

Que sait-on de la géométrie à ses origines ? Comment y donner des interprétations didactiques ?

Olivier Keller, François Conne

▶ **To cite this version:**

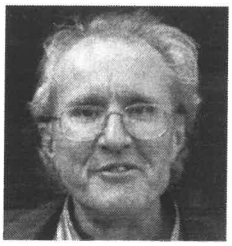
Olivier Keller, François Conne. Que sait-on de la géométrie à ses origines ? Comment y donner des interprétations didactiques ?. Colloque national de la COPIRELEM " Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? ", Jun 2008, Bombannes, France. halshs-01950218

HAL Id: halshs-01950218
https://shs.hal.science/halshs-01950218

Submitted on 19 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

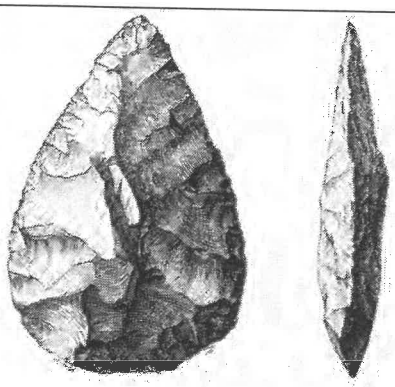
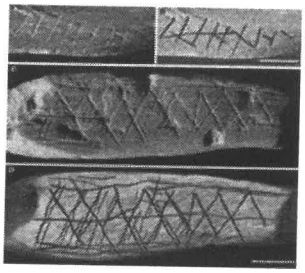
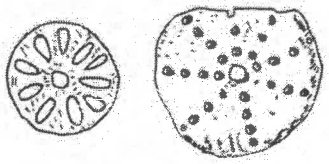


CONFERENCE D'OUVERTURE (PREMIERE PARTIE) « QUE SAIT-ON DE LA GEOMETRIE A SES ORIGINES ? »

O.KELLER
Professeur
IREM de Lyon
Université Lyon 1

« Un point est ce dont il n'y a aucune partie »
« Une ligne est une longueur sans largeur »
« Les limites d'une ligne sont des points »
« Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle »
« Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur »
« Les limites d'une surface sont des lignes »
« Est solide ce qui a longueur, largeur et profondeur »,
« La limite d'un solide est une surface »
« Une frontière est ce qui est limite de quelque chose »
« Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s) »
telles sont quelques définitions données dans les *Eléments* d'Euclide (vers 300 avant J.-C.), le premier traité de mathématiques au sens actuel du terme. Prises à la lettre, elles ne signifient pas grand-chose, et d'ailleurs elles n'ont aucune utilité dans le développement des *Eléments* ; elles ne sont là que pour signaler de quoi il va être question, elles *désignent* des objets considérés comme évidents (point, ligne, surface, solide, figure) et plus loin des 'demandes' (postulats) *imposeront* des relations entre ces objets évidents (par exemple, « mener une ligne droite de tout point à tout point »).

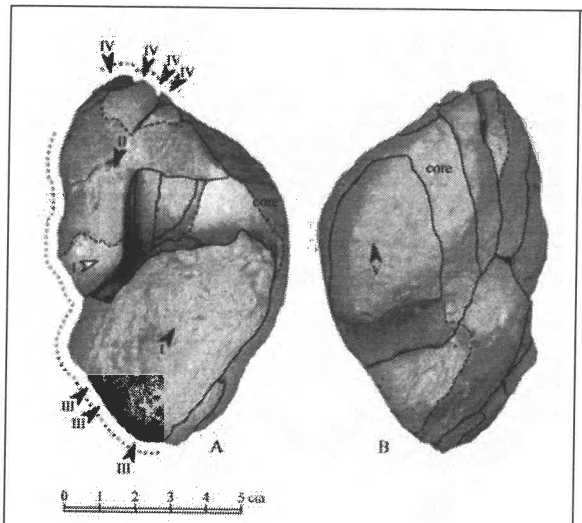
Mais d'où viennent ces évidences ? En tous cas, c'est la première fois qu'elles sont énoncées et mises en tête d'un traité. Un millénaire et demi avant cela, en Egypte et en Mésopotamie, d'autres écrits, les plus anciens que nous connaissions, traitent savamment de longueurs, de largeurs, de surfaces, mais sans la moindre définition, sans axiome, sans postulat. On observe le même phénomène dans les textes de l'Inde védique (vers -500 au plus tard) et de la Chine des Han (-206 à +220).
Les évidences dont nous parlons existaient donc bien avant que l'on tente de les définir. On pourrait penser qu'elles ont été découvertes par les scribes, au moment où l'administration des grands empires primitifs provoqua l'essor de la comptabilité et de l'arpentage. L'apparition de la mesure systématique est certainement un moment capital, un bond en avant dans l'histoire de la géométrie ; mais si l'on réduit la géométrie à son sens étymologique de mesure des terrains, alors il faudrait dire que les quatre premiers livres des *Eléments* d'Euclide (presque le tiers du total) ne sont pas de la géométrie. Et surtout, des milliers d'années avant l'apparition d'une quelconque mesure, les humains ont produit des choses telles que celles-ci :

		
Biface, outil typique du **Paléolithique inférieur**, à partir de -1,5 millions d'années en Afrique. Trouvé près d'Aurillac. Datation incertaine.	Plus ancien graphisme actuellement connu. Ocre rouge, Blombos (Afrique du Sud), -77000.	Rondelles d'ivoire. Sungir (Russie), vers -23000.

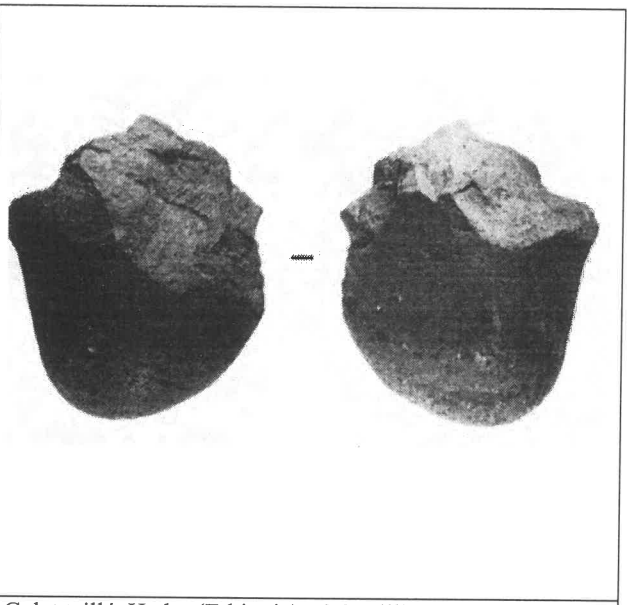
Ces créations méritent notre attention. Il n'y a rien de comparable dans le monde animal, en dépit des apparences ; ce sont des créations spécifiquement humaines. Je vais essayer de montrer qu'elles témoignent d'une longue *gestation* de la géométrie au sein des sociétés humaines, préalable à sa *naissance* comme science en Grèce antique ; les évidences qui trônent en tête des *Eléments* d'Euclide sont des *acquisitions* du travail réfléchi et de la pensée schématisante propres à notre espèce. Voici donc, en se limitant au Paléolithique et au monde des chasseurs-cueilleurs, quelques réflexions sur une embryologie de la géométrie, qui, je l'espère, donneront au lecteur l'envie d'approfondir la question.

-I-
Sculpture lithique : débitages et façonnages

Le propre de l'homme, dès qu'il apparaît il y a quelque 2,5 millions d'années, est d'imposer un ordre, une régularité dans une nature en désordre apparent et dotée d'une diversité qualitative infinie. On le voit dès les premiers débitages pour créer des tranchants, où à défaut de régularité notable dans le produit fini, la frappe est régulière. Ces tout débuts sont peut-être communs à l'homme et à certains australopithèques, mais il est certain que nos cousins bonobos sont incapables de cette régularité élémentaire.
Plus tard, on façonne des galets, d'un seul côté ou des deux, pour obtenir un tranchant à l'intersection de la surface travaillée et du cortex ou à l'intersection des deux surfaces travaillées.

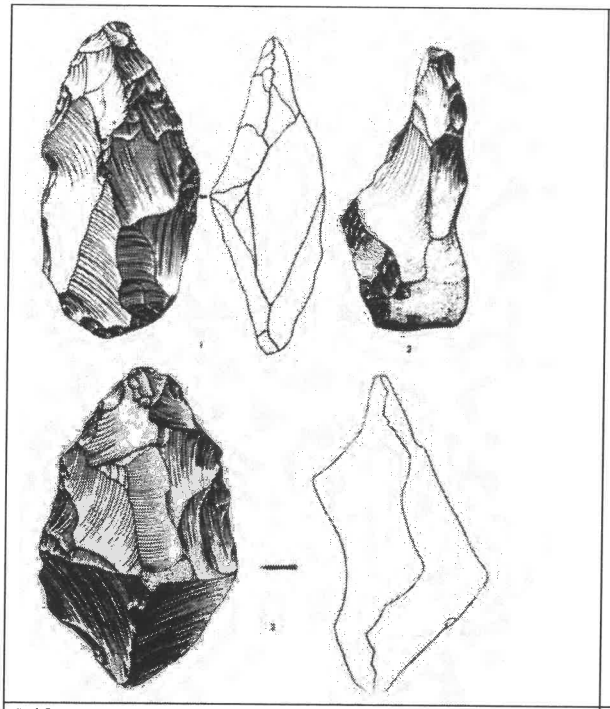


Remontage d'éclats prouvant une frappe régulière. Lokalelei (Kenya), -2,3 millions d'années.

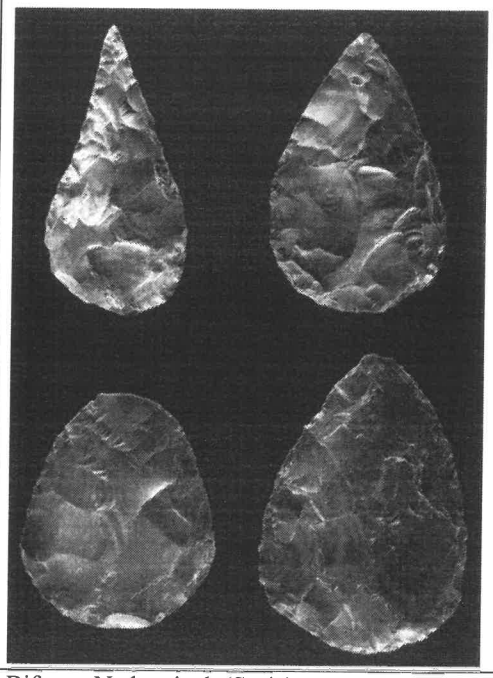


Galet taillé. Hadar (Ethiopie), -2,3 millions d'années.

Viennent ensuite les bifaces, où le geste symétrique crée un pourtour plan, ou plutôt un pourtour qui tend à devenir plan, et deux symétries, l'une en vue de face, l'autre en vue de profil. Les produits finis les plus aboutis, qui méritent le nom d'œuvres d'art, sont complètement préconçus dans une matière première complètement domestiquée quant à la forme ; on y a introduit des grandeurs égales puisqu'il y a une recherche de symétrie, une ligne plane (le pourtour), et peut-être aussi des grandeurs proportionnelles puisqu'il semble y avoir des formes standards.

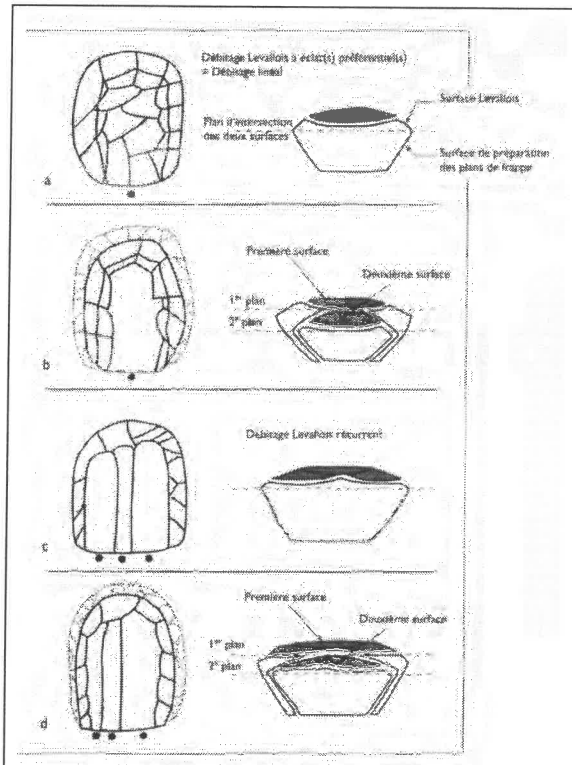


Bifaces grossiers, dits abbevilliens.

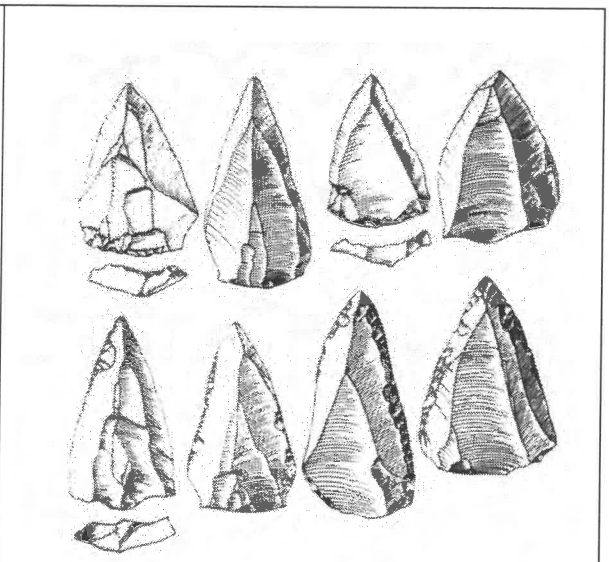


Bifaces. Nadaouiyeh (Syrie), vers -500.000.

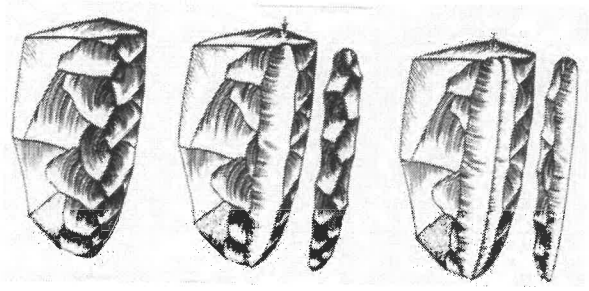
On revient ensuite au débitage, mais à un débitage savant, systématique. C'est bien d'un système qu'il s'agit, fondé en effet sur un travail structuré en fonction des trois dimensions de l'espace-matière première : préparation du volume d'abord, détachement d'un éclat mince ensuite, retouche éventuelle des bords enfin. Volume, puis surface, puis ligne, travaillés à la suite l'un de l'autre, alors qu'ils l'étaient en même temps au cours du façonnage des bifaces.



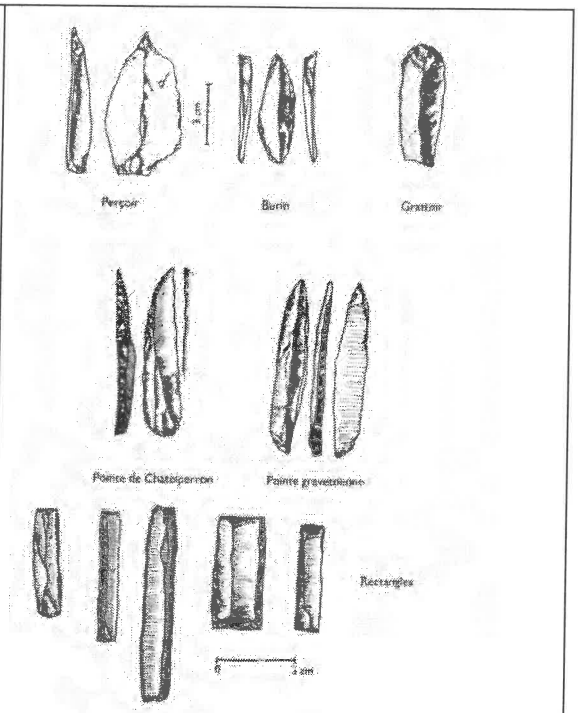
Principe du **débitage Levallois** : débitage tranche par tranche d'un (deux premières lignes) ou de plusieurs (deux dernières lignes) éclats de forme (en principe) prédéterminée.
Paléolithique moyen, de -200.000 à -40.000 environ.



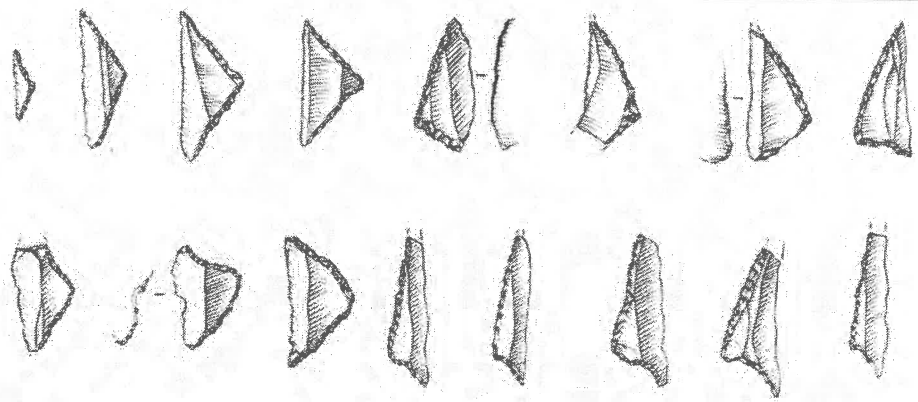
Exemples d'éclats Levallois : pointes, retouchées ou non.



Principe du **débitage laminaire**. De gauche à droite : préparation, détachement de la lame de crête, détachement de la première lame.
Paléolithique supérieur, à partir de -40.000.



Exemples de lames retouchées.

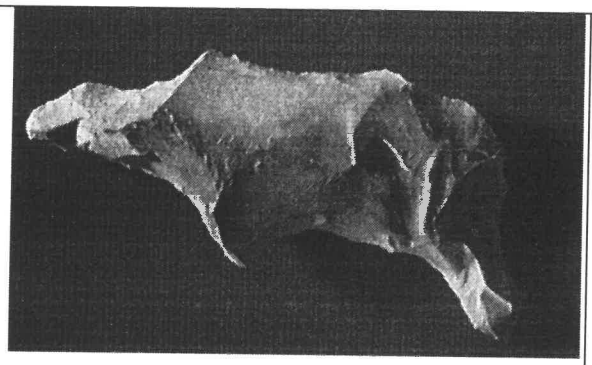


Exemples de **microlithes géométriques**, issus d'un débitage laminaire. Ce sont des « triangles ». il existe aussi des « segments » (de cercle) et des « trapèzes ».
Fin du Paléolithique supérieur et Mésolithique, de -9000 à -5000 en Europe.

Tout cela s'étend sur plus de deux millions d'années ; on voit clairement un progrès qui allie habileté (manuelle) croissante et prédétermination (intellectuelle) savante, une prédétermination de plus en plus en avance sur le geste immédiat et déconnectée de lui. Avec nos yeux d'aujourd'hui, nous voyons des symétries, des plans, des lignes, des figures. Est-ce bien raisonnable ? Non si l'on entend par là que les concepts de la géométrie euclidienne étaient déjà acquis par nos ancêtres *erectus* et *ergaster* fabricants de bifaces il y a plus d'un million d'années. Oui si l'on voit dans cette sculpture réfléchie de la pierre la création de substrats cérébraux, d'images, de modèles qui se *transformeront* plus tard en concepts.

La ligne, par exemple, n'est d'abord que le tranchant de l'éclat ou du galet taillé, puis le pourtour du biface ; mais déjà, avec le débitage systématique, elle provient de la retouche,

c'est-à-dire d'un travail sur une surface *toute prête*, un quasi-*dessin* final, alors que la création du pourtour du biface se fait par la création, *en même temps*, des deux surfaces qui le définissent. On peut dire que le pourtour du biface est *sculpté*, tandis que le front du grattoir, par exemple, est comme *dessiné*. Et il se trouve que l'apparition du graphisme pariétal et mobilier est contemporaine d'une forme déjà très avancée du débitage systématique ; y avait-il donc un lien, dans l'esprit de nos ancêtres, entre la retouche d'un bord de lame et le dessin gravé ou peint sur une paroi ? Cela peut paraître tiré par les cheveux, mais je crois que oui. Car nous avons quelques exemples, peu nombreux il est vrai, d'animaux et de silhouettes féminines taillées dans des plaquettes de silex avec la même technique que pour une retouche laminaire.



Animal sculpté dans une lame. Abri du Cap Blanc (Dordogne), vers -15000.



Silhouettes féminines sur plaquettes de silex. Wilczyze (Pologne), vers -13000.

Nous avons là une preuve qu'au moins dans certains cas, une même idée préside au dessin sur la paroi et à la retouche d'une lame : celle d'un quelque chose qui limite un objet en dimension deux, ou en termes actuels : ligne et figure en dimension deux.

-II-
Surface de représentation

Le passage au graphisme symbolique est un bond en avant considérable ; si notre espèce *sapiens* existe depuis 200.000 ans en Afrique, si elle est signalée vers -100.000 ans au Moyen-Orient et vers -40.000 en Europe, il faut attendre -77000 ans pour voir les premières formes de graphisme en Afrique et -30.000 pour une véritable éclosion, en Europe de l'Ouest, de ce qu'il est convenu d'appeler l'art préhistorique. Le signe graphique ne fut donc pas produit spontanément dés que l'homme est devenu *sapiens*, il fut sans doute au contraire le produit d'une longue maturation intellectuelle, et pour cause : l'ordre imposé dont je parlais plus haut ne se limite plus à la pierre ou à tel ou tel matériau brut, mais elle concerne désormais le monde entier. Le graphisme est le fruit et l'instrument d'une conception globale dont nous pouvons avoir une idée si nous acceptons de rapprocher les sources archéologiques et les sources ethnographiques, c'est-à-dire les chasseurs-cueilleurs de la préhistoire et les chasseurs-cueilleurs récents :

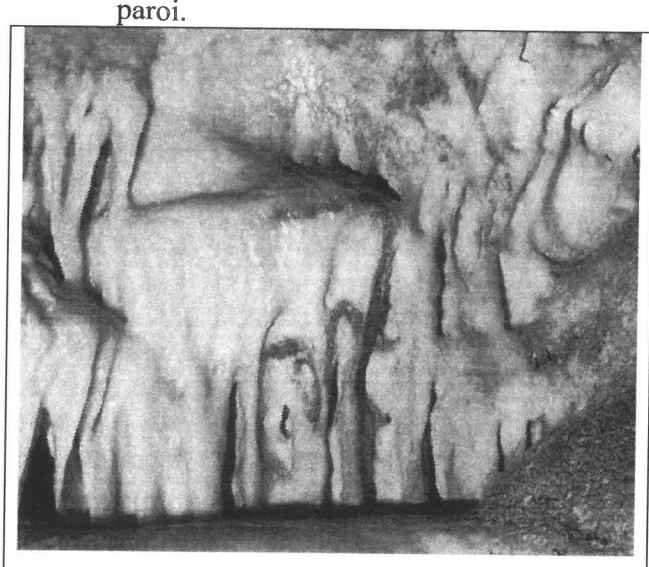
> « D'après les anciens, le paysage fut formé par les actions des Êtres Ancestraux [...] A plusieurs endroits les Êtres Ancestraux pénétrèrent directement le paysage après leurs pérégrinations et leurs activités créatrices en laissant derrière eux leur image sur la

> surface rocheuse [...] En terre d'Arnhem de l'Ouest, les aborigènes établissaient des campements saisonniers dans des abris situés au bas d'escarpements rocheux et ornaient les murs et les plafonds de milliers de mains négatives, ou d'avant-bras et de mains négatifs, ainsi que de peintures monochromes et polychromes. Au moyen de ces marques et de ces peintures ils se liaient étroitement à des sites spécifiques et accédaient directement au pouvoir des êtres ancestraux représentés sous forme animale, humaine ou mythique. »[1]

Tout est dit dans ce texte : à côté du monde réel et à portée de main d'homme, il y a le monde surnaturel qui est le monde des pouvoirs sur le monde naturel. De l'un à l'autre, l'accès est immédiat et direct, il n'y a pas de « sas » entre les deux (pas de *no man's land*), pas de temps d'attente (pas de purgatoire). Et pourtant il doit y avoir quelque chose entre ces deux mondes qualitativement différents, quelque chose qui permette le contact et le passage : c'est la paroi de la grotte ou de l'abri. La paroi fonctionne donc comme une surface, même si elle n'est pas conceptualisée comme telle ; de fait, elle ne doit pas avoir d'épaisseur pour qu'il puisse y avoir contact direct. De fait encore, elle doit être un objet étendu pour que la main humaine puisse agir sur elle afin d'actualiser le contact ou le passage. Pensée comme objet sans épaisseur mais avec étendue, elle est un modèle, un objet de référence pour ce qui sera plus tard pensé comme « surface ». Telle est à mon sens la grande création que nous devons à nos ancêtres et qui découle de la première pensée globale du monde, plus exactement de la théorie des deux mondes ; tel est le lointain point de départ de l'art, de l'écriture et de la géométrie en dimension deux.

En entrant un peu plus dans le détail, nous pourrons voir comment ce nouvel objet implicite, la surface de représentation, devient explicite, s'autonomise et finit par changer de caractère en reniant partiellement ses origines.

- L'important est le passage d'un monde dans l'autre, et il peut être figuré sans se placer réellement en dimension deux. C'est le cas bien connu des reliefs naturels peints ou seulement soulignés à la peinture, ainsi sans doute que des bas-reliefs sculptés sur la paroi.



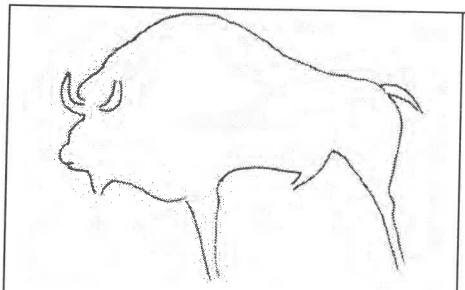
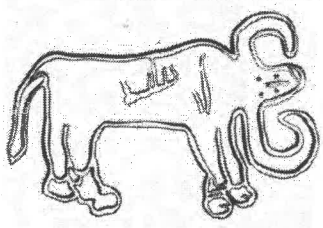
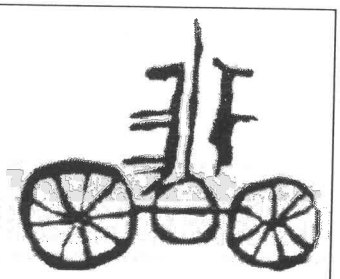
Utilisation du relief naturel pour suggérer un mammouth. Grotte Chauvet (Ardèche), -24500 au plus tard.



Bas relief. Grotte de Saint-Font, Domme, Dordogne, fin du Paléolithique supérieur.

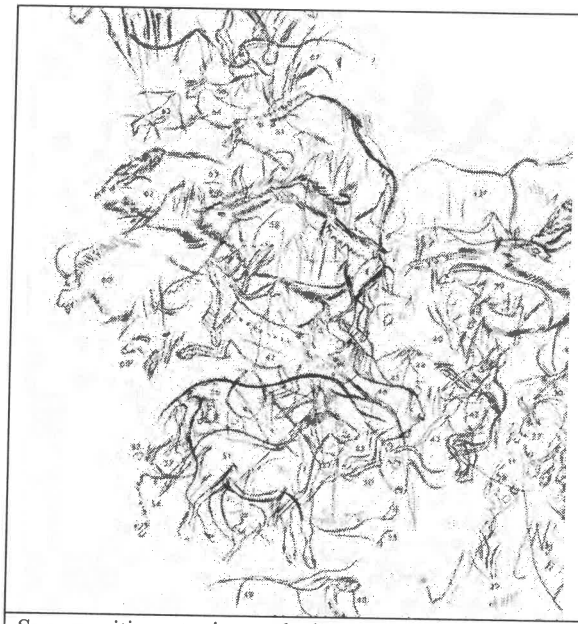
[1] Paul S.C. Taçon, "The Power of Stone; Symbolic Aspects of Stone Use and Tool Development in Western Arnhem Land, Australia," *Antiquity* 65 (1991).

- L'utilisation du relief naturel est relativement rare, et le phénomène novateur n'est pas le bas-relief, mais la représentation en dimension deux. Lorsqu'il est dessiné, l'animal fait corps avec la surface ; il est sensé se trouver tout entier dans le passage, alors qu'avec le bas-relief il y a une partie de l'animal qui est déjà passée et une partie qui n'est pas encore passée. C'est donc bien le dessin, et non la sculpture, qui peut exprimer l'immédiateté, l'instantanéité du changement de monde.
- Le dessin lui-même exprime cela plus ou moins bien. Avec le trompe-l'œil par exemple, on a l'illusion du relief, on voit l'animal en vrai, mais pas son passage ; avec le profil absolu, l'animal est en coupe longitudinale, comme s'il ne laissait qu'une trace sans être tout entier sur la surface : on voit le passage, mais pas l'animal en vrai.
- La solution est de faire coexister plusieurs vues pour avoir le plus possible de l'animal d'une part, tout en restant en dimension deux d'autre part ; c'est ce que l'abbé Breuil appelait la 'perspective tordue'. La façon très courante de faire cela au Paléolithique supérieur est de rabattre sur la surface certains éléments jugés importants comme les cornes ou les sabots. Dans les âges post-glaciaires, la technique pourra évoluer jusqu'à des rabattements systématiques, 'perspective étalée' selon certains auteurs.

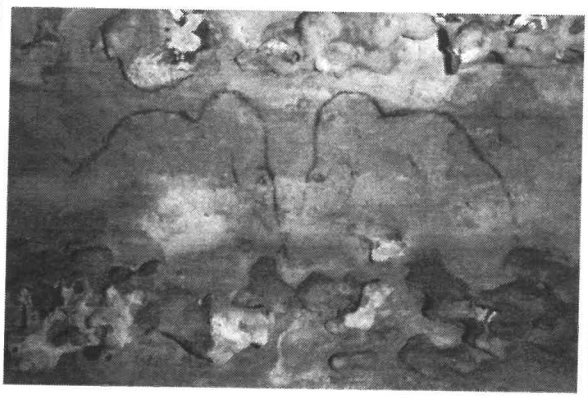
		
Bison gravé. La Grèze (Dordogne), vers -18000. Profil absolu, sauf les cornes représentées en « perspective tordue ».	Buffle gravé, Yémen. Date incertaine. Exemple extrême de « perspective tordue ».	Char gravé, Chine, vers -3000. Ces chars en « perspective étalée » sont très fréquents en Europe et en Afrique également.

- Le rituel de passage d'un monde dans l'autre produit donc une technique graphique, celle du rabattement ; on choisit des vues, parmi une infinité possible, qui devront coexister sur la surface. Du coup, la surface-paroi prend objectivement consistance comme lieu de projections, indépendamment de sa signification mythique-rituelle de lieu de passage ; en tant que lieu de travail réfléchi, la voie est ouverte pour sa cristallisation comme objet autonome dans la pensée.
- A l'origine, selon mon hypothèse, la surface est lieu de passage, sans épaisseur spatiale ou temporelle ; on passe à travers, on n'y reste pas. Une fois réalisé, le graphisme n'existe plus ; seul l'acte compte. C'est ce qui explique la pagaille et les superpositions typiques des grottes ornées du Paléolithique supérieur ; c'est une erreur, à mon avis, de les décrire comme des sanctuaires structurés comme des temples.

  Cependant, cet aspect va lui aussi évoluer et se changer en son contraire. La surface va prendre consistance comme lieu de représentation permanente : lieu de choses qui restent, comme les signes et les décors, et lieu où se déroulent des scènes. Dans les grottes ornées, on a quelques rares cas où les graphismes sont organisés, rompant avec la pagaille qui est de règle et montrant par là que chacun a droit à un minimum de permanence.

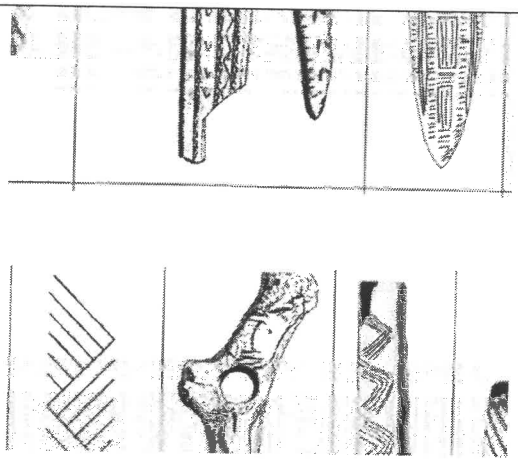


Superpositions typiques de l'art pariétal. Grotte des Trois-Frères, Ariège, vers -11000.



Cas plutôt exceptionnel d'art pariétal organisé. Grotte de Rouffignac, Dordogne, -11000.

Mais c'est surtout avec les signes et les décors mobiliers que le phénomène est frappant : les signes ne se chevauchent pas et les décors mobiliers sont rigoureusement organisés en frises. Les scènes, pour l'essentiel, n'apparaissent que dans l'art post-glaciaire.



Frises sur os ou sur bois animal. France, fin du Paléolithique supérieur. Il existe sept types de frises, toutes découvertes par nos ancêtres de l'âge glaciaire.

D'où provient ce changement ? De façon générale, toute activité humaine engendre des techniques qui s'autonomisent et se développent indépendamment des motivations de départ. Nous l'avons déjà constaté avec le 'rabattement' ; en ce qui concerne la tendance à la permanence de l'objet graphique, permanence qui contredit sa qualité d'expression d'un rite donné à un moment donné, je propose d'y voir une conséquence du geste graphique lui-même. Le dessin est sensé représenter l'instantanéité du passage de l'animal ou de tout autre motif ; mais le geste du dessinateur prend du temps. En théorie, le motif ne fait que passer ; en pratique, il reste sur place le temps de sa confection. Cette contradiction est porteuse d'un changement de sens, puisque la

surface *contient* réellement, au moins pour un temps, ce qui est dessiné, peint ou gravé sur elle.

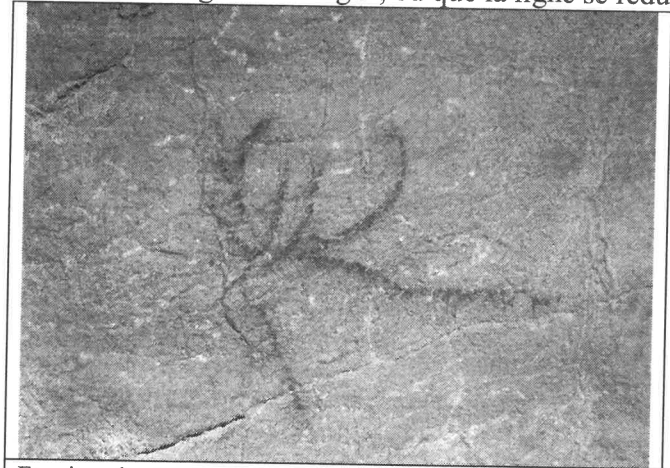
- Avec le décor mobilier en frises, lui aussi dû à un développement formel, indépendant de la signification mythique-rituelle, une nouvelle propriété de la surface apparaît, bien qu'elle ne concerne que les objets et non la paroi : sa structuration suivant deux directions orthogonales.

On voit que ce que nous appelons aujourd'hui surface est *devenu* surface comme conséquence de la pensée et de l'action humaines ; un objet chargé de sens symbolique, sous l'aspect d'une paroi dont on ne s'approche qu'avec une crainte respectueuse, se développe en prenant d'autres sens et en remplissant d'autres fonctions. Un intermédiaire rituel, voile entre les deux mondes, se transforme en objet géométrique, lieu de rabattements et de figures permanentes, et même lieu structuré en 'longueur' et 'largeur' comme on le voit dans le cas de l'art mobilier. Plus tard émergera le concept commun à toutes ces manifestations : ce qui a seulement longueur et largeur.

-III-
Figure en dimension deux

Nous parlerons de la nature et de l'évolution de la figure en dimension deux, avant de dire un mot de son élément essentiel, la ligne.

Il importe de souligner le caractère purement symbolique, conventionnel, de ce qui est créé sur la surface, à savoir la figure. Et ceci doublement. D'un point de vue matériel d'abord, puisque sa réalité de dépôt de charbon de bois, de peinture ou de sillon creusé sur la paroi n'a aucun lien physique avec la chose qu'elle est sensée recréer ; le lien est une convention sociale, quelque chose en quoi il faut croire. Du point de vue de la représentation ensuite, puisque l'évidence visuelle[2] est loin d'être la règle. Nous l'avons vu avec la 'perspective tordue', où plusieurs points de vue sont juxtaposés. On le voit encore lorsque la figure se réduit à un fragment de ligne, ou que la ligne se réduit à un pointillé.



Esquisse de cervidé. Pech-Merle (Lot), vers -16000.

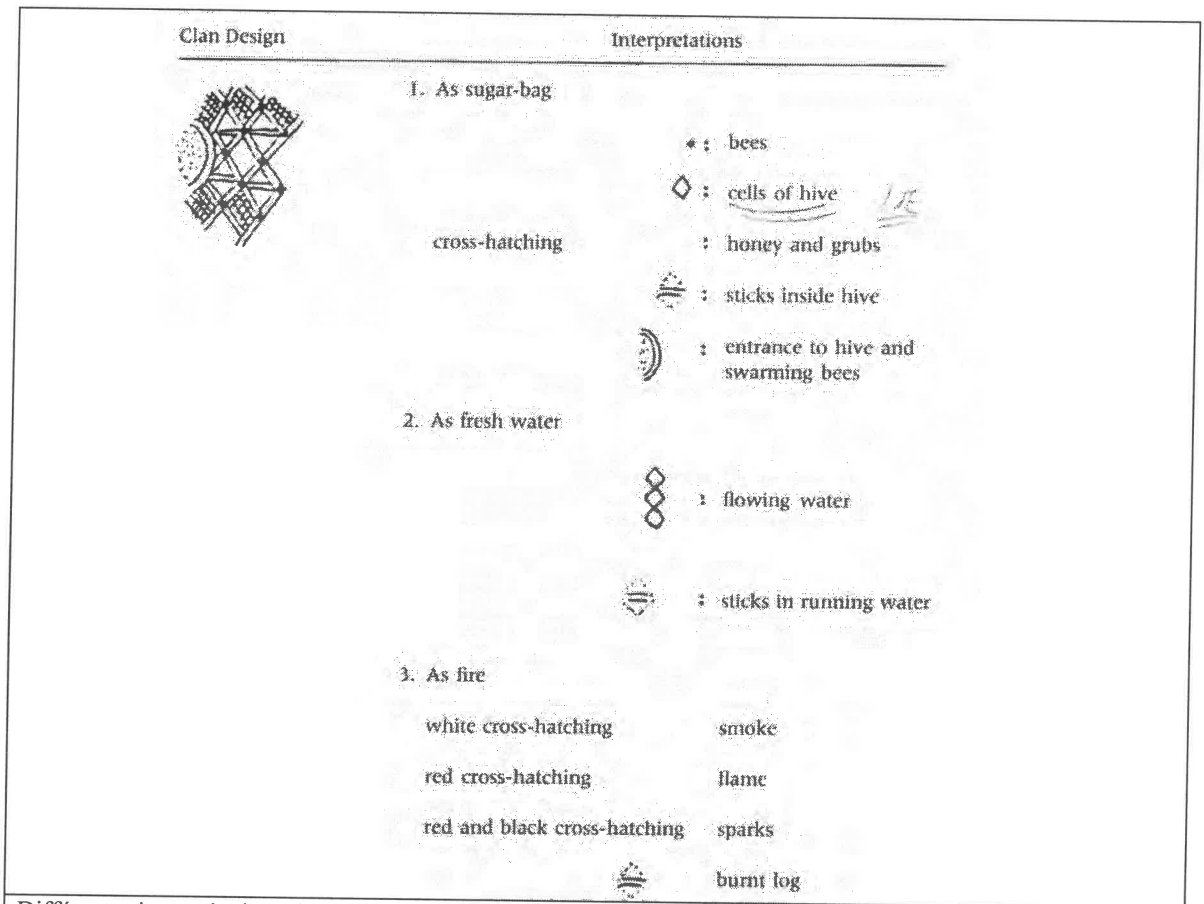


Bouquetins, dont un en pointillés. Lascaux (Dordogne), vers -15000.

En admettant même que la figure puisse être dans certains cas une représentation évidente, dans la mesure où elle serait une copie de l'image des objets sur la rétine, elle est donc plutôt, en règle générale, pur schéma conventionnel. La raison d'être de la figure est de signaliser, de

[2] A supposer que ce soit bien une 'évidence' ; je pense plutôt qu'il s'agit, comme le reste, d'une construction.

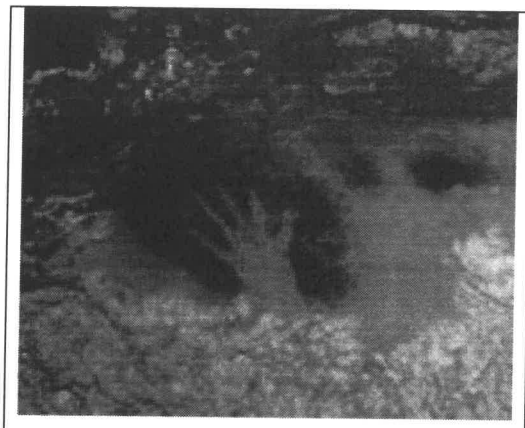
schématiser, et non de photographier ; le fait est particulièrement frappant chez les aborigènes australiens du désert central, pour qui un ensemble de tirets et de cercles peut avoir à peu près toutes les significations figuratives que l'on veut. Cela montre par la même occasion qu'il est vain de chercher à interpréter les signes des grottes ornées préhistoriques, et même de faire une distinction rigide entre signes et figurations reconnaissables.



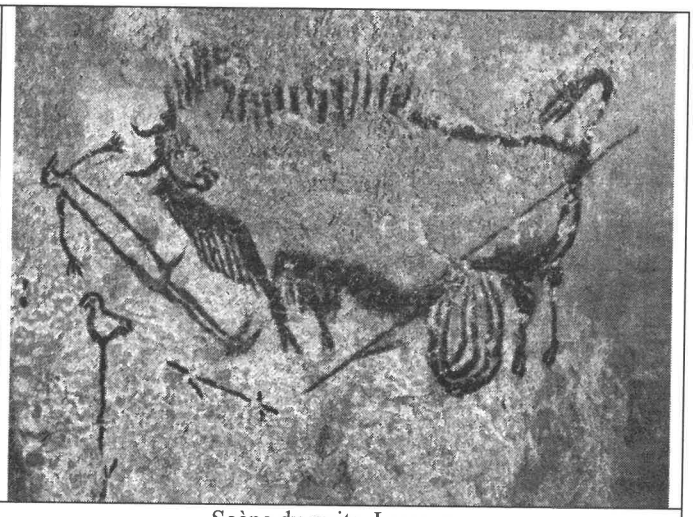
Différentes interprétations d'un même motif de clan dans la " tribu de la Terre d'Arnhem (Australie du Nord)"

En tant que schéma signifiant, la figure peut donc se remplir de n'importe quel sens ; elle est polysémique. A l'inverse, une même chose peut avoir plusieurs schématisations, comme on le voit chez les aborigènes. Il y a donc, objectivement, séparation entre la figure et le sens, séparation extrêmement importante pour la constitution future d'une science autonome de la figure. Mais en attendant, le sens est capital ; le schéma, le signe, est la chair de la chair de ce qu'il symbolise, à tel point que le voler peut être puni de mort. Dans la tribu de la Terre d'Arnhem (Australie du Nord), les motifs les plus secrets sont appelés d'un mot qui signifie *connexion* : nous sommes toujours dans le cadre de la pensée des deux mondes connectés, mis en contact par le graphisme, nous sommes encore très loin d'une science autonome de la figure.

Passons au problème de la ligne. Lorsque le sujet est peint, lorsqu'il apparaît en négatif comme dans les « mains négatives » ou lorsqu'il est sculpté dans une lame, il y a bien une ligne au sens abstrait du terme, à savoir la limite de l'étendue peinte ou le bord de la lame sculptée ; mais comme telle, comme « limite d'une surface » (Euclide), elle est impalpable.



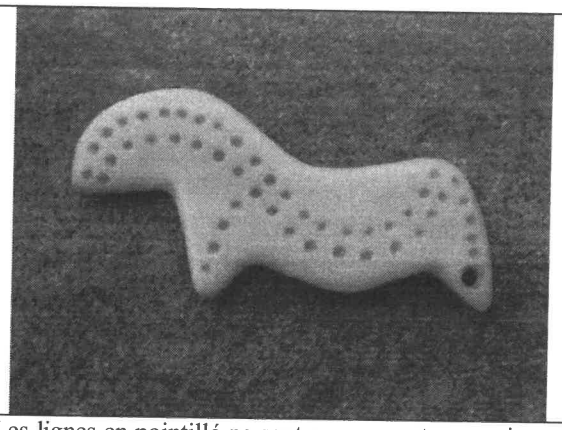
Main négative. Pech-Merle.



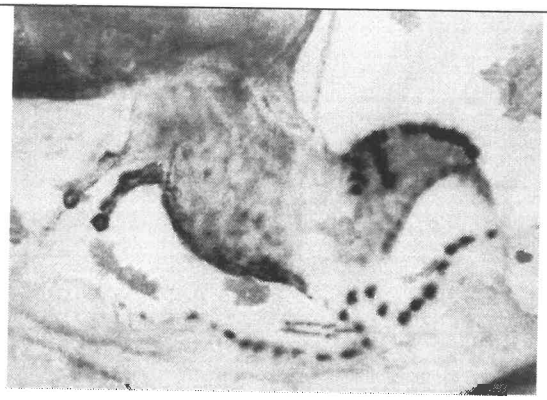
Scène du puits, Lascaux.

Lorsqu'au contraire on « mène une ligne », ainsi qu'Euclide nous y autorise, c'est-à-dire lorsque le sujet est dessiné, la ligne est palpable, mais elle n'est pas une vraie ligne. C'est le tracé linéaire dessiné ou gravé, cette vraie-fausse ligne qui doit retenir maintenant notre attention ; car le tracé linéaire objectivise, rend palpable l'élément essentiel, l'élément créateur de la figure qu'est le contour, la frontière par essence impalpable : « une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontières » et « une frontière est ce qui est limite de quelque chose » (Euclide). Il est vrai qu'il existe des tracés linéaires qui sont des figures et non des limites de figures ; par exemple, la probable lance de la 'scène du puits' de Lascaux, les tirets des aborigènes australiens qui peuvent être aussi des lances, une ligne ondulée qui représente un serpent etc. Mais je m'intéresse ici au tracé linéaire frontière, à la vraie-fausse ligne dont la raison d'être est de renvoyer à autre chose qu'elle-même, à savoir son intérieur. C'est une invention remarquable, d'une souplesse à toute épreuve, capable de *donner forme* un contenu quelconque. Elle est bien une invention, un produit du génie humain de la schématisation ; même si l'on croit que le sujet entièrement peint est la copie de l'impression rétinienne, on ne peut évidemment rien dire de tel du contour, absolument invisible.

Avec le tracé du contour, nous sommes à nouveau dans le monde silencieux de la technique, comme dans le cas de la taille des outils de pierre ; car si la figure, comme nous l'avons vu, a nécessairement un ou plusieurs sens, la ligne qui la crée, par elle-même, indépendamment de l'« intérieur » auquel elle renvoie, n'en a aucun. *Le* trait ne signifie rien ; mais *tel* trait prend un sens parce qu'il désigne *telle* figure qui elle-même désigne *tel* objet en tel lieu et à tel moment. Contrairement à la figure donc, la ligne n'a pas un sens symbolique dont elle doive se débarrasser avant de devenir un objet géométrique autonome ; si elle doit se débarrasser de quelque chose, c'est de sa *fonction* de contour. Elle doit être « décollée » de la figure. Il semble que l'on tende déjà vers ce détachement lorsque des lignes paraissent accompagner des figures, comme pour exprimer leur mouvement et non plus leur contour (figure ci-dessous).



Les lignes en pointillé ne sont pas un contour, mais un schéma de l'animal.
Ivoire de mammouth, Sungir (Russie), vers -23000.



La ligne en pointillé au dessous du cheval est un trait de sa forme générale.
Lascaux.

Je me demande par ailleurs si un élément déterminant pour l'autonomisation de la ligne n'est pas le calcul des mesures dans les empires primitifs, puisqu'une surface ou un volume, s'ils sont calculés, dépendent de mesures linéaires.

Le tracé linéaire, c'est bien connu, n'est pas une vraie ligne. Il existe toutes sortes de tracés, du presqu'invisible au plus épais. Les préhistoriques ont-ils ressenti la contradiction, ont-ils cherché à suggérer une vraie limite ? La question peut se poser, car tout se passe comme si le trait cherchait à se rapprocher de son concept en disparaissant sans faire disparaître la figure, comme s'il s'excusait d'être là. Il le fait en devenant en quelque sorte schéma de schéma. Un premier procédé est de faire un fragment de contour, une esquisse souvent magnifique restreinte à un dos, une tête ou une patte ; un second procédé est de faire un contour pointillé par une série de taches successives. Le tracé linéaire, s'il n'est pas une vraie ligne, *fonctionne* comme une ligne ; peut-on dire la même chose des taches qui, si elles ne sont pas des vrais points, fonctionneraient cependant comme tels ? Je crois que oui, car ils sont là pour que l'œil aille de l'un à l'autre et rétablisse ainsi la ligne ; éléments discrets, leur rôle est de suggérer un mouvement continu dont ils sont les traces fossiles. Alors que dans le cas d'une esquisse, le fragment de contour est mentalement *complété* par le spectateur, le mouvement de l'œil qui rétablit la ligne à partir d'un pointillé *efface* celui-ci du même coup. Les pointillés plus ou moins épais ne sont donc pas des morceaux de la ligne, mais des traces de son élément générateur ; c'est ce qui me fait dire qu'ils fonctionnent comme points.

Au cours de notre promenade aux temps paléolithiques et dans le monde des chasseurs-cueilleurs, nous avons vu l'homme imposant un ordre à la matière brute d'abord, au monde entier ensuite, créant et développant dans ce contexte des germes idéaux de surface, de figures, de lignes, de points, de structures.

Le chemin est encore long pour arriver à Euclide. A partir du Néolithique, on fabriquera un nouvel ordre du monde et on inventera les figures standards en dimension trois. Dans les grands empires primitifs, on inventera le calcul des mesures, puissant moyen d'écarter des objets géométriques un sens symbolique éventuel, et de créer un monde à part, fait d'objets qui s'engendrent les uns les autres au moyen de décompositions et de recompositions. Enfin avec la naissance de la philosophie, pensée de la pensée, un changement radical se fait jour ; Aristote, au début de sa *Physique*, le décrit avec une concision admirable :

"Connaissance et science se produisant, dans tous les ordres de recherches dont il y a principes ou causes ou éléments (en effet nous ne pensons avoir saisi une chose que lorsque nous avons pénétré les causes premières, les principes premiers et jusqu'aux éléments), il est

donc clair que, dans la science de la nature, il faut s'efforcer de définir d'abord ce qui concerne les principes."

Il s'agit à la fois de la rupture entre la pensée et la chose pensée, puisqu'il y a les choses d'un côté et la connaissance qui les "saisit" de l'autre, et d'une division entre différentes branches du savoir ou "ordres de recherches" caractérisées par des principes spécifiques. Chaque branche est donc caractérisée par des principes que l'on doit s'efforcer de *définir*, mais également de faire fonctionner comme *causes premières*, ce qui signifie dans l'esprit d'Aristote que la connaissance, pour mériter ce nom, doit être un *ordre*, un *système déductif* à partir des principes. C'est ainsi qu'est né, en retravaillant tout ce que nous avons décrit, l'« ordre de recherches » appelé mathématiques et partiellement consigné dans les *Eléments* d'Euclide. Nous avons dans ce chef-d'œuvre l'un des plus beaux rejetons de la philosophie grecque, considéré pendant des siècles comme un modèle universel de rigueur, et pour cette raison jalousé, imité parfois, par les autres « ordres de recherches ».

-oOo-

Pour en savoir plus

Les Eléments d'Euclide

Euclide. *Les Eléments. Volume 1. Introduction Générale, Livres I à IV*. Trad. Bernard Vitrac. Paris: PUF, 1990.

Les Eléments. Volume 2. Livres V à IX. Trad. Bernard Vitrac. Paris: PUF, 1994.

Les Eléments. Volume 3. Livre X. Trad. Bernard Vitrac. Paris: PUF, 1998.

Les Eléments. Volume 4. Livres XI-XIII. Trad. Bernard Vitrac. Paris: PUF, 2001.

Préhistoire de la géométrie

Keller, Olivier. 2004. *Aux origines de la géométrie. Le Paléolithique et le monde de chasseurs-cueilleurs*. Paris: Vuibert.

Keller, Olivier. 2006. *La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations*. Paris: Vuibert.

Ouvrages généraux sur la préhistoire

Coppens, Yves, et Pascal Picq, eds. 2001. *Aux origines de l'humanité. De l'apparition de la vie à l'homme moderne*. Paris: Fayard.

Jelinek, Jan. 1978. *Encyclopédie illustrée de l'homme préhistorique*. Trad. Cathaly. 4° ed. Paris: Gründ.

Outils lithiques

Demars, P.Y., et P. Laurent. 1992. *Types d'outils lithiques du paléolithique supérieur européen*. Paris: Presses du CNRS.

Leroi-Gourhan, André. 1964. *Le geste et la parole. Technique et langage*. Paris: Albin Michel.

———. 1965. *Le geste et la parole. La mémoire et les rythmes*. Paris: Albin Michel.

Piel-Desruisseaux, Jean-Luc. 1990. *Outils préhistoriques. Forme, fabrication, utilisation*. Paris: Masson.

Art de la préhistoire et des chasseurs-cueilleurs

Boas, Franz. 2003 (1927). *L'art primitif*. Trad. C. Fraixe, M. Benguigui. Paris: Adam Biro.

Caruana, Wally. 1994. *L'art des aborigènes d'Australie*. Trad. L. Bessière. Paris: Thames & Hudson.
Leroi-Gourhan, André. 1971. *Préhistoire de l'art occidental*. Paris: Mazenod.
Lorblanchet, Michel. 1999. *La naissance de l'art. Genèse de l'art préhistorique dans le monde*. Paris : Errance.
———. 1995. *Les grottes ornées de la préhistoire. Nouveaux regards*. Paris: Errance.
Morphy, Howard. 1991. *Ancestral connexions. Art and an aboriginal system of knowledge*. Chicago et Londres: The University of Chicago Press.
Nougier, Louis-René. 1993. *L'art de la préhistoire*. Paris: Le Livre de Poche.
Roussot, Alain. 1977. *L'art préhistorique*. Bordeaux: Sud Ouest.

-oOo-

CONFERENCE 1 (SECONDE PARTIE) « COMMENT Y DONNER DES INTERPRETATIONS DIDACTIQUES ? »



F.CONNE
Maître d'enseignement et de recherche
Université de Genève

Le compte rendu de ma conférence comporte deux parties. Dans la première partie, ci-dessous, j'expose le cadre général de ma démarche. Cette partie comporte trois sections. Dans la première, j'expose mes préoccupations. Dans la seconde, j'indique mes entrées dans l'étude de O. Keller qui sont au nombre de quatre et que j'ai intitulées : *Autonomie et caractère symbolique* ; *Formes rituelles et mythiques*, *Théorie des deux mondes* ; et *Évidences et expériences*. Je développe particulièrement cette dernière qui servira de fil rouge au développement exposé dans le document annexe. Dans la troisième section, j'expose schématiquement le raisonnement qui dirige mon interprétation de ses travaux.

Dans la seconde partie, enregistrée en annexe sur le Cd-rom associé à ces actes, j'approfondis et je développe mon propos, allant jusqu'à l'évocation de quelques unes de mes propres recherches. Par cette démarche, je tente de mettre en regard mes propres recherches avec ce que je retiens des études d'O. Keller. Je le fais sur trois plans distincts au moins, à savoir : la question de l'évidence, celle de l'autonomie des signes et enfin celle de l'analyse des productions. La première section de cette annexe s'intitule : *Autonomie des signes, théorie des deux mondes, formes rituelles et mythique.* J'y présente quelques citations extraites des livres de O. Keller marquant le cadre des liens que je fais entre son étude et ma problématique de recherche (étude de la didactique des mathématiques sur le terrain de l'enseignement spécialisé). Ces citations sont versées en appoint à la première partie, et tout particulièrement à la question du caractère symbolique des activités scolaires. La seconde section de l'annexe s'intitule *: Évidences et échanges didactiques*. J'y reprends la problématique de l'évidence esquissée dans la première partie en la rapportant à la *dynamique de l'échange didactique* et *l'exploration par expérience*. La troisième partie s'intitule : *Explorations d'un champ d'expériences géométriques dans l'enseignement spécialisé.* J'approfondis la mise en relation des études de O. Keller avec les miennes et à ce propos je donne quelques exemples de recherches effectuées sur le terrain de l'enseignement spécialisé.

Je remercie vivement J. Briand, C. Houdement et P. Masselot qui nous ont invités à faire part de nos études, ainsi qu'à O. Keller pour s'être volontiers prêté à cet exposé à deux. Ma grande reconnaissance à M.-H. Salin pour les critiques et conseils avisés qu'elle m'a fait pour cette rédaction.

I. Ce que je vais chercher et que je trouve dans l'étude de O. Keller

1. Mes préoccupations

Une part de mon travail de recherche en didactique des mathématiques est dévolue au travail théorique. La question de l'interprétation didactique et celle de l'interprétation en didactique

des mathématiques y occupent une place centrale. Ma contribution à cette conférence consiste à ouvrir la 2ème question posée dans le titre et à proposer un cadre pour y répondre (texte imprimé) ainsi qu'en indiquer quelques pistes (Cd-rom).

Il est clair que l'interprétation est une entreprise risquée, risquée pour moi tout d'abord tant le contexte des questions didactiques est éloigné des questions de préhistoire, risquée pour O. Keller ensuite puisque cela met ses résultats à l'épreuve de considérations qu'il avait pu, dans un premier temps, écarter (pp. 28-37 tome 1). Une telle entreprise pourrait aussi être perçue comme agaçante et par les didacticiens, et par les historiens, qui pour une fois se rejoindraient sur l'idée qu'il conviendrait mieux de ne pas se fourvoyer à vouloir rapprocher des domaines si séparés. Ajoutons à cela que, comme je l'ai annoncé, mon interprétation s'oriente sur la question de l'expérience. Certes il faudrait s'entendre sur l'acceptation de ce terme pour le moins polysémique et sujet à bien des confusions, malentendus voire controverses. La thèse que je défends est que pour la didactique, en la matière rien ne va de soi. Voilà qui n'est pas fait pour atténuer les réticences.

Mon intérêt pour la thématique de l'expérience ne date pas d'aujourd'hui. Une formule réunit mes préoccupations : Pour ce qui concerne leur enseignement et leur apprentissage, qu'est-ce que les mathématiques et les expériences du monde peuvent s'apporter mutuellement ? En termes peirciens, ma question est centrée sur le rôle d'interprétant que les mathématiques sont amenées à jouer, tantôt pour mieux nous les faire connaître, tantôt pour nous aider à connaître le monde. Cela dit, si les mathématiques peuvent être utiles à mieux connaître le monde, elles le peuvent de deux manières différentes encore :

> Soit en le mathématisant, en y injectant en quelque sorte les règles qui régissent les systèmes mathématiques, autrement dit en y inscrivant la marque de nos mathématiques. Par exemple lorsque, consulté par C. Lévi Strauss, A. Weil propose de « modéliser » certains systèmes de parentés par des groupes finis simples (cf. Cl. Lévi-Strauss, 1967, p. 127).
>
> Soit en nous permettant d'identifier ce qui dans l'expérience du monde est susceptible de mener à des connaissances mathématiques, autrement dit en trouvant dans le monde des logiques analogues à celles des mathématiques. Par exemple en examinant en quoi la pratique du pliage de papier est susceptible d'introduire à certaines notions géométriques, comme celles de bissectrice, de médiatrice et de symétries axiales, ou encore en étudiant en quoi le jeu de dessiner des étoiles sans lever son crayon renvoie aux relations de primalité et de divisibilité des nombres entiers.

O. Keller vise beaucoup plus, puisqu'il nous invite à une enquête sur la naissance de la géométrie. Cela dépasse mes préoccupations. Néanmoins son travail et ses propositions sont susceptibles de m'apprendre beaucoup de choses. Ainsi, par exemple, dans son analyse de l'art de la pierre taillée et son évolution, il montre comment on y voit s'opérer dans et par le travail, la différenciation des trois dimensions spatiales, et l'émergence de l'importance donnée à la ligne. C'est-à-dire la rencontre dans la logique de cette fabrication d'une part du système d'évidences posé au départ du traité d'Euclide. Notez qu'il s'agit bien de *logique de fabrication* et en aucun cas *de règles de l'art*. Et ce, quand bien même il se trouve actuellement des experts qui savent produire des objets analogues, et que, grâce à de telles simulations, il est possible d'en apprendre plus sur ces logiques elles-mêmes.

La dimension expérimentale en didactique est toute symbolique[3]. Cela ne veut pas dire pour autant qu'elle serait superflue. Toute symbolique qu'elle soit, l'expérience intervient de manière significative dans tout apprentissage. À cela s'ajoute que l'expérience nous semble non reproductible, ou plutôt que son impact et ses répercussions sur les esprits nous semblent hors de portée de la didactique. Cela étant, je me pose la question de savoir comment penser une telle reconduction nécessaire de l'expérience. Sous cette question je me demande d'une part comment on expérimente les mathématiques et de l'autre comment on mathématise ce que l'on connaît par expérience.

Si je pousse un peu plus loin l'analyse, je suis séduit par la reformulation de tout ceci en trois questions conjointes :

a) Quelle sorte d'expérience procure aux élèves et enseignants la pratique des mathématiques scolaires ? Je me demande ainsi quelle expérience c'est donc d'apprendre à calculer, à dessiner et analyser des figues comme on le fait en géométrie, à mener des raisonnements rigoureux.

b) Comment des expériences d'autres sortes que proprement mathématiques, et même peu conformes à ce que l'école préconise, pourraient contribuer à aider des élèves qui, pour une raison ou pour une autre, accusent un gros retard scolaire ? Est-ce que cela pourrait nous aider à rendre leur parcours scolaire moins obligé ?

c) Comment peut-on mathématiser des choses dont on a par ailleurs l'expérience et pourquoi le ferait-on ? Cette question se pose de manière très aigue à chaque fois que l'on demande aux élèves de travailler sur des choses qu'ils connaissent par ailleurs, dont ils sont familiers, et pour lesquelles ils ne voient pas ce que pourraient apporter les rigueurs et contraintes que se donnent les mathématiciens. Le rapport à tout ce qui semble perceptivement évident en géométrie par exemple. Notez que, à contrario, la mathématisation d'un champ d'expérience, par exemple les systèmes de parenté australiens, peut y donner accès aux personnes non introduites, comme c'est le cas pour nous qui sommes d'une toute autre culture. De très nombreux exemples sont donnés par la littérature ethnographique. Mais il en va de même chaque fois que des modèles mathématiques ont pu être développés pour expliquer telle ou telle catégorie de phénomènes. Or souvent, à l'école, ceci ne va pas au-delà d'une simple invocation. Le champ d'expérience invoqué se dissipe très vite au profit des mathématiques, plus abstraites et générales. Les exemples du pliage et des tracées d'étoiles semblent éloquents : d'un côté, la pauvre exploitation des pliages et des figures d'étoiles à l'école primaire, alors qu'on les évoque tellement volontiers dans le commentaire des premières leçons portant sur la symétrie ou les formes polygonales; de l'autre, la pauvreté des activités

[3] Ici une note très importante pour mon propos qui sera répétée dans la suite du texte! Dans cet exposé, j'entends le vocable *symbolique* en m'inspirant de la sémiotique peircienne. Quelque chose peut être signe pour des significations d'autres choses qu'elle-même, et si de telles significations « collatérales » s'imposent à notre esprit, je dirais qu'elles sont symboliques. Quelque chose est symbolique en quoi contrastent des significations obéissant à des nécessités (des logiques) différentes. Dans mes propos, l'adjectif symbolique ne rend pas compte de ce qui fait qu'une chose est un symbole mais il caractérise plutôt ce qui en résulte : ici, le terme « symbolique » caractérisera un ordre de signes, celui des symboles, et les jeux qui s'y développent. Je m'explique. Ce qui pour Peirce fait qu'un signe est symbole tient au fait que ce signe impose à notre esprit quelques interprétants, c'est ce caractère de nécessité qui constitue le critère peircien. Ma définition du terme symbolique comporte explicitement cette clause. Toute fois elle ne définit pas le terme « symbole » lui-même mais bien le sens que j'entends donner au qualificatif « symbolique ». Ici, et dans un esprit tout à fait pragmaticiste, je me situe au-delà de ce qui fait que quelque chose est un symbole pour examiner ce qui en découle.

mathématiques que l'on propose en géométrie au regard de celles que l'on pourrait proposer en leçons de travaux manuels en y enseignant quelques rudiments de l'art de l'origami ou des entrelacs. Mais de ceci même je ne suis pas fermement assuré, il se peut que je sois sujet à une illusion. Comment y voir plus clair ?

Ces questions sont pour moi sensibles et rencontrent la thématique de la transposition didactique et tout particulièrement le caractère symbolique attaché aux phénomènes de transposition didactique.

2. Quelques traits essentiels du travail de O. Keller

Aucune des entrées ci-dessous ne m'intéresse pour elle-même, mais bien le système qu'elles font ensemble. (En référence à cela, des citations des livres de O. Keller sont données au §1 de l'annexe du Cd-rom).

Autonomie et caractère symbolique
Ce que je retiens en premier des livres de O. Keller sont l'autonomie que gagnent progressivement les signes graphiques et, à un tout autre niveau, au bout de l'évolution qu'il examine, l'accès de la géométrie elle-même, en tant que science mathématique, à une d'autonomie. Il n'y a pas de lien de cause à effet entre ces deux moments d'autonomisation, ni d'autre lien direct et simple. Ce qu'il y a de commun entre les deux se réduit essentiellement au fait que leur autonomie est liée au caractère symbolique[4]. Or ce caractère est aussi essentiel pour tout ce qui concerne les réalités didactiques.

Formes rituelles et mythiques
Dans le très long processus que l'auteur cherche à retracer interviennent les dimensions rituelles et mythiques associée à la compréhension et l'explication du monde et en particulier à tout ce qui concerne les pouvoirs de transformation et d'aménagement que l'homme exerce sur le monde, parmi lesquels il faut aussi compter la compréhension et l'explication.

Théorie des deux mondes
Un des points clés de l'exposé de O. Keller dans ses ouvrages a trait à ce qu'il appelle la théorie des deux mondes, c'est-à-dire à la prise en compte par les hommes de relations entre l'environnement dans lequel l'homme se trouve et les milieux qu'il s'y aménage intentionnellement, les relations entre création du monde par les dieux et transformation du monde par l'homme.

Évidences et expériences
O. Keller a centré son exposé sur la question des évidences posées au départ des éléments d'Euclide. Afin de bien articuler mon exposé au sien je me permets ci-dessous un assez long développement. Dans sa contribution O. Keller engage son propos en citant quelques unes des premières définitions que l'on trouve dans les *Éléments* d'Euclide, et qu'il qualifie d'*évidences* :

« "Un point est ce dont il n'y a aucune partie"
"Une ligne est une longueur sans largeur"
"Les limites d'une ligne sont des points"

[4] Cf. note 1 ci-dessus.

"Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle"
"Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur"
"Les limites d'une surface sont des lignes"
"Est solide ce qui a longueur, largeur et profondeur"
"La limite d'un solide est une surface"
"Une frontière est ce qui est limite de quelque chose"
"Une figure est ce qui est contenu par quelque ou quelques frontière(s) "

Telles sont quelques définitions données dans les *Eléments* d'Euclide (vers 300 avant J.-C.), le premier traité de mathématiques au sens actuel du terme. Prises à la lettre, elles ne signifient pas grand chose, et d'ailleurs elles n'ont aucune utilité dans le développement des *Eléments* ; elles ne sont là que pour signaler de quoi il va être question, elles *désignent* des objets évidents (point, ligne, surface, solide, figure) et plus loin des 'demandes' (postulats) énonceront les relations évidentes qui existent entre eux. »

Notons, pour ne pas l'oublier ensuite, que les définitions qu'il cite s'organisent selon une hiérarchie qu'en parler moderne on nomme dimension et que l'on numérote : 0, 1, 2 et 3. Nous avons donc affaire non pas à des évidences isolées mais bien à des *systèmes d'évidences*. Il est aussi reconnu dans notre monde moderne que l'expérience est susceptible d'établir de nouvelles évidences, et même qu'elle peut bousculer ce qui jusqu'alors avait pu passer pour des évidences. Les évidences ne sont donc pas d'immuables absolus. O. Keller avance aussi deux choses. Premièrement que le contenu des définitions présentées ne sera quasiment d'aucune utilité dans le développement des *Éléments*, secondement, que le système porte en lui dès son origine les éléments de sa remise en cause. Je cite (Conclusion générale tome 2, p. 307) en soulignant la manière dont il exprime ces idées :

« Pendant des millénaires, jusqu'aux Grecs inclus, la figure et le nombre s'étaient peu ou prou hissés au sommet, au premier rang des symboles actifs et des entités créatrices; désormais, ils ne sont plus que des anges déchus. L'évolution du sens du mot *mathématique*, en est une illustration : en Grèce, *mathema* est d'abord connaissance en général, puis connaissance particulière et subordonnée.

Le résultat est lisible dans les Éléments d'Euclide, l'être des objets est posé dans les définitions et dans les demandes (postulats), et leur développement est codifié dans les notions communes (axiomes) et (implicitement) par la logique aristotélicienne. Il s'agit donc d'un système, explicite pour la première fois, dans lequel les figures et leurs transformations doivent non seulement être *montrées*, comme à l'étape précédente, *mais également démontrées, c'est-à-dire justifiées de leur cohérence avec l'ensemble du système.*

Passer au crible de la critique les "évidences" des travaux antérieurs et faire l'effort de mettre en lumière des fondements est de nos jours une attitude scientifique normale; c'est un acquis définitif que nous devons aux Grecs. Ce fut, à l'époque, un progrès considérable que cette façon de constituer une science par un système, même si tout système est voué à la destruction, ne serait-ce que par l'explicitation de ses fondements, et par conséquent leur exposition au feu de la critique et la possibilité de leur négation. D'ailleurs, les éléments désagrégateurs du système euclidien étaient déjà à l'oeuvre au moment de leur conception. »

Étant donné que les évidences sont susceptibles d'évoluer au fil de l'histoire des idées et des sciences, il devient tout à fait légitime et naturel de se demander d'où elles viennent. La thèse de O. Keller est qu'elles sont le fruit d'une extrêmement longue élaboration. Et pour le montrer il lui faudra à la fois trouver à les identifier et les repérer sur la base de documents préhistoriques, et chercher à en saisir le lent travail d'élaboration (dont leur reformulation dans les *Éléments* d'Euclide marque un moment privilégié).

Cela dit, O. Keller pose et traite la question de l'évidence à la manière des philosophes, c'est-à-dire comme ressortissant des catégories de la connaissance. Les évidences auxquelles il se réfère dans les *Éléments* d'Euclide sont, selon ses termes, des *schématisations mathématiciennes*[5], et il ne les envisage que dans ce cadre. Je dirais surtout que ces évidences sont symboliques, c'est-à-dire qu'elles jouent leurs significations en contraste avec d'autres. Les évidences euclidiennes représentent une des facettes du contraste, et celles dont O. Keller cherche à déterminer la découverte ou l'émergence sont celles qui constituent l'autre facette. Il s'agit de retracer les secondes en se laissant guider par la première en évitant deux écueils : soit dénier aux hommes préhistoriques de telles évidences, soit, au contraire, leur attribuer la forme de nos propres évidences[6]. Pour évoquer un seul exemple, cela passe par un réexamen de certaines relations, comme celles entre traits, lignes, courbes et formes géométriques, épaisseur des traits et surfaces, etc. Ainsi, il écrit (tome 1, p. 183) :

> « Le trait, lorsqu'il s'agit d'un contour, sépare la surface de représentation en un intérieur et un extérieur, et symbolise son intérieur en créant par là une figure. La ligne est donc là comme limite d'une portion de surface, et la limite n'est pas seulement le bord, elle est l'élément visuellement créateur de cette surface, puisque l'œil qui perçoit le contour du mammouth ne s'arrête pas à la ligne, mais comprend ce à quoi celle-ci renvoie, son intérieur. De même la portion de surface (peinte par exemple) renvoie à autre chose qu'elle-même, le volume qu'elle limite, celui du corps d'un animal par exemple : elle est l'élément visuellement fondateur du volume. Ce sont là des « évidences » géométriques inventées par le graphisme et qui, une fois posées consciemment, deviendront :
>
> "Un point est ce dont il n'y a aucune partie"
>
> (…), etc. (cf. ci-dessus)
>
> La ligne, même si elle a une épaisseur parce qu'elle fut peinte, tracée au charbon de bois ou profondément gravées au burin, n'est effectivement là que comme limite évocatrice ; d'ailleurs cette épaisseur disparaît si l'intérieur est peint ou soufflé directement. »

On voit bien ici comment O. Keller reprend la question des lignes et des limites, qui est tranchée a priori dans les premières définitions des *Éléments*. Car en même temps que les évidences euclidiennes demandent que l'on fasse abstraction de certains aspects propres à leur support graphique, elles versent tout un monde dans l'oubli : ici l'épaisseur, le plein, le vide

---

[5] À l'expression *schématisations mathématiciennes*, je préférerais quant à moi celle d'*abstractions mathématiciennes schématisantes* : des abstractions qui ont pour action de schématiser le monde auquel on les appose. Selon mon point de vue, le système des évidences des *Éléments*, est un système d'abstractions schématisantes. Ainsi apposer à un dessin des points, des lignes, de polygones etc. schématise ce dernier en une figure. C'est par abstraction schématisante qu'opère la généralisation.

[6] La situation de l'enseignant face à un élève, surtout en difficulté, est tout à fait analogue.

l'intérieur etc. Dans sa recherche O. Keller ne retrouve donc pas des *schématisations mathématiciennes* ni abstraites, ni générales, mais des évidences et leurs liens avec certains mondes soit auxquels nous n'avions plus accès et que petit à petit les historiens découvrent, soit que nous ne savons pas considérer autrement que selon nos préjugés actuels, (p. 155 tome 1) :

> « Obnubilés par le problème de la reconnaissance des formes que nous apercevons dans les grottes préhistoriques ou sur les objets, nous avons tendance à oublier le problème de la raison de la création de formes, reconnaissables ou non. Quand nous avons reconnu un bison, nous nous considérons comme satisfaits; mais que fait là ce « bison», grossier *ersatz* de la vraie bête, même pas bon à manger? »

Sur la question des évidences le lien entre mes recherches et celle de O. Keller est donc celui-ci : comme lui je travaille sur des contrastes d'évidences, et je cherche à tirer enseignement de la manière dont il s'y prend pour le faire. Bien sûr il ne s'agit pas des mêmes contrastes de significations. (Ce point est développé au § 2 de l'annexe du Cd-rom).

3. Schéma du raisonnement auquel je vous convie.

1° Nous, nous mêmes tout autant que O. Keller, sommes installés dans un monde où les mathématiques, et la géométrie en particulier, on gagné toute leur autonomie et où on les pratique pour elles-mêmes. L'école y participe pleinement, il ne pourrait pas en être autrement.

2° Comment O. Keller rencontre-t-il la géométrie (où trouve-t-il de la géométrie) dans les documents qu'il étudie?

Je retiens trois endroits où il la trouve et l'en dégage : il la trouve incorporée dans la matière de l'objet manufacturé, il la trouve dans le graphisme et sa prise d'autonomie, liée aux instruments du rite ou aux figures du mythe, il la trouve comme science autonome dès les *Éléments*.

Très schématiquement dit et en forçant le trait :

> Le livre de O. Keller présente la gestation de la géométrie comme deux moments d'autonomisation.
>
> a) Disons, pour faire simple, que la géométrie est d'abord incorporée dans le monde aménagé.
>
> b) Puis à la faveur de la naissance du graphisme et de la pensée des deux mondes, le graphisme gagne son autonomie au point de devenir instruments de rites et figures pour les mythes. L'autonomie des signes graphiques s'accompagne de leur multiplication, de leur polysémie et de leurs polysignifications.
>
> c) De cet éclatement ne résulte pas que du désordre, un désordre d'images, mais au contraire des liens, des correspondances, des possibilités de passages d'un monde à un autre, des possibilités de traductions, des possibilités de mises en ordre, de trocs et de substitutions, … et au final des convergences dans quelque chose qui s'en dégage et qui gagne son autonomie sous la forme de la géométrie euclidienne.

Je ne soutiens pas que la géométrie serait le fruit de l'éclatement des signes utilisés dans les pratiques rituelles et mythiques. Je n'ai même pas la moindre intention de le suggérer. Comme je l'ai mentionné plus haut : il n'y a pas de lien de cause à effet entre ces deux moments d'autonomisation, ni d'autre lien direct et simple. Ce qu'il y a de commun entre les deux et qui m'intéresse ici se tient essentiellement au fait que leur autonomie est liée au caractère symbolique tel que je l'ai défini[7].

3° Les formes symboliquement rituelles et mythiques[8] de l'expérience en didactique.
Ce caractère symbolique est aussi essentiel pour tout ce qui concerne les réalités didactiques, même si il est en quelque sorte de second degré. Si dans certains cas on sait attribuer à certaines expériences quelques-uns des progrès en mathématiques, ce ne sont que des illustrations imaginées après coup et ad-hoc. Prenons pour exemple la célèbre démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale avec le côté d'un carré. On ne fait jamais l'expérience directe de la commensurabilité. Dans la démonstration attribuée à Euclide, qui rappelons-le est une démonstration par l'absurde, elle n'est évoquée qu'en tant que révélateur de la contradiction. Par contre la démonstration en elle-même est une expérience. Elle fait découler de l'hypothèse postulée une suite infinie de réductions de fractions, ce qui la contredit. Ce développement renvoie à l'incommensurabilité si on voit dans cette régression infinie, de nature arithmétique, l'évocation de ce qui nous attendrait si on se mettait à chercher une unité de mesure commune à nos deux segments : une régression géométrique, elle aussi infinie. La démonstration se fait selon un code très strict et une technique éprouvée qui lui confèrent une forme que l'on pourra reproduire à l'envi. Je l'assimile à une forme rituelle. L'exposé de la démonstration ne donne pas pour autant toute sa signification à ce savoir. Il reste encore à dire pourquoi cette question de l'incommensurabilité est une question importante. Cela, on le fait en associant à la démonstration et à son expérience un commentaire pseudo-historique que j'assimile à une forme mythique. On trouve donc ici un schéma en trois composantes : une expérience qui sert de relais et de lien entre d'un côté la forme démonstrative et de l'autre le commentaire pseudo historique. Ce schéma est analogue à celui qui lie rite et mythe dans une pratique religieuse - cette dernière correspondant à l'expérience. Il n'est pertinent que pour autant qu'on garde à l'esprit le caractère symbolique des réalités didactiques qui les rend autonomes des pratiques auxquelles elles empruntent leurs formes. Parler ici de rite et de mythe et de pratiques symboliques n'ôte en rien leur caractère rationnel, ni leur association à des formes scientifiques.

4° Nous vivons dans un monde où les mathématiques ont gagné leur autonomie sur la base du foisonnement de signes graphiques ou autres.

Il en résulte que pour beaucoup de gens l'expérience mathématique se substitue à l'expérience du monde dont cette discipline a tiré ses savoirs (je devrais dire des mondes ou alors reparler du monde comme monde composite). De par sa fonction de transmission des savoirs, la didactique des mathématiques est directement concernée par ce phénomène de substitution de l'expérience mathématique à l'expérience du (ou des) monde(s) qu'elle nous aide à connaître. C'est en cela que consiste son caractère symbolique. Dans la diffusion des connaissances

[7] Voir note 1 supra.
[8] L'usage de ces termes n'appelle pas nécessairement des interprétations théologiques. Le caractère symbolique du didactique dont il est question ici n'est pas une relation au religieux, ni au transcendant, ni au surnaturel, et encore moins aux superstitions. Ici, les termes *rite* et *mythe* sont réduits à des significations profanes. Ils ne connotent aucune valeur mystique, pas plus qu'ils ne voudraient attirer l'attention sur quelque mystification. Par ailleurs dans le schéma que j'indique ci-dessous, la relation que je fais entre rite et mythe n'est pas univoque, sa raison n'est pas de les renvoyer l'un à l'autre, elle est ouverte sur d'autres connaissance, elle est non réservée aux initiés.

mathématiques, scolaires ou pas, la multiplicité sémiotique est mise au service de telles pratiques autonomes.

5° Ce qui pour moi était inédit au moment où j'ai lu les livres de O. Keller est ceci:

Il pouvait retracer la géométrie avant qu'elle ait conquis ce caractère d'autonomie et ce, en axant sa recherche sur le traçage des évidences : comme celle de la ligne, du plan, autant dans les instruments permettant d'agir, de transformer le monde et de l'enrichir d'artefacts, que dans les figures de l'interprétation et de l'explication du monde (et de ses phénomènes).

Pour lui comme pour nous, la géométrie telle que nous la connaissons est instrument que nous mettons au service de la connaissance de nos ancêtres, de ce qui est pour eux évidence, de leurs systèmes d'action et d'explication du monde et de la prégnance (voire de le pouvoir) des hommes sur le monde.

6° Dans ses livres, O. Keller nous dit comment il s'y prend.

En particulier j'ai dégagé ci-dessus comment en se référant aux évidences des *Éléments* il avait pu repérer les évidences géométriques dont témoignent les objets préhistoriques.

7° Je pense pouvoir m'inspirer de ce qu'il nous montre pour mes propres investigations sur la géométrie, pour mieux comprendre ce qui peut se passer dans l'enseignement.

Pour ce faire je considère que les évidences ne sont finalement que ce qu'on décide de retenir d'un système de significations tout aussi directement accessibles (tout aussi évidentes). J'assimile la relation entre les évidences ainsi détachées et leur arrière-fond à une relation symbolique telle que je l'ai définie (à la note n°1) et qui tient essentiellement en deux points :

> *1° Quelque chose peut être signe pour des significations d'autres choses qu'elle-même, et si de telles significations « externes » s'imposent à notre esprit, je dirais qu'elles sont symboliques. Quelque chose est symbolique en quoi contrastent des significations obéissant à des nécessités (des logiques) différentes.*
> *2° Dans mes propos, l'adjectif symbolique ne rend pas compte de ce qui fait qu'une chose est un symbole mais il caractérise un ordre de signes, celui des symboles, et les jeux qui s'y développent.*

Comme je l'ai établi ci-dessus en m'appuyant sur l'argumentation de O. Keller, il en découle que *les évidences des Éléments sont symboliques*. **Or on retrouve la même relation symbolique en didactique lorsqu'on s'attelle à la question des évidences : d'une part, il faudra substituer aux évidences, disons communes et intuitives des élèves, celles qui président à l'organisation du savoir, et d'autre part ce qui est évident pour les élèves ne nous apparaîtra jamais qu'en contraste avec ce que le savoir voudra considérer comme tel.** Les évidences des élèves font partie des arrières plans de connaissances sur lesquels le savoir va prendre ancrage.

Dans son étude O. Keller a su tirer parti de tels contrastes d'évidences, je pense pouvoir tirer quelques précieux enseignements concernant les processus didactiques que pour ma part j'étudie.

Toutefois, ce rapprochement que je fais entre ses travaux et les miens est lui aussi symbolique, car les significations didactiques sont fort éloignées des significations historiques, il y a donc, là aussi, jeu entre deux ordres de significations. Ainsi par exemple en didactique il faut pouvoir prendre en considération ceci qui est essentiel : L'école n'est pas un lieu de fabrication. La finalité des actions de production ne réside pas dans les produits, quels qu'ils soient. Cela ne veut pas dire, tout au contraire, qu'on fasse semblant de les produire. (Conne F., 1992, § intitulé : *L'ambivalence de la transposition didactique*, pp. 263-265). Dès lors que les productions faites en classe répondent à de toutes autres intentions que celles que recueillies par les historiens et anthropologues, leur analyse et leur interprétation seront très différentes.

Je pars du point de vue que lorsque nous tentons d'initier les élèves à la géométrie par sa pratique, nous devons construire des systèmes de significations - souvent ad-hoc - sur lesquelles nous pourrons contrôler les apprentissages. Il faudra pouvoir poser des problèmes et faire chercher des solutions qui fassent sens[9]. Nous sommes donc amenés à réutiliser, mais comme prétextes, la fabrication d'objets porteurs de géométrie, et la maîtrise de signes, graphiques, de pliages, de découpages et autres, de multiplier les expériences de micro-mondes, dont au bout du compte le liant, et l'élément explicatif sera la géométrie. La géométrie est le savoir qui lie toutes ces "expériences" faites dans tous ces "mondes"[10].

Nous sommes amenés à contrôler les significations des savoirs enseignés en ancrant l'enseignement de la géométrie tantôt dans la fabrication d'objets, dans des actions très rigoureusement réglées, aussi rigoureusement réglées que celles qu'exigent les pratiques rituelles, tantôt dans la lecture et l'analyse de figures, celles là même que les actions réglées auront déterminées. Les significations des savoirs enseignées sont prédéterminées et les expériences proposées en classe procèdent de ces explications et non pas l'inverse. Il en résulte que ces analyses de figures prennent la forme d'explications mythiques.

Je considère les médiateurs matériels et/ou graphiques entre de telles actions, codées et systématiques, et de telles explications, prédéterminées, comme des petits systèmes de signes relativement autonomes les uns des autres.

8° Mon idée est que nous avons tout à gagner à chercher à comprendre ces ancrages pour ce qu'ils sont, pour ce qu'ils proposent.

Pour ce faire, nous avons avantage à ne pas nous limiter à comprendre seulement ce qu'ils apportent à l'expérience mathématique et à la compréhension mathématique et il convient de chercher aussi à comprendre ce qu'ils apportent à la connaissance et la compréhension du (des) monde(s). Nous avons à y gagner sur deux plans :

---

[9] Ce sont les conditions de la dévolution. Mais l'institutionnalisation, elle aussi est une interprétation et repose par conséquent sur quelque système de signification.

[10] Ici, je reprends à mon compte une idée classique de la ddm, que en particulier Z. Diénès a mis au coeur de sa théorie, mais qu'il a traité en termes de structures logico-mathématiques et que je traite en termes de milieux sémiotisés. Mais je reprends aussi l'idée de micro-monde, etc.

a) pour rendre nos enseignements plus efficaces en tirant parti des expériences et des connaissances des élèves, mais cela nous oblige alors à prendre en compte des évidences mises entre parenthèses dans les exposés savants des mathématiques ;

b) pour arriver à mieux contrôler l'impact de l'enseignement des mathématiques auprès des élèves dans leur compréhension du monde.

9° Toutefois, il est très difficile d'arriver à le faire, à nous déprendre des intentions qui président aux pratiques scolaires, toutes marquées par l'autonomie des mathématiques.

Il est tout aussi difficile de le faire pour le psychologue, l'ethnologue, l'historien ou le préhistorien, etc. Or, ces derniers, par leur travail, mettent en place des moyens pour y parvenir, et O. Keller montre comment ces moyens peuvent être mis en oeuvre pour tracer la géométrie en gestation.

10° Voyant une analogie entre le problème de O. Keller et celui, didactique, que je viens de dire, constatant une avancée de son côté, je pense pouvoir m'inspirer de ses livres et des méthodes qu'il développe.

Je le fais résolument et en étant pleinement conscient de toute la distance qui sépare nos domaines. Cette distance n'altère en rien la source d'inspiration que de tels travaux représentent. Pour le moment je me contente de tirer des liens, de faire des rapprochements, et je cherche surtout à imaginer comment l'étude des livres de O. Keller pourrait m'aider à me diriger dans mes propres recherches.

Textes cités

François Conne, 1992, Savoir et Connaissance dans la perspective de la transposition didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, n°12 - 2/3, Grenoble, La pensée Sauvage.
Zoltan Diénès, 1965, Comprendre la mathématique; une étude de la transition de la phase constructive à la phase analytique de la pensée mathématique des enfants. Paris : O.C.D.L.
Olivier Keller, 2004, Aux origines de la géométrie. Le paléolithique. Le mode des chasseurs cueilleurs, Vuibert.
Olivier Keller, 2006, La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations, Vuibert.
Olivier Keller, 2008, texte d'annonce de sa conférence & texte de conférence pour ce congrès de la Copirelem.
Claude Lévi-Strauss, 1967, Les structures élémentaires de la parenté, 2ème édition, 1967, Paris, Mouton.

Que sait-on de la géométrie à ses origines ?

Comment y donner des interprétations didactiques ?

ANNEXE (dans cdrom)

Le compte rendu de ma conférence comporte deux parties. Dans la première partie, livre des actes, j'expose le cadre général de ma démarche. Cette partie comporte trois sections. Dans la première, j'expose mes préoccupations. Dans la seconde, j'indique mes entrées dans l'étude de O. Keller qui sont au nombre de quatre et que j'ai intitulées : *Autonomie et caractère symbolique* ; *Formes rituelles et mythiques, Théorie des deux mondes* ; et *Évidences et expériences*. Je développe particulièrement cette dernière qui servira de fil rouge au développement exposé dans le document annexe. Dans la troisième section, j'expose schématiquement le raisonnement qui dirige mon interprétation de ses travaux.

Dans la seconde partie, ci-dessous, j'approfondis et je développe mon propos, allant jusqu'à l'évocation de quelques-unes de mes propres recherches. Par cette démarche, je tente de mettre en regard mes propres recherches avec ce que je retiens des études de O. Keller. Je le fais sur trois plans distincts au moins, à savoir : la question de l'évidence, celle de l'autonomie des signes et enfin celle de l'analyse des productions. La première section de cette annexe s'intitule : *Autonomie des signes, théorie des deux mondes, formes rituelles et mythique.* J'y présente quelques citations extraites des livres de O. Keller marquant le cadre des liens que je fais entre son étude et ma problématique de recherche (étude de la didactique des mathématiques sur le terrain de l'enseignement spécialisé). Ces citations sont versées en appoint à la première partie, et tout particulièrement à la question du caractère symbolique des activités scolaires. La seconde section de l'annexe s'intitule *: Évidences et échanges didactiques.* J'y reprends la problématique de l'évidence esquissée dans la première partie en la rapportant à la *dynamique de l'échange didactique* et *l'exploration par expérience*. La troisième partie s'intitule : *Explorations d'un champ d'expériences géométriques dans l'enseignement spécialisé.* J'approfondis la mise en relation des études de O. Keller avec les miennes et à ce propos je donne quelques exemples de recherches effectuées sur le terrain de l'enseignement spécialisé.

Je remercie vivement J. Briand, C. Houdement et P. Masselot qui nous ont invités à faire part de nos études, ainsi qu'à O. Keller pour s'être volontiers prêté à cet exposé à deux. Merci aussi à A. Rouchier pour ses critiques et les encouragements. Ma grande reconnaissance à M.-H. Salin pour les critiques et conseils avisés qu'elle m'a fait pour cette rédaction.

II. Quelques interprétations didactiques que je fais du travail de O. Keller

Je propose trois parties à la suite de cet exposé. Dans la première partie (§ 1) je vais indiquer par le truchement de citations quelques passages significatifs des ouvrages de O. Keller ayant trait essentiellement à la question de l'autonomie des signes, et la théorie des deux mondes. Dans la seconde partie (§2), je reviendrai sur la question des évidences, déjà présentée dans la première partie de mon exposé (cf. livre), qui, elle a trait à l'autonomie des mathématiques et de leurs pratiques. C'est par ce biais que je ferai le lien avec mes recherches, en aboutissant à la question des évidences dans le partage didactique. Ceci m'amènera à ce que nous appelons dans notre jargon[1] : *l'exploration du milieu* qui elle sera traitée en troisième et dernière partie (§ 3). Pour cela je commencerai par retourner à quelques citations du premier livre de O. Keller concernant la géométrie dans l'industrie de la pierre taillée. Puis je présenterai quelques explorations didactiques auxquelles je consacre mes recherches actuellement.

1. Autonomie des signes, théorie des deux mondes, formes rituelles et mythiques.

Cette partie consiste essentiellement en citations des livres de O. Keller. Le lecteur attentif trouvera quelques passages doublement cités, j'ai maintenu ces répétitions parce que leurs propos sont significatifs au double titre de l'articulation de la pensée et du signe.

Référence n°1.

À la fin de son tome premier où il étudie les répercussions du développement du graphisme, O. Keller insiste à propos des sociétés aborigènes sur ce qu'il appelle *polysémie des signes* et *plurisignalisation des réalités*. Il s'appuie sur cette distinction pour parler de l'autonomisation des signes et de leur progressif détachement des mondes dont ils étaient les traces. Parce que leurs formulations sont très explicites, je citerai ici les titres de deux des ses paragraphes : « *La puissance efficace du graphisme et de la « raison généalogique », obstacle au développement d'une géométrie indépendante. Protection du secret par la « géométrisation » des motifs, polysémie des signes et plurisignalisation des réalités : éléments favorables à une géométrie indépe*ndante. » (O. Keller tome 1, in chapitre 9 : *La logique du graphisme dans le mode de pensée chasseur-cueilleur : l'exemple des aborigènes australiens*. pp. 201-212).

Référence n° 2.

Je trouve aussi dans son ouvrage l'évocation d'une série de mondes comme il l'a fait dans le texte de la présentation de sa conférence lors de l'annonce du colloque de Bombannes.

> « Par le travail et par la pensée, l'homme a imposé à son environnement formes, structures, ordre spatial et temporel, bien avant de créer une science de la géométrie : il a taillé des galets pour en faire des outils, il a dessiné et gravé sur la roche pour communiquer avec l'« autre monde » tapi derrière la paroi, il a décoré ses objets familiers en frises rigoureuses, il a schématisé le monde et ses composants au moyen d'une seule figure totalitaire issue de l'observation des mouvements apparents du soleil, etc.
>
> Quelques exemples issus de la documentation archéologique et ethnographique nous feront voir comment ces pratiques spécifiquement humaines ont donné naissance à un

1 Notre jargon désigne ici celui du groupe Ddmes (didactique des mathématiques de l'enseignement spécialisé) avec lequel je mène mes recherches. Pour de plus amples informations sur ce groupe, toute personne intéressée par les activités de ce groupe peut s'adresser directement à moi.

monde des figures, monde de symboles puissants, intermédiaires obligés du rituel, bien avant de changer de nature pour devenir un monde acceptant la discipline de la mesure, et, plus tard encore, un monde lourdement corseté dans un système hypothético-déductif. »

Référence n° 3.

Voici un paragraphe clé du tome 1 de O. Keller, intitulé : *L'émergence de la pensée primitive : l'invention des deux mondes.* (pp. 155-161 du chap. 8 : *Géométrie du graphisme pariétal et mobilier : pensées sous-jacente, inventions et découvertes*). Les deux mondes dont O. Keller parle sont le monde des humains et le monde des dieux, (tome 1. pp.159-161) :

« (Mais) la pensée fait un pas en avant autrement important que simplement substantifier son pouvoir sur la nature au moyen de la pierre. Prenant pour base le face à face entre nature brute et nature aménagée, ainsi que le passage de l'une dans l'autre, elle leur donne un contenu totalement nouveau, universel, en imaginant cette fois-ci un premier monde, celui de la procréation et de la subsistance (organisation de la parenté, outils, chasse, déplacements), qui peut être rapproché, par analogie, de la nature aménagée, et un second monde, sublimation intellectuelle de la nature brute, promue de ce fait à la dimension de source et de raison d'être du premier monde. Ce qui n'était que *matière première* change de nature, prend ses lettres de noblesse en devenant *raison d'être,* c'est-à-dire monde des pouvoirs, monde de la création en charge de la vie et de son maintien; la roche est sublimée en « mère des haches » et de là en mère tout court. »

(é)

« On voit que par le passage incessant des deux mondes l'un dans l'autre, la pensée primitive s'affirme comme pensée immédiatement incarnée, pensée-action, les deux termes étant de prime abord et pour longtemps inséparables. *Nous l'avons vue à l'oeuvre dans le plan de travail de l'outil, nous la voyons maintenant active dans un plan de recréation permanente et d'organisation globale du monde. Le mythe est le plan de travail, tandis que le rite est son exécution ; la création continue d'outils est muée en création continue du monde.* »

(é)

« Dès le départ, la pensée s'affirme en niant implicitement la réalité immédiate, négation du désordre naturel apparent et affirmation d'un monde voulu et organisé, négation de la faiblesse humaine et affirmation de sa puissance puisqu'au moyen du rite, « la clef de l'univers est entre les mains de l'homme ».

C'est, nous dit-il, une création de la pensée humaine (p. 156-158) :

« Dans l'outillage lithique, les formes restent des formes de pierre, tandis que dans l'univers de l'« art » elles se chargent de sens sans aucun rapport avec leur réalité physique et acquièrent donc une fonction toute théorique. (é) Les formes des outils sont certainement abstraites, (é), leur destin premier n'est qu'une fonction technique. Au contraire, dans la représentation, la forme, en tant que forme symbolique, reste définitivement abstraite, détachée de tout support matériel, pure création de la pensée et n'ayant d'autre objet que de servir cette pensée : le concret qui lui reste encore attaché, sa substance concrète de symbole (peinture, trait gravé mais aussi figurine sculptée) est un concret *par accident*. Il n'y a en effet aucun lien autre qu'imaginaire, arbitrairement décrété par l'intellect, entre un bison d'une part et la couche d'ocre, de charbon de bois ou le sillon gravé qui lui correspondent sur la paroi de la grotte d'autre part. La matérialité du signe est une base d'appui conventionnelle pour la spéculation

intellectuelle, alors que la matérialité du bord de lôoutil est au contraire indispensable à sa fonction. »
(é)
« Ce serait pourtant un sérieux contre-sens que de faire de nos ancêtres des rêveurs et des contemplatifs : car le concret par accident, côest-à-dire lôinsignifiance relative de la matérialité des signes graphiques, nôest pas la négation du concret, son évacuation définitive. Il nôest pas non plus seulement base dôappui pour la spéculation : il est principalement objet à pouvoir, concret sublimé en source de puissance. Car ce qui est créé nôest pas seulement ombre ou double passif, reflet, mais symbole actif, outil dôaction, et ceci immédiatement. »

Ce qui selon lui distingue lôhomme des autres êtres vivants, côest quôil nôy a pas seulement aménagement de lôenvironnement en milieu adaptatif : une part de son environnement est intentionnellement aménagée, et produit un milieu qui se détache lui aussi en partie des nécessités dôadaptation. Et ce nôest pas tout. Non seulement lôhomme est capable dôaménager la nature brute en lui imprimant des formes préméditées, mais encore il en élabore une pensée et en vient à créer des mythes et des rites. Les premiers qui, en rapportant la distinction monde brut/monde aménagé à la création du monde lui-même, rapportent lôorigine de son pouvoir et la réalité de ses idées à une dualité de mondes. Les seconds qui réaffirment activement son emprise sur le monde. Lôaction de lôhomme se fait alors écho de la création des dieux. Les hommes tirent les pouvoirs qui sont les leurs de ceux que les dieux leurs confèrent (voire confient, etc.) lors de contacts entre les deux mondes et même lors de passages de lôun à lôautre. Ceci procède de signalisations de certaines réalités pour dire les lieux et les faces de tels contacts.

La relation entre les deux mondes est pour moi, comme pour lui, ternaire. Son troisième terme est la pensée (p157-158) :

(é)
« En premier lieu, il sôagit bien là dôune pensée; et pas seulement dôune pensée technique incarnée dans un plan de travail, mais dôune vision globale du monde, dont les premières traces incontestables datent de quelques 40·000 ans au moins, et dont nous pouvons restituer lôessence grâce à lôethnographie des chasseurs cueilleurs. (...) la pensée (est) un *travail* collectif dôappropriation et de transformation du monde. »
(...)
« La pensée va faire son travail spécifique de modélisation et de généralisation en sôemparant de cet état de fait, pour faire tout dôabord de propre pouvoir sur la nature incarné dans les outils un pouvoir venu dôailleurs et « chosifié », substantifié dans la pierre é »

Ce qui est pour moi le plus important dans lôaffaire est cette affirmation que la pensée est un travail qui tout en faisant son travail sôélabore elle-même. Côest dôailleurs ce qui va transformer les *évidences en acte* des tailleurs de pierre en *évidences posées consciemment*, en passant par les *évidences inventées par le graphisme*.

Référence n°4. Lôavènement du graphisme et sa prise dôautonomie.

(Tome 1, p. 155 - 156) :

« Côest au début du Paléolithique supérieur quôexplose (é) le phénomène (é) de la représentation *graphique,* entendue au sens large de peinture, gravure, dessin au charbon de bois, tracés digités.

« Que signifie cette nouvelle activité? (é) Obnubilés par le problème de la reconnaissance des formes que nous apercevons dans les grottes préhistoriques ou sur les objets, nous avons tendance à oublier le problème de la raison de la création de formes, reconnaissables ou non. Quand nous avons reconnu un bison, nous nous considérons comme satisfaits; mais que fait là ce « bison », grossier *ersatz* de la vraie bête, même pas bon à manger?

« Les formes des outils sont certainement abstraites, dans la mesure où elles sont préméditées, vues idéalement avant dôêtre produites; mais sauf à admettre une fonction symbolique ou esthétique aux artefacts, hypothèse qui nôest admissible que pour certains dôentre eux, et très tardivement, leur destin premier nôest quôune fonction technique.

« Au contraire, dans la représentation, la forme, en tant que forme symbolique, reste définitivement abstraite, détachée de tout support matériel, pure création de la pensée et nôayant dôautre objet que de servir cette pensée: le concret qui lui reste encore attaché, sa substance concrète de symbole (peinture, trait gravé ... mais aussi figurine sculptée) est un concret *par accident*.

« Il nôy a en effet aucun lien autre quôimaginaire, arbitrairement décrété par lôintellect, entre un bison dôune part et la couche dôocre, de charbon, de bois ou le sillon gravé qui lui correspondent sur la paroi de la grotte dôautre part.

« La matérialité du signe est une base dôappui conventionnelle pour la spéculation intellectuelle, alors que la matérialité du bord de lôoutil est au contraire indispensable à sa fonction. Les peuples ont une expression à eux, très belle et dôautant plus exemplaire quôon la retrouve sur plusieurs continents, pour traduire lôorigine purement intellectuelle du graphisme: les aborigènes indiens et américains, entre autres, disent que leurs motif leur sont venus *en rêve*.

« (é) le concret par accident, côest-à-dire lôinsignifiance relative de la matérialité des signes graphiques, nôest pas la négation du concret, son évacuation définitive. Il nôest pas non plus base dôappui pour la spéculation: il est principalement objet à pouvoir; concret sublimé en source de puissance. Car ce qui est créé nôest pas seulement ombre ou double passif, reflet, mais symbole actif, outil dôaction, et ceci immédiatement. »

Logique graphique du chasseur cueilleur (fin du tome1, chapitre 9, p. 213-214) :

« Ce graphisme é
- forme la plus abstraite et sans doute la plus tardive de lôinteraction entre les deux mondes,
- par la simplicité formelle de sa conception et la facilité de son exécution,

é devient le mode principal du rituel.

Mais son efficacité demande la dissimulation produite explicitement (consciemment) par formalisation et schématisation avec combinaison de figures élémentaires. »

« Le secret produit une géométrie implicite, et même davantage que cela : une hiérarchisation de la production graphique dans laquelle les éléments formels sont les plus ñintérieursò comme le disent les Yolngu de Terre dôArnhem, côest-à-dire lôêtre profond, la source de tout graphisme. Là, la situation tend à se renverser puisque les éléments ñsourcesò sont justement les plus susceptibles de polysémies; porteurs de toute signification possible, ou du moins dôun grand nombre dôentre elles, ils nôen nôont plus aucune pour eux-mêmes. Côest ainsi que la logique de leur statut sacré finit par en faire de simples instruments neutres, bons à tout faire, et par conséquent rend possible leurô utilisation profane.

« En contradiction avec la logique officielle et consciente du sens, de la charge émotionnelle et de lôefficacité spirituelle et matérielle, en opposition au carcan de la ñraison généalogiqueò, nous voyons donc apparaître souterrainement, sans vocabulaire spécifique, sans quôelle affleure à la conscience, une logique formelle de la figure construite dôéléments sans signification. »

Référence n°5 : dimensions rituelle et mythique

(Tome 1, pp.160-161) :

« (é) Dès le départ, la pensée sôaffirme en niant implicitement la réalité immédiate, négation du désordre naturel apparent et affirmation dôun monde voulu et organisé, négation de la faiblesse humaine et affirmation de sa puissance puisquôau moyen du rite, « la clef de lôunivers est entre les mains de lôhomme ».
« Dès sa première enfance nous pouvons conjecturer ceci : les premières «substantifications lithiques» du pouvoir humain ont pu avoir lieu assez tôt, en témoignent les nombreux amas de splendides bifaces sans traces dôusure et dont la beauté aurait été une façon de glorifier la pierre (chapitre 4). Les premiers indices incontestables de lôexistence dôun deuxième monde et du passage du premier au deuxième sont les quelques sépultures néanderthaliennes ; jusque là, le mort ne fut sans doute quôun rebut abandonné à la nature brute tel un outil usé ou un nucléus épuisé. Il a échappé à ce triste destin le jour où la nature brute fut sublimée en second monde : la mort devint de ce fait passage, mutation de lôindividu en être de pouvoir, occasion de rites de la première importance.
« Telle est la pensée première; voyons maintenant le monde «géométrique» quôelle a créé dans le cadre du graphisme rituel.

(...)

« En premier lieu, il sôagit bien là dôune pensée; et pas seulement dôune pensée technique incarnée dans un plan de travail, mais dôune vision globale du monde, dont les premières traces incontestables datent de quelques 40·000 ans au moins, et dont nous pouvons restituer lôessence grâce à lôethnographie des chasseurs cueilleurs. (...) la pensée (est) un *travail* collectif dôappropriation et de transformation du monde.

« (é) La grande conquête des époques inférieure et moyenne du Paléolithique, est (é) un travail de transformation de la nature brute en nature aménagée, humanisée: nature brute du rognon de silex changée en outil, environnement brut changé en habitat et en lieux spécialisés de travail. Inversement, lôoutil usagé et abandonné retourne à la nature sauvage, tout comme le lieu dôhabitation déserté du chasseur-cueilleur nomade.

« La pensée va faire son travail spécifique de modélisation et de généralisation en sôemparant de cet état de fait, pour faire tout dô abord de propre pouvoir sur la nature incarné dans les outils un pouvoir venu dôailleurs et «chosifié », substantifié dans la pierre; (é).
(é)

« Mais la pensée fait un pas en avant autrement important que simplement substantifier son pouvoir sur la nature au moyen de la pierre.

« Prenant pour base le face à face entre nature brute et nature aménagée, ainsi que le passage de lôune dans lôautre, elle leur donne un contenu totalement nouveau, universel, en imaginant cette fois-ci un premier monde, celui de la procréation et de la subsistance (organisation de la parenté, outils, chasse, déplacements), qui peut être rapproché, par analogie, de la nature aménagée, et un second monde, sublimation intellectuelle de la nature brute, promue de ce fait à la dimension de source et de raison dôêtre du premier monde.

« Ce qui nôétait que *matière première* change de nature, prend ses lettres de noblesse en devenant *raison dôêtre*, cêst-à-dire monde des pouvoirs, monde de la création en charge de la vie et de son maintien; la roche est sublimée en « mère des haches » et de là en mère tout court.

« Le mythe raconte la théorie des deux mondes, et la narration elle-même trahit son origine, puisquêelle est toujours *histoire dôune création qui se confond avec un récit généalogique* **;** je veux dire que la pensée qui, à travers le mythe, « fabrique» le monde, sêextériorise tout naturellement en histoire de la création, et fait du même coup implicitement, soit dit en passant, la grande hypothèse dôun monde organisé pensable: selon le mythe celui-ci est en effet *toujours* une décision dêancêtres créateurs.

« Si le mythe raconte la théorie des deux mondes, le rite lêactualise.

« Comme raison dêêtre, source de toute vie, le monde des essences doit passer et passe en effet sans cesse dans le premier monde ; cêest le rôle du rite que de faire passer lêessence, les pouvoirs, du second monde vers le premier, et principalement de réactualiser la création primordiale sous peine de fin du monde, car il sêagit bien de re-création, et non de simple commémoration.

« Le rite assure également le passage inverse du premier monde vers le second en chargeant de pouvoir des objets ou des individus ordinaires, métamorphosés ainsi en émanations du second monde et source de contact avec lui.

« On voit que par le passage incessant des deux mondes lôun dans lêautre, la pensée primitive sêaffirme comme pensée immédiatement incarnée, pensée-action, les deux termes étant de prime abord et pour longtemps inséparables.

« *Nous lêavons vue* à *lêœuvre dans le plan de travail de lêoutil, nous la voyons maintenant active dans un plan de recréation permanente et dêorganisation globale du monde.*

*« Le mythe est le plan de travail, tandis que le rite est son exécution**;** la création continue dêoutils est muée en création continue du monde.*

« Dans lêétat actuel de la connaissance, lêhistoire nous montre la pensée première pleinement constituée, avec toute lêaudace et *lêinconscience* de sa jeunesse. Elle est en effet toute entière dans lêaction organisée par le mythe, dans le concret rituel, sans distance ;

« (é) il lui faudra une nouvelle naissance, avec la philosophie grecque, pour quêelle se dédouble afin de prendre conscience dêelle-même et de sêinterroger sur son originalité par rapport au premier monde et sur la question centrale de ses rapports avec lui. »

2. Évidences et échange didactiques

Cette partie prolonge les propos du paragraphe intitulé : *Évidences et expériences* de la première partie publiée dans le livre des actes.

2.1 Adoption, abandon et affranchissement d'évidences

En didactique il s'agit de reproduire des processus. Ceci confère une teinte phénoménologique aux problématiques didactiques. Toutefois si parler de reproduction suppose un processus en acte, le terme lui-même de reproduction suppose nécessairement la référence à quelque chose de déjà produit par le passé, et relève d'une asymétrie : une personne déjà initiée pour qui la reproduction n'est qu'une reconduction conduit l'initiation d'une autre personne pour qui le processus sera (tenu pour) original. Notez bien les vocables *reconduction* et *original* que j'ai choisis : *original* puisque, pour le second, le processus marquera l'avènement de quelque chose de neuf ; *reconduction* puisque, pour le premier, il s'agira peu ou prou d'un renouveau. Présenté ainsi, la différence porte sur le cours de événements, mais on peut la traduire de manière plus statique en considérant que ce qui distingue le nouveau du renouveau sont les cadres respectifs dans lesquels ils s'inscrivent : le nouveau vient s'ajouter voire se substituer à de l'ancien qu'il rend du même coup passé et caduc, le renouveau ne se démarque plus de l'ancien que comme une réplique actuelle du même (le passé n'y est pas rendu, caduc, bien au contraire). Ces considérations sont utiles pour la question de l'évidence dès le moment où on se demande s'il faut penser que les évidences changent ou qu'elles seraient plutôt troquées pour d'autres. L'image du *troc* est à considérer pour deux connotations : la *substitution* et l'*échange*.

Revenons alors à un traité comme les *Éléments*. Ce qui est demandé au lecteur est d'adopter les évidences qui sont énoncées au départ et de bien vouloir s'en tenir à elles, ou alors seulement à des évidences dont on peut montrer qu'elles en dérivent explicitement. On demande en particulier d'oublier des évidences, pour reprendre l'exemple de tantôt : la dimension des points, l'épaisseur des lignes des tracés, celle des faces, etc. En fait on demande de renoncer à faire état de toutes les évidences qui ne pourraient pas être réduites à celles qui sont posées au départ[2]. Néanmoins, ce qui compte clairement ne sont pas les évidences ainsi énoncées mais le fait même qu'elles portent à conséquence et ce à quoi elles conduisent. À savoir ce que C. S. Peirce appelle leur signification. O. Keller ajoute que ces conséquences iront jusqu'à signifier la désagrégation du traité lui-même. Je rappelle la définition de symbolique :

> *1° Quelque chose peut être signe pour des significations d'autres choses qu'elle-même, et si de telles significations « externes » s'imposent à notre esprit, je dirais qu'elles sont symboliques. Quelque chose est symbolique en quoi contrastent des significations obéissant à des nécessités (des logiques) différentes.*
>
> *2° Dans mes propos, l'adjectif symbolique ne rend pas compte de ce qui fait qu'une chose est un symbole mais il caractérise un ordre de signes, celui des symboles, et les jeux qui s'y développent.*

À ce sens, il y a un jeu symbolique entre des significations.

Tel est en effet le destin que le développement des mathématiques a réservé à la géométrie euclidienne. Ce qui importe donc ce ne sont pas les évidences en elles-mêmes mais bien leurs significations et les jeux dans lesquels elles seront prises. Le troc, l'échange n'est pas l'abandon de quelque chose pour quelque chose d'autre, mais une interversion dans

[2] Il y a là une subtilité qui rend le jeu de l'apprentissage et de l'enseignement ambigu.

lôordonnancement des choses, une réorganisation, qui comme dans lôexemple de lôépaisseur des traits, peut aller jusquôà exclure certaines évidences pour les recaler dans les mondes à interpréter. Lôépaisseur reste un attribut du monde concret dont la géométrie des lignes sans épaisseur pourra plus ou moins parfaitement rendre compte. (Pour une discussion de ce point sur les maquettes de polyèdres, Conne F. 2008.). Ce que nous enseigne lôhistoire des sciences telle que nous pouvons nous la représenter aujourdôhui, dans notre culture, est que de telles réorganisations portent à conséquence. La plus importante de ces conséquences est lôaffranchissement de ces évidences de certaines des relations antérieurement établies avec leurs supports et leurs significations et donc une prise dôautonomie. Cela indique aussi que le mouvement historique nôest pas cumulatif. Au fil des progrès de la connaissance, bien des mondes se perdent, bien des mythes deviennent incompréhensibles et bien des rites inopérants. Ainsi, par exemple, et comme je lôai déjà dit, ce que l'adoption des évidences euclidiennes nous a fait abandonner ne sont pas tant des évidences anciennes devenues caduques, mais ce qui sôest perdu est une forme de liens entre ces évidences et les mondes d'expériences auxquelles elles étaient attachées (O. Keller en parle dô*anges déchus*). Ce qui se perd sont des manières de lier mathématiques et mondes, des logiques sont perdues pour dôautres :

> « Il était une fois une coïncidence qui partit se promener avec un petit accident, et ils rencontrèrent une explication, si vielle quôelle était toute de travers, et quôelle ressemblait plus à une énigmeé » (L. Carroll, 1972, p. 473.)

Côest fort de cette idée que O. Keller peut trouver des indices aux processus quôil étudie en remontant le fil allant des produits aux processus de production, et par là en identifiant à leurs conséquences lôï uvre de certaines évidences. Ou, dôune manière qui me semble mieux dite encore, en montrant sur documents comment ces évidences étaient à lôï uvre. Cela établi, et en suivant la chronologie des techniques utilisées dans lôart de la pierre taillée, il peut montrer comment ces changements sont significatifs de changements dôévidences. Il passe ensuite à un tout nouveau pan de lôhistoire avec lôinvention du graphisme, et analyse le pas entre ce quôil appelle une *évidence inventée par le graphisme* et une *évidence posée consciemment.* À chaque étape, O. Keller sôingénie à montrer en quoi le monde sôen est trouvé enrichi, et ce à quoi de telles significations auront pu ouvrir. Lôétude de O. Keller ne procède pas dôune remise en question de ces évidences, mais bien dôune remise en question de ce quôelles aient été toujours les mêmes évidences, toujours déjà les évidences[3] des mêmes mondes.

Je dirais donc que les évidences sont choses que nous sommes tour à tour appelés à *adopter* ou à *abandonner,* tel est le prix dôune pensée *affranchie et néanmoins efficace.* Et pour bien marquer le trait, permettez une redite : on est invité à s*ôabandonner à de nouvelles évidences.* Côest avec cette polysémie à lôesprit que je vous invite à lire la suite de mon propos. Il y a plusieurs aspects du travail de O. Keller qui me fascinent, lôun dôeux est quôadoption et abandon ne vont pas lôun sans lôautre et que lôaffranchissement de la connaissance est source dôinterversions. De ceci découle trois formes dôoublis : a) la sorte dôoubli comme celui auquel nous invitent les géomètres grecs ; b) lôoubli de la pensée des ancêtres ; c) lôinaccessibilité de certaines relations de significations comme effet de lôautonomisation des signes (et partant, les retournements de perspective que nécessiterait leur restitution). Lôoubli de première sorte, qui est aussi une invite à sôoublier dans une certaine pratique, nous rend visionnaires ï la puissance du caractère général du savoir géométrique ï tout autant quôaveugles ï à ce qui

[3] Et de ce point de vue son étude est un démenti à la thèse défendue par E. Husserl (*Lôorigine de la géométrie*, 1962). À ce propos une remarque. O. Keller insiste beaucoup pour dire que ses analyses résultent du croisement de deux sources scientifiques : les sources archéologiques et ethnographiques. Il omet de citer quôil sôappuie aussi sur ce quôon sait des mathématiques. Car là aussi il nôy a rien dôintangible et là aussi nous sommes amenés à réviser régulièrement nos évidences.

nôentre plus dans ce cadre bien sûr, mais aussi, et cêest tout aussi important, à ce qui serait plus confus et moins cohérent ï et de cet aveuglement découle alors lôoubli de tout ce qui de notre passé est devenu caduc. Quant à lôinaccessibilité de certaines significations, elle est liée à ce que les réponses seront alors rencontrées avant même les problèmes qui sont à leur source, voire que les seconds se seront totalement effacés derrière les premières. Chercher à remonter des réponses aux questions peut occasionner un dur labeur ! Retournez à la citation que jôai faite de O. Keller où il indique les problèmes que pose la claire distinction entre ce qui sera ligne, bord, et limite avec leurs représentations graphiques et dont les définitions euclidiennes sont justement les réponses[4]. Notez alors que ce type de problèmes ï portant sur la consistance du système des définitions premières ï nêest pas aisé à identifier lorsquêils se présentent à nous.

Par exemple cet élève qui, en vue de rendre compte de la possibilité, pour deux droites, de se couper en plus dôun point, lorsque leur angle d'incidence est petit et qui, pour ce faire, se propose de représenter une droite par le dessin dôune bande étroite délimitée par deux traits droits parallèles : deux droites de même direction pour représenter lôépaisseur dôune droite. Le développement de cette idée l'amène à considérer lôintersection de telles bandes, qui, selon lôangle formé prendra la forme allongée dôun losange, suggérant sinon un segment de concours, du moins plus d'un point d'intersection (A. Lerouge 2000 cité par S. Gobert, à paraître). En écho à cela et à force dôy repenser plusieurs questions me sont lentement venues à lêsprit comme : Pourquoi est-il évident que si on devait donner un bord aux droites, cela se représenterait par deux lignes droites de même direction ? Ou encore, lêxpérience du découpage du papier avec une paire de ciseaux nêst-elle pas justement représentable par ce que cet élève imagine ? Le fil des deux ciseaux nêst-il pas assimilable à deux droites qui se coupent, et leurs lames à deux bandes dont ces tranchants sont des bords ? Ne découpe-t-on pas les droites ï et autres lignes ï segment par segment ? Lôintersection des bandes imaginées par cet élève nêst-elle pas ainsi une bonne représentation pour décrire comment on opère une découpe aux ciseaux ? Toutes ces idées vagues et surtout amalgamées, peu différenciées font partie de ce que lô*évidence symbolique*[5] euclidienne rejette comme non pertinent mais qui peut « faire retour » plus ou moins inopinément, à titre dô*évidence intuitive*, lorsquôon enseigne la géométrie et quôon cherche à lôancrer dans lêxpérience que les élèves ont du monde.

Et voilà ! Je nôai pas pu me retenir de faire une analogie entre ces évidences qui laissent tant de choses dans lômbre et deux sortes dôignorances caractéristiques de tout échange didactique dès lors quôon admet que lêlève nêst pas une table rase : le maître est largement ignorant de ce que lêlève connaît, sait ou pense, il a beau être parfaitement conscient que lêlève nêst pas une table rase, il sait aussi quêil lui sera très difficile dêxploiter judicieusement le peu quêil pourrait savoir à son propos ; il est demandé à lêlève sinon dôignorer carrément, du moins de mettre entre parenthèse tout ce quêil connaît, sait ou pense par ailleurs et qui nêntre pas dans le projet quôon a pour lui[6]. Lêlève est ainsi invité à sêaffranchir des pesanteurs et de la complexité de ce quêil connaît par expérience concrète. Et

4 (Tome 1, p. 183) : « Le trait, lorsquêil sêagit dôun contour, sépare la surface de représentation en un intérieur et un extérieur, et symbolise son intérieur en créant par là une figure. La ligne est donc là comme limite dôune portion de surface, et la limite nêst pas seulement le bord, elle est lêlément visuellement créateur de cette surface, puisque lôoeil qui perçoit le contour du mammouth ne sêarrête pas à la ligne, mais comprend ce à quoi celle-ci renvoie, son intérieur. De même la portion de surface (peinte par exemple) renvoie à autre chose quêelle-même, le volume quêelle limite, celui du corps dôun animal par exemple : elle est lêlément visuellement fondateur du volume. Ce sont là des « évidences » géométriques inventées par le graphisme et qui, une fois posées consciemment, deviendront : "Un point est ce dont il nôy a aucune partie" (é), etc.

5 Dans une perspective peircienne, je distingue les *évidences perceptives ou intuitives*, en priméité, des *constats empiriques*, en secondéité qui ne sont pas des évidences, et des *évidences symboliques*, en tiercité. Voir aussi note n°19 infra.

6 Les didacticiens ont depuis longtemps noté le caractère fonctionnel de lôattribution dôignorance à lêlève.

surtout de ne pas se mêler de réintroduire dans le milieu les évidences recalées au rang de propriétés concrètes, mais de bien vouloir les laisser au vestiaire.

Mon analogie n'est pas arbitraire, elle repose sur cette idée pragmatique de considérer les choses à leurs conséquences. Considérons donc certaines questions comme celles-ci. 1er cas de figure : Est-il possible de constater que ce qui est évident pour nous ne l'est pas pour d'autres ? Ce qui est évident pour nous peut-il être masqué à la vue d'autrui par le fait de ses propres évidences ? Second cas de figure : Est-il possible d'identifier ce qui est évident pour un autre sans que cela le devienne aussitôt pour nous ? Les deux cas de figure semblent mettre en lumière la difficulté d'interagir avec la connaissance d'autrui. Et pourtant, je suis persuadé que la réponse est à chaque fois affirmative. Pour moi, ces réponses tiennent à l'examen de ce qui porte à conséquence avec de telles évidence. Et dans les deux cas de figure évoqués c'est bien là qu'on trouvera des différences significatives. Le changement de l'évidence ne devient donc troc (substitution, échange, interversion dans l'ordre des choses, é) qu'à l'aune d'un regard rétrospectif, tout informé de nouvelles connotations. L'évidence y devient signe des conséquences qu'elle aura portées à notre connaissance. Elle devient du même coup signe de discontinuité. C'est ce qui ressort dans la sémiotique peircienne du jeu des interprétants.

O. Keller part de données fragmentaires et relativement éparses. Une des difficultés qu'il rencontre est de faire la part dans ces discontinuités entre celles qui sont contingentes, conséquence du caractère fragmentaires de notre documentation, et celles qu'on pourrait tenir pour significatives de l'histoire de la géométrie. Les didacticiens se posent en plus cette autre question : Est-il possible de provoquer de tels sauts? Aussitôt dite, aussitôt flagrante la naïveté d'une telle formulation ! La réponse passe par l'examen de ce que l'on pourrait qualifier de discontinuités et plus précisément de *sauts* ou de *ruptures*[7].

Pour cela je vais revenir à des termes dont je me suis déjà servi, à savoir les idées de *changement* et de *troc*[8] d'évidences et les reconsidérer dans le cadre de l'échange didactique. Posons alors la distinction suivante. Les évidences s'enrichissent continuellement de toutes leurs répercussions. Selon cet ordre d'idées, un changement d'évidences sera un changement dans ses significations. Un troc d'évidences s'opère à un autre niveau, il faudrait dire un troc de système d'évidences, mais j'y assimilerai aussi des phénomènes d'interversions à l'intérieur d'un système donné, ainsi que ce que j'ai appelé l'exclusion de certaines évidences devenues caduques. Outre l'exemple d'exclusion que j'ai abondamment commenté (note 4 ci-dessus), on peut trouver dans les livres de O. Keller plusieurs exemples que je considère comme de telles interversions. Un premier exemple est le renversement opéré dès le moment où il y a productions graphiques et plus seulement de formes intentionnelles données à des objets manufacturés (pp. 155-156, tome 1). Un second exemple est le renversement opéré dès le moment où la production de figures graphiques se détache des significations qui lui sont attribuées, à fin de garder cette relation secrète et inaccessible aux non initiés (pp. 201-212 tome 1). Un troisième exemple se manifeste, si je puis dire ainsi, par un basculement dans les représentations : du plan vertical interface des deux mondes on est passé au plan horizontal de

[7] Notez que O. Keller parlait plutôt de désagrégation ï et il avait à l'esprit les critères de cohérence d'un système de définitions et d'axiomes à savoir, son caractère non contradictoire, complet et non redondant.

[8] Cette préoccupation de ce que j'appelle ici « troc » (substitution + échange) est une préoccupation classique et constante chez les didacticiens, elle était très présente à l'esprit des artisans de la réforme des mathématiques modernes des années 60 à 80. Et on sait que cela a pu aller jusqu'à prôner l'abandon de l'enseignement de la géométrie euclidienne. Elle l'était aussi pour S. Papert (1981) et ses collaborateurs avec leur logiciel logo fondé sur un autre système d'évidences que celui de la géométrie scolaire euclidienne. Elle est aussi au cî ur de la théorie des situations, par exemple dans les travaux sur les décimaux (G. & N. Brousseau 1987) ou encore sur les méthode de mesure que sont la commensuration ou le fractionnement de l'unité (H. Ratsimba Rajhon 1982), sans oublier les travaux de J. Pérès et ses collaborateurs (1984, et 1985). Je pourrais encore mentionner bien d'autres travaux menés dans des perspectives très différentes, par exemple, les travaux de M. Artigue sur l'enseignement de l'analyse (1997). Etc. Je n'ai fait ici que donner des exemples en vrac.

la trace du mouvement du soleil ce quôillustre un mythe Jicarillas cité par O. Keller (pp. 26-33 tome 2).

2.2 Échange didactique et expérience

Venons-en maintenant à lôéchange didactique, et à une ébauche de correspondance que je vais tirer entre certains phénomènes de cet échange et cette idée de milieu qui est au cî ur de mon approche. Comme tout échange, lui préside une clause de partage dôévidences, ou plutôt de partage des significations fondées sur certaines évidences. Côest un partage dans lôinteraction en ce sens que dans lôéchange chaque interlocuteur bénéficie, parfois à son insu, dôune part des significations que les choses prennent pour les autres. Il y a donc une très grande part dôimplicite là-dedans, pas seulement des évidences non explicitées, mais déjà de certaines de leurs conséquences. Notons donc que cette clause de partage nôest ni une clause empirique, selon laquelle il nôy aurait quôà regarder les choses pour révéler ce qui est partagé, ni une clause formelle, selon laquelle tout aurait été explicité dès le départ (comme il a été dit des *Éléments*). Il ne sôagit que dôune clause pragmatique, qui ne vaut que pour des segments de lôéchange. Le partage des évidences connaît en effet des discontinuités. Il peut sôagir de la *rupture* de ce partage, lorsque lôune des parties ne « suit plus », il peut sôagir dô*arrêt* ou de *stagnation* lorsque le flux du partage tarit. Lôaffranchissement que peuvent occasionner les évidences représente aussi une de ces discontinuités, il sôagit alors dôune *ouverture* du partage sur quelque chose de nouveau et oubli de ce qui précédait. Les discontinuités ne se manifestent donc pas au niveau des évidences elles-mêmes, ni de leurs systèmes, mais au niveau de leurs significations, id-est de leur répercussions, de leurs conséquences. La prise de conscience de tels sauts (discontinuités) ne se situe donc quôen aval des évidences. En cas de rupture, et tout comme il en va du travail de lôhistorien, la restitution de lôéchange passe par une rétrospection. En particulier, si je môaperçois que mon interlocuteur ne suit plus mes développements, ne comprend plus mes actes, ou quôil me déclare ne pas voir où je veux en venir, je me rends compte que je môillusionnais sur le partage de certaine évidences, ce qui équivaut pour moi à changer les évidences que je lui attribuais jusquôici, et, je le rappelle, la plupart du temps de manière totalement implicite. Dans certains cas il est facile de remettre les pendules à lôheure, par exemple par tel ou tel rappel de choses oubliées. Les échanges didactiques sont continuellement soumis à de tels réajustements. Jôai traité de cette question dans trois articles, lôun où je parlais de perte de sens (Conne 1993), le second où je parlais de perte et de prise de contrôle dans lôinteraction de connaissances (Conne 2003), et le troisième où je présentais un protocole de résolution de problème où un sujet se trouvait soudain affranchi par une nouvelle évidence (Conne 1986). Je nôai pas écrit dôarticle concernant le tarissement bien que la question môoccupe depuis de longues années. Ainsi en fais-je mention dans ma thèse (Conne 1981) et dans mes recherches plus récentes puisque je môintéresse à divers « trucs » de dessin, de découpage de bricolages qui impressionnent beaucoup les sujets (élèves ou adultes) mais sans quôon sache les exploiter. Par exemple le dessin dôun cube en perspective cavalière (Conne 2007a), ou celui dôune étoile chérifienne tracée dôun trait, sans lever le crayon.

Une situation de rupture de lôéchange didactique ne signifie nullement un tarissement, bien au contraire. On observe régulièrement de la part des partenaires un regain dôefforts et dôactivités susceptibles de se trouver en accord sur quelque évidence partagée. Lôenseignant en particulier ne se trouve pas à court dôarguments et de propositions à faire à lôélève. Et ce dernier est soudain très attentif et inquiet, il voudrait éviter que quelque chose lui échappe à nouveau. Bien entendu ce travail pour renouer lôéchange peut lui-même sôessouffler, et hélas cela arrive souvent. Pour prendre un exemple assez extrême, de tels rebondissements de ruptures en rétablissements arrivent fréquemment lorsque vous tenter dôéchanger avec un sujet très différent de vous, un bébé, un jeune enfant, une personne handicapée, bref, une

personne dont le champ dœexpériences vous est fort peu accessible. Prenons un échange avec un bébé, vous faites mille choses pour attirer son attention, cela marche un moment et puis hop, il détourne son attention et de vous et de ce que vous faisiez. Par exemple vos vocalises, vos tambourinements, les grimaces que vous vous retrouvez tout seul à faire bêtement etc. Comment relancez-vous alors lœéchange ? Un des moyens de recadrer lœéchange sur des évidences partagées est de lœimiter et de le lui signifier clairement. Vous vous faites écho de son comportement. Il vous faut souvent une telle imitation pour que ses gestes à lui puissent prendre, à vos yeux une signification, vous devez *chercher ce que cela donne* de faire ainsi. Le tarissement de lœéchange est me semble-t-il lœissue la plus banale des échanges didactiques. Avec le groupe Ddmes (didactique des mathématiques de lœenseignement spécialisé, Ddmes 2005), nous avons développé un moyen pour jouer et nous déjouer de ces risques de ruptures que nous avons appelé *Jeu de Tâches*. Je renvoie le lecteur à nos textes (Y. Auckenthaler 2004, J.-M. Favre 2008).

2.3 Évidence immédiate, évidence dynamique (élargissement du milieu, exploration du milieu)

Des trois formes de discontinuités mentionnées ci-dessus, celle à laquelle on a porté le moins dœattention est celle que jœappelle *tarissement de lœéchange*, lorsque ce dernier ne porte plus aucune conséquence, et ne sœenrichit de plus aucune signification. Lœaction didactique engagée se trouve alors sans plus aucune répercussion. Cœest bien de partage quœil sœagit car alors les partenaires se trouvent sans avoir plus rien à se dire à propos de ce qui les occupait. Le tarissement de lœéchange peut prendre des formes très différentes et il nœest pas question ici de les énumérer et encore moins de les examiner. Notez quœun échange didactique qui repose trop exclusivement sur la performance de lœélève est particulièrement exposé à tarir et cœest dans cet ordre dœidées que je prône une didactique de la surprise (Conne F. 2006). Je ne reviens pas là-dessus ici et pour mon propos, je mœarrêterai à deux formes particulières parce que lœune comme lœautre nous renvoient à questionner lœexpérience des élèves, tant celle quœils sont en train de faire dans cet échange que celle dont ils sont porteurs.

La première de ces formes de tarissement, concerne surtout lœenseignant ou le chercheur ï quœil soit didacticien ou psychologue, ici cela revient au même. Nous voudrions engager la discussion avec des élèves pour connaître leurs conceptions sur quelques sujets de mathématiques, et toutes les discussions tournent rapidement court. Il est en effet très difficile de discuter avec eux pour savoir ce quœils savent des triangles, des polygones, des figures géométriques, et bien sûr de sujets aussi délicats que la dimension des points, lœépaisseur des lignes ou le fait quœune droite soit une courbe qui ne dévie ni sur sa droite ni sur sa gauche. En eux-mêmes, de telles abstractions ne sont pas le moins du monde inspirantes et nous ne pouvons obtenir des informations sur ce quœen pensent les élèves quœen examinant les développements auxquels ils se trouveront engagés par quelque activité, exercice ou problème. Cœest là une des leçons majeures des études piagétiennes. Nous les observons à lœï uvre et leur demandons aussi leurs raisons dœagir comme ils le font. Par conséquent, nous nœaccédons jamais quœà des représentations actualisées, telles quœelles se manifestent ou se révèlent dans lœaction, telles quœelles sœy transforment, et non pas dans un état originel. Ainsi tel élève à qui je demande de me dire ce quœest un triangle me dit quœ« un triangle eh bien cœest un triangle », tout en esquissant de sa main le geste dœun dessin de triangle sur la table, ou cet autre qui ne dit rien jusquœà ce quœil pense à dire « que ce nœest pas un carré, que si il était ainsi, dessin dœun quadrilatère, ce ne serait pas un triangle ». Ainsi pour avoir quoi que ce soit à dire sur de telles choses il faut les englober dans un système quœelles font avec dœautres, il faut ce que nous dénommons dans notre jargon à Ddmes (2005), *étirer le milieu*, lœ*élargir*. De ce fait ce quœils disent sont quelques propriétés quœils auront retenues dœexpériences quœils ont pu avoir avec, ou alors quelques commentaires sur lœexpérience hic et nunc quœils sont en

train de faire et de penser. Cêst donc bien quêil nôy a pas grand-chose à dire des évidences mais que tout tient aux relations quêelles entretiennent avec quelque monde.

Ainsi cet élève qui passant du triangle au « carré quêil nêst pas » et invité à parler aussi de rectangle hésite pour finalement brandir joyeusement une feuille de papier en sêexclamant : « eh bien la feuille est un rectangle !», marquant ainsi le monde des feuilles de papiers par la forme quêil y perçoit (cf. la citation ci-dessus de O. Keller à propos du dessin de bison). Je veux souligner ici que tout ce quôn aurait à dire de nos évidences passe par leur engagement dans quelque expérience et que cêst lêxamen de cette dernière qui importe. Nous ne parlons pas tant dêévidences que de certaines de leurs déterminations. Ainsi nous trouvons transparente lêattribution de sa forme à la feuille de papier.

Pourtant, si je me place dans un autre type dêexpérience, je constate par exemple que lors dêactivités de découpage, que jêai beaucoup explorées avec des élèves et des étudiants, maîtriser les relations entre les figures que nous voulons dessiner ou découper sur une feuille de papier et la forme de la feuille représente une difficulté majeure. Il suffit de demander aux élèves de dessiner ou découper le plus grand carré dans une feuille rectangulaire usuelle (par exemple pour nous A4). Pour un certain nombre de sujets, le bord de la feuille ne sera pas considéré, ou ne le sera que comme limite, dêoù il résulte quêils sêingénient à tirer un trait le plus près possible du bord, et quên général ils admettent quôn aurait pu encore mieux sên rapprocher. Mais tant quêils ne se permettent pas de traiter le bord comme une ligne, et encore plus un segment, il nôy a pas de solution au problème.

Notez alors que si vous faisiez faire la même expérience, non plus dans le monde support dêune feuille de papier, mais celui dêun écran dêordinateur et dêun logiciel de géométrie à écran déroulant, lêeffet ne sera plus du tout le même. Ainsi, ayant demandé à des élèves sur Cabri-géomètre de bien vouloir me dessiner le plus grand rectangle possible, quel ne fut pas leur étonnement de voir leur trait se poursuivre rapidement et loin de tout repère dès le moment où leur pointeur venait chatouiller dêun peu trop près les bords de lêécran. Bien entendu, ils ne comprenaient rien à ce qui se passait. Voici donc un bord qui nêst ni une limite, ni une ligne et qui ne détermine pas une forme. Cêst une zone, une plage.

Autre type de difficulté de ce genre lorsque je demande aussi bien à des élèves quà des étudiants de fabriquer un carré par pliage et découpage dans une feuille A4. Jêobserve régulièrement ceci : soit les sujets connaissent la procédure de rabattement du coin de la feuille, soit ils ne la connaissent pas, mais que si, moi ou quelque autre personne la leur montre, ils en reconnaissent la pertinence et lêadoptent aussitôt. Par contre, ils sont généralement incapables de justifier une telle construction. Ils ne voient que confusément la relation entre la forme de la feuille quêils plient et celle de la figure quôn leur demande de construire. La feuille de papier et ses propriétés particulières prennent en charge une part de la construction et cêst cela quêils nêarrivent pas à analyser. De même, ils ne sêétonnent pas quôn puisse, en pliant en deux une feuille A4, obtenir une moitié qui sera du même format alors que cela est impossible si on procède de la même manière avec une feuille carrée. On remarque par là que par la force des choses, le fait de travailler quasi exclusivement avec des feuilles de format A4, leur dispense une expérience particulière pour cette forme, qui nêst pourtant reliée à aucune autre, par exemple le carré. Par contre, ceux qui ont pratiqué un tant soit peu dêorigami développeront une tout autre expérience du carré.

Ces exemples mêintroduisent au second cas de figure de tarissement de lêéchange autour des évidences en parlant de ce que je nommerai les activités « grillées » qui produisent toujours leur effet, hélas dans la grande majorité des cas comme feux de pailles. Quelques exemples : les jeux de découpage de napperons dans des feuilles pliées, les jeux avec des miroirs, le jeu

avec des bulles de savon, lôesquisse du cube en perspective cavalière, le ruban de Moebius, les flexagones, etc. Jôai présenté toutes ces activités comme ludiques, car telle me semble être la place quôelles ont trouvée dans les pratiques enseignantes courantes (du moins pour celles que je connais en Suisse romande). Je sais bien que, par ailleurs, une littérature abonde pour faire de telles activités de véritables situations dôenseignement, mais je crois savoir aussi que ces propositions ne sont durablement adoptées que par un petit nombre dôenseignants particulièrement convaincus et motivés. Cela dit, peu importe. Ce qui môintéresse ici, est ce phénomène que jôai qualifié de « feu de paille » et la situation dans laquelle ces activités peuvent faire tarir lôéchange didactique ï ou le détourner vers dôautres fins que dôapprendre les mathématiques. Notez que lôexemple du pliage et découpage dôune feuille carrée dans une feuille A4 entre parfaitement dans cette catégorie. Côest bien aussi une procédure, un truc que les élèves ou étudiants apprennent très facilement, lorsquôils ne la connaissent pas, mais dont lôexpérience ne semble pas devoir notablement enrichir leur connaissances mathématiques, comme si la procédure était trop facile, trop simple à réussir, comme si les actions quôelle demandait à coordonner nôétaient porteuses que de leur évidence. Ainsi, comme je le fais chaque année depuis bientôt 10 ans, lorsque je demande à mes étudiants de me dire si côest bien un carré que lôon obtient de cette façon et ce qui les rend si sûrs que tel est bien le cas, rares sont ceux qui vont plus loin que de me dire que les côtés sont égaux, et encore, ils proposent de le vérifier sur le résultat (par mesure ou pliage) et ne tentent jamais de me démontrer que la procédure ne pourrait aboutir à rien dôautre. En fait nous avons affaire ici à une trop grande prégnance du résultat et de la perception de sa forme (encore lôexemple du dessin du bison), ce qui fait que cette évidence perceptive ne sôinscrit pas pour eux dans un cadre dôautres possibles. Côest un carré car ils nôont à lôesprit que cette possibilité et ils ne peuvent envisager aucune autre figure liée à ces règles de pliage. Ceci fait de cette petite procédure quelque chose quôon saura faire ou pas, une simple astuce technique, sans plus. Côest une évidence réifiée à (la perception de) son résultat, et je dirais même à sa réussite, et de cette manière isolée, simple et particulière. La procédure sôest donc refermée (grillée) sur la réussite de lôélève à reproduire à lônvi un effet, ce qui aura tôt fait de tourner à vide.

Côest dommage quôun tel nouveau pouvoir sur les choses, aussitôt acquis, devienne si banal et insignifiant. Je me suis alors attelé à observer de plus près ce qui se passait pour de telles activités et me demandant comment faire pour maintenir ouvert le plus longtemps possible ce type de savoir. Jôai tenté par exemple de faire de ce savoir un instrument dôexploration. Ce que dans le jargon de notre groupe Ddmes (2005) nous appelons, *exploration du milieu*. Et jôai été très étonné de constater non seulement que la chose nôallait pas de soi, mais encore et surtout que si parfois jôy réussissais, comme dans lôexploration du monde des polyèdres que jôai pu faire faire à une classe dôenseignement spécialisé à partir de la procédure de dessin du cube en perspective cavalière, (F. Conne 2007a), dans mon séminaire de recherche du cursus formation des maîtres, je rencontre, année après année toutes les peines du monde à obtenir de mes étudiants (adultes, porteurs dôun diplôme de baccalauréat) quôils explorent le monde des feuilles pliées par le truchement de la procédure de pliage-découpage dôun carré dans une feuille A4. Aucun dôeux ne se propose et encore moins ne propose aux autres de se demander ni quelle figure résulterait de lôapplication de cette procédure à des feuilles de formes différentes que rectangulaires, ni encore moins quelles accommodations il faudra faire à la procédure suivant les cas qui se présentent. Il en va exactement de même avec les napperons, ou encore certaines expériences de pliage mettant en évidence certaines propriétés des triangles comme celle de la somme de leurs angles, ou encore celle du calcul de leur surface (F. Conne 2008a), le dessins dôétoiles, le bricolage de polyèdres, soit en papier soit avec du matériel didactique, sans parler bien sûr du monde des bulles de savon. Il apparaît assez clairement quôils nôont pas été habitués à procéder à lôécole à de telles explorations.

Jôattribue ceci à lôinversion que jôévoquais où les mondes du pliage, du découpage, du dessin etc. en étaient réduits à ne jouer quôun rôle momentané de supports aux schématisations mathématiques mais que rien ne permettait un effet en retour pour interpréter et expliquer ces mondes, du moins autrement que par des évocations très superficielles. Dit autrement, jôinterprète ceci comme la propension, au demeurant classique en didactique, à réduire lôexpérience à nôêtre quôun préalable, à la cantonner dans un rôle propédeutique, et que ce qui en résulte nôest pas le moins du monde une mise à lôécart de toute expérience, cela nôest tout bonnement pas possible, mais une substitution dôexpérience et de mondes sur lesquelles elle porte. Côest aussi un effet de lôexclusion de certaines évidences hors du milieu vers le monde des choses concrètes, particulières et isolées. De ce fait il se produit une substitution de lôexpérience du monde des mathématiques scolaires et de celui des supports des schématisations mathématiciennes à celle des mondes que ces mêmes mathématiques nous aident à connaître et comprendre. Jôai développé ce point dans un article en mentionnant des théories sans objets pour des objets sans théories (Conne F. 2007b).

2.4 Conclusion de ce périple : explorer par expérience

Ici mon propos aboutit à un peu plus de détermination du terme expérience, que, au début de cet exposé jôavais explicitement laissé dans le vague. Lôexpérience dont il sera ici question est celle dôune exploration et non pas celle de la recherche de constats, quôils soient de confirmation ou de sanction. La suite de cet exposé sera consacrée à lôexpérience comme étirement et exploration du milieu. Jôy reviendrai sur ma lecture des livres de O. Keller et ce que jôy trouve comme moyens quôil a mis à ses propres explorations. Je ne pourrai pas ici passer tous ceux-ci en revue et me centrerai sur ses analyses de lôart de la pierre taillée.

3. Exploration dôun champ dôexpériences géométriques dans lôenseignement spécialisé

3.1 Lôétude de O. Keller

Dans son étude, O. Keller examine la question suivante : au vu des documents que les historiens ont recueillis de sociétés préhistoriques ou primitives, est-il possible dôen inférer des connaissances mathématiques ? Pour y répondre, il se réfère à un vaste éventail de recherches, lôexplore en procédant à des recoupements et interprétations croisées. Il propose une grille de lecture qui va supporter les mises en relations et correspondances qui soutiennent son argument. Le point qui môa retenu est le suivant : nous ne connaissons rien du monde ou de la réalité dans laquelle vivaient les sociétés dont nous analysons quelques productions ; ces documents ouvrent certes quelques fenêtres sur ces mondes, mais nous ne pouvons en avoir quôune vision très fragmentaire et déformée ; pourtant, les études et recoupements que lôon peut faire nous donnent quelques indications précieuses sur les mathématiques dont elles sont empreintes. Lôélément médiateur entre ce que lôon peut supposer des mathématiques de ces sociétés disparues et nous se trouve dans lôanalyse de leurs productions, dans lôexploration de la réalité matérielle et symbolique que ces productions jalonnent pour nous.

Voilà ce que je trouve de plus inspirant dans le travail de O. Keller pour comprendre mes propres explorations des réalités auxquelles les élèves sont confrontés lorsquôon appuie notre enseignement sur des illustrations concrètes, comme par exemple la référence à des pliages pour les symétries, des jeux avec des miroirs, toujours pour approcher la symétrie, le découpage de pavés en pâte à modeler pour aborder la géométrie du cube, des jeux de dessins afin dôétudier des formes géométriques idéales etc. Je considère donc une analogie : O. Keller dans ses analyses, par exemple de lôindustrie de la pierre taillée, a été amené à résoudre des problèmes analogues à ceux qui se posent à moi, jôai tout à apprendre des solutions quôil nous expose.

La grille que O. Keller propose pour exposer ses thèses sur lôindustrie de la pierre taillée ï *lieu de travail* / *plan de travail* / *produit du travail*, cf. ci-dessous - ne vaut pas que pour cet art mais lôauteur la reprend systématiquement, moyennant quelques accommodations, pour toutes ses analyses. Ce schéma aide à dessiner des évolutions historiques, tant celle de lôart de la pierre taillée elle-même, par exemple, que, à un tout autre niveau, celle de la gestation de la géométrie pré- ou péri- euclidienne. Quatre aspects de son étude môintéressent particulièrement :

> 1° Ses analyses sur lôindustrie de la pierre taillée, et en particulier la manière dont il sôy prend pour faire en quelque sorte une analyse ergonomique des mathématiques (sic) dont elle est porteuse.
>
> 2° En contraste avec le premier point son analyse des changements quôaccompagne lôapparition du graphisme.
>
> 3° Les rapports entre ceci et la pensée non plus pratique, mais « vision globale du monde » et « travail collectif dôappropriation et de transformation du monde », selon un processus dôincorporation/projection couplé à un processus de ressaisie de la transformation des objets dans la représentation du monde.
>
> 4° Le couple mythe/rite :
> « *Nous lôavons vue (la pensée primitive)* à *lôœuvre dans le plan de travail de lôoutil, nous la voyons maintenant active dans un plan de recréation permanente et dôorganisation globale du monde.*

Le mythe est le plan de travail, tandis que le rite est son exécution; la création continue dôoutils est muée en création continue du monde. »

Et « le monde géométrique quôelle (la pensée primitive) a crée dans le cadre du graphisme rituel. »

3.2 Des expériences à lôoccasion dôexplorations didactiques.

Les productions ne sont pas les finalités du travail scolaire, ce dernier ne sôy arrête pas, et en définitive leur valeur est symbolique. Il en va grosso modo de même des outils et instruments nécessaires à ces productions. Dans les recherches classiques sur lôenseignement des mathématiques cela est parfois traité comme contraste entre novices et experts, mais cette manière de poser le problème occulte justement ce caractère symbolique : un élève aussi expert soit-il ne sera jamais un professionnel. Jôai par ailleurs relevé lôaspect multifonctionnel, et parfois même indifférencié des outils et instruments, et ajouté que leur usage pouvait être lui-même soutenu par des éléments graphiques. Je considère tout cela dans une perspective sémiotique, et cette dimension symbolique renvoie à des jeux de signes ou, comme certains de nos collègues les nomment, des jeux de registres (Duval R.1995). En géométrie le graphisme joue un rôle central dans de tels jeux. Ci-dessus, jôai abondamment cité des passages des analyses de O. Keller concernant lôavènement du graphisme parce que jôy trouve des informations et enseignements utiles à mes recherches. Ci-dessous, je compléterai par des citations relatives à la manufacture de pierres taillées.

Les produits des pliages ou des découpes que jôévoquerai dans mes deux premiers exemples sont des choses manufacturées prétextes à lôétude. Comme je lôai déjà rappelé même si à lôécole les actions nôont pas pour finalité les productions pour elles-mêmes, on ne fait néanmoins jamais semblant de les produire. Elles sont par conséquent à prendre comme des productions symboliques[9] ; et, de ce point de vue, elles doivent être mises au même rang que les productions graphiques. Si je les mets en regard des propos de O. Keller sur lôart de la pierre taillée, côest parce que cet auteur y propose une analyse du travail du point de vue de la géométrie qui sôy manifeste. Sur cet aspect de la question son étude rejoint des préoccupations qui sont les miennes. Dans la seconde section, je prendrai appui sur lôétude de lôavènement du graphisme et la description dôune pensée graphique dans laquelle les figures géométriques nôont pas encore gagné une pleine autonomie. Toutefois pour ce qui en est de mes exemples, je ne môarrêterai pas au graphisme en lui-même. Ce thème fait partie de recherches que je mène par ailleurs et un article y a déjà été consacré (Conne F. 2007a). Je reviendrai ici sur le côté symbolique et les jeux de signes de différents registres auxquels nous sommes amenés lorsque nous examinons la question de lôexpérience dans lôenseignement des mathématiques. Par conséquent, je ne reprendrai pas ici les analyses de O. Keller concernant la prééminence du plan et de lôespace bidimensionnel.

3.3 Choses manufacturées : Géométrie de lôindustrie de la pierre taillée dans lôétude de O. Keller

O. Keller examine trois périodes de lôindustrie de la pierre taillée (qui courent sur plus dôun million dôannées), grosso modo: la production de *choppers*, la production de *bifaces* et celle par *débitage Levallois*, et pour les productions typiques de chacune dôentre elles il propose

[9] Il peut être utile de rappeler trois connotations concernant le caractère symbolique des activités scolaires : un caractère métaphorique, un caractère rituel, même si les actions sont des prétextes à lôétude, elles doivent être accomplies selon certaines formes préétablies, et un caractère mythique ï ici on rejoint le symbolique au sens peircien ï ces actes, tout rituels et métaphoriques quôils soient imposent des significations et partant certaines relations.

une analyse selon trois axes quôil intitule : *lieu de travail*, *plan de travail* et *résultat du travail*. Présentées dans cet ordre, ces analyses vont à rebours du travail de lôinférence du chercheur. De telles inférences sont néanmoins nécessaires. En effet, si nous nôavons accès à cette industrie que par les produits quôelle a laissés, donc au vu des seuls résultat du travail de taille, comment apprécier ce résultat pour lui-même et pas en fonction de notre vision déformée, de ce à quoi les formes des ces objets nous font penser etc. ? Comment sôassurer que notre appréciation ne revient pas tout simplement à projeter notre géométrie dans de tels objets ? Voici quelques citations de son analyse (p. 92 - 98 Tome 1, à propos des bifaces) :

« **La géométrie sous-jacente**.

« En analysant les évidences géométriques en formation, nous suivons le plan tracé au chapitre précédent : lieu du travail (espace), plan de travail (structuration de lôespace), et produit du travail (les formes). Sôil est difficile de distinguer une évolution dans lôindustrie oldowayenne, elle existe incontestablement dans lôindustrie acheuléenne, et la description historique et factuelle passablement fastidieuse des paragraphes précédents était indispensable pour établir ceci : les meilleurs produits ne sont pas des exceptions dues à des habiletés particulières, mais lôaboutissement dôefforts manuels et intellectuels de centaines de milliers dôannées, pour une meilleure soumission de la pierre à la volonté humaine (lieu de travail), des meilleures symétries et un caractère bien affirmé du contour (plan de travail), et des formes plus raffinées (produit du travail).

« *Lieu de travail*, tout dôabord : parlant au chapitre précédent du galet que lôouvrier oldowayen va débiter ou transformer en *chopper*, je lôai qualifié de première « page blanche », dôespace local abstrait dans la mesure où la forme naturelle du galet est niée. La négation le transforme en *lieu de création* original, jouet de la volonté humaine ; cette tendance sôapprofondit évidemment avec la taille acheuléenne, puisque lôouvrier détruit totalement ou presque totalement la forme initiale du galet ou du gros éclat, pour lui en imposer une qui figure au préalable, comme idéalité, dans son cerveau. Lôabstraction, qui existe incontestablement, est cependant peu profonde ; car il est vrai que, partant du galet ou du gros éclat initial, on le travaille certes entièrement au percuteur dur avant de lôaffiner au percuteur tendre, mais côest toujours *grosso modo* la même forme que le créateur du biface a sous les yeux ; cette forme est seulement affinée progressivement, un peu comme lôon passe dôune vision floue à une vision nette par manipulation de lôobjectif photographique.

« *Plan de travail*, ensuite : Il est remarquable par deux traits spécifiques : lôindissociabilité des trois dimensions et lôaction symétrique. On trouve en effet dans le produit fini un volume de forme prédéterminée (forme générale de poire ou dôamande, puis lancéolée, cordiforme, ovalaire, triangulaire, etc.), deux surfaces ayant un axe de symétrie (ou tendant à en avoir un), et une ligne (le pourtour) fermée plane, ou tendant à devenir telle. Ce sont trois tâches qui sont menées de concert : lôaction sur le volume crée deux surfaces courbes (les deux faces) qui elles-mêmes, par intersection, créent une ligne fermée (le contour).

« Contrairement dôune part au débitage oldowayen antérieur, on ne se contente plus dôun travail partiel sur la surface du galet, stoppé dès lôapparition dôun tranchant convenable ; il sôagit maintenant dôun objet travaillé dans sa totalité physique (il est complètement décortiqué) et structurelle (volume, surface, ligne) et donc pensé selon ses trois dimensions de lôespace.

« Contrairement dôautre part au débitage systématique ultérieur, on ne travaille pas le volume dôabord, la surface ensuite et la ligne pour terminer. Si la surface et la ligne sont bien des buts explicites, et il serait évidemment absurde de prétendre quôelles sont confondues dans lôesprit du travailleur, le travail lui-même ne les sépare pas en lieux dôactions successifs puisque les retours en arrière (réajustages) peuvent

être nombreux. Lôespace nôest pas séparé en sous-espaces autonomes de dimensions inférieures ; la création du biface se fait solidairement dans les trois dimensions, ce qui signifie en particulier quôil nôy a pas à proprement parler de « dessin » du pourtour du biface.

« Le plus important dans le plan de travail, me semble-t-il, est lôaction symétrique. (é)
(é)

« Les symétries des bifaces, dont personne au fond nôa encore percé le secret (la raison) reflètent en tous cas des « évidences », ou réflexes cérébraux, de grande importance ; car les symétries réussies résultent dôune comparaison de grandeurs. Il faut par exemple, que lôespace situé à droite de lôaxe (imaginaire) de lôobjet vu de face soit égal à lôespace situé à sa gauche ; cette comparaison est purement cérébrale, car il ne peut être question de mesure[10] ni de vérification concrète au moyen dôun pliage par exemple. Il y a incontestablement une jauge intellectuelle des grandeurs ; cela est tout à fait différent du sens spontané, sensible, animal même, qui fait que lôon choisit un galet de la bonne taille, cô est-à-dire qui tient dans la main. Nous assistons à lôémergence dôun des concepts fondateurs de la géométrie, incrusté dans les replis de notre cerveau comme capacité cérébrale depuis un bon million dôannées ; et si on se laisse guider par lôévolution, depuis la vague symétrie grossière des premiers pics et bifaces abbevilliers jusquôau raffinement des superbes « amandes » de la fin du Paléolithique supérieur, on dira que le travail crée cette capacité et que celle-ci à son tour le guide, dans une interaction permanente des deux.

« *Résultat du travail*, les formes obtenues enfin. Lôarête latérale peut dessiner une ligne fermée, qui tend à devenir plane. Lôensemble est assez monotone, avec une forme générale « en amande », mais de nombreux exemplaires, en fin de période, témoignent de la recherche spécifique et de la production standardisée dôune forme bien déterminée ; celle-ci, forme de lôarête latérale en vue de face ne peut être un produit accidentel de lôaction symétrique. Sans aucun doute, le but de lôartisan nôest pas seulement de produire un tranchant, ou un objet à deux plans de symétrie, mais également une figure authentique avec les beaux bifaces de lôacheuléen évolué. Mais la forme générale et les formes évoluées, plus spécifiques, ne peuvent être reproduites que grâce à un autre réflexe cérébral, celui de la proportionnalité. Sans rapports suffisamment constants[11] des diverses dimensions dôun objet, il ne peut y avoir de forme standardisée. La comparaison des grandeurs, en vue de leur égalisation, décelables dans le plan de travail, est donc contemporaine dôune autre jauge, celle des rapports de grandeurs.

« Espace, comparaison des grandeurs, proportionnalité et création de figures : palmarès impressionnant ! Mais il faut encore une fois maintenir la distance : contrairement à beaucoup de préhistoriens trop enthousiastes, je tiens en effet pour totalement erroné de parler, au stade où nous en sommes, de connaissance de lôespace, voire de géométrie euclidienne[12]. Lôespace dont nous parlons ici nôa rien à voir avec lôespace vide des peintres perspectivistes de la Renaissance ; il nôest quôun lieu de travail, il nôest que de pierre et il nôest que local. En outre la géométrie euclidienne est affaire de concepts éventuellement applicables à toutes sortes dôobjets ; ici au contraire, les notions géométriques collent encore à la pierre, et rien ne permet de

10 Elkin dit que le vocabulaire des aborigènes australiens ne comporte aucun terme qui indique une mesure, superficie ou distance ; cependant, un voyage peut être évalué par le nombre dôétapes, mais sans souci dôégalité des distances parcourues à chaque étape (Elkin, 1967, p. 276). Il est raisonnable dôadmettre que si la mesure est inconnue des chasseurs-cueilleurs contemporains, *a fortiori* lôétait-elle des hommes du Paléolithique inférieur.

11 Et, dans le cas des bifaces, beaucoup plus nombreux que ceux que François Bordes, a mis en avant.

12 (Jelinek, 1989, p. 89), (Rudgley, 1999, p. 88), (Schick, 1994, p. 133).

penser quôelles en furent détachées pour être appliquées ailleurs. Elles ne sont là quôà titre de réflexes mentaux, patiemment élaborés dans lôinteraction main-cerveau, il sôagit dôun apprentissage cérébral, dôune base cognitive certainement indispensable pour une mutation ultérieure en concepts, mais dôun apprentissage seulement et dans un contexte technique bien précis.

« Un argument très solide en faveur de la non-conceptualisation est que le travail était selon toute vraisemblance un *processus silencieux*. On ne connaît pas à lôépoque dôapparition du langage articulé, mais comme les exemples ethnographiques (donc à rapprocher du Paléolithique supérieur ou du Néolithique naissant) appuient la thèse du silence, il est raisonnable dôen déduire quôil en était de même pour les époques antérieurs. Lôenseignement dôabord ne se fait pas par des discours, mais par lôexemple[13] ; (é).

« Le processus silencieux de la taille est en contraste frappant avec le *processus très bavard de son incorporation dans la pensée mythique-rituelle* des chasseurs-cueilleurs et des agriculteurs rudimentaires. Dôaprès M. Eliade, « il est inconcevable que les outils [de pierre] nôaient pas été chargés dôune certaine sacralité et nôaient pas inspiré nombre dôépisodes mythologiques »[14]. (é)

« Ces relations sont extrêmement intéressantes si on les rapproche de lôaspect silencieux, purement gestuel, de lôéducation et de la « discussion » entre spécialistes de la taille ; il nôy a pas de mots qui incorpore une pensée liée au travail, mais il y en a à profusion pour lôindispensable rituel afférent. Ce qui affleure donc à la conscience nôest pas le concept technique ni *a fortiori* géométrique, mais un concept mythique général saisissant lôactivité lithique comme un enfantement issu de la « mère des haches » ; les mots, et donc la pensée, sont réservés aux analogies globales, architectes dôun grand tout anthropomorphe, mais nôont encore rien à faire de concepts spécialisés liés à une activité particulière. *Les évidences géométriques sont bel et bien là comme des réflexes mentaux acquis, et non comme pensées.*

« Dans le même ordre dôidée, T. Ingold[15] théorise ainsi un aspect « divinatoire » de lôoutils de pierre, en sôappuyant sur les Indiens Cree : comme dans la pensée des chasseurs-cueilleurs le monde est un monde de volontés, les outils, affirme-t-il, sont des intermédiaires entre ces volontés, et non de simples agents dôaction sur la matière. (é)

« Si, en remontant jusquôà nos ancêtres du Paléolithique inférieur, il est plus quôhasardeux de leur attribuer une pensée mythique-rituelle, sorte de chanson de geste intellectuelle qui incorporerait et magnifierait la gestuelle lithique, il est permis en revanche de leur attribuer un souci esthétique. (é) ; si tel est le cas, il sôagit dôun changement qualitatif considérable, puisque pour la première fois la forme créée est un objet purement cérébral, la forme pour le plaisir, la forme pour la forme. De cette indépendance naissante à la géométrie euclidienne, il y a loin ; il nôempêche, il serait agréable de pouvoir penser que lôune de ses racines fut lôamour du beau : non pas la beauté contemplée (formes naturelles) mais la beauté créée. »

3.4 Expériences de pliages de feuilles de papier, de découpages de cubes en pâte à modeler, de dessin de coupes du cube, et dôenveloppes de volumes élémentaires obtenues par pliage

13 (Hallpike, 1979, p. 103) ; Wynn (Wynn, 1993) signale la même chose pour la formation des tisseurs et forgerons chez les Navajos, et chez les Duna pour la pierre taillée. Pour J. Pellegrin les formes et les schémas sont en mémoire, et il nôy a pas de doute que lôobservation des aînés par les jeunes étaient le moyen dôacquérir une telle mémoire. (Pellegrin, 1993).

14 (Cité dans (Otte, 1993, p. 31).

15 (Ingold, 1993)

3.4.1 Expériences de pliage de feuilles de papier : symétrie, relations entre rectangle et carré et plus avant entre formes de quadrilatères.

Du point de vue des chercheurs, l'historien ou le didacticien, des intentions analogues président à leur travail : donner une interprétation mathématique la plus contrôlée possible aux choses que chacun d'eux observe de son côté. Ici, je donnerai un premier exemple.

Exemple 1. Pliage et forme du papier que l'on plie.

Je propose aux élèves d'effectuer quelques pliages. Par exemple, par pliage trouver à déterminer le plus grand carré dans une feuille de papier ordinaire, de format A4, ou, plus élémentaire encore, examiner un pliage composé, disons double, d'une feuille rectangulaire, ne serait-ce que pour apprendre qu'un tel pliage délimite 4 parties ï et pas trois seulement - sur la feuille une fois dépliée, et éventuellement comprendre pourquoi il en est ainsi.

On dispose au départ d'une feuille de papier. Pour moi elle est rectangulaire, mais cette propriété est-elle à prendre en compte dans le pliage effectué ? Cela dit, le morceau de papier plié que l'on obtient possède une forme, lui aussi. Quelle sera sa forme ? Cette propriété sera-t-elle prise en compte ? Pour un pliage en quatre de la feuille, que je dirai banal, un point ressort : la forme du morceau plié est rectangulaire, elle aussi, elle est encore rectangulaire, elle est toujours rectangulaire (on peut considérer la chose de différents points de vues). Et si nous avions affaire à une feuille de dimension standard, A4, A5 etc., elle lui sera semblable. Par contre ce ne serait pas le cas si nous avions plié un morceau de forme carrée puisqu'un pliage donne un rectangle, et deux pliages composés, en croix, donnent à nouveau un carré.

Cette stabilité de la forme lors du pliage influe sur les représentations que les sujets se font de leur action et de leurs gestes. On ï élèves aussi bien qu'enseignants ou chercheurs - aura tendance à considérer et à dire que l'on a fait deux fois le même pliage pour aboutir au pliage en quatre. Plus avant, cela supportera l'idée que les pliages se composent comme les puissances de 2.

Mais comprendre cela dans l'expérience n'impose nullement que toutes ces relations soient explicitées, en particulier que la forme rectangulaire soit explicitement prise en compte. En effet, les pliages se font par application d'un bord sur son opposé et ce n'est que cela qui est pris en compte dans l'action. Comment s'en convaincre ? Proposez donc un morceau de papier de la forme d'un parallélogramme, assez allongé pour que le pliage des petits côtés l'un sur l'autre ne les fasse pas s'appliquer, soit qu'ils ne fassent que se recouvrir partiellement, soit qu'ils ne se recouvrent pas du tout. La forme du morceau plié n'est alors plus un parallélogramme, mais a la forme d'un trapèze (avec éventuellement une encoche en pointe dans sa base[16]). Cette forme reste symétrique et donc on peut la replier en deux, bords à bords, mais cela n'est plus tout à fait la même chose et ce n'est plus deux fois le même pliage.

Il faut donc que les éléments retenus par le chercheur à titre de *résultat du travail*, correspondent à ceux que livreront les analyses du *lieu de travail* et du *plan de travail*. Pouvoir faire de telles analyses exige que l'on observe attentivement les élèves faire leurs pliages :

16 Si vous ne vous représentez pas la chose, eh bien faites donc le pliage évoqué ! Ce conseil vaut pour toutes mes descriptions.

- *Quel est le lieu de leur travail ?* La forme du morceau de papier ou seulement tel ou tel élément : tel bord, tel coin ? Etc. Est-ce que le résultat du pliage va tenir compte du morceau de papier duquel on est parti ? Ceci est encore plus important lorsque vous demandez aux élèves de découper des figures dans des pliages. Est-ce que la position de ces découpes par rapport à la forme du morceau de papier sera prise en compte ? Etc.

- *Quel est le plan de travail ?* Dans quel ordre lôélève procède-t-il ? Une fois quôil a agi, est-ce quôil peut retrouver cet ordre ? Est-ce quôil peut envisager ce qui se passerait sôil intervertissait telle ou telle action ? Etc.

On peut sôinspirer de telles analyses pour imaginer des ensembles de problèmes de pliages, en faisant varier :

- la forme des morceaux de papier dans lesquels confectionner un morceau de forme donnée ;

- les modes de pliage dôun morceau de papier donné et examiner ce quôon obtient ;

- le produit que lôon cherche à obtenir, en procédant à des adaptations idoines soit dans le mode de pliage, soit dans la forme du morceau de papier plié, soit dans les deux.

Exemple 2. Plier et déplier.

Bien entendu de telles interprétations didactiques visent dôautres significations que celles de lôhistorien. Ce que je cherche à savoir du travail des élèves est ce dont ils font lôexpérience et surtout quelles pourraient être des interventions adéquates sur le champ même de cette expérience. Ainsi toujours à propos du pliage de la feuille rectangulaire (peu importe ici quelle soit A4 ou non), un nouvel exemple.

Une fois quôon a plié notre feuille, on peut demander de la déplier. Généralement le geste de cette action fera à rebours le pliage[17]. On déplie la partie qui est venue recouvrir le morceau de papier. Cette action restituera le morceau de papier dans sa position initiale. Mais on peut envisager une autre manière de déplier la feuille, en dépliant non pas par le dessus, mais par le dessous. À prime abord on ne remarquera pas de différence, le morceau de papier semblera avoir repris sa position initiale. On suggérera alors de procéder de la même manière mais sur un papier plié en deux seulement, ou alors en huit (trois plis) et en prenant un papier qui ne soit pas identique sur le recto et sur le verso. Alors les deux manières de déplier ne reviendront pas au même, puisque la seconde manière aura retourné le morceau de papier. Comment comprendre cela ? Devra-t-on reconsidérer ce qui se passait dans le cas dôun pliage en quatre ? Imaginer une telle expérience et estimer son intérêt ne me serait jamais venu à lôesprit si je nôavais pas poussé mes analyses sur le pliage des feuilles de papier au-delà des *produits de ce travail* en observant attentivement les élèves, et en considérant tout aussi attentivement ce qui pour moi allait de soi dans de telles expériences, et pourtant pas pour eux.

[17] On est ici en plein dans le jeu entre une schématisation mathématique et une réalité bien plus complexe. Avec la manipulation en effet, on a affaire à des feuilles de papier qui ont deux faces (ce ne sont donc pas des plans stricto sensu) et on distingue ces faces. La feuille et nos gestes sont plongés dans un espace orienté 3D. À cela sôajoutent (sôamalgament) une orientation temporelle, et une inversion des actions et de lôordre de leurs combinaisons. Il y a jeux de mise en contraste dôau moins deux ordres de significations qui chacune nous imposent sa logique propre. On peut considérer la manipulation comme une contremarque expérientielle faite à la composition de deux symétries axiales dôaxes perpendiculaires. On a ici un exemple dôun jeu symbolique, au sens où je lôai défini.

Exemple 3. Plier un carré dans une feuille rectangulaire.

Comme je l'ai défendu ailleurs (Conne F. 2008a et 2008b), l'expérience est un véritable creuset de relations mathématiques. Le pliage d'un carré dans une feuille ordinaire nous en donne un profond exemple. Ceci nous introduit à un troisième exemple.

Je ferai tout d'abord remarquer que si je dispose de deux feuilles ordinaire, je puis déterminer ce carré, en appliquant une feuille en travers de l'autre (et ce sera le moyen le plus intuitif de se convaincre que l'on obtient alors le plus grand carré inscrit dans une telle feuille). Pour ceci, je devrai au moins appliquer largeur sur longueur, l'une par rapport à l'autre en T, ou encore mieux, les appliquer l'une sur l'autre coin sur coin, à angle droit, l'une par rapport à l'autre en L ou en équerre. Si on ne dispose que d'une seule feuille de papier rectangulaire, le rabat du coin, à l'équerre, permettra de déterminer ce carré. Si j'insiste sur cette expression : *à l'équerre* c'est que dans une telle construction, le coin de la feuille que l'on rabat joue exactement le rôle d'une équerre, que le *lieu de travail* fournit en quelque sorte un de ses instruments. Si je déplie mon pliage en suivant l'idée (de l'exemple 2 supra) de déplier la feuille du dessous (qui a la forme d'un trapèze rectangle), alors mon morceau de papier se retrouvera par rapport à sa position d'origine dans une position transverse, en L. La procédure de pliage et de dépliage décrite ici permet donc de faire l'expérience de l'équivalence des deux constructions : celle qui fait usage de deux feuilles et celle qui fait usage du rabat du coin. Du point de vue des représentations une telle équivalence n'est pas anodine, mais ce n'est pas tout puisqu'elle fait le lien entre cette expérience et une représentation directrice concernant les parallélogrammes et les croix en ceci qu'on peut les considérer comme la forme obtenue par recouvrement de deux bandes de largeurs distinctes ou égales, à angle quelconque ou à angle droit.

3.4.2 Expériences de découpe de cubes en pâte à modeler : bords et lignes, coupes et formes des morceaux, arêtes, faces, volumes.

Il porte sur la géométrie du cube, en ce sens il est plus proche des questions discutées par O. Keller que l'exemple précédent. Toutefois, il prolonge l'exemple précédent sur la question des instruments que l'on utilise. Il s'agit d'expérience de découpe de pavés de forme grosso modo cubique en pâte à modeler à l'aide d'un fil.

J'ai commencé à explorer ce milieu avec des élèves et mes étudiants à la suite de mes recherches portant sur un matériel de découpes de cubes en bois et de l'exploration de quelques polyèdres à l'aide d'esquisses de perspectives cavalière de ces volumes (Conne F. 2007a). Il s'agit donc de confectionner avec de la pâte à modeler quelques pavés approximativement cubiques, et de les découper à l'aide d'un fil tendu (à couper le beurre, le fromage, fil de potier, etc.) selon des découpes planes transverses et verticales (des découpes non verticales sont explorées aussi, j'en dirai juste un mot en passant à la fin de ma description).

> Notons tout de suite que la pâte à modeler permet sans difficulté d'effacer son action, ou ses traits de découpage, soit en écrasant son cube, soit en lissant les faces. Cela importe énormément pour les élèves.

Un premier type d'observations est à retenir : souvent les élèves avec qui je travaille n'arrivent pas à confectionner un pavé de pâte à modeler cubique qui les satisfasse : les bords ne sont pas lisses comme ils voudraient, les proportions sont approximatives, et les faces ne sont pas très parallèles, les arêtes ne sont pas très nettement marquées. Néanmoins cette

insatisfaction est vite dépassée pour la plupart dès le moment où ils procèdent à leur première découpe réussie : en effet, par contraste avec les bords confectionnés à la main, la coupe de la pâte à modeler est nette et précise et marque des arêtes bien franches, et apparemment bien droites, les coins sont nets, eux aussi.

Je me limiterai ici à un répertoire de deux types de coupe en moitiés :

1°) coupes transversales *parallèles* aux faces latérales et au milieu du cube ;

2°) coupes transversales *en diagonale* de la face supérieure.

Déjà pour décrire ces coupes nous devons distinguer la face supérieure, sur laquelle on va appliquer le fil pour entamer la découpe, et les faces latérales.

Par ailleurs ces découpes laissent des traces ï créent une ligne de coupe ï qui se marquent tantôt sur les faces au milieu dœelles, tantôt le long des arêtes et de ce fait sont moins « remarquées » car elles ne font que se superposer à des lignes déjà perçues. Notons aussi que les élèves dirigent leurs actions sur la ligne du découpage quœils veulent faire, cœest-à-dire la position de la ligne du fil sur le carré de la face supérieure. La ligne de découpage produit une ligne de coupe et, lorsquœon sépare les morceaux, de « nouvelles arêtes ».

> Nous procédons à des combinaisons de telles découpes, réitérées tantôt sur la même face supérieure, tantôt sur une autre de ses faces, après avoir fait subir au cube une rotation dœun quart de tour.

Le propre de la combinaison des coupes est de toujours opérer sur le même pavé. La pâte à modeler a ceci de particulier que les morceaux découpés restent collés les uns aux autres et quœil faut une action pour les séparer après la coupe. À lœinverse, une fois quœon a coupé un cube et quœon en a séparé quelques parties, voire toutes les parties, on doit alors les rassembler à nouveau pour opérer un nouvelle découpe. Comme la pâte à modeler est collante, cela permet de reconstituer des cubes à partir des parties obtenues, ce qui donne lieu à des exercices de puzzle en 3D très instructifs. En particulier on peut reconstituer des cubes en prenant des parties issues de plusieurs découpes, ce qui permet dœétablir des équivalences.

Les morceaux que lœon obtient nœont pas toujours des formes très évidentes. Ceci oblige le sujet à trouver des descripteurs méthodiques pour juger de leur forme : nombre de sommets, dœarêtes, de faces, forme des faces. Les morceaux sont aussi de tailles inégales, par contre ils sont assez précisément de formes semblables. La reconstitution de cubes avec les morceaux ne donne pas un cube parfait, néanmoins la rétroaction du matériel est nette : le sujet sait sœil a bien reconstitué un cube ou non.

La géométrie de ces découpes de cubes nœest pas triviale, surtout pour les combinaisons de découpe en diagonales. Si on combine toutes les coupes possibles, on obtient 24 tétraèdres identiques. Mais soit par découpe, soit par réassemblages, on peut obtenir toutes les parties des découpes intermédiaires.

> Lorsquœon combine deux découpes en diagonales, on obtient bien 4 parties, mais non égales : deux tétraèdres valant 1/6 de cube et deux pyramides valant 1/3 de cube.
> Sœil nœy a quœune manière de découper un cube par combinaison de deux coupes en diagonale sur des faces adjacentes, il y a deux possibilités distinctes de faire trois découpes sur les faces du trièdre : lœune donne 6 tétraèdres identiques, 1/6 de cube, lœautre donne 8 parties non égales, 4 paires de polyèdres : deux hexaèdres 1/4, deux

tétraèdres 1/12 et deux tétraèdres 1/6. L'organisation et la forme de ces morceaux de cube peuvent être reliée aux isométries paires du cube.

Que ce soit en vue de ces découpages, lors de la séparation des parties encore collées, ou lors des tentatives de reconstitution du cube à partir de certains morceaux, les élèves s'appuient sur les lignes et arêtes que font les découpes. Ils s'aident aussi de la considération que les faces de coupe, les nouvelles arêtes, sont plus lisses que les éléments du bord du cube et que les nouveaux coins sont bien marqués.

Il convient ici de noter la fonction multiple de l'instrument de découpe : le *fil*. Ce dernier n'est pas une *scie*, ni un *couteau* en ce sens que pour opérer sa découpe le sujet est obligé de tendre ce fil, il prendra alors une forme rectiligne. Mais il faut encore positionner le fil dans une direction bien précise et cela se fera par une marque, en quelque sorte une amorce de coupe, laissée sur la face supérieure du cube. Le fil a donc tout autant fonction de *scie* que de *règle-crayon*. Ceci peut être utilisé à bon escient pour discuter de ce que l'on anticipe comme effet d'une coupe.

Mais on peut aussi en tirer parti afin de faire quelque découpe particulière. On peut en effet appliquer le fil le long de la ligne de découpe que l'on voudrait obtenir, de manière à enlacer le pavé dans une boucle. Cela fait, on tire la boucle, voire on la ferme comme pour un nî ud. Le pavé sera alors découpé, pas toujours selon une coupe plane, mais cela n'est pas impossible à obtenir non plus.

> En particulier c'est ainsi que l'on peut obtenir une découpe dont la ligne de découpe est le triangle fait par les diagonales des faces du trièdre. On obtient alors un tétraèdre dans un des coins du cube. En procédant de cette manière par 4 fois, on peut obtenir la découpe du cube en 4 de ces tétraèdres de coin et comme noyau un tétraèdre régulier dont les arêtes sont les diagonales des faces du cube. L'intérêt de cette découpe est dans la manière de positionner le fil, puisqu'il devra longer les arêtes des découpes déjà effectuées.

Par les explorations de ce milieu mathématique, au détour de tâches variées, on rencontre des considérations analogues à celles de O. Keller. Bien entendu il s'agit de tout autre chose, et les techniques ne sont pas comparables. Et surtout les techniques utilisées à fins didactiques ne sont pas appelées à se développer afin d'augmenter leurs capacités de production. Toutefois dans ce genre de travail sur des objets en trois dimensions, on observe qu'au départ, les trois dimensions sont données et traitées de manière indifférenciée, puis, progressivement, les actions s'organisent en prenant en compte distinctement les des trois dimensions. Cela se produit à la faveur de la réitération combinée des mêmes découpages, tout comme je l'analysais à propos du pliage des morceaux de papier.

En fait, ces tâches croisent deux analyses dimensionnelles distinctes : celle des directions dans l'espace et celle des dimensions : sommets, arêtes, faces. Ce travail coordonné est supporté par ce qui dirige tout aussi bien les coupes que les réassemblages de morceaux : des lignes, des marques et des figures obtenues en deux dimensions. Cela était déjà ressorti très nettement dans mes recherches antérieures sur des plots en bois. **L'usage des instruments est donc en quelque sorte lui-même instrumentalisé par des éléments graphiques**. C'est d'ailleurs ce que j'ai fait déjà remarquer en parlant du *rabat du coin de la feuille de papier à l'équerre*.

3.4.3 Expériences graphiques dans l'étude de cubes découpés.

La recherche que j'ai évoquée ci-dessus concernant la découpe de cubes de pâte à modeler fait suite à une autre recherche sur le même thème que j'ai décrite dans un article intitulé : *Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres* (Conne F. 2007a). Cette recherche a été effectuée dans une classe de niveau 3ème /4ème de l'école primaire de l'enseignement spécialisé. Elle faisait partie d'investigations que je menais en classe sur le thème de l'introduction de ces élèves à la géométrie de l'espace. Je travaillais avec divers matériels, *polydrons* (plaques géométrique permettant la confection de coques de polyèdres), pliages élémentaires, ainsi qu'un jeu de 10 cubes en bois, découpés de manières diverses en demi, tiers, quart, et huitièmes et d'un cube en bois témoin non découpé. Chacune des découpes de cubes était faite de telle sorte que tous ses morceaux soient identiques. Il s'agit ici de solides plus que de polyèdres. La partie de cette recherche que j'ai rapportée a débuté au moment où, après avoir fait des activités avec chacun des élèves à fin de leur faire connaître ce matériel de plots en bois, je leur ai présenté les 11 cubes sur une table, et leur ai demandé de relever par dessin ces 11 cubes afin que, la semaine suivante, on puisse se souvenir de la composition de mon matériel, sans qu'il me soit nécessaire de le ramener en classe.

Pour cette première activité la plupart des élèves a recouru à un codage plan des cubes découpés. Deux ou trois élèves ont produit un dessin en perspective pour l'un ou l'autre des 11 cubes découpés, mais jamais systématiquement. Il s'est trouvé qu'un élève disposait d'une procédure systématique de dessin de cube en perspective cavalière (sur quadrillage) et qu'il l'a rigoureusement appliquée à tous ses dessins. Lorsque j'eus présenté en collectif les solutions de chacun, et qu'ils ont vu les dessin de cet élève, tous les autres ont voulu apprendre à dessiner un cube ï esquisse en perspective cavalière ï et ont été d'accord pour chercher à représenter sur ce moule les cubes diversement découpés (donc pour exécuter à nouveau la tâche). Pour ce faire, ils ont dessiné le cube en perspective sur lequel ils ont reporté des indications graphiques analogues aux codes qu'ils avaient élaborés précédemment. Une part d'entre eux a complété ses dessins sur diverses faces du cube.

Je leur ai alors demandé de bien vouloir dessiner la forme d'un des morceaux découpés dans le cube. Il s'agissait cette fois de trouver des moyens d'esquisser des dessines de prismes et de pyramides. Puis nous avons tenté de dessiner d'autres polyèdres, dont un octaèdre, confectionnés en polydrons.

Cette recherche a donné lieu à des observations très riches. Lorsque dans la première tâche je leur ai demandé de dessiner les cubes, je cherchais à observer comment ils allaient s'y prendre pour « rendre le volume », mais ils ont contourné la difficulté en dessinant une face du cube, et en y apposant les motifs de découpes qui apparaissaient sur celle-ci. Dans plusieurs cas, cela suffisait à identifier le cube découpé.

> Les cubes étaient découpés selon les principes que j'ai décrits pour la pâte à modeler, ce qui faisait que leurs codes ont repris les lignes de découpage et les ont combinées en motifs simples, connus des élèves : un carré dans lequel sont inscrits ces lignes, à savoir une ligne transversale ou diagonale, deux de ces lignes en croix, 3 ou 4 de ces lignes en étoile, des quadrillages en 4 ou en 9 du carré, etc.

Les élèves ont donc élaboré un système graphique pour désigner et distinguer les cubes découpés, systèmes graphiques relativement autonomes puisqu'on a pu observer des dessins qui ne correspondaient à aucun des cubes découpés présentés.

Le second point que je mentionnerai ici, concerne le dessin esquissé de cube en perspective cavalière, appris comme un « truc » de dessin facile à obtenir et produisant son effet de vision en profondeur.

Le cube est dessiné en transparence, obtenu par le dessin dôun carré, le dessin dôun second carré, décalé par rapport au premier, et du tracé des lignes de liaison entre les sommets correspondants de ces deux carrés. Ceci est en soi, lui aussi, un petit système graphique.

Il a été fort intéressant alors de regarder comment les élèves ont combiné les deux systèmes graphiques ainsi obtenus pour arriver à dessiner, de manière « réaliste » les cubes découpés.

Le troisième point à relever est que pour dessiner non plus les cubes découpés, mais la partie ainsi obtenue, ils ont cherché à généraliser le truc de dessin appris pour le cube afin dôobtenir des prismes, des pyramides puis lôoctaèdre. Ils ont aussi cherché à sôappuyer sur le dessin du cube découpé, obtenu par superposition des deux systèmes sus-mentionnés afin de les guider. Le graphisme développé lôa donc été à partir de savoirs-faire graphiques déjà disponibles : dessiner un carré et par le jeu réglé dôéléments graphiques pour produire un ensemble de figures géométriques. Ces graphismes parce quôils pouvaient être développés de manière relativement autonome leur ont permis de contourner lôobstacle du rendu par dessin dôun objet en 3 dimensions. Puis, pour eux lôapprentissage du dessin du cube en perspective cavalière sôest substitué non pas à leur premier système graphique, mais uniquement au carré sur lequel il sôétait développé. On a donc pour le dessin de mêmes objets une combinaison de deux systèmes graphiques, dés le départ autonomes lôun vis à vis de lôautre. Pour en arriver là les élèves nôont pas analysé leur tâche, mais les choses se sont présentées autrement : primo une réduction de la tâche, et secundo, forts de la pertinence de ce premier traitement, complétion par assimilation de leurs codes au nouveau procédé de dessin.

Bien entendu, les productions des élèves nôont pas été des épures et il ne sôest pas du tout agi de dessin technique, ni même de techniques de dessin, mais essentiellement de *dessins à main levée*, je le répète, des *esquisses*. Le véritable objet de tout ce travail aura été lôexploration du cube, instrumenté et dirigé par les contraintes de la tâche dessin, puis, fort de ces résultats, la poursuite de cette exploration vers dôautres types de polyèdre dont la variété a pu être mise en relation avec la variété des adaptations (assimilations et accommodations) de la technique du dessin en perspective cavalière nécessitées pour représenter ces formes.

3.4.4 Expérience des volumes que lôon peut faire prendre à des feuilles de papier.

Exemple 1. Une évidence intuitive qui cache une indifférenciation de connaissance.

À lôorigine de mes recherches portant sur la géométrie de lôespace, jôavais le motif suivant : que peut apporter aux élèves des jeux ï voire des jouets ï comme le matériel des polydrons, quelque pliages très simples, éventuellement inspirés de lôorigami, des boîtes de plots en bois, des trucs de dessin, etc. ? Cela môa amené à me demander comment ils envisageaient des moyens de « produire du volume » ? Par exemple, comment envisagent-ils de construire un cube ou un tétraèdre en papier? Mais tout aussi bien des effets de volume par le dessin en perspective. Comment envisagent-ils ce qui se passe, par exemple lorsque leur construction en polydrons vient à lever, à quitter le plan de travail ? Comment appréhendent-ils les solides et leurs formes ainsi que les transformation de ces formes que lôon obtient par de simples découpages ? Ou encore les représentations qui permettent de classer les polyèdres en prismes et pyramides, etc., voire en ce quôon pourrait appeler en *polyèdres boules* (dodécaèdre, icosaèdre etc.).

Je me suis aussi attaché à examiner une question qui mô intriguait et à laquelle je consacre encore aujourdôhui quelques explorations. Dans tous les articles à propos des maquettes de polyèdres on fait grand cas des polyèdres parfaits ou platoniciens et de la démonstration quôil en existe 5. Dans la partie de la démonstration qui établit quôil ne peut en exister plus que 5, on se base sur une « évidence » symbolique: *la somme des angles des faces en un sommet dôun polyèdre convexe est inférieure à 360°*.

Lorsquôon aborde cette question à la faveur de constructions avec des pièces polygonales (genre polydons), on sôappuie sur le constat empirique de constructions dôangles polyèdres. Il ne faut pas confondre ce qui dans la démonstration joue le rôle dôévidence symbolique avec un simple constat empirique et souvent, hélas, dans la pratique on pense pouvoir se suffire dôune telle réduction. Mes observations (Conne F., 2008b) ainsi que celles de T. Dias et V. Durand Guerrier (Dias T., 2006), montrent cependant que le cas où la somme de ces angles fait 360° exactement : soit par assemblage de 3 pièces hexagones réguliers, soit par assemblage de 4 pièces carrées, ou encore de 6 pièces triangles équilatéraux, pose souvent problème. On obtient bien des plaques, mais le matériel fait que ce sont des plaques articulées, mobiles autour de leurs charnières. Dans le cas des 6 triangles ou des 4 carrés, les charnières entre pièces concourent au centre de la grande plaque quôelles constituent. On peut « plier » cette dernière le long de certaines de ces charnières. Dans le cas des 4 carrés, le pli se fait le long de deux charnières alignées alors que les articulations des charnières transverses se rigidifient. Le cas des de la plaque faite de 6 triangles est bien plus compliqué[18]. Le cas des 3 hexagones est différent. Nous avons affaire à un trièdre plat. Mais ici côest le matériel qui montre ses limites et la construction présente un léger jeu qui suffit à suggérer que lôassemblage pourrait prendre une courbure. Dans ce cas, comme si la construction avait une certaine souplesse et ce phénomène nôest plus, comme précédemment, une rotation autour de lôaxe des charnières. Ce sont les axes des charnières qui se déplacent réduisant lôangle quôils font entre eux en dessous de 120°. Du *constat empirique* de cette **petite courbure**, les sujets novices ï non initiés au théorème ï inférent **à juste titre** quôil serait éventuellement possible de construire un polyèdre. Et alors pourquoi pas en assemblant un grand nombre de telles plaques ? Tout récemment, un élève de huit ans et demi a spontanément déclaré à ce propos quôavec beaucoup de pièces hexagonales on pourrait ainsi construire « la plus grande de toutes les planètes » !

Cette observation nous oblige à revenir sur lôévidence du cas où la somme des angles fait moins que 360°. Dans ce cas, si on veut assembler les bords de notre plaque, on est « obligé » de faire lever notre construction dans lôespace et de la faire décoller du plan de la table. La construction obtenue, assemblage de pièces en cornet, nôest pas pour autant nécessairement rigide. Elle le sera dans le cas dôassemblages de 3 plaques (trièdres). Côest très net avec les trièdres de triangles, de carrés et de pentagones ï et devrait lôêtre dans celui des hexagones aussi. Dans dôautres cas, il nôy aura pas de rigidité : par exemple dans le cas dôun cornet pour lequel on a assemblé 4 ou 5 triangles. La rigidité de tels assemblages sôobtiendra lorsquôon les fermera, dans les exemples ci-dessus, par une base carrée ou pentagonale afin dôobtenir des pyramides. Ici il faut noter une chose : lorsquôils obtiennent des constructions non rigides, parfois les élèves les retournent sur la table (ouverture du cornet plaquée sur la table) et ce simple appui de quelques sommets ou arêtes sur une surface plane peut suffire à les rendre rigides. Ces propriétés font que les assemblages en tétraèdre, cube et dodécaèdres sont faciles

[18] On peut assembler plus de 6 triangles équilatéraux (ou de quoi que ce soit) et cela donne des surfaces froissées, voire si on ne les ferme pas, des surfaces en spirales que dans le cas dôassemblages de triangles jôappelle « girolles ». Ce genre de construction nôa pas été prévu par le matériel des polydrons mais il offre une expérience fort intéressante : les girolles sont mobiles, autour de leurs charnières. Le prolongement, virtuel, des axes de celles-ci sont tous concourants en un même point. Ce point, non matériel, est le point fixe de tout lôassemblage auquel il semble noué, contraint. Afin de ne pas trop compliquer mon exposé, je nôenvisagerai pas ce cas ici, mais je tenais à le mentionner explicitement.

à construire. Leurs sommets sont sommets de trièdres, aussi les assemblages de pièces sont tout de suite rigides. Cela nôest pas sans effet. Fabriquer un dodécaèdre avec autant de facilité est un constat empirique qui impressionne beaucoup les enfants, les enseignants et les parents. Plus généralement, jôai pu observer (Conne F. 2008b) que dans le travail avec un tel matériel, les deux caractères de rigidité dôune part et de fermeture de lôautre jouaient pour les élèves un rôle primordial, que cela les orientait dans leurs constructions.

Ceci dévoile chez les sujets, et nous-mêmes, une certaine indifférenciation des représentations de ce théorème de la somme des angles. Ici il faut prendre en compte ensemble : angles ï quantité de matière ï rigidité, fermeture, et éventuellement encore souplesse du matériau. Cela se révèle bien plus subtil quôon ne pouvait le croire de prime abord. Là encore dans la théorie, ce théorème nôest quôune *évidence symbolique*, qui suffit à lôétablissement du fait quôil ne peut y avoir plus de 5 polyèdres parfaits, et qui se détache ainsi de tout un tissu dôautres évidences spatiales dont nous ne soupçonnons pas lôampleur. Ainsi se focaliser sur le théorème mathématique au prétexte que sa démonstration est relativement intuitive ou empirique[19] nous fait passer à côté de la richesse des connaissances spatiales dont les élèves disposent. Il faut explorer diverses situations autour de cette question. Par exemple, il ne suffit pas dôéprouver le théorème de la somme des angles par de simples jeux de plaques articulées, mais il faudrait au moins lôexaminer dans le cas de secteurs de disques en papiers que lôon recollerait sur les bords. Jôai récemment commencé à examiner cette question avec des élèves.

Parallèlement à ces considérations, je suis très intéressé par le travail inverse qui consiste à partir dôun objet polyédrique, par exemple toutes sortes de boîtes en carton de toute forme que lôon trouve dans le commerce, et dôexaminer comment on peut sôy prendre pour les aplatir : soit on les écrase et on regarde ce que cela donne, soit on les déchire et on peut réfléchir à différentes manières de le faire. Côest donc lôopération inverse, la déchirure amenant à ouvrir ce qui était fermé et à rendre flexible ce qui était rigide. Le déchirement et lôaplatissement font alors apparaître des « jours » , des angles déficits de lôangle au sommet par rapport à 360°.

Toutefois, il nôest pas nécessaire que lôon produise une construction fermée pour « produire » du volume et sont tout aussi intéressants les cornets, gobelets et autres coins trièdres, ou polyèdres). En particulier jôai pu observer que dans certaines situations, par exemple lors de la confection du dodécaèdre régulier à partir dôun jeu de pièces pentagonales, retourner un forme en bol pour en faire une calotte (un chapeau) nôétait pas quelque chose qui sautait aux yeux des élèves. Pour ces derniers, côétait une pièce qui venait fermer la construction comme un couvercle et ils allaient jusquôà refuser de la décomposer en deux calottes de 6 pentagones chacune ! Jouent ici des questions de volumes ouverts, de volumes enfermés et aussi dôenveloppes de volumes.

Jôai aussi abordé ces questions de deux points de vue : on peut en effet chercher à reproduire une chose tridimensionnelle, mais notre expérience ne sôarrête pas là. En effet, on fait aussi lôexpérience inattendue de choses qui viennent à prendre des dispositions spatiales alors quôon ne sôy attendait pas. On se trouve par exemple confronté à ce que quelque chose à qui lôon pense pouvoir donner telle forme tridimensionnelle, vienne à en prendre une autre. (Jôai donné un exemple de ceci dans Conne F. 2008a, pp. 249-255).

Toutes ces investigations, encore en cours, mônt amené à ne pas me restreindre à un seul type de support dôétude, mais au contraire à en examiner plusieurs et surtout à

[19] Il faut prendre en compte la multiplicité des connaissances et leur degré de différenciation/indifférenciation, ce qui mâa amené à distinguer trois niveaux dôévidences : les *évidences intuitives*, les *constats empiriques* et les *évidences symboliques*.

examiner les mises en relations que cette diversité permet. Jôai déjà évoqué à propos des cubes découpés de telles correspondances : les combinaisons de traits en figures dôun code graphique correspondent exactement aux combinaison des découpes dans les cubes en pâte à modeler.

Exemple 2. Pliages de formes tridimensionnelles.

Dans mes recherches, jôai aussi beaucoup investi les pliages, au départ pour mieux comprendre comment en tirer parti pour étudier la symétrie. Ceci a un rapport direct avec la géométrie de lôespace, puisque la réalisation dôune symétrie par pliage joue justement sur le fait que toute symétrie plane est la restriction à son plan de lôaction dôune rotation dôun demi-tour autour dôune charnière (le pli) qui, dans le plan considéré, sera lôaxe de la dite symétrie.

Le matériel polydron permet en particulier des recherches fort intéressantes sur la question des polyèdres énantiomorphes. Toutefois, lôusage scolaire de ce matériel, officiel en Suisse romande depuis 1997, est quasiment limité à la question des développements de polyèdres, par le truchement de patrons dôassemblage des pièces requises pour la confection de tel ou tel polyèdre.

Je me suis intéressé à la confection de polyèdres en papier, et en particulier à trois pliages / découpages remarquables pour leur simplicité.

Le premier consiste à prendre un morceau de feuille carrée, de marquer les plis des diagonales et de rentrer ï en quelque sorte par soufflet ï un des quarts de carré. Cela fait lever le pliage en un cornet tétraèdre, dont les trois faces en papier sont les trois quarts du carré restant et la base, ouverte celle-ci, a un triangle équilatéral comme bord. Un cornet est un des moyens de « créer » de lôespace. Avec de tels cornets on peut envisager de confectionner un cube, en les assemblant par le bord de leur face ouverte, ou alors en accolant certaines faces, créer des polyèdres en « alvéoles ».

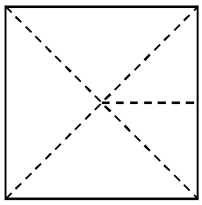


Figure 1. Pliage dans une feuille carrée dôun cornet tétraèdre coin de cube, 1/6 de cube.

Lôautre pliage remarquable consiste à prendre une feuille de format A4, de marquer par des plis la ligne du milieu parallèle à la largeur, ainsi que les diagonales de chacun de ses quarts, de manière à faire apparaître un losange inscrit dans la feuille. Les sommets du tétraèdre sont les sommets du losange, milieux des bords de la feuille, lôangle des faces qui les entoure est de 180°. Ce pliage est le développement dôun tétraèdre quasi régulier et les proportions de la feuille A4 font que ce tétraèdre est droit. Lôintérêt est que nous avons ici un développement de polyèdre qui tient dans une figure simple comme un rectangle, un développement de forme convexe et qui ne prend pas une forme compliquée. Autre résultat : le volume de ce tétraèdre est un douzième du volume du cube dont lôarête est égale à la largeur de la feuille A4. Pourtant, et cêest aussi fort intéressant, on ne peut pas obtenir un cube en assemblant de tels tétraèdres.

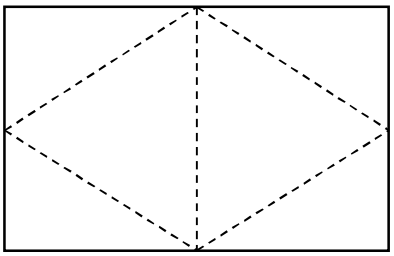


Figure 2. Pilage dans une feuilleA4 dûun tétraèdre droit, dont toutes les faces sont égales.

Les proportions de la feuille A4 permettent de la considérer comme le plan diagonal dûun cube, ou dit autrement, le plan dûune coupe diagonale faite dans un cube. Les dimensions de la feuille A4 font que sa largeur correspond à lûarête dûun cube, sa longueur à la diagonale dûune face de ce cube et sa diagonale la diagonale de ce même cube. Ceci, combiné avec lûidée de pliage en cornet décrite à partir dûune feuille carrée, permet de confectionner très aisément un nouveau cornet. Le marquage par pli des deux diagonales dûune feuille A4 délimite 4 triangles isocèles. On replie (en soufflet) un des triangles qui a pour base une longueur du morceau de papier, et cela fait lever la construction en un cornet de forme tétraédrique. La base ouverte a la forme dûun demi carré (triangle rectangle isocèle). Les faces papier du cornet sont des morceaux de plans de découpes diagonaux. En assemblant, en alvéoles, 12 de ces tétraèdres on peut obtenir un cube. Les faces de papier assemblées deux à deux donnent les découpes du cube en moitiés. On retrouve donc et les plots en bois et les découpes en pâte à modeler.

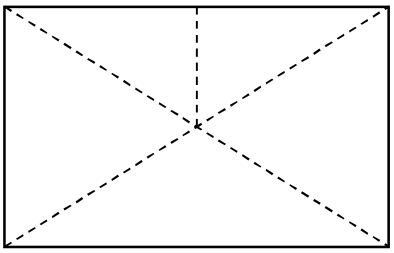


Figure 3. Pliage dans une feuille A4 dûun cornet tétraèdre 1/12 de cube.

Ce pliage, en cornet, repose sur le fait dûappliquer lûun sur lûautre deux huitièmes de la feuille A4. (Entre autres, dans D. Boursin & V. Larose, 1997, pp. 47 à 49. on trouvera des propositions de pliages fondés sur le même principe). On peut obtenir une moitié tétraédrique de ce cornet en coupant la feuille en 2 le long de la ligne du pli rentrant du soufflet. Ce tétraèdre élémentaire est la 24ème partie du cube obtenue par les découpages en moitiés transverses et diagonales aux 3 paires de faces du cube. À partir de ces pièces on peut recombiner tous les morceaux des découpages obtenus en combinant systématiquement découpes en moitiés transversalement ou en diagonale des faces. Les propriétés de la feuille A4 font que plusieurs de ces combinaisons peuvent sûobtenir par un pliage dans une même feuille A4.

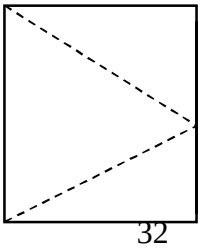


Figure 4. Demi cornet tétraèdre ci-dessus, 1/24ème de cube, la partie que l'on on obtient si on découpe un cube selon tous ses plans diagonaux. 24 est bien entendu égal au nombre d'isométries paires du cube.

Un module de pliage fort intéressant consiste à accoler deux de ces parties dans une feuille A4, pour donner 1/6 de cube.

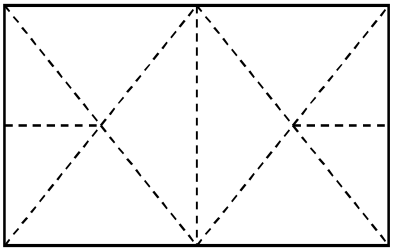


Figure 5. Pliage qui permet d'obtenir un cornet 1/6 dont la face ouverte est une face de cube.

L'intérêt de ce **nouveau jeu de signes de cubes découpés** est multiple. Les figures des plis sont des figures analogues à celles des découpes, en croix, en étoiles, etc. On peut tenter aussi de dessiner les pièces obtenues. Je ne connais pas de matériel de plots qui reproduisent toutes ces découpes et ce n'est pas si facile que cela à fabriquer. Par contre, les découpes dans de la pâte à modeler autant que les pliages sont « à portée de main ». **Ces pliages sont donc en quelque sorte les duaux des découpes**. Souvent, comme c'est le cas dans les pliages cités du livre de D. Boursin et V. Larose cité ci-dessus, on parle de « partition de cubes », à mon avis ce terme masque la dualité que je veux souligner ici. Cela masque aussi ce que le pliage produit, et qui est lié aux phénomènes décrits ci-dessus à propos des matériels genre polydrons20.

J'ai dit que les découpes donnaient des formes approximatives, grosso modo leur forme est rendue mais pas leur dimension. Les pliages, eux, restituent bien les dimensions. Par contre les assemblages des tétraèdres (ci-dessus, 1/12 ou 1/24) qui permettent d'obtenir les fractions de cube demandent à être dirigés par le système des découpes. Et bien entendu ce travail implique quelques considérations sur les fractions.

Un dernier point me semble essentiel au vu de l'étude des solides, et c'est ce qui me fait écrire qu'il y a **dualité** entre les découpes dans la pâte à modeler et les pliages. Lorsque je découpe un tel solide, le plan de coupe produit les faces de chacun des deux morceaux. Comme je l'ai dit plus haut, sur le matériau de la pâte à modeler il va falloir les décoller. À l'inverse, le pliage et le réassemblage procèdent en appliquant (recollant) l'une sur l'autre deux faces (en gommant ce que la découpe a ou aurait produit). Ceci est en rapport direct avec l'idée que l'on crée du volume en l'enfermant dans une surface ou qu'on développe un volume en l'ouvrant ï en le déchirant par exemple, afin de l'aplatir, ou alors qu'on l'écrase et l'aplatit en faisant se superposer quelques parties écrasées. Ces jeux de signes de volumes sont donc

20 Dans beaucoup de livres consacrés à la confection de tels modèles, les phénomènes qui apparaissent lors des manipulations ï et certains sont « mathématiques », comme celui relatif aux angles dièdres ï sont ramenés et enfouis dans les productions qui sont proposées. Pourtant ce sont bien ces phénomènes qui les rendent possibles. Il y a là une manière de réduction : les nécessités mathématiques que ces productions signifient aux auteurs, qui eux ont passé pas mal de temps à apprendre à les confectionner, s'estompent aux yeux des lecteurs derrière de simples constats empiriques. Il faut prendre en compte que ces productions ne peuvent pas avoir la même valeur pour l'auteur, qui présente son art, et le lecteur qui ne s'y adonnera que symboliquement et très superficiellement. On retrouve ici ce que j'ai dit du caractère symbolique des activités scolaires. Telles sont les réalités didactiques !

étroitement reliés à des phénomènes dont nous avons tous quelque expérience dans la vie de tous les jours.

Les jeux de plots, de pièces polydrons, de pliages, de dessins, fonctionnent chacun comme des mondes relativement autonomes. Ils sont tous évoqués en classe une fois ou lôautre ne serait-ce que superficiellement et évasivement. Mais ils renvoient à des objets mathématiques permettant dôappréhender schématiquement des choses très concrètes. Cêst donc ce jeu dôautonomie du signe par rapport à son objet qui le rend disponible à des figures du monde dont lôétude de O. Keller nous entretient qui a retenu toute mon attention.

4. Conclusion.

Lorsquôon veut enseigner les mathématiques aux élèves on est amené à chercher avec eux un socle dôévidences en général intuitives afin de contrôler lôancrage des savoirs que lôon veut faire apprendre aux connaissances disponibles. Cette manière de faire, qui ressort dôune didactique toute intuitive, rencontre deux problèmes :

1° Ce que le savoir tient pour être des évidences sont toujours des faits déjà analysés et finement différenciés, en quelque sorte rendus ponctuels alors que les connaissances intuitives sont essentiellement indifférenciées et confuses : on réduit les évidences à leur caractère empirique[21]. Lôexemple de la confusion entre caractère plan ou non dôun assemblage de plaques de polydrons et sa rigidité est à ce propos tout à fait parlant, mais il en va de même de tout ce qui concerne les figures géométriques, qui nôont pas dôépaisseur, ou pour ce qui en est des figures planes qui nôont pas de seconde face au verso. Etc.

2° Le second problème est que les évidences auxquelles on fait ainsi appel dans les échanges didactiques sont symboliques, je veux dire par là quôelles ne sont pas questionnées, et quôelles ne font que poser les limites de ce qui sera pris en considération, elles filtrent, trient a priori entre ce quôon tiendra pour évident et quôon gardera et ce quôon tiendra pour non pertinent et quôon rejettera.

Ma conception du développement des savoirs est quôil est illusoire de croire pouvoir ne sôen tenir quôà des dérivation à partir dôévidences posées comme prémisses, mais que tout développement au-delà de telles prémisses sôaccompagne, comme par répercussion, dôun réexamen des connaissances et intuitions qui se situent en deçà des seuils ainsi fixés. Le savoir sert aussi à revisiter les connaissances qui lôont précédé. Le développement des savoirs est pour moi essentiellement bouclé, entraînant aussi des révisions de ce qui était déjà connu avant lui.

Je trouve dans le travail de O. Keller une enquête sur ce qui a précédé la géométrie euclidienne devenue domaine des mathématiques autonomes. Je trouve donc une enquête qui tente de remonter le plus loin quôil se peut à partir des évidences posées par les *Éléments*, et qui cherche à identifier de quoi ces évidences se sont détachées, permettant à la géométrie de prendre tout son essor. Je vois ici une analogie avec mes propres recherches en didactique des mathématique, et la direction que le fait de me trouver confronté à des élèves en grande difficulté môa fait prendre : profiter de ce qui paraît évident aux élèves comme à moi pour révéler la richesse des connaissances sur lesquelles lôenseignement peut tabler au lieu de leur seriner sempiternellement les mêmes bases sans jamais réussir à leur donner ancrage. Et ceci pour la raison toute simple quôavant de pouvoir opérer de tels ancrages, il faudrait un tant soit peu savoir dans quoi ils pourraient le faire. Cela suppose quôon ne passe pas trop vite sur ce que chacun trouve évident mais quôon sache trouver des situations qui permettent de travailler les évidences par lôexpérience et lôexploration et quôon y consacre suffisamment de temps.

21 Et on les dénature alors parce quôelles ne sont plus que des constats.

Textes mentionnés ou cités in partie I, livre.

François Conne, 1992, Savoir et Connaissance dans la perspective de la transposition didactique, Recherches en Didactique des Mathématiques, n°12 - 2/3, Grenoble, La pensée Sauvage.

Zoltan Diénès, 1965, Comprendre la mathématique; une étude de la transition de la phase constructive à la phase analytique de la pensée mathématique des enfants. Paris : O.C.D.L.

Olivier Keller, 2004, Aux origines de la géométrie. Le paléolithique. Le mode des chasseurs cueilleurs, Vuibert.

Olivier Keller, 2006, La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations, Vuibert.

Olivier Keller, 2008, texte d'annonce de sa conférence & texte de conférence pour ce congrès de la Copirelem.

Claude Lévi-Strauss, 1967, Les structures élémentaires de la parenté, 2ème édition, 1967, Paris, Mouton.

Textes mentionnés ou cités in partie II, Cd-rom.

Michèle Artigue, 1997, L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, Recherches en Didactique des mathématiques, n° 18-2, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Yves Auckenthaler, 2004, Jouer la surprise, oui, mais comment ? Aanalyses de jeux de tâches géométriques et de leurs surprises, mémoire de licence, ssed, pse-UniGe.

Didier Boursin & V. Larose, 1997, Pliages et mathématiques, Paris, ACL-Éditions.

Guy et Nadine Brousseau, 1987, Rationnels et Décimaux, IREM Bordeaux.

Lewis. Carroll, 1972, Sylvie et Bruno, trad. Fanny Deleuze, Paris, Seuil.

François Conne :
- 2008a, L'expérience comme signe didactique indiciel, Recherches en Didactique des mathématiques, n° 28-2, pp. 219-264, Grenoble, La Pensée Sauvage.
- 2008b, Coupes sémiotiques, In Le film de classe. Étude sémiotique et enjeux didactiques. Jean-Pierre Sautot, éd., pp. 105-142, Limoges, Lambert-Lucas.
- 2007a Quelques pas esquissés dans l'univers des polyèdres. Suivi de situations de dessin en 4ème primaire de l'enseignement spécialisé. In Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne. Collectif sous la direction de Jacinthe Giroux et Diane Gauthier. Montréal 2007, chap 9, pp.219-256.
- 2007b, Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse romande, Petit x N° 73, pp. 37-70, Irem Grenoble.
- 2006, La didactique des mathématiques comme didactique d'une science étonnante**.** In Numéro spécial de l'Educateur, La recherche en Education, 31 mars 2006, pp. 21-26, Genève
- 2003, Interactions de connaissances et investissement de savoir dans l'enseignement des mathématiques en institutions et classes spécialisées. in *La spécificité de l'enseignement des mathématiques en adaptation scolaire.* Revue virtuelle, Education et Francophonie, Schmidt, S et Maury, c. eds, Volume XXXI, numéro 2, automne 2003.

- 1993, Du sens comme enjeu à la formalisation comme stratégie,: une démarche caractéristique en didactique des mathématiques, In Sens des didactiques, didactiques du sens, Ph. Jonnaert & Y. Lenoir Eds., (actes des Troisièmes rencontres internationales du REF - réseau international de recherche en éducation et formation), 1993, Editions du CRP Faculté dœéducation, Université de Sherbrooke, p. 205 à 261.
- 1986, Mathias ou un moment de compréhension. Petit "x". 1986, no 10,p. 53-66.
- 1981, La Transposition Didactique à travers l'enseignement des mathématiques en première et deuxième année de l'école primaire. Thèse de doctorat. Lausanne. Conne / Couturier - Noverraz, 1986. 462 pages.

Thierry Dias, 2006, Présentation du corpus de mathématiques polyèdres, in Interactions verbales, didactiques et apprentissages, Guernier M.-C., Durand Guerrier V. & Sautot J.-P. eds, Presses universitaires de Franche Comté.

Ddmes, 2005, Lœenseignement spécialisé, un autre terrain de confrontation des théories didactiques à la contingence. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* année 2003, Durand Guerrier V. & Cl. Tisseron éds., Cahier Didirem, Paris VII, pp. .77-171.

Raymond Duval, 1995, Sémiosis et Pensée humaine, Berne, Peter Lang.

Jean-Michel Favre, 2008, Jeu de tâches : un mode dœinteractions pour favoriser les explorations et les expériences mathématiques dans lœenseignement spécialisé, Revue Grand N, n° 82.

Sophie Gobert, 2009, à paraître, Elements dœanalyse a priori pour lœenseignement de la geometrie à lœécole primaire, Cd-rom, Actes de la XIVème École dœété de Didactique des Mathématiques, Grenoble, La pensée Sauvage.

Edmund Husserl, 1962, Lœorigine de la géométrie, trad. J. Derrida, Paris, Puf.

Seymour Papert, 1981, Jaillissement de l'esprit. Ordinateurs et apprentissage. Paris, Flammarion.

Jacques Pérès, 1984, Utilisation dœune théorie des situations en vue de lœidentification des phénomènes didactiques au cours dœune activité dœapprentissage scolaire - Construction dœun code de désignation dœobjets à lœécole maternelle, thèse Univ. Bordeaux, IREM Bordeaux.

Jacques Péres & alii, 1985, Construction et utilisation dœun code de désignation dœobjets à lœécole maternelle, IREM Bordeaux.

Harrisson Ratsimba-Rajohn, 1982, Éléments dœétude de deux méthodes de mesures rationnelles, Recherches en Didactique des mathématiques, n°3.1, Grenoble, La Pensée Sauvage.

Olivier Keller, 2004, Aux origines de la géométrie. Le paléolithique. Le mode des chasseurs cueilleurs, Vuibert.

Olivier Keller, 2006, La figure et le monde. Une archéologie de la géométrie. Peuples paysans sans écriture et premières civilisations, Vuibert.

Lerouge A. (2000) La notion de cadre de rationalité. A propos de la droite au collège. *Recherches en didactique des mathématiques* 20. 2, 171-208