



LES CAISSES DE DYNAMITE Un atelier de recherche Maths à modeler

Michèle Gandit, Simon Modeste, Sylvain Gravier, Marie-Paule Balicco

► To cite this version:

Michèle Gandit, Simon Modeste, Sylvain Gravier, Marie-Paule Balicco. LES CAISSES DE DYNAMITE Un atelier de recherche Maths à modeler. Jouer ou apprendre, May 2013, Chamonix, France. halshs-02021307

HAL Id: halshs-02021307

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-02021307>

Submitted on 15 Feb 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LES CAISSES DE DYNAMITE

Un atelier de recherche *Maths à modeler*

**Michèle GANDIT, Simon MODESTE, Sylvain GRAVIER, Marie-Paule
BALICCO**

Université de Grenoble, Maths à modeler

MOTS-CLÉS : atelier de recherche en mathématiques – démarche d’investigation

RÉSUMÉ – Nous présentons un problème de mathématiques discrètes, support d’un atelier de recherche mené dans un cadre scolaire. L’analyse didactique met en avant des difficultés prévisibles, de la part des élèves-chercheurs, liées aux stratégies de preuve en jeu dans la recherche du problème. Elle débouche sur une proposition de déroulement de l’atelier. La question de l’étayage, sur le plan psychologique et le plan social, n’est pas abordée dans cet article.

ABSTRACT – We present a problem coming from the discrete mathematics, and its didactical analysis. The departure is a game. This analysis shows a few predictable difficulties, which are due to strategies to solve this problem. We describe how the research progresses with students or some other public.

Un atelier *Maths à modeler* est un dispositif didactique, qui s'adresse à des élèves¹ de tous âges (école, collège, lycée, université) ou des enseignants en formation. Il permet, à partir d'un problème – plus exactement d'une situation de recherche pour la classe (Grenier & Payan, 1998) – présenté sous la forme d'un jeu (Gandit & al, 2011) (sur plateau, avec pièces), la pratique d'une *démarche expérimentale en mathématiques* que Giroud (2011, p. 11) décrit comme la mise en œuvre et la confrontation de trois types d'actions autour d'un problème : Expérimenter-observer-valider, Prouver et Formuler de nouveaux problèmes.

Dans les premier ou second degrés, il s'organise, dans l'emploi du temps normal de la classe, en une suite de six séances, une par semaine, et se clôt par un séminaire, à l'université, où les élèves présentent le problème et les résultats qu'ils ont obtenus, à un public, composé de chercheurs, d'enseignants, d'élèves, de leurs parents..., qui ne connaît donc pas nécessairement le problème.

Ce texte présente le problème (jeu) des *Caisses de dynamite*, support de l'atelier, dont l'analyse didactique débouche sur un déroulement possible avec des élèves. Cette proposition s'appuie sur plusieurs expérimentations menées avec des élèves de collège ou lycée, des étudiants, des professeurs stagiaires en mathématiques et des publics divers.

Le problème²

Dans un bâtiment, on cherche à entreposer le maximum de caisses de dynamite de sorte que, si une caisse explose, elle n'endommage aucune autre caisse. Quel est ce maximum ?

Le bâtiment est une surface quadrillée, de forme quelconque, à cases carrées identiques. A chaque caisse, posée sur une seule case, est attachée une zone de sécurité qui dépend du mode d'explosion : une caisse peut donc interdire un certain ensemble de cases (figure 1).



Figure 1 – Un exemple de forme de bâtiment, une caisse occupe une seule case, un exemple de zone de sécurité (en croix) (ou de mode d'explosion).

¹ Le terme d'élève est utilisé au sens générique de personne qui apprend.

² Il est inspiré du *Problème des huit reines*, posé au XIXème siècle : Comment placer huit reines sur un échiquier (une reine « mange » toute pièce située sur la ligne, la colonne et les deux diagonales qui contiennent la case sur laquelle elle est posée) sans qu'aucune ne puisse être mangée par une autre.

Tout élève-chercheur est amené à prendre en charge les *variables de recherche*, que constituent la *forme du bâtiment* et le *mode d'explosion* (ou la *forme de la zone de sécurité*). Il peut ainsi se fabriquer ses propres questions (nous avons évoqué ci-dessus la phase *Proposer de nouveaux problèmes*). Une question résolue renvoyant à de nouvelles questions, la recherche n'a pas de fin, son arrêt résulte d'une décision arbitraire liée à la fin du temps de l'atelier (fixé au départ).

Entrons dans le problème avec les mêmes choix qu'à la figure 1 (phase *Expérimenter-observer-valider*). Dans toute la suite, nous nommerons *B* le bâtiment de la figure 1.

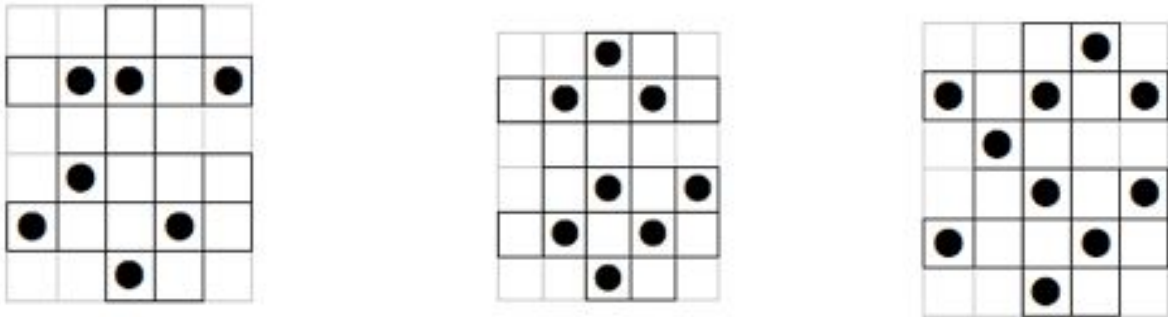


Figure 2 – A gauche, une configuration non valide puisqu'à la 2^{ème} ligne, 2 caisses se détruisent (si l'on en enlève une, la configuration devient une solution) ; ensuite, 2 solutions à 8, puis à 10 caisses.

La configuration centrale de la figure 2 est une solution *localement maximale* en ce sens qu'on ne peut pas ajouter de pièce dans les cases vides, sans enfreindre la contrainte de sécurité. Mais cela ne signifie pas que 8 soit le nombre maximum cherché, comme le montre la solution de droite, qui est aussi localement maximale, mais de cardinal 10. Ainsi, l'exhibition d'une solution implique un minorant du maximum M cherché¹ : ici $M \geq 10$. La tentative de placement d'une onzième caisse n'aboutissant pas, on s'engage dans une preuve qu'il est impossible de faire mieux que 10 en recourant à une majoration de M . Celui-ci est clairement inférieur au nombre de cases du bâtiment, donc $M \leq 20$. Comment obtenir une majoration meilleure, au sens où le majorant soit plus proche du minorant 10 ? Nous poursuivons cette preuve plus loin.

Ce problème peut ainsi se décomposer en deux *nouveaux problèmes* : comment construire une solution localement maximale, menant à un minorant de M , et comment obtenir un majorant de M . Nous étudions ces deux problèmes sur les modes d'explosion *en croix* et *en carré*.

Explosion en croix ou en carré

Pour trouver une solution, on peut placer des pièces (caisses), sans méthode ordonnée, puis vérifier sa validité en marquant la zone de sécurité de chacune d'elles. On peut aussi adopter une stratégie

¹ Cet optimum M dépend de la forme de l'entrepôt et du mode d'explosion.

locale, qualifiée de *gloutonne*, qui consiste à poser une caisse sur une case, accompagnée de sa *zone de sécurité*, ces zones de sécurité pouvant se superposer en partie.

Concernant le mode d'explosion *en croix*, cette stratégie gloutonne, appliquée au bâtiment *B*, si elle permet de construire une solution localement maximale, ne permet d'aboutir qu'à une minoration de *M*, comme le montre la figure 3.



Figure 3 – Deux solutions localement maximales, de cardinal 9, puis 10, obtenues par stratégie gloutonne, pour le mode d'explosion *en croix*.

Pour faciliter l'entrée dans le problème, le *meneur du problème* – nous nommons ainsi dans la suite le chercheur ou l'enseignant qui dirige l'atelier – doit confronter les élèves-chercheurs à des solutions qui soient à la fois localement maximales et de cardinaux différents (comme à la figure 3). L'argument, souvent avancé, que « c'est la meilleure solution car on ne peut pas mettre une pièce de plus » peut ainsi être mis en défaut. Cependant *la régularité* de certaines solutions (voir figure 4) peut redevenir un obstacle à la nécessité de prouver *qu'on ne peut pas faire mieux*.

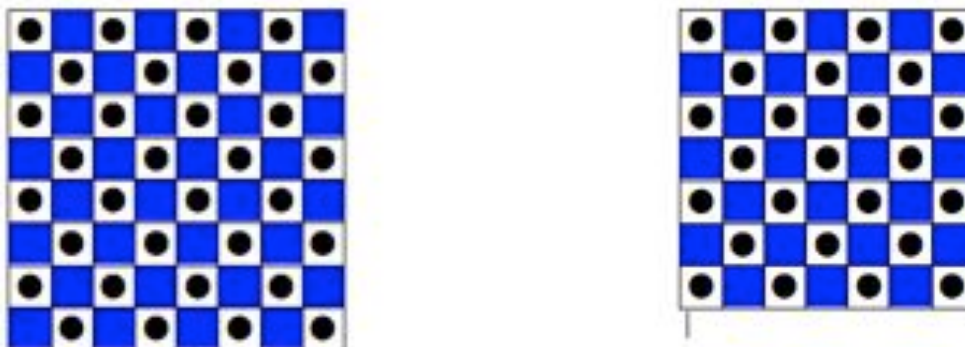


Figure 4 – En considérant le mode d'explosion *en croix*, la stratégie gloutonne construit des solutions localement maximales, régulières, à 32 caisses sur le carré de côté 8, à 25 sur le carré de côté 7.

Au vu de la figure 4, un élève-chercheur admet difficilement que cette solution, localement maximale, ne soit pas aussi globalement maximale : on a en effet vraiment l'impression que, localement, autour de chaque caisse, l'occupation est maximisée. Le meneur du problème n'a que le recours à la question « Pourquoi ne pourrait-on pas en placer 33 (ou 26) ? », conduisant à la preuve d'une impossibilité. Il est alors utile de changer de regard sur l'environnement de chaque caisse. Celui-ci était vu jusque-là comme un bloc de 5 cases – on le nomme *bloc-croix* –

comportant la case centrale supportant la caisse et les 4 cases en croix de la zone de sécurité. Peut-on partitionner ce *bloc-croix* en *motifs* plus petits – mais plus grands qu’une case – sur chacun desquels on soit sûr qu’on ne puisse pas placer plus d’une caisse, et qui permette de paver, entièrement (ou presque), le bâtiment ? Une réponse est donnée par la figure 5.



Figure 5 – Partition du *bloc-croix* en dominos, chacun d’eux ne pouvant contenir plus d’une caisse.

L’étude des entrepôts carrés 3×3 et 2×2 aide à adopter cet autre point de vue sur le voisinage d’une caisse. Ainsi, sous réserve qu’on puisse paver le bâtiment par k dominos, comme un domino ne peut contenir plus d’une caisse, on peut majorer par k le nombre de caisses dans l’entrepôt (figure 6).

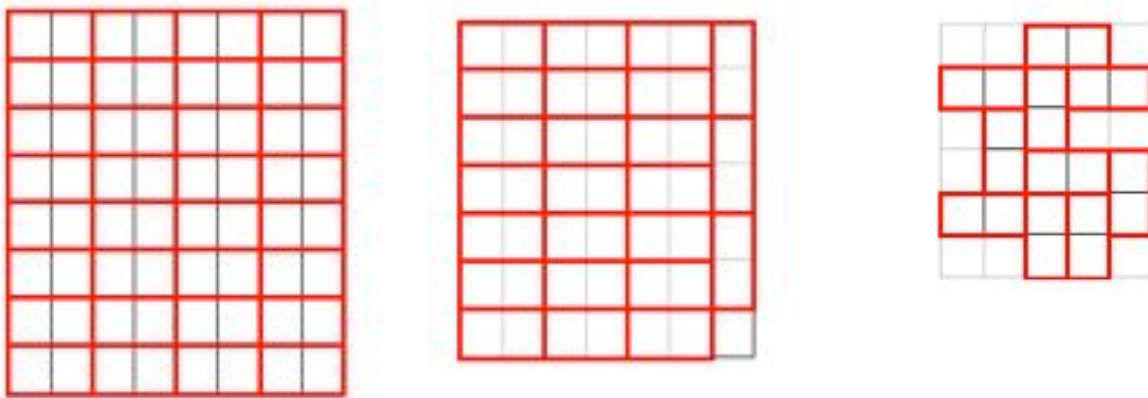


Figure 6 – D’après ce recouvrement par des dominos, on conclut que, sur le carré 8×8 , on ne peut pas placer plus de 32 caisses, sur le carré 7×7 , pas plus de $24 + 1$, soit 25 caisses (la case seule pouvant être recouverte par une caisse) et, sur l’entrepôt B , pas plus de 10 caisses.

Ce pavage est d’autant plus efficace pour la preuve de l’optimum M que cette valeur de k est égale au minorant trouvé par construction d’une solution. En effet, k étant à la fois minorant et majorant de M , on en déduit alors que $M = k$. C’est le cas pour les trois formes d’entrepôts de la figure 6.

On peut remarquer que cette *stratégie par motifs*, outre l’obtention d’un majorant du nombre de caisses, permet aussi la construction d’une solution localement maximale : il suffit en effet de placer une caisse par domino sans que deux cases voisines, de dominos voisins, ne contiennent toutes deux une caisse. Elle est donc beaucoup plus efficace que la *stratégie gloutonne*.

Pour le mode d’explosion en carré, la zone de sécurité attachée à une caisse posée sur une case est constituée des 8 cases qui l’entourent (figure 7, à gauche). Cette figure donne des solutions localement maximales à 16, pour le carré 8×8 , d’où la minoration de l’optimum par 16 ($M \geq 16$).

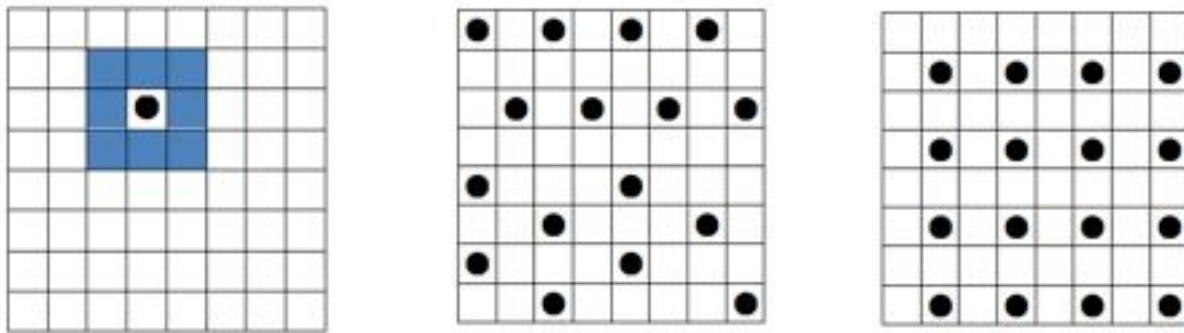


Figure 7 – L’optimum cherché, suivant le mode d’explosion *en carré* (figure de gauche) est supérieur à 16. Mais pourquoi ne pourrait-on pas en placer une dix-septième ?

La régularité de la solution de droite (figure 7), outre qu’elle permet la généralisation au carré $n \times n$, favorise la détection d’un *motif* qui se répète (voir figure 8), à savoir le carré 2×2 .

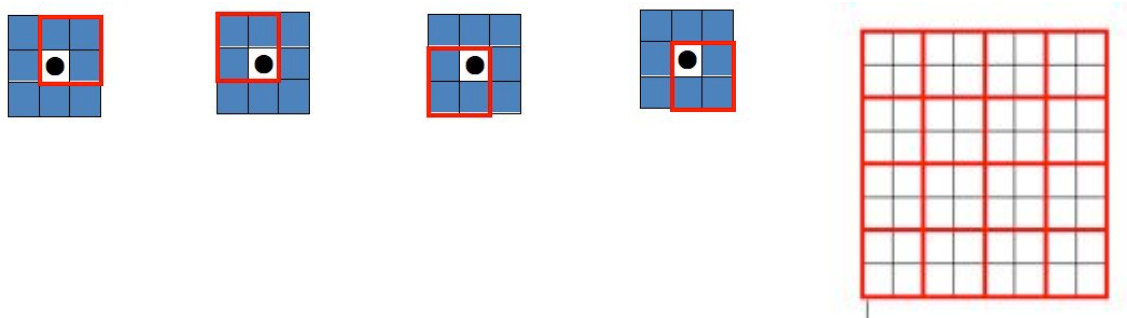


Figure 8 – Il faut regarder autrement *le bloc-carré* (zone coloriée en bleu et case centrale) pour détecter que le carré 2×2 (le *motif*) ne peut contenir plus d’une caisse.

Le pavage de la figure 8 par 16 *motifs* permet de conclure que, puisqu’on ne peut pas avoir plus d’une caisse par motif, l’optimum M est inférieur (ou égal) à 16. Donc il est finalement égal à 16.

Il ne va pas de soi de passer du *bloc-croix* au *motif domino* ou du *bloc-carré* au motif carré 2×2 . C’est un passage difficile dans la recherche du problème, que le meneur du problème doit gérer. Il doit en effet amener les élèves-chercheurs à *casser* la représentation naturelle du *bloc-croix* ou du *bloc-carré* pour arriver à celle des *motifs*. L’étude des carrés de côtés 2 et 3 peut être une aide. Comme nous allons le voir, ces motifs sont plus simples à repérer pour d’autres modes d’explosion, comme en *ligne-colonne* et en *diagonales*.

Explosion en *ligne-colonne* ou en *diagonales*

Etudions d’abord l’explosion en *ligne-colonne* sur le carré 8×8 et l’entrepôt B : suivant ce mode d’explosion, la zone de sécurité qui correspond à une case est constituée de la ligne complète et de la colonne complète, qui contiennent toutes deux cette case (voir figure 7).

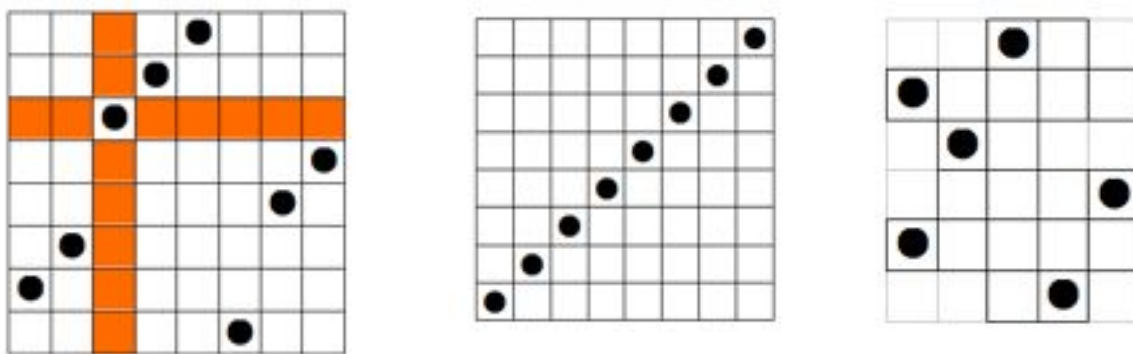


Figure 9 – Solutions localement maximales, sur le carré 8×8 et sur B (explosion ligne-colonne).

Pour le carré 8×8 , on obtient souvent rapidement la solution constituée des 8 caisses disposées sur une grande diagonale (au centre de la figure 9). Cette solution se construit dès lors qu'on commence par placer une caisse dans l'un des coins du carré. Cependant, comme pour le mode d'explosion *en croix*, la régularité de cette solution diagonale, bloque souvent les élèves-chercheurs, alors persuadés qu'ils ne peuvent ajouter une caisse de plus. C'est l'accès à d'autres solutions, moins régulières, (à gauche, sur la figure 9, par exemple) qui amène à douter que 8 soit le maximum cherché. Le meneur du problème doit insister : « Peut-être que si on dispose les pièces autrement, on pourra mettre une neuvième caisse. Prouvez-moi qu'il est impossible d'en mettre 9, quelle que soit la disposition des 8 premières. » Pour cette preuve, le *motif* pertinent à repérer, sur lequel on est sûr d'avoir au maximum une caisse, est soit la ligne, soit la colonne. Pour un entrepôt carré, on peut utiliser l'une ou l'autre ; pour le bâtiment B , on choisira la ligne qui amène à une majoration plus forte, que la colonne, puisque B comporte 6 lignes et 8 colonnes (figure 10).

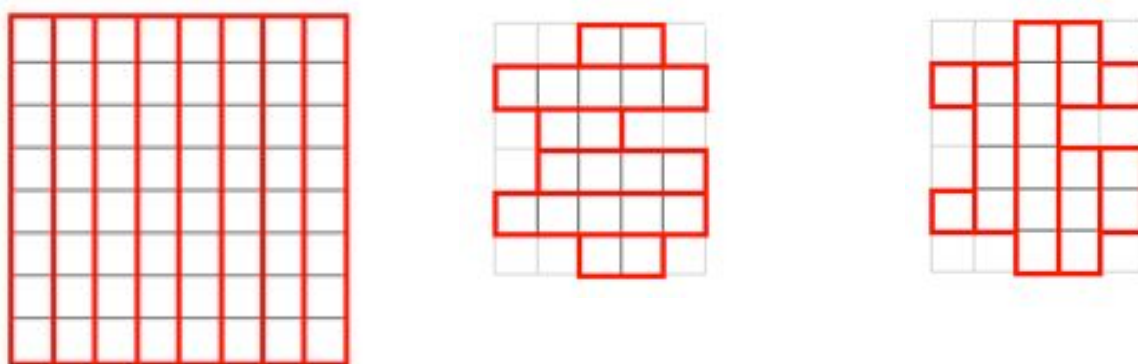


Figure 10 – Le pavage du carré 8×8 par 8 colonnes et le fait que le nombre de caisses par colonne soit inférieur (ou égal) à 1, ces deux arguments amènent à une majoration de l'optimum : $M \leq 8$. On aurait pu utiliser les lignes à la place des colonnes pour le carré 8×8 , ce qui n'est pas le cas pour B (pavé, soit par 8 colonnes, soit par 6 lignes) : l'optimum est inférieur ou égal à 8 et à 6, donc à 6.

Des deux raisonnements, exhibition d'une solution (entraînant une minoration de l'optimum par l'entier naturel k) et pavage par motifs (induisant une minoration de cet optimum par ce même k), on déduit que l'optimum est k : soit 8 pour le carré 8×8 et 6 pour l'entrepôt B . Sur un carré, l'appréhension du motif, ligne ou colonne, est plus simple dans ce cas que pour les modes

d'explosion précédents. Une des difficultés de la preuve réside néanmoins dans le fait qu'on n'ait à considérer que les lignes ou bien que les colonnes, « cassant » ainsi le *bloc-ligne/colonne*.

Concernant l'explosion en diagonales, la zone de sécurité autour d'une caisse est constituée des deux diagonales qui contiennent cette case. Comme le montre la figure 9, il est facile de trouver des solutions localement maximales, de cardinaux différents, ce qui entretient le doute sur la valeur de l'optimum et engage vers une preuve. Les solutions globalement maximales sont proposées beaucoup moins rapidement que pour le mode d'explosion *en ligne-colonne*.

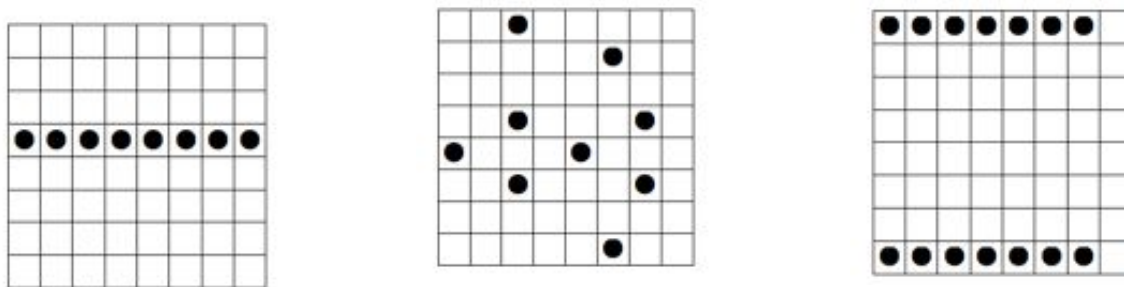


Figure 11 – Sur le carré 8×8 , avec le mode d'explosion *diagonales*, 3 solutions localement maximales à 8, 9, puis 14 caisses. Donc l'optimum M vérifie : $M \geq 14$. Et la question : « Pourquoi pas 15 ? ».

Concernant la recherche d'une majoration de l'optimum, le motif à repérer est ici *le motif-diagonale* (qui change de longueur dans ce cas, contrairement à tous les autres motifs considérés jusque ici). On peut en effet paver le carré 8×8 par 15 diagonales, de même direction (figure 12).

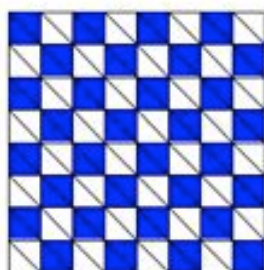


Figure 12 – Pavage du carré 8×8 par 15 diagonales, dont chacune doit contenir au plus une caisse.

Chacune de ces diagonales ne peut contenir plus d'une caisse. Donc l'optimum M cherché vérifie : $M \leq 15$. Or la meilleure minoration obtenue précédemment est : $M \geq 14$. La différence avec les modes d'explosion étudiés ci-dessus est le décalage égal à 1 entre le meilleur majorant et le meilleur minorant trouvés. Ne trouvant pas de solution localement maximale à 15 caisses, on peut tenter de prouver qu'une telle solution n'existe pas. En effet, si une telle solution existait, chaque diagonale du pavage (figure 12) comporterait une caisse, en particulier les deux diagonales-coins (figure 13). Ceci est impossible, car, étant sur une même diagonale, elles se détruiraient.

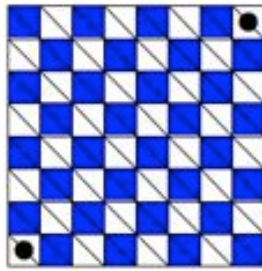


Figure 13 – S’il existait une solution à 15, les deux diagonales-coins comporteraient nécessairement chacune une caisse. Ces 2 caisses se retrouveraient alors sur une même diagonale de l’autre direction.

Le cas où $M = 15$ étant impossible, on a, à la fois, M inférieur et supérieur à 14, donc $M = 14$. Ainsi le traitement de ce mode d’explosion enrichit la panoplie des différents raisonnements mis en œuvre dans la recherche de ce problème.

En conclusion, nous proposons un déroulement possible de l’atelier avec des élèves-chercheurs.

Conclusion : une description succincte d’un déroulement de l’atelier

Le déroulement qui est proposé concerne des élèves de collège ou lycée¹ (de 12 ans à 16 ans). En première séance, le problème est présenté de façon générale (figure 1), l’enrôlement de la classe, répartie en groupes, est facilité par la mise à disposition de matériel : plateaux quadrillés en bois et jetons (figure 14). Les élèves choisissent un mode d’explosion et construisent des solutions, sur des carrés 7×7 ou 8×8 . Ils rédigent, dans le cahier de recherche du groupe, ces premiers résultats.

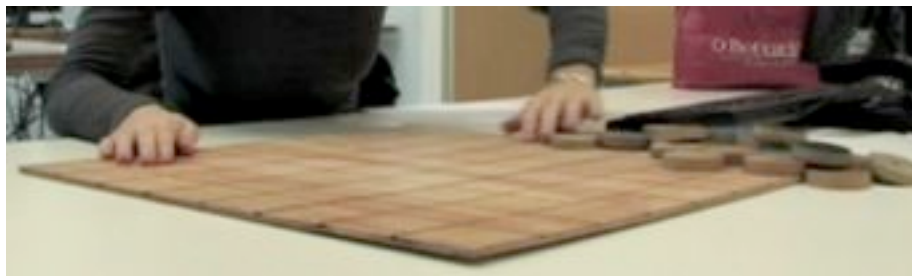


Figure 14 – Chaque groupe dispose d’un plateau carré en bois et de jetons.

La deuxième séance est consacrée à l’étude du mode d’explosion *en ligne-colonne*, sur ces mêmes carrés. Le doute concernant l’optimum devra être entretenu par le meneur du problème, suscité, d’abord, par la recherche de différentes configurations localement maximales, ensuite, par celle d’une solution à 9 pièces sur le carré 8×8 (ou d’une solution à 8 pièces sur le carré 7×7). On peut éventuellement aller jusqu’à une généralisation au carré de côté n . Lors de la troisième séance, on étudie le mode d’explosion *diagonales*, sur les carrés 8×8 ou 7×7 . Dans ce cas, le doute est

¹ Pour des élèves-chercheurs d’un niveau mathématique plus élevé, on pourrait réduire le nombre de séances, si l’on veut traiter les mêmes questions, ou bien aller beaucoup plus loin dans le problème, si l’on souhaite garder le même temps de recherche.

important sur la valeur du maximum, car on trouve facilement des solutions localement maximales de cardinaux différents (figure 11). Cette incertitude facilite l'engagement dans une preuve. Un récapitulatif des divers types de raisonnement mis en œuvre peut être proposé au début de la quatrième séance. Celle-ci se poursuit par l'étude du mode d'explosion *en carré*, puis *en croix* à la cinquième séance. L'idée du pavage par *motifs* peut être suggérée par l'étude des carrés 2×2 ou 3×3 , ou encore par la construction d'une solution généralisable au carré $n \times n$. La dernière séance est consacrée à la préparation du séminaire. Le cahier de recherche est complété à chaque séance.

Références bibliographiques

- Gandit, M., Giroud, N. & Godot, K. (2011) Les situations de recherche en classe : un modèle de situation pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. In M. Grangeat (Ed.), *Les démarches d'investigation dans l'enseignement scientifique. Pratiques de classe, travail collectif enseignant, acquisitions des élèves* (p. 35-49). Lyon : Ecole Normale Supérieure.
- Giroud, N. (2011) Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe. Thèse de doctorat. Université de Grenoble.
- Grenier, D. & Payan, C. (1998) Spécificité de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1) (59-100).