Jalons à propos d'algèbre : La question du rapport entre algébrique et numérique

François Conne, Yves Chevallard, Jeanne Guiet-Sylvain

JALONS A PROPOS D'ALGEBRE

second tirage augmenté d'une étude sur la méthode de modélisation en didactique des mathématiques.
par: F. Conne, Y. Chevallard, et J. Guiet.

LA QUESTION DU RAPPORT ENTRE ALGEBRIQUE, NUMERIQUE ET ARITHMETIQUE.

AVANT PROPOS AU SECOND TIRAGE DU CAHIER N° 3.

"La présente édition ajoute encore à ce travail d'empilement de textes: ce qui ne saurait déplaire à l'auteur. Car le «texte du savoir» n'est jamais autre chose qu'une collection de pièces et de morceaux plus ou moins adroitement cousus ensemble. Même il n'apparaît pas déplacé, ici, de faire voir les coutures: ainsi le médium sera un peu à sa manière le message."

C'est ce qu'écrit Y. Chevallard dans la préface à la deuxième édition de son livre consacré à la Transposition Didactique. Cette façon de voir s'applique tout aussi bien à ce deuxième tirage du cahier n°3 d' INTERACTIONS DIDACTIQUES.

Ce cahier, de 1984, reprenait des notes d'un cours que j'avais donné à des enseignants du secondaire. Cela fait plusieures années que le premier tirage en est épuisé. Et comme la demande ne tarit pas, nous avons décidé d'un deuxième tirage. Ce cahier a été conçu comme un document de travail, destiné à l'enseignement de la didactique des mathématiques. Dans cette optique, il nous a paru judicieux de le compléter par un document analogue, traitant d'un sujet voisin, écrit à propos d'un atelier de la cinquième école d'été de didactique des mathématiques, tenue à Plestin-les-Grèves, en août-septembre 1989. C'est la relation de ce cours que nous publions ici à la suite du texte du précédant cahier (pp. 55-79).

Cependant non contents de *faire voir les coutures*, nous avons aussi décidé de *supprimer l'ourlet*. Il n'y a donc pas de conclusion générale de ces documents.

Remercions ici les revues : Recherches en Didactique des Mathématiques, Petit "x", et les Actes de la cinquième école d'été des chercheurs en Didactique des Mathématiques et de l'Informatique, pour avoir rendu possible la publication de textes dont elles détiennent le copyright.

Etoy le 30.5.91, F. Conne

AVANT-PROPOS

Ce cahier a deux parties qui sont très indépendantes mais qui portent sur le même sujet : algèbre au premier cycle de l'école secondaire, et plus précisément relations algébrique/numérique. Il s'agit ici de la classe de 8e (4e française) et de calcul littéral. Dans un premier temps, j'aborde la question de la SIGNIFICATION dans la résolution d'un problème numérique (démonstration par l'algèbre d'une propriété numérique que l'on présente à l'élève). Les considérations que je puis faire à ce sujet sont encore très multiples et différenciées. Il m'a paru alors utile de me baser sur un protocole donné, avec un élève de fin de 8e scientifique et pris dans un cadre tout à fait hors classe. Avant de faire l'entretien, j'ai discuté rapidement de ce que cet élève avait vu en classe et ce qui était à l'ordre du jour. On avait évoqué l'algèbre, les identités remarquables ainsi que la résolution d'équation.

Le second volet est constitué par un texte d'Yves Chevallard, suivi par une analyse que j'avait faite pour un cours. Le texte de Chevallard consiste en des commentaires faits à des enseignants. Il se situe dans le cadre d'une expérience didactique, encore en cours aujourd'hui.

La démarche a débuté par la constitution d'un texte d'enseignement de l'algèbre qui constituerait l'outil principal de l'expérience. Je ne vais pas parler de l'expérience elle-même. Et on ne peut pas la reconstituer dans ses détails à partir du seul texte présenté (moi-même je ne dispose pas d'autres textes). Je laisserai à Yves Chevallard le soin de présenter celle-ci. Et je prierai le lecteur de ne pas trop s'en préoccuper, pour examiner avec moi certains principes directeurs qui président à la construction de cet enseignement. Une dernière remarque : la rédaction des présents commentaires par Yves Chevallard succède aux séances de préparation des leçons (tenues au fur et à mesure de la progression de l'année), il s'agit donc d'une sorte de résumé de ce qui a été discuté.

Enfin, le lecteur retrouvera parmi les activités proposées par Yves Chevallard le problème du protocole présenté en première partie. Ce n'est pas un hasard bien sûr.

François Conne Juin 1984.

UN EXEMPLE DE RESOLUTION DE PROBLEME

Je vais donner ici le protocole d'un entretien tenu avec Mathias, élève de 8^{e} scientifique qui arrivait en fin d'année (mai 1984). La discussion avait été menée après un match de foot, donc dans un cadre tout à fait hors classe. D'autre part, l'entretien avait débuté sur quelques considérations à propos de ce que Mathias faisait en ce moment en classe. Puis débute la résolution proprement dite.

PROTOCOLE MATHIAS

1ère PARTIE NUMERIQUE

Prends 3 nombres consécutifs, trois nombres qui se suivent.

M. écrit 3,4,5

Maintenant, tu calcules le carré de celui qui est au milieu et tu y soustrais le produit de deux autres nombres.

M. écrit au fur et à mesure : 25 - 24 = 1.

Un autre, refais trois autres nombres consécutifs.

M. choisit cette fois 10,11,12 qu'il écrit. Puis il construit son calcul. 121 - 120 = 1. Durant un petit moment, il examine ses nombres. Compare. JE CROIS QUE J'AI TROUVE ! LA, ON FAIT UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Il reprend sa formulation. LE MULTIPLICATEUR EST DE UN PLUS GRAND ET LE MULTIP.... LE MULTIPLIC. LE MULTIPLE EST DE UN PLUS PETIT. Toujours pas convaincu de son expression, il rajoute : JE NE PEUX PAS MIEUX DIRE, JE VOIS COMMENT PAR ECRIT, ON VOIT COMMENT ÇA MARCHE.

Essaie encore une fois de le dire, explique avec les nombres.

12 ON LE FAISAIT..., ON LE MULTIPLIAIT UNE FOIS DE MOINS QUE 11 LA .... ET 12 C'EST UN DE PLUS QUE 11 .... ET PUIS ... COMMENT DIRE ... ÇA .... ÇA DONNE ÇA QUE C'EST UNE FOIS DE PLUS .... Mathias me regarde, j'ai l'impression qu'il doute que je le comprenne.

COMMENTAIRE DE LA PREMIERE PARTIE.

1. Tout d'abord il faut que je confirme le lecteur sur le point suivant : Mathias à ce moment de la résolution est sûr du fait. Il pense que cela donne 1 et que cela donnera sans doute toujours 1.

2. Mathias a tout de suite cherché à analyser cette seconde apparition du 1. Pour cela il examine les nombres, et leur écriture : 121 - 120 = 1 comparé à 10, 11, 12. Lors de cette activité de comparaison et de mise en relation dont les seules manifestations sont les mouvements du regard de Mathias ainsi que les pointages du stylo bille, il a le sentiment de trouver quelque chose. C'est ce qu'il déclare. Et je puis donc inferer que petit à petit les mises en relations s'organisent dans son esprit. Seulement, il n'arrive pas bien à en rendre compte dans sa formulation orale. Soit que sa pensée (l'échafaudage du raisonnement intuitif) est fugace soit que celle-ci est trop vague et ne passe pas par les mots, ceux-ci manquant ou encore faisant censure. L'examen attentif de ce qu'il dit montre qu'il se centre sur les relations entre les nombres donnés. Il situe le produit ac (nommons les 3 nombres a,b,c dans l'ordre de croissance) par rapport au carré b^2, mais dans des termes arithmétiques, je veux dire par là qu'il se refère à la multiplication et particulièrement à une propriété additive de celle-ci. Ressortent alors deux aspects : 1° il retrouve le 1 dans les différences entre a,b,c. Il retrouve la trace du 1 que la soustraction fait apparaître. 2° Il y associe une sorte de compensation : ON PREND UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Cela est compris et prend un moment tout l'espace. Cela paraît naturel de retrouver 1 dans le calcul b^2-ac. Mais lorsque Mathias veut le formuler, ce dernier maillon ne passe pas. C'est là qu'il butte, recommence où s'il force, devient évasif. : ÇA... ÇA DONNE ÇA QUE C'EST UNE FOIS DE PLUS ... (son raisonnement évidemment ne permettrait pas de dire pourquoi le résultat est 1 et non pas 0 ou 2 !)

3°. Pour le moment, la SIGNIFICATION de la propriété est numérique. Et Mathias mobilise des représentations des nombres. Ainsi en est-il du recours à ce qu'il sait de la multiplication, et à cet argument de compensation. Mais,nous l'avons vu, il n'arrive pas à recouvrir totalement ce qui se passe. Il y a quelque chose qu'il voit sur ce qu'il a écrit mais qu'il n'arrive pas à dire. Là aussi je ferais l'hypothèse que la valeur des nombres choisis 10,11,12 n'est pas sans jouer un rôle. En particulier la simplicité de la multiplication 10 x 12 qui revient à écrire 12 suivi d'un zéro : 120. Mais aussi peut être le carré de 11 qui n'est ni 101 ni 111. Je dirai encore la présence de 1 dans 11 et sa "retrouvaille" dans 11^2.

Je suppose donc que le traitement de Mathias porte sur les quantités, sur les propriétés des opérations numériques (1 de plus, 1 de moins, et additivité de la multiplication, compensation entre les + et les -). Ainsi que sur l'écriture, les écritures et les relations que l'on peut faire sur les symboles venant comme support (ici comme manifestation) des relations numériques que l'on suppose oeuvrer.

4°. J'en conclus donc à cette réalité numérique et scripturale sur laquelle porte l'attention de Mathias, pour en dégager un élément de signification. Mais dès lors que l'on veut parler de signification, il s'agit de comparer temporellement les divers états par lesquels le sujet passe. Ainsi au départ le choix de 3 nombres consécutifs, pas d'autres indications pour ce choix qui paraît dès lors libre (et immanquablement le sujet hésite ou attend la suite). Le calcul de la quantité, il trouve 1. Bon. Il retrouve 1 et dès lors il s'étonne. C'est alors ce 1 qui étonne, qui devient significatif. Enfin vient l'examen et le premier échafaudage dont on notera une chose que je n'ai pas encore relevée : c'est une centration relationnelle : ON PREND UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS PLUS PETIT. Je dirai que a,b,c sont des nombres, des nombres vus encore comme bien différents c est une fois de plus que b, a est une fois plus petit que b. Il y a encore 3 nombres dont Mathias traite les relations.

Cette dernière remarque permet la transition à la seconde partie du protocole.

2ème PARTIE ALGEBRIQUE

Essaie de faire par l'algèbre pour expliquer.

Mathias écrit $x^2-yz = 1$, puis réfléchit à haute voix. ALORS ON SAIT QUE DISONS $x - y = 1$ (il ne l'écrit pas) SI ÇA C'EST X. .... il réfléchit .... NON, ON NE DOIT PAS FAIRE COMME ÇA , ÇA NE DONNE PAS UNE FORMULE. JE NE VOIS PAS CE QU'ON DOIT FAIRE. ON DOIT EXPLIQUER PAR L'ALGEBRE ? Il me renvoie donc ma question.

Ouais.

C'EST PAS UNE FORMULE .... puis il réfléchit .... ET SI ÇA ($x^2-yz = 1$) JE FAIS QUE CE SOIT EGAL A ZERO (pour le lecteur, Mathias venait de m'expliquer auparavant que le maître leur avait parlé de produit nul de 2 polynomes $P(x)\ Q(x) = 0 \Rightarrow P(x)$ ou $Q(x) = 0$). Il écrit alors : $x^2-yz - 1 = 0$ en disant : JE NE SUIS PAS SÛR, JE VAIS VOIR SI ÇA MARCHE. Examen puis : AH NON ÇA NE MARCHE PAS ... ON NE PEUT PAS REDUIRE PARCE QU'ON N'A PAS DE X. Un temps de réflexion puis Mathias commence à écrire au dessous : $x^2-(x+1)$ puis $x^2-((x+1)(x-1))$, à ce moment il s'exclame ÇA C'EST UNE FORME ; ÇA, ON SAIT CE QUE C'EST. Il écrit $x^2-((x+1)(x-1)) = 1$ puis $x^2-(x^2-1)= 1$ DONC C'EST 1, C'EST UN DE MOINS QUE X^2.

Réexplique-moi.

X, C'EST LE NOMBRE DU MILIEU. ALORS (il lit) X^2 MOINS GRANDE PARENTHESE DANS LAQUELLE IL Y EN A DEUX PETITES X PLUS UN ET PIS X MOINS UN C'EST X^2 MOINS UN DONC C'EST X^2 MOINS X^2 MOINS UN DONC C'EST EGAL A UN.

Tu es sûr

SI ON ENLEVE LES PARENTHESES il écrit alors à la suite de son équation : $x^2-(x^2-1) = 1$

$$x^2- x^2+1 = 1$$

$$1 = 1$$

Tu en es où dans ton problème ?

... LA J'AI PROUVE QUE QUAND IL Y AVAIT 3 NOMBRES CONSECUTIFS, LE CARRE DU MILIEU MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES EST EGAL A UN.

Tu es sûr que tu l'as prouvé ?

moment puis PAS PAR ECRIT. (pas une preuve explicite comme en géométrie) MAIS EN REGARDANT ÇA, X,PEUT ETRE REMPLACE PAR N'IMPORTE QUOI, MANQUERA TOUJORUS UN .... J'AI PAS TOUT EXPLIQUE EN FRANÇAIS J'AI ECRIT SIMPLEMENT

Bon, si maintenant on prend avec des nombres négatifs .... avec 3 nombres consécutifs négatifs, ça marche toujours ?

Il réfléchit un moment. Puis JE CROIS (il examine son égalité $(x^2-(x+1)(x-1)= 1)$ UN NOMBRE NEGATIF AU CARRE ÇA DONNE PLUS, UN NOMBRE NEGATIF FOIS UN NOMBRE NEGATIF ÇA DONNE PLUS, DONC ON DOIT OBTENIR UN. C'EST LA MEME FORMULE SI ON VEUT .... il regarde encore (hésite ?) puis jetant d'un geste vif son crayon sur la table. C'EST LA MEME FORMULE X EST NEGATIF, X EGALE MOINS X SI ON VEUT. (il veut sans doute dire par là que X peut désigner une quantité négative comme une quantité positive.)

COMMENTAIRE DE LA DEUXIEME PARTIE.

Je vais poursuivre mon analyse en examinant la signification.

1°. Nouvelle consigne : expliquer par l'algèbre. Mathias reprend le problème au départ et écrit littéralement le calcul qu'il s'agit d'expliquer. $x^2-yz = 1$. On remarque l'ordre avec lequel Mathias prend les nombres. Le carré du nb. du milieu moins le produit des deux autres. On remarquera aussi, et ce en relation avec le dernier point du commentaire précédent, qu'il y a 3 lettres pour les 3 nombres. Mathias reprend les choses. Il exprime ensuite une des relations données : y-x = 1. Mais de nouveau, on notera que cela relie 2 nombres considérés comme entités bien distinctes.

2o. Le second point à noter est peut-être un effet dû à ma consigne (expliquer par l'algèbre). Il n'en reste pas moins que Mathias anticipe ce que cela devrait donner avant même d'avoir traduit les relations en jeu. Il écrit $x^2-yz = 1$ mais cela est la traduction de la consigne et du résultat escompté. Il explicite une des relations mais abandonne car : ÇA NE DONNE PAS UNE FORMULE. C'est donc que le traitement algébrique est déjà soumis à une finalité : trouver une formule, ce que j'aurais envie de traduire par : trouver quelque chose d'exploitable. C'est à cette finalité aussi que Mathias cherche à répondre lorsqu'il a l'idée, après tâtonnement et analyse de l'obstacle auquel il bute (ON NE PEUT PAS REDUIRE CAR ON N'A PAS DE X), de substituer à y et z leur expression (x+1) et (x-1). Ce point est fondamental car Mathias ne procède pas dans le bleu. Il ne commence pas par traduire les relations de la donnée qu'il substituerait dans la formule pour développer ensuite. Son traitement est moins linéaire, plus contrôlé. Et lorsqu'il exprime les relations (x-1), x, (x+1), cela répond avant tout au souci (sous-tâche) de tout exprimer en x. On remarquera ainsi que ceci marque aussi un changement de perspective dans son traitement. Il utilise les relations données pour exprimer les nombres en fonction d'une seule variable, et ne cherche plus à exprimer les relations pour elles-mêmes. Dès lors, et par le biais de la reconnaissance instantannée d'une identité remarquable (une formule, quelque chose d'utilisable) l'algébrique prend le pas sur le numérique.

3o. L'algébrique, et l'écriture des équations devient alors la réalité sur laquelle Mathias est centré. Je lui demande une reexplication - Voilà qu'il me lit son équation (comme s'il s'agissait de la dicter). Je lui demande s'il est sûr - Il vérifie ses parenthèses, une erreur de signe s'est peut-être glissée. Il a prouvé le théorème (il en revient au problème si je le lui demande) mais cette preuve est administrée par l'algèbre : on peut remplacer x par n'importe quoi .... la preuve réside dans les équations écrites (J'AI PAS TOUT EXPLIQUE EN FRANÇAIS .... MAIS EN REGARDANT ....).

4o. J'ai posé la question des nombres négatifs dans l'espoir de le ramener sur le numérique. Cela avait fonctionné ainsi avec quelques étudiants adultes. A prime abord, il semble que cela marche. En effet, l'examen des signes des quantités écrites répond à des règles de traitement numérique où il est obligatoire de faire la distinction des cas (calcul de valeur absolue, calcul des signes). Mais le souci de Mathias reste la formule. Il lui semble que celle-ci ne devrait pas changer. Les quantités restent positives. Et sur la formule, c'est sûr x^2 reste x^2. (Un petit doute cependant, me semble-t-il pour affirmer que (x+1)(x-1) reste aussi identique). Puis un argument algébrique balaye le tout : X désigne tout autant une quantité négative que positive. Notez l'expressivité : le crayon jeté ("faux problème que je suis en train de me poser!") et : X EGALE MOINS X SI ON VEUT. Phrase très claire mais qu'il ne s'agirait pas de poser algébriquement.

Remarque : Avec mes étudiants adultes, cela n'avait pas été aussi clair. Il avait fallu tout réécrire et le plus dur aura été de réécrire "en négatif" la suite des 3 nombres. Ensuite le calcul avec le contrôle parallèle que cela est plausible (un carré est positif, le produit de 2 nombres négatifs reste positif). Alors quelqu'un se demanda : "et si ces deux nombres ne sont pas négatifs?" On avait alors vérifié avec -1, 0 et 1.

5°. L'algébrique fait donc maintenant toute la signification du problème et Mathias ne reviendra pas vraiment sur le numérique. (il faut remarquer que dans sa vie d'écolier, en mathématiques on travaille exclusivement algèbre et démonstrations - en géométrie surtout -. Pas étonnant donc sa réaction). On notera aussi le niveau (état) de signification auquel il est abouti. Sa formulation reste factuelle :
QUAND IL Y AVAIT 3 NOMBRES CONSECUTIFS ALORS LE CARRE DU MILIEU MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES EST EGAL A 1.

Mathias sait que le théorème est général, il comprend à la fois la constance,la valeur de cette différence. Or dans ce théorème la relation exacte en jeu (la propriété qu'elle exprime) porte sur l'écart entre les nombres choisis. Pour le moment Mathias n'accède pas à ce niveau de signification.

3e PARTIE DISCUSSION AVEC MATHIAS

Avec Mathias, j'ai la chance d'être tombé sur un élève qui non seulement n'a pas trop de difficultés en mathématiques, mais encore a une conscience assez nette de ce qu'il est en train de faire. De là une discussion passionnante que je livre maintenant et où je tente mollement de reproblématiser la question. Je dis mollement car rapidement je me suis plus intéressé à ses commentaires qu'à lui poser de nouvelles questions algébriques. Il va de soi que dans l'écriture des commentaires précédents, j'ai utilisé certains éléments de ce qui va suivre pour guider mon interprétation.

Donc tu as compris ? Tu peux m'expliquer ce qui se passe ?

OUI, MOI JE PEUX EXPLIQUER puis il se tait un moment. Puis : OUI MAIS TA QUESTION ? C'EST OU, A QUEL POINT (que je dois expliquer) JE COMPRENDS POURQUOI, JE COMPRENDS LES OPERATIONS,

J'AI TOUT COMPRIS LES CALCULS QUE J'AI FAITS, LA MANIERE DONT JE PEUX PROUVER, J'AI BIEN COMPRIS ... puis après un moment, JE N'ARRIVE PAS BIEN A SAVOIR CE QU'IL FAUT FAIRE QUAND TU DIS ÇA ... IL NE SE PASSE RIEN, C'EST UN CALCUL, ON NE PEUT PAS DIRE QU'IL SE PASSE QUELQUE CHOSE. IL Y A UNE OPERATION, ON DOIT POUR ... DEVELOPPER ... LA SEULE CHOSE QUI SE PASSE ... C'EST UN NOMBRE AU CARRE ... UNE SUITE DE 3 NOMBRES CONSECUTIFS... NON... COMMENT DIRE ... ON PREND UNE SUITE DE 3 NOMBRES, ET LES DEUX NOMBRES DU BORD ON A CE A LEUR PRODUIT ON... SOUSTRAIT LEUR PRODUIT AU NOMBRE CARRE DU MILIEU ... C'EST ÇA QUI SE PASSE ... LE RESTE C'EST NOUS QUI LE FAISONS.

Et puis cette histoire de 1 qu'on obtient, ça t'étonne ?

QUAND TU ME L'AS MISE SOUS LE NEZ, OUI. MAIS MAINTENANT PLUS. AVANT QUE J'AIE FAIT LE DERNIER ... QUAND J'AI FAIT CELUI-LA (il montre 10, 11, 12) ÇA M'A FRAPPE, C'ETAIT PRESQUE NORMAL AVANT D'ECRIRE X. (...) APRES EN FAISANT DES X J'AI VRAIMENT COMPRIS.

Tu peux maintenant me redire ce que tu disais à ce propos (10,11,12)?

QUAND J'AI REGARDE COMME ÇA, SANS FAIRE LES OPERATIONS SUR LES NOMBRES. QUAND J'AI ECRIT LES NOMBRES J'AI TROUVE NORMAL QUE ÇA FAISAIT UN. MAIS JE N'AI PAS COMPRIS POURQUOI.
PARCE QUE, JE NE SAIS PAS SI C'EST JUSTE, ON MULTIPLIAIT LE CHIFFRE 12 PAR 1 DE MOINS QUE LE CHIFFRE 11 ET QUE LE CHIFFRE 12 EST 1 DE PLUS GRAND QUE LE CHIFFRE 11... DONC ÇA ... DONC ÇA VA SE PASSER ... JE NE SAVAIS PAS EXPLIQUER SANS X ... UN PLUS PETIT FOIS UN PLUS GRAND, C'EST COMME ÇA. JE SAIS QUELLE FORMULE UTILISER $((x-1)(x+1))$.

Explique pourquoi ?

J'AI REMARQUE QU'IL Y AVAIT UN DE MOINS ET UN DE PLUS, IL M'A SEMBLE QUE C'ETAIT A CAUSE DE ÇA ... JE N'ARRIVAIS PAS A TROUVER LE RAISONNEMENT QUI ETAIT DANS MA TETE ... CE N'EST QU'EN METTANT PAR ECRIT QUE J'AI TROUVE QU'ON POUVAIT METTRE EN FORMULE.

Pour toi, maintenant, c'est clair clair clair ?

JE SAIS POURQUOI JE COMPRENDS TOUT. OUAIS ÇA ME PARAIT CLAIR.

Mais tu n'as pas tout de suite fait ça. Tu avais écrit $x^2-yz = 1$.

J'AI REMPLACE TOUS LES CHIFFRES PAR DES LETTRES. JE ME SUIS RENDU COMPTE QUE ÇA NE DONNAIT PAS UNE FORMULE. J'AI ESSAYE. ON A APPRIS A METTRE DE L'AUTRE COTE DU SIGNE EGAL ÇA DONNE 0 COMME ÇA ÇA DONNE LA POSSIBILITE DE LA VALEUR DES NOMBRES EN LETTRES ... PUIS APRES J'AI PENSE QU'ON PRENAIT SIMPLEMENT LE CHIFFRE AU CARRE QU'ON REMPLAÇAIT PAR UNE LETTRE PUIS LES AUTRES C'EST CE CHIFFRE PLUS UN ET CE CHIFFRE MOINS UN.(...)

X+1 SI ON VEUT C'EST LE NOMBRE LE PLUS GRAND DE LA TRIADE X-1 C'EST LE NOMBRE LE PLUS PETIT, J'AI TROUVE PLUS SIMPLE.

Pourquoi ?

J'AI PU SOUSTRAIRE PLUS FACILEMENT .... C'EST EXPRIME EN X SEULEMENT,ÇA M'A PARU MIEUX.

Tu as dit : "c'est pas une formule". Tu cherchais une formule ?

C'EST UNE DES FORMULES DE PRODUIT REMARQUABLE, ON A APPRIS CELA EN CLASSE.

Quand y as-tu pensé ?

EN FAISANT ÇA. Il me montre sur son écriture que c'était au moment où il écrivait la dernière parenthèse de $x^2-((x+1)(x-1))$.

Tu as compris quoi ?

QUE C'EST CELA QU'IL FALLAIT UTILISER .... AH C'EST UNE .... QUESTION ASSEZ .... JE ME SUIS PROUVE UN PEU A MOI-MEME POURQUOI QUAND ON A 3 NOMBRES ET QUAND ON FAIT LE NOMBRE DU MILIEU AU CARRE MOINS LE PRODUIT DES DEUX AUTRES, ON OBTIENT UN ... SI ON VEUT, C'EST SURTOUT A NOUS-MEMES QUE ÇA PROUVE.

Pourquoi tu dis : "à moi-même" ?

PARCE QUE MOI, JE NE LE SAVAIS PAS. EN LE FAISANT A MOI-MEME, JE L'EXPLIQUE AUX AUTRES.

Suppose que je ne connaisse pas les identités remarquables, tu peux m'expliquer ?

<u>Mathias</u> fait alors le développement algébrique et montre comment on passe de $(x+1)(x-1)$ à $x^2-x+1-1$ et finalement x^2-1.

Expliques-moi ce que tu m'as expliqué à propos de 10,11,12 mais là, avec des x.

<u>Mathias</u> inverse ma demande et montre la formule des identités remarquables en remplaçant x par 11. $(11+1)(11-1)$

Tu as fait le contraire de ce que je te demande.

JE NE PEUX PAS FAIRE AUTRE CHOSE. C'EST GRACE A ÇA QUE J'AI COMPRIS.

Ce 1, il vient d'où ?

LEQUEL. (....) JE VOIS SOIT LE -1 SOIT LE +1 DES DEUX AUTRES NOMBRES DE LA TRIADE SOIT LE 1 QUI EST LE PRODUIT DE CES DEUX OPERATIONS (c'est-à-dire (x+1) et (x-1)....

C'est lequel ?

> CELUI QUI EST APRES LE EGAL.

C'est celui-là que j'entend.

> JE POURRAIS L'EXPLIQUER EN ECRIVANT .... puis un moment de réflexion, puis soudain très rapide : DONC CE 1 VIENT DU PREMIER NOMBRE .... DU NOMBRE DU MILIEU ... IL VIENT DE LA DIFFERENCE ENTRE LE NOMBRE DU MILIEU ET DES DEUX AUTRES (....)

Ici, il y a un trou dans mes données. J'avais noté l'impression qu'il exprimait effectivement la relation noyau : à savoir la relation entre la différence des nombres de départ et la quantité calculée. Cependant je ne suis pas sûr à 100% de cette interprétation aujourd'hui.

Tu prends 3 nombres qui se suivent de 4, qui sautent de 4, et tu recalcules.

> JE CROIS SAVOIR, JE TE DIS SANS CALCULER. JE PENSE QU'ON AURA 14. QUAND ON FAIT LE CALCUL x^2-1, 1, C'EST AU CARRE ET PUIS 14 .... 4 AU CARRE C'EST .... NON JE VEUX DIRE 16.

Tu vérifies.

> Il calcule 6, 10, 14 et 100 - 84 = 16. Puis il dit qu'on peut le prouver comme avant, c'est pourquoi il a pu anticiper.
> Il écrit :
> $$\begin{aligned} &x^2 - (x+4)(x-4) = 16 \\ &x^2 - (x^2-16) = 16 \\ &x^2 - x^2 + 16 = 16 \end{aligned}$$
> Puis il corrige son calcul, vu qu'au départ on ne sait pas que cela fera 16.
> $$\begin{aligned} &x^2 - (x+4)(x-4) = \\ &x^2 - (x^2-16) = \\ &x^2 - x^2 + 16 = 16. \end{aligned}$$

****

Plus tard, je lui explique une autre démonstration qui reprend en fait son argument : UNE FOIS DE PLUS UN NOMBRE UNE FOIS DE MOINS. Par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} 11 \times 11 \arrow[r, "+ 11"] \arrow[dr, "-1"'] & 12 \times 11 \arrow[d, "- 12"] \\ & 12 \times 10 \end{tikzcd}$$

Mathias n'a pas de peine à comprendre la démonstration. Il compare (à ma demande) ceci à son raisonnement. ON JOUE AUSSI SUR LE 1 DE MOINS. MAIS C'EST PAS COMME MOI CAR J'AI PAS UTILISE CE 12 DE MOINS ET CE 11 DE PLUS. TU ARRIVES FINALEMENT AU MEME RESULTAT. MAIS C'EST BIEN MOINS EVIDENT A TROUVER TON TRUC. PARCE QU'IL FAUT PENSER A CHERCHER. A PRENDRE 12 x 11 (comme intermédiaire). IL Y A PLUSIEURS COMBINAISONS POSSIBLES MAIS ON NE SAIT PAS LESQUELLES SONT BONNES.

Il me montre qu'on aurait pu aussi faire en passant par 11 x 10 :

$$\begin{tikzcd} 11 \times 11 \arrow[r, "-11"] \arrow[dr, "-1"'] & 10 \times 11 \arrow[d, "+10"] \\ & 10 \times 12 \end{tikzcd}$$

TANDIS QU'ICI $x^2-(x+1)(x-1)$ TU COMPARES DEUX MULTIPLICATIONS ET TU ABOUTIS A 1. TU AFFICHES QUE ÇA C'EST LE NOMBRE DU MILIEU PLUS 1 ET ÇA MOINS 1

---

3 jours plus tard Mathias viendra me dire qu'il l'a proposé en classe à ses camarades, à son professeur. Mais que personne n'a pu le montrer comme je l'avais fait, sans algèbre.

* * * *

COMMENTAIRE 3^e^ PARTIE

Le lecteur trouvera dans les déclarations de Mathias les éléments à l'appui des interprétations précédentes. Quant à moi, je veux revenir brièvement sur les points suivants.

1°. Mathias reste dans l'algébrique. Et ne recherche pas à revenir au numérique. D'ailleurs on pourrait dire:plus de problème pour lui.

2°. Mathias contrôle très bien son calcul algébrique, et cela se voit à sa généralisation. Tout d'abord une possibilité de caractériser le 1 (produit de la différence de x avec les 2 autres nombres de la triade). Que 1 est un carré, et que si les nombres se succédaient de 4, la différence serait de 4^2. Ceci dénote d'un bon niveau de signification. Mais c'est la formule algébrique qui lui sert d'appui (et de représentation.) Il abandonne la représentation en termes de multiplications numériques.

3°. Mathias comprend la démonstration finale (s'appuyant sur un schéma ainsi que sur les propriétés additives de la multiplication numérique). Cela montre aussi son contrôle de ce type de représentation et confirme qu'il a sans doute bien compris quelque chose dans sa propre analyse numérique. Il ne reconnaît cependant pas son raisonnement, ou plutôt le prolongement de son raisonnement vu qu'il est pas possible de quantifier directement la relation entre x^2 et $(x+1)(x-1)$. Il faut en effet considérer cette relation comme composée de deux relations laissant fixe alternativement l'un des facteurs :

$$x.\underline{x} \longrightarrow (x+1)\underline{x}$$
$$(\underline{x+1})x \longrightarrow (\underline{x+1})(x-1)$$

Remarquons que ce type d'enchaînement correspond exactement à l'usage de la "technique des noms auxiliaires" proposée par Yves Chevallard. (cf. 2e partie pg 27).

4°. On notera enfin que Mathias ne revient pas sur l'argument numérique (compensation et propriété de la multiplication) qu'il donnait comme explication de la propriété. Il ne semble d'ailleurs pas avoir conscience de l'insuffisance <u>logique</u> de cet argument. Pour lui ce n'est qu'une question de mots qui lui manquent, il n'arrive pas à <u>redire</u> ce qu'il a pensé dans sa tête. Même lorsque je propose une démonstration qui prolonge la sienne, il n'y a pas reexamen et finalement Mathias termine en se référant une fois de plus à la formule algébrique. Sans doute j'aurais dû proposer des contre-exemples, et en parler plus directement avec lui. (Par exemple : $(x+1) + (x-1) = 2x$ et pour le dire en des termes proches des siens: "on ajoute un nombre de 1 de plus à un nombre de 1 de moins et on aboutit à 2 fois ce nombre. $2x - (x+1)+(x-1) = 0$) Avouons quand même qu'il y a quelque chose de vrai et que les mots manquent en français pour expliciter ce genre de raisonnements. Il est bien agréable de se baser d'un autre support. Un schéma par exemple.

CONCLUSIONS

A.

Dans ce protocole, nous assistons à un moment de compréhension qui se situe au moment où Mathias anticipe les modalités de traitement propres à lui permettre le succès et où il passe d'un ordre de signification à un autre *. Ce moment passé, les commentaires qui suivent ne peuvent pas le recréer (ce n'est pas possible) on a le sentiment que Mathias et moi resassons des choses, que le problème s'est dégonflé et qu'en fait, il n'y a plus rien à comprendre.

Moi-même, en tant qu'observateur et analyste, j'oscille entre deux attitudes. D'une part considérer le sujet (Mathias) et son évolution, passant par différents états de signification, qui à un moment donné réussit à assimiler la propriété numérique inattendue à un (ou plusieurs) pans de sa réalité ; et de l'autre, l'objet (la propriété numérique) qu'il s'agit d'admettre comme un fait auquel il n'y a pas grand'chose à redire (à comprendre). C'est que la signification (et la compréhension) ne se laissent vraiment saisir qu'aux moments de changement, de passage, que comme un processus dont le siège est le sujet. Dès lors que l'analyse néglige les significations antérieures pour se cantonner au niveau atteint, on perd le contact, cela s'évanouit. Et ces questions nous apparaissent comme des faux problèmes à rejeter. Par exemple la question que je pose à Mathias "d'où provient le 1 de b^2-ac = 1" n'a en soi pas beaucoup de sens. Lui en donner (et pouvoir alors entrer en matière) suppose tout un travail. Soit de rechercher d'autres formulations de la propriété. Par exemple ici, vouloir en revenir au traitement numérique (arithmétique) ou encore trouver d'autres traitements. Cf. plus loin un traitement géométrique. Soit de rechercher exactement ce qui est à l'oeuvre dans la propriété, ce qui mène à une généralisation. Quoiqu'il en soit, cela s'accompagne toujours d'un changement de point de vue, donc de signification. Je fais bien sûr l'hypothèse que ceci est toujours possible, du moins du point de vue de la signification. Même si du point de vue de l'objet, il n'y aura pas toujours gain. Je dirai donc finalement qu'il reste toujours quelque chose à comprendre, même si la compréhension elle-même est un phénomène momentané.

*Note : On caractérisera ce passage : soit par l'explicitation de la nouvelle signification auquelle le sujet accède. Ici dans l'exemple de Mathias, c'est sans conteste l'algébrique et en particulier l'écriture des 3 nombres avec une seule variable. (Il n'y a en quelque sorte plus qu'un nombre et deux de ses transformés).

soit par l'explicitation de ce que le sujet rejette. Ici tout le raisonnement numérique et arithmétique sur lequel Mathias n'entre plus en matière.

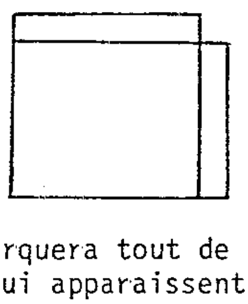
* * *

B.

Revenons-en aux diverses significations. Il y a plusieurs ordres de significations et celles-ci ne se situent pas toutes à un même niveau. Certaines d'entre elles tiennent au système de traitement du problème. C'est-à-dire au support d'objets ou de signifiants sur lequel le sujet travaille ainsi que les actions ou opérations associées. Dans l'exemple, nous en avons vu au moins deux à l'oeuvre, caractérisées par les vocables "algébrique" et "numérique". Remarquons que ce sont des ordres de réalités fort différents, mobilisant des représentations spécifiques (se laissant plus ou moins bien exprimer en langage naturel). Dans l'exemple ci-dessus, les symboles écrits jouaient dans les deux cas un rôle non négligeable. Cependant les comparaisons des symboles 10, 11, 12 et 121-120 que Mathias fait ne sont pas du tout celles qu'il fait sur les formules algébriques. D'autre part, il s'avère que ces opérations sont orientées (sont sous contrôle d'une finalité). Ainsi la traduction d'un système à l'autre ne se fait pas automatiquement ni de but en blanc, même si apparemment le sujet dispose de tous les éléments voulus. Mathias ne décroche que lorsqu'il arrive à rendre les propriétés de la donnée utilisables pour un traitement algébrique (tel qu'il le connaît).

La correspondance entre ces systèmes est globale, mais ne joue pas forcément dans tous les détails. S'il est tout à fait signifiant d'exprimer les 3 nombres consécutifs par (x-1),x, et (x+1), lors du calcul algébrique, la suppression des parenthèses fait apparaître des entités qui n'ont pas leur correspondant direct. Ainsi je puis facilement considérer le calcul numérique de 12 fois 10 comme étant identique à (11+1) fois (11-1) mais dans mon calcul de 12 fois 10 réapparaîtra ni 121ni +11 ni moins 11. D'autre part, le traitement arithmétique considéré dans le protocole ferait plutôt apparaître le découpage -x + (x-1) (c'est plutôt -x et (x-1) qui se compensent que +x et -x qui s'annulent).

Je veux encore examnier ici rapidement un traitement géométrique, par superposition d'un carré d'aire x^2 et d'un rectangle d'aire (x+1)(x-1).



On remarquera tout de suite que ce sont des aires de (x) et de (x-1) qui apparaissent (même découpage que dans le raisonnement arithmétique). Mais examinons ce traitement un plus finement.

a) C'est un nouveau système de traitement. Celui-ci consiste en la construction, à partir des hypothèses du problème (3 nombres consécutifs), de la figure ci-dessus. De cette "organisation" des 3 grandeurs, et de leurs relations, résulte l'apparition d'un petit carré de dimension 1 x 1 qui ne sera pas superposé._ (Attention, une illusion perceptive veut qu'on le situe dans le coin droite en haut, mais c'est une erreur, ce carré n'appartient pas à la figure : ni au carré, ni au rectangle. Le petit carré dont je parle est inclus dans le rectangle —ici représenté horizontal— de dimension 1 fois x). Remarquez que dans ce traitement, la soustraction apparaît plutôt comme une opération de comparaison.

b) On pourrait imaginer un autre traitement géométrique. Qui au lieu de construire une figure, construirait effectivement deux figures en carton. L'une un carré de côté x, l'autre un rectangle de côté (x+1) et (x-1). Puis on ferait la comparaison des surfaces par superposition et découpage. Ce type de traitement est l'exact correspondant d'un traitement numérique et comporte les mêmes limites. Les surfaces auraient été considérées comme des entités indépendantes. Cette remarque montre que la démonstration géométrique consiste bien dans la construction d'une figure qui traduise les relations données de sorte à faire apparaître la propriété visée. (de même le traitement algébrique consiste dans la construction de l'équation - la formule si chère à Mathias).

Finalement, les systèmes correspondent puisqu'ils convergent tous vers la même propriété. De cette correspondance, on peut tirer une caractérisation générale de la question (qui se situe alors à un plan de signification plus élevé). Ici par exemple, il s'avère que dans chacun des cas la démonstration procède en deux temps.

- Je rappelle qu'arithmétiquement la relation entre x^2 et $(x+1)(x-1)$ est décomposée selon le schéma

$$\begin{tikzcd} x.x \arrow[r, "+x"] \arrow[dr] & (x+1).x \arrow[d, "-(x+1)"] \\ & (x+1).(x-1) \end{tikzcd}$$

- Géométriquement, les surfaces : le carré de côté x et le rectangle de côtés (x+1) et (x-1), ne sont pas comparables directement. Il n'y a pas de recouvrement qui fasse apparaître tout de suite la différence. On passe par la comparaison des "bouts qui dépassent" à savoir une bande de 1 de large et de x de large et une bande de 1 de large et de (x-1) de long.

- Enfin algébriquement, et pour être tout à fait précis, le calcul de $(x+1).(x-1)$ doit aussi procéder en deux temps à partir de la distributivité : $(x+1)\cdot(x-1) = (x+1)\cdot x + (x+1)\cdot(-1)$ puis on reprend le développement. (Voir aussi la technique des noms auxiliaires telle que Yves Chevallard l'utilise. pg 27 de la 2e partie de ce cahier).

* *

*

COMMENTAIRE SUR LE TEXTE DE Y. CHEVALLARD

L'ENSEIGNEMENT EN CLASSE DE QUATRIEME

Un fragment, la sous-séquence 2 de la séquence 3

0. Avertissements sur le statut de ce texte.

1. Il s'agit de directives et explications que Y.C. donne à des enseignants qui vont participer à l'expérience prévue. Expérience qui vise à valider/invalider certaines hypothèses (thèses) et en outre à produire de façon suffisemment décantée des phénomènes didactiques.

Il s'agit d'un enseignement expérimental, mais en aucun cas d'un enseignement pilote. A ce jour cet enseignement aura été donné par plusieurs enseignants et par l'un d'eux 4 fois de suite.

2. Pour le bon déroulement de son expérience, Y.C. donne des directives très précises et contraignantes à ses collaborateurs. Mais ceux-ci sont aussi (déjà) des acteurs de l'expérience. Il convient alors de les "former". Y.C. se doit donc d'argumenter, par un commentaire propre, ses décisions. Ainsi les enseignants seront mieux à même de réagir devant les situations imprévues qui ne manqueront pas de se produire.

3. Immanquablement, se profilent derrière les arguments (justifications d'un choix donné) des jugements. Il serait tentant pour un enseignant de les prendre dans leur absolu, et de se prononcer là dessus. Mais ceci ne permettrait pas de comprendre et d'apprécier à juste titre la démarche suivie.

Donc je propose de ne pas prendre ces arguments de Y.C. hors du contexte présent (les explications de Y.C. pour son projet). Si par exemple, Y.C. demande de bannir à tout prix la technique des flèches, c'est qu'il estime qu'elle nuira au bon développement de l'expérience. Bien sûr, si on lui demandait son avis là dessus, il dirait qu'on devrait se passer de tels artifices pédagogiques. Mais, à ce moment, on aurait une <u>opinion</u> sur la question. Tandis qu'ici, dans le texte étudié, une <u>option</u> est prise.

Voici tout d'abord le texte d'Yves Chevallard.

* * * * *

L'ENSEIGNEMENT EN CLASSE DE QUATRIEME

Un fragment, la sous-séquence 2 de la séquence 3

Notes 1. Les séquences ont pour titres :

Séq. 1. NOMBRES ET LETTRES

2. LES OPERATIONS ELEMENTAIRES DANS LE LANGAGE ALGEBRIQUE

Nous sommes ici → 3. CALCUL ALGEBRIQUE ET IDENTITES REMARQUABLES ←

4. EMPLOIS DU LANGAGE ALGEBRIQUE
   I. EQUATIONS

5, EMPLOIS DU LANGAGE ALGEBRIQUE
   II. INEQUATIONS

6. DES DECIMAUX AUX RATIONNELS ET AUX REELS
   I. DES NOMBRES POUR MESURER LES LONGUEURS DU PLAN

7. DES DECIMAUX AUX RATIONNELS ET AUX REELS
   II. OPERATIONS ET ECRITURES FRACTIONNAIRES=

2. A l'époque où j'ai écrit le texte des pages 41 à 54, je ne pouvais me baser que sur le texte d'Y.C. reproduit aux pages 18 à 40. Ce n'est que plus tard que j'ai disposé d'autres éléments d'information dont les titres des séquences ci-dessus.

ACTIVITE 2

Problème 2.1.

1. Choisir trois entiers relatifs consécutifs a, b et c; calculer b^2-ac. Que constatez-vous? A partir de votre observation, et après avoir éventuellement calculé la valeur de l'expression algébrique b^2-ac pour d'autres valeurs entières consécutives a, b et c, formulez une conjecture à propos de cette expression.

2. En donnant à a, b et c des noms bien choisis, démontrez que votre conjecture est vraie.

Problème 2.2.

1. Choisir trois multiples de 4 consécutifs a, b et c; calculer b^2-ac. Après d'autres vérifications numériques éventuelles, formulez une conjecture à propos de la valeur de l'expression b^2-ac (quand a, b et c sont des multiples de 4 consécutifs), puis démontrez votre conjecture en donnant à a, b et c des noms bien choisis.

2. Calculez la valeur de l'expression b^2-ac pour a=5, b=9 et c=13. Quelle réflexion vous inspire le résultat obtenu? Si cela vous intrigue, recommencez avec a=6, b=10 et c=14. Quelle conjecture formuleriez-vous alors à propos de l'expression b^2-ac? Démontrez votre conjecture.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

ACTIVITE 2

Problème 2.1.

Quels que soient les entiers consécutifs a, b et c, on a: $b^2-ac=1$. Tel est le noyau mathématique autour duquel est organisé ce problème. De cette propriété mathématique très simple découle une situation-problème très riche.

p 41 En premier lieu, l'élève va rencontrer ici une propriété du
51 calcul algébrique que l'on illustrera plus amplement avec la Séquence 4: le calcul algébrique offre une capacité monstrative supérieure à celle du calcul numérique, parce qu'il conserve - plus, du moins, que le calcul numérique - la trace (c'est-à-dire la mémoire) des opérations effectuées. Si l'on calcule b^2-ac pour des entiers consécutifs donnés a, b et c (par exemple 4, 5 et 6), on constate que $b^2-ac=1$ (par exemple: $5^2-4\times6=25-24=1$). Mais on ne voit pas pourquoi il en est ainsi. Le calcul algébrique le montre, en fournissant une "explication" du phénomène observé qui a force de démonstration:

$$b^2-ac=(a+1)^2-a(a+2)=a^2+2a+1-a^2-2a=1.$$

Ensuite, cette situation-problème réunit, tout en les maintenant nettement différenciés, trois aspects fondamentaux du rapport à la vérité mathématique que l'élève est en train de construire - aspects qu'il doit assumer à la fois en leur solidarité et en leur non recouvrement:

* la propriété mathématique étudiée ne va pas de soi pour l'élève, elle n'est pas triviale pour lui, et il ne peut l'anticiper (avant tout essai numérique);

* pourtant, un petit nombre d'essais numériques lui suffit pour qu'il découvre (ou identifie) cette propriété et se convainque qu'elle est vraie;

* mais, bien que convaincu que la propriété est certainement vérifiée quels que soient les entiers consécutifs a, b et c, l'élève ne peut cependant plus égaler intime conviction et démonstration: certitude n'est pas preuve.

On notera que ce dernier point ne peut être posé, ici, que p 52 dans la mesure où l'idée de "démonstration avec les lettres", i.e., par le calcul algébrique, est maintenant devenue familière à l'élève, et même attractive pour lui. Au delà de sa conviction en effet, il reste, pour lui, une démonstration à donner parce qu'il sait faire quelque chose (le calcul avec des lettres) qu'il sait pouvoir - le cas échéant - constituer une démonstration; parce qu'il possède, à ce stade, un début de maîtrise (au moins conceptuelle, sinon technique) de l'organe qui permet (en certaines circonstances) d'assumer la fonction démonstrative...

On remarquera encore que quelques élèves peuvent avoir la tentation d'aller directement au calcul littéral, sans passer par le truchement d'essais numériques préalables - exactement comme le ferait sans doute l'adulte mathématicien... La structuration du problème en deux questions séparées doit éviter d'induire cette démarche, qui gênerait la mise en oeuvre de la stratégie, sous-jacente à ce problème, de rencontre par l'élève de certaines difficultés du calcul algébrique.

Avec cette remarque, nous en arrivons, en effet, à un autre trait de la situation mathématique à laquelle l'élève est affronté. Pour la première fois il rencontre le développement d'expressions de la forme $(a+b)^2$, dans le cas du moins où il aurait choisi de nommer a, a+1, a+2 les nombres a, b et c. Il doit alors travailler sur l'expression $(a+1)^2-a(a+2)$. Or, si le calcul de a(a+2) ne doit pas poser, à ce stade, de grosse difficulté, en revanche le calcul de $(a+1)^2$ risque bien de mobiliser le schème d'erreur classique (qu'il n'est pas question de vouloir faire disparaître d'un coup et pour toujours!)

$$(a+b)^2 = a^2+b^2.$$

Toutefois - et cela justifie le parti d'imposer à l'élève des essais numériques préalables - l'apparition de cette erreur est ici en principe <u>contrôlée par le but à atteindre</u>: "trouver 1". Si l'élève écrivait $(a+1)^2=a^2+1$, il obtiendrait:

$$(a+1)^2 -a(a+2)=a^2+1-a^2-2a=1-2a,$$

ce qui ne cadre pas avec le résultat attendu, etc.

Bien entendu, ce mécanisme autocorrecteur inséré dans le problème lui-même (feedback négatif), peut aussi, en un premier temps, fonctionner <u>en amplificateur de l'erreur</u> (feedback positif): l'erreur sur $(a+1)^2$ peut fort bien entraîner - et entraînera presque certainement chez plusieurs élèves - l'apparition d'erreurs compensatoires dans l'effectuation de a(a+1), erreurs qui ne seraient sans doute pas apparues si l'élève avait eu à développer cette dernière expression hors du contexte de contraintes où il la rencontre ici.

Parvenu en ce point, même le bon élève devrait alors se trouver bloqué devant une difficulté pour laquelle il ne dispose pas encore d'une technique d'attaque appropriée. C'est ici que le professeur devra suggérer la technique des "noms auxiliaires" (qui sera ensuite thématisée dans la théorie): posant c=a+1, on obtient $(a+1)^2 = (a+1)(a+1) = (a+1)c$, etc. La rencontre par l'élève des difficultés intrinsèquement liées à l'emploi de cette technique est évidemment essentielle, notamment pour que l'exposé de la théorie soit fructueux pour lui (en le référant à une pratique personnelle de l'objet que l'on y théorise). Parmi ces difficultés, il faut compter (ici) le fait de devoir substituer le produit (a+1)(a+1) au carré $(a+1)^2$, le fait de ne remplacer que l'une des deux occurrences de a+1 par c, le fait de devoir éliminer ensuite la lettre c qu'il avait fallu d'abord introduire, etc.

On notera que le recours (possible) à l'emploi d'identités remarquables connues par coeur - qui pourrait entrer ici en concurrence avec la technique des lettres auxiliaires - ne sera présenté à l'élève qu'ensuite, dans le cadre de la théorie. Il est hors de question de mettre en balance la technique des noms auxiliaires - d'une extrême généralité d'emploi en mathématiques - avec l'usage des identités remarquables, qui recouvre un champ infime du domaine du calcul algébrique.

Les notations précédentes valent encore pour le cas où l'élève aurait retenu un codage du type a=b-1, c=b+1, qui conduit au développement de l'expression $b^2 - (b-1)(b+1)$. Là encore, en effet, l'élève rencontre un calcul qu'il ne sait pas spontanément effectuer (et là encore il y a, sous-jacente, une des identités remarquables qui seront présentées dans la théorie). Ce codage devrait être le fait d'une forte minorité d'élèves. Lors du corrigé collectif, le professeur envisagera les deux manières d'aborder le problème: la technique des lettres auxiliaires, introduite par exemple à l'occasion du traitement du codage majoritaire (quel qu'il soit), pourra être réinvestie, et sa maîtrise approfondie, lors du traitement du second type de codage envisagé.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

ACTIVITE 2

Problème 2.2.

Question 1

Cette question est bâtie autour d'un argument mathématique tout semblable à celui du Problème 2.1. : si a, b et c sont des multiples consécutifs de 4, on a: $b^2-ac=16$. La ligne d'attaque est la même que précédemment et la technique des noms auxiliaires va pouvoir y être réinvestie, et y être approfondie. Le calcul à effectuer est seulement plus complexe: il faut maintenant développer $(4n+4)^2$ et $4n(4n+8)$, ou encore $(4n)^2$ et $(4n-4)(4n+4)$ (selon le codage adopté).

Dans la conduite de cette phase de l'activité, il apparaît indispensable de prévenir les fuites en avant dans le calcul algébrique non finalisé - tendance déjà soulignée à propos du Problème 2.1. - en demandant aux élèves de faire le point, après quelques minutes, sur le résultat numérique trouvé et la conjecture qu'il convient d'en faire découler. (Oralement, le professeur pourra suggérer de prendre pour valeurs a, b et c les entiers 4, 8 et 12 - parmi d'autres choix possibles).

Lors du corrigé collectif, selon l'habileté atteinte, le professeur pourra commencer à suggérer, à propos du calcul de $4n(4n+8)$, le recours oral à la technique des lettres auxiliaires; en revanche il semble indispensable de poser par écrit les changements de noms nécessaires pour effectuer le développement de $(4n+4)^2$ ou de $(4n-4)(4n+4)$.

Enfin, les difficultés des élèves face au calcul de $(4n)^2$, etc., devront, à ce stade, être maintenant laissées entièrement à leur charge.

En conclusion de cette question, le professeur fera dégager clairement le résultat atteint: si a, b et c sont des multiples de 4 consécutifs, $b^2-ac=16$. Cette institutionnalisation sera utile pour donner son sens à la question 2.

Question 2

La question précédente a ceci de particulier qu'elle constitue un problème mal posé: l'hypothèse faite (a, b et c multiples de 4 consécutifs) est surabondante, et le même résultat peut être obtenu à partir d'une hypothèse adoucie,
p 54 supposant seulement que a, b et c sont en progression arithmétique de raison 4:

$$b^2-ac=(a+4)^2-a(a+8)=a^2+8a+16-a^2-8a=16.$$

C'est précisément ce qu'il s'agit de faire découvrir aux élèves.

La phase de l'essai numérique est à cet égard bien évidemment essentielle, et cela explique le libellé de la question: "calculez la valeur...pour a=5, b=9 et c=13". Le calcul qui doit ensuite permettre d'apporter la preuve de la conjecture que les essais numériques proposés auront autorisé à poser est d'une complexité nettement moindre que celui rencontré dans la question 1. L'attention se portera alors sur le problème "épistémologique" soulevé par le problème lui-même.

p 51 Ce problème épistémologique est le suivant: la généralisation de la propriété étudiée dans le Problème 2.1., telle qu'on l'a retenue dans la question 1 du présent problème, est une mauvaise généralisation, bien qu'elle constitue (au regard de l'histoire de la classe) une généralisation attractive. En effet, jusqu'à présent, au delà de la notion d'entiers consécutifs, on a rencontré la notion de nombres pairs consécutifs (dans la suite des nombres pairs), de nombres impairs consécutifs (dans la suite des nombres impairs), etc. D'où l'idée de tenter de "généraliser" l'énoncé "trois entiers consécutifs" par l'énoncé "trois multiples de 4 consécutifs" (par exemple). Or cette généralisation s'avère - par rapport à la propriété étudiée - n'être pas la bonne....On remarquera que cette situation est somme toute banale dans le travail du mathématicien: le problème proposé a ainsi, là encore, une valeur d'introduction à la culture mathématique.

Au delà de la question 2, l'exercice 7 fournit la formulation la plus large que l'on puisse atteindre selon la voie ouverte par le travail mené à bien dans la question 2; il pourra venir très naturellement en complément de cette activité.

THEORIE 2

Dans l'Activité 2 on a été amené, afin de mener à bien certaines démonstrations, à donner aux nombres ou expressions que l'on considérait des noms "bien choisis", c'est-à-dire des noms montrant des propriétés de ces nombres ou expressions que l'on jugeait (à tort ou à raison) importantes pour la démonstration à effectuer.

Ainsi, dans la question 2 du Problème 2.1., vous avez sans doute été conduit à faire les choix suivants: a conserve son nom (à savoir, a); b est rebaptisé a+1 (nom qui montre qu'il est le successeur de a); c est rebaptisé a+2 (nom qui montre qu'il est le successeur du successeur de a). Dans la question 1 du Problème 2.2., vous avez peut-être choisi de poser: a=4n, b=4n+4 et c=4n+8; tandis que, dans la question 2 de ce même problème, il convenait de choisir les noms a, a+4 et a+8.

Il arrivera souvent que, dans une démonstration ou dans un calcul, on soit amené à introduire des <u>noms auxiliaires</u> qui permettent la démonstration ou facilitent le calcul. Cette idée du "jeu sur les noms" est importante parce qu'elle permet souvent de se tirer d'affaire dans des situations délicates.

Voici un exemple: supposons que l'on veuille développer l'expression $(a+b)(2a+b)$. Appelons c l'expression $2a+b$. On a alors: $(a+b)(2a+b)=(a+b)c=ac+bc$, en vertu de la distributivité; on peut maintenant calculer ac et bc (séparément) en remplaçant c par l'expression qu'il représente, soit $2a+b$:

$$ac=a(2a+b)=2a^2+ab;$$

$$bc=b(2a+b)=2ab+b^2.$$

Finalement il vient:

$$(a+b)(2a+b)=2a^2+ab+2ab+b^2=2a^2+3ab+b^2.$$

On remarquera que la lettre c, introduite pour faire démarrer le calcul, disparaît à la fin du calcul. Cette règle est générale: les <u>lettres auxiliaires</u> introduites dans un calcul <u>doivent disparaître en fin de calcul</u>, et l'on doit revenir aux seules lettres intervenant dans l'expression donnée au départ.

Une autre manière de faciliter les calculs consiste à connaître par coeur certaines identités algébriques que l'on aura souvent à employer au cours des calculs, et que l'on appelle pour cela identités remarquables. Il en est ainsi par exemple de l'identité

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

(que l'on démontrera plus loin). Dans les problèmes de l'Activité précédente, on aura pu rencontrer ainsi le calcul (c'est-à-dire, ici, le développement) des expressions

$$(a+1)^2,$$

$$(a+4)^2,$$

$$(4n+4)^2.$$

En ce qui concerne la première expression, l'identité remarquable indiquée ci-dessus nous donne, pour b=1:

$$(a+1)^2 = a^2+1^2+2a.1 = a^2+2a+1.$$

En ce qui concerne la deuxième, on obtient de même, en posant cette fois b=4:

$$(a+4)^2 = a^2+4^2+2a.4 = a^2+8a+16.$$

En revanche, pour la troisième expression, il faut combiner l'usage de l'identité avec l'emploi de lettres auxiliaires: on posera a=4n et b=4 et on aura alors

$$(4n+4)^2 = (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab =$$

$$(4n)^2+(4)^2 + 2(4n).4 = 16n^2+32n+16.$$

Le théorème suivant donne les trois identités remarquables les plus importantes:

Théorème 1

Les égalités algébriques suivantes sont des identités:

1. $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$;
2. $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$;
3. $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$.

Démonstration:

* On utilise la technique des lettres auxiliaires. Posons

$c=a+b$. Il vient:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)c = ac+bc;$$

puis, en "faisant disparaître" c (c'est-à-dire en remplaçant c par a+b), on obtient:

$$ac+bc = a(a+b)+b(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+b^2+2ab.$$

* Les identités remarquables 2 et 3 seront démontrées à titre d'exercice (voir l'Exercice 12).

A propos des identités remarquables, il est important de noter que <u>l'on n'a pas</u>

$$(a+b)^2 = a^2+b^2,$$

<u>mais</u> $$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab.$$

De même, on n'a pas $(a-b)^2 = a^2-b^2$, mais: $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$.

L'emploi des identités remarquables peut se faire

* soit pour <u>développer</u> une expression, comme dans les exemples déjà vus;

* soit, en sens inverse, pour <u>factoriser</u> une expression; on les utilisera alors "en sens contraire":

$$a^2+b^2+2ab = (a+b)^2,$$
$$a^2+b^2-2ab = (a-b)^2,$$
$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

Voici des exemples de factorisation à l'aide de chacune des identités remarquables étudiées:

1. Soit l'expression $4x^2+12x+9$; on a: $4x^2+12x+9 = (2x)^2 + 2(2x).3 + 3^2 = (2x+3)^2$.

2. Soit l'expression $9x^2-12x+4$; on a: $9x^2-12x+4 = (3x)^2 - 2(3x).2 + 2^2 = (3x-2)^2$.

3. Soit l'expression $4x^2-25$; on a: $4x^2-25 = (2x)^2-5^2 = (2x+5)(2x-5)$.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

THEORIE 2

A la fin de l'Activité 2, la technique des lettres auxiliaires est en principe comprise et volontiers manipulée par les élèves. La Théorie 2 a pour objet d'en constituer l'institutionnalisation dans l'histoire de la classe.

p 49 Il est important de souligner à nouveau (cela a déjà été fait dans le commentaire de l'Activité 2) que le recours a des "noms auxiliaires", traditionnellement introduits par les expressions du type "Posons x =...", "En posant I=...", etc., est omniprésent en mathématiques dans tous les domaines du calcul. L'initiation des élèves à cette pratique essentielle doit donc être vue comme un moment nécessaire et riche de potentialités de leur socialisation mathématique.

p 48 On a là un exemple remarquable de ce qu'on peut appeler un "schème d'action" qui, bien que n'étant pas étiqueté par le programme, doit être regardé comme un "contenu cognitif" devant figurer en bonne place dans le répertoire des objectifs d'apprentissage à ce niveau du cursus des études. On notera à cet égard que le mutisme du programme à son endroit n'est vraisemblablement en rien le résultat d'une décision didactique explicite. Car ce schème d'action n'est pas davantage étiqueté dans le langage mathématique savant lui-même: ni objet mathématique (recevant un nom et faisant l'objet d'une définition et d'une étude explicite), ni objet paramathématique (ayant un nom, donc pouvant être nommé, et utilisé comme outil mais non pris comme objet d'étude), il est un objet "protomathématique" - indispensable à la pratique mathématique quoiqu'innommé, ne faisant pas l'objet d'un enseignement (de la part de l'enseignant) bien que devant nécessairement faire l'objet d'un apprentissage (de la part de l'élève).

A la technique des lettres auxiliaires (pour laquelle nous avons donc dû choisir un nom - celui de "technique des lettres auxiliaires", précisément - puisqu'un tel nom faisait défaut), qui appartient en propre à la culture et à la pratique mathématiques, on opposera les créations didactiques plus ou moins popularisées par certains manuels, telle (ce qu'on peut nommer) la "technique des flèches". De semblables créations (qui participent du processus de transposition didactique) ne sont en soi nullement illégitimes. Mais ici l'introduction de la technique des flèches doit être absolument écartée, pour deux ordres de raisons, solidaires mais distinctes:

- d'une part, elle se pose en concurrente, et en concurrente tout à fait déloyale (pour des motifs que nous allons voir) avec la technique des lettres auxiliaires: c'est l'une ou l'autre, et l'une à l'exclusion de l'autre, qui sera apprise par l'élève; le "détour" par la technique des flèches (envisagé par exemple à titre de préalable d'accès plus facile, etc.) ne se contente pas d'allonger le cheminement de l'élève vers la technique des lettres auxiliaires, il l'interdit pour longtemps: une fois qu'il aura acquis la technique des flèches, réalisant en cela un investissement vécu par lui comme gratifiant (au niveau d'activité mathématique où il évolue), le passage à une autre technique deviendra à la fois (momentanément) inutile et beucoup plus difficile (cas particulier du problème général du passage d'un modèle d'action efficace et bien maîtrisé à un nouveau modèle d'action);

p 52 - d'autre part, la technique des flèches l'emporte aisément, auprès de l'élève, sur la technique des lettres auxiliaires parce qu'elle lui apparaît comme une technique adaptée, faite pour lui: en ce combat elle gagne à tout coup; pourtant cette facile victoire doit être regardée comme une défaite de l'enseignement vu précisément comme socialisation et acculturation, en ce qu'elle substitue à un élément culturel "authentique" un élément fruit d'un artificialisme didactique qu'ici rien n'appelle (la technique des lettres auxiliaires se révélant en fait d'un apprentissage très simple), et qui permet seulement (au professeur aussi bien qu'à l'élève) de faire l'économie de l'affrontement avec la culture mathématique "adulte", au bénéfice d'un repliement et d'un enfermement dans une sous-culture "bébé" expressément conçue à cette fin - repliement qui vient ainsi compromettre le travail engagé jusque là sur le contrat didactique, en arrêtant son évolution sur des formations archaïques ou regressives.

p 49 La question des identités remarquables doit faire l'objet
50 de remarques voisines, bien que le problème, ici, soit
51 autre. S'il constitue en effet un élément de la culture de la classe autour duquel enseignant et élèves peuvent se retrouver dans une convivialité attractive (le thème se prête au jeu de miroirs de l'exercice stéréotypé, indéfiniment renouvelable, lieu où les partenaires de la relation didactique communiquent aisément parce que le contrat qui gère leur rencontre peut être finement défini et demeure précisément contrôlé), l'emploi des identités remarquables ne recouvre pas, et de loin (sauf à en opérer une réduction nettement arbitraire) le même champ de mise en oeuvre que la technique des lettres auxiliaires: le

simple passage de (a+b)(a+b) à (a+b)(2a+b) suffit à le disqualifier. La coprésence des deux thèmes y gagne sa viabilité.

Cela noté, on observera cependant que la tradition d'enseignement, pour les raisons mêmes que l'on a indiquées rapidement ci-dessus, a pu accorder au thème des identités remarquables une place sans rapport avec son importance mathématique réelle: en suivant le plan d'action proposé ici ainsi que dans les exercices qui suivent - lequel ne marque aucune concession sur ce point - on se gardera donc de toute nostalgie à cet égard...

EXERCICES 2

Exercice 7

Soit a un entier quelconque et soient $b=a+k$ et $c=b+k$, où k est un entier donné. Démontrez que b^2-ac a une valeur indépendante de a (ne dépendant que de k).

Exercice 8

Développer les expressions suivantes:

$(a+5)(b+3)$; $(x+6)(x+5)$; $(2a+5)(3a+4)$.

Exercice 9

Développer les expressions suivantes:

$(3x+7)(2x+1)$; $(7x-5)(2x+3)$; $(3y-2)(4y-7)$.

Exercice 10

Développer les expression suivantes:

$(1+3x)(1-4x)$; $(x+2)(x^2+xy+y^2)$; $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Exercice 11

Développer les expressions suivantes:

$(x-y)(x^2+xy+y^2)$; $(x+a)(x^2+2ax+a^2)$.

Exercice 12

Démontrez les identités remarquables $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$ et $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Exercice 13

Développer chacune des expressions ci-après de deux façons:

1. directement, à l'aide de la propriété de distributivité (et éventuellement en introduisant des noms auxiliaires);

2. à l'aide de l'une des identités remarquables (et éventuellement en introduisant des noms auxiliaires):

$(2x+7y)^2$; $(3a-10b)^2$; $(1-5xy)^2$; $(a+3b)(a-3b)$.

Exercice 14

Utiliser une identité remarquable et éventuellement des lettres auxiliaires pour développer les expressions suivantes:

$(a+b+1)^2$; $(x-y+z)^2$; $(4a-2b-1)^2$.

Exercice 15

Développer complètement l'expression

$(a+(b+c))(a-(b+c))$.

Exercice 16

Montrez que chacune des expressions suivantes peut s'écrire comme un produit de deux expressions algébriques:

$3ab+2a$; $4xy+2y^2$; x^3+3x^2-x; a^2b+ab^2-abc.

Exercice 17

En utilisant une identité remarquable, montrez que chacune des expressions algébriques suivantes peut s'écrire comme un produit de deux expressions algébriques:

$x^2+14x+49$; $a^2b^2+8ab+16$; $y^2-2xy+x^2$;

$1-8x+16x^2$; $9a^2-4b^2$; $1-9a^2$.

SEQUENCE 3 - COMMENTAIRE

EXERCICES 2

Comme toujours, les exercices sont une partie intégrante du travail proposé: ils ne sauraient être regardés comme facultatifs, et l'on ne saurait en dispenser les élèves. C'est par eux que pourra être "fixé" (consolidé) le travail réalisé aussi bien dans l'Activité qu'à l'occasion de la Théorie.

p 48 L'exercice 7 constitue un prolongement des problèmes
54 résolus dans l'Activité (comme on l'a déjà indiqué à l'occasion du commentaire du Problème 2.2.). Notons à cet égard que ce prolongement permet (s'il en était besoin) de mieux séparer encore le registre de ce qui recevra le statut de "simple" événement, appartenant à l'histoire de la classe, et qui se conservera, désormais, à titre de souvenir (pouvant, le cas échéant, être rappelé en tant que tel, comme présent dans la mémoire collective de la classe), d'avec le registre de l'"institutionnalisé" (concepts, techniques, méthodes, résultats), recevant de ce fait le statut de ce qui est toujours actuel et qui peut, à tout moment, être mobilisé sans anachronisme ni rupture de contrat. Dans la situation qui nous occupe, le problème résolu (si a, b et c sont tels que $b=a+k$ et $c=b+k$, alors b^2-ac est une constante indépendante de a, égale à k^2) se situe dans l'événementiel (il aura constitué un moment de la pratique mathématique de la classe), et on peut gager, sans gros risque, que ce qui s'en conservera dans la mémoire des élèves en sera surtout la mémoire "affective" (le plaisir ou le déplaisir, l'émotion ou l'indifférence dont il aura été l'occasion), bien plus que le résultat technique en lui-même. En revanche, c'est l'invariant dégagé de la variété des problèmes où son emploi comme outil s'est révélé indispensable, à savoir (ici) la "technique des lettres auxiliaires", qui devrait venir fonctionner comme institutionnalisé. A cet égard, l'assomption théorique qu'en réalise l'enseignant (dans la Théorie 2) n'est que la marque formelle de cette volonté didactique, en même temps que son moyen indispensable. Mais - c'est ici le lieu de le souligner - elle n'en est pas l'unique moyen: cette institutionnalisation doit être reçue des élèves, et cette reconnaissance à opérer "dans le camp de l'élève" trouve son moyen dans les Exercices (ainsi, bien sûr, que dans les interrogations écrites et devoirs: l'évaluation vient confirmer - ou, en cas de maladresse, infirmer ou seulement rendre incertain - le mouvement amorcé dans le travail "libre", non assujetti à la

p 54 notation). C'est à la lumière d'une telle analyse qu'il convient d'envisager l'intérêt stratégique de l'exercice 7 tout particulièrement.

Les exercices 8 à 11 sont ainsi des occasions d'emploi de la technique des lettres auxiliaires. En rupture avec un principe général respecté depuis le début, et respecté notamment dans l'Activité 2 de cette séquence, le moyen à mettre en oeuvre pour répondre à la tâche exigée de l'élève, et cette tâche elle-même, échappent à la finalisation par un problème à résoudre: la consigne n'est pas autre chose que l'exigence formelle de "développer". Il convient de prendre la mesure de cette décision didactique en en précisant la portée et le sens.

p 41 Les besoins de l'étude du numérique ont conduit, dès la Séquence 1, à introduire des "expressions algébriques", considérées comme l'outil essentiel dans cette étude. Présenté d'abord en tant que simple paraphrase ostensive de propriétés du numérique, l'outil algébrique a reçu ensuite - dans la Séquence 2 - un statut d'autonomie relative face au numérique: permettant d'énoncer les règles qui régissent le numérique (et donc introduit à titre de moyen de formulation), il se voyait doté, par cela même, d'une structure formelle (en gros, celle de l'anneau de polynômes Z [x,y,...]). Pourtant cette structure ne sera pas exploitée, à ce niveau du cursus, pour faire de ce qui doit demeurer un instrument du travail mathématique un objet d'étude considéré pour lui-même (comme il en irait, à un autre niveau, si l'on décidait d'étudier les anneaux Z[x], Z[x,y] , etc.). Ce point de doctrine doit être nettement marqué, même si la dérive vers une étude formelle (fort intéressante du point de vue du mathématicien, et nécessaire à un niveau plus avancé) apparaît ici peu probable...

Les expressions algébriques constituent un outil d'étude et leur étude propre n'est développée, transitoirement, que dans la mesure où cela apparaît nécessaire à leur emploi ultérieur comme outil: tel est donc bien le point de vue général qui prévaut dans la construction proposée ici pour la classe de quatrième. A cette règle de principe, on ne fera que de rares exceptions: dans la Séquence 5, il en sera ainsi de la notion d'équation du premier degré (qui jouera ensuite un rôle important dans la définition de la notion d'ensemble de nombres). Dans la présente séquence, et dans le cadre des exercices, nous faisons un sort à part au développement des expressions algébriques, en ce sens qu'on en promeut (momentanément) le fonctionnement *in vacuo*, du moins sous cette forme particulière qu'est le développement.

La procédure de développement, en effet, a ceci de particulier (si on la compare, notamment, à la procédure inverse, de factorisation) qu'elle peut être régie (en dehors de toute finalisation extrinsèque) par un algorithme "intrinsèque" dont les élèves connaissent, à ce stade, les premières étapes. A partir (par exemple) de l'expression (2a+5)(3a+4) (Exercice 8), ils peuvent ainsi passer à l'expression "brute"

$$(2a)(3a) + (2a).4 + 5.(3a) + 5.4$$

grâce à la technique des lettres auxiliaires. Il s'agit alors ici, à travers les exercices proposés, et parallèlement à l'approfondissement de la technique des lettres auxiliaires, d'assurer leur maîtrise des étapes suivantes de l'algorithme de développement: "réduction des termes semblables", mise en ordre des termes obtenus en fonction du degré par rapport à la lettre (ou à l'une des lettres) y figurant, etc.

p 52 Bien entendu, il n'en reste pas moins que le recours à la
procédure de développement entendue en son sens large (et
non au sens restreint défini par l'algorithme), lorsque la
situation est finalisée par un problème à résoudre, suppose
que l'on sache, le cas échéant, déroger judicieusement à la
procédure algorithmique de développement <u>stricto sensu</u>, en
réalisant un développement "incomplet", un arrangement
p 50 particulier des termes, etc.. L'algorithme de développement
demeure bien une procédure particulière à mettre en oeuvre
lorsqu'aucune condition extérieure ne lui fait préférer une
variante mieux adaptée au contexte d'emploi de la procédure
générale de développement.

p 49 On notera par ailleurs que l'algorithme de développement ne fait ici l'objet d'aucune institutionnalisation particulière: sa maîtrise relève entièrement d'une pratique qui, volontairement, n'est pas reprise au niveau d'une théorisation explicite. Ces exercices sont donc le lieu où une telle pratique doit prendre forme; et leur importance à cet égard ne saurait être exagérée...

p 47 Cela dit, on se contentera d'observer que les expressions
50 choisies présentent une gradation dans la complexité de la
tâche offerte: présence d'abord de deux lettres différentes, qui écarte encore le problème de la réduction des termes (littéraux) semblables ((a+5)(b+3)); passage ensuite au cas de lettres identiques, dans lequel cette réduction devient nécessaire ((x+6)(x+5)); puis apparition de coefficients numériques différents de 1 ((2a+5)(3a+4)) (<u>Exercice 8</u>). <u>L'exercice 9</u> prolonge d'abord l'exercice 8 ((3x+7)(2x+1)) avant d'introduire des facteurs contenant un

puis deux signes moins ($(7x-5)(2x+3)$ puis $(3y-2)(4y-7)$); les exercices 10 et 11 accroissent encore la complexité de la tâche, selon une progression d'ensemble évidente.

Les exercices 12 à 17 ont pour objet la mise en oeuvre des identités remarquables - en concurrence éventuelle, ou en conjonction, avec la technique des lettres auxiliaires.

L'exercice 12 provient du renvoi en exercice d'une partie de la démonstration du Théorème 1, et ne propose aucune difficulté particulière à ce stade.

Les exercices 13 à 15 concernent le développement. L'exercice 13 fait se confronter les deux techniques de développement présentées aux élèves. L'exercice 14 suppose au contraire leur emploi conjoint, de même que l'exercice
p 49 15. Ce dernier donne l'occasion de souligner (à l'intention de l'enseignant, non de l'élève!) que la notion d'algorithme de développement (ou de développement "complet") ne se définit pas aussi simplement qu'on a pu le laisser entendre dans les notations précédentes....

p 51 Les exercices 16 et 17 portent sur la factorisation. Le sujet a été effleuré dans les exemples qui closent la Théorie 2. Contrairement au développement, la factorisation - telle qu'on la pratique traditionnellement à ce niveau - n'est régie par aucun algorithme universel. S'il est convenu par exemple que le résultat de la factorisation de $4xy+2y^2$ doit être $(2y)(2x+y)$ (factorisation "maximum" - dans $Z[x,y]$), il n'y a cependant aucune raison mathématique de refuser une réponse comme $y(2(2x+y))$, qui montre par exemple que, si x et y désignent des entiers relatifs, le nombre $4xy+2y^2$ est le produit de y par un nombre pair (ce qui peut, le cas échéant, avoir quelque intérêt), etc.

p 52 En général, la pratique de ce qu'on peut appeler la "factorisation ostensive complète" ne devra pas recevoir une attention exclusive. S'il est vrai que, par exemple, ce point de vue conduira à écrire

$$x^3+3x^2-x = x(x^2+3x-1)$$

(factorisation dans $Z[x]$), il ne faut pas perdre de vue que, plus tard, dans l'étude du comportement asymptotique des fonctions d'une variable réelle, l'élève sera amené par exemple à écrire aussi l'égalité

$$x^3+3x^2-x = x^3(1+3/x-1/x^2),$$

qui est une factorisation légitime (et nécessaire) - mais dans Q(x) cette fois...

L'une des "difficultés" didactiques essentielles de la
factorisation à ce niveau est liée, en fait, au <u>contrat</u>
<u>didactique</u>, en ce sens que l'élève, mis devant la tâche <u>de</u>
<u>faire croître la complexité ostensive</u> des écritures qu'il
doit "gérer", ne s'y sent pas spontanément autorisé en
général (toute sa pratique antérieure - notamment en calcul
numérique - l'ayant installé dans l'habitude de travailler
p 47 à complexité ostensive <u>décroissante</u>). La classe de
52 "symptômes" que l'on rencontre alors, en un premier temps,
est faite en particulier de "refus d'aller plus loin". Ces
blocages momentanés ne doivent pas induire à diagnostiquer
hâtivement la présence de difficultés mathématiques
profondes. C'est le travail sur le contrat didactique qui,
en permettant une banalisation des rapports de l'élève avec
la factorisation, assurera la levée de ces blocages. Dans
un premier temps, ce travail consistera en une autorisation
expresse à aller plus loin - sous la forme didactique de
<u>l'obligation</u> d'aller plus loin...

ANNEXE

- Interrogation écrite n°3

- Devoir n°3

N.B. Cet ensemble se rapporte à la fin de la séquence 2 et au début de la séquence 3.

p 53 Interrogation écrite n° 3

1. a) Pour démontrer que si $-a=-b$ alors nécessairement $a=b$, un élève a proposé la démonstration suivante:

(1) Si $-a=-b$ alors $(-1)a=(-1)b$;

(2) Si $(-1)a=(-1)b$ alors $a=b$.

Justifiez chacune des deux étapes de cette démonstration.

b) Pour démontrer la même propriété, un autre élève a proposé la démonstration suivante:

(1) Si $-a=-b$ alors $-(-a)=-(-b)$;

(2) Si $-(-a)=-(-b)$ alors $a=b$.

Justifiez la <u>seconde étape</u> de cette démonstration.

c) Démontrez, en utilisant la règle de simplification de l'addition et le résultat ci-dessus, que l'on a la propriété suivante:

Si $a-b=a-c$ alors $b=c$.

Comment proposeriez-vous d'appeler cette propriété ?

2. Pour chacune des égalités algébriques ci-après, indiquez

-si elle est vraie, et alors justifiez-la à l'aide des résultats du cours (axiomes et théorèmes),

-si elle est fausse, et alors donnez un contre-exemple numérique.

* $9a-5=4a$
* $7a^2+6a=13a$
* $9a+5ab=a(9+5b)$
* $2a+3b=5(a+b)$.

3. Afin de calculer la valeur de l'expression numérique

$$(12+(-(-8)))(-2) + 5(2^2+(-2)^2)$$

recopier et compléter les calculs suivants:

$2^2+(-2)^2 = 4+\ldots=$.

$5(2^2+(-2)^2) =$.

$12+(-(-8)) = 12+\ldots=$.

$(12+(-(-8)))(-2) =$.

$(12+(-(-8)))(-2) + 5(2^2+(-2)^2) =$

p 53 Devoir n° 3

1. Etant donnés deux entiers relatifs a et b, on considère le nombre

$$X = (7a+8b) - (2a-2b).$$

a) Calculez X pour les valeurs suivantes de a et b:

a=1 et b=-1; a=2 et b=-1; a= -1 et b=0; a=-2 et b=0; a=1 et b=2; a=2 et b=2.

b) Donnez une écriture du nombre X qui montre que ce nombre est toujours multiple de 5.

c) Démontrez que si a est pair X est pair.

d) Démontrez que si a est impair X est impair (dans cette dernière question, on utilisera le fait que le produit de deux nombres impairs est impair).

2. On considère le nombre $Y = 5(a+2b) - 7(a-b)$.

a) Calculez Y pour les valeurs suivantes de a et de b:

a=b=1; a=-1 et b=0.

b) Ecrivez Y sous la forme de la somme d'un multiple de a et d'un multiple de b.

c) Ecrivez Y sous la forme de la somme d'un multiple de b-a et d'un multiple de b.

Passons à l'analyse de ce texte

1. Cadre de départ

Préside à l'analyse, l'exigence de tout traiter dans les rapports entre les 3 termes du système didactique

$$\begin{tikzcd}
\text{Elève} \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & & \text{Professeur} \arrow[dl, leftrightarrow] \\
& \text{Savoir} &
\end{tikzcd}$$

Il ne faudra jamais réduire le champ en oubliant l'un des 3 protagonistes, et en se centrant sur des analyses partielles ; par exemple : $E \longleftrightarrow S$ (psychopédagogie), $E \longleftrightarrow P$ (psychologie sociale ou psychanalyse) ou encore $P \longleftrightarrow S$ (épistémologie, programmatique). Il ne suffit pas seulement de rendre compte de ce qu'on désire enseigner (ou désire voir acquérir) mais de considérer l'ensemble de ce qui se passe en classe qui puisse se rapporter spécifiquement à l'enseignement de l'algèbre. Tous les éléments doivent être situés les uns par rapport aux autres.

La thèse d'Y.C. est que cette organisation des rapports permet d'accéder à un certain nombre de phénomènes didactiques spécifiques à la matière enseignée (puisque celle-ci n'est elle non plus jamais exclue) de les observer et éventuellement de les reproduire. Savoir si cette approche est la seule envisageable ou la meilleure, ou la plus efficace, etc.... est une question qui me dépasse. Je me demande même si cela ne reviendrait pas, analogiquement, à se poser la question de savoir si l'emploi exclusif du thermomètre suffit à étudier la thermodynamique.

Je vais donc commencer par retrouver, dans le texte d'Y.C. l'analyse de ce qu'il s'agit d'enseigner, puis celle de la progression de cet enseignement. Ensuite j'aborderai la façon dont la classe s'organise autour de ceci.

* * *

2. Contenu à enseigner.

Se référer à la page 33 depuis le par. qui commence par : "Les besoins de l'étude du numérique...." jusqu'à la fin de cette page, ainsi qu'à la page 19 , par. 2 : "En premier lieu ....".

Y.C. part d'une analyse de l'algèbre. Analyse épistémologique, fonctionnaliste de cette matière chez les mathématiciens mais aussi à l'école. Il place au départ l'articulation algèbre/étude du numérique, ce dernier jouant le rôle de "réalité" (quasi physique) dont l'algèbre est alors un outil privilégié d'expression et d'investigation (à l'image du rapport : géométrie $\longrightarrow$ figures géométriques). On travaillera alors les expressions algébriques qui, au cours de la progression s'étofferont et se définiront de plus en plus comme des objets à part entière, gagnant en autonomie. Mais on n'ira pas jusqu'à étudier la structure de ce modèle ($\mathbb{Z}[X]$) et la considération de ce rapport algèbre/numérique marque les limites dans lesquelles cet enseignement se cantonnera.

Rem. Une petite remarque s'impose. Actuellement, à l'école, on parle plus volontiers de polynôme (voire de fonction polynôme) que "d'expressions algébriques, ou littérales". Une analyse de Y.C. tend à montrer que cette notion de polynôme est présentée comme un préconstruit. C'est-à dire que l'élève est appelé à porter attention à cette notion, comme de quelque chose qui préexiste à l'étude qu'il va faire (avec son maître). On lui dira : voilà des polynômes, en lui montrant des specimens mais sans lui donner de définition ni de critère précis de reconnaissance. Ainsi tout particulièrement $\sqrt{x}$ n'est pas un polynôme mais cette question est toujours éludée. De là, se crée un manque, autour duquel toutes les pratiques d'algèbre de ce niveau d'enseignement vont s'organiser (tourner).

Une notion préconstruite est superflue. Ainsi Y.C. a-t-il banni ce terme de son enseignement. Il semble d'ailleurs que le fait suivant lui donne raison. Je veux dire qu'aucun de vous* n'a remarqué jusqu'ici cette absemce (bien sûr me direz-vous, comment savoir que plus tard il ne va pas l'aborder, et je vous concède ceci). Mais disons que dans ce qui a été discuté et analysé, la nécessité d'un recours à ce mot, et donc d'une préparation idoine d'un enseignement des polynômes ne s'est pas fait sentir.

Voici maintenant comment les 5 premières séquences de cet enseignement se succèdent :

Séquence 1. Introduction des expressions algébriques comme paraphrases ostensives de propriétés numériques. D'emblée on introduit l'algèbre comme outil.

Séquence 2. "L'outil algébrique a reçu ensuite (à cette séquence 2 précisément) un statut d'autonomie relative face au numérique : permettant d'énoncer les règles qui régissent le numérique" (et plus seulement de paraphraser des propriétés numériques observées). "Introduit à titre de moyen de formulation, il se voyait doté, par celà même, d'une structure formelle (en gros, celle de l'anneau de polynômes)
Pourtant cette structure ne sera pas exploitée pour faire un objet d'étude pour lui-même".

Remarques :

1. On voit donc énoncée une limite du projet d'enseignement.

2. Dans cette séquence (comme on peut le voir aux devoirs 3 et interrogation 3), on pratique le calcul algébrique dans un contexte de démonstration. C'est ainsi que Y.C. veut donner aux expressions algébriques ce statut de relative autonomie qui se marquera par une fonction de l'algèbre : formuler des règles du numérique, et donc un modèle de structure.

3. Les règles formulées ne sont pas toujours évidentes (qu'est-ce qui fait qu'une propriété numérique (ex. l'arsocréativité) accède à ce rang de règle ?) Ainsi l'activité 2 de la séquence 3 que

*je m'adressais ici à mes étudiants qui durant plusieurs séances avaient analysé le texte de Y.C.

l'on va étudier plus loin donne un exemple de cas où la règle qui régit une propriété numérique (qui "l'explique") n'apparaît pas immédiatement (cf. suite, pg 54 point B).

<u>Séquence 3.</u> Y.C. prévoit deux dérogations à ce principe de ne pas étudier l'algébrique pour lui-même. La première de ces dérogations se situe à cette séquence. Ainsi va-t-on demander aux élèves de <u>développer</u> "in vacuo" (c'est-à-dire sans s'occuper de ce qu'elles "expriment", ni même de "démontrer") certaines expressions algébriques. Ceci est mis en oeuvre dans les exercices, faisant nettement contraste avec le reste de la séquence. Je préciserai plus loin dans l'analyse détaillée de cette séquence.

<u>Séquence 4.</u> Après ce travail "in vacuo" et ce jeu entre calcul algébrique "soumis" ou non à une finalité numérique extérieure, sera reprise la question de l'ostensif dans les expressions algébriques. C'est là une propriété que Y.C. met au centre de sa théorie. C'est là que réside la spécificité et la puissance de cet outil. On a donc un retour au point de départ (séquence <u>1</u>) mais à un niveau plus élevé.

<u>Séquence 5.</u> Seconde entorse à la règle de n'examiner l'algébrique que comme outil (et non pas comme objet). Ici se place l'étude des équations du 1er degré. Importante car elle permettra à son tour de définir les ensembles de nombres.

Séquences $>$ 5 ? ? ?

Ainsi on retrouve les caractéristiques essentielles de cette analyse.

1. Nécessité de bien centrer le travail sur l'articulation algèbre/numérique.

2. L'algèbre prise comme outil de formulation, donc une écriture puis une pratique, puis (plus tard) un objet. Avec les caractéristiques informationnelles propres de cette écriture : l'ostensif.

3. Ces caractéristiques sont ce qui constitue le modèle structurel. Avec sa généralité, et son pouvoir explicatif et discriminatif.

4. On commence par amener les élèves à une "pratique" de ces outils (le calcul numérique, dans le cadre de démonstration). Pratique qui, à son tour comporte des aspects particuliers (théorie des noms auxiliaires).

* * *

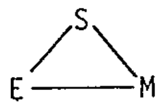
3. Organiser la classe. Espace et temps.

Il s'agit alors d'enseigner. Ce qui consiste (entre autres) à organiser les échanges de savoir entre élèves et professeurs dans un temps donné et sur un espace structuré par les places que chacun occupe. D'après lui, il faudrait penser cette double structuration. (Même si celle-ci est très déterminée par ailleurs).

Pour ce qui est du temps, il y a plus qu'une progression dans le savoir. Et cette dernière n'est pas forcément linéaire. Il y a une histoire de la classe, et des échanges, une succession d'événements, de retours en arrière, ou de rappels implicites ou explicites au passé. On peut ainsi déterminer les moments du travail selon que E. ou P. (élèves ou professeur) sont seuls ou en train d'échanger à propos du savoir. Y.C. les organise en Activités, Théories, Exercices, Devoirs et Interrogations. C'est ici que le croisement spatial et temporel est le plus manifeste.

Le savoir circule là-dedans.

Voici comment la sous-séquence 2 de la séquence 3 est organisée temporellement et spatialement. C.f. tableaux ci-dessous.

TYPE		DEMARCHE	ARTICULATION	CONTROLE
ACTIVITE 2.				
Problème 1. Problème 2.	 Polarisation forte E - S : conviction intime d'une propriété numérique. Appel à une performance technique : démontrer. Le maître est là pour aider (relance) et surtout pour amener le déblocage et faire le point.	Amorce qui donne un cadre et une "motivation" où s'inscrira l'acquisition du savoir nouveau : T.N.A. et I.R.	<u>continuité</u> par rapport à : propriété numérique, traduction algébrique et démarche démonstrative. <u>rupture :</u> difficulté insurmontable de calcul par manque de moyens. <u>continuité :</u> répétition du problème 1. <u>rupture :</u> toute traduction algébrique n'est pas forcément adéquate. Règle pas immédiatement accessible.	contrôle par une finalité externe. Observation d'une propriété numérique et recours à algèbre et au calcul pour expliquer et démontrer. Contrat didactique propre à la tâche de démonstration et de paraphrases.
THEORIE	 Le maître expose à l'élève la théorie.	Identification de l'objet que l'élève doit s'approprier. On sort de l'événement pour entrer dans l'actuel.	<u>continuité :</u> il s'agit toujours de la T.N.A. qui a été montrée dans l'activité. <u>rupture :</u> on travaille une opération spécifique à l'algèbre. On examine les expressions algébriques pour elles-mêmes.	Le contrôle reste la démonstration par calcul algébrique. Mais cette démonstration est laissée à charge du maître.

TYPE	S E M	DEMARCHE	ARTICULATION	CONTROLE
EXERCICES				
Exercice No. 7	S E ----→ M Le maître intervient de façon ponctuelle (de cas en cas)	L'élève prend en charge le travail avec la T.N.A.	Continuité : On retrouve le problème numérique et le recours à la T.N.A. pour le calcul de démonstration. Rupture : On travaille sur l'algébrique directement, la propriété numérique n'est plus qu'une référence.	Travail sous contrôle de finalité à démontrer. Mais à ce niveau supérieur : règle. a,b=a+k,c=b+k, b^2-ac = k^2
Exercices 8 - 17	S E ----→ M Le maître intervient de façon ponctuelle (de cas en cas)	L'élève apprend à utiliser l'outil algébrique TNA et IR	Continuité : usage de la T.N.A. et des I.R. Rupture : travail in vacuo, pour lui-même. (Ceci est une grosse rupture dans le travail qui s'est fait jusque là dans cette sous-séquence).	Ce travail se fait au cours des tâches développement et factorisation qui est contrôlé par l'existence de l'algorithme de développement ou de techniques partielles pour la factorisation. Ce qui suppose un type particulier de contrat didactique.
DEVOIR 3 INTERROGATIONS 3	S E ←—— M	Retour en arrière (boucle) sur ce qui a été acquis auparavant.	Continuité : contenu Rupture : décalages au niveau lieu (domicile) et du temps (moment où cela se passe, temps à disposition, décalage dans le temps du feed back de M.).	

Analyse des exercices 8 à 17.

<table>
<tr>
<td>Exercices
8 - 11</td>
<td>Développements des expressions algébriques.
- distributivité *
- regroupement des termes semblables
- réduction des termes semblables
- réarrangements

* pour la distributivité : recours à la T.N.A.</td>
<td rowspan="2">ALGORITHME
Travail à complexité ostensive décroissante, indices de fin.
(cf. pg 36)</td>
<td rowspan="2">Progression fine de la complexité des exercices. Basée sur le contenu lui-même (information ostensive, formes) ce qui implique un rapport particulier entre
S
E M

un contrat très spécial (cf. pg. 34 - 35)</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercices
12 - 15</td>
<td>Développements des expressions algébriques avec confrontation (concurrence, complémentarité, alternance) des recours à la T.N.A. ou aux I.R.
Situer les rapports entre les 2 objets théorisés.</td>
</tr>
<tr>
<td>Exercices
16 - 17</td>
<td>Factorisations d'expressions algébriques.
- reconnaissance de régularités.
lettres
coefficients
exposants
- reconnaissance d'IR à "remonter".

Ces reconnaissances proviennent ainsi du travail précédent de développement.</td>
<td>Pas d'ALGORITHME.
Travail à complexité ostensive croissante.
Pas d'indice net de fin.</td>
<td>2 exemples sans plus. Pas de progression fine dans la complexité.
Le contrat est ici aussi très spécial, l'échange est plus incertain. (devinette).</td>
</tr>
</table>

Travail <u>in vacuo</u> . Ne fait pas objet de théorie. (développement et factorisation ne sont pas objets de théorie).

* * *

4. Remarques à propos de ce qui est enseigné.

1. Par rapport à la vie de la classe, il faut distinguer ce qui est événementiel et ce qui ne l'est pas. C'est-à-dire ce qui est sorti du temps (de l'histoire) et de ce fait sera "objectivé" puis échangé.

L'événementiel peut être comparé aux éléments de paysage que l'on parcourt durant les heures de cours (qui se déroule sur un certain laps de temps, à un rythme donné).

On sort certaines choses de ce cadre dès lors qu'on institutionnalise, c'est-à-dire, finalement, par l'inscription de ce que l'on fait dans un contrat précis. (cf. pg 34).

Ce qui a été exposé en théorie puis exercé est alors toujours actuel et, en tant que tel, n'aura pas à être rappelé par le maître. Au cas où celui-ci se verrait amené à faire un tel rappel, ce sera toujours en dérogation au contrat, et alors il dispensera l'élève d'une pénalisation méritée puisque cela voudrait dire que l'élève n'aurait pas acquis ces éléments et donc n'aurait pas rempli son contrat.

L'institutionnalisation peut se définir comme l'identification d'un objet et son échange (passage du prof. à l'élève). Le nom que l'on donne à l'objet permet de le désigner. C'est un premier pas : l'identification.
A l'occasion des exercices et des devoirs, l'élève devra s'approprier cet objet. Puis au cours de l'interrogation, il sera demandé à l'élève de rendre compte de ce qu'il en a fait.

2. a) Ce qui fait objet de théorie est puisé dans la culture mathématique. (contenu + pratique). Dans cette culture, Y.C. distingue 3 catégories d'objets : (cf. pg 27 , par. qui commence par : "on a là un exemple ..."et par. suivant) objets mathématiques, paramathématiques et protomathématiques. Ici, la théorie porte sur quelque chose de bien présent dans la culture mathématique, mais qui n'a pas reçu dans cette culture de nom. (En fait dans ce cadre la nécessité ne s'en fait pas sentir). C'est un exemple d'objet protomathématique.

Rem. On peut dire par exemple que lorsque les profs d'uni disent à leurs étudiants tout débutants : "oubliez tout". Il est bien entendu: oublier tout, sauf ce genre de choses.

b) Mais à l'école, on ne se trouve pas dans cette culture mathématique. Il est donc nécessaire ici de pouvoir désigner ces objets. De là l'apparition de noms qui nous paraissent toujours barbares et superflus : comme entre autres : théorie des noms auxiliaires; ceci fait partie du processus de transposition didactique.

c) Cette transposition doit elle-même être contrôlée. Y.C. pose alors comme exigence précise, d'ouvrir l'enseignement sur la culture mathématique. (il faut y acculturer les élèves). Il convient alors de proscrire les constructions pédagogiques (transposées) ad hoc qui enferment l'élève dans une sous-culture scolaire. Par ex.: la technique des flèches.

d) Il y a d'autres exigences. Il faut encore que l'objet à théoriser soit assez général. On prendra en compte le champ d'application de chaque objet. Ainsi la TNA (théorie des noms auxiliaires) est bien plus générale que les IR (identités remarquables). (cf pg 28 dernier par. et, pg 29).

e) Il faut aussi qu'il se situe (l'objet à théoriser) à une articulation précise. Ainsi la T.N.A. voisine le conceptuel dans la mesure où elle pourrait être soumise à un contrôle d'une signification externe. (i.e. la paraphrase ou formulation du numérique qu'elle peut alors concrétiser). Mais elle peut aussi n'être qu'un artifice de calcul.

f) Un objet pour lequel on dispose d'un algorithme ne sera pas forcément théorisé (ex. Développement d'expressions algébriques). L'usage de l'algorithme peut suffire à son enseignement.

3. Ainsi donc la T.N.A. a le degré de généralité et l'importance requise pour faire objet de théorie. Elle détermine d'autres objets de théorie comme les identités remarquables. Elle détermine l'algorithme de développement des expressions algébriques (les IR sont d'ailleurs un "raccourci" pour le développement des expressions algébriques). Dans les exercices, ce sera ce contrôle qui sera mis en jeu.

4. Développement et factorisation font l'objet des exercices. La différence qu'il y a entre ces deux choses, liée à l'existence ou non d'un algorithme et aux types de contrat didactique spécifiques de ces deux exercices, apparaîtra dans la pratique.

Ceci ne fera cependant pas l'objet de commentaires destinés aux élèves. (toute évocation de ceci resterait de l'événementiel). La maîtrise de ceci est donc laissée entièrement à une pratique (cf. pg 34, 3e par. qui commence par : "On notera par ailleurs").

De même il ne sera pas question de communiquer aux élèves, les remarques sur les différences de champ d'application de la T.N.A. et des I.R. (cf. pg 27 2e par. et 28 - 29 la question des IR). Ni de leur complémentarité complexe dans le travail de développements. (cf. pg 35. Y.C. insiste, à propos de l'exercice 15, en écrivant : à l'intention de l'enseignant et pas del'élève).

Il est important que l'enseignant soit au clair là-dessus pour bien apprécier le projet et ses limites.

* * *

5. Développement et factorisation.

Venons en aux commentaires sur ces deux tâches qui sont enseignées traditionnellement, et qui figurent aussi dans cet enseignement expérimental, à des degrés d'importance moindre il est vrai, et surtout, sous le contrôle de la T.N.A.

(A) Développement

Les expressions algébriques peuvent être développées au moyen d'un algorithme précis. Celui-ci procède de l'application de la distributivité (qui est une règle structurelle du numérique aisément formulable avec une expression algébrique), ainsi que des opérations spécifiques des écritures littérales : regroupements de termes semblables, réductions éventuelles (simplification) et réordonnement de ceux-ci (opérations qui mettent en oeuvre essentiellement associativité, commutativité et existence d'inverse du numérique). Sans oublier bien sûr, la T.N.A.

Rem. Avec ce type de schéma, il est tout naturel que les règles structurelles du numérique se prolongent à l'algébrique - et cela va peut-être dans un sens inverse puisque l'algébrique est un outil de formation de ces règles et donc un modèle du numérique.

Du point de vue de l'information ostensive, le développement se fait dans une vection de réduction de la complexité. Enfin, il y a un critère de fin de calcul (on peut facilement reconnaître qu'une expression algébrique n'est plus développable, donc qu'on a été "jusqu'au bout du calcul"). Ce critère va suppléer, dans certains cas précis, au manque d'informations extrinsèques provenant du problème traité (cf. pg 34 fin du 2e par. "L'algorithme de développement demeure....).

Rem. Il en est de même pour tout algorithme, prenez comme exemple la division par écrit, ou encore la soustraction ....

Donc le développement des expressions algébriques peut être régi par un algorithme "intrinsèque". Dans une perspective d'enseignement, ceci en facilite l'exercice "in vacuo", hors de toute finalisation (motivation) extrinsèque. Avec alors, en contrepartie, un net danger d'inflation d'exercices de ce type (cf. pg 28 dernier par. et pg 29).

A ce stade de l'apprentissage, les élèves connaissent bien les premières étapes de l'algorithme (distributivité à un facteur simple $a(b+c)$ ou $(a+b)c$ mais pas $(a+b)(c+d)$,arrangement des termes). La T.N.A. leur permet d'en compléter la connaissance (rendant possible la distributivité $(a+b)(c+d)$. Comme, en outre, il y a des indices de fin de calcul, on peut donc leur proposer sans autres ce genre d'exercices.

Ces derniers sont facilement constructibles et on peut leur donner une fine graduation de complexité selon qu'une ou plusieurs lettres apparaissent etc. etc... (cf. pg 34 dernier par.).

Remarque importante : Les principes mêmes de cette graduation des exercices portent sur les détails des écritures littérales (information ostensive). De sorte qu'en les construisant, le professeur, lui aussi, fonctionne in vacuo ! Ceci explique sans doute la tendance si forte à l'inflation. (Et ce d'autant plus que les élèves ne "pigent" pas tout de suite).

Rem. Certaines étapes du développement peuvent être condensées (raccourcis) par l'application des I.R. (on remplace une forme non développée par une forme d'emblée développée, réduite et ordonnée). On s'économise donc de refaire à chaque fois la démonstration des identités remarquables.

(B) Factorisation

La différence essentielle qu'il y a avec la factorisation, c'est qu'on va à complexité ostensive croissante. Alors on ne dispose pas de critère général pour décider si celle-ci est complète (je comparerai le schéma développement - factorisation à un treillis selon l'ordre de complexité ostensive).

On ne dispose pas d'algorithme général et intrinsèque de factorisation. La seule possibilité est de se baser sur des marques formelles ou d'utiliser des techniques partielles. Les marques formelles sur lesquelles se reposer seront soit de repérer des répétitions (régularités) de lettres, d'exposants ou de coefficients, soit de reconnaître des formes connues comme p. ex. une identité remarquable. Mais la chose devient très difficile s'il faut imaginer des facteurs qui se seraient compensés (cela tient à l'irréversibilité des opérations de regroupement des termes semblables, de réduction de ceux-ci et de simplification). En fait on retrouve les difficultés de la factorisation numérique, même si les expressions littérales ont une "capacité monstrative supérieure" (pg 19 2e par.).

Un cas simple est celui de $a^2 - b^2$, où il faut "réintroduire" $+ab$ $-ab$.

Un exercice de factorisation comportera donc une part de devinette. Dès lors il n'est pas possible sans autre de produire des exercices de factorisation à l'infini. Mais on peut les soumettre à une "finalité" de type problème (comme dans l'activité 2). Ce qui dira de quel degré de factorisation on peut se contenter (cf. les 2 derniers par. de la page 35 à propos des exercices 16 et 17). On peut aussi contrôler ces exercices par le recours à des techniques particulières, comme celles de reconnaissance évoquées plus haut. Ainsi en est-il des exercices 16 et 17. A l'exercice 16, se baser sur des répétitions de termes, à l'exercice 17, se baser sur les identités remarquables à "remonter". Et alors on pourra aussi se développer un jeu sophistiqué de "camouflage" de ces formes .... référez-vous encore une fois aux pages 28 et 29 .

* * *

6. Du point de vue du contrat didactique.

(A) Le développement d'expressions algébriques, par algorithme, ainsi que la factorisation par reconnaissance des I.R. impliquent une forme particulière de contrat didactique. L'élève sait ce qu'il doit faire fonctionner et jusqu'où il doit le faire pour satisfaire aux exigences (demandes) de l'enseignant. Ce dernier peut alors aisément comptabiliser et indiquer les erreurs de l'élève. Tout marche donc rondement. C'est ce que Y.C. évoque par l'adjectif "attractif" que l'on retrouve ci et là dans les expressions: "convivialité attractive" (pg 29 dernier par. : "le thème se prête au jeu de miroirs de l'exercice stéréotypé, indéfiniment renouvelable, lieu où les partenaires de la relation didactique communiquent aisément parce que le contrat qui gère leur rencontre peut être finement défini et demeure précisément contrôlé) ou encore "généralisation attractive" (cf pg 23 3e par. : "Ce problème épistémologique...").

A ceci sont liés divers phénomènes en apparence paradoxaux : l'inflation d'un type d'exercice purement scolaire qui n'a que peu d'intérêt mathématique, et auxquels les mathématiciens ne se sont jamais intéressés.

L'enfermement dans une sous-culture "bébé" (cf. pg 28 à propos de la technique des flèches, qui est aussi un algorithme) Cet enfermement se manifeste d'ailleurs de façon critique lorsqu'il y a blocage de l'élève. Blocage qui manifeste non pas la présence de difficultés mathématiques profondes (cf. pg 36, la fin du par : "La classe de "symptômes"....), mais qui est un comportement "en réaction" de l'élève. Par exemple - et je reprends ce que dit Y.C. - dans tel contrat didactique, l'élève va s'interdire ce qui ne lui aurait pas été manifestement indiqué de faire. Et contre ceci, Y.C. suggère que - dans une sorte de jeu de miroir - l'enseignant oblige l'élève à poursuivre plus loin son travail, afin que plus tard il (l'élève) puisse se le permettre.

Autre situation particulière, c'est le cas où le travail est soumis à une finalisation externe (de type problème numérique). Ceci peut amener à ne considérer que des développements partiels, voire originaux ou des factorisations incomplètes ou très spéciales (cf. pg 34 2e par. et pg 35 dernier par. : "En général ....). Dans les termes du contrat didactique, ceci aura alors valeur d'une dérogation , à la règle implicite qu'il faut mener son calcul "jusqu'au bout". (Règle qu'il n'y a jamais besoin de formuler car elle découle soit de l'algorithme (développement) soit de ce qui contrôle la factorisation (identité remarquable par exemple)). Le mot même de dérogation souligne que, dans la conscience des participants, se crée une "inversion" de priorités par rapport à l'objet d'étude mathématique. Inversion tout à fait banale dans la mesure où le sujet, au premier niveau de conscience, reste centré sur ses actions et sur les échanges qu'il a avec ses partenaires.

B L'usage du terme "convivialité" (cf. plus haut convivialité attractive) indique qu'il ne faut pas voir le contrat didactique d'un point de vue négatif. En effet, il se noue de toutes façons, il gère les échanges et on ne peut s'en extraire. Prenons pour clarifier cela l'exemple de la démonstration. (cf. pg 20 par 1).

L'élève a appris l'existence d'un système de notations littérales qui permet de paraphraser quelques propriétés numériques qu'il connaît. De plus il apprend à travailler ces expressions algébriques et peut en obtenir des transformations. Celles-ci, à leur tour, peuvent acquérir une signification. Et permettent de voir certains liens, certaines règles numériques qu'il ne soupçonnait pas, ou encore qu'il est tout à fait à même de reconnaître dans la pratique d'un calcul, mais qu'il ne saurait identifier ni thématiser (prendre comme objet d'étude hors du contexte de calcul où elle apparaît). Dès lors, la notation littérale prend le statut de formulation de propriétés numériques (qui acquièrent alors au statut de règles). Ces formulations peuvent rendre compte (modéliser) des phénomènes numériques (ainsi on peut "simuler" l'obtention de 1 à partir de $a^2 - (a-1)(a+1)$) et de ce fait en être une explication (ou explicitation, tout au moins).

Revenons alors à la séquence d'enseignement. Dans le contrat didactique tel que défini dans les séquences antérieures (cf. les formulations des exer. du devoir 3 et de l'interrogation 3), la demande faite à l'élève de travailler à ce niveau des expressions littérales est marquée (indiquée) par le vocable : démontrer. Ainsi l'élève sait ce qu'on veut de lui. Et ce qu'il aura fait jusque là, lui aura appris que dans tous les cas (traités) cette démonstration était faisable (il pouvait faire aboutir le calcul). Donc démontrer représente pour l'élève tout un programme d'action en lequel le travail précédent lui donne toute confiance. De ce fait d'ailleurs, Y.C., aura opéré une certaine fermeture. Fermeture provisoire car il se garde le choix stratégique du moment où cette pratique va être rendue moins sûre pour l'élève. (et c'est l'activité 2 de la sous-séquence 2 de la séquence 3).

Rem. 1. A rappeler qu'il n'existe pas de démonstration absolue, c'est-à-dire non soumise à un accord social tacite dans une communauté de chercheurs. Il n'existe pas non plus d'explication ni de compréhension totale, exhaustive. Ceci rejoint le problème superdélicat en didactique : savoir où on s'arrête.

Rem. 2. Tout ceci, qui concerne le contrat didactique, constitue la thèse centrale d'Y.C.

---

7. Etude de l'activité 2. (pour conclure)

A Comme dit plus haut, et en contraste avec les exercices 8 - 17, ici le calcul algébrique est contrôlé (soumis) à une finalisation (au sens où Y.C. l'emploie) d'un problème numérique. Cet aspect fondamental est à réaliser dans l'expérience. De cette manière l'élève a donc un but clair à atteindre, d'autre part, il sait ce qu'on attend de lui dans la demande de démonstration.. Il peut penser (selon les expériences passées de ce cours d'algèbre) que le calcul algébrique est possible (il peut aboutir). C'est dans ce contexte qu'Y.C. l'amène à rencontrer des difficultés qui devraient être à prime abord insurmontables pour les élèves : difficultés de calcul algébrique. Le professeur, par l'exposé de la T.N.A., les tirera de ce mauvais pas et cette expérience motivera pour eux l'acquisition de cette technique.

Il est donc capital que l'expérience prenne cette tournure et la forme même des données vise à rendre improbable (si l'élève se conforme à faire ce qu'on lui demande) les "comportements" de calcul direct (Ainsi on pose le problème comme purement numérique : activité 2 problème 1. Question 1). Ce calcul direct aurait en effet pour inconvénient que la rencontre des difficultés algébriques se fasse "hors du contrôle numérique". Ce qui ferait alors écran à l'élève, celui-ci n'ayant pas de feed back direct lui indiquant si ses calculs sont faux ou incomplets. Les difficultés prévues sont de deux types : a) la notation avec des "noms" bien choisis des nombres consécutifs : a,(a+1),(a+2) (ou (a-1),a,(a+1)).
b) les développements de (a+1)(a+2),(ou (a-1)(a+1)).

Ceci peut amener l'élève à un arrêt dans le calcul (blocage) ou bien à commettre une ou des erreurs. La finalité extrinsèque (démontrer une propriété numérique bien identifiée) lui montrera alors qu'il y a un non-aboutissement (par arrêt prématuré ou par erreur). Il y a certes un risque que cette finalité soit si forte pour l'élève qu'il se mette à "forcer" son calcul en commettant par exemple des "erreurs compensatoires". Ceci s'est vu.

Pour la suite de l'expérience, et en particulier, l'exposé précis de la théorie, il convient de montrer aux élèves comment la T.N.A. permet de s'en sortir (mais pas de recourir encore aux I.R.).

B Le problème 2 a deux buts. D'une part mettre en oeuvre une nouvelle fois, dans un contexte de finalité numérique toujours, la T.N.A. Cet aspect en fait alors la répétition du problème 1. La continuité est de ce point de vue assurée. D'autre part, et cette fois-ci en rupture avec l'histoire de la classe, l'élève va rencontrer ici une formulation algébrique inadéquate (mais pas fausse). (Rappelons que la rupture du 1er problème était de mettre les élèves face à l'insuffisance de leurs techniques de calcul algébrique et de motiver leur assimilation de la T.N.A.). Jusque là, et au travers des problèmes surtout, toute expression algébrique était légitime. Ceci vient de ce que les expressions algébriques avaient été présentées comme dérivant de propriétés numériques (<u>paraphrases</u>). Ici, il apparaît que la formulation à laquelle on pense au premier abord est inadéquate. (parce qu'elle rend compte <u>indirectement</u> de la relation centrale de la propriété : les <u>écarts entre les nombres choisis</u>). Cette inadéquation apparaît de deux façons :

a) on tire une conjecture qui généralise la première mais qui cependant reste partielle. Elle n'englobe pas le cas des triplets 5, 9, 13, et rend ce dernier cas assez mystérieux.

b) Cette conjecture partielle, formulée algébriquement est lourde, délicate à démontrer (fastidieuse). Alors que la conjecture adéquate sera d'une simplicité frappante. Un problème mal posé aboutit à des difficultés superflues.

Ainsi le calcul algébrique aura paru <u>indispensable</u> (comme moyen) pour dégager la relation exacte en jeu (l'écart régulier entre les 3 nombres choisis). C'est-à-dire la propriété qu'il aurait fallu tout de suite pouvoir paraphraser. On illustre donc la fonction <u>formulatrice</u> du calcul algébrique.

<u>Rem. 1.</u> Y.C. parle (à la page 23 1er par.) de nombres a, b, c "en progression arithmétique". Ceci suffit à montrer la difficulté à laquelle on s'achoppe si on veut en rester au plan du numérique (progression arithmétique contre la formulation de l'ex. 7, a, b = a+k, c = b + k).

<u>Rem. 2.</u> Le moment où la formulation complète et définitive de la relation en jeu est atteinte, c'est l'exercice 7 précisément. Ce qui assure la continuité des exercices par rapport à l'activité et la théorie. La rupture étant cette fois opérée par le fait qu'ici, l'élève travaille seul (cf. pg 32 et 33).

FIN

Samedi 26 août 1989

Atelier : *"Situations évoquées, situations jouées et structures mathématiques"*

par François CONNE, Jeanne GUIET

"Ce n'est pas un professeur car avec lui, on ne sait jamais....."

I - PREAMBULE.

Ma proposition visait à élucider les rapports entre la théorie présentée au cours de G. VERGNAUD et l'objet didactique, et ceci autrement qu'en terme de "*science d'emprunt*" ou encore "*science de référence*".

J'aurais voulu induire chez les participants une saisie autre qu'analytique des données que j'avais fournies. J'avais prévu par un corrigé de présenter cet aspect analytique. Il est délicat d'engager des élèves sur une telle "*heuristique*". Je me suis dit qu'il serait peut-être judicieux d'amener ceci par :

a) un volume d'informations assez grand à traiter, des données présentées linéairement (textes) ;

b) une analogie à faire entre deux textes de propos très différents.

Ma consigne réalisait ce projet. Je demandais en effet de lire les textes (à mesure qu'ils étaient distribués) et de :

1) dégager la démarche de l'auteur (saisie globale)

2) décrire l'effet produit par leurs illustrations (explications).

Cette consigne était justifiée par la question/prémisse suivante :

"*Voilà deux études distinctes qui ne parlent pas de la même chose, dont le but est autre. Pourtant elles font appel au même concept de modèle. Ce recours est dicté par des nécessités analogues. C'est peut-être là, plus que dans les contenus précis de ces études, que se situe "la réalité didactique", objet de nos recherches.*

II - TEXTE DE Y. CHEVALLARD.

(Extrait de : "Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège", Petit x, n° 19 , 1989, d'abord pp 59-61, puis pp 62-64).

l'activité mathématique, parce qu'elle fonde, épistémologiquement et culturellement, le recours explicite à la notion de modèle dans une perception d'évolution curriculaire.

En fait, les mathématiques les plus primitives déjà, celles que l'enseignement nous a rendu transparentes et, trop souvent, sans relief, peuvent être fructueusement réexaminées sous cet éclairage. A titre d'exemple, nous examinerons un problème parmi les plus traditionnels et les plus élémentaires. On dispose d'un paquet de bonbons que l'on veut répartir équitablement entre un certain nombre d'enfants ; comment le faire ? En quoi, et comment, les mathématiques peuvent-elles intervenir pour résoudre ce problème[39] ?

4.2 De l'empirique au symbolique.

Première observation, le problème peut être résolu sans le secours des mathématiques, par une procédure effective que l'on nommera ci-après procédure 1. On fait ranger les enfants en ligne, puis on distribue un bonbon à chaque enfant en parcourant une première fois la ligne ; s'il reste des bonbons on recommence la distribution et on recommencera tant qu'il restera plus de bonbons non distribués qu'il n'y a d'enfants. Pour s'assurer de cette dernière condition (qui paraît a priori impliquer le comptage et la comparaison des nombres), il n'est pas davantage besoin, en réalité, de recourir aux mathématiques : si la distribution s'interrompt en cours de route, faute de bonbons, on revient en arrière pour reprendre les bonbons déjà donnés au cours du dernier passage.

Cette procédure empirique présente cependant un certain nombre d'inconvénients et de limitations. Elle ne pourra être exécutée si les enfants ne peuvent être effectivement réunis (par exemple si les bonbons doivent être répartis entre des enfants géographiquement dispersés, qui recevront leur dû par la poste). Dans tous les cas, de plus, sa mise en œuvre ne va pas sans désagréments pratiques. Les enfants peuvent faire du bruit, ce qui peut être désagréable pour la personne chargée de la distributionn et l'induire à commettre des erreurs ; surtout, ils peuvent bouger, se déplacer dans la ligne, dans le but, par exemple, de tricher en recevant un bonbon supplémentaire. Pour obvier à ces difficultés, voire pour que la distribution soit tout simplement possible (si les enfants ne peuvent être effectiviement réunis), on peut alors envisager une deuxième procédure.

Dans la procédure 2, on suppose que l'on dispose d'une liste de noms des enfants. A chacun des noms on fait correspondre un cercle grossièrement tracé sur le sol. Puis on distribue les bonbons selon la technique de la procédure 1, les enfants étant ici remplacés par des cercles. On voit que, dans le passage de la procédure 1 à la procédure 2, on passe d'une réalité «humaine» (les enfants) à une représentation symbolique de cette réalité (les noms, puis les cercles) ; d'une situation concrète à une situation moins concrète, et symbolique au moins partiellement (n'oublions pas que les bonbons, eux, sont toujours là). Le bruit cesse ; les enfants ne se bousculent plus - et pour cause. Bref, l'ordre règne, et le calme. On passe ainsi d'une réunion aimable ou chahuteuse à une activité sereine dans laquelle le distributeur de bonbons se retrouve seul avec ses noms, ses cerccles et ses bonbons. Ce que l'on constate donc, c'est une séparation, avantageuse à divers points de vue, entre la réalité et un certain modèle de cette réalité : les enfants pourront ne jamais rencontrer la personne qui aura à leur intention, réparti les bonbons en parts égales, qui leur seront ensuite allouées.

4.3 L'avènement de l'activité mathématique.

Mais la procédure 2 connaît elle aussi des limitations. Elle suppose que celui qui assure l'équirépartition ait les bonbons à sa disposition. Elle suppose encore, s'il y a beaucoup d'enfants et beaucoup de bonbons, une pièce assez vaste où elle puisse se dérouler. Un pas de plus et l'on pourra s'affranchir de ces exigences, en entrant plus franchement dans le monde des mathématiques, par le recours à la procédure 3 que nous formulerons maintenant :

3.1 on compte le **nombre** de bonbons à répartir, soit a, et on compte le nombre d'enfants entre lesquels doit se faire l'équirépartition, soit b ;

3.2 on effectue la **division** (dite euclidienne) de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire qu'on détermine le quotient entier q et le reste r tels que $a = bq + r$, $r < b$;

3.3 on regroupe les bonbons par paquets de q unités, paquets qui seront alors distribués aux b enfants

Il n'est pas facile de décider si, avec l'invention et l'exécution de la procédure 2, on passe d'une activité non mathématique (procédure 1) à une activité mathématique. Avec la procédure 3, en revanche, on a affaire à une activité authentiquement mathématique - qui fut même longtemps regardée comme fort savante[40].

Cette procédure permet une séparation encore plus poussée que la précédente. Si les étapes 3.1 et 3.3, en début et en fin de procédure, font le lien avec la réalité modélisée, l'étape 3.2 ne retient plus de la réalité que l'un de ses aspects, la cardinalité ou «numérosité», celle de l'ensemble des enfants, d'une part, celle de l'ensemble des bonbons, d'autre part. En d'autres termes, on construit un modèle de la réalité qui ne prend en compte que les aspects de cette réalité qui apparaissent pertinents par rapport à la question que l'on se pose à son propos.

Ce modèle, comme toujours dans l'activité scientifique, n'est pas l'image la plus complète possible du réel. Tout au contraire, il en fournit une image (volontairement) appauvrie, et c'est là ce qui fait sa force. Si l'on voulait exprimer ce fait en référence à l'activité du peintre, on pourrait dire que la modélisation se rapproche plus d'un visée de stylisation que d'une volonté d'hyperréalisme. Le modèle n'est pas à proprement parler une copie ou une reproduction du réel, mais un **ajout** au réel, une construction artificielle, mise en relation d'une manière déterminée, supposée adéquate, avec le réel[41].

Cette mise en relation intervient, dans l'exemple examiné, au cours des étapes 3.1 et 3.3, celle de la construction du modèle, d'une part, celle du retour au réel, d'autre part. Ces deux étapes délimitent une phase d'activité - l'étape 3.2 - qui se trouve libérée de tout rapport, autre que symbolique, à la réalité modélisée[42]. Pratiquement, cela se traduit par le fait que la personne chargée de mener à bien l'étape 3.2 peut ne jamais être en contact ni avec les enfants, ni avec les bonbons. Il suffira de lui communiquer les nombres a et b ; et il lui suffira de communiquer en retour le nombre q (et éventuellement le nombre r, à des fins de vérification par exemple). Son activité peut maintenant être complètement déconnectée de la réalité «concrète» à laquelle pourtant elle se rapporte. Au bruit des enfants se substitue le silence d'une salle de travail, où notre personnage, devenu mathématicien, se retrouve seul, face à un problème mathématique (quels sont les nombres q et r tels que....). A la manipulation effective des bonbons, qui exigeait une utilisation et un aménagement particuliers de l'espace de la pièce, fait place une organisation toujours la même - par exemple une table de travail, des feuilles de papier, un crayon[43].

V - LES OUTILS DE LA MATHEMATISATION.

5.1 La portée du schéma de modélisation.

En suivant les analyses précédentes, on aura reconnu que, dans notre enseignement, une activité mathématique authentique se rencontre bien dès l'école primaire.

Considérons un instant l'un de ces problèmes que les didacticiens classent parmi les problèmes additifs : «Paul a 8 billes ; il en gagne un certain nombre et a alors 13 billes ; combien en a-t-il gagné ?» Le système réel étudié n'est ici qu'évoqué. La résolution du problème passe par la construction d'un **modèle du système**.

A un premier niveau, le modèle sur lequel l'élève va travailler peut rester très concret (cela correspond à la procédure 2 de notre exemple) : il aligne sur son bureau 8 jetons rouges, puis rajoute un à un des jetons noirs jusqu'à obtenir 13 jetons ; il compte alors le nombre de jetons noirs rajoutés, qui est le nombre de billes gagnées par Paul[44].

A un second niveau - celui de notre procédure 3 -, la résolution du problème ne suppose plus que les instruments standardisés énumérés plus haut, papier et crayon. L'élève construit un modèle qui peut s'écrire $8 + \ldots = 13$ et qui préfigure la notation classique de l'équation du premier degré $8 + x = 13$. Par le travail sur ce modèle, il obtiendra alors la valeur cherchée, qui sera trouvée par un algorithme de résolution de l'équation obtenue : par exemple en énumérant les entiers à partir de 1, et en calculant les sommes successives jusqu'à obtenir 13 : $8 + 1$, $8 + 2$, $8 + 3$, etc. ; plus tard en effectuant la soustraction de 8 à 13 par un algorithme de calcul longuement étudié.

La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique, de l'école primaire à l'université. Grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives - entre arithmétique et algèbre notamment.

(fin du 1er extrait)

5.2 Les pratiques sémiotiques.

Les exemples précédents nous mettent en face de l'une des dimensions essentielles de l'activité humaine, présente dès le langage[45] : l'activité de symbolisation et l'usage réglé de **systèmes de signes** - qui permettent de «parler» de leurs référents en l'absence même de ceux-ci. C'est désigner là un problème que toute anthropologie ne peut manquer de rencontrer. Nous nous en tiendrons, sur ce thème difficile, au minimum nécessaire pour situer les questions que nous examinerons ensuite. Nous poserons d'abord comme un principe que toute activité emprunte sa forme et sa sustance concrètes à une pluralité coordonnée de **registres sémiotiques** ; ou, pour le dire autrement, que nulle activité humaine ne peut se statisfaire d'un code unique, qu'elle est dotée d'emblée d'une certaine **épaisseur sémiotique**. En même temps, elle laisse apparaître un ou plusieurs codes dominants, auxquels les autres registres sémiotiques, que nous dirons secondaires, se trouvent en quelque sorte assujetis. L'articulation de l'ensemble des registres ainsi mis en branle forme ce que nous nommerons un complexe sémiotique - où le registre de la langue naturelle est toujours présent, à titre au moins de métalangage.

Rappelons-nous à cet égard la procédure 2 relative à la distribution des bonbons : l'activité qui se déploie dans son exécution nous apparaît comme un mixte. Dans l'une au moins de ses modalités envisageables, elle recourt et à la langue naturelle écrite et orale (qui permettent de constituer la liste des noms et de la lire), et à un code symbolique graphique-spatial, celui des cercles mis en correspondance avec les noms, code «momentané», inventé pour la circonstance, mais que la répétition de l'activité dans un groupe social donné peut fort bien stabiliser durablement. Cette description demeure pourtant incomplète : on doit y ajouter un système de signes de nature gestuelle, à la rencontre du corps et de l'espace, dont elle suppose la bonne coordination - soit ce schème moteur répété qui consiste à déplacer les bonbons, d'une manière réglée selon le temps et l'espace, depuis le sac qui les contient primitivement jusqu'aux cercles entre lesquels il convient de les répartir.

Tout cela fait une activité qui, pour n'être pas encore mathématique au sens conventionnel que l'on peut donner à ce mot, est déjà fort complexe. L'exemple lui-même donne une idée d'un problème général en toute activté humaine : celui de l'usage adéquat de registres sémiotiques articulés ensemble - problème au cœur de tout apprentissage, quel qu'en soit le niveau. Mais l'examen comparatif que l'on peut faire alors de la procédure 3 apporte une autre leçon ; l'activité mathématique resserre **l'épaisseur sémiotique autour de codes spécifiques** - celui du numérique ici - sans toutefois éliminer la pluralité des codes : l'usage graphique de l'espace que montrait l'effectuation de la procédure 2, et qui suppose la maîtrise du geste adéquat, se retrouve ici, concentré dans l'espace normalisé de la feuille de papier où s'ordonnent les opérations ; la langue naturelle demeure cet écrin qui enchâsse et commente les autres pratiques sémiotiques, etc.

Dans ce resserrement autour d'un code privilégié, spécifique d'un type d'activité, on gagne en puissance d'effectuation dans le même temps que l'économie des moyens sémiotiques se fait à la fois plus parcimonieuse et mieux réglée : on a là la motivation, indéfiniment reconduite, des formalismes scientifiques, qui assurent à l'activité productrice de connaissances des langues bien faites, adéquates à leurs objets. L'invention de la «langue algébrique» constitue, de ce point de vue, un bond en avant dont on peut dire - à regarder son destin dans l'enseignement du collège - que sa portée et sa signification n'ont pas été, encore aujourd'hui, totalement mesurées.

5.3 L'adéquation des outils et des modèles.

Les pratiques sémiotiques que nous avons cernées dans les notations précédentes sont nécessaires déjà pour dégager, dans un réel plus ou moins indifférencié, les systèmes sur lesquels la mathématisation voudra avoir prise. Par leur stabilisation et leur articulation en des codes déterminés, elles permettent l'émergence de concepts, de méthodes, de procédures. Ce dégagement s'affine et se précise en se stylisant avec l'entreprise de modélisation. Le choix des moyens sémiotiques devient central : c'est lui qui déterminera le **contrôle** du processus de modélisation et de son résultat, le modèle et le travail du modèle.

Le premier sans doute des moyens de la modélisation de systèmes (naturels ou artificiels) est constitué par les **nombres entiers** (naturels). La familiarisation avec cet outil occupe longuement l'enfant à l'école primaire. Sa disponibilité ne va pas de soi - dans l'ordre de l'histoire comme dans celui de la formation du rapport au savoir mathématique[46]. Supposons-le acquis : si, comptant les billes rouges de Paul d'une part, ses billes noires d'autre part, j'en trouve respectivement 8 et 5 ; si, les comptant alors toutes ensemble, j'en trouve 13, j'aurai un modèle (numérique) des billes possédées par Paul sous la forme de l'égalité $8 + 5 = 13$. Sous cette égalité, qui pour nous va de soi, se cache une difficulté récurrente : le premier problème que pose toute entreprise de modélisation est celui de **l'adéquation** du modèle au système qu'il permet d'étudier (adéquation qui, on l'a vu, dépend du type d'étude que l'on entend mener).

Problème constant, même s'il est plus visible à d'autres niveaux d'étude : si j'ai 2 billes et que j'en gagne 3, j'aurai $2 + 3$ billes ; si, par 3 fois, je gagne 2 billes, j'aurai gagné 3×2 billes ; si on m'invite à choisir une bille dans chacun des lots d'un ensemble de 3 lots de 2 billes, mon stock s'enrichira seulement de 3 billes mais je pourrai faire cela de 2^3 façons différentes ; etc. On passe ainsi très vite de problèmes d'arithmétique de l'école primaire à de petits problèmes de combinatoire dont la difficulté augmente rapidement[47].

La question de l'adéquation se retrouve, en principe, au plus humble niveau. Elle y est résolue traditionnellement, pour tout un chacun, par **l'apprentissage de modèles standards permettant de faire face à des situations standards.**

Mais même le modèle additif le plus simple - que nous évoquions un peu plus haut - peut être examiné de ce point de vue, comme le fit autrefois Henri Lebesgue en soulignant que, dans la formation historique de tels modèles, l'expérience répétée fut le premier garant de l'adéquation, même et surtout en arithmétique élémentaire : «... nous savons sans hésitation, écrit-il ainsi, dans quels cas l'arithmétique s'applique, dans quels cas elle ne s'applique pas. Dans ces derniers cas, l'idée d'appliquer l'arithmétique ne nous effleure pas un instant ; nous ne pensons à appliquer l'arithmétique que lorsqu'elle s'applique, si bien que nous oublions qu'il y a des cas où elle ne s'applique pas : deux et deux font quatre, affirmons-nous. «Dans un verre je verse deux liquides, dans un autre deux liquides. Je verse le tout dans un vase, contiendra-t-il quatre liquides ? - C'est de la mauvaise foi, dites-vous, ce n'est pas une question d'arithmétique. - Dans une cage je mets deux animaux, puis encore deux animaux ; combien la cage contient-elle d'animaux ? - Votre mauvaise foi, dites-vous, est plus éclatante encore ; cela dépend de l'espèce de ces animaux, l'un d'entre eux pourrait dévorer les autres ; il faut savoir si le décompte doit avoir lieu immédiatement ou dans un an, alors que les animaux pourraient être morts ou avoir eu des petits. En somme, vous parlez de collections desquelles on ne sait si elles sont immuables, si chaque objet y garde son individualité, s'il n'y a pas des objets qui apparaissent ou qui disparaissent»[48].

Cest là en effet une condition pour que, selon l'expression de Lebesgue, «l'arithmétique s'applique». «A l'équation **un donne deux** de la reproduction, pourra ainsi écrire un biologiste dans un ouvrage de vulgarisation[49], se substitue l'équation **deux donne un** de la sexualité (....). La véritable équation de la sexualité est donc **un plus un donne un autre**» : nul paradoxe, bien sûr, en ces formulations qui tirent l'œil. Mais on va voir que le contrôle que permet l'arithmétique traditionnelle, et sa puissance même - sans contrôle de l'action il n'y a pas de puissance de l'action -, pâtissent de l'insuffisance des outils sémiotiques sur lesquels l'arithmétique s'est frileusement repliée.

VI - LE MONDE CLOS ET L'UNIVERS INFINI.

6.1 Outils arithmétiques, outils algébriques.

J'ai 23 billes, dont 7 billes bleues. Les autres billes sont noires. Combien ai-je de billes noires ? Le problème appartient au fonds le plus classique de l'arithmétique traditionnelle. Le contrat didactique, plus souvent que l'analyse de la situation mathématique, aide l'élève à le résoudre : j'ai 23 - 7, soit 16 billes noires.

En acceptant qu'ici l'arithmétique s'applique (que les billes ne se volatilisent ni ne se reproduisent), et n'était l'habitude longuement acquise, il faudrait recourir à quelque modèle formel sur lequel on travaillera pour obtenir la réponse : au plus haut niveau, l'équation $x + 7 = 23$; à un niveau moins élaboré, un schéma adéquat (en forme de diagramme de Venn), etc. La situation est plus nette encore s'agissant de la division[50].

L'arithmétique ancienne s'est flattée de faire l'économie de ces moyens formels, à défaut de se les rendre disponibles. Reprenons le problème selon le schéma de la modélisation. Le système étudié - l'ensemble des billes que je possède - est décrit par 3 variables : «le nombre total de billes», «le nombre de billes bleues», «le nombre de billes noires». Les valeurs de ces paramètres définissent un état du système. Nombre de problèmes, élémentaires ou non, sont alors, à l'instar de celui-ci, du type suivant : connaissant les valeurs de certaines variables, trouver les valeurs des autres variables. La connaissance de ces dernières valeurs s'obtient par la considération des relations qui gouvernent l'ensemble des variables.

L'arithmétique traditionnelle reconnaît ici une relation, qu'elle énoncera ainsi : «le nombre total de billes est égal au nombre de billes bleues augmenté du nombre de billes noires». Son outil essentiel est le langage ordinaire, augmenté du calcul **sur les nombres**. On ne calcule pas sur les énoncés du langage ordinaire : pour cela, on prêtera donc à l'arithmétique la vertu d'obliger à «raisonner» sur les énoncés du langage ordinaire, et on déniera au calcul toute autre valeur que celle d'une mécanique, qui peut seulement dérailler, et faillir.

L'algèbre fournit un moyen plus puissant, essentiellement lié à l'usage des **lettres** (pour désigner les variables) et à la possibilité de **calculer sur les expressions littérales** qu'elle conduit à former. Le «raisonnement» se fait calcul, «L'art», c'est-à-dire l'art analytique, l'algèbre, «a découvert très à propos l'usage de l'écriture», note Descartes dans la seizième de ses **Règles pour la direction de l'esprit**. Le problème précédent sera résolu par le calcul à partir de la relation $x + 7 = 23$; en retranchant 7 aux deux membres de l'égalité, on obtient en effet $x = 23 - 7$. Voilà **pourquoi** - selon le modèle utilisé - le nombre de billes noires est donné par la différence 23 - 7.

L'arithmétique, en revanche, demeure essentiellement un savoir oral, qui ne confie au papier que l'effectuation des opérations sur les nombres. Aussi ne dépasse-t-elle guère les problèmes du premier degré, dont elle a fait sa spécialité en s'y imposant longtemps à l'exclusion de toute autre approche. Son arsenal logistique est fait de formulettes (dont la règle de trois d'antique mémoire fournit un exemple emblématique) qui permettent de mémoriser et de mettre en œuvre des schèmes de calcul quelquefois fort habiles, telles les règles de fausse position. Cette habileté, que l'on peut admirer, s'explique par un manque, celui d'un formalisme adéquat.

Le problème suivant, bien dans la manière de l'ancienne arithmétique, éclairera ce point : un commerçant achète une pièce de drap au prix de 4 francs le mètre ; il en revend le cinquième 8 francs le mètre, le quart 7 francs le mètre, le reste 6 francs le mètre, et réalise ainsi un bénéfice de 424 francs. Quelle était la longueur de la pièce de drap ?

L'arithmétique traditionnelle opérait là-dessus par la méthode de fausse position : supposons que la pièce de drap ait été de 20 mètres ; le prix d'achat étant de $4 \times 20 = 80$ francs, le revenu de la vente est égal à

$$8 \times 4 + 7 \times 5 + 6(20 - 4 - 5) = 133 \text{ francs},$$

Le bénéfice est de $133 - 80 = 53$ francs, soit 8 fois moins que le bénéfice effectivement perçu ; la pièce de drap mesurait donc $8 \times 20 = 160$ mètres.

La solution «par l'algèbre» a pour outil essentiel l'équation

$$8(x/5) + 7(x/4) + 6(x - x/5 - x/4) - 4x = 424$$

qu'il s'agit alors de résoudre par le calcul algébrique, et que l'arithmétique résolvait (par la méthode indiquée) sans la manipuler, et **sans même l'écrire** - ce qu'elle ne sait pas faire.

La solution arithmétique est ici économique, certes[51]. Elle deviendra ailleurs hasardeuse, voire impossible. L'univers mathématique de l'ancienne arithmétique est pour cela un monde clos. Les problèmes y sont stéréotypés, comme les solutions qu'elle enseigne à leur donner.

Fin de la citation

a) L'auteur commence par exposer une situation/problème qu'il évoque ainsi : *"On dispose d'un paquet de bonbons que l'on veut répartir équitablement entre un certain nombre d'enfants : comment le faire ?"* Bien entendu, dès le moment où il lit cet énoncé, le lecteur va penser à la division, mais notre auteur rompt cette association en posant en outre la question suivante : *"En quoi et comment, les mathématiques peuvent-elles intervenir pour résoudre ce problème ?"* Son propos sera donc de nous en montrer divers traitements, se rapprochant de plus en plus des mathématiques officielles (scolaires, ici la division). Ainsi nous expose-t-il tout d'abord une procédure *"concrète"* effective que l'on peut utiliser : la distribution des bonbons aux élèves. Puis il nous expose deux autres modèles qui en dérivent, illustrant ainsi comment on est passé *"franchement dans le monde des mathématiques"*.

Du point de vue rhétorique, il convient de noter que l'auteur ne fait jamais qu'évoquer des situations et des modes de les traiter par le recours à des modèles (instruments + règles de traitement). C'est par cet artifice, en dégageant un modèle visiblement non concret (le modèle de la division), qu'il nous donne un exemple de modèle, mais nous entretient au fait d'autre chose, à savoir la modélisation.

b) Sa démarche dans le texte (pp 52-64) est donc de nous faire transiter de la définition du couple système/modèle vers la notion de modélisation. Il nous a introduits à deux affirmations majeures de sa théorie :

(p 61) *"La notion de modélisation permet ainsi de prendre une vue d'ensemble sur l'activité mathématique de l'école primaire à l'université"* ;

(p 62) *"Les modèles dans l'enseignement permettent de dégager, dans un réel plus ou moins différencié, les systèmes sur lesquels la mathématisation voudra avoir prise. Le premier problème que pose toute entreprise de modélisation est celui de l'adéquation du modèle au système qu'il permet d'étudier (.....). Dès le plus humble niveau, cette question est résolue, traditionnellement, pour tout un chacun, par l'apprentissage de modèles standards permettant de faire face à des situations standards"*.

III - REFERENCE RAPIDE A LA THEORIE DES CHAMPS CONCEPTUELS.

Si ces prises de position sont très loin de celles que G. VERGNAUD adopte, il n'en reste pas moins une préoccupation majeure commune, à savoir ce problème de l'adéquation. La question de l'adéquation de la connaissance à la réalité est effectivement la pierre de touche de l'entreprise de G. VERGNAUD et c'est en se posant cette exigence que cet auteur se démarque de théories psychologiques en vogue aujourd'hui. *"Adéquation"* est-ce un terme assez fort pour rendre compte de l'exigence de G. VERGNAUD ? Non ! De même, il est clair qu'il est question de *"connaissance"* et de *"réalité"* plus que de *"modèle"* ou de *"système"*. Mais on comprend bien qu'une psychologie qui ne se donnerait pas ces exigences serait inintéressante pour la didactique.

IV - RECHERCHE SUR LES PROBLEMES ADDITIFS.

Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes arithmétiques (R.D.M. n° 5.3, 1984, pp 326-328 et pp 284-295).

sitions (amis des amis = ami, etc.). La distorsion de l'ordre provoque des difficultés bien connues.

C. *Modèles de représentation*
Quantités, transformation, modèles intermédiaires

1. (N, ⩾, +, −) est bien évidemment le modèle des quantités (états). Les deux opérations renvoient aux actions d'ajouter ou enlever des éléments. Ajouter et enlever sont des opérations inverses, etc., etc.

2. (ℤ, ⩾, +) est un bon modèle pour les transformations. Dès qu'on raisonne uniquement sur les actions ou les transformations (ajouter, enlever, gagner, perdre, ...) il devient clair qu'il n'y a plus qu'une opération : la composition des actions. (Une suite d'actions se combine en une résultante et ceci d'une seule façon). Il n'y a pas de transformation de transformations.

Donc une seule opération.

A chaque action ou transformation correspond une action ou transformation inverse.

Le modèle (ℤ, ⩾, +) s'applique donc parfaitement. L'opération + n'a plus comme support les transformations elles-mêmes, mais bien l'effectuation d'un bilan. Ainsi par exemple : le bilan des deux transformations : perdre 7 billes puis perdre 5 billes se fait par une addition bien qu'on ait affaire à des pertes !

Pour ce qui est de l'ordre, on peut ordonner les transformations en fonction des quantités auxquelles elles se rapportent. Cependant, la distorsion se fait lorsque perdre 7 billes c'est perdre *plus* (de billes) que perdre 5 billes (pertes ordonnées selon les quantités), alors que le modèle **Z** voudrait que perdre 7 billes soit *moins* (bien) que perdre 5 billes.

3. *Modèles intermédiaires*

Il se peut cependant que, dans certaines conditions, le modèle (N, ⩾, +, −) s'applique aux transformations. C'est ce que j'appelle des procédures de registre. Dans le registre des pertes, par exemple, les pertes sont considérées comme des quantités à part entières, ordonnées de la façon naturelle. Faire une perte puis une perte devient alors ajouter à la perte ; faire une perte puis un *gain devient enlever à la perte (ou diminuer la perte).*

Une telle procédure repose sur (ℕ, ≥, +, −) et sur un système d'opposition (perte/gain) ainsi que des règles qui permettent de choisir le registre approprié voire même de changer de registre en cours de route (en remettant le compteur à zéro). Les règles de choix d'un registre sont dictées par des considérations sur les ordres de grandeur des transformations ainsi que l'ordre temporel des transformations.

D. *Indices du calcul*

· Trouver une réponse à un problème, c'est le rendre calculable (qu'importe le juste ou le faux). Or on l'a vu, le calcul repose avant tout sur des considérations relatives aux ordres de grandeurs. Il s'agit donc, pour le sujet qui résoud le problème, de repérer des indices au calcul.

Les recherches sur la résolution de problèmes et en particulier celles de Durand Vergnaud ou la présente, montrent que toute relation numérique entre les données ne prend pas forcément de signification dans l'énoncé, et ne sera pas considérée. Ce couplage prend des formes très subtiles.

Exemple de la soustraction

Remarquons que la soustraction/calcul peut renvoyer à trois situations distinctes :

a) elle renvoie à une transformation négative : enlever, perdre, gagner puis perdre....

b) elle renvoie à l'inverse d'une transformation positive : on veut savoir ce qu'il y avait avant que la transformation ait eu lieu (opposition des transformations).

c) elle renvoie à une situation de tout à partie : A est une partie de B et on veut savoir ce qu'il y a entre deux. Exemple : il y a 12 enfants dont 5 garçons.... combien de filles ? ou, il y avait 5 billes après la partie, il y en a 8, que s'est-il passé ?

Or, tant qu'on raisonne dans ℕ, cette dernière signification est exclusive à la soustraction. La soustraction est l'opération appropriée à une situation de tout à partie.

Mais quand on travaille avec des transformations (ou plutôt avec des nombres relatifs), cette situation peut amener une addition ! Exemple : le problème *Olivier*. Olivier joue 2 parties de billes. A la première, il a gagné 2 billes ; en tout il a perdu 7 billes. Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Il y a là un sérieux obstacle que tout le monde connaît bien et qui très certainement force le passage des modèles ℕ à ℤ.

Autre exemple : soit le problème *Michel*. Michel joue 2 parties de billes. A la première il gagne 4 billes, à la seconde, il perd 6 billes. Que s'est-il passé en tout ?

Eh bien *Michel* et *Olivier* sont certainement des problèmes de difficulté comparable. Cependant *Michel* est plus facile à expliquer que *Olivier*, car le calcul dans *Michel* est « naturel ».

II.2. Image intuitive

Avant de poursuivre, une image qui m'a accompagné tout au long de l'écriture de ces pages. Il s'agit de l'image d'une structure d'arbre (graphe) que l'on parcourerait des feuilles jusqu'au tronc. Ici, le tronc est le calcul numérique dans ℕ qui fournit le résultat du problème.

Celui-ci se double, dès le moment où la notation de **Z** est assimilée, d'un calcul sur les signes.

Ce mouvement ne se renverse pas dans la résolution du problème. L'exemple le plus évident est la résolution de problèmes arithmétiques par la méthode algébrique. Les relations de l'énoncé sont traitées et exprimées par une première équation (ou système d'équations). Ensuite des traitements algébriques spécifiques sont opérés en vue de la résolution sans qu'il soit nécessaire de considérer chaque nouvelle équation comme exprimant des relations du problème. Il en sera de même ici car ce fait est général et ne dépend pas d'un système de notations seulement mais doit être rapporté au traitement lui-même. De toute la chaîne de résolutions qui peut être fort complexe et que je ne saurais en fait décrire, je me référerai à trois sommets : l'énoncé, les relations de l'histoire évoquée et les relations numériques.

II.3. Transformations

La donnée d'une transformation correspond à celle d'un opérateur numérique et infère à un schéma $E_i \xrightarrow{\quad T \quad} E_f$. Une transformation augmente ou diminue une quantité initiale. Une transformation comporte donc deux indications : une quantité (ici des billes) et un mode opératoire. Et ce, de façon univoque :
gain ⟷ addition ; perte ⟷ soustraction.

II.4. Trois types d'énoncés ETE

Les énoncés ETE fournissent exactement ce schéma. Le déroulement de la partie (ordre chronologique : avant-pendant-après) est bien exprimé et les nombres sont des quantités bien différenciées. Selon la place de la donnée manquante (inconnue) on aboutit à trois types de problèmes. Pour chacun d'eux la question s'exprime différemment :

ETX	Combien de billes a-t-il après la partie ?
EXE	Que s'est-il passé durant la partie ?
XTE	Combien de billes avait-il avant de jouer ?

ETX : Ce schéma est le plus simple puisque la question porte sur le résultat d'une opération connue avec des facteurs connus. Ceci une fois compris, il suffit d'effectuer et on obtient la réponse. Les relations numériques entre les données n'entrent pas en jeu dans le raisonnement sauf, bien sûr, dans le cas d'une perte supérieure à l'avoir initial.

EXE : Ce schéma est plus complexe car il est déjà un schéma inverse à ETX. Il suppose en effet que l'on remonte de la considération de la transformation comme achevée vers sa détermination. Ceci se fait par l'intermédiaire de la mise en relation des données numériques prises dans l'ordre chronologique. Ainsi $E_i < E_f \Rightarrow T = (G,\ E_f - E_i)$ et $E_i > E_f \Rightarrow T = (P,\ E_i - E_f)$. (Bien sûr, on soustrait toujours et toujours la plus petite donnée de la plus grande).

XTE : Les énoncés XTE supposent eux aussi la considération de la transformation comme achevée. Ceci permet de situer ordinalement l'inconnue par rapport à l'état donné : en deça (gain) ou au-delà (perte). Ceci est encore une fois univoquement déterminé par la nature (le signe) de la transformation.

Aussi machinale que puisse paraître cette inversion (perte ⟷ addition, gain ⟷ soustraction) elle n'est pas immédiate. C'est ce que montre le net écart de réussite entre problèmes ETX et XTE observé maintes fois (cf. Durand Vergnaud par ex.). Une fois encore on tombe sur la préséance des relations de l'énoncé sur les opérations effectuées.

L'inversion se passe au niveau des relations et non pas au niveau de l'énoncé lui-même. Lorsqu'on résoud *Bertrand* X P_7 3 en effectuant l'addition 3 + 7 = 10, on n'a pas idée qu'on est en train de résoudre un énoncé du type 3 G_7 X. L'inversion ne se situe pas entre gain et perte. Elle est dérivée de l'énoncé. Ainsi on retrouve l'idée de graphe en arbre et le calcul 3 + 7 = 10 est situé ainsi :

$$\begin{matrix} 3G_7X \searrow & \\ & 3 + 7 = 10. \\ XP_73 \nearrow & \end{matrix}$$

Mettre en relation des énoncés est tout autre chose, cette compétence est équivalente à celle de construire des énoncés. A ceci je rattache en outre le phénomène maintes fois observé : la réticence des élèves à vérifier leur résultat.

II.5. Composition des transformations et registre

Comme dit (au point mathématique) il n'y a qu'une composition des transformations, c'est l'enchaînement des parties ou des opérateurs. Cette composition peut être représentée de manières diverses selon le contexte et selon les outils dont dispose le sujet.

Par exemple une représentation très concrète dans le cas où deux gains (deux pertes) se succèdent. Gagner n billes *et encore* m billes (le français ne répète même pas « gagner ») revient à une adjonction de billes.

Un peu plus élaboré et adapté à un éventail de situation nettement plus large, la représentation de la composition comme le fait d'un opérateur. Augmentation ou diminution de l'intensité de la transformation initiale sous l'action d'une transformation qui lui succède. Je gagne m billes (j'ai bien joué) je perds n billes (dommage), finalement, j'ai quand même gagné m-n billes (si $m > n$). Mon gain initial s'est réduit.

Plus élaborées encore sont les représentations d'annulation d'une première transformation ou d'inversion du bilan. Ex. : Il gagne m billes, puis en perd n. Il reperd les m billes et encore n - m (si $m < n$).

Ces représentations s'élaborent dans la mesure où est prise en compte l'altération de la transformation et de son signe et non pas seulement de son intensité. Ici, l'idée de registre est très importante. Se placer dans un registre de gain ou de perte permet de ramener ses calculs et les relations numériques dans le cadre de N. Dès lors les choses se passent de la même façon dans le registre des gains et des pertes.

La détermination du registre peut être faite de trois manières qui dénotent du travail d'adéquation (homomorphisme) entre les relations de l'histoire évoquée et des relations numériques. La manière la plus naturelle est de se situer dans la chronologie énoncée et de se fixer le registre de la première partie. On se trouve de cette façon très proche du schéma ETE (cf. suite). Mais cela est inapproprié dans les cas où le bilan et la première partie ne sont pas liés dans un même registre. (c. à d. P_nG_mX G_nP_mX $n<m$, XP_nP_m et XG_nG_m $n>m$ et PXG ou GXP.
Dans les cas XTT on considère la relation réciproque).

On peut alors adapter la détermination du registre : soit prendre celui exprimé par le bilan (le signe du bilan) quand il est donné, soit prendre celui de la transformation d'amplitude maximum (mais ceci ne devrait pas concerner le cas où le bilan est donné).

Toutes ces considérations deviennent formellement superflues si on utilise les nombres négatifs et les équations pour résoudre ces problèmes.

II.6. Groupe

L'ensemble des transformations et leur composition a une structure de groupe commutatif. Que la composition soit une loi interne dérive de l'associativité de l'addition dans N. Avec une petite nuance à propos de la soustraction (registre). Prenons une notation de type opérateur :

$G_n\ (E_i) = E_i + n = E_f$
$P_n\ (E_i) = E_i - n = E_f$
$G_n\ (G_n(E_i)) = (E_i + n) + m = E_i + (n+m) = G_{n+m}\ (E_i)$
$P_n\ (P_m(E_i)) = (E_i - n) - m = E_i - (n+m) = P_{n+m}\ (E_i)$

Le signe − indique l'action de la transformation sur l'état, non la composition des transformations (perdu deux fois augmente la perte).

$m \leq n\ P_m\ (G_n(E_i)) = (E_i + n) - m = E_i + (n - m) = G_{n-m}\ (E_i)$
$m \geq n\ P_m\ (G_n(E_i)) = (E_i + n) - m = E_i - (m - n) = P_{m-n}\ (E_i)$

On retrouve le registre mais défini comme celui de la transformation d'intensité maximum.

L'associativité de la composition des transformations est équivalente à celle de la composition des opérateurs. De même la commutativité de la composition. Notons cependant que cette commutativité n'est pas celle des états. En effet pour $P_n\ (G_m\ (E_i)\ )\ n \leq m$, E_i peut être quelconque dans $\mathbb{N}$, tandis que pour $G_m\ (P_n\ (E_i)\ )$, E_i doit être plus grand que n ($\forall$ n et m).

Un groupe est défini par la propriété qui veut que l'équation T∘X=T' ait toujours une solution (je me situe dans le cadre commutatif). Ceci montre le rapport qu'il y a entre les énoncés TTX et TXT (auxquels sont associés les énoncés XTT). Ceci est important à noter et à ne pas confondre avec la relation gain/perte. Ne pas confondre donc mode d'action d'un opérateur et le calcul numérique qui en découle.

II.7. Schémas TTT et ETE

Il y a une certaine dissociation entre les deux aspects d'une transformation : signe/intensité. Dans les réponses les moins élaborées, la transformation représente une sorte de constat : perdu/gagné. Dans les énoncés TTT, le bilan s'exprime comme une transformation (comme si c'était une partie de billes et non pas la composée de deux parties). Ceci ne semble pas poser de problème et je me l'explique par cette conotation de constat.

La mesure de l'intensité (amplitude) de la transformation est donnée en termes de billes. Elles peuvent être considérées comme des billes « concrètes », celles que l'on échange ou encore celles qui « circulent » au cours du jeu. Ainsi pour $G_6\ P_4$ X il est assez naturel de penser que 4 des 6 billes gagnées ont été reperdues et donc restituées à l'adversaire. Dès lors la quantité de billes qui exprime l'amplitude de la transformation est modifiée, tout comme l'est un état, par l'action d'une transformation ultérieure. Les transformations deviennent leur propre opérateur (quant à l'amplitude).

Une autre manière de se rapporter au schéma ETE est de considérer un état initial (on se le donne) et d'y enchaîner les opérations de manière à reconstituer les parties :

$$\begin{array}{c} E_i \xrightarrow{T_1} E_{int.} \xrightarrow{T_2} E_f \\ \llcorner\!\!-\!\!-\!\!-\; T_3 \text{ ou Bilan } -\!\!-\!\!-\!\!\lrcorner \end{array}$$

Pour obtenir la réponse au problème TTT, il ne suffit pas de calculer les états, une comparaison est encore nécessaire pour avoir la transformation.

Si la résolution des problèmes se situait au niveau des énoncés, on verrait alors que la résolution d'un problème TTT correspond à l'enchaînement de trois problèmes ETE :

$$\begin{array}{ll} T_1T_2X : & E_1T_1\mathbf{E_2} \longrightarrow \mathbf{E_2}T_2\mathbf{E_3} \longrightarrow E_1X\mathbf{E_3} \\ T_1XT_3 : & \left.\begin{array}{l} E_1T_1\mathbf{E_2} \\ E_1T_3\mathbf{E_3} \end{array}\right\} \longrightarrow \mathbf{E_2}X\mathbf{E_3} \\ XT_2T_3 : & E_1T_2T_3 \longrightarrow \mathbf{E_2}T_2\mathbf{E_3} \longrightarrow E_1X\mathbf{E_2} \end{array}$$

Cas où E1 est donné, E_2 E_3 puis X sont calculés (gras).

De beaux problèmes à tiroir ! Mais la remarque sur les intensités des transformations indique comment on peut obtenir des calculs plus directs.

II.8. Problèmes TTX et TXT

1. Dans les énoncés TTT, le bilan est exprimé comme une transformation. Elle est annoncée par l'expression « *en tout* » dans : « En tout, il a gagné n billes » ou « Que s'est-il passé en tout ? ». En outre l'ordre de déroulement du jeu y est scrupuleusement indiqué. Les questions se distinguent alors par la place de l'inconnue.

« Que s'est-il passé	→ en tout ? »	TTX
	→ à la 2e partie ? »	TXT
	→ à la 1re partie ? »	XTT

Formellement il n'y a que deux structures de problèmes TTT. Vu que la composition est commutative il y a :

TTX	composition
TXT XTT	} décomposition

Dans les énoncés TTX, les transformations sont données sur un même plan, seul l'ordre les différencie. « En tout » veut dire « tout compté » et exprime réellement un bilan. La signification de ce terme bien sûr peut couvrir une gamme de représentations. Très souvent les réponses à ces problèmes sont formulées en termes d'état : « Il a, il reste, il manque, etc. ». J'appelle cela un « glissement de sens ». Ceci est un indicateur des relations mises en jeu dans la résolution mais ne signifie pas une *traduction* de l'énoncé en termes d'état. Le sujet (car bien des adultes répondent de même) aura pu raisonner sur l'intensité d'une des transformations comme décrit au paragraphe précédent. Il s'avère que ce type de traitement n'est pas sans poser des difficultés dans le cas de G_nP_mX avec $m<n$. C'est l'articulation des transformations qui constitue le *problème* dans ces énoncés.

2. Pour les énoncés TXT le traitement des intensités comme on le ferait d'états permet aussi un glissement de sens et de se ramener à un schéma EXE. Par exemple : *Jacques* P_5XP_8 « Il a perdu ses 5 billes et encore 3 ». Cependant un tel « glissement de sens » ne s'identifie pas aussi aisément que dans le cas TTX.

Revenons aux problèmes ETX, et EXE. Dans le problème ETX, le sujet se voit donner les deux facteurs et l'opération selon laquelle les combiner, il n'a qu'à effectuer. Dans le schéma EXE, le sujet doit partir de la considération selon laquelle la transformation est achevée. C'est plus complexe. Mais ceci libère le sujet de la réalisation de cette transformation.

Dans le cas TTX, le sujet dispose bien sûr des facteurs mais il est à sa charge de trouver les relations qui indiqueront comment les combiner. Il doit subvenir au manque de donnée sur les états.

Le cas TXT est plus proche de EXE — via glissement de sens. Une fois le registre déterminé, la considération de la transformation comme achevée dispense le sujet de se faire une idée de la combinaison des transformations. De grandes difficultés se révèlent alors dans le cas PXG ou GXP.

II.9. Soustraction et signes

En regard des états, gains et pertes indiquent un mode d'action. Un gain augmente un avoir comme une addition augmente un nombre. Une perte diminue un avoir comme une soustraction diminue un nombre.

Par rapport à un bilan de parties, le mode d'action d'un gain ou d'une perte se situe dans un registre. Un gain augmente un gain antérieur mais diminue (compense) une perte antérieure. Et analoguement pour les pertes. C'est donc dans le cadre d'un registre que l'opération à effectuer doit être déterminée. Le registre a trois conotations : l'adaptation à l'ordre chronologique (1re partie = registre qui se modifie au cours de la partie successive), l'adaptation à la relation composante/composée (Bilan = registre), l'adaptation à la relation numérique des amplitudes. La détermination de l'opération numérique adéquate est soumise au registre. Dans le schéma TTX, la soustraction dénote l'opposition des deux transformations. Et non pas l'action absolue de la perte puisqu'un gain diminue une perte ! Elle ne prend donc de sens que relativement au registre. Pour qu'elle soit effectuable dans $\mathbb{N}$ il se peut que par rapport à la chronologie un « changement » de registre intervienne comme dans Michel G_4P_6X. Ce jeu entre chronologie et intensité des transformations correspond en notation formelle à : (b-a) = ~~(a-b)~~. Je dirais alors que dans -(a-b) le premier signe « moins » recouvre le registre, tandis que le second recouvre la compensation des transformations. b-a = -(a-b)

Mais la soustraction ne s'applique pas seulement à la composition de deux transformations de signes opposés. Elle renvoie aussi à la décomposition d'un bilan dans un registre donné.

J'avais noté pour les problèmes E_iXE_f :

$E_i < E_f \rightarrow X = (G_n,\ n = E_f - E_i)$

$E_i > E_f \rightarrow X = (P_n,\ n = E_i - E_f)$

On retrouve ici (dans le registre des pertes) l'expression :

$$\underbrace{(E_f - E_i)}_{\text{chronologie}} = \underbrace{P\,(E_i - E_f)}_{\text{ordre numérique}} \text{ c'est-à-dire } (b\text{-}a) = -(a\text{-}b)$$

où le premier signe « moins » est le signe de la transformation (P) tandis que le second exprime la diminution des états et non pas, comme auparavant (TTX) l'opposition entre les transformations.

Il en est de même pour les problèmes $(TXT)_1$ (GXG et PXP) avec une nuance qui montre bien ce que permet la donnée d'un registre.

Prenons la comparaison de *Jacques* P_5XP_8 et *Didier* P_7XP_4 :

$5 < 8 \rightarrow X = (P, 8\text{-}5)$
$7 > 4 \rightarrow X = (G, 7\text{-}4)$.

On trouve donc dans le 2[e] cas une inversion entre ordre numérique des intensités et chronologie et donc une inversion du résultat par rapport au registre. On est dans le registre des pertes et la perte de 7 billes s'est réduite parce que 3 billes ont été récupérées. Ceci revient à (b-a) = -(a-b). Ici le premier signe « moins » indique l'opposition par rapport au registre, tandis que le second est celui de l'ordre des amplitudes des pertes (diminution des intensités). Ceci suppose déjà un type élaboré de représentations.

Le cas $(TXT)_2$ (GXP et PXG) est le plus complexe. Dans ce cas, la relation induite par l'ordre des intensités est trompeuse. Celle-ci n'a en effet aucune signification si les transformations ne sont pas de même signe. Formellement on tombe sur :

$P_mX\,G_n \qquad X = (G, m + n)$
$G_mX\,P_n \qquad X = (P, m + n)$. Ce qui revient à :
$(b - - a) = (b + a)$. Où le premier signe « moins » exprime la décomposition du bilan et le second l'opposition des deux transformations données. Encore faut-il comprendre que cela se combine ! Le modèle du registre et des augmentations/diminutions s'avère insuffisant. Il faut passer par l'annulation (c. à d. considérer gains et pertes comme opposées).

J'ai appelé ceci la surcompensation. Revenons au schéma direct TTX : P_nG_mX (G_nP_mX) $n < m$. Un raisonnement sur les intensités est encore possible. Il consiste à dire : « les n billes sont regagnées (récupérées) et *encore m - n* ». (« les n billes sont reperdues et encore m - n »). Il y a donc mise à zéro de la première transformation et de ce fait elle disparaît du bilan. Un sujet qui maîtriserait bien cette dernière relation *(mais qui relativement au problème TTX est ultérieure à la solution)* pourrait s'y appuyer pour résoudre PXG (GXP). Ainsi la mise en relation des énoncés suppose un point de vue supérieur à ceux-ci de la structure des événements évoqués. Tout comme l'est la vérification.

Un second raisonnement possible pour surmonter la difficulté serait de se fixer dans le registre du bilan et de considérer la donnée de l'autre transformation comme un opérateur sur les quantités. Ex. : XP_7G_3. Registre des Gains. La perte de 7 billes a réduit un gain initial à n'être plus qu'un gain de 3 billes, donc le gain initial est de 10 billes. En quelque sorte le report du problème XTE sur les intensités des parties via la considération d'un registre.

Un troisième raisonnement consisterait à se ramener au schéma ETETE. Avec deux variantes.

a) Se donner un état initial arbitraire (suffisamment grand) puis calculer les autres états.

Ex. : G_2XP_7 10 12 3 (G_2 de 10 à 12 ; P_7 de 10 à 3)

XP_7G_3 10 20 13 (G_3 de 10 à 13 ; P_7 de 20 à 13)

XG_2P_7 10 1 3 (P_7 de 10 à 3 ; G_2 de 1 à 3)

Ici, cela demande une bonne maîtrise de la structure chronologique, et la compétence de « remonter » une transformation (inversion). Pour le reste les transformations s'appliquent aux états données.

b) Coordonner les intensités des relations en les dédoublant. Ceci revient à peu près au même que ci-dessus, si ce n'est que cet effort de coordination n'est pas faible. Par contre la réponse prend un caractère de nécessité plus marqué.

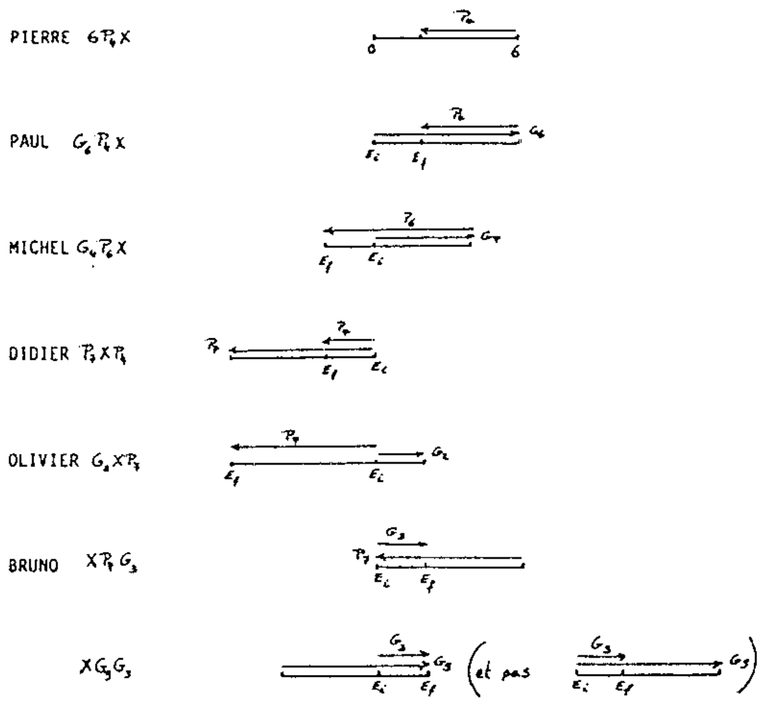
Ex. : G_2XP_7 7 9 0 (G_2 de 7 à 9 ; P_7 de 7 à 0)

XP_7G_3 0 10 3 (G_3 de 0 à 3 ; P_7 de 10 à 3)

XG_2P_7 9 0 2 (P_7 de 9 à 2 ; G_2 de 0 à 2)

(fin 1ère citation)

72



On voit combien il s'agit de contrôler la chronologie des parties, le sens de parcours pour l'ajuster sur l'ordre linéaire de la graduation. On voit se dessiner deux classes de problèmes, ceux qui restent dans le même registre à droite ou gauche de la borne initiale et ceux qui chevauchent. C'est ceux-là qui sont les plus complexes et appellent le plus la notation **Z** et équationnelle. Notons aussi comment les nombres se doublent en intervalles (intensités) et bornes, ce que nous avions notés pour le problème *Michel* G_4P_6X dans les équations de certains élèves.

V.2. *Equations*

Les calculs relationnels viennent à ce que j'appellerai un calcul de *compatibilité* entre les différents ordres de relations suscitées par un énoncé donné. Le traitement n'est engagé que sur des relations significatives, c'est-à-dire qui permettent de concorder avec des relations d'un autre ordre ou de les rendre prévisibles. Dans ce qu'on appelle classiquement le raisonnement ou dans le traitement intuitif, le jeu de ces relations est très complexe aussi subtil que non linéaire, les relations étant traitées dans tous les sens, partiellement ou complètement, en une ou plusieurs fois. On peut dégager, pour ces problèmes relativement simples, au moins 4 ordres de relations en jeu dans les raisonnements.

1e L'ordre chronologique des événements.

2e La relation entre composantes et composée.

3e La relation entre gains et pertes relativement aux registres.

4e Les relations numériques engagées dans le calcul.

Toute automatique qu'elle soit, une résolution formelle algébrique pourvoit au traitement de ces relations. A sa manière. Comment ? Prenons deux exemples de résolution :

Didier P_7XP_4 et faisons une équation dans **Z** :

la pose de l'équation écrit la chronologie :	$(-7)+x=(-4)$
Le bilan est décomposé :	$x=(-4)-(-7)$
Le jeu des signes détermine la relation gain/perte dans un registre donné	$x=-(4-7)$ (ou $+(7-4)$)
Le calcul numérique peut suivre (et engager les relations numériques)	$x=+(7-4)$.

Il est alors intéressant de noter : les relations sont engagées une à une et « inscrites dans le traitement ». *Il n'y a pas d'anticipation à faire d'un ordre relationnel à l'autre. (C'est fondamental pour saisir le contraste).* Et d'ailleurs dans la conscience de l'algébriste (ou dans le commentaire de l'enseignant) les traitements équationnels sont ***auto-référés*** (poser éq, isoler le x, régler les signes, calculer) et c'est ce qui rend ma correspondance si surprenante. Et quel dégagement par rapport aux raisonnements arithmétiques ! On voit donc comment l'algèbre se construit contre l'arithmétique. Dans l'exemple ci-dessus, la notation relative n'est pourtant pas nécessaire (les données sont des pertes, on peut rester dans N via le registre même pour les équations). Cela s'impose déjà plus pour *Olivier* G_2XP_7 :

$(+2) + x=(-7)$
$x=(-7)-(+2)$
$x=-(7+2)$
$x=-9$

Examinons encore le raisonnement « en tout, il a perdu, donc il a du reperdre les 2 billes gagnées ». J'ai montré qu'en arithmétique, on a beau avoir tenu ce raisonnement parfaitement correct, le problème n'en est pas pour autant réglé, car comment situer cette perte postulée P_2 avec la perte du bilan P_7 ? Du point de vue du calcul relationnel, cette postulation revient à une annulation : les billes gagnées sont reperdues, et ceci devient alors occulte dans le bilan. Algébriquement, le correspondant sera bien sûr le suivant :

$(+2)+x=(-7)$
$(-2)+(+2)+x=(-2)+(-7)$

dont il reste la règle du « passage de (+2) de l'autre côté de l'équation en l'inversant ». L'inversion de G_2 à P_2 a un statut algébrique bien précis, c'est une « opération algébrique » sur l'équation dans son entier. L'annulation d'un côté du égal a sa correspondante notée dans l'autre. *Il ne s'agit plus simplement de relation mais d'opération.*

Rem. : Le raisonnement $P_7 \rightarrow (G_2 \Rightarrow P_2)$ est tenu dans un registre donné. Ceci nécessiterait, pour être tout à fait cohérent par rapport à la chronologie, que l'on différencie dans l'inconnue le signe, dont le calcul est réglé par le registre, et l'intensité. Ce qui donne :

$(+2)+(-x)=(-7)$ —— $-x$ (perdre x) est "décomposé"
$(+2)+(-2)+[-(x-2)]=(-7)$ —— en $[(-2)+[-(x-2)]]$
$-(x-2)=(-7)$

V.3. Benoit, un élève sans problèmes

Pour conclure, examinons justement les équations produites par un sujet particulièrement brillant : Benoît, 9 ans.

Pierre	Il reste 2 billes	6-4=x x=2
Bertrand	B. avait 10 billes	7+3=x x=10
Claude	C. a gagné 4 billes	5+x=9 x=4
Paul	P. a gagné 2 billes	6-4=x x=2
Laurent	L. a perdu 7 billes	2+5=x x=7
Michel	M. a perdu 2 billes	4-6=x x=-2
Christian	Ch. a gagné 4 billes	5+x=9 9-5=x x=4
Jacques	J. a perdu 3 billes	5+x=8 x=3
Didier	D. a gagné 3 billes à la 2[e] partie	4=7-x x=3
Olivier	Il a perdu 9 billes	+2--x=-7 2+7=x x=9
Vincent	Il a perdu 10 billes	8-x=-2 8+2=x x=10
Bruno	Il a gagné 10 billes	x-7=3 7+3=x x=10

74

Un sujet n'est pas une machine formelle et Benoît ne fait pas exception à la règle. On notera la réponse à *Didier*. Mais aussi une bizzareté, algébriquement éronée, dans le traitement de *Olivier*. Avez-vous remarqué ? +2--x=-7 2+7=x ? Mais sans conséquence sur le libellé de la réponse. Comme tout sujet, Benoît a des systèmes parallèles de contrôle. (Dit en passant ces systèmes sont bien plus importants, dans l'apprentissage, que l'acquisiton de mécanismes. C'est leur fiabilité qui différencie les experts des novices, pas le mécanisme des règles formelles). Mais examinons à la lumière de ce qui a été dit ci-dessus les réponses de Benoît.

a) *Chronologie* : Pour tous les problèmes TTT, l'équation initiale *restitue* le déroulement des parties. Une seule inversion pour *Didier* où le résultat est annoncé en premier : 4=7-x (dans le libellé Benoît insiste sur « à la 2ᵉ partie »).

b) *Registre* : les problèmes de perte : *Laurent, Jacques* et *Didier* sont exprimés dans le registre des pertes. Numériquement, le *résultat* du calcul de Benoît est exprimé dans N, sauf pour *Michel* (-2). Mais la nature de la transformation est déjà déterminée. De même (cf. plus loin) c'est le registre qui fournit le contrôle pour l'équation *Olivier*.

c) *Calcul numérique* : Toutes les équations aboutissent à l'écriture d'une équation-calcul dans N.

d) *Usage des relatifs* : pour *Michel, Olivier et Vincent,* Benoît utilise les nombres relatifs. Cela note le résultat : ....=-2, ...=-7, ...=-2. Mais aussi dans *Olivier* +2.

Cependant x n'a pas de signe en lui. C'est un nombre. Son signe est marqué dans la manière dont il se combine aux données (il réagit dans le milieu plongé). Donc en terme d'opposition G/P dans le cadre d'un registre donné.

e) *Equation Olivier* G_2XP_7. $(+2)-(-x)=(-7) \Rightarrow 2+7=x \Rightarrow x=9$
Dans sa résolution, Benoît commence par se situer dans **Z** mais il finit dans le registre des pertes (de même pour toutes les équations sauf *Michel*). J'interprète le double signe « moins » comme une surnotation, un pléonasme. Un signe « moins » se rapporte à la combinaison de +2 et x l'autre indique que x est une perte. (Ceci est cohérent avec l'écriture surprenante de +2 pour G_2. La seule fois). Cependant, le signe de la combinaison des données est un opérateur numérique pas un opérateur de signes. (formellement $(+2)-(-x)=-7$ => 2+x=-7 => x=-9) Ce qui peut paraître aussi correct. Si ce n'est que la pose de : «--» n'a alors aucun sens si x est considéré comme un nombre relatif avec signe. Au vu des traitements des autres énoncés, du rôle de x et du rôle des signes d'opérations ceci resterait mystérieux. Mon explication est plus cohérente. On ne saura bien sûr jamais la vérité de ce cas. Retenons que l'on a une explication globale de toutes les productions et que l'adaptation que je propose pour la singularité «--» ne sort pas de ce cadre).

Fin de la citation.

a) Dans cette recherche sur les problèmes additifs, la question-prémisse que je me suis posée était de comprendre quelle était l'adéquation de la distinction conceptuelle état/transformation pour saisir la pensée des élèves. Ceci m'a amené d'abord à caractériser les traitements possibles et observés chez les élèves. De là, et gardant le point de vue du savoir mathématique, j'ai questionné les modèles construits par les chercheurs dans le montage de leurs expériences, dans celui de la construction de leurs explications, et même l'identification des modèles auxquels se réfèrent les enseignants eux-mêmes dans leur fonctionnement didactique. Un résultat essentiel de ma recherche est d'avoir dégagé la cohérence (consistance) de ces trois facettes de la modélisation. En ce sens, cette étude d'apparence psycho-pédagogique est bien plus une étude didactique.

b) Prenons comme premier exemple la comparaison entre résolution arithmétique et algébrique. Revenons, en guise d'introduction, à une dernière citation du texte de Y. CHEVALLARD : (*"La notion de modélisation est une*) *grille de lecture et d'interrogation, elle fournit un cadre de référence au sein duquel il devient alors possible de faire surgir des différences significatives entre arithmétique et algèbre notamment"*. Voici comme ceci avait été réalisé dans mon étude publiée dans R.D.M. n° 5.3 (pp 326-328 n° V.2 Equations). Prenons l'exemple du problème "Didier" :

> Didier joue deux parties de billes.
> A la première partie il perd 7 billes.
> Il joue une seconde partie.
> En tout, il a perdu 4 billes.
> Que s'est-il passé à la seconde partie ?

Dans mon texte, j'évoque la résolution arithmétique comme un "*jeu de relations aussi subtil que non linéaire, les relations étant traitées en tout sens, partiellement ou complètement en une ou plusieurs fois*".

L'analyse faite tout au long de mon étude permet de dégager un modèle reposant sur 4 ordres de relations en jeu dans les raisonnements :

1°) Ordre chronologique	$\overset{\text{alg}}{\leftrightarrow}$	$(-7)+X=(-4)$	méthode
2°) La relation entre composantes et composée	$\leftrightarrow$	$X=(-4)-(-7)$	de traitement
3°) La relation entre gains et pertes relativement au registre	$\leftrightarrow$	$X=-(4-7)$	algébrique
4°) Les relations numériques engagées dans le calcul et le calcul	$\leftrightarrow$	$X=(+3)$	

Remarque.

1. Il existe une méthode de résolution arithmétique. Mais celle-ci est devenue désuette, bien plus que les problèmes d'arithmétique, bien qu'elle ait inspiré et qu'elle inspire encore les chercheurs, qui souvent croient y retrouver d'anciennes vertus. (cf. mon compte-rendu de "Lecture de l'Enfant", "La mathématique et la réalité" de G. VERGNAUD R.D.M. n° 3.2. Mais G. VERGNAUD a bien progressé depuis ce livre, en proposant entre autres la théorie des champs conceptuels !).

2. On pourrait rapprocher cette énumération (à gauche) de la description du champ conceptuel associé aux énoncés de problèmes (situations évoquées). Ce modèle est aisément mis en correspondance avec la méthode de résolution algébrique (à droite), méthode qui est, soit-dit en passant, un modèle de résolution algébrique ! On obtient le schéma suivant caractérisant mon analyse.

Résolution arithmétique $\xrightarrow{\text{analyse}}$ Modèle relationnel de la résolution arithmétique

Résolution algébrique $\longrightarrow$ Méthode de résolution algébrique

corres-pondance

limite du traitement usuel (savoir reconnu culturellement)

usuel | obsolète

3. Il convient de noter que la correspondance qui nous occupe ici, traite de façon non usuelle la question de la modélisation algébrique. En effet, le propre de la résolution algébrique, en tant que méthode, est de rompre avec l'espace des relations (prendre distance, impliciter) et non de garder à vue, à tout moment de la résolution, ces relations. Mais dans mon analyse il s'agit au contraire d'expliciter comment les deux modèles (arithmétique et algébrique) permettent la résolution du même problème. Il s'agit d'exprimer d'une part quelle est leur adéquation propre, et d'autre part comment ils se distinguent.

c) Il est possible d'approfondir ces propos en examinant comment cette analyse du traitement relationnel est faite, et comment le recours à des modélisations l'a permise. Il s'agissait, là encore, de la question de l'adéquation entre modèles et savoir mathématique et en particulier : l'articulation addition/soustraction, nombre entier/nombre relatif, et enfin les propriétés structurelles des opérations (associativité, commutativité, groupe, etc.).

Partant du point de vue que l'addition/soustraction rend compte à la fois (mais pas seulement) de l'action d'une transformation (effet d'un gain ou d'une perte sur un avoir de billes) et la composition de ces transformations (bilan de 2 ou plusieurs parties), voulant travailler cette nuance, j'ai cherché à voir quelles autres nuances lui étaient liées. Usant de la notation fonctionnelle, très élémentairement, j'ai réécrit la composition de transformations (bilan). On voit que, d'un côté, la composition des transformations en bilan dépend de l'associativité de l'addition. Mais on voit aussi, d'un autre côté, que l'associativité de l'addition est "*modulée*" dans son écriture dès le moment où l'on distingue gains et pertes. Ceci peut se dénoter dans les écritures :

$$G_m \circ G_n (E_i) = (E_i + n) + m = E_i + (n+m) = G_{n+m} (E_i)$$

$$P_m \circ P_n (E_i) = (E_i - n) - m = E_i - (n+m) = P_{n+m} (E_i)$$

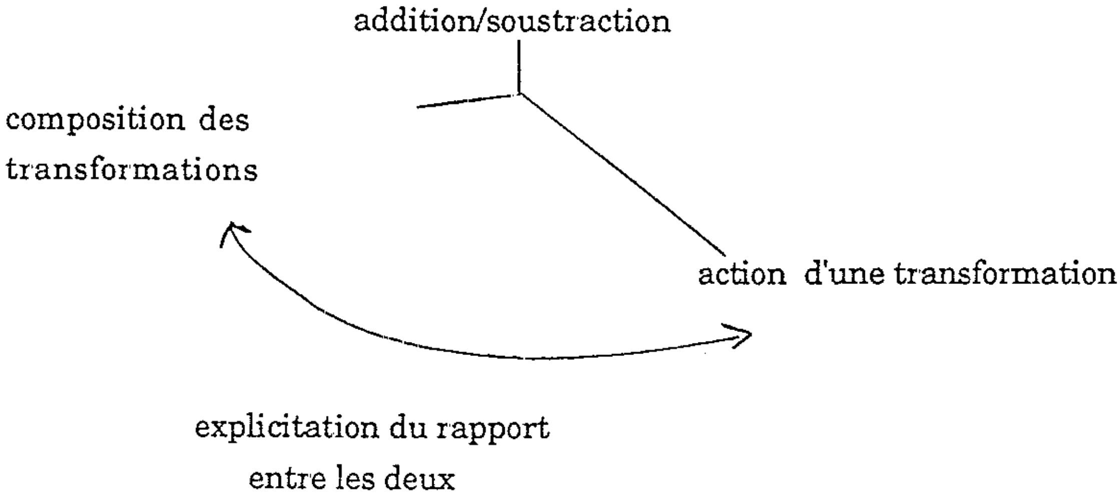
$$P_m \circ G_n (E_i) = \begin{cases} (E_i + n) - m = E_i + (n-m) = G_{n-m} (E_i) & n \geq m \\ (E_i + n) - m = E_i - (m-n) = P_{m-n} (E_i) & n \leq m \end{cases}$$

Il est à noter que l'on a pu reprocher à l'enseignement de mathématiques modernes de s'être perdu dans ces nuances ! Deux moyens d'éviter les confusions sont envisageables :

a) recourir au modèle $\mathbb{Z}$ et distinguer signe du nombre et signe de la composition.

b) recourir à un modèle intermédiaire constitué à partir de $\mathbb{N}$ par l'adjonction de la notion de registre (cf. pp 284-286 puis 288-289 II.5 de l'article).

Mon analyse ici se schématise de la façon suivante :



L'analyse de type "*génétique*" cherche à rendre compte de la constitution des concepts d'addition et de soustraction. Ainsi elle parcourt ce schéma <u>en remontant</u>. Par contre l'expérimentation qu'elle soit psychologique ou enseignante parcourt ce schéma <u>en descendant</u>. Ceci veut dire que l'on peut légitimement considérer la composition des transformations ou l'action d'une transformation comme des modèles de l'addition/soustraction. Ce sont des modèles que l'on évoque aux élèves ou aux sujets des expériences psycho-pédagogiques. Or la structure de ce schéma a ceci de particulier qu'il n'est pas symétrique. Le parcours ascendant aboutit à un seul endroit alors que le parcours descendant présente un embranchement. Cette <u>structure</u> est au coeur du problème bien connu du recours au concret. <u>L'inattention aux nuances</u> qui accompagne si souvent ce recours est source de confusion dans l'enseignement, et de là quelques effets didactiques bien connus : effet Diénes, scholastique des propriétés des opérateurs (associativité et tout ce "toin-toin"), recours à des illustrations pour lesquelles l'élève a avantage à savoir d'avance etc. Mais ces confusions ont autant marqué les recherches psycho-pédagogiques et même didactiques. C'est ce que mon texte montre dans les pages 291 et suivantes. Par exemple une confusion qui a ramené l'étude des problèmes TTT aux problèmes $E_1T_1E_2T_2E_3$. Je montre que la résolution d'un problème $E_1T_1E_2T_2E_3$ suppose un enchaînement de deux, voire trois problèmes ETE de structures différentes. Cet exemple introduit à un résultat essentiel de mon étude, à savoir la mise en évidence de glissement de sens. A nouveau, une modélisation et une comparaison de modèles permet cette mise en évidence. Il s'agit ici de confronter la modélisation en termes d'état et de transformation (structure ETE, TTT, ETETE,...) avec le langage qui les exprime. D'abord dans la confection des énoncés, par le chercheur lui-même (ici Durand-Vergnaud) et l'examen de la façon dont les questions sont libellées (et le chercheur n'est pas libre de ces expressions !) ; ensuite dans la façon dont les élèves libellent leurs réponses. Là encore, le travail de ces nuances langagières consiste à les rattacher à d'autres nuances, et permet de "*faire surgir*" la façon dont les problèmes se posent dans des cas différents.

Exemple.

1) TTX (on demande le bilan de la composition de deux transformations) où c'est "*l'articulation des transformations qui constitue le problème dans ces énoncés*" (p 292). Et dans ce cas les schémas TTX et ETX sont très différents (ce que montrent bien les analyses de Durand-Vergnaud).

2) Tandis que les problèmes TXT où l'élève cherche un opérateur passant d'une transformation initiale à une transformation bilan sont bien plus proches, confondables, avec les problèmes EXE.

d) On pourrait dans cet article multiplier ces exemples d'analyse.

IV - CONCLUSON.

Le problème de l'adéquation du modèle au système est effectivement premier et crucial. Le traitement de ce problème est loin d'être trivial, il suppose la mise en oeuvre de techniques particulières et exigeantes. A mon avis, notre recherche en didactique n'est pas assez avancée pour qu'elle puisse, à l'heure actuelle, se passer de telles techniques. Attention le pédagogisme guette ! Il ne suffit pas, pour le conjurer, d'utiliser des termes, aussi savants soient-ils que ceux de système et de modèle.

Il est crucial de : . savoir modéliser

. savoir traiter le modèle

. ne pas oublier ce que le modèle a fonction d'oublier !

C'est exactement le sens du message donné par la 3ème conférence du C.N.E.T. lundi 28 au soir où l'Ingénieur du C.N.E.T. nous a montré comment la physique l'avait toujours guidé dans la recherche et finalement permis de se doter des instruments mathématiques adéquats.

(NB. nous faisons ici allusion à une conférence donnée à l'Ecole d'été)

FIN