Le tome II de La Philosophie de l'algèbre. Dossier documentaire

Jules Vuillemin, Gudrun Vuillemin-Diem

Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-3 | 2020
Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

Le tome II de *La Philosophie de l'algèbre.* Dossier documentaire

Tome 2 of La Philosophie de l'algèbre. Documentary file

Jules Vuillemin et Gudrun Vuillemin-Diem

Édition électronique
URL : https://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2472
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2472
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 25 octobre 2020
Pagination : 219-235
ISBN : 978-2-84174-
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Jules Vuillemin et Gudrun Vuillemin-Diem, « Le tome II de *La Philosophie de l'algèbre.* Dossier documentaire », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-3 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 03 novembre 2021. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2472 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2472

Le tome II de *La Philosophie de l'algèbre*. Dossier documentaire

Jules Vuillemin† et *Gudrun Vuillemin-Diem*†

Résumé : On trouvera ici l'édition critique de la conclusion générale, restée inédite, des deux tomes de *La Philosophie de l'algèbre*. Vuillemin y décrit d'abord les deux révolutions successivement survenues en algèbre : le passage, décrit dans le tome I, de l'Algèbre cartésienne des équations à l'Algèbre des structures exemplifiée dans la théorie de Galois, puis le passage de celle-ci à l'Algèbre de l'algèbre chez Dedekind et Birkhoff. Un renouvellement parallèle peut donc être attendu dans la philosophie théorique : après la *mathesis universalis* de l'âge classique, qui transposait les méthodes des mathématiques classiques, puis celle de la phénoménologie, qui importait en philosophie l'idée de structure, il reste à mener en philosophie une nouvelle révolution, qui fonde l'analyse des structures dans une critique préalable de la raison.
Ce texte est suivi d'une notice de Gudrun Vuillemin-Diem décrivant les manuscrits de la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre*.

Abstract: Here is the as yet unpublished critical edition of the general conclusion to the two volumes of *La Philosophie de l'Algèbre*. Vuillemin first describes the two successive revolutions that occurred in algebra: the transition—as described in Volume I—from the Cartesian Algebra of equations to the Algebra of structures as exemplified by Galois' theory, then the transition from the latter to the Algebra of algebra in the work of Dedekind and Birkhoff. A parallel renewal can thus be expected in theoretical philosophy: after the *mathesis universalis* of the classical age which transposed the methods of classical mathematics then that of phenomenology which brought the idea of structure into philosophy, a new revolution is awaited in philosophy which bases the analysis of structures on a prior critique of reason.
This text is followed by a document record by Gudrun Vuillemin-Diem describing the manuscripts of the second part of *La Philosophie de l'algèbre*.

Philosophia Scientiæ, 24(3), 2020, 219–235.

Avertissement

On trouvera ici la dernière version de la conclusion générale, restée inédite, des deux tomes de *La Philosophie de l'algèbre*. Dans cette édition critique, nous avons retenu les corrections manuscrites effectuées par Vuillemin tout en précisant au sein de notes critiques[a] les parties antérieures du texte dactylographié.

À la suite, nous donnons d'autre part une version révisée de la notice, rédigée par Gudrun Vuillemin-Diem, décrivant les archives du fonds Vuillemin (Boîte V, documents **A**, **B**, **C**) qui contiennent une version inédite de la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre*.

Simon Decaens, Sébastien Maronne & Baptiste Mélès

1 Conclusion générale inédite du tome II de *La Philosophie de l'algèbre*

Source : Archives Vuillemin, boîte V, document **A**, p. 355–362.

Conclusion

[**355**] En étudiant le développement de l'Algèbre, j'ai voulu poser deux problèmes : 1) Quelle est la nature de la connaissance pure en Algèbre ? 2) Dans quelle mesure la réponse à ce problème permet-elle d'espérer un renouvellement de la philosophie théorique ?

§ 70[b]. Nature de la connaissance pure en Algèbre

[a] Les notes critiques sont indicées par les numéros de lignes. Un crochet fermant y sépare la version finale de la version antérieure. Les corrections de coquilles dans le texte, par Jules Vuillemin ou par les éditeurs, ne sont pas signalées. La pagination originale est indiquée par des numéros de page placés entre crochets. Les notes de bas de page des auteurs sont indiquées par des nombres, celles des éditeurs par des lettres. Cette édition critique est issue du travail d'exploitation du manuscrit mené dans le cadre du projet ANR VUILLEMIN <ANR-17-CE27-0017-01> (2017-2020) et du postdoctorat de Simon Decaens dirigés par Baptiste Mélès.

[b] La table des matières qu'on trouve dans le document A témoigne de l'insertion par Vuillemin, dans un second temps, de trois paragraphes supplémentaires : § 48 Le « Programme d'Erlangen » ; § 49 Limites du « Programme d'Erlangen » ; § 55 Retour à l'idée de Critique générale : temps et éternité. C'est ce qui explique le décalage dans la numérotation de trois paragraphes qui a été corrigé ici.

1 voulu] *suppr.* dans ce livre 2 en Algèbre] algébrique 3 la réponse à ce problème] cette connaissance 5 **§ 70**] **§ 67**

Trois éléments déterminent la nature d'une connaissance : son objet, sa méthode et ses principes. Ces trois éléments doivent permettre d'établir son rapport aux autres sciences et le type de certitude qu'on est en droit d'attendre d'elle.

J'ai distingué trois moments principaux dans le développement de l'Algèbre. Le premier accomplit le projet cartésien ; il aboutit à Lagrange. Le second est illustré par Galois. Dedekind et Birkhoff représentent le troisième.

Reprenant la définition d'Aristote, Descartes assignait comme objet aux Mathématiques à la fois l'ordre et la mesure. Mais sa propre pratique de l'Algèbre dément l'universalité de ce programme. L'Algèbre cartésienne est avant tout une science de la quantité, ou une machine à résoudre les équations. Même si l'Algèbre de Lagrange a beaucoup abandonné des ambitions et surtout des prétentions cartésiennes, elle demeure avant tout une théorie des équations, c'est-à-dire une science de la composition des quantités sous des formes particulières. Rapportée aux procédés des calculateurs aussi bien qu'aux constructions des géomètres grecs, cette Algèbre a le mérite d'une double abstraction. Sous une lettre, on pense un nombre déterminé quelconque, et chaque méthode pour résoudre une équation est donc une sorte de condensé pour une infinité de solutions numériques. De plus, l'Algèbre permet de connaître les figures géométriques sans les voir ; elle fait l'économie de l'intuition sensible, même pure. L'image d'une courbe sert d'adjuvant à notre faculté de représentation ; mais le Géomètre peut, à la rigueur, entièrement s'en passer.

Néanmoins, chaque équation déterminée sur laquelle on raisonne représente un être mathématique bien défini. L'Algèbre des structures met au contraire en jeu un second type d'abstraction, qui établit la cause ou raison d'être des propriétés liées aux individus, en la cherchant dans les structures [**356**] algébriques auxquels ils obéissent. Ces structures ne sont que les genres de combinaisons possibles auxquelles il est permis de soumettre les individus déterminés, sans sortir de la structure. L'image qui correspond au concept structural n'est plus ici qu'une « représentation », c'est-à-dire une individuation de la structure. Or ce rapport de la structure formelle à ses réalisations a une double conséquence sur le type d'abstraction qu'il exige de nous. En premier lieu, la notion d'opération est dégagée de ses illustrations particulières : par exemple, on peut, comme l'avait vu Gauss, écrire un groupe sous forme additive ou multiplicative. En ce sens, l'opération étant réduite à la mise en correspondance qu'elle permet d'effectuer entre deux ensembles, c'est-à-dire à la fonction, nous apercevons ce qui caractérise une structure algébrique : un ensemble ou plutôt deux ensembles reliés par une liaison fonctionnelle. La nature particulière de cette fonction n'est pas précisée : il peut s'agir d'une opération « rationnelle » ou d'une fonction classique (analytique) ou de toute correspondance appropriée qu'on voudra.

---

22 sert] peut servir   22 à] pour   34 illustrations particulières] engagements particuliers

En second lieu, du moment que l'individu est aperçu dans une structure, sa nature change. Pour la philosophie classique, l'individu figurait à titre d'absolu de la connaissance, soit qu'il apparût comme un irréductible à la raison dans l'intuition empirique ou sensible, soit que, comme nature simple intelligible, il défiât les puissances simplement raisonnantes de notre faculté de penser. Comme le montre la Théorie des groupes, tout individu est relatif à une structure, qui détermine *a priori* son degré de discernabilité. Celle-ci n'est plus une sorte de propriété en soi, liée à la nature singulière de l'individu : elle qualifie un groupe d'opérations, par rapport auquel elle définit un invariant. Cet invariant change avec l'expression du groupe. La relativité de la connaissance n'est donc plus, comme dans le kantisme, le fait d'un rapport après tout contingent de notre faculté de connaître aux formes de la sensibilité : elle définit la connaissance pure et par concept en elle-même. Elle résulte en effet du rapport nécessaire de l'individu et de la structure, de l'invariant à un groupe d'opérations. En même temps, la possibilité d'apercevoir un même individu engagé dans de multiples structures pose le problème du passage intellectuel entre ses diverses présentations. Ce passage est résolu grâce aux idées de congruence et d'homomorphisme : par rapport à une congruence *modulo* une relation quelconque, une structure plus complexe, en elle-même seulement homomorphe à une structure plus pauvre, lui devient isomorphe, c'est-à-dire structuralement identique. De ce point de vue, toute [**357**] la connaissance mathématique est une classification des structures et de leurs rapports, la congruence permettant de rabattre, pour ainsi dire, le particulier sur le général, et d'identifier un même individu aux différents niveaux que l'analyse structurale distingue en lui. Nous avons appelé jugement d'identification ce procédé entièrement rigoureux ; les différents niveaux de propriétés que la généralité des structures permet de distinguer dans un être mathématique ne sont donc attribués à une même substance que par l'intermédiaire de jugements d'identités ou d'isomorphismes de structures. Ce procédé évite l'ancien dilemme du formalisme et de l'intuitionnisme, celui-là prétendant s'appuyer sur des analogies formelles insuffisantes pour déterminer le contenu du jugement, celui-ci voulant réduire toutes les mathématiques à la seule intuition du nombre entier.

Dans son troisième moment, l'Algèbre, faisant abstraction de la nature définie des structures, n'examine plus que les rapports qui lient une structure à ses sous-structures. Elle examine, par conséquent, l'idée de subsomption ou de subordination, en son sens le plus général. Cette idée n'est autre que celle de ce que Kant appelait un jugement analytique, mais qu'il considérait comme si évident ou si parfaitement étudié par Aristote qu'il pensait que toutes les vérités qu'on pouvait encore découvrir à son propos ne touchaient plus qu'à la présentation et à l'élégance de l'exposé. Ce préjugé tenait à ce que le jugement analytique dans l'ancienne logique ne portait que sur des exemples

3 apparût] apparaisse 5 défiât] défie 8 en soi] absolue 8 singulière *ajouté* 10 change] varie 13 elle] il 13 Elle] La relativité 13–14 en effet *ajouté* 30 l'ancien dilemme] le dilemme 42 le jugement] l'idée de jugement 42 ne portait que sur] ne tenait qu'à

finis, pour aboutir aux truismes du syllogisme. On notera que, surtout sous l'influence de Dedekind, le rapprochement qui s'est fait entre la Logique et les Mathématiques s'est fait par l'intermédiaire de l'infini. L'idée d'ordre pouvait enfin devenir l'objet d'une étude mathématique proprement dite, et, avec l'idée d'ordre, l'idée même de connaissance déductive que cette idée commande. L'Algèbre de l'Algèbre réalisait enfin le programme de la *Mathesis universalis*, quand elle se proposait d'être une « Doctrine de la science ».

Parallèlement à cette évolution portant sur l'objet des mathématiques s'effectuait une évolution portant sur ses méthodes.

Un débat domine les Mathématiques classiques, celui de l'Analyse et [**358**] de la Synthèse. Ces mots, certes, reçoivent souvent des sens divers, compliqués par l'usage qu'on en a fait pour opposer la Géométrie d'Euclide à l'Analyse infinitésimale. Mais si l'on ne retient que la tendance générale, on aperçoit alors qu'en dépit des querelles d'école, un même idéal méthodique est présent chez tous les mathématiciens. Étant donné un individu complexe, il faut pouvoir le décomposer en ses éléments, puis le recomposer entièrement à partir de cette analyse élémentaire. Tel est le double mouvement de la méthode « génétique ». Son défaut tient uniquement à ce que la particularité du point de départ cache, la plupart du temps, les raisons du succès ou de l'échec de l'analyse. L'entendement ne réussit que par une divination heureuse, ce qui donne lieu à la théorie du génie.

Or toute cette méthode se déploie sur le plan de la réalité. La donnée primitive de l'équation à résoudre lie par exemple les analyses larvées de structures à cet univers réel, individualisé et donné. Le propre de l'analyse structurale, comme l'a vu Abel, consistera au contraire à passer du réel au possible, et à développer pour elles-mêmes les analyses de structure, indépendamment de leurs applications. La théorie des opérations possibles en vertu d'une structure se substituera à l'assignation des opérations réelles qui permettent en fait de découvrir les éléments d'une solution. De même, on peut dire que lorsqu'on passe de la méthode génétique en philosophie, telle qu'elle apparaît au moment de sa perfection dans la philosophie de Fichte, à la méthode phénoménologique, chez Husserl, le même changement a lieu dans la méthode, du réel au possible. La théorie des « réductions » dans cette dernière philosophie est le signe de cette transformation.

Lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique. Autrement dit, elle doit examiner systématiquement et *a priori* les conséquences d'une structure donnée par des postulats définis : les changements dans ces postulats font apercevoir par les changements dans les conséquences l'organisation de la connaissance et le type de leur dépendance stricte, indépendamment des hypothèses superflues. Mais le développement conséquent de la méthode axiomatique exigeait deux conditions qui n'ont été réalisées véritablement que dans le troisième moment de l'Algèbre.

1 , pour aboutir] et 6 le programme] ce programme 31 au moment de] dans 32 a lieu] apparaît

La première tient à l'étude des structures pour elles-mêmes, par exemple indépendamment de la Théorie des équations. Cette étude habitue l'esprit à penser les structures indépendamment de leurs réalisations, et, comme [**359**] il apparaît chez Dedekind, à rapprocher des opérations aussi différentes que celles de l'inclusion et de la division, de la Logique et de l'Algèbre proprement dite. Une nouvelle analyse naît alors qui porte sur les structures elles-mêmes, en tant qu'elles peuvent se décomposer en sous-structures qui sont comme leurs « éléments ». Comment ces décompositions sont possibles, de quelles lois elles dépendent, c'est ce qu'examine en premier lieu l'Algèbre de l'Algèbre. On pourrait, en reprenant la théorie des facultés des classiques, dire qu'en son premier moment, l'Algèbre est Algèbre de l'entendement, dans son second moment, Algèbre du jugement, c'est-à-dire de la liaison entre les structures générales et les applications particulières. En son troisième moment, elle est Algèbre de la raison, c'est-à-dire Théorie pure des théories possibles et de leur articulation.

Mais la forme axiomatique elle-même que revêt cette Algèbre de la raison fait apercevoir une seconde condition de la doctrine, particulièrement éloignée des doctrines classiques. Il est coutumier de montrer l'affinité de l'axiomatique avec la relativité de la connaissance. La géométrie euclidienne, considérée dans sa pureté et sans égard au problème de son application à l'expérience possible, est en effet aussi vraie, mais pas plus que la géométrie de Riemann ou que celle de Lobatchewsky. Or deux domaines semblaient échapper *a priori* à cette relativité. Le premier est celui de l'Arithmétique, et le second celui de la Logique. Mais si nous apercevons dans ces domaines les structures formelles qui commandent aux propriétés des individus, nous rendons aussi ces derniers à leur relativité « naturelle ». Suivant que nous les empruntons à des structures plus ou moins riches, ces propriétés sont plus ou moins profondément liées aux êtres que nous examinons. Par exemple la factorisation unique des entiers naturels n'est pas liée à la nature du domaine d'intégrité des entiers comme tels ; elle reparaît plus profondément, lorsque nous nous trouvons en face de certains anneaux commutatifs et de treillis spécialisés.

Si une propriété fondamentale est due à une structure correspondante, les principes mêmes des mathématiques, si contestés depuis la Crise des fondements consécutive à la Théorie des ensembles, cesseront alors de paraître attachés intuitivement à la nature de notre esprit. S'ils sont liés à une structure, on devra éventuellement examiner plusieurs mathématiques possibles, en tant qu'on les utilisera ou qu'au contraire on en fera l'économie. Telle est la position à laquelle conduit l'examen des principes tels que l'induction, le bon ordre, [**360**] le choix. L'analyse des structures et surtout l'Algèbre de l'Algèbre après Dedekind et Cantor ont permis de dégager du conflit métaphysique formalisme-intuitionnisme une axiomatique définie : quelle mathématique peut-on construire avec et sans l'axiome de choix, etc. ?

30–31 de certains anneaux commutatifs et de treillis spécialisés] de certaines lattices particulières bien définies 32 Si] Or si 34 alors de paraître] d'apparaître comme des principes qui seraient 36 éventuellement *ajouté*

Or, en s'appropriant la Logique, la Mathématique ne laissait pas de réagir à son tour, par sa méthode axiomatique, sur la conception que nous nous faisons des principes logiques. De même qu'en Mathématique proprement dite on peut se demander quels théorèmes on peut prouver sans faire usage de l'axiome de choix, de même on peut en Logique restreinte examiner quelles vérités ne dépendent que du principe de non-contradiction, sans faire usage du principe, plus fort, du tiers exclu. L'opposition de la Logique intuitionniste et de la Logique classique cesse d'être alors un insoluble conflit de facultés ou de principes, pour devenir un moyen fécond d'analyser les connaissances humaines, c'est-à-dire d'examiner les titres de légitimité d'une proposition.

En même temps, ce genre d'examen permet d'entreprendre la réalisation du programme critique de la connaissance au sens le plus large. Puisque l'Algèbre de l'Algèbre étudie la nature même des sciences déductives en général, c'est à elle que nous devrons nous adresser pour répondre à la question du critère de la vérité. Tel système déductif est-il consistant ou tel qu'il ne puisse conduire à aucune contradiction ? Est-il redondant ou n'exprime-t-il que les principes nécessaires et suffisants pour en déduire les vérités qu'il expose ? Est-il enfin catégorique ou tel qu'il permette de décider de la vérité ou de la fausseté de toute proposition qu'il permet de formuler ?

Tel est le double aboutissement de l'Algèbre générale.

D'une part elle débouche dans la Méta-mathématique, et elle effectue elle-même la critique des connaissances qu'elle propose. Science de la raison elle l'est au sens le plus haut du mot : elle est une science qui réfléchit elle-même sur ses principes et qui est susceptible d'établir la légitimité de leurs droits et les limites de leurs prétentions.

De l'autre, elle introduit dans la Logique le principe de la tolérance propre aux sciences formelles. Elle cesse de considérer les principes logiques comme des entités isolées et les insère dans des structures plus vastes, qui permettent d'examiner leurs droits et les conséquences qu'ils produisent.

Tel est le programme qu'impose l'examen de la nature de la connaissan-[**361**] ce pure en Algèbre, concernant les problèmes généraux de la Logique.

§ 71[c]. Programme philosophique

L'idée de *mathesis universalis* a été, historiquement, l'une des origines du dogmatisme. Celui-ci appliquait à la connaissance philosophique des méthodes propres à une discipline particulière, les mathématiques. Tel est l'état de la question dans le premier moment de l'Algèbre : même si Kant a le tort d'identifier alors connaissance mathématique et construction des figures dans l'espace euclidien, il a raison de dénoncer la confusion entre la connaissance philosophique qui procède par concepts et la connaissance mathématique particulière qui procède par construction de concepts.

[c]Sur la correction du décalage dans la numérotation des paragraphes, voir note b.

15 puisse] peut 32 **§ 71**] **§ 68** 34 appliquait] consistait dans l'application 34 des méthodes] de méthodes 35 les mathématiques] dans les mathématiques 40 particulière *ajouté*

À son second moment, l'Algèbre et la philosophie se rapprochent. On tente d'appliquer à la pensée les procédés de l'Algèbre des structures. Telle est l'idée mère de la phénoménologie. Nous avons ainsi d'abord distingué trois sortes d'actes de pensée : les impressions, les représentifications et les opérations. Mais il nous a paru illégitime d'appliquer à la pensée la notion générale de groupe. D'ailleurs, la méthode phénoménologique nous a paru souffrir d'un double défaut. Bornant ses ambitions à une simple description, elle a confondu les conditions psychologiques et les conditions proprement transcendantales de la pensée. Cette remarque nous a fait corriger notre classification des actes de pensée que nous avons regroupés en deux genres : les opérations qui définissent la raison pure et les idées liées à la conscience du temps interne.

D'autre part, mettant entre parenthèses la question de l'existence, la méthode phénoménologique empêche le développement de la philosophie critique, en un second sens du mot. En effet, *critiquer* signifie d'abord distinguer dans une connaissance ses différentes sources, par exemple les diverses structures auxquelles renvoient les propriétés d'un objet mathématique. La méthode structurale est critique en ce premier sens, et il en va de même pour la Phénoménologie. Mais *critiquer* indique aussi qu'on recherche si une connaissance est bien fondée et quelles limites rencontre notre pouvoir de penser.

Le développement du formalisme et l'extension de la Théorie des Ensembles ont suscité spontanément cette critique dans la méta-mathématique, partie intégrante de la Logique moderne, et où les questions d'existence retrouvent leur droit. De même, pour rendre cette seconde dimension au programme critique, la philosophie doit examiner systématiquement non seulement comme l'avait fait Kant si Dieu existe hors de nous, mais encore si l'idée de Dieu, en nous, correspond à une véritable « réalité objective ». Retrouvé au détour de ses créations mathématiques par Cantor lui-même, le problème ontologique appelle donc un nouvel examen.

[**362**][d] La crise de la théorie des ensembles trouve-t-elle un analogue en philosophie ? Les remèdes à cette crise trouvent-ils un analogue dans la reconstruction philosophique ?

Une fois circonscrit le champ légitime de la connaissance humaine, on peut alors se demander si les méthodes structurales peuvent *mutatis mutandis* s'appliquer à la recherche philosophique. Or comme la connaissance philosophique elle-même se présente, dans la mesure où son ambition la rend digne du nom qu'elle porte, comme une théorie de la science, elle tombe sous le concept général de treillis. On peut alors formuler le problème suivant : toute

[d] Vuillemin a corrigé la numérotation de la page. Celle-ci portait le numéro 361. Dans la table des matières du ms. **A**, les entrées concernant la conclusion sont manuscrites et ne font pas apparaître de numéros de page. Dans la table des notes qu'on trouve dans le ms. **C**, la note I porte le numéro de page 362.

3 d'abord *ajouté* 10 regroupés] groupés 24 rendre cette seconde dimension au] retrouver ce second sens du 36–37 son ambition la rend digne] elle est digne par son ambition 37–38 le concept général de treillis] l'analyse générale des lattices

philosophie se présentant comme un système, la théorie des treillis permet-elle de classer ces systèmes et d'établir une véritable théorie comparée des systèmes philosophiques ?

Enfin, des notions analogues aux théorèmes de décomposition propres aux treillis n'apparaissent-elles pas dans les systèmes philosophiques ? La théorie des idées de Platon en particulier n'a-t-elle pas fourni un modèle d'une telle décomposition de la pensée, tâche première de la philosophie ? On fait remonter généralement à Aristote l'origine de la Logique, mais, outre que sa *Métaphysique* et l'*Organon* lui-même se présentent très souvent comme une réponse aux difficultés du platonisme, deux arguments pressent le philosophe à chercher dans Platon la première théorie de la science. D'abord la théorie platonicienne de la connaissance se trouve, par rapport à la découverte de Pythagore et aux contestations de Zénon, dans une position assez semblable à celle de la Logique moderne par rapport à la Théorie des ensembles. En second lieu, tant les procédés de la méthode de division que l'obscure théorie des nombres idéaux semblent chercher à déterminer des méthodes logico-mathématiques spécifiques pour analyser la pensée.

Quatre problèmes propres à éclairer la philosophie de la connaissance pure se posent donc à nous. Quels sont les Éléments d'une Logique philosophique ? Quelle est la nature de l'idée de Dieu ? Pouvons-nous classer, en vertu de principes formels, les divers systèmes philosophiques ? Quelle est la signification de la Logique, à son origine, dans la philosophie grecque ?

2 Notice de Gudrun Vuillemin-Diem sur les manuscrits du tome II de *La Philosophie de l'algèbre*

Les trois documents **A**, **B**, **C** se suivent chronologiquement. Les documents **A** et **B** sont des originaux (dactylos originaux et corrections main JV), le document **C** est une copie de **B+A** (en partie dactylo-copies, en partie copié main JV et plusieurs autres mains en aide). Pour la **lecture du contenu**, les documents **B+A** (ordre systématique) suffisent.

V.1. Document A

Texte dactylo, années autour/avant 1960-1962, avec corrections, notes et feuilles intercalées, main JV, env. 145 pages.

Le contenu est énuméré dans la « **Table des matières** » du ms. **A**, mais les deux premiers chapitres manquent dans le texte du document. Ces deux

1 treillis] lattices 1 permet-elle] *suppr.* analogiquement 4 des notions analogues aux] les 5 treillis] lattices 5 n'apparaissent-elles] ne reparaissent-ils 10 deux arguments] trois arguments

chapitres avaient les numéros **VI** et **VII**, les §§ 33-44 et les pages 173–223. Ce manuscrit devait donc être la suite d'une *première rédaction* de la Première Partie, qui devait avoir seulement 5 chapitres et 32 paragraphes. Cette première rédaction de la Première partie a dû être augmentée par JV pour la *publication* de 1962 : celle-ci comprend 6 chapitres et 60 paragraphes. Mais les sujets de la Deuxième partie (ici présents) n'ont pas été intégrés dans cette augmentation de la Première partie.

Le ms. **A** avait, à l'origine, 190 pages (de 173 à 362). En l'état actuel, dans lequel manquent les deux premiers chapitres, il a environ 145 pages.

Titre : **Deuxième Partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres.**

Voici la **Table des matières**.

1. Cf. textes Nancy, Liste manuscrits **9*3**.

e. Gudrun Diem-Vuillemin précise entre chevrons certains des éléments de pagination des chapitres ainsi que les titres des paragraphes de la conclusion (et les pages correspondantes) qui ne figurent pas dans la table des matières du ms. **A**.

Le texte effectivement présent dans le ms. **A** commence avec le chapitre VIII, § 45, p. 224. Tout le reste du manuscrit est conforme à la Table des matières : p. 224–362.

Quelques **suppléments** au document **A** proviennent du ms. **C** (les Notes) : voir ci-dessous à la fin de la description de **C**.

V.2. Document B

Le document **B**, dactylo original et correction main JV, environ 60 pages, est une nouvelle rédaction des deux premiers chapitres (VI et VII) du document **A**, qui sont mentionnés dans la Table des matières, mais qui manquent dans le ms. **A** lui-même. Pour cette nouvelle rédaction, JV a utilisé en partie les feuilles du doc. **A** (voir la description ci-dessous). Il a changé la numérotation des chapitres et des paragraphes pour les adapter au texte **publié**. Les deux chapitres sont devenus les chapitres VII et VIII, et la numérotation des paragraphes commence à la suite du texte publié, avec le § 61. Vers la fin de cette nouvelle rédaction [fin chap. VIII], la nouvelle rédaction s'arrête (voir ci-dessous la suite des §§ 73, 43, 44 [! !]). Visiblement, la nouvelle rédaction n'était pas achevée.

Voici le **nouveau titre**, et le contenu des deux premiers chapitres du ms. **B** :

Deuxième Partie. Structure, Infini, Ordre

Section Première : De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent

2. Dans le corps du texte : « Les treillis généraux ».
3. Dans le corps du texte : « Treillis particuliers ».

4. Anciennement § 34 corrigé par JV en § 63, p. 177, cf. ms. **A**, Table des matières.
5. Anciennement § 38, p. 186, cf. ms. **A**, Tables des matières.
6. Anciennement § 40, p. 196, cf. ms. **A**, Table des matières.
7. Le titre « la définition par abstraction » du ms. **A** a été corrigé (à la main). Le texte lui-même (p. 34–35) est pris (coupé) du ms. **A** et corrigé (à la main).
8. Le numéro de la note devrait être V d'après la Table des notes.
9. Ensuite les anciens numéros des pages et des paragraphes du ms. **A** sont repris sans changement.
10. Cf. Table ms. **A**.

Attention : ce chapitre VIII est à rapprocher d'un livre entier, plus récent et plus détaillé, sur les « Définitions par abstraction » (ms. à Nancy, n. **9*3**).

V.3. Document C

Le document **C** est une copie des documents **B+A** dans cet ordre. La copie est faite en partie par des dactylo-doubles, en partie à la main : main de JV et d'autres mains, qui ont copié des pages entières ou des parties de pages. Il contient à peu près 60 (**B**) + 145 (**A**) pages (ou plus, suivant les écritures). Dans le document **C** existent donc deux chapitres avec le numéro VIII : le nouveau sur la « Définition » [document **B**], l'ancien sur « Les structures gaussiennes » [document **A**]. Le document **C** est souvent difficile ou très malcommode à lire.

Pour étudier le contenu objectif conservé de la « Deuxième Partie de la Philosophie de l'Algèbre », il faut utiliser les deux **documents originaux**, à savoir **B+A** dans cet ordre.

Attention : il y a dans le document **C** à six endroits des feuilles supplémentaires, de la main de JV, *en encre rouge*, faciles à distinguer, qui ne faisaient *pas partie de la copie* proprement dite, mais qui furent ajoutées par JV lors du travail de copie, à savoir :

(1) après la page 244h, (2) avant la page 291, (3) avant la page 293, (4) avant la page 304, (5) avant la page 305, (6) à la page 337.

Ces ajouts faits au temps de la copie sont donc ultérieurs au document **B**, et *a fortiori* ultérieurs au document **A**. En vue d'une lecture objective, je les ai insérés dans le document **A** aux endroits respectifs. Mais ils sont facilement reconnaissables. Il y avait dans le dossier **C** :

(1) une **Table des Notes**[f] (dactylo) : I-XIX, p. 362–437. Ces notes se rapportent au contenu du ms. **A**. La pagination des notes commence,

11. Cf. Table ms. **A**.

[f] Voici la Table des notes qu'évoque Gudrun Vuillemin-Diem :

à une page près, à la suite du ms. **A**. Mais une deuxième table a été corrigée en rouge par JV. Le titre de la première note : « Note I. sur la notion mathématique de l'infini » est ajouté. C'est la Note I dans le texte publié de la « Première partie ».

(2) Du **texte** de ces notes est conservée seulement une **partie** et en **copie** : copie à la main, mains différentes (à la fin du ms. **C**). Ce sont les notes IX–XI et XIII–XIX.

Note IX	Exemple pour illustrer la théorie de Kronecker [12]
Note X	Commentaire au Tableau des structures algébriques.
Note XI	Justification du tableau de Klein par rapport aux transformations affines. L'équation du plan de l'infini dans l'espaces est en coordonnées homogène
Note XIII	Sur le théorème de Wedderburn (et ses analogies dans la Théorie des groupes
Note XIV	Sur la condition de Jordan-Dedekind et sur son rapport aux treillis modulaires
Note XV	(titre voir Tableau)

12. Le texte original de cette note se trouve déjà intégré dans le texte révisé du chapitre IV, dans le ms. **B**, après la page 33 : c'est la Note IV.

Note XVI	Exemple de treillis constitué par tous les sous-ensembles d'un ensemble
Note XVII	Les homomorphismes sur les treillis
Note XVIII	[Opérations sur les treillis]
Note XIX	Idée générale des théorèmes de représentation

(3) Feuilles isolées.

Attention : J'ai ajouté cette Table des Notes et la copie du texte des Notes à la fin du ms. **A**, puisqu'ils appartiennent au texte, et que les originaux ne sont pas conservés.

Chronologie relative des deux parties de la *Philosophie de l'Algèbre*

Du contenu des trois documents, qui est détaillé ci-dessus, on peut conclure l'ordre suivant pour la « généalogie » des **deux parties** :

(1) Il y avait d'abord une **1re rédaction** complète **des deux parties**. L'ensemble contenait : chapitres I–XII, §§ 1-71, pages dactylo 1–362 [il y avait en plus des notes I–XIX sur les pages 362–437, mais on n'a presque plus de traces, voir à la fin de la description du document **C**]. La **Première Partie** contenait : chapitres I-V, §§ 1–32, pages 1–172. La **Deuxième Partie** contenait : chapitres VI-XII, §§ 33-71, pages 173–362 [et les Notes I–XIX]. Elle avait pour titre : *Deuxième Partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres* ». La **Table des matières** de la 1re rédaction de la Deuxième Partie est conservée dans le ms. **A** (voir ci-dessus). Le texte des chapitres VI-VII n'existe plus comme tel : les feuilles ont été utilisées pour une re-rédaction de ces deux chapitres (voir sous numéro 3). Le texte des chapitres VIII-XII de la 1re rédaction de la Deuxième partie (voir **Table des matières**) est conservé en dactylo original dans le document **A** (en copie dans le document **C**).

(2) **En vue de la publication de la Première partie**, donc avant 1962, JV a dû **augmenter et réviser** la 1re rédaction de cette Première Partie de façon assez substantielle, mais certainement en utilisant les feuilles du manuscrit de la 1re rédaction. En tout cas, il ne reste plus aucun manuscrit de la Première partie ; on a seulement le livre publié à partir de la Première Partie : il contient les chapitres I-VI (donc un chapitre de plus que la 1re rédaction) et les §§ 1-60 (donc 24 paragraphes de plus que la 1re rédaction).

(3) **Suite à la publication** de la Première Partie (en 1962), JV a commencé à préparer la Deuxième Partie, en vue d'une publication ultérieure. Il a re-rédigé les chapitres VI-VII, en maintenant globalement leurs sujets, et en utilisant les feuilles de la 1re rédaction (qui manquent dans le document **A**). Il a adapté la numérotation de ces deux chapitres et des paragraphes respectifs au texte publié de la Première Partie : ils sont alors devenus chap. VII-VIII et §§ 61-73. Il a donné un nouveau titre : « *Deuxième Partie. Structure,*

Infini, Ordre. – Section Première : De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique, de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent. » Le texte de cette **révision** des deux premiers chapitres est contenu en original dans le document **B**. Les chapitres VIII(*sic*)-XII de la 1re rédaction de cette Deuxième Partie, sont restés inchangés (à l'exception de quelques ajouts en rouge, voir ci-dessus, sous Document **C**). Ils se trouvent en dactylo-original, corrigé main JV, dans le ms. **A**. Après la re-rédaction de ces deux chapitres (autour de l'année 1962), JV a visiblement interrompu et définitivement renoncé à la préparation du reste de cette Deuxième Partie pour une publication.

(4) Mais il a fait lui-même, et avec l'aide de quelques personnes, une **copie de l'ensemble** existant, dans l'ordre systématique du texte **B+A** : c'est le document **C**, dans lequel existent donc deux chapitres avec le numéro VIII (la copie du chapitre nouveau sur la « Définition », la copie du chapitre ancien sur « Les structures gaussiennes »). En regardant le ms. **C**, on se rend compte de l'énorme travail qu'une copie d'un si long texte représentait à cette époque[g].

[g] Après comparaison systématique des ms. **B** et **A** avec le ms. **C**, il apparaît que celui-ci a été copié à partir de versions de **B** et **A** antérieures à celles qui nous sont parvenues et que chacun des trois (**B** et **A** d'un côté, **C** de l'autre) a continué d'évoluer. Les modifications manuscrites effectuées par Vuillemin dans **B** et **A** ont été répercutées par d'autres mains, probablement de secrétaires, dans **C**. Réciproquement, **B** et **A** contiennent les versions dactylographiées de pages partiellement ou entièrement manuscrites dans **C**, à quelques exceptions près, qui constitueraient donc les modifications ultimes (§ 49', modifications à l'encre rouge, notes finales IX à XIX). Le ms. **C** témoignerait ainsi plutôt des allers-retours d'un travail de réécriture du tome II de *La Philosophie de l'algèbre* qu'il n'acterait le gel du projet.