L'articulation des contenus et des moyens et leur double nature mathématique et didactique dans l'enseignement des mathématiques et son évolution

François Conne

Appendice

```
10  DIM a(2), b(2), c(2), d(2), e(2), f(2), p(2)
20  DATA .917, -.224, .332, .867, .159, -.029, .8
30  DATA -.178, -.153, .143, -.191, .93, .18, 1
40  FOR j=1 TO 2
50  READ a(j), b(j), c(j), d(j), e(j), f(j), p(j)
60  NEXT j
70  x=0
80  y=0
90  FOR n=1 TO 20000
100 pk=RND
110 IF pk<=p(1) THEN k=1 ELSE k=2
120 newx = a(k)*x + b(k)*y + e(k)
130 newy = c(k)*x + d(k)*y + f(k)
140 x = newx
150 y = newy
160 IF n > 10 THEN LINE (x*300, 260-y*220)-(x*300,
    260-y*220)
170 NEXT n
180 END
```

L'articulation des contenus et des moyens et leur double nature mathématique et didactique dans l'enseignement des mathématiques et son évolution.

par François Conne
Etoy, Suisse
professeur invité U. de M. et U.Q.A.M.

Avertissement au lecteur

Dans cet article, je définis de façon très étroite les mots «innovation pédagogique» et «refonte des contenus». Le lecteur voudra bien comprendre qu'il ne s'agit là que d'une commodité de langage, qui n'a de valeur que dans ce texte, où j'avais besoin de ces termes pour marquer un contraste.

I. Les apparences

C'est par l'entremise d'innovations des moyens et de refonte des contenus que le public est informé de l'évolution de l'enseignement. Rappelons succinctement que trois aspects sont susceptibles de changements à l'école: les structures, les contenus enseignés, les méthodes et les instruments pédagogiques utilisés. Seuls ces deux derniers aspects seront envisagés ici puisqu'il sera exclusivement question d'enseignement des mathématiques. Je commencerai par des considérations générales, mais dans une seconde partie de ce texte je présenterai, d'une façon que j'espère accessible parce que concrète un exemple de ce qui lie contenus et méthode.

Innovation

L'enseignement des mathématiques a deux facettes. Il y a d'un côté un effort pour instruire les élèves, c'est-à-dire les doter d'instruments de pensée et leur apprendre le maniement d'appareils couramment utilisés dans les traitements mathématiques. Je réserverai l'expression d'innovation pédagogique que pour désigner les ajustages de **l'instruction mathématique**. L'innovation, dans cette acceptation, procède toujours par une redéfinition des compétences à développer chez les élèves, le but poursuivi est l'amélioration du rendement de l'instruction. Le côté innovateur est marqué dans la majorité des cas par le fait qu'elles recourent à de nouveaux matériels pédagogiques, plus ou moins sophistiqués, ou du moins qu'elles promeuvent de nouvelles utilisations d'instruments déjà existants. Dans l'école primaire, on a ainsi vu depuis les années 60 plusieurs innovations se suivre: l'adoption des règlettes Cuisenaire (méthode des nombres en couleur), puis l'apparition dans les classes du matériel Dienes et de ses dérivés, puis les fiches des classeurs de mathématiques modernes. Mais eux, à leur tour, sont en passe de devenir caduques et seront peut-être bientôt supplantés par les didacticiels informatiques, jusqu'à ce que, par la suite, d'autres nouveautés s'imposent. Les matériels cités en exemple jusqu'ici étaient tous des matériels conçus pour l'instruction, et s'accompagnent de méthodologies précises. Mais d'autres matériels pédagogiques sont déviés de leur usage dans la vie pratique et professionnelle. Surtout dans le cadre des classes préprofessionnelles. Ainsi tous les nouveaux supports électroniques que sont les calculettes, les microordinateurs, certains logiciels complexes, et même un système informatique, comme logo, issu en droite ligne des langages de programmation LISP utilisés en intelligence artificielle.

Dans le cas de l'innovation pédagogique, les contenus à enseigner sont considérés comme clairement définis et choisis au préalable. Ceci fait que les propositions d'innovation paraissent relativement faciles à intégrer dans l'enseignement et ne touche que des aspects de méthode. Ce fait joue contre les novateurs. En effet, ceux-ci, dans la plupart des cas, ne se contentent pas de proposer de nouveaux outils, mais les accompagnent de toute leur réflexion théorique et méthodologique. Que l'on pense ainsi aux textes de C. Gattegno, et de ses disciples, à propos des nombres en couleur, ou ceux de Dienes, croire même au credo de Papert dans son ouvrage «Le jaillissement de l'esprit». Cependant force est de constater que cet aspect de leurs propositions n'a qu'une diffusion très superficielle et éphémère dans le système scolaire, et finalement, «ne passe pas la rampe». Comme si l'école ne prenait que le «hardware» de l'innovation.

Refonte des contenus

La seconde facette de l'enseignement des mathématiques est d'assurer aux jeunes un minimum de connaissance mathématique, ce qui est en jeu ici, c'est l'accès à une culture scientifique. J'appellerai alors **refonte de l'enseignement les ajustages culturels de l'enseignement mathématique**. Ici c'est la matière enseignée elle-même qui est en cause et pas seulement le bon usage de tel ou tel instrument, fût-il un instrument de pensée. L'exemple type d'une refonte est celui des «mathématiques modernes» où on a changé notablement le contenu des notions présentées et le vocabulaire des cours de mathématiques à l'école, ceci afin de l'adaptater aux conceptions modernes des mathématiciens. En fait cette réforme a deux volets. Le premier fut une **mise à jour des programmes,** cette phrase peut être considérée aujourd'hui comme terminée (en fait depuis les années 70-75). La seconde phase, actuellement encore en cours, consiste à un remaniement plus spécifique encore, c'est la **mise au goût du jour** des activités scolaires, c'est-à-dire le renouvellement de tout le stock de problèmes, d'exercices et d'activités diverses proposées en classe. Mais la refonte des mathématiques modernes n'est bien entendu pas la dernière. Les changements que le paysage scientifique tout entier a connu depuis 20-30 ans me font présager que de nouveaux ajustements seront bientôt nécessaires.

De façon symétrique, toute refonte des contenus suppose une innovation des moyens, soit déjà envisageable, soit à venir. On se souviendra par exemple de l'insistance avec laquelle les tenants des mathématiques modernes disaient que leur réforme allait immanquablement s'accompagner de nouvelles méthodologies. De même les propositions actuellement en vogue concernant «l'enseignement par les problèmes» s'accompagnent de multiples considérations quant aux techniques d'animation. Mais que restera-t-il de ces recommandations en regard des catalogues de problèmes (± ouverts) qui s'empilent déjà dans nos bibliothèques?

Innovation et refontes sont aussi liées que méthodes et contenus. Tout le monde est d'accord là-dessus, rénover les méthodes a des répercussions sur les contenus et vice versa. Est-ce que cela veut dire qu'il suffit, pour agir sur l'évolution de l'enseignement, de ne s'occuper que d'un seul de ces deux aspects? Suffit-il d'innover pour qu'automatiquement une refonte appropriée s'ensuive à propos des contenus? Ou bien encore suffit-il de repenser les contenus pour que du coup un niveau d'instruction authentique soit restauré? À lire et examiner les projets de rénovations de l'enseignement des mathématiques de ces dernières années, il semble que les novateurs le pensent, et y croient avec une naïveté sans cesse renaissante. À examiner les suites que ces efforts ont connu, on doit se rendre compte que ceci est une vaine prétention. Ainsi l'alternance régulière entre refontes et innovation montre que l'on n'arrive pas à coordonner instruction et accès aux connaissances, il faut sans cesse réajuster le tir. Dans un récent article (**Utilité et intérêt de la Didactique pour un professeur du collège**, Petit «x» no 21-1989), Guy Brousseau décrit bien comment le système d'enseignement s'écarte des projets initiaux d'innovation et de refonte. Il est clair que les rénovateurs ne contrôlent pas l'usage qui sera fait de leurs propositions et le vivent souvent comme une sorte de «trahison» de l'esprit de leurs réformes.

Nous devons donc admettre que l'école a une façon d'évoluer que nous ne connaissons que très mal. Déprenons-nous aussi des images d'Epinal concernant l'école. Non, l'innovation ou la refonte ne sont pas des mouvements spontanés, nés du seul esprit de clairvoyance d'individus exceptionnels et originaux! Nous n'avons que peu de chances de modifier quoique ce soit aux pratiques d'enseignement traditionnelles en se contentant d'agir séparément sur l'un ou l'autre pôle que sont méthodes et contenus. Nous avons affaire à un **système dynamique** et pas seulement à un tout équilibré mais amorphe: ce système, tel un organisme, transforme les nouveaux éléments qu'il assimile et les adapte à lui plus qu'il ne s'adapte à eux.

II. Chercher au-delà de ces apparences

De la prise de conscience de ce peu de maîtrise concernant l'enseignement des mathématiques, et en particulier du désenchantement procuré par la refonte des «mathématiques modernes» est né ce mouvement de pensée pédagogique, appelé Didactique des Mathématiques, qui se consacre à étudier très précisément l'enseignement des mathématiques, et les conditions scolaires auxquelles il est soumis. Les chercheurs en «didactique des mathématiques» ont pour but de comprendre les phénomènes à l'oeuvre en classe de mathématique et d'examiner de ceux-ci ceux qui sont spécifiques à la discipline enseignée. Leur espoir est de trouver par quel biais agir pour changer et améliorer l'enseignement des mathématiques, mais ces chercheurs ne sont pas des innovateurs. Tout ce qui se rapporte à l'enseignement scolaire des mathématiques entre dans le champ d'investigation des didacticiens: étude comparative et historique des manuels d'enseignement, des méthodes, des matériels didactiques, des programmes ou des plans d'études, etc... L'idée fixe de ces chercheurs est que seule **l'étude de l'intérieur** du système d'enseignement permettra une meilleure maîtrise de l'évolution de l'enseignement des mathématiques. Ils ne se satisfont pas de ces projets de rénovation qui mettent alternativement l'accent sur des moyens externes d'ajustage de l'instruction ou des contenus mais cherchent **comment traiter ensemble** ces **deux** aspects spécifiques à l'enseignement des mathématiques.

Ainsi, en écrivant avec soin les pratiques des enseignants, les didacticiens constatent que l'innovation ou la refonte **ne sont pas les sources** du renouvellement de l'enseignement des mathématiques, elles ne sont au contraire que des manifestations extériorisées de mouvements internes qui les précèdent de loin. Ceci explique aussi que dans certains cas innovation ou refonte paraissent éphémères: lorsqu'enfin ces mouvements ont trouvé une forme institutionnelle, qu'elles sont reçues largement par l'école et le public, ils s'avèrent être «en bout de course». Ceci a eu lieu en Suisse Romande avec les «mathématiques modernes». Que l'on considère que ce mouvement parti l'année 1958 n'a trouvé son expression dans les manuels d'enseignement primaire qu'en 1973, soit quinze ans après, alors que, dans l'essentiel, les limites de cette refonte étaient déjà connues! Mais un examen rétrospectif des mouvements de réforme de l'enseignement des mathématiques montre que la réforme des mathématiques modernes doit être considérée plus comme l'issue d'un vaste courant de rénovation, auxquels d'éminents mathématiciens ont pris part, que comme le début d'une ère nouvelle pour l'enseignement des mathématiques. C'est avec la réforme des mathématiques modernes que les mathématiciens ont commencé à se désintéresser des questions d'enseignement; désaffection qui, je dois le dire, se fait aujourd'hui cruellement subir!

Si on examine de la même façon les mouvements d'innovation pédagogique, on aboutit à des résultats analogues. Par exemple, il en fut de même avec l'éphémère adoption dans les classes des nombres en couleur. On s'aperçoit, lorsqu'on examine rétrospectivement les idées pédagogiques de l'époque, que cette méthode était une variante particulière d'une intention commune à de nombreux enseignants et pédagogues: trouver un matériel pédagogique, une méthode d'enseignement des nombres garantissant pour tous un apprentissage optimal. Cette croyance en **l'existence d'une méthode unique** nous paraît aujourd'hui très naïve. Et les chercheurs ne s'engagent plus dans une telle voie. Enfin dernier exemple, les méthodes «d'enseignement programmé» qui n'ont pas «pris» lorsqu'elles étaient présentées il y a 15-25 ans, nous reviennent maintenant avec un emballage neuf, les didacticiels, jusqu'à ce que l'on trouve des usages plus judicieux de l'informatique....

III. Un exemple d'étude de didactique
Un exemple particulier pour une question générale

Pour illustrer ce que j'entends par l'expression: «l'étude de l'intérieur du système d'enseignement», je vais vous proposer un exemple. Celui-ci se rapporte à ce qu'on appelle «atelier mathématique», c'est un genre nouveau d'activité mathématique à faire en classe qui se trouve à mi-chemin entre la résolution de problèmes traditionnels et la résolution de problèmes ouverts. La précision et la spécificité de cet exemple, loin d'être anecdotique, illustre une des exigences qui s'impose à toute étude de didactique: celle de rendre compte le plus exactement possible de la façon dont les choses se passent à l'école, sans tomber dans le sempiternel travers pédagogique consistant à dire comment les choses pourraient ou devraient se passer. D'autre part, aussi particulier soit-il, cet exemple se rattache à une question centrale pour l'enseignement des mathématiques: **celle de la compréhension des mathématiques**. Cette préoccupation est une constante dans toutes les discussions, tous les écrits et toutes les réalisations pédagogiques, concernant cet enseignement.

Certes chaque époque aborde ce difficile problème autrement, en fait une question essentielle ou au contraire un aspect seulement partiel, et les enseignants eux-mêmes n'ont pas toujours eu le même souci de faire comprendre les mathématiques à leurs élèves. «Étudier l'enseignement de l'intérieur» c'est tout d'abord connaître les différentes options qui se sont succédées historiquement, mais cela ne suffit pas, tout comme il ne suffit pas de ne considérer pour cette question que le point de vue des élèves. Regardons plutôt les choses telles que l'enseignant les vit dans sa pratique quotidienne. Celui-ci rencontre dans son travail un certain nombre de difficultés, de problèmes auxquels il doit apporter des réponses, avec, selon les cas, plus ou moins de bonheur, il n'a pas souvent le loisir d'étudier longuement la situation à laquelle il est confronté, il doit agir sur le moment. Ce que je dis est banal, ce sont des situations que chacun rencontre dans la pratique de son métier. Si on examine le type de réponses apportées, ou plus justement la façon dont les enseignants s'engagent à traiter de ces difficultés d'enseigner les mathématiques, on s'aperçoit que, d'une époque à une autre, les tendances changent, les enseignants cherchent à faire face autrement aux exigences de leur travail. Des idées sont proposées, circulent bien avant qu'elles ne soient consignées en méthodes précises. Certaines idées connaissent des échos tout particuliers et semblent bien convenir au moment. Tel est le cas ces temps-ci avec l'idée **d'ateliers mathématiques**. Cette idée est assez bien reçue pour avoir été adoptée même dans la rédaction la plus récente des manuels de 5ᵉ et 6ᵉ primaire, en Suisse Romande.

Compréhension et atelier mathématique

Revenons alors à la compréhension, que peut-on escompter à son sujet? Devrait-elle s'imposer d'un coup à tous, par le simple fait que le maître sache bien présenter son affaire ou bien est-ce quelque chose qui n'est pas immédiat mais résulte d'un engagement actif de notre pensée? Selon les époques, selon les attentes que l'on a de l'école, selon ses conceptions on répondra différemment à une telle question. Aujourd'hui les conceptions dominantes veulent que la compréhension ne soit pas un donné immédiat mais qu'elle se gagne par un effort de réflexion. Une telle idée peut paraître plus adéquate à la situation réelle de la classe où force est de constater que certains «pigent» plus vite que d'autres. Elle laisse peut-être un espoir à celui qui a de la difficulté et l'encourage à travailler même s'il ne comprend pas tout de suite. Mais elle est aussi sans doute plus «confortable» pour le maître qui n'est pas acculé à trouver la présentation parfaite qui par coup de baguette provoquera clareté et compréhension dans les esprits de chacun. Si donc tel est le cas, si la compréhension tient à l'activité de nos méninges, il y a alors quelques conditions qui la favoriseront. C'est ce que l'on veut dire lorsqu'on demande aux enseignants de trouver des situations «motivantes» pour les élèves qui «piquant leur curiosité» suscitent immanquablement chez eux la recherche de l'explication, les mènent alors de manière agréable à la compréhension et leur assurent d'apprendre. Alors pour l'enseignant, il ne s'agit plus de donner l'explication qui éclairera subitement tous les esprits, mais c'est une toute autre animation qu'on attendra de lui. Il s'agit pour lui de mettre un peu de spectaculaire dans la leçon de mathématiques. Le lecteur fera facilement l'analogie de ce type de leçon avec les démonstrations d'expériences en physique ou en chimie, voire même les travaux pratiques menés dans le cadre de ces disciplines. C'est exactement ce que veut suggérer le mot «d'atelier mathématique». Mais en mathématiques, ce n'est pas le jeu avec les phénomènes naturels qui crée l'événement mais plutôt celui des symboles et de leurs rapprochements (dessins, schémas, écritures codées, calculs, etc. ...). Ceci met la pensée à très forte contribution puisque les symboles ne fonctionnent pas d'eux-mêmes mais seulement au travers de ce qu'ils nous évoquent. En mathématiques il n'y a pas de spectaculaire, il y a de l'inattendu, c'est notre propre pensée qui en vient à se surprendre elle-même. Si cela se fait, alors cela nous procure une intrigue très grande.

Étude des propriétés de la multiplication à travers l'examen de la table de multiplication

Pour mon propos, je m'attacherai à l'étude d'une propriété de la multiplication. Que peut-on dire, par exemple, des produits 56×132 et 96×77?

Si on effectue les produits, on obtient deux fois le même résultat (7392). Mais on peut se passer de ces calculs et préférer décomposer les facteurs de ces produits, en facteurs plus élémentaires: $56 \times 132 = (7 \times 8) \times (11 \times 12)$. En regroupant autrement ces facteurs on aura: $(8 \times 12) \times (7 \times 11)$ soit 96×77. (Une décomposition en facteurs premiers aurait aussi bien suffi, mais, comme nous le verrons par la suite, ce n'est pas cette décomposition qui est ici illustrée).

Nous trouvons notre propriété abordée lors d'un atelier proposé en 6[e] primaire. Un atelier, c'est un peu comme une mise en scène. Ici le rideau s'ouvre sur un décor qui vous présente la table de multiplication.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

Les premières scènes consistent à examiner cette table; venons-en tout de suite à la partie qui nous concerne plus particulièrement. On demande ceci aux élèves: «choisis un rectangle (ou carré) de produits de la table de multiplication, puis multiplie entre eux les nombres des angles opposés». Exemple:

56	63	70	77
64	72	80	88
72	81	90	99
80	90	100	110
88	99	110	121
96	108	120	132

56×132
77×96

Consigne:

Répète plusieurs fois l'expérience avec des rectangles (carrés) de dimensions différentes. Que constates-tu? Trouves-tu une explication?

Vous avez reconnu la propriété que je vous avais présentée! Elle est ici englobée dans toute une expérience sur la table de multiplication (qui est un objet symbolique considéré comme s'il était quelque chose de concret). Toute cette introduction donne une signification à cette égalité en la travestissant en une expérience qui va provoquer la surprise. Aucune raison de penser à priori qu'une relation mathématique lie ainsi les nombres inscrits dans les quatre coins d'un rectangle. Mais cette façon de présenter la leçon a aussi un autre avantage, celui de donner une tâche bien précise et facilement compréhensible aux élèves et de focaliser un moment l'attention de tous sur un élément surprenant.

Hélas, les choses ne sont pas si simples. À procéder ainsi, on court le risque de dévier du but que l'on s'est assigné.

Mathématiquement parlant, on veut illustrer la combinaison de deux propriétés fondamentales de la multiplication. Tout d'abord que tout nombre peut être décomposé en produits de facteurs. Ensuite que, par association et commutativité, on peut regrouper à loisir ces facteurs. Mais dans cette expérience, on donne deux motifs d'étonnement bien distincts:

1) Pourquoi le produit des nombres est-il égal?

2) Pourquoi la considération d'un rectangle de la table de multiplication nous donne-t-elle automatiquement une telle égalité (lorsqu'on considère deux à deux les produits des coins opposés du rectangle)?

Cette considération de «rectangle» peut venir obscurcir encore plus le mystère, ou, au contraire, aider à l'élucider! Tout dépend de la façon dont l'élève comprendra (justement!) ce que vient faire la table de multiplication dans cette expérience. La table a pour fonction d'indiquer, «d'un simple coup d'oeil», la décomposition des facteurs à considérer: 56 est inscrit sur la case correspondant à 7×8, 132 sur celle de 11×12, 96 sur celle de 8×12 et 77 sur celle de 7×11. Donc 56×132 vaut $(7 \times 8) \times (11 \times 12)$ et on retrouve l'explication de tout à l'heure. Si l'élève devine qu'on attend de lui cet usage de la table alors tout ira bien, mais s'il reste fermé à cette suggestion...? On le voit donc, **l'idée didactique** de cette illustration est bien ténue!

Mais ceci n'est qu'une difficulté, une autre, plus grossière se présente encore, au tout début de l'expérience. J'ai pu l'observer dans une classe, voici le récit de ceci.

Dans leurs réponses préliminaires à cette phase de l'atelier, il ressortait que les élèves pensaient surtout au calcul de la multiplication, et en particulier s'occupaient de savoir si leur réponse était juste, sans prendre en compte pour lui-même le nombre qu'ils avaient trouvé. Ceci va faire dévier tout l'atelier. Le maître prie les élèves de découper 3 rectangles de dimensions différentes dans des tables de multiplication distribuées sur des feuilles volantes ronéotypées. Puis d'effectuer par écrit, en colonne, la multiplication que nous avons considérée, puis de comparer à chaque fois les résultats obtenus. Les élèves se trouvent alors priés de faire des calculs qui ne leur paraissent pas très faciles, mais néanmoins faisables. Ils ne sont pas très assurés d'obtenir du premier coup un calcul correct. Ils calculent, s'appliquent, comparent leur résultat, constatent alors qu'il y a égalité dans les 3 cas. **Mais ils n'éprouvent aucun étonnement! Au contraire les voilà rassurés.** Ils prennent l'obtention de ces égalités inattendues comme une confirmation de l'exactitude de leur calcul. Un seul élève a fait une erreur de calcul et ne constate pas l'égalité. Ses camarades le raillent et lui disent «si tu n'as pas trouvé l'égalité, c'est que tu as calculé faux». Il se défend et déclare alors: «mais qui vous dit que ça doit être égal?» Ironie du sort, celui qui en vient à poser la question essentielle est aussi celui qui s'est trompé, et personne ne l'écoute.

Cet exemple nous montre que l'expérience aura joué à contre sens. La découverte de la propriété devait ouvrir le questionnement, là elle laisse l'élève à son autosatisfaction de calculateur efficace. Gageons que ces élèves n'étaient plus si naïfs, qu'ils connaissaient trop les «ficelles» de l'enseignant, et plaçons-nous en effet dans leur rôle: on leur dit qu'ils auront quelque chose à constater. Ils comprennent que s'ils s'acquittent de leur tâche, ils vont recevoir «un signe». Ils ont tôt fait de découvrir l'égalité et en restent à cette concordance qu'ils imaginent bien être une de ces malices que l'enseignant sait leur réserver.

Il s'avère donc qu'il n'est pas toujours aisé de créer une surprise. Or nous avons vu que les pédagogues tablaient sur cet effet de surprise pour engager les élèves sur la voie de la compréhension. Alors si l'effet de surprise s'avère aussi difficile à obtenir que la compréhension, tous les efforts seront vains. Mais avant que d'envisager une telle issue, demandons-nous si le maître a bel et bien mis tout le soin voulu à son animation. Voici quelques mesures qu'on pourrait envisager comme leçon de cette malheureuse expérience.

A. Peut-être aurait-il fallu être plus discret que la consigne et ne pas annoncer à l'avance qu'il y aura une surprise au bout du calcul. Ainsi l'étonnement serait-il venu de lui-même. L'élève n'étant plus aussi assuré qu'il s'agissait là d'un effet voulu par le maître aurait envisagé les choses autrement, j'entends déjà sa question: «M'sieur est-il normal que ça donne toujours égal?»

Mais il faut voir aussi qu'en opérant de la sorte (ne pas annoncer la surprise) on court un risque tout aussi sérieux. Celui de voir les élèves calculer, écrire leur résultat et s'en tenir là.

B. Peut-être le professeur aurait-il été plus habile en demandant aux élèves d'utiliser une calculette. De telle sorte que l'obtention d'un résultat correct ne soit pas en cause, et que la tâche des élèves **commence** vraiment par le constat. Dans une telle perspective on aurait pu aussi demander aux élèves d'effectuer une grande série de calculs de sorte que l'égalité ainsi répétée les frappe vraiment.

Là, à nouveau rien n'est acquis d'avance. L'étonnement sera peut-être provoqué, mais comment expliquer? Ici la machine à calcul (tout comme l'effectuation de celui-ci par une procédure écrite) est un écran à la compréhension. Tout se joue lorsqu'on comprend que l'égalité peut être établie par un seul jeu d'écriture, et que les seuls calculs à effectuer ne sont pas des produits mais au contraire des décompositions de nombres en facteurs.

C. On aurait aussi pu essayer de faire comme je vous avais présenté la propriété. D'abord demander aux élèves de deviner la relation que l'on va trouver. De telle sorte que les élèves ne se contentent pas de constater qu'une relation existe entre les produits obtenus mais se demandent vraiment pourquoi ça donne une égalité et pas autre chose.

Mais là la difficulté est qu'il est impossible d'empêcher quiconque de calculer dès qu'il s'est mis cela en tête. Et on le comprend bien, c'est pour le moins idiot de ne pas rechercher toutes les informations que l'on peut tirer des données du problème.

Donc si nous avons pu envisager trois modalités différentes dans la présentation de cet atelier, aucune n'est à même de nous assurer le déroulement souhaité! Il y aurait sans doute d'autres moyens à envisager, peut-être meilleurs. Nous devons cependant conclure que l'étonnement et la recherche sont bien difficiles à mobiliser, aussi difficile que d'assurer à coup sûr la compréhension.

Conclusion

Ce que montre l'exemple c'est que, didactiquement parlant, les mots utilisés: compréhension, découverte, curiosité, recherche d'explication, surprise, motivation, etc.... décrivent tous une seule et même réalité, c'est-à-dire **l'activité et le mouvement de la pensée.** Ces phénomènes sont distincts, mais restent liés, et si on imagine aisément tout le chemin qui sépare l'étonnement de la compréhension, on ne peut pas non plus soutenir que dans la pensée la compréhension soit toujours précédée de l'étonnement. Un individu ne s'étonne que par rapport aux idées qu'il se fait des choses, par rapport à une compréhension qu'il a d'elles, lui dictant comment elles devraient être ou se comporter. Il a donc selon sa compréhension telle ou telle attente, est capable d'anticiper tel ou tel événement. La surprise viendra de ce qu'il s'est trompé dans sa prévision, ou alors de ce qu'il se rendra tout d'un coup compte qu'il n'arrive pas à prévoir car il n'a aucune idée de ce qui est en cours. S'il se trompe, peut-être voudra-t-il comprendre d'où vient sa maladresse, ou au contraire voudra-t-il en savoir plus sur les choses qu'il étudie? S'il s'avère heureux dans ses prévisions, voudra-t-il peut-être comprendre pourquoi il a pu être aussi perspicace, ou au contraire voudra-t-il éprouver sa perspicacité à d'autres situations? etc.... Il y a donc un mouvement général, une continuité de la progression de la connaissance elle-même, que ponctuent des moments de surprise, de compréhension, de doute, de recherche, etc....

Faisons le point. Ce qui importe à l'enseignement c'est la progression des élèves vers une plus grande connaissance mathématique. Ce que l'enseignant doit assurer c'est que ses élèves jouent une part active dans la réalisation de ce projet. Intérêt, compréhension, inattendu, doute, etc ... tous ces phénomènes sont des **ponctuations** de la progression de la connaissance elle-même, mais, ce sont aussi **des signaux** nous indiquant que la pensée des élèves est en travail. Dans l'échange pédagogique, le maître leur fait jouer tour à tour trois rôles.

1°. Tout d'abord pour l'observation. Le maître ne peut pas regarder ce qui se passe dans la tête de ses élèves. Ce sont donc pour lui des signaux très utiles pour savoir où les élèves en sont dans leurs réflexions, par rapport à leur travail. **De ce point de vue le plus grand défi posé au maître, c'est de savoir percevoir les signaux qu'il n'a pas provoqués et de ne pas se croire obligé de toujours les provoquer.**

2°. Car les enseignants ne se privent pas, par ailleurs, d'efforts pour provoquer l'inattendu, la surprise, la compréhension. Il y en a même qui identifient leur rôle à cela. Il s'agit en effet pour eux de mobiliser les esprits, de procurer l'énergie nécessaire à la réflexion, d'accélérer aussi la pensée. On connaît bien l'excitation et l'impatience que procurent l'intrigue tout autant que le sentiment de comprendre.

3°. Enfin ce n'est pas à un niveau personnel seulement que ces phénomènes jouent. Surprise, compréhension, etc.... ont une intensité telle qu'ils captent, canalisent et focalisent les énergies de tout un groupe, dans une certaine direction. Sont donc aussi en jeu des phénomènes interpersonnels très importants.

Savoir à tout moment où en est l'échange pédagogique requiert une grande finesse et une disponibilité extrême de la part des enseignants. Sans cesse ils sont devant des décisions à prendre sur le vif: laisser aller les choses ou au contraire les provoquer? comment s'assurer que la direction prise sera la bonne? que faire sinon pour rétablir le cours souhaité des choses? laisser les élèves suivre leur pensée ou au contraire les ramener tous à une réflexion identique? etc... Il est bien naïf de croire que nous disposons de commandes sûres et de contrôle efficace de ces choses. Au contraire, il est plus intelligent de compter sur une bonne marge d'imprévisibilité, d'erreur, et examiner les correctifs envisageables.

Mais ceci demande alors de solides points de repères, d'avoir une ligne claire. Or celle-ci ne peut être trouvée que dans la connaissance mathématique qui fait l'objet de la leçon. Dans l'exemple cité, le thème de la leçon était la décomposition des nombres en produits de facteurs. On doit amener les élèves à ce type de considération, puis à ce qu'ils prennent conscience qu'il y a là quelque chose à savoir. Le maître en outre dispose d'un temps limité pour atteindre cet objectif. **Mais il ne peut pas prévoir ni quand, ni comment, ni même sous quelle forme ceci va venir à l'esprit de ses élèves.**

Je dois expliciter cette dernière affirmation, car elle montre que la pédagogie des ateliers risque de commettre la même erreur que la refonte des mathématiques modernes. Reprenons l'exemple du numérique. Un nombre très grand de situations très variées, et pour certains d'entre elles très étrangères les uns aux autres, se ramène à un petit noyau de propriétés fondamentales très simple à décrire. Ceci peut soutenir deux illusions. D'une part celle qui consisterait à penser que la connaissance de ce noyau suffirait à assurer la connaissance numérique. Ici réside l'erreur de la refonte des mathématiques modernes. D'autre part, celle qui consisterait à penser que ces propriétés fondamentales sont facilement identifiables et reconnaissables dans les situations pratiques, et que dès lors le simple fait de les retrouver partout assure leur caractère fondamental. Ici nous rejoignons la naïveté de l'atelier que nous avons pris en exemple. J'ai montré tout ce qui faisait écran à cette identification.

Non seulement il apparaît que les notations et les significations qui leur sont attribuées sont d'une importance primordiale, mais encore que les techniques s'appuient toutes, autant sur les propriétés numériques fondamentales, mais implicites, que sur les caractéristiques apparentes, en surface, des notations. Le lecteur pourra songer à ce propos aux procédés de calculs qui lui sont familiers: telle notation écrite (en colonne), tel autre calcul mental, et à les comparer à des procédés peu familiers voire méconnus de lui, boulier, disposition peu usitée des calculs. Il se demandera d'où peut bien provenir ce sentiment d'étrangeté, de mystère qu'il a, alors que tous ces procédés mettent en oeuvre les mêmes propriétés structurelles. Dire ceci, c'est dire que deux connaissances sont à construire et à départager: la connaissance des instruments mathématiques et celle des propriétés mathématiques que ces instruments exploitent.

Ainsi donc en classe il y a tout un travail qui consiste à identifier et reconnaître les propriétés en jeu et à les attribuer soit à l'instrument, soit au contenu. Il faut bien avouer que nous ne connaissons que très mal ce qui est à l'oeuvre dans ce travail, tant du point de vue cognitif (de l'élève qui apprend) que du point de vue didactique (de l'enseignant). Ainsi ne sachant pas «à quel détour» l'élève va prendre conscience de ces éléments en jeu, nous sommes réduits à tâtonner dans l'animation de l'atelier. Le maître est donc appelé à travailler autour du thème de sa leçon en cherchant à multiplier les occasions de compréhension sans se figer dans telle ou telle façon de procéder dans cette présentation. Pour bien maîtriser ceci, une connaissance très précise du thème et une analyse aussi complète que possible des formes que la propriété peut revêtir sont donc nécessaires. Le contenu, la connaissance, ces modalités de développement doivent être au centre des préoccupations. Les méthodes, les façons d'animer, les moyens par lesquels y parvenir, les instruments à utiliser tout ceci ne vient qu'en second lieu. On se rappellera de l'exemple et de la question de savoir s'il était bon de laisser les élèves utiliser ou non leur calculette. Ce type de question est secondaire, cela n'empêche pas qu'elle puisse être dans la gestion de travail quelque chose de décisif, pour autant que, justement, on ait dégagé la fonction qu'on va faire jouer à l'instrument. Or cette fonction ne peut être déterminée que par rapport à un contenu. Et nous retournons donc au coeur de notre problème.

Dire ceci c'est dire que le contenu prime mais qu'on ne peut pas, en didactique dissocier contenus et méthodes. C'est dans cette affirmation que réside notre principale critique à tous les mouvements rénovateurs de l'enseignement des mathématiques que j'ai examinés au début de cet article.

4. CURIOSITÉS DE LA TABLE DE MULTIPLICATION

•	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144

A. Sur cette grille, observe les produits pairs et les produits impairs Quelles constatations fais-tu ?

B. Choisis un rectangle (ou un carré) de produits de la table de multiplication, puis multiplie entre eux les nombres des angles opposés.

Exemples :

66	77	88	99	110
72	84	96	108	120

$66 \cdot 120$
$72 \cdot 110$

6	9	12
8	12	16
10	15	20
12	18	24

$6 \cdot 24$
$12 \cdot 12$

35	42
40	48

$35 \cdot 48$
$42 \cdot 40$

56	64	72
63	72	81
70	80	90

$56 \cdot 90$
$72 \cdot 70$

Répète plusieurs fois l'expérience avec des rectangles (ou carrés) de dimensions différentes.

Que constates-tu ? Trouves-tu une explication ?

C. Choisis une «croix» de produits de la table de multiplication et calcule leur somme.

Exemples:

	32	
27	36	45
	40	

		6		
		9		
4	8	12	16	20
		15		
		18		

			18			
			27			
			36			
30	35	40	45	50	55	60
			54			
			63			
			72			

32 + 27 + 36 + 45 + 40

Répète plusieurs fois l'expérience avec des «croix» de dimensions différentes.

Que constates-tu en observant la somme de tous les nombres de la «croix», le nombre de la case du milieu et le nombre de cases de la «croix»? Trouves-tu une explication?

D. Repère dans la table les produits de deux facteurs égaux.

Pour chacun de ces produits (sauf pour 1 et 144), observe le nombre de la case au-dessus à droite et celui de la case en-dessous à gauche.

Exemple:

			28	32
		30	35	40
	30	36	42	48
28	35	42		
32	40			

Quelle observation fais-tu?

Trouves-tu une explication?

E. Choisis un

Multiplie-l

Multiplie l
ment à sa

Calcule la

Exemple:

F. Observes-

5. QUI A LE PL

(base

E. Choisis un produit de deux facteurs égaux.

Multiplie-le par lui-même.

Multiplie le nombre immédiatement à sa gauche par le nombre immédiatement à sa droite.

Calcule la différence des deux résultats.

Exemple :

35	42	49	56	63

49 · 49   42 · 56

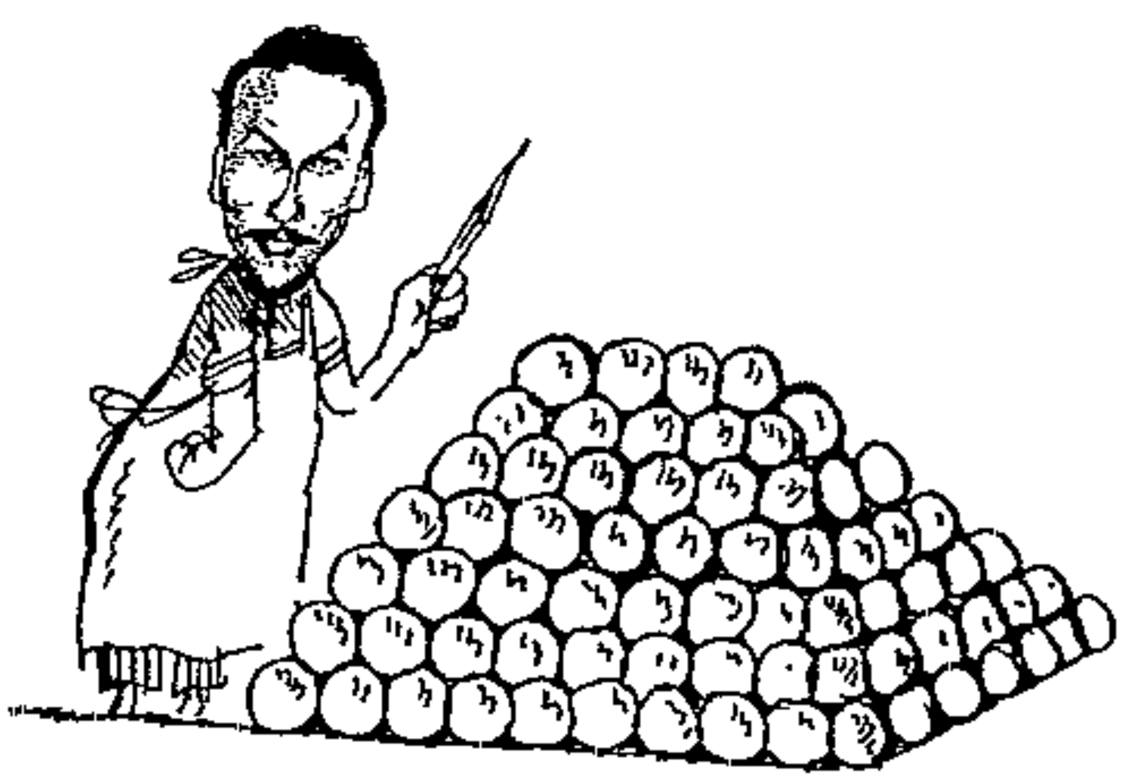
Répète plusieurs fois l'expérience avec d'autres produits de deux facteurs égaux.

Que constates-tu ?

Trouves-tu une explication ?

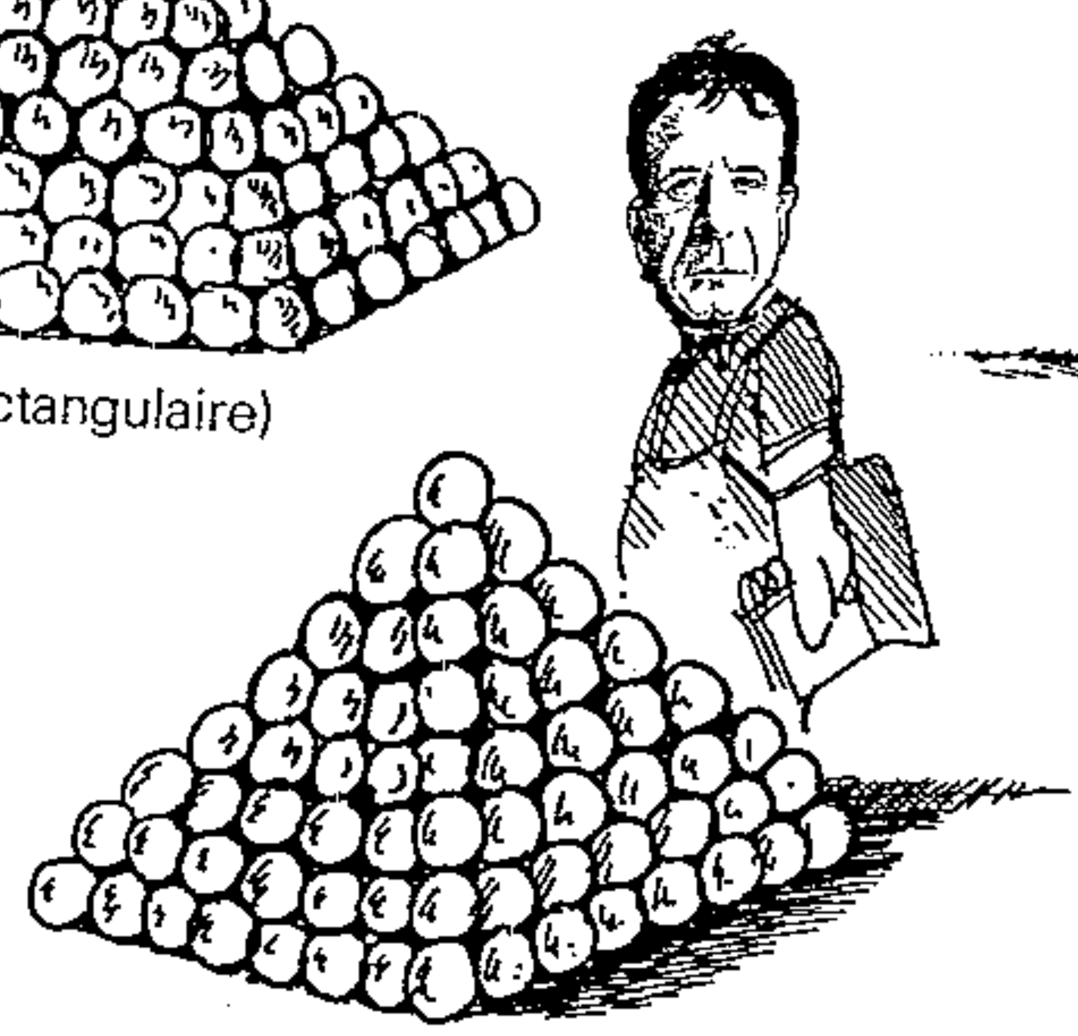
F. Observes-tu d'autres curiosités de la table de multiplication ?

5. QUI A LE PLUS DE MELONS?



(base rectangulaire)

(base triangulaire)



(base carrée)

ou encore que chaque nombre de la suite est égal à une puissance de deux, moins un :

$1 = 2 - 1$	$1 = 2^1 - 1$
$3 = 4 - 1$	$3 = 2^2 - 1$
$7 = 8 - 1$	$7 = 2^3 - 1$
$15 = 16 - 1$	$15 = 2^4 - 1$
$31 = 32 - 1$	$31 = 2^5 - 1$
$63 = 64 - 1$	$63 = 2^6 - 1$
$127 = 128 - 1$	$127 = 2^7 - 1$
...	...

On pourra alors observer que la somme des puissances successives de deux s'obtient plus rapidement en soustrayant 1 à la puissance suivante :

$$1 + 2 + 4 + 8 = 16 - 1 = 15$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 2^4 - 1 = 15$$

(Entre nous ! $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$)

Remarques

La numération binaire permet d'illustrer de manière intéressante cette découverte faite à propos des puissances de deux. Par exemple :

15 est la traduction en base décimale du code 1111 exprimé en base deux. Or, en base deux, le code 1111 précède immédiatement le code 10000.

$$\begin{array}{r} 15 \\ +\ 1 \\ \hline 16 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1111 \\ +\ \ \ 1 \\ \hline 10000 \end{array} \text{ (base deux)}$$

L'occasion peut être saisie de découvrir la touche $\boxed{y^x}$ de la calculatrice avec laquelle on obtient très rapidement de « puissants » nombres : plus d'un million de déplacements sont nécessaires pour le transfert d'une tour de 20 cubes
$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^{19} = 2^{20} - 1 = 1048575$.

3. *La centième case.* Dans le cas où les joueurs peuvent biffer de 1 à 9 cases, une tactique gagnante très simple consiste à laisser son partenaire ouvrir la partie, puis à compléter systématiquement toutes les lignes qu'il commence à biffer. En fait, il s'agit d'une version « camouflée » du jeu de Nim. Si on numérotait les cases, dans la dernière colonne se trouveraient les multiples de 10 : terminer de biffer les lignes commencées par le partenaire revient donc à « viser » les multiples de 10. En effet, on se trouve en situation gagnante si la 90e case est la dernière case que l'on a biffée ; on est sûr d'y parvenir si, au coup précédent, la dernière case que l'on a biffée est la 80e, et ainsi de suite en remontant jusqu'à la 10e case qui est la première case à « viser ». On comprend alors la nécessité de laisser son partenaire ouvrir la partie ; dans le cas contraire, on n'est pas assuré d'atteindre un multiple de 10 en cours de partie.

La stratégie est moins évidente dans le cas où les joueurs peuvent biffer de 1 à 10 cases. On gagne si on atteint la 89e case, en laissant ainsi son partenaire devant 11 cases. Pour être assuré de parvenir à biffer la 89e case, il faut avoir biffé préalablement la 78e case ; en remontant ainsi jusqu'au départ, on constate qu'il faut « viser » les cases 89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12 et 1 : chacun de ces nombres vaut 1 de plus (ou 10 de moins) qu'un multiple de 11. Ces cases se repèrent aisément dans le quadrillage : ce sont celles de la diagonale à laquelle appartiennent les cases de départ et d'arrivée. Pour gagner à coup sûr, il faut donc ouvrir la partie en biffant la première case ; par la suite, on pourra alors atteindre toutes les autres cases de la diagonale.

4. *Curiosités de la table de multiplication.* En proposant de petites recherches qui permettent d'exploiter les propriétés des opérations, cet atelier se met en relation étroite avec le thème 2, *Nombres naturels et opérations.* Chaque partie de l'activité invite l'élève à répéter plusieurs fois une « expérience », à formuler une constatation puis à trouver une explication. Au niveau qui nous intéresse, on ne doit pas attendre une explication rigoureuse du « phénomène » observé : chaque « expérience » est analysée pour elle-même et reste avant tout le prétexte à un travail sur les propriétés des opérations.

A. **Constatation :** sur les 144 produits de la table, on en compte 108 pairs et 36 impairs.

En observant, dans une colonne (ou une ligne),
- que tous les produits sont pairs si le nombre de l'en-tête est pair, et
- que les produits sont alternativement impairs et pairs si le nombre de l'en-tête est impair,

les élèves parviendront à repérer les « proportions » $\frac{3}{4}$ (produits pairs) et $\frac{1}{4}$ (produits impairs). Il est aisé de se rendre compte que ces « proportions » s'expliquent par le fait que les en-têtes de la table comptent autant de nombres pairs que de nombres impairs. (L'occasion est donnée d'observer l'équivalence entre les codes $\frac{108}{144}$ et $\frac{3}{4}$ d'une part, $\frac{36}{144}$ et $\frac{1}{4}$ d'autre part.)

B. **Constatation :** les produits des nombres des angles opposés sont égaux. L'explication repose sur les propriétés de la multiplication : commutativité et associativité.

•			6	7	8	9
8			48	56	64	72
9			54	63	72	81
10			60	70	80	90

$$48 \cdot 90 = 60 \cdot 72$$
$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 6 \cdot 10 \cdot 8 \cdot 9$$

C. **Constatation :** le quotient de la somme de tous les nombres par le nombre de la case centrale correspond au nombre de cases de la croix.

•			7	8	9	10	11
3					27		
4					36		
5			35	40	45	50	55
6					54		
7					63		

Somme : 405

$405 : 45 = 9$

Comment obtenir dans toutes les cases le nombre de la case centrale ?

Les nombres de chacune des deux branches (horizontale et verticale) de la croix constituent nécessairement une suite de multiples consécutifs (de 5 et de 9 dans l'exemple) comprenant un nombre impair de termes. Montrer qu'une telle suite peut être « équilibrée » de façon à obtenir autant de fois le nombre du milieu qu'elle compte de termes est chose aisée :

$$\begin{array}{r} 35 \\ +10 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 40 \\ +5 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{c} 45 \\ \downarrow \\ 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ -5 \\ \hline 45 \end{array} \quad \begin{array}{r} 55 \\ -10 \\ \hline 45 \end{array}$$

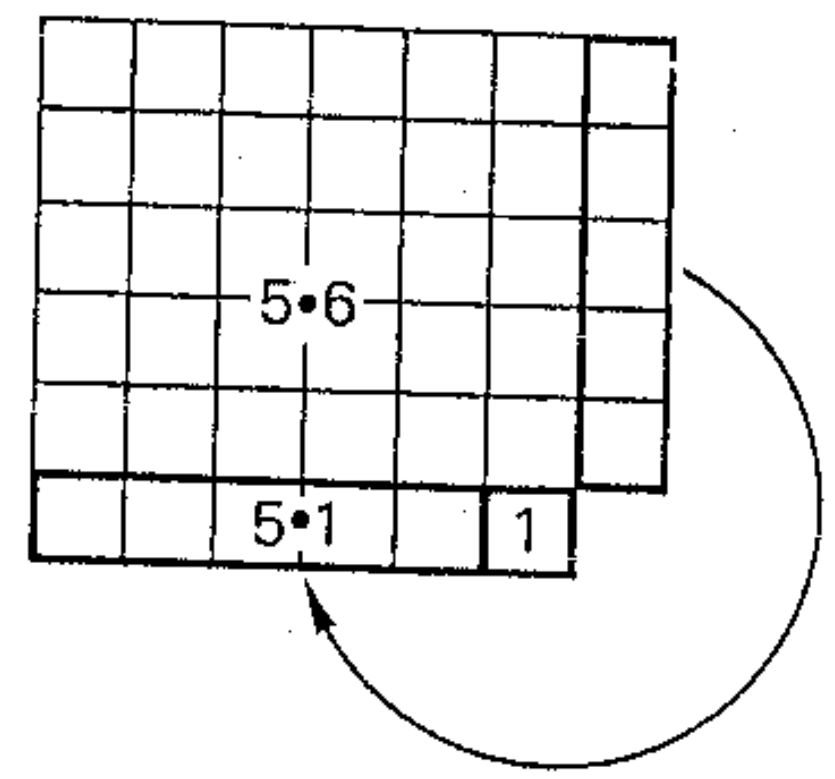
$$35 + 40 + 45 + 50 + 55 = 5 \cdot 45$$

Le nombre de la case du milieu étant le terme central de chacune des deux suites de multiples, celles-ci vont « s'équilibrer » pareillement et donner, par conséquent, la même somme.

D. Les nombres carrés se trouvent sur la diagonale qui va de l'angle supérieur gauche à l'angle inférieur droit de la table.

Constatation : la commutativité de la multiplication entraîne une disposition symétrique des produits de part et d'autre de cette diagonale. La différence entre un nombre carré et l'un de ses voisins « symétriques » immédiats est toujours 1.

La recherche d'une explication peut donner lieu à un intéressant travail sur les équations :



$$36 - 35 = 1$$

$$(6 \cdot 6) - (7 \cdot 5) = 1$$

$$(7 \cdot 5) + 1 = 36$$
$$(6 + 1) \cdot 5 + 1 = 36$$
$$(5 \cdot 6) + \underbrace{(5 \cdot 1) + 1}_{} = 36$$
$$(5 \cdot 6) + 6 = 36$$
$$6 \cdot 6 = 36$$

E. **Constatation :** la différence entre le produit d'un nombre carré par lui-même et celui de ses deux voisins immédiats sur la ligne est toujours égale au nombre carré choisi. Une fois de plus l'explication fait appel aux propriétés de la multiplication :

•		6	7	8
7		42	49	56

$49 \cdot 49 = 2401$

$42 \cdot 56 = 2352 \longrightarrow (49 \cdot 49) - (42 \cdot 56) = 49$

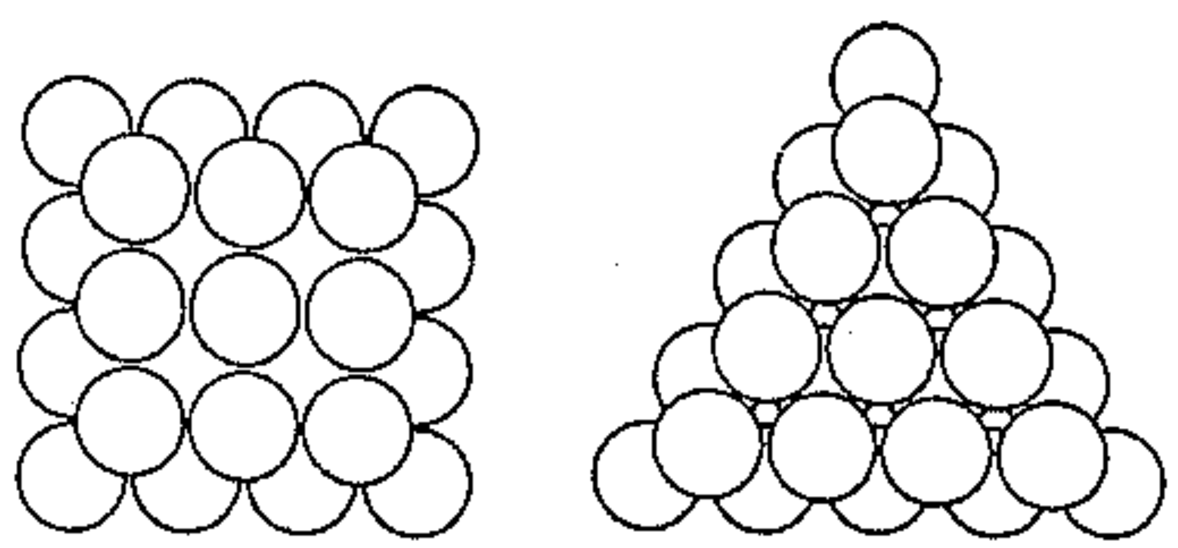
$2401 - 2352 = 49$

$(49 \cdot 49) - (7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8) = 49$

$(49 \cdot 49) - (49 \cdot 48) = 49$

5. *Qui a le plus de melons?* Des objets sphériques de même rayon (on le supposera dans le cas de melons !) peuvent être empilés de façons fort diverses, dont certaines intéressèrent les anciens mathématiciens dans leur étude des nombres dits « figuratifs ».

Au départ de la recherche, il faut donner à l'élève la possibilité d'observer (voire de construire) des modèles de plus petite dimension et, si possible, démontables étage par étage. Il pourra alors constater que les boules d'un étage viennent remplir les « creux » de l'étage inférieur.



(On trouve dans le commerce de petites balles qui conviennent parfaitement pour la construction de ces modèles.)

– **modèle à base rectangulaire :** en dénombrant les boules étage par étage, les élèves pourront observer que les facteurs du produit qui détermine le nombre de boules d'un étage augmentent chacun d'une unité lorsqu'on passe à l'étage au-dessous :

$1 \cdot 4 = 4$

$\quad (+6)$

$2 \cdot 5 = 10$

$\quad (+8)$

$3 \cdot 6 = 18$

$\quad (+10)$

$4 \cdot 7 = 28$

...

Observation intéressante :

$1 + 4 + 1 = 6$

$2 + 5 + 1 = 8$

$3 + 6 + 1 = 10$

...

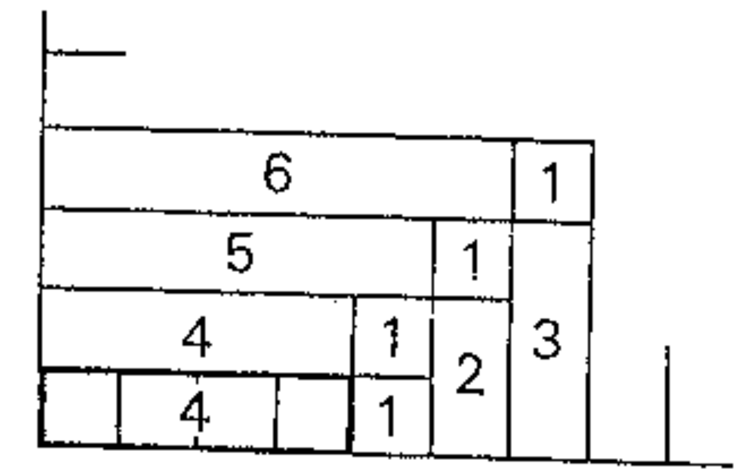


illustration 1

Entre nous ! $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$

Solution : 224 melons.

– **modèle à base carrée :** le nombre total de boules dans un tel modèle de n étages s'obtient en effectuant la somme des n premiers nombres carrés.
Observation intéressante : Comment passer d'un nombre carré au suivant ?

$1^2 = 1$

$\quad (+3)$

$2^2 = 4$

$\quad (+5)$

$3^2 = 9$

$\quad (+7)$

$4^2 = 16$

$\quad (+9)$

$5^2 = 25$

...

$3 = (2 \cdot 1) + 1$

$5 = (2 \cdot 2) + 1$

$7 = (2 \cdot 3) + 1$

$9 = (2 \cdot 4) + 1$

...

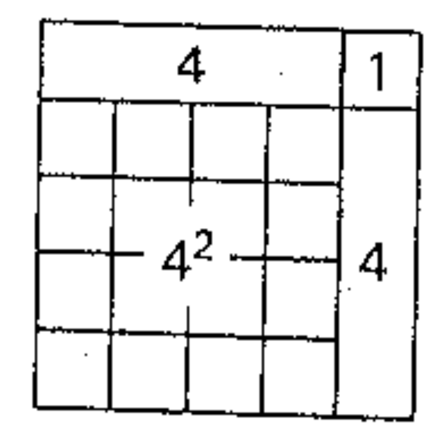


illustration 2

$4^2 + \underbrace{(2 \cdot 4) + 1}_{9} = 5^2$

$16 + 9 = 25$

Entre nous ! $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$