics. *Synthese*, 194(12):4839–4861.
ISRAEL, G. (1996). *La mathématisation du réel. Essai sur la modélisation mathématique*. Seuil, Paris.
ISRAEL, G. (2002). The two faces of mathematical modeling : Objectivism vs subjectivism, simplicity vs complexity. *In* CERRAI, P., FREGUGLIA, P. et PELLEGRINI, P., éditeurs : *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*, pages 233–243. Kluwer, New York, NY, USA.
KRANTZ, D. H., LUCE, R. D., SUPPES, P. et TVERSKY, A. (1971-1990). *Foundations of measurement*, volume 3 Voll. Academic Press, New York, NY, USA.
LADYMAN, J. (1998). What is structural realism ? *Studies in history and philosophy of science*, 29:409–424.
LANGE, M. (2013). What makes a scientific explanation distinctively mathematical ? *The British Journal for the Philosophy of Science*, 64(3):485–511.
LANGE, M. (2016). *Because Without Cause : Non-Causal Explanations in Science and Mathematics*. Oxford University Press, Oxford.
LAUDAN, L. (1981). A confutation of convergent realism. *Philosophy of Science*, 48(1):19–49.
LYON, A. et COLYVAN, M. (2008). The explanatory power of phase spaces. *Philosophia Mathematica*, 16(2):227–243.
MADDY, P. (1997). *Naturalism in mathematics*. Oxford University Press, Oxford.
MALAMENT, D. (1982). Review of Field's *Science without numbers*. *Journal of Philosophy*, 79:523–534.
MANCOSU, P. (2008). Mathematical explanation : Why it matters. *In*

Mancosu, P., éditeur : *The Philosophy of Mathematical Practice*, pages 134–150. Oxford University Press, Oxford. (Trad. fr. par S. Maronne, De l'importance de l'explication mathématique, in Mancosu, P. Infini, logique, géométrie, Vrin, Paris, 2015, p. 275-292).

Mancosu, P. et Pincock, C. (2012). Mathematical explanation. *In* Pritchard, D., éditeur : *Oxford Bibliographies in Philosophy*. Oxford University Press, New York, NY, USA.

Molinini, D. (2011). *Toward a Pluralist Approach to Mathematical Explanation of Physical Phenomena*. Thèse de doctorat, Université Paris VII.

Molinini, D. (2014). *Che cos'è una spiegazione matematica*. Carocci, Roma.

Molinini, D. (2016). Evidence, explanation and enhanced indispensability. *Synthese*, 193(2):403–422.

Molinini, D. (2020). Intended and unintended mathematics : The case of the Lagrange multipliers. *Journal for General Philosophy of Science*, 51(1):93–113.

Napoletani, D., Panza, M. et Struppa, D. (2011). Agnostic science. towards a philosophy of data analysis. *Foundations of Science*, 16:1–20.

Napoletani, D., Panza, M. et Struppa, D. (2014). Is big data enough ? a reflection on the changing role of mathematics in applications. *Notices of the American Mathematical Society*, 61:485–490.

Napoletani, D., Panza, M. et Struppa, D. (2017). Forcing optimality and Brandt's principle. *In* Lenhard, J. et Carrier, M., éditeurs : *Mathematics as a Tool*, Boston Studies in the Philosophy and History of Science, 327, pages 233–251. Springer, Cham (Switzerland).

Olver, P. J. (1993). *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer, New York, NY, USA.

Panza, M. (2002). Mathematization of the science of motion and the birth of analytical mechanics : A historiographical note. *In* Cerrai, P., Freguglia, P. et Pellegrini, P., éditeurs : *The application of mathematics to the sciences of nature. Critical moments and aspects*, pages 253–271. Kluwer, New York, NY, USA.

Panza, M. et Sereni, A. (2013). *Introduction à la philosophie des mathématiques*. Flammarion, Paris.

Panza, M. et Sereni, A. (2015). On the indispensable premises of the indispensability argument. *In* Lolli, G., Panza, M. et Venturi, G., éditeurs : *From Logic to Practice : Italian Studies in the Philosophy of Mathematics*, pages 241–276. Springer International Publishing.

Panza, M. et Sereni, A. (2016). The varieties of indispensability arguments. *Synthese*, 193(2):469–516.

Parrochia, D., Micali, A. et Anglès, P. (2012). *L'unification des* *mathématiques : algèbres géométriques, géométrie algébrique et philosophie de Langlands*. Lavoisier, Cachan.

Penrose, R. (1989). *The emperor's new mind : Concerning computers, mind, and the laws of physics*. Oxford University Press, Oxford. (Trad. fr. par F. Balibar et C. Tiercelin. *L'esprit, l'ordinateur et les lois de la physique*, InterÉditions, Paris, 1995).

Pincock, C. (2004). A new perspective on the problem of applying mathematics. *Philosophia Mathematica*, 3:135–161.

Pincock, C. (2007a). Mathematical idealization. *Philosophy of Science*, 74:957–967.

Pincock, C. (2007b). A role for mathematics in the physical sciences. *Noûs*, 41:253–275.

Pincock, C. (2011). Mathematical explanations of the rainbow. *Studies in History and Philosophy of Science Part B : Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 42(1):13–22.

Pincock, C. (2012). *Mathematics and scientific representation*. Oxford University Press, Oxford.

Pincock, C. (2014). How to avoid inconsistent idealizations. *Synthese*, 191:2957–2972.

Putnam, H. (1971). *Philosophy of logic*. Harper and Row, New York, NY, USA.

Resnik, M. (1995). Scientific vs. mathematical realism : The indispensability argument. *Philosophia Mathematica*, 3(2):166–174.

Rizza, D. (2008). *Applicability, idealization, and mathematization*. Thèse de doctorat, University of Sheffield.

Rizza, D. (2013). The applicability of mathematics : Beyond mapping accounts. *Philosophy of Science*, 80:398–412.

Salmon, W. (1984). *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*. Princeton University Press, Princeton.

Steiner, M. (1989). The application of mathematics to natural science. *Journal of Philosophy*, 86:449–480.

Steiner, M. (1992). Mathematical rigor in physics. *In* Detlefsen, M., éditeur : *Proof and knowledge in mathematics*, pages 158–170. Routledge, New York, NY, USA.

Steiner, M. (1998). *The applicability of mathematics as a philosophical problem*. Harvard University Press, Cambridge, MA, USA.

Steiner, M. (2005). Mathematics — application and applicability. *In* Shapiro, S., éditeur : *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, pages 625–650. Oxford University Press, Oxford.

Urquhart, A. (2008). Mathematics and physics : Strategies of assimilation.

In Mancosu, P., éditeur : *The Philosophy of Mathematical Practice*, pages 417–440. Oxford University Press, Oxford.

Wigner, E. P. (1960). The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 13:1–14.

Wilholt, T. (2006). Lost in the way from Frege to Carnap : How the philosophy of science forgot the applicability problem. *Grazer Philosophische Studien*, 73:69–82.

Wilson, M. (2000). The unreasonable uncooperativeness of mathematics in the natural sciences. *The Monist*, 83:296–315.

Woodward, J. (2003). *Making Things Happen : A Theory of Causal Explanation*. Oxford University Press, Oxford.

Worrall, J. (1989). Structural realism : The best of both worlds ? *Dialectica*, 43:99–124.

Wright, C. (2000). Neo-fregean foundation for real analysis : Some reflection on frege's constraint. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 41:317–334.