Trois études de cas autour du motif de la ligne brisée dans les sciences mathématiques

Jenny Boucard, Christophe Eckes

Trois études de cas autour du motif de la ligne brisée dans les sciences mathématiques

Jenny Boucard et Christophe Eckes

Introduction

Bien qu'elle puisse être définie de manière très élémentaire comme un ensemble de points que relient des lignes droites, la ligne brisée se singularise par sa marginalité dans les textes mathématiques : alors que les figures polygonales[1] font par exemple l'objet de nombreuses propositions dans le livre IV des *Éléments* d'Euclide[2], la ligne brisée n'y apparaît que très ponctuellement, au détour d'une poignée de démonstrations. Quelque deux millénaires plus tard, la ligne brisée semble être tout aussi discrète : l'*Encyclopédie* de Diderot et d'Alembert n'en comporte qu'une seule occurrence, à propos d'une énigme chinoise exposée dans l'article « Binaire »[3]. La ligne brisée est en revanche explicitement définie dans les *Éléments de géométrie* d'Adrien-Marie Legendre, un traité de géométrie qui fut un succès éditorial tout au long du XIXème siècle[4]. L'objectif de Legendre était alors de produire des « éléments très rigoureux », en suivant « d'assez près la méthode des éléments d'Euclide » tout en proposant des démonstrations plus claires et plus courtes (vi-vii) :

> III. La *ligne droite* est le plus court chemin d'un point à un autre.
> IV. Toute ligne qui n'est ni droite ni composée de lignes droites est une *ligne courbe*.
> Ainsi AB est une ligne droite, ACDB une ligne brisée ou composée de lignes droites, et AEB est une ligne courbe. (1)

Ces trois types de lignes sont représentés sur la figure 1, issue de la première planche des *Éléments* de Legendre.

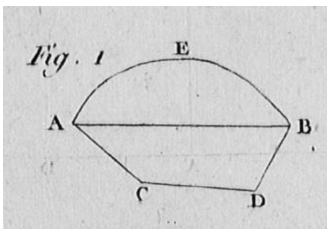

Figure 1 – Les trois types de lignes en géométrie, A.-M. Legendre, (planche 1, figure 1).

[1] Les polygones constituent de fait un cas particulier remarquable de lignes brisées.
[2] Ce traité, qui date du IIIème siècle avant J.-C. est l'un des principaux témoignages des activités mathématiques en Grèce ancienne au début de l'ère hellénistique. Il est parvenu jusqu'à nous sous la forme de copies de copies.
[3] Recherche effectuée à partir de l'*Édition numérique collaborative et critique de l'Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers (1751-1772)* : http://enccre.academie-sciences.fr/encyclopedie/.
[4] Sur le traité de Legendre, voir l'article de J. Dhombres (99) sur les manuels mathématiques français par exemple.

La ligne brisée devient un objet mathématique bien défini dans les traités de géométrie au XIXème siècle. Elle apparaît par exemple dans la sixième édition du *Dictionnaire de l'Académie française*, qui date de 1835 et elle est envisagée pour elle-même dans le *Traité de géométrie élémentaire* d'Eugène Rouché et Charles de Comberousse : « On nomme *ligne brisée* une ligne formée de plusieurs portions de droites distinctes ; telle est la ligne ABCD (*fig. 2*). » (2) [5]

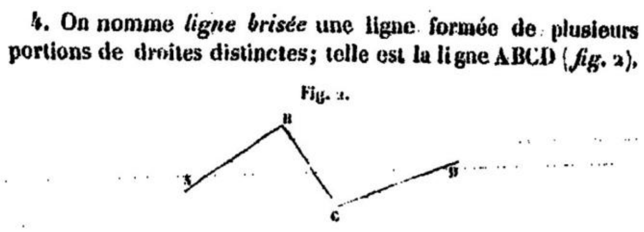
4. On nomme *ligne brisée* une ligne formée de plusieurs portions de droites distinctes; telle est la ligne ABCD (*fig.* 2).

Figure 2 – Définition de la ligne brisée, E. Rouché et C. de Comberousse, (figure 1).

Notre objectif n'est pas de reconstituer ici une histoire de la ligne brisée dans les sciences mathématiques. Notre démarche se veut exploratoire et elle s'appuiera sur trois études de cas, qui permettent de rassembler des diagrammes[6], des représentations ou des constructions géométriques mettant en jeu le motif de la ligne brisée. Ce faisant, nous interrogerons le statut et les fonctions que peut recevoir ce motif pour démontrer des théorèmes, appréhender des objets mathématiques et résoudre des problèmes. Les exemples que nous avons sélectionnés montreront que la ligne brisée se retrouve dans les mathématiques théoriques, pratiques, scolaires ou encore récréatives.

Dans un premier temps, en nous appuyant sur les analyses qui en ont été fournies par D. Rabouin (115 et suiv.), nous montrerons comment le motif de la ligne brisée intervient dans les diagrammes qui accompagnent les propositions 14 et 27 issues du livre premier des *Éléments* d'Euclide, lesquelles mettent en jeu un raisonnement par l'absurde[7]. Dans un deuxième temps, nous établirons sur divers exemples – la courbe de Koch, la courbe de Peano et la courbe de Hilbert – que l'*itération* du motif de la ligne brisée permet d'appréhender des objets et des résultats mathématiques *a priori* contre-intuitifs. Dans un dernier temps, nous montrerons que

[5] Cette modification du statut de la ligne brisée au tournant du XIXème siècle serait à approfondir plus sérieusement mais une première recherche globale sur Gallica suggère une telle transformation : parmi les ouvrages numérisés en plein texte sur cette plateforme, le terme « ligne brisée » est trouvé dans un ouvrage du XVIIème siècle, 15 du XVIIIème (dont 9 datant d'après 1794) et 2371 au XIXème. À titre de comparaison, la recherche de « polygone » renvoie à 88 ouvrages du XVIIème siècle, 488 du XVIIIème, et 6668 du XIXème.

[6] Pour une étude transdisciplinaire sur les représentations diagrammatiques, nous renvoyons le lecteur au volume 22 de la revue *Théorie, littérature, enseignement* (2004).

[7] Un raisonnement par l'absurde consiste à démontrer une proposition en établissant que la proposition contraire débouche sur une contradiction ou une impossibilité logique.

le motif de la ligne brisée intervient de manière récurrente entre le dernier tiers du XVIIIème siècle et le début du XXème siècle dans la résolution du problème du cavalier, qui consiste à faire parcourir toutes les cases d'un échiquier à un cavalier, en respectant la contrainte de ne passer qu'une seule fois sur chaque case. Les solutions peuvent justement être visualisées selon plusieurs représentations graphiques, dont le tracé de lignes brisées sur l'échiquier. Cet usage de la ligne brisée admet des ramifications dans les récréations mathématiques, l'art ornemental et la littérature.

Ligne brisée et raisonnement par l'absurde : les exemples des propositions I.14 et I.27 des *Éléments*

La ligne brisée : un objet non défini dans le corpus euclidien

Points, lignes et surfaces constituent des objets fondamentaux dans les sciences mathématiques, comme en attestent les premières définitions sur lesquelles s'ouvre le Livre I des *Éléments* d'Euclide[8].

Dans le corpus euclidien, un point est défini négativement, comme ce qui est dépourvu de partie. Une ligne est pour sa part conçue comme une longueur sans largeur. Elle ne comporte donc qu'une dimension. Une surface admet une longueur et une largeur. Euclide introduit ensuite des liens entre ces objets fondamentaux que sont le point, la ligne et le plan. La définition 3 énonce ainsi que les limites d'une ligne sont des points et la définition 6 que les limites d'une surface sont des lignes (Euclide, 153 et 156). Deux grands types de lignes sont introduits : la ligne droite – définition 4 – et la circonférence – définition 15 sur la figure du cercle (154 et 162)[9]. Le corpus euclidien décrit également divers agencements de lignes droites. Un angle plan – définition 8 – est ainsi envisagé comme « l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite » (158)[10]. Quant aux figures rectilignes, par exemple les figures polygonales, elles sont « contenues par des droites ». Autrement dit, elles sont délimitées par une série de lignes droites.

[8] *Les Éléments* constituent l'un des rares textes de l'époque hellénistique dont des copies sont parvenues jusqu'à nous. Mis à part quelques fragments de papyri situés entre le Ier siècle avant J.-C. et le IIIème siècle après J.-C., on dispose pour l'essentiel de manuscrits échelonnés entre le IXème et le XIIème siècle, lesquels comportent des figures ou des diagrammes.

[9] Dans son commentaire de la définition 4, B. Vitrac souligne que « Le présent énoncé introduit la seule espèce de lignes qu'Euclide décide de distinguer bien que la définition du cercle fasse intervenir une autre sorte de ligne : la circonférence ».

[10] Notons à la suite de B. Vitrac qu'un angle est une notion ambiguë dans le corpus euclidien, puisqu'il peut désigner une relation, i.e. une inclinaison entre deux lignes droites, une qualité – être rectiligne, c'est-à-dire droit, ou non – ou une grandeur.

Ces indications appellent deux commentaires. En premier lieu, le privilège accordé aux lignes droites et au cercle traduit l'importance de la règle et du compas en géométrie plane. En second lieu, la notion de « ligne brisée » n'est pas thématisée en tant que telle dans le corpus euclidien[11]. Par exemple, un angle n'est pas considéré comme une ligne que l'on brise, mais comme l'inclinaison de deux lignes droites ayant une extrémité en commun. L'opération ou l'action qui consisterait à « briser » une ligne droite reviendrait à lui assigner une autre direction. Or, ce type de manipulation n'est pas évoqué dans les principes qui viennent baliser le corpus euclidien. En outre, la ligne brisée n'est pas du tout définie par Euclide.

Ligne brisée et raisonnement par l'absurde : le cas de la proposition I.14

Comme l'a cependant rappelé D. Rabouin, plusieurs propositions issues du premier livre des *Éléments* sont accompagnées de « diagrammes »[12] impliquant des lignes brisées. C'est notamment le cas des propositions I.14 et I.27, que nous analyserons ci-après. Ce fait appelle trois questions : (a) quel est le statut de tels diagrammes ? (b) quels sont les indices textuels qui incitent le lecteur à imaginer droites des lignes qui sont brisées sur le papier – ou inversement – ? (c) Quel lien ces diagrammes entretiennent-ils avec le type de raisonnement alors mené, que l'on appelle réduction à l'absurde ou à l'impossible ?

Tout d'abord, ce type de raisonnement indirect est massivement utilisé dans les *Éléments* : comme le note B. Vitrac (*Les démonstrations par l'absurde...*), des arguments par l'absurde ou indirects sont en effet mobilisés dans les démonstrations de 136 propositions sur un total de 465 dans l'édition Heiberg des *Éléments*. Ces arguments peuvent intervenir localement au cours de la démonstration, concerner une partie de la proposition à démontrer ou la viser dans sa globalité. Les réductions à l'absurde sont de plus parfaitement codifiées dans les *Éléments*.

Dans la proposition 14 du livre I, *Euclide* prouve l'implication suivante : si deux droites forment avec une troisième droite des angles adjacents égaux à deux droits – i.e. dont la somme forme un angle plat –, alors ces deux droites sont alignées. Dans le diagramme qui accompagne cette proposition, les trois droites en question sont *CB*, *BA* et *BD*, les angles adjacents – c'est-à-dire

[11] Dans ses commentaires aux *Éléments*, B. Vitrac montre que la notion d'angle est étroitement associée à celle de ligne brisée chez Aristote, ce qui n'est pas le cas dans le corpus euclidien (159, note 47).

[12] Il existe une importante littérature sur les diagrammes dans le corpus euclidien. Pour une approche historique renouvelée sur cette thématique, on pourra se référer à K. Saito et N. Sidoli, lesquels proposent une étude comparée des représentations diagrammatiques issues de divers manuscrits médiévaux des *Éléments* d'Euclide. Il s'agit alors de déterminer dans quelle mesure ces diagrammes reflètent des pratiques anciennes ou sont le résultat de traditions attachées aux manuscrits médiévaux.

qui ont un côté en commun – sont *CBA* et *ABD*[13] et l'objectif est donc d'établir que les droite *CB* et *BD* sont alignées.

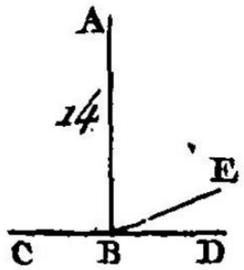

Figure 3 – Diagramme accompagnant la proposition I.14 des *Éléments d'Euclide*, trad. F. Peyrard (1804), planche 1, figure 14.

Pour démontrer cette proposition, Euclide suppose que ces droites ne sont pas alignées, ce qui constitue l'étape d'initialisation du raisonnement par l'absurde. Il demande ainsi au lecteur d'imaginer l'existence d'une nouvelle droite *BE*, distincte de *BD*, qui serait alignée avec *CB*. En utilisant des égalités et inégalités entre les angles formés par les droites qu'il s'est données, Euclide démontre qu'il est en fait impossible que les droites *CB* et *BE* soient alignées : elles forment donc une ligne brisée. En effet, au vu des hypothèses sur *BE*, l'angle *ABE* devrait à la fois être égal à et plus petit que l'angle *ABD*, ce qui est impossible. Euclide généralise ensuite son raisonnement : ce qui est vrai de *BE* l'est de toutes les autres droites partant de *B* et distinctes de *BD*. Pour le dire autrement, il établit l'alignement entre *CB* et *BD* en démontrant par l'absurde que, *dans tous les autres cas*, on aurait des lignes brisées. Ainsi, bien que le motif de la ligne brisée ne soit pas un objet mathématique bien défini dans le corpus euclidien, il intervient malgré tout à titre transitoire dans certains arguments par l'absurde, pour souligner une contradiction.

Notons que l'interprétation du diagramme qui accompagne la proposition I.14 n'est pas évidente (Euclide, 117). On sait seulement que les angles *CBA* et *ABD* sont égaux à deux droits et l'on doit prouver que les droites *CB* et *BD* sont alignées. Le diagramme « montre » une situation d'alignement entre *CB* et *BD* ; cet alignement est cependant en attente de démonstration et le diagramme ne fait donc sens qu'en *parcourant* les étapes du raisonnement. La même chose prévaut pour *BE* : on doit d'abord s'imaginer que *CB* et *BE* sont alignées – comme le veut l'initialisation du raisonnement par l'absurde, même si le diagramme nous montre une ligne brisée, c'est-à-dire deux droites non alignées. Dès lors, quelle fonction peut-

[13] Nous utilisons ici une notation modernisée et simplifiée pour désigner les angles géométriques.

on prêter à ce type de diagramme, dans lequel il faut se représenter le contraire de ce que l'on voit ? À notre sens, il permet de repérer la contradiction qui découle de la supposition selon laquelle *CB* et *BD* ne seraient pas alignées. En effet, le diagramme permet de visualiser que l'angle *ABE* est contenu dans l'angle *ABD*. Pour cette raison, l'angle *ABE* est plus petit que l'angle *ABD*. Or, l'hypothèse absurde qui marque le début de ce raisonnement indirect entraînerait leur égalité.

L'exemple de la proposition I.27 et des enseignements plus généraux

Pour montrer que ce phénomène n'est pas propre à la proposition I.14, D. Rabouin étudie un second exemple, également issu du Livre I des *Éléments*. Il s'agit de la proposition I.27, qui fait partie d'un groupe de propositions portant sur le parallélisme entre des droites[14]. La situation est la suivante : on se donne deux droites, *AB* et *CD*, ainsi qu'une troisième droite *EF* qui les rencontre aux points *E* et *F*. Si les angles *AEF* et *EFD* – qu'on appelle alternes-internes – sont égaux, alors les droites *AB* et *CD* seront parallèles. Il s'agit une nouvelle fois de mener un raisonnement par l'absurde. Euclide suppose donc qu'*AB* et *CD* ne sont pas parallèles. Si on les prolongeait en *ligne droite*, alors elles se rencontreraient, soit « du côté où sont *B* et *D* », soit « du côté où sont *A* et *C* ». Euclide traite le premier cas de figure, le raisonnement étant semblable dans le second cas. Le diagramme qui accompagne le raisonnement pose une nouvelle fois plusieurs difficultés d'interprétation.

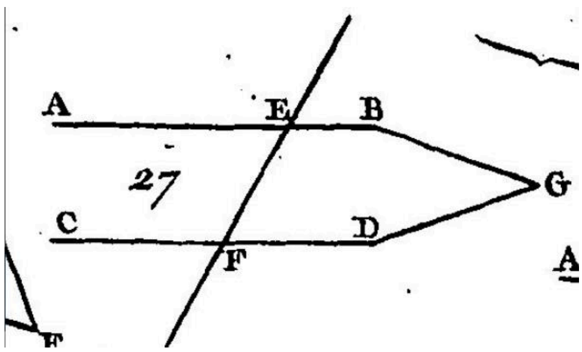

Figure 4 – Diagramme accompagnant la proposition I.27 des *Éléments d'Euclide*, trad. F. Peyrard (1804), planche 1, figure 27.

Il faut en effet imaginer que l'on a prolongé *AB* (du côté où est *B*) et *CD* (du côté où est *D*) en ligne droite, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent au point *G*. Or, pour représenter ceci graphiquement, *Euclide choisit de briser ces deux lignes* (ici aux points *B* et *D*), ce qui signifie

[14] Il s'agit essentiellement des propositions I. 27 à I. 34, situées aux pages 248 à 262 du volume I de l'édition constituée par M. Caveing et B. Vitrac.

qu'une nouvelle direction leur est assignée afin qu'elles se rejoignent sur le papier. Ceci fait, on doit donc supposer que, dans le triangle *EGF*, le point *B* appartient au côté *EG* et le point *D* au côté *FG*. Par hypothèse, les angles *AEF* et *EFD* sont égaux. Or, d'après la proposition 16, dans tout triangle (ici *EGF*), un côté étant prolongé (ici *EG* étant prolongé en *A*), alors l'angle extérieur *AEF* est forcément plus grand que les angles intérieurs opposés (ici les angles *EGF* et *EFG*). Ceci contredit l'égalité entre les angles *AEF* et *EFD*, admise en hypothèse.

Les cas présentés dans les propositions I.14 et I.27 admettent plusieurs points communs. Les diagrammes proposés dans les copies qui sont parvenues jusqu'à nous ainsi que dans les traductions n'ont pas pour seule fonction d'accompagner les étapes des démonstrations euclidiennes. Ils supposent un travail d'interprétation et de distinction entre ce que l'on voit (des lignes brisées) et ce que l'on doit imaginer (des lignes droites), ou inversement. D. Rabouin note tout d'abord que ces configurations peuvent être appréhendées de deux manières distinctes : une imagination géométrique qui nous permet d'envisager que deux droites sont en situation d'alignement, alors qu'elles forment une ligne brisée sur le papier – ou inversement – ; une raison discursive susceptible d'analyser de telles configurations et de repérer grâce à elles la contradiction permettant de conclure que la proposition de départ est vraie. D. Rabouin souligne par ailleurs que ces types de diagrammes ne peuvent pas être conçus comme des figures ou des collections de figures – si l'on entend par figure la représentation fidèle d'un objet géométrique donné. En effet, les lignes brisées qui interviennent dans la proposition 27 pour former le triangle *EGF* ne signifient pas qu'il existe quelque chose comme ce triangle. De manière plus remarquable, l'intervention de lignes brisées dans les diagrammes qui accompagnent tant la proposition 14 que la proposition 27 suggère que *l'hypothèse de départ et l'étape d'initialisation du raisonnement par l'absurde ne peuvent pas coexister*. La ligne brisée n'est donc ni une figure ni un objet mathématique, *mais l'indicateur d'une contradiction* au sein d'une représentation diagrammatique, laquelle ne fait sens qu'en fonction du texte qu'elle accompagne et de la démonstration qu'il s'agit de mener.

L'itération des lignes brisées pour appréhender des résultats contre-intuitifs

Ligne brisée et distinction entre continuité et dérivabilité

Dans l'étude des courbes, le motif de la ligne brisée apparaît au premier abord comme *un cas exceptionnel* : en un point où une courbe comporte une brisure ou une cassure, il ne saurait y avoir de tangente bien définie[15], ce qui traduit le fait que l'opération de dérivabilité ne peut pas y être pratiquée. En réalité, le motif de la ligne brisée constitue un élément déterminant pour appréhender *intuitivement* la distinction entre les propriétés fondamentales de continuité et de dérivabilité. Entre le milieu du XVIIIème siècle et les deux premiers tiers du XIXème siècle, de nombreux travaux ont eu pour objectif de préciser les définitions des propriétés de continuité et de dérivabilité, notamment grâce au concept de limite[16]. À la fin du XIXème siècle et au début du XXème siècle, la distinction entre continuité et dérivabilité constitue un thème récurrent dans le cadre de discussions sur la place de l'intuition dans la pratique et l'enseignement des sciences mathématiques, comme en attestent certains textes très classiques de Felix Klein et d'Henri Poincaré[17]. Ici, la figure de la ligne brisée permet de rappeler un fait très élémentaire : son tracé demeure ininterrompu, ce qui traduit grossièrement une propriété de continuité ; en revanche, elle n'admet pas de tangente en les points où elle se brise. Reste à savoir si ce phénomène de continuité sans dérivabilité est *marginal*, i.e. s'il ne s'observe qu'en quelques points isolés d'une courbe donnée, ou s'il peut devenir *global*.

Les fonctions de Weierstrass sont à ce titre remarquables par le fait qu'elles sont partout continues et nulle part dérivables[18]. Le mathématicien allemand Karl Weierstrass (1815-1897) exerce à partir de 1856 à l'Université de Berlin[19] et fait partie des principaux acteurs ayant contribué, au cours du XIXème siècle, à rendre rigoureuse l'analyse entendue comme l'étude des fonctions d'une variable réelle. En juillet 1872, il présente officiellement à l'Académie de Berlin une classe de fonctions d'une variable réelle, partout continues et nulle part dérivables, contredisant ainsi l'intuition, que l'on retrouve par exemple dans un mémoire d'André-Marie Ampère de 1806, selon laquelle une fonction continue serait en général dérivable, sauf à la rigueur en quelques points isolés. Il s'agit d'une fonction « pathologique »[20], en raison de son caractère contre-intuitif, mais aussi parce qu'elle met en défaut un énoncé tenu faussement pour

[15] De manière grossière, une tangente à une courbe donnée ne la touche qu'en un seul point. Plus rigoureusement et de façon modernisée, on se donne deux points $M(t_0)$ et $M(t)$ sur une courbe. Si elle existe, la tangente à cette courbe en $M(t_0)$ correspond à la position limite de la droite $(M(t_0), M(t))$ lorsque t tend vers t_0.

[16] On pourra se référer à ce propos à l'étude minutieuse de Christian Gilain sur le cours d'analyse professé par Augustin Louis Cauchy entre 1815 et 1830 à l'École polytechnique.

[17] Il existe une littérature secondaire très importante sur ces questions. Voir par exemple les travaux de Jeremy Gray indiqués dans la bibliographie.

[18] Comme l'a établi K. Volkert (221-225), le mathématicien germanophone Bernard Bolzano et le mathématicien genevois Charles Cellérier ont établi, respectivement dans les années 1830 et 1860, l'existence de fonctions partout continues, nulle part dérivables, sans publier leurs résultats. Dans son allocution de 1872, Weierstrass souligne qu'en 1861, son collègue de Göttingen Bernard Riemann avait établi l'existence d'une fonction continue, dérivable en de rares points.

[19] Voir à ce propos P. Dugac.

[20] Sur les fonctions « pathologiques », on pourra se référer à K. Volkert. Comme le souligne ce dernier (p. 226), le mathématicien Paul du Bois-Reymond utilise en 1882 un synonyme de « pathologique » pour qualifier la classe de fonctions introduites par Weierstrass en 1872.

général. L'article de Weierstrass n'est accompagné d'aucune représentation graphique et le raisonnement aboutissant à ce résultat s'exprime de manière purement analytique. Le motif de la ligne brisée permet cependant d'appréhender les premières étapes dans la construction de courbes qui, à l'instar des fonctions de Weierstrass, sont partout continues tout en n'admettant de tangente nulle part. Pour le dire autrement, on peut appréhender intuitivement ces fonctions pathologiques *en itérant à l'infini la figure de la ligne brisée*.

La courbe de Koch : un exemple intuitif de courbe sans tangente

Le travail du mathématicien suédois Helge von Koch (1870-1924) donne justement un exemple de cela. Koch compte parmi les élèves de Gösta Mittag-Leffler et il se situe dans le prolongement de travaux développés par Henri Poincaré sur les équations différentielles[21]. En 1905, Koch devient professeur à l'institut technologique royal de Stockholm, avant de prendre en 1911 la succession de Mittag-Leffler à l'Université de Stockholm. La contribution de Koch que nous souhaiterions commenter est intitulée « Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire ». Elle est communiquée par Mittag-Leffler et Karl Bohlin à l'Académie des sciences de Stockholm le 12 octobre 1904[22]. L'objectif de cette contribution figure dans le titre même : Koch propose une construction géométrique élémentaire, permettant d'appréhender intuitivement l'existence de courbes continues qui n'admettent de tangente en aucun point. Il décrit cette courbe dans la perspective de « l'enseignement des principes fondamentaux de l'analyse et de la géométrie » (682) ; les finalités didactiques de ce texte sont donc explicites et revendiquées par l'auteur.

Au début de cet article, Koch oppose deux points de vue : le premier, qui est fondé sur une représentation visuelle des courbes, a eu pour conséquence d'induire les mathématiciens en erreur, en leur faisant croire qu'une courbe admet partout une tangente, sauf à la rigueur en certains points isolés. Koch ajoute à cet effet que « plusieurs géomètres éminents ont essayé de consolider cette opinion, fondée sans doute sur la représentation graphique des courbes, par des raisonnements logiques » (681). Koch mentionne en particulier le mémoire d'Ampère de 1806. Ce dernier estime alors qu'une fonction est en général dérivable « à l'exception de certaines valeurs particulières et isolées de x » (149). La continuité privée de dérivabilité demeurait ainsi

[21] Pour plus de détails sur l'internationalisation des sciences mathématiques en Suède autour de la figure de Gösta Mittag-Leffler, on pourra se référer aux travaux de L.E. Turner. Le chapitre 5 de cette thèse est particulièrement éclairant pour documenter l'école qui se constitue alors autour de Mittag-Leffler. Un bilan des publications de Koch est également donné à la page 98. Il existe une importante correspondance entre Mittag-Leffler et Poincaré, éditée à la fin des années 1990 par Philippe Nabonnand. L'intérêt de Koch pour les travaux de Poincaré n'est ainsi pas surprenant.

[22] H. Koch (681).

très exceptionnelle aux yeux d'Ampère. À ce premier point de vue, qui se fonde sur des représentations graphiques et débouche sur une généralisation abusive, Koch oppose une démarche purement analytique, qui conduit à définir abstraitement des classes de fonctions partout continues, nulle part dérivables. Koch associe la figure de Weierstrass à ce second point de vue et il déplore qu'aucune représentation géométrique ne vienne concrétiser ce résultat parfaitement rigoureux.

On aurait donc d'un côté des représentations graphiques motivant des extrapolations logiques infondées, de l'autre des formules analytiques rigoureuses, mais dépourvues de substrat géométrique. Koch souhaite dépasser cette opposition et montrer que l'on peut appréhender géométriquement les résultats de Weierstrass et les rendre accessibles dans les enseignements. Ce faisant, il s'inscrit en faux contre l'argument de Poincaré selon lequel les fonctions pathologiques seraient étroitement associées à la logique et à la rigueur ; aux yeux de Poincaré, elles n'auraient aucun contenu intuitif et, pour cette raison, il serait contre-productif de les présenter d'emblée dans un contexte d'enseignement[23].

Plus profondément, Koch entend questionner l'opposition entre « géomètres » et « analystes » telle qu'elle figure dans d'autres réflexions philosophiques de Poincaré. En effet, lors du deuxième congrès international des mathématiciens qui a lieu à Paris en 1900, Poincaré prononce une conférence intitulée « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques »[24]. Il y distingue deux figures de mathématiciens : les géomètres d'une part, les analystes d'autre part, qui ne partageraient pas les mêmes méthodes en raison de la « nature de leur esprit ». Ces deux figures seraient complémentaires et « également nécessaires aux progrès de la Science » (118). En outre, pour montrer que l'intuition – au sens d'une intuition géométrique fondée sur des représentations graphiques – « ne peut nous donner la rigueur, ni même la certitude » (118), Poincaré s'appuie sur l'exemple des fonctions partout continues, nulle part dérivables de Weierstrass : « Nous savons qu'il existe des fonctions continues dépourvues de dérivées. Rien de plus choquant que cette proposition qui nous est imposée par la logique » (118-119). Il explique ensuite pourquoi l'intuition géométrique nous empêche de concevoir des courbes qui seraient dépourvues de tangentes. D'après la liste des participants au

[23] Dans *La logique et l'intuition dans la mathématique...* (159), H. Poincaré indique : « Or, si la logique doit être notre seul guide dans les questions d'enseignement, c'est évidemment par les fonctions les plus bizarres qu'il faut commencer. C'est le débutant qu'il faut d'abord familiariser avec ce musée tératologique. Faute de l'avoir fait, on n'atteindra jamais la rigueur, ou on ne l'atteindra que par étapes.
Voilà à quoi la logique absolue voudrait nous condamner ; devons-nous lui faire ce sacrifice ? Telle est la question à laquelle, pour mon compte, je n'hésite pas à répondre non ».

[24] Cette conférence est publiée en 1902. L'allocution de Poincaré est suivie d'une conférence de Mittag-Leffler au cours de laquelle sont divulgués certains extraits de lettres de Weierstrass à Sofia Kovalevskaïa.

deuxième congrès international des mathématiciens, nous savons que Koch y a participé et qu'il a très vraisemblablement assisté à la conférence de Poincaré.

Dans son article de 1904, Koch propose de dépasser cette opposition entre analyse et géométrie, telle qu'elle figure par exemple dans le discours de Poincaré. On peut même dire plus : Koch prend le contre-pied de Poincaré puisqu'il décrit les premières étapes dans la construction d'une courbe qui serait partout continue, mais n'admettrait de tangente nulle part. Il précise en effet s'être demandé « si l'on pouvait trouver une courbe sans tangente où l'apparence géométrique fût en accord avec le fait dont il s'agit ». Puis il ajoute : « La courbe que j'ai trouvée et qui fait l'objet de l'étude suivante est définie par une construction géométrique, suffisamment simple, je crois, pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par "l'intuition naïve", l'impossibilité d'une tangente déterminée » (682). Koch emprunte la notion d'intuition naïve au mathématicien allemand Felix Klein – l'un des principaux contributeurs au rayonnement international des sciences mathématiques à l'Université de Göttingen entre la fin du XIXème siècle et la première décennie du XXème siècle. Klein participe en 1893 au congrès de mathématiques et d'astronomie tenu dans le cadre de la *World's Columbian Exposition* de Chicago[25]. Il donne à cette occasion une série de douze leçons à l'Université d'Evanston, la sixième étant consacrée à l'intuition de l'espace. Klein y distingue une intuition naïve, qui n'est pas exacte, et une intuition raffinée, qui est issue du développement logique d'une série d'axiomes bien définis. Il montre en particulier que l'intuition naïve peut nous induire en erreur en nous suggérant l'existence d'une tangente en chaque point d'une courbe[26]. Koch se distancie ici clairement de Klein, en montrant qu'il est possible d'appréhender des types de courbes qui n'admettent de tangentes en aucun point, *en partant d'une intuition grossière ou naïve*.

Voici comment il procède. Il se donne un segment AB, qu'il divise en trois parties égales, en plaçant les points C et E entre les points A et B. On a donc $AC = CE = EB$. Il construit ensuite un triangle équilatéral CDE, de base CE. Il résulte de ceci une « ligne brisée $ACDEB$ » (p. 684). Il note Ω l'opération qui consiste à passer du segment AB à la ligne brisée $ACDEB$. Les segments AC, CD, DE et EB sont tous d'égale longueur par construction.

[25] K. Parshall et D. Rowe soulignent à ce propos : « Klein viewed the [Chicago] Mathematics Congress not only as a superb chance for the German Reich to demonstrate its growing dominance in his field but also as a golden opportunity for him to solidify his reputation as the leading representative of German mathematics » (64).

[26] On peut notamment lire à la page 39 : « The naïve intuition […] was especially active during the period of the genesis of the differential and integral calculus. Thus, we see that Newton assumes without hesitation the existence, in every case, of a velocity in a moving point, without troubling himself with the inquiry whether there might not be continuous functions having no derivative ».

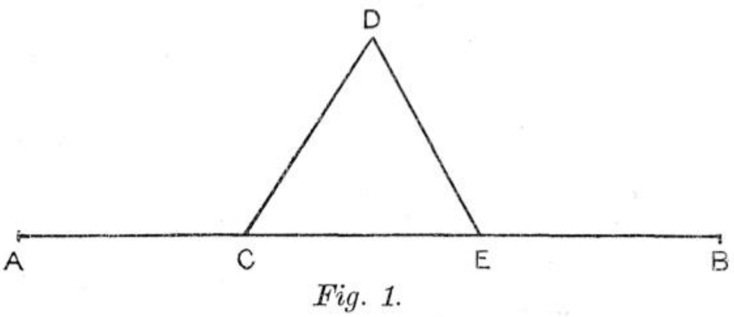

Figure 5 – Figure illustrant les toutes premières étapes dans la construction de la courbe de Koch, H. von Koch, (684).

Il s'agit ensuite de répéter indéfiniment cette opération, ce qui signifie de diviser chacun des quatre segments précédemment listés en trois parties égales et de construire un triangle équilatéral ayant pour base la partie centrale. Autrement dit, la prochaine étape consiste à remplacer les segments *AC*, *CD*, *DE* et *EB* par des lignes brisées ayant exactement *la même forme* que la ligne brisée *ACDEB*.

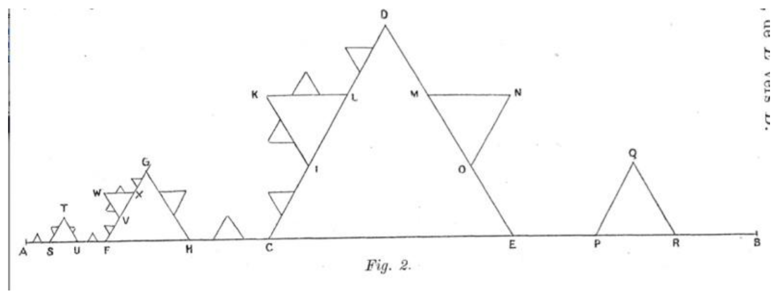

Figure 6 – Figure illustrant les étapes ultérieures dans la construction de la courbe de Koch, H. von Koch, (685).

Ainsi, Koch note P_1 « la droite primitive » *AB*, P_2 la ligne brisée *ACDEB*, etc., avant d'ajouter : « quand *n* croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue *P* qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée » (685). L'intuition naïve suffit aux yeux de Koch pour appréhender les premières étapes de cette construction, qui implique de remplacer des segments donnés par des lignes brisées définies comme ci-dessus. Koch parvient donc à fournir un exemple de courbe dont la *représentation graphique* approchée ne contredit pas l'*analyse logique* qui en sera faite. Ce faisant, il montre grâce au motif de la ligne brisée que l'intuition géométrique peut être en accord avec le résultat de Weierstrass sur les fonctions partout continues, nulle part dérivables.

Les courbes de Peano et de Hilbert : entre rigueur analytique et intuition géométrique

Un autre exemple, à peu près contemporain de celui de Koch, permettra de souligner l'intérêt mathématique que revêt l'itération du motif de la ligne brisée : le mathématicien italien Giuseppe Peano définit en 1890 un type particulier de courbe qui remplit un carré tout entier, c'est-à-dire qui « passe par tous les points » de ce carré (157). Il établit de fait l'existence d'une surjection continue du segment unité vers le carré plein unité[27]. Cette première publication n'est assortie d'aucune illustration, mais l'on comprend que ce type de courbe est la limite d'une suite de lignes brisées – ou lignes polygonales. Nous ne reviendrons pas ici sur le détail de la construction proposée par Peano qui dépasse de loin l'objectif du présent article.

En 1891, le mathématicien David Hilbert s'appuie sur une procédure élémentaire qui lui permet de représenter graphiquement les premières étapes dans la construction d'une courbe très semblable à celle envisagée par Peano un an plus tôt. Là encore, on peut comprendre assez aisément qu'en répétant indéfiniment ces étapes, on obtient une courbe qui remplit un carré tout entier. En effet, Hilbert se sert d'une *intuition géométrique*, fondée sur le motif de la ligne brisée, pour appréhender le résultat au premier abord contre-intuitif de Peano. Hilbert, qui exerce alors en qualité de *Privatdozent* à l'Université de Königsberg, partage avec le mathématicien Hermann Minkowski un même intérêt pour l'intuition spatiale ou l'intuition géométrique [*geometrische Anschauung*][28]. Ce court article porte témoignage de ce fait :

> Peano a récemment montré de manière purement arithmétique dans les *Mathematische Annalen* comment l'on pouvait appliquer les points d'une ligne sur les points d'un morceau de surface. Les fonctions requises pour une telle application peuvent être construites de manière plus simple en s'appuyant sur l'intuition géométrique suivante. Divisons en premier lieu la ligne à appliquer – par exemple un segment de longueur 1 – en quatre parties égales 1, 2, 3, 4 et divisons le morceau de surface, que nous supposerons être un carré de côté 1, en 4 carrés égaux 1, 2, 3, 4 en traçant deux droites perpendiculaires. En second lieu, divisons une nouvelle fois chacun des segments 1, 2, 3, 4 en quatre parties égales, de façon à obtenir 16 segments ; divisons dans le même temps chacun des 4 carrés 1, 2, 3, 4 en quatre carrés égaux et assignons les nombres 1, 2, …, 16 aux 16 carrés ainsi obtenus, de façon à ce que chaque carré suivant ait un côté en commun avec le carré précédent. (459) [29].

[27] « Dans ma Note, on démontre qu'on peut établir d'un côté l'uniformité et la continuité, c'est-à-dire, aux points d'une ligne on peut faire correspondre les points d'une surface, de façon que l'image de la ligne soit l'entière surface, et que le point sur la surface soit fonction continue du point de la ligne. Mais cette correspondance n'est pas univoquement réciproque (…) », ce qui revient à dire dans les termes actuels que cette correspondance n'est pas bijective, n'étant pas injective. (Peano, 160)

[28] Voir à ce propos les travaux de S. Gauthier. Dans le chapitre premier de sa thèse, S. Gauthier revient de manière récurrente sur l'amitié qui lie Minkowski à Hilbert et sur la place et les fonctions que joue l'intuition géométrique dans les travaux de Minkowski en géométrie des nombres.

[29] Traduction personnelle. Voici la citation originale : « Peano hat kürzlich in den Mathematischen Annalen durch eine arithmetische Betrachtung gezeigt, wie die Punkte einer Linie stetig auf die Punkte eines Flächenstückes abgebildet werden können. Die für eine solche Abbildung erforderlichen Functionen lassen sich in übersichtlicherer Weise herstellen, wenn man sich der folgenden geometrischen Anschauung bedient. Die abzubildende Linie – etwa eine Gerade von der Länge 1 – theilen wir zunächst in 4 gleiche Theile 1, 2, 3, 4 und das Flächenstück, welches wir in der Gestalt eines Quadrates von der Seitenlänge 1 annehmen, theilen wir durch zwei zu einander senkrechte Gerade in 4 gleiche Quadrate 1, 2, 3, 4 wiederum in 4. Gleiche Theile, so dass wir

La figure de la ligne brisée, qui se complexifie à chaque étape de cette construction, passe par les centres de chacun des carrés ainsi obtenus et permet de comprendre l'existence d'une application continue surjective d'un segment unité vers un carré de côté l'unité.

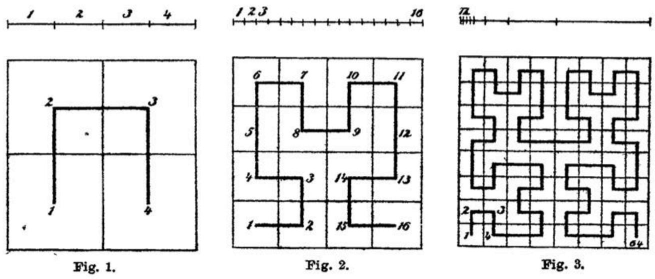

Figure 7 – Les trois premières étapes présentées par David Hilbert dans la construction d'une courbe passant par tous les points d'un carré, D. Hilbert (459).

Le procédé est ici semblable à celui adopté par Koch. Il faut imaginer que la suite de lignes brisées tend à l'infini vers une courbe qui remplit le carré tout entier.

Au final, les deux exemples que nous venons d'analyser, à savoir la courbe de Koch, ainsi que les courbes de Peano et de Hilbert, nous permettent d'aboutir au résultat suivant : l'itération du motif de la ligne brisée permet d'appréhender intuitivement des résultats au premier abord contre-intuitifs : l'existence de courbes partout continues qui n'admettent de tangente en aucun point ; l'existence d'application continues surjectives permettant de montrer qu'une ligne peut recouvrir entièrement un morceau de surface.

Les lignes brisées et la polygraphie du cavalier

La polygraphie du cavalier comme problème de situation dans les textes mathématiques (1750-1850)

La ligne brisée peut également être mobilisée pour résoudre le problème du cavalier ou polygraphie du cavalier, dans le contexte des jeux d'échecs. Il s'agit de déplacer un cavalier sur un échiquier, de manière à ce qu'il passe une et une seule fois sur chaque case. Ce problème est associé à un important corpus de textes, notamment à partir du second XIXème siècle. De nombreuses généralisations et variantes y sont étudiées. Il s'agit alors de faire varier le nombre de cases, la forme de l'échiquier, d'imposer des contraintes de symétrie sur le parcours du cavalier ou d'inventorier les solutions possibles associées à une situation donnée. Plus

auf der Geraden die 16 Theilstrecken 1, 2, 3, …, 16 erhalten ; gleichzeitig werde jedes der 4 Quadrate 1, 2, 3, 4 in 4 gleiche Quadrate getheilt und den so entstehenden 16 Quadraten werden dann die Zahlen 1, 2, …, 16 eingeschrieben, wobei jedoch die Reihenfolge der Quadrate so zu wählen ist, dass jedes folgende Quadrat sich mit einer Seite an das vorhergehende anlehnt ».

généralement, les problèmes d'échiquiers (sous la forme de récréations mathématiques et de parties d'échecs remarquables ou à résoudre) font l'objet de nombreux traités et articles dans des publications périodiques à partir du second XVIIIème siècle, vraisemblablement en lien avec ce qu'I. Gros appelle la « relance de l'imaginaire du jeu d'échecs » (131). Ainsi, un traité de François-André Danican Philidor (1726-1795) est consacré en 1749 à l'étude rationnelle des jeux d'échecs et il connaît un grand succès. De plus, nombre de joueurs d'échecs renommés se réunissent alors régulièrement dans les cafés et attirent des philosophes comme Voltaire ou Rousseau. En 1759, le problème du cavalier fait d'ailleurs l'objet d'un prix de l'Académie de Berlin. La même année, Leonhard Euler (1707-1783) présente un mémoire sur ce sujet. Il représente les parcours du cavalier en numérotant les cases selon l'ordre de passage du cavalier : la case de départ est affectée du numéro 1, la case suivante du numéro 2 et ainsi de suite. Dans cette « Solution d'une question curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse », il propose plusieurs chemins solutions pour un échiquier carré de 64 cases, les uns étant fermés[30], les autres ouverts. Il souligne les propriétés remarquables de symétrie que comportent certains parcours, puisqu'ils peuvent par exemple être symétriques par rapport au centre de l'échiquier. Il étudie également le problème du cavalier pour des échiquiers de tailles et de formes diverses, montrant par exemple que le problème n'a pas de solution pour des échiquiers carrés ayant respectivement 9 et 16 cases.

Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) introduit le motif de la ligne brisée pour résoudre le problème du cavalier dans son mémoire intitulé « Remarques sur les problèmes de situation », qui est présenté en 1771 à l'Académie royale des sciences de Paris. Vandermonde évoque d'emblée l'art du tissage et il montre que l'agencement des fils dans l'espace met en jeu non pas des rapports de grandeurs, mais des relations d'ordre et de situation (566). Pour décrire le parcours du cavalier, il place des épingles au centre de chaque case et il les relie au moyen d'un fil pour décrire le parcours du cavalier. Ce chemin forme une ligne brisée, ouverte ou fermée, qui peut comporter d'éventuelles symétries. Il fait d'ailleurs le lien entre l'art du tissage et le problème du cavalier :

> Faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier sans passer deux fois sur la même, se réduit à déterminer une certaine trace du cavalier sur l'échiquier, ou bien, en supposant une épingle fixée au centre de chaque case, à déterminer le cours d'un fil passé une fois autour de chaque épingle, d'après une loi dont nous allons chercher l'expression. (568)

Vandermonde adopte une notation arithmétique constituée de deux nombres qui lui permet de décrire de manière univoque les positions des cases que parcourt le cavalier : un déplacement

[30] Dans les chemins fermés, la dernière case solution est éloignée de la case de départ d'un saut de cavalier : le choix de la case de départ du parcourt est donc indifférent.

du cavalier peut ainsi se traduire par une condition arithmétique entre les deux paires de nombres définissant les deux cases concernées (568-569). Une solution au problème du cavalier peut ainsi être représentée par une série de symboles décrivant les cases successivement parcourues, mais aussi par une ligne brisée sur l’échiquier (voir figure 8).

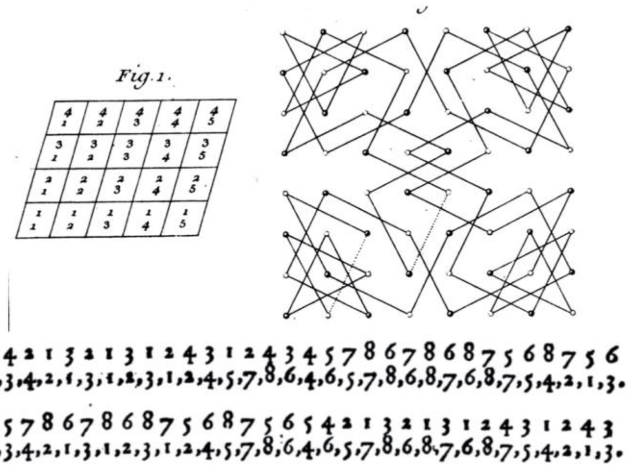

Figure 8 – En haut : figures 1 (notations pour chaque case de l’échiquier) et 5 (description d’un parcours du cavalier par une ligne brisée) du mémoire de Vandermonde. En bas : extrait de la page 572 du mémoire (description symbolique d’un parcours du cavalier).

Ces deux mémoires d’Euler et Vandermonde sont abondamment cités au XIXème siècle, notamment par des auteurs qui entendent contribuer au développement de la « géométrie de situation ». Ainsi, Louis Poinsot (1777-1855) rattache son « Mémoire sur les polygones et les polyèdres » (1810) à la géométrie de situation « parce qu’on y considère moins la grandeur et la proportion des figures, que l’ordre et la situation des divers élémens[31] qui les composent » (16). Aux yeux de Poinsot, les mémoires d’Euler et de Vandermonde sur le problème du cavalier constituent des textes fondateurs en géométrie de situation[32]. Divers articles mêlant géométrie de situation et problème du cavalier sont également publiés au cours des années 1840 et 1850 dans les *Nouvelles annales de mathématiques*, un journal destiné aux enseignants et candidats aux Écoles polytechnique et normale. La géométrie de situation implique alors d’articuler théorie des nombres, représentations géométriques discrètes et analyse combinatoire, avec un fort ancrage dans les récréations mathématiques[33].

[31] Lire « éléments ».
[32] Dans le cadre de ses travaux sur l’histoire des graphes chez D. König, M. Wate-Mizuno analyse également les diagrammes utilisés par Vandermonde et les liens avec le mémoire de Poinsot.
[33] Sur la géométrie de situation, voir notamment le chapitre 10 de la thèse d’A.-M. Décaillot et le texte de J. Boucard (88-92).

Polygraphies du cavalier dans les journaux mathématiques et les récréations mathématiques (1870'-1930')

Plus tardivement, d'autres articles traitant du problème du cavalier paraissent dans les *Nouvelles annales*, mais sans lien direct avec la géométrie de situation. C'est le cas de Désiré André qui, en 1874, envisage le problème du cavalier comme une application possible d'une méthode combinatoire, ou encore de l'étudiant allemand Fritz Hoffman qui, en 1886, associe chaque déplacement possible du cavalier à un nombre complexe, avant de représenter les parcours du cavalier par des lignes brisées.

Des études sur le problème du cavalier sont également publiées dans des journaux dits académiques. En 1874, le mathématicien italien Paolo Volpicelli (1804-1879) présente une note sur le problème du cavalier à l'Académie des sciences de Paris. Toute une série d'articles mobilise également le parcours du cavalier dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* entre 1877 et 1881. Le problème y est traité par diverses méthodes : alors que Camille Flye Sainte-Marie numérote son échiquier et décrit textuellement des parcours polygonaux, Ernest Laquière propose des « diagrammes symboliques » (134) articulant numéros et lignes brisées. Le problème du cavalier fait ainsi l'objet de divers traitements mathématiques, certains incluant le motif de la ligne brisée.

L'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS), qui est fondée en 1872 pour contribuer à la diffusion des sciences, constitue un lieu de discussion et de circulation de problèmes relevant des récréations mathématiques[34], dont le problème du cavalier. Par exemple, le général Parmentier présente des communications sur le saut du cavalier entre 1890 et 1892. Le mathématicien Édouard Lucas (1842-1891)[35], qui compte parmi les membres de l'AFAS, apparaît ici comme le cas le plus remarquable, en raison du nombre et de la diversité de textes qu'il consacre à ce problème. Lucas est représentatif d'une communauté d'acteurs qui produisent alors des mathématiques à la jonction entre la théorie des nombres, l'analyse combinatoire et les récréations mathématiques, en mobilisant une variété de représentations graphiques[36]. La figure de l'échiquier et le problème du cavalier jouent un rôle fondamental dans les travaux de Lucas, comme en atteste par exemple le chapitre sur la géométrie de situation qui est issu de sa *Théorie des nombres* (1891). Il introduit alors une formule arithmétique qui exprime le nombre possible de sauts de cavalier en fonction du nombre de

[34] Sur cette société et sur les types de savoirs qui y sont présentés, nous renvoyons à l'ouvrage édité par Hélène Gispert.
[35] Sur Édouard Lucas, nous renvoyons le lecteur aux nombreux travaux d'A.-M. Décaillot.
[36] À travers la figure de Charles-Ange Laisant, Jérôme Auvinet aborde dans ses travaux cette communauté et ses liens avec les différentes sociétés mathématiques de la fin du XIXème siècle.

lignes et de colonnes que comporte un échiquier rectangulaire (p. 96-97). On doit également à Lucas divers articles dans des revues scientifiques destinées à des publics amateurs. Dans « Le saut du cavalier au jeu d'échecs » publié dans la *Revue scientifique de la France et de l'Étranger* en 1883, il évoque une série de problèmes récréatifs liés au saut du cavalier. Il détermine en particulier les symétries que peut admettre un parcours du cavalier, en utilisant une représentation graphique faisant intervenir le motif de la ligne brisée[37]. Il fait en outre le lien entre le problème du cavalier et des problèmes impliquant la construction de réseaux géométriques. Le dispositif de Vandermonde inspire par ailleurs à Lucas « la fasioulette », un jeu principalement destiné à un public féminin qu'il présente en 1889 dans le journal de vulgarisation scientifique *La Nature*. Le jeu représente matériellement des sauts du cavalier. Lucas en souligne le caractère divertissant, puisqu'on obtient par là même des « dessins très jolis », en utilisant des « laines de toutes couleurs » (302). Pour Lucas, ces récréations mathématiques ont également une visée pédagogique, comme l'indique la référence explicite qu'il fait au projet révolutionnaire d'éducation nationale de La Chalotais qui promeut l'usage des récréations mathématiques.

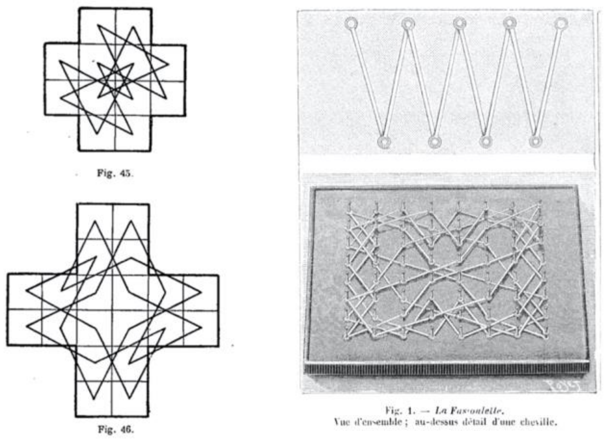

Figure 9 : À gauche : diagrammes de parcours du cavalier dans des échiquiers en croix présentés dans l'article de Lucas de 1883 et repris d'exemples traités par Euler. À droite : illustration de la Fasioulette (1889).

Plus généralement, le problème du cavalier est intégré dans les ouvrages de récréations mathématiques publiés à la fin du XIXème siècle, de manière autonome ou en lien avec les carrés magiques. Dans la quatrième édition de ses *Mathematical Recreations and Essays*, qui constituent un succès éditorial, le mathématicien britannique Walter William Rouse Ball (1850-

[37] Cet article sera repris dans le quatrième tome des *Récréations mathématiques* de Lucas, publié à titre posthume par les soins d'Henri Delannoy, Émile Lemoine et Charles-Ange Laisant en 1894. Pour plus de détails, voir Anne-Marie Décaillot, « Les *Récréations* Mathématiques… » (507).

1925) consacre par exemple une section du sixième chapitre (« Unicursal Problems ») au problème du cavalier, en numérotant chaque case, à l'image de ce que faisait Euler en 1759. Les *Mathematische Mussestunden* du mathématicien allemand Hermann Schubert, qui sont publiées à partir de 1897, connaissent également une large diffusion. Le troisième tome est consacré à des problèmes de parcours [*Reise Probleme*] ainsi qu'à des problèmes géométriques. Le premier paragraphe de ce volume est entièrement consacré aux sauts de cavalier [*Rösselsprünge*]. Schubert rappelle d'ailleurs que les solutions au problème du cavalier sont généralement données dans les journaux sous la forme d'un diagramme, composé de lignes brisées[38].

Les carrés magiques et le parcours du cavalier sont également pensés d'un point de vue philosophique voire mystique. Schubert publie par exemple un article sur les carrés magiques dans *The Monist* en 1892[39] et il conclut ce texte par des considérations métaphysiques sur l'ordre du monde, en lien avec les symétries numériques et graphiques associées à ces problèmes :

> The problems of the magic squares are playful puzzles, invented as it seems for mere pastime and sport; But there is a deeper problem underlying all these little riddles, and this deeper problem is of a sweeping significance. It is the philosophical problem of the world-order. (511)

Cette représentation géométrique du parcours du cavalier, employée par Vandermonde et reprise ensuite tout au long du XIXème siècle, revêt plusieurs fonctions. Elle permet tout d'abord de suivre pas à pas et de visualiser d'un seul coup d'œil les solutions qu'admet le problème du cavalier. Elle permet de souligner les propriétés remarquables que comportent diverses solutions proposées. Enfin, elle offre un support visuel à un problème qui peut également s'exprimer sous la forme de tableaux de nombres, de combinaisons ou encore de formules symboliques. Le problème du cavalier se situe dès lors à l'interface entre géométrie de situation, analyse combinatoire et théorie des nombres. Dans certains cas, la ligne brisée issue d'un parcours du cavalier devient même un objet propre, intéressant en raison de ses propriétés de symétrie ou de ses aspects esthétiques.

Cela transparaît nettement chez le mathématicien et ingénieur russe naturalisé belge Maurice Kraitchik (1882-1957). Il aborde régulièrement le problème du cavalier dans *Sphinx,*

[38] « Die Lösung solcher Rösselsprünge wird in den Unterhaltungszeitschriften meist in Form eines Diagramms gegeben, d. h., es werden die Mitten der aufeinanderfolgenden Felder durch gerade Linien verbunden. » (5), ce que l'on traduit par : « Dans les journaux de divertissement, la résolution [du problème] des sauts de cavalier est généralement donnée sous la forme de diagrammes, au sens où les centres des cases parcourues successivement sont liés par des lignes droites. »

[39] Nous remercions Jemma Lorenat qui a attiré notre attention sur cet aspect des pratiques en lien avec les carrés magiques. Une version préliminaire de son étude en cours sur les carrés magiques et la revue *The Monist* a été présentée en 2018.

une « revue périodique des questions récréatives » qu'il crée en 1931. Il y insère deux notes sur les parcours du cavalier en 1931 : la première sur les parcours magiques, c'est-à-dire les parcours du cavalier qui donnent un carré magique, la seconde sur les « parcours doublement symétriques d'un échiquier d'ordre 6 »[40]. Dans son traité *La mathématique des jeux* (1930), Kraitchik consacre le chapitre XIV au problème du cavalier ; il en dresse l'historique, propose différentes typologies de parcours du cavalier (383 et suiv.) et il met en exergue le motif de la ligne brisée pour représenter les parcours possibles du cavalier :

> Une marche du Cavalier peut être représentée avec beaucoup de succès par une ligne brisée qui passe par les centres des cases successivement parcourues. La représentation graphique est surtout avantageuse quand il s'agit d'un parcours fermé. La ligne brisée se referme alors sur elle-même. À moins que ce ne soit nécessaire pour des raisons spéciales, il n'est d'aucune utilité d'indiquer, dans ce cas, la case de départ ou d'arrivée ; N'importe quel sommet de la ligne brisée peut être pris pour origine. (361)

Kraitchik étudie ensuite les « conditions graphiques » particulières que l'on peut imposer à un parcours, comme la recherche du nombre maximum de lignes composées de deux, trois sauts en lignes droites dans un parcours, l'analyse du nombre de fois où une direction donnée apparaît ou encore l'apparition de certains motifs : c'est par exemple le cas d'un parcours ouvert proposé par Mme Parmentier, « qui présente quatre étoiles d'angle », et qui peut être transformé en un parcours fermé (voir figure 10) (383-386).

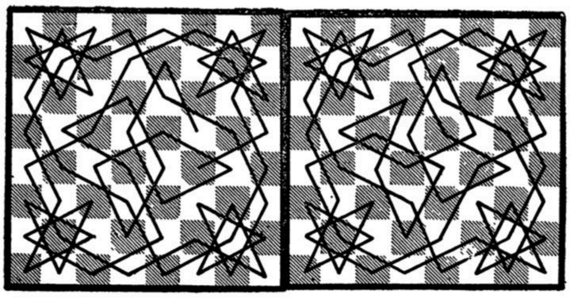

Fig. 639-640.

Figure 10 : parcours du cavalier présentant quatre étoiles d'angle, M. Kraitchik, fig. 639-640, (386).

Échiquiers et carrés magiques dans l'art ornemental : les cas Bourgoin et Bragdon

Ainsi, les textes mathématiques sur les parcours du cavalier et les carrés magiques contiennent régulièrement des considérations esthétiques, pratiques, philosophiques voire métaphysiques. Ces aspects sont mobilisés par au moins deux architectes et ornemanistes : Jules Bourgoin (1838-1908) et Claude Bragdon (1866-1946).

[40] Pour Kraitchik, un parcours est doublement symétrique « si un nombre constant de sauts intermédiaires sépare deux cases qui viennent en coïncidence après une rotation de l'échiquier d'un quart de tour » (39).

On doit à Bourgoin plusieurs ouvrages théoriques sur l'art ornemental entre 1873 et 1905, qui se caractérisent par une démarche de plus en plus combinatoire[41]. La *Graphique*, ancrée dans des questions d'enseignement, propose ainsi une véritable arithmétique des figures, et présente une série d'arrangements possibles de traits ou de formes élémentaires[42]. Le deuxième tome de *La Graphique* est justement consacré à la figure de l'échiquier. Bourgoin y reprend des planches présentées par Lucas dans sa *Théorie des nombres* sur les permutations figurées. À l'instar de Lucas, Bourgoin travaille sur la figure de l'échiquier dans une perspective d'application à l'industrie textile[43]. Si le parcours du cavalier n'est pas explicitement utilisé par Bourgoin, il s'appuie néanmoins sur des extraits du texte de Vandermonde dans le second volume de ses *Études architectoniques et graphiques* (1901) et souligne l'intérêt du « système de notation à la fois syntactique et géométrique » de Vandermonde pour exprimer « les idées fondamentales de l'ordre et de la forme » (20), qui sont à la base de sa théorie de l'ornement : le parcours du cavalier constitue donc l'un des exemples mobilisés par Bourgoin pour théoriser l'art ornemental à partir des notions d'ordre et de forme. Par ailleurs, le motif de la ligne brisée est très présent dans les différents ouvrages de Bourgoin, dès lors qu'il étudie les combinaisons d'éléments droits ou courbes[44].

Pour sa part, l'architecte et ornemaniste américain Claude Fayette Bragdon (1866-1946) reprend à son compte des diagrammes constitués de lignes brisées qui sont directement liés au parcours du cavalier et aux carrés magiques. Le sixième chapitre de son ouvrage *Projective Ornament* (1915) est d'ailleurs consacré aux carrés magiques et l'on y trouve une série de diagrammes impliquant des lignes brisées qui acquièrent le statut de motifs ornementaux. Bragdon se réfère alors explicitement à une collection d'articles de Schubert, traduits en anglais et rassemblés sous le titre de *Mathematical essays and recreations* (1898). Dans le chapitre VII de son essai de 1915, Bragdon développe en outre une série de considérations sur l'ordre des mots et l'ordre du monde qui font écho aux liens établis par Schubert, dans son article de 1892, entre les carrés magiques, les symétries associées et le problème philosophique de l'ordre du monde.

---

[41] Sur Bourgoin, nous renvoyons notamment à l'ouvrage collectif dirigé par Maryse Bideault, Estelle Thibault et Mercedes Volait (2015), dont le chapitre d'E. Thibault sur la *Graphique* (255-276) et celui de J. Boucard et C. Eckes sur la syntactique et la théorie de l'ordre (281-298).

[42] Bourgoin a également relevé dans ses notes de lecture la référence à l'*Essai sur les problèmes de situation* publié par le compositeur et théoricien de la musique Denis Ballière de Laisement en 1782. Cet essai est entièrement dédié au problème du cavalier et il comporte des représentations graphiques sous la forme de lignes brisées qui sont similaires à celles de Vandermonde.

[43] Pour plus de détails, voir en particulier E. Thibault (269).

[44] Pour plus de détails, voir en particulier E. Thibault (269).

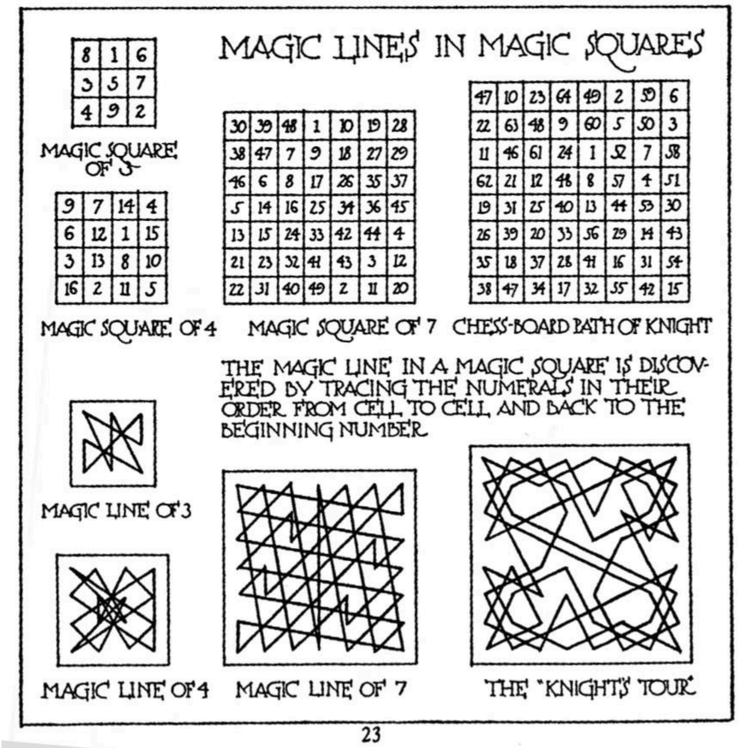

Figure 11 – carrés magiques et parcours du cavalier, C. Bragdon (50).

Polygraphies du cavalier, jeux de mots et littérature : de la presse quotidienne à l'Oulipo

À partir des années 1870 au moins, la polygraphie du cavalier fait régulièrement l'objet de casse-têtes littéraires dans les rubriques hebdomadaires récréatives de plusieurs journaux quotidiens et hebdomadaires. Nous pouvons mentionner « Les passe-temps du Figaro » du 14 décembre 1896, qui présente un échiquier carré de 64 cases, chacune comportant de deux à trois lettres. La légende indique qu'il s'agit d'un « carré magique en deux chaines ouvertes »[45]. Ce vocabulaire renvoie aux récréations mathématiques du dernier tiers du XIXème siècle ; de plus, le terme « chaîne » fait explicitement référence au motif de la ligne brisée. L'objectif pour le lecteur est de reconstituer une citation en s'appuyant sur deux parcours de cavalier – La combinaison de ces deux parcours implique d'épuiser toutes les cases de l'échiquier. Le point de départ est la case comportant les lettres « AYA ». La solution, donnée deux semaines plus tard, est un passage tiré d'une fable de Pierre Lachambeaudie (figure 12).

[45] Une chaîne est dite ouverte si son point de départ et son point d'arrivée ne sont pas distants d'un saut de cavalier.

351. — POLYGRAPHIE DU CAVALIER
Par M. Palamède, à Bourges.

AF	NN	EN	HE	AP	ON	CE	CH
TI	RC	OR	ELI	FUT	UT	UI	BE
OC	ZL	RC	REP	DIT	EL	EZ	TA
HE	RL	QU	TUN	OUR	LE	RO	SS
HE	EN	SI	DIE	AYA	AI	OR	LE
AC	AC	MB	VAI	LUI	ER	AN	SA
CE	RC	OU	NTP	EAU	UI	PL	PP
RL	HA	EN	LA	NP	RA	DU	CEQ

Carré magique en deux chaînes ouvertes.

N° 351. — Polygraphie du cavalier

Ayant perdu sa robe, on dit que l'Innocence,
En vain, pour la chercher, courut chez le Plaisir,
Chez la Fortune, la Puissance.
Qui la lui rapporta ? Ce fut le Repentir.

LACHAMBEAUDIE.

Figure 12 – La polygraphie du cavalier proposée dans *Le Figaro* (14 décembre 1896, 6, à gauche) et sa solution (28 décembre 1896, 6, à droite).

La polygraphie du cavalier est également mobilisée par certains représentants de l'Oulipo[46], à commencer par François Le Lionnais (1901-1984) qui en est l'un des fondateurs. Le Lionnais consacre une entrée à la polygraphie du cavalier dans son *Dictionnaire des échecs* en 1974. Georges Perec s'appuie pour sa part sur la polygraphie du cavalier pour structurer son roman *La Vie mode d'emploi*, publié en 1978. Dans ce texte, Perec décrit la vie d'un immeuble parisien qu'il divise en cent parties, à l'image d'un échiquier carré de côté 10, chaque pièce – cage d'escalier comprise – faisant l'objet d'un chapitre[47]. Il se donne 42 listes de contraintes comportant dix valeurs. Deux listes fournissent ainsi cent paires deux à deux distinctes de valeurs que Pérec répartit dans chaque pièce en s'appuyant sur un carré gréco-latin. Ajoutons que l'ordre des chapitres correspond au parcours du cavalier sur un échiquier carré de côté dix qui, selon Benoît Berthou (70), « permet de conduire un récit associant fragmentation et régularité ». Les carrés magiques et la polygraphie du cavalier deviennent ainsi une contrainte littéraire.

[46] *L'Ouvroir de littérature potentielle* est un groupe littéraire qui se caractérise notamment par l'usage de contraintes mathématiques pour obtenir de nouvelles formes littéraires. Sur les liens avec les mathématiques, voir notamment l'article de M. Audin, dans lequel elle présente les différentes contraintes mathématiques présidant à la composition de plusieurs ouvrages de l'Oulipo, dont celui de Perec mentionné ci-après.
[47] L'ouvrage ne comporte cependant que 99 chapitres.

***Cahier des charges de* La Vie mode d'emploi**

(copyright Association Georges Perec, 1 rue de Sully, 75004 Paris).

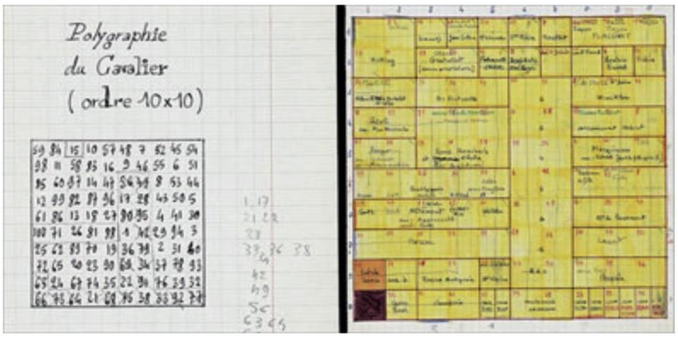

Figure 13 – Extrait du Cahier des charges de *La vie mode d'emploi* (Figure issue de l'article de B. Berthou).

Conclusion

Bien que marginale, la ligne brisée constitue une porte d'entrée originale pour appréhender les sciences mathématiques ainsi que leur histoire. À partir des trois exemples choisis, cette figure intervient en géométrie élémentaire, dans l'étude des fonctions et pour résoudre des questions de combinatoire en lien avec des récréations mathématiques. Elle permet tour à tour de conduire des raisonnements par l'absurde et de construire des objets parfois qualifiés de pathologiques afin d'appréhender des résultats contre-intuitifs. Elle peut aussi servir de support visuel à la résolution d'un problème. Enfin, la figure de la ligne brisée nous invite à penser les sciences mathématiques dans leur rapport à l'artisanat, l'art industriel, les métiers d'art ou les lettres, comme en témoigne la circulation des figures associées au parcours du cavalier.

Son étude est l'occasion d'alimenter les réflexions sur le statut et les fonctions des diagrammes en mathématiques. Chez Euclide, la ligne brisée n'est pas un objet géométrique à proprement parler, elle s'insère dans des représentations diagrammatiques qui permettent de localiser la contradiction au cours d'un raisonnement par l'absurde. Dans les cas des courbes de Koch, de Peano et de Hilbert, la ligne brisée permet d'appréhender intuitivement les premières étapes dans la construction d'objets dont les propriétés peuvent nous sembler contre-intuitives. Enfin, dans le cas de la polygraphie du cavalier, la ligne brisée constitue un diagramme à deux titres : elle indique de manière dynamique *la procédure à suivre pour résoudre* ce problème et elle permet de *classer* les solutions possibles. Elle peut en outre devenir un motif relevant de l'art du tissage et de l'art ornemental, ou se muer en une contrainte de composition littéraire.

Références

Ampère A., « Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées », *Journal de l'École polytechnique*, tome VI, cahier 13, 1806, p. 148-191.

Audin M., « Mathématiques et littérature : un article avec des mathématiques et de la littérature », *Mathématiques et sciences humaines*, vol. 45, n°178, 2007, p. 63-86.

Auvinet J., « Charles-Ange Laisant, un acteur pour les mathématiques discrètes et leur communauté à la fin du XIXème siècle » *in* E. Barbin, C. Goldstein, M. Moyon, C. Schwer et S. Vinatier (dir.), *Les Travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité*, Limoges, Presses universitaires de Limoges, p. 43-68.

Ballière de Laisement D., *Essai sur les problèmes de situation*, Rouen, Jean Racine (libraire) 1782.

Batt N. (dir.), *Penser par le diagramme, de Gilles Deleuze à Gilles Châtelet, Théorie, littérature, enseignement*, vol. 22, 2004.

Berthou B., « L'échiquier de *La Vie mode d'emploi* : Georges Perec et le "cavalier polygraphe" » *in* A. Mussou et S. Troche (éd.), *Le jeu d'échecs comme représentation*, Paris, Éditions Rue d'Ulm, 2009, p. 65-79.

Bideault M., Thibault E. et Volait M. (éd.), *De l'Orient à la mathématique de l'ornement : Jules Bourgoin (1838-1908)*, Paris, Picard, 2015.

Boucard J., « Images de combinatoire en France au XIXème siècle : le cas des *Nouvelles annales de mathématiques* (1842-1914) » *in* E. Barbin, C. Goldstein, M. Moyon, , C. Schwer et S. Vinatier (dir.), *Les Travaux combinatoires en France (1870-1914) et leur actualité*, Limoges, Presses universitaires de Limoges, p. 69-93.

Bourgoin J., *Études architectoniques et graphiques,* tome II, Paris, Charles Schmid, 1901.

Bourgoin J., *La Graphique. Collection raisonnée d'études et de matériaux, de notes et de croquis pour servir à l'histoire, à la théorie, à la technique des arts et à l'enseignement dans la famille, dans l'école et dans l'atelier*, Paris, Delagrave, 1905, 3 vols.

Bragdon C. F., *Projective Ornament*, Rochester, The Manas Press, 1915.

Décaillot A-M., *Édouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXème siècle*, Thèse de doctorat, Université René Descartes, Paris V, 1999.

Décaillot A-M., « Les *Récréations Mathématiques* d'Édouard Lucas : quelques éclairages », *Historia Mathematica*, vol. 41, 2014, p. 506-517.

Dhombres J., « French Mathematical Textbooks from Bézout to Cauchy », *Historia Scientiarum*, vol. 28, 1985, p. 91-137.

Dugac P., « Éléments d'analyse de Weierstrass », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 10, 1973, p. 41-176.

Euclide, *Les Éléments, volume I, Livres I à IV*, introduction générale par M. Caveing, traduction et commentaires par B. Vitrac, Paris, PUF, 1990.

Euler L., « Solution curieuse qui ne paraît soumise à aucune analyse », *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres (Berlin)*, vol. 15 (Année 1759), 1766, p. 310-337.

Gauthier S., *La géométrie des nombres comme discipline (1890-1945)*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2007.

Gilain C., « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Société des amis de la bibliothèque de l'École polytechnique*, vol. 5 (1989), p. 3-46 (« Introduction ») et p. 47-145.

Gispert H. (éd.), *« Par la science, pour la patrie ». L'Association française pour l'avancement des Sciences (1872-1914)*, Rennes, Presses universitaires de Rennes, 2002.

Gray J., *Plato's Ghost: The Modernist Transformation of Mathematics*, Princeton, Princeton University Press, 2008.

Gray J., *Henri Poincaré: A Scientific Biography*, Princeton, Princeton University Press, 2013.

Gros I., « L'imaginaire du jeu d'échecs en France au XIXème siècle, ou la conversion intellectuelle du guerrier », *Revue d'histoire du XIXème siècle. Société d'histoire de la révolution de 1848 et des révolutions du XIXème siècle*, vol. 40, 2010, p. 131-146.

Hilbert D., « Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück », *Mathematische Annalen*, vol. 38, 1891, p. 459-460.

Hofmann F., « Sur la marche du cavalier », *Nouvelles annales de mathématiques*, sér. III, vol. 5, 1886, p. 224-226.

Klein F., *Lectures on Mathematics*, delivered from aug. 28 to sept. 9, 1893 Before Members of the Congress of Mathematics in Connection with the World's Fair in Chicago at Northwestern University, New York et Londres, Macmillan, 1894.

Von Koch H., « Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire », *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, vol. 1, 1904, p. 681-702.

Kraitchik M., *La mathématique des jeux ou Récréations mathématiques*, Bruxelles, Imprimerie tevens Frères, 1930.

Kraitchik M., « Sur les parcours doublement symétriques d'un échiquier d'ordre 6 », *Sphinx*, vol. 1, n°2, 1931, p. 39.

Laquière E., « Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier », *Bulletin de la Société mathématique de France*, tome 8, 1880, p. 132-158.

Le Lionnais F., *Dictionnaire des échecs*, Paris, Presses Universitaires de France, 1974.

Legendre A-M., *Éléments de géométrie, avec des notes*, Paris, Firmin Didot, 1794.

Lorenat J., « Mathematics for Philosophers: a Look at The Monist from 1890 to 1906 », Colloque *Cirmath Americas*, University of Virginia, Charlottesville (Etats-Unis), Mai 2018.

Lucas E., « Le saut du cavalier au jeu d'échecs », *Revue scientifique de la France et de l'étranger*, vol. 6, 1883, p. 370-375.

Lucas E., « Nouveaux jeux scientifiques », *La Nature*, vol. 17, n°853, 1889, p. 301-303.

Lucas E., *Théorie des Nombres. Tome premier*, Paris, Gauthier-Villars, 1891.

Mittag-Leffler G. et Poincaré H., *La correspondance entre Henri Poincaré et Gösta Mittag-Leffler*, éditée et annotée par Philippe Nabonnand, Bâle, Birkhäuser, 1999.

Parshall, K.H. et Rowe D. E., « Come to the Fair: The Chicago Mathematical Congress of 1893 », *in* Bettye A C., (éd.), *A Century of Mathematical Meetings*, Providence, Rhode Island, American Mathematical Society, 1996, p. 61-69.

Peano G., « Sur une courbe qui remplit toute une aire plane », *Mathematische Annalen*, vol. 36, 1890, p. 157-160.

Perec G., *La vie mode d'emploi*, Paris, Hachette, 1978.

Perec G., « Quatre figures pour La Vie mode d'emploi », *L'arc*, vol. 76, 1979, p. 50-53.

Poincaré H., « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique*, vol. 1, 1899, p. 157-162.

Poincaré H., « Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques » *in Compte-rendu du deuxième congrès international des mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 août 1900*, publié par les soins d'E. Duporcq, Paris, Gauthier-Villars, 1902, p. 115-130.

Poinsot L., « Mémoire sur les polygones et les polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, vol. 4, 10e cahier, 1810, p. 16-49.

Rabouin D., « Proclus' Conception of Geometric Space and its Actuality » *in* V. de Risi, *Mathematizing Space, Trends in the History of Science*, Berlin, Springer, 2015, p. 115-42.

Rouché, E. et Comberousse, C. de, *Traité de géométrie élémentaire*, 1ère éd., Paris, Gauthier-Villars, 1866.

Rouse Ball W.W., *Mathematical Recreations and Essays*, 4e éd., Londres, Macmillan and Co., 1905.

Saito, K. et Sidoli N., « Diagrams and Arguments in Ancient Greeks Mathematics: Lessons Drawn from Comparisons of the Manuscript Diagrams with those in Modern Critical Editions » *in* K. Chemla (éd.), *The History of Mathematical Proof in Ancient Tradition*, New York, Cambridge University Press, 2012, p. 135-162.

Schubert H., « The Magic Square », *The Monist*, vol. 2, n°4, 1892, p. 487-511.

Schubert H., *Mathematische Mussestunden, Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathematischer Natur*, 2e éd., Leipzig, J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1900, vol. 3.

Thibault E., « La graphique, une science des figures pour l'école et l'atelier » *in* M. Bideault, E. Thibault et M. Volait (éd.), *De l'Orient à la mathématique de l'ornement, Jules Bourgoin (1838-1908)*, Paris, Picard, p. 255-276.

Turner L. E., « Cultivating Mathematics in an International Space: Roles of Gösta Mittag-Leffler in the Development and Internationalization of Mathematics in Sweden and Beyond, 1880-1920 », Thèse de doctorat, Université d'Aarhus, 2011.

Vandermonde A-T, « Remarques sur les problèmes de situation », *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de mathématiques et de physique, Année 1771*, 1774, p. 566-574.

Vitrac B., « Les démonstrations par l'absurde dans les Éléments d'Euclide, inventaire, formulation, usages », mars 2012, en ligne : http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/68/55/20/PDF/Les_dA_monstrations_par_l_absurde.pdf.

Volkert K., « Die Geschichte der pathologischen Funktionen — Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methodologie », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 37, 1987, p. 193-232.

Wate-Mizuno M., « Representation of Graphs in Diagrams of Graph Theory » *in* A. Moktefi et S. Shin (éd.), *Visual Reasoning with Diagrams*, Basel, Springer, 2013, p. 171-200.

Weierstrass K., « Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen », présentée devant l'Académie des Sciences de Berlin le 18 juillet 1872 *in* K. Weiertrass, *Mathematische Werke, Abhandlungen II*, Berlin, Mayer und Müller, 1895, p. 71-74.