



La rigueur informelle

Michel Bourdeau

► **To cite this version:**

Michel Bourdeau. La rigueur informelle. Jacqueline Boniface. Calculs et formes - De l'activité mathématique, Ellipses, 2003, 9782729815868. halshs-01907481

HAL Id: halshs-01907481

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-01907481>

Submitted on 29 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA RIGUEUR INFORMELLE

MICHEL BOURDEAU
CAMS-CNRS, PARIS

Les coupeurs de difficultés en quatre peuvent donc nous rendre un double service; c'est d'abord de nous apprendre à faire comme eux au besoin, mais c'est surtout de nous permettre de ne pas faire comme eux, sans rien sacrifier à la rigueur
Henri Poincaré : *L'avenir des mathématiques*, dans *Science et méthode*, p. 29

Si la rigueur formelle consiste à présenter des règles formelles puis à s'assurer qu'un raisonnement donné s'y conforme, il est clair que le travail qui précède la mise en forme n'en est pas pour autant livré à l'arbitraire et il semble donc qu'il y ait place pour une autre variété de rigueur, cette fois informelle. Les rapports du formel et de l'informel posent des difficultés notoires. Qu'on songe par exemple au grand débat qui au milieu du siècle dernier a opposé partisans du langage idéal et partisans du langage ordinaire, ou aux discussions à peu près contemporaines sur la nature et la légitimité de la reconstruction rationnelle¹. Les philosophes du langage idéal reconstruisent les notions communes dans des systèmes constructionnels, mais comment juger de la valeur de ces reconstructions, puisque, de part et d'autre, les notions ne sont pas homogènes : formelles d'un côté, informelles de l'autre ? C'est le paradoxe de l'analyse signalé par Moore et qui oblige, par exemple, à parler de thèse de Church et non de théorème dans la mesure où la proposition de ce dernier, précisément parce qu'elle identifie des notions hétérogènes, est par définition indémontrable.

L'idée de rigueur informelle est associée au nom de Georg Kreisel ([9], [10], [11]) et au combat qu'il a mené contre le formalisme hilbertien. Il est en effet traditionnel d'associer rigueur et forme. S'agissant des fondements des mathématiques, la meilleure, sinon la seule manière de procéder serait formelle. D'ailleurs, ne dit-on pas d'un raisonnement logique qu'il conclut *vi formae* ? De cette façon, les formalistes ont confisqué à leur profit l'idée de rigueur. Les notions intuitives étant peu fiables, il n'y aurait de salut que dans la formalisation. A quoi Kreisel objectait qu'il s'agissait là d'un préjugé tenace mais sans fondement et, de plus, dangereux en ce qu'il restreignait abusivement le champ des questions recevables. S'il est vrai qu'Hilbert aimait à se réclamer de Kant, on n'a pas manqué de signaler ce qu'il y avait de foncièrement positiviste en lui. Un des traits caractéristiques de sa doctrine était de transformer la question des fondements en une question interne, de façon à ôter aux philosophes tout droit de regard sur celle-ci pour en chercher la solution sur le terrain mathématique lui-même. Sans nier la fécondité de la discipline ainsi créée, il n'est, semble-t-il, ni possible ni même souhaitable d'évacuer ainsi les questions philosophiques. Bien plus, par son insistance sur le concret, par sa méfiance à l'égard de ces notions abstraites sur

¹ Voir par exemple Strawson [23], ainsi que les essais de la même époque de Dummett, repris au début de [4].

lesquelles Gödel en 1958 et déjà avant lui Gentzen devaient choisir de faire fond, ce positivisme peut être tenu pour responsable de l'étroitesse des méthodes autorisées par le point de vue finitiste, et partant de l'échec du programme initial.

Afin de réagir contre la tendance sans cesse renaissante à croire que le formalisme suffirait à résoudre la question des fondements, il apparaît souhaitable de dissocier rigueur et forme et de poser l'existence d'une rigueur informelle. Kreisel désignait par là l'analyse conceptuelle qui aboutit à la formalisation et en donnait comme exemple la façon dont Turing avait décomposé le calcul en ses étapes élémentaires, ou l'axiomatisation de la théorie des ensembles par Zermelo. Il entendait ainsi souligner l'intérêt de ce travail d'analyse conceptuelle qui mène des notions intuitives à leur mise en forme, et rappeler qu'il est aussi rigoureux que fécond.

Les pages qui suivent visent un double objectif. Présenter plus en détail les idées de Kreisel; en déplacer légèrement le point d'application, afin de pouvoir proposer comme exemple de rigueur informelle la façon dont chez Martin-Löf les explications de sens servent à justifier les lois logiques. Avant d'en venir là, il ne sera peut-être pas inutile de préciser la méthode et de s'expliquer sur quelques omissions. Ce qui retiendra l'attention, c'est moins le concept de rigueur informelle en lui-même que le travail du logicien ou du mathématicien où elle est à l'oeuvre.

Le concept de rigueur par exemple n'est philosophiquement guère productif. La littérature sur le sujet est quasi inexistante et sans grand intérêt. Non qu'il s'agisse d'une exigence secondaire. N'en déplaise à ceux pour qui «tout ce qui est rigoureux est insignifiant», il est difficile de faire passer le manque de rigueur pour une qualité, et ce n'est pas un hasard si le développement des mathématiques au XIX^{ème} siècle a été placé sous le signe d'une demande accrue de rigueur. Il ne suffit pas que «ça marche», encore faut-il savoir pourquoi. Le souci de rigueur va donc de pair avec la demande pour des fondements solides. Dans le conflit entre la puissance opératoire et la clarté conceptuelle, la demande de rigueur est incontestablement du côté de celle-ci.

L'étymologie associe rigueur et rigide. La rigueur est dure, à ce titre elle possède les deux propriétés de dureté, mais aussi de durée. Un raisonnement rigoureux «se tient», résiste victorieusement aux objections. C'est ainsi que la rigueur en est venue à servir d'image de la nécessité. Comme celle-ci, elle est inflexible, inexorable, contraignante : c'est ainsi et pas autrement; il n'y a pas d'échappatoire et on ne peut que s'y soumettre. On ne s'étonnera donc pas des liens privilégiés qu'elle entretient avec la logique. Quant aux liens, étroits eux aussi, qu'elle entretient avec l'idée de forme, on en trouve un exemple supplémentaire en morale. Il convient tout d'abord de noter que le logicien n'est pas seul à demander de la rigueur. Sur ce point, il s'accorde avec le moraliste, qui a coutume d'opposer rigorisme et laxisme; et Kant, après bien d'autres, est là pour nous rappeler qu'en morale comme en logique, rigorisme et formalisme vont main dans la main. Les attributs traditionnels de la justice évoquent eux aussi la rigueur : comme la pensée aveugle, elle a les yeux bandés, et la lame du glaive dont elle frappe est dure.

Les remarques de Wittgenstein sur «la dureté du 'tu dois' logique» peuvent être interprétées dans ce cadre. L'auteur des *Investigations philosophiques* veut nous libérer d'une fausse idée de la nécessité logique, qui lui attribue une rigueur particulière. En logique, tout serait donné d'un coup et c'est pourquoi la règle contiendrait déjà virtuellement la totalité de ses applications. A quoi Wittgenstein oppose qu'il y a toujours un saut entre la règle et son application. Invoquer une règle, même formelle, ne suffit donc pas à rendre compte de ce qu'il y a d'effectivement particulièrement rigoureux dans la contrainte logique. Déjà apparaît donc l'impossibilité de rendre compte de la rigueur logique à l'aide de la seule forme.

Le cas du concept de forme est quelque peu différent car on ne peut dire de lui qu'il soit philosophiquement secondaire. Pourtant il ne s'agira pas davantage de produire une théorie du formel et le lecteur est prié d'admettre que nous savons ce qu'il faut entendre par là — ce qui n'est manifestement pas vrai, puisque les diverses tentatives entreprises pour cerner la notion se sont heurtées à des difficultés en apparence insurmontables². Pour n'en signaler qu'une, il est clair par exemple que l'identification du formel au syntactique, qui se présente comme naturellement à l'esprit, est incompatible avec l'existence, aujourd'hui unanimement admise, d'une sémantique formelle — pour autant bien sûr qu'on suppose tout à fait étanche la frontière établie entre les deux disciplines.

Chez Kreisel le mot fonctionne dans un système de renvois qui sert à en préciser le sens. *Formel* signifie tout d'abord explicite. L'implicite étant une source perpétuelle d'équivoques et de malentendus, la formalisation vise cette *Lückenlosigkeit* dont parlait Frege dans la préface de *Idéographie*. Puisque la solidité d'une chaîne se mesure à celle du plus faible de ses maillons, il convient de ne rien laisser dans l'ombre. Le moindre détail, aussi insignifiant qu'il puisse paraître, demande à être scruté avec soin. La marche de la pensée se trouve ainsi mise à plat, décomposée en ses moindres pas. Corrélativement, l'informel sera alors associé à l'implicite. Il y a des choses qui vont sans dire et qui, n'en déplaise au dicton, ne vont pas mieux quand elles sont dites. La clarté est un juste mélange d'ombre et de lumière. Qui a cherché à se servir des manuels livrés avec certains logiciels a appris à ses dépens qu'à force de vouloir être explicites, ils en deviennent illisibles, et inutilisables. Tout se passe comme si leurs auteurs avaient tellement l'habitude de destiner leurs instructions à des machines qu'ils en étaient devenus incapables de s'adresser à un lecteur normalement constitué. A un moment où à un autre, il faut se fier au jugement de celui à qui l'on s'adresse. Faculté de subsumer sous des règles, c'est-à-dire de décider si quelque chose rentre ou non sous une règle donnée, le jugement est le caractère distinctif du bon sens et rien ne peut suppléer au manque de bon sens.

Il n'est toutefois pas nécessaire d'être formaliste pour reconnaître les vertus de l'explicite. Du formel comme explicite au formel comme mécanique, la transition est aisée et il est bien connu que c'est le travail accompli en logique entre les deux guerres qui a rendu possible l'apparition des ordinateurs. La possibilité de faire exécuter des calculs par une machine d'une part, le refus de s'en remettre à l'initiative, c'est-à-dire à l'intelligence, de l'exécutant et la volonté de lui «mâcher tout le travail» d'autre part, ne sont que les deux faces d'un seul et même phénomène. — Sous un troisième rapport, le formel est à l'informel comme le concret à l'abstrait. Hilbert a déplacé doublement le champ assigné par Kant à l'intuition. Il ne s'est pas contenté en effet de lui restituer au plan métamathématique les droits dont il l'avait privé dans la mathématique formelle. Le finitisme se caractérise par une méfiance vis à vis de l'abstrait, et par la décision de s'en tenir à ce qui est donné dans l'intuition, entendue cette fois comme intuition sensible, perception de traits tracés au tableau ou sur le papier. C'est pourquoi le mathématicien allemand pouvait résumer sa position par le fameux : *Am Anfang war das Zeichen*, au commencement était le signe.

Bien qu'ils laissent dans l'ombre maintes difficultés, ces quelques éclaircissements devraient suffire à faire comprendre les raisons pour lesquelles il est nécessaire de

² Une histoire du terme *langage formel*, ou *système formel*, ne manquerait pas d'être instructive. Quand est-il apparu, et où ? Comment son usage s'est-il imposé ? Church, dans son manuel de 1956, parle de langages formalisés, de systèmes logistiques, ou encore de calculs non interprétés, mais non de systèmes formels.

dissocier rigueur et forme. Une fois exposées plus en détail les idées de Kreisel, l'exemple de la théorie constructive des types apportera un nouvel éclairage sur l'idée de rigueur informelle.

* *
*

La théorie de la preuve suffirait déjà à se convaincre de l'existence d'une rigueur informelle. Le raisonnement métamathématique y est par définition distinct du raisonnement formel, et l'on ne voit pas qu'il soit pour autant moins rigoureux, la rigueur étant ici garantie par le refus de la machinerie infinitaire et la décision de s'en tenir à un point de vue finitiste, dont on a vu qu'il était trop étroit. Une autre objection tout à fait élémentaire contre l'assimilation du rigoureux au formel est fournie par le cas du connecteur *Tonk*. L'argument a pour cadre la déduction naturelle, dont il sera question plus loin. Pour le moment, il suffira donc de n'en retenir qu'un aspect, à savoir la décision de concentrer tout le pouvoir déductif dans les règles d'inférence, de façon à ne plus avoir besoin de recourir aux axiomes que les logiciens avaient introduits à l'exemple des mathématiciens. Dans certains systèmes, où la préférence était donnée à la maniabilité et non à la concision, chaque connecteur était caractérisé par un groupe d'axiomes qui lui était associé. Ainsi, pour la conjonction, on trouvait entre autres :

$$\vdash A \& B \square A \qquad \vdash A \& B \square B;$$

de même pour la disjonction :

$$\vdash A \square A \vee B \qquad \vdash B \square A \vee B.$$

Gentzen, le premier, a vu qu'à bien des égards il était avantageux de réécrire cela non sous forme de proposition mais de règle de déduction. Dans le premier cas, on obtient deux règles d'élimination (r_e) :

$$\frac{A \& B}{A} \&_{e1} \qquad \frac{A \& B}{B} \&_{e2}$$

disant que si on a $A \& B$, alors on a A ($\&_{e1}$) tout comme on a aussi B ($\&_{e2}$). De même, pour la disjonction, on a deux règles d'introduction (r_i) :

$$\frac{A}{A \vee B} \vee_{i1} \qquad \frac{B}{A \vee B} \vee_{i2}$$

disant que, quand on a A (\vee_{i1}), tout comme quand on a B (\vee_{i2}), on a aussi $A \vee B$. Prior [1960] a montré que le logicien n'était pas libre d'inventer à sa guise des constantes logiques, et que l'usage de ces règles formelles était soumis à un certain nombre de contraintes. Soit en effet un connecteur, *Tonk*, qui posséderait les règles d'introduction du \vee et les règles d'élimination du $\&$. Trois lignes suffisent alors à montrer que n'importe quoi se déduit de n'importe quoi.

$$\frac{\frac{A}{A \text{ Tonk } B} \text{Tonk}_i}{B} \text{Tonk}_e \qquad \frac{\frac{B}{A \text{ Tonk } B} \text{Tonk}_i}{A} \text{Tonk}_e$$

ce qui entraîne immédiatement que deux propositions quelconques sont toujours équivalentes.

Deux conclusions se dégagent de l'argument : il est nécessaire de dissocier rigueur et forme, puisqu'un raisonnement formellement impeccable, parfaitement explicite, doit pourtant être rejeté comme illogique. Mais le connecteur *Tonk* pose un problème plus général, que l'on retrouvera également par la suite, celui de la justification de la déduction, ou encore de la justification des lois logiques³.

Les exemples de Kreisel. Kreisel n'a jamais présenté son idée de rigueur informelle comme particulièrement originale. Bien au contraire, il avait conscience de s'inscrire dans la tradition la plus classique, qui n'avait jamais nié la nécessité de travailler sur les notions intuitives afin d'en préciser les contours et d'en éliminer les aspects problématiques. Deux exemples, concernant l'un le concept cumulatif — ou itératif — d'ensemble, l'autre la thèse de Church, aideront à mieux comprendre la façon dont il proposait de penser le rapport de la pratique mathématique à la théorie logique⁴.

Des différentes parades proposées pour échapper aux antinomies surgies autour de 1900 dans la théorie des ensembles, la plus populaire, pour ne pas dire la seule reçue parmi les mathématiciens, a consisté à suivre les voies de l'axiomatisation. Dès 1908 Zermelo proposait un système d'axiomes qui, modifié en 1922 par Fraenkel (d'où l'abréviation ZF sous laquelle il est connu), reste cent ans plus tard l'un des plus volontiers utilisés. Quant à la question de savoir comment Zermelo a découvert ses axiomes, elle est d'ordinaire abandonnée à l'historien, quand on ne lui accorde pas un intérêt purement anecdotique. D'une théorie comme la théorie des ensembles, il n'y aurait donc que deux approches possibles : l'exposé axiomatique ou l'histoire. Pour voir ce que l'alternative a de trompeur, il suffit pourtant de se demander : qu'est ce qui a été axiomatisé par Zermelo ? Il apparaît alors qu'entre les écrits de Cantor et les axiomes tels qu'ils figurent dans les traités se situe toute une réflexion, le plus souvent passée sous silence, qui a permis de dégager comme une vision de l'univers ensembliste qui sert de base à l'axiomatique. Zermelo ne s'est pas contenté de changer le mode d'exposition d'une théorie qui aurait déjà été fixée au préalable : il a remplacé la notion naïve d'ensemble qui s'était révélée inconsistante, par la notion itérative, et c'est sur le travail conceptuel qui permet de passer de l'une à l'autre que Kreisel veut attirer l'attention lorsqu'il parle de rigueur informelle.

La notion d'ensemble telle qu'elle se présentait à la fin du dix-neuvième siècle résultait du mélange de composantes hétérogènes. Dans son sens le plus usuel, c'est-à-dire entendue comme collection, agrégat, elle avait trouvé une première codification dans l'algèbre des classes que Peirce et Schröder avait développée à la suite de Boole, et où les opérations ensemblistes d'union, d'intersection, de complémentation ou d'inclusion avaient été définies et étudiées. Cantor avait bien vu que le concept d'univers du discours, sur lequel reposait ce calcul, avait grand besoin d'être précisé mais il s'agissait avant tout pour lui de traiter de l'infini, problème étranger à la perspective des logiciens. La création cantorienne reposait sur d'autres opérations fondamentales : le produit cartésien $A \times B$ et l'ensemble des fonctions de A dans B , B^A . A la même époque,

³ Cf. M. Dummett : *The Justification of Deduction*, dans [4], p. 290-319, ainsi que [5], p. 245-300.

⁴ Si, comme y invite St. Shapiro ([22]), il est possible de voir dans les idées de Kreisel un plaidoyer en faveur du second ordre, il ne faut pas perdre de vue qu'il se proposait avant tout de combattre le formalisme et d'attirer l'attention sur la question des rapports du formel et de l'informel.

Frege concevait l'ensemble comme le corrélat intensionnel de la notion de propriété; proposition qui, si elle avait l'avantage de la précision, devait s'avérer fatale puisque la loi V des *Grundgesetze*, qui pose qu'à tout concept correspond un objet — nous dirions aujourd'hui : à toute propriété correspond un ensemble —, mène directement au paradoxe de Russell. Il fallait donc abandonner l'axiome de compréhension, ou du moins le restreindre, à la façon de l'*axiome de Séparation*, de Zermelo, qui permet, si un ensemble est déjà donné, de former le sous-ensemble de ses éléments qui satisfont une propriété donnée. De la même façon, les autres axiomes de ZF sont autant de façons de former les ensembles dont on a besoin, sans recourir à un principe général qui s'était révélé trop puissant.

A s'en tenir là on laisserait toutefois dans l'ombre l'idée directrice qui a guidé Zermelo dans son travail : les ensembles sont obtenus par itération de l'opération «ensemble de». L'image qui en résulte est celle d'une hiérarchie, d'une superposition d'étages, où chaque degré est bâti à partir des précédents, comme un cône qui s'élargit à mesure que l'on monte. La hiérarchie cumulative, V , est alors définie, à l'aide des ordinaux, par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} V_0 &= \emptyset \\ V_{\alpha+1} &= P(V_\alpha) \\ V_\beta &= \approx_{\alpha < \beta} V_\alpha && \text{(Pour } \beta \text{ ordinal limite}^5) \\ V &= \approx_\alpha V_\alpha \text{ }^6. \end{aligned}$$

Alors que le rôle joué par la structure cumulative dans l'axiomatisation de Zermelo n'a plus besoin d'être souligné, le second exemple de rigueur informelle reste encore controversé. Il concerne la proposition faite par Church en 1936 d'identifier les deux notions de fonction effectivement calculable et de fonction récursive. Gödel avait eu la même idée, mais s'était abstenu d'en faire état, la considérant comme prématurée tant qu'elle ne s'appuierait pas sur une analyse plus poussée de la notion usuelle de calculabilité, comme celle que Turing devait fournir quelques années plus tard. Il est clair que la thèse de Church n'est pas du même ordre que la triple équivalence démontrée à la même époque entre les différentes formalisations de l'idée intuitive de calcul (λ calcul, machine de Turing et fonction récursive). D'un côté, un véritable théorème, portant sur des notions homogènes, mathématiques, parfaitement définies; de l'autre, une simple thèse, reliant des notions hétérogènes et n'admettant pas pour cette raison de démonstration proprement dite.

En tant qu'elle intéresse le rapport du formel et de l'informel, la thèse de Church fournit un excellent exemple de rigueur informelle; mais encore faut-il s'entendre sur son statut⁷. Son auteur y voyait semble-t-il une définition, ce qui lui ôterait le plus clair de son intérêt, puisque cette façon de voir ne la met à l'abri des réfutations qu'en la privant de tout contenu réel. Il paraît donc préférable d'y voir une authentique thèse, c'est-à-dire une proposition susceptible d'être confirmée ou infirmée. Si en effet la récursivité est bien l'équivalent formel de la calculabilité, alors la théorie des fonctions récursives est, dans l'histoire des mathématiques, un événement dont l'importance est comparable à celle de la formulation du concept de nombre naturel. A cet égard, la triple équivalence mentionnée à l'instant fournit un argument fort en faveur de la thèse de Church puisqu'elle nous assure que nous nous trouvons là, situation rare en logique, en

⁵ C'est-à-dire différent de zéro et sans prédécesseur immédiat.

⁶ Voir par exemple [12] p. 51; ou encore [1].

⁷ Outre le numéro spécial du *Notre Dame Journal of Formal Logic*, où est paru [11], on se reportera à [15] p. 101-124, ainsi qu'à [26].

présence d'une notion absolue, en ce sens qu'elle ne dépend pas du langage dans lequel elle est formulée.

D'un point de vue intuitionniste, la thèse de Church ne va cependant pas sans problème. La théorie de la calculabilité ayant été développée dans le cadre de la logique classique, la question de son rapport à l'intuitionnisme demande à être posée. Les disciples de Brouwer exigent d'une preuve qu'elle soit constructive, mais qu'est-ce à dire ? Peut-on identifier sans plus le constructif à l'effectivement calculable ? auquel cas la thèse de Church aurait pour conséquence : *toute fonction constructive est récursive*. Kleene avait proposé de formaliser le raisonnement intuitionniste dans ce qu'on a appelé la *réalisabilité récursive*. La thèse de Church y est valide, mais ce résultat se prête à deux interprétations, et l'on peut aussi en conclure que de tels systèmes ne traduisent pas fidèlement le sens intuitionniste des constantes logiques. La thèse de Church ne vaut que pour les suites de choix *régulières*; appliquée aux suites de choix *libres*, elle entre en conflit avec un des principes centraux des mathématiques intuitionnistes, le principe de continuité⁸. Mais, considérée du point de vue de la rigueur informelle, le problème est ailleurs. Si celle-ci caractérise le travail conceptuel qui permet de passer d'une notion commune à sa formalisation, alors il n'est pas sûr que la thèse de Church en relève de droit, car les premières théories de la calculabilité ne sont pas nées d'un semblable travail d'analyse. Aucune notion intuitive ne correspondait ni au projet de la définissabilité équationnelle connue sous le nom de Herbrand-Gödel récursivité, ni au lambda calcul et il a fallu attendre pour cela le travail de Turing. Kreisel oppose à ce propos deux styles de développement des théories mathématiques, illustrés respectivement par la théorie des probabilités et la logique des propositions. La première procède par extensions successives, d'une simple théorie des jeux de hasard à une composante essentielle de la description du monde physique. La seconde suit une marche inverse : présentée comme une théorie des lois de la pensée, elle n'est plus pour nous qu'une forme rudimentaire d'algèbre. Pour Kreisel, il ne fait pas de doute que la thèse de Church, dans sa forme originare à tout le moins, appartient à cette seconde tradition.

* *
*

De Kreisel à Martin-Löf. La théorie constructive des types permet d'ajouter un nouvel exemple à ceux déjà fournis par Kreisel; elle permet surtout de revenir sur l'idée de rigueur informelle pour en modifier quelque peu les contours. De la théorie des ensembles ou de la calculabilité aux règles de déduction naturelle, ce n'est pas seulement le champ d'application qui change, c'est aussi la nature et les buts de l'analyse conceptuelle : il ne s'agit plus de formuler de nouveaux axiomes ou une thèse, mais de dégager un sens déjà donné dans nos pratiques inférentielles et, dans la mesure où il s'agit de notions simples, il n'est pas même sûr que l'on puisse véritablement parler d'analyse. Preuve de l'existence de ces changements, l'expression *rigueur informelle* n'apparaît nulle part chez Martin-Löf : son travail est pensé en d'autres termes, comme relevant d'une théorie du sens, mais on peut encore y voir une problématique des fondements, visant à justifier les règles d'inférence. Le titre donné

⁸ Une suite de choix est dite *régulière* (*lawlike*) si elle est engendrée par une loi; mais l'ensemble de ces suites, et donc des nombres réels qu'elles engendrent, reste dénombrable. Pour reconstruire le continu, Brouwer a donc proposé un autre type de suite de choix, dit *suite de choix libre*.

par le mathématicien suédois aux conférences prononcées à Sienne en 1983 est très explicite à cet égard : *le sens des constantes logiques et la justification des lois logiques*. Les deux sujets mentionnés s'inscrivent dans une histoire qui remonte au moins à Heyting et dont nous aurons à rappeler quelques épisodes. Très tôt, ils sont apparus étroitement liés. Gentzen en effet nous a appris que l'appareil inférentiel de la logique se laisse tout entier représenter par un ensemble de règles d'introduction et d'élimination associées à chacune des constantes logiques. Pour justifier la règle d'introduction et d'élimination de la conjonction, par exemple, il suffira de montrer comment elles sont conformes au sens que les logiciens attribuent au *et*. Les deux thèmes n'en restent pas moins distincts. Alors que le premier renvoie à un travail sémantique d'interprétation, appliqué au cas particulier du vocabulaire logique, le second, en apparence du moins, pointe dans une autre direction. De ce que les lois logiques sont des règles de déduction, il ne s'ensuit pas cependant que le problème de leur justification se confonde avec le problème de la justification de la déduction. Tel que le conçoit Dummett, celui-ci est beaucoup plus vaste et ne concerne qu'indirectement le sens des constantes logiques puisqu'il part cette fois d'une difficulté bien connue : comment rendre compte de la déduction sans faire appel à des arguments où interviennent les raisonnements qu'il s'agit précisément de justifier ? Et c'est pour échapper à ce reproche de circularité que la théorie du sens proposée par le philosophe anglais n'est ni atomiste ni holiste mais moléculaire. Dans ces conditions, pourquoi parler de rigueur informelle, demandera-t-on ? La réponse est double : d'une part, ces analyses sont assez remarquables pour mériter d'être reprises, et il peut alors être éclairant de les examiner d'un autre point de vue que celui initialement choisi. D'autre part il y a de bonnes raisons de penser que, loin de trahir la pensée de Kreisel, les quelques modifications qu'il faut y apporter ne font qu'en souligner davantage l'intérêt. En particulier, les explications de sens ont un rapport manifeste à l'analyse conceptuelle puisque, sous l'effet du tournant linguistique, une bonne partie de la doctrine traditionnelle du concept est maintenant prise en charge par la sémantique.

Rappelons tout d'abord dans quel état Martin-Löf a trouvé la question du sens des constantes logiques. Il a déjà été indiqué plus haut comment une nouvelle conception des règles d'inférence avait permis à Gentzen de faire en logique l'économie de tout système d'axiomes : il suffisait pour cela d'associer à chaque constante logique deux sortes de règles servant l'une à l'introduction l'autre à l'élimination de ladite constante. Mais l'inventeur de la déduction naturelle ne s'en tenait pas là et en profitait pour se livrer à des considérations sémantiques : « les introductions représentent pour ainsi dire la "définition" des signes qu'elles concernent, et les éliminations ne sont en dernière analyse que des conséquences de ces définitions » ([6] p. 27). Une difficulté ne devait pourtant pas tarder à apparaître. Dans cette interprétation, la définition de la conditionnelle est imprédicative⁹ : pour définir ce qu'est une preuve de $A \square B$, on suppose donnée une preuve B à partir de A , laquelle preuve étant quelconque par hypothèse, peut fort bien contenir à son tour une conditionnelle. Il devient du même coup circulaire de justifier les règles de la conditionnelle sur la base de cette

⁹ Rappelons qu'une définition imprédicative est celle qui, pour définir un élément d'une classe, suppose la classe donnée au préalable dans sa totalité. Poincaré, qui a introduit la notion, y voyait la source des paradoxes et proposait en conséquence de proscrire ce mode de définition.

interprétation puisque cela reviendrait, pour justifier une inférence, à supposer que ces inférences sont déjà valides¹⁰.

Si l'on veut bien réserver ce cas litigieux de la conditionnelle, et celui de la négation qui l'est encore d'avantage, Gentzen croyait pouvoir constater que, sur la question de savoir quel sens il convient de donner aux différentes constantes, le point de vue finitiste adopté dans l'école de Hilbert s'accordait avec celui des intuitionnistes ([7] p. 324). Pour un intuitionniste, on le sait, je ne suis autorisé à dire *cette proposition est vraie* que si j'en ai une preuve. Partant de ce principe Heyting, dans sa formalisation de la logique intuitionniste, avait développé une interprétation des constantes logiques qui, parce qu'elle est donnée en termes de preuve, a parfois été appelée *proof-theoretical*¹¹. Affirmer $A \& B$ par exemple, c'est affirmer qu'on possède une preuve de A et une preuve de B . Si a est la preuve de A et b celle de B , ce qu'on notera respectivement $a:A$ et $b:B$, la règle d'introduction de la conjonction s'écrira :

$$\frac{a : A \quad b : B}{(a, b) : A \& B}$$

où (a, b) est la paire composée de a et de b .

Mais reproduire fidèlement la marche du raisonnement est une chose, faciliter les raisonnements métamathématiques en est une autre. C'est ainsi qu'en dépit de leur élégance les systèmes de déduction naturelle furent délaissés par leur inventeur au profit d'un autre formalisme, le calcul des séquents, moins facile à manier, mais mieux adapté aux fins assignées par Hilbert à la théorie de la démonstration. Dans ses *Recherches* de 1934, Gentzen établissait un théorème fondamental, connu sous le nom de *théorème d'élimination des coupures*, qui devait effectivement révolutionner la théorie de la preuve puisqu'en garantissant l'existence de démonstration sans coupure, c'est à-dire sans détour, il permettait de mettre en quelque sorte sous forme normale une démonstration donnée. Mais ce résultat ne vaut que du calcul des séquents et il fallut attendre la thèse de Dag Prawitz ([17]) pour obtenir, en déduction naturelle, un résultat équivalent, connu cette fois sous le nom de *normalisation des preuves*. Depuis lors, la déduction naturelle a trouvé sa place en métamathématique aux côtés du calcul des séquents.

Au centre des travaux de Prawitz se trouve un *principe d'inversion* qui se situe dans le prolongement direct des remarques de Gentzen citées plus haut sur le rapport entre règles de déduction naturelle et sens des constantes logiques. Pour le logicien suédois, son prédécesseur avait été guidé par deux idées : toute inférence se laisse décomposer en une suite d'applications de règles d'introduction et d'élimination; dans la mesure où elles stipulent les formes que doivent prendre les preuves des différentes propositions, les règles d'introduction donnent le sens des constantes logiques et, à ce titre, peuvent être considérées comme justifiant les règles d'élimination. Le mérite de Prawitz est alors d'avoir vu que le rapport ainsi posé entre les deux sortes de règles rend possible une normalisation des preuves qui est à la déduction naturelle ce que l'élimination des coupures est au calcul des séquents¹².

Le principe d'inversion repose sur un constat : une règle d'élimination n'est que l'inverse de la règle d'introduction correspondante. Appelons *prémisse majeure* d'une

¹⁰ [7] p. 323; cf. également [16], qui note que la solution proposée par Dummett, au § 7.2 de ses *Elements of Intuitionism*, ne résout pas la difficulté.

¹¹ Cf. [13] et [24].

¹² Cf. [19], p. 159-60.

élimination celle qui contient le signe à éliminer : dans le *modus ponens* qui, de $A \supset B$ et A , conclut B , la prémisses majeure sera $A \supset B$. Il est facile de voir qu'une application d'une règle d'élimination ne fait que restaurer ce qui était déjà établi quand la prémisses majeure a été obtenue par une application d'une règle d'introduction. En d'autres termes, il ne sert à rien d'obtenir une conclusion par une règle d'introduction, pour l'utiliser aussitôt comme prémisses majeure d'une règle d'élimination. D'où un :

Théorème d'inversion : Si $\Gamma \vdash A$, alors il existe une démonstration de A à partir de Γ dans laquelle aucune occurrence de formule n'est à la fois la conséquence d'une application d'une règle d'introduction et la prémisses majeure d'une application d'une règle d'introduction ([17] p. 33-4).

Comme le théorème d'élimination des coupures, le théorème d'inversion affirme l'existence de démonstration *sans détour*, le détour consistant ici à introduire une constante logique pour l'éliminer aussitôt après. Pour le démontrer, on montre qu'associé à chaque constante, il existe un *pas de réduction* permettant de transformer une déduction où une règle d'introduction est aussitôt suivie d'une règle d'élimination correspondante en une autre déduction où ce détour a disparu.

L'exemple le plus éclairant est sans doute celui de la conditionnelle. Si, sous l'hypothèse d'une preuve de A (ce qu'on exprimera en mettant A entre crochets), on sait construire une preuve D_2 de B , la règle d'introduction de la conditionnelle permet de conclure $A \supset B$; si en outre on dispose d'une preuve D_1 de A , alors le *modus ponens* permet d'éliminer le fer à cheval qui vient d'être introduit pour en détacher le conséquent et affirmer B . Mais pourquoi continuer à supposer une hypothétique preuve de A , une fois qu'on a appris qu'on en dispose effectivement. Il est donc inutile de faire intervenir une conditionnelle puisqu'il suffit de mettre bout à bout la preuve D_1 supposée donnée de A puis celle de D_2 qui mène de A à B pour obtenir directement B . Bref

$$\begin{array}{ccc}
 D_1 & & \\
 & [A] & \\
 & D_2 & \\
 & B & \\
 A & \frac{A \supset B}{B} & \text{se réduit à} \\
 \hline
 & B & \\
 & & D_1 \\
 & & A \\
 & & D_2 \\
 & & B
 \end{array}$$

Il est alors possible de retrouver dans le cas de la déduction naturelle certains des résultats les plus féconds obtenus pour le calcul des séquents. Les dérivations normales possèdent en effet des propriétés structurales remarquables, — d'où le nom de *théorie structurale de la preuve* donné à ce type d'enquête, pour le distinguer de la théorie réductrice, qu'on pourrait encore appeler fondationnelle, caractéristique du programme de Hilbert¹³. On a par exemple la propriété de la sous-formule : la démonstration de A procède à la façon d'une construction puisque toutes les formules qui figurent au dessus de A sont des sous-formules de A , ce qui autorise à parler de méthode synthétique. On a également la consistance puisqu'il est aisé de montrer qu'à supposer une preuve de l'absurdité, il serait impossible de la mettre sous forme normale. Un des plus grands mérites de Prawitz reste cependant d'avoir définitivement imposé une distinction

¹³ Sur cette distinction, voir par exemple [18], p. 236-39.

aujourd'hui tout à fait fondamentale entre deux types de preuve : les preuves normales et les autres, les preuves canoniques et les non-canoniques.

La théorie constructive des types. Les aspects techniques : l'isomorphisme de Curry-Howard. L'oeuvre de Martin-Löf, du moins l'aspect qui nous occupe ici, se situe dans le prolongement immédiat de ces travaux, qu'elle poursuit dans une double direction. — Tout d'abord, l'idée de preuve objet vient enrichir notre conception de la preuve. Déjà Prawitz avait introduit dans le symbolisme une notation spéciale (D_1, D_2, \dots) pour les preuves, et les règles de réduction incluaient des manipulations sur ces nouveaux objets, mais ces opérations restaient naïves et ne se prêtaient pas à un calcul. Rétrospectivement, ce qui manquait, c'était l'isomorphisme de Curry-Howard, le principe de la proposition comme type, qu'il serait tout aussi juste d'appeler *principe de la preuve comme objet*¹⁴. Désormais, les preuves ont changé de statut : elles sont conçues non seulement comme des objets mathématiques, au même titre qu'une droite, un nombre ou une fonction, mais encore comme des lambda termes, ce qui permet d'exploiter toutes les ressources des théories de la calculabilité. De cette façon, l'isomorphisme de Curry-Howard se trouve depuis plus de vingt ans au centre de l'informatique théorique, la théorie constructive des types pouvant par exemple être utilisée comme un langage de programmation fonctionnelle analogue au langage ML. Puisqu'il est hors de question de donner une présentation, même sommaire, de l'isomorphisme de Curry-Howard, il faudra se contenter de deux remarques. En premier lieu, il devient possible de réécrire les pas de réduction sous forme de règles d'égalité entre les lambda termes qui codent maintenant les démonstrations. Dans le cas de la conjonction, et en reprenant la notation déjà introduite où les deux points, «:», se lisent : *est une preuve de ...*, on aura d'abord les deux règles d'élimination (c , étant la preuve d'une conjonction, est par définition une paire; p et q sont alors la première et la seconde projection de cette paire) :

$$\frac{c: A \& B}{p(c): A} \qquad \frac{c: A \& B}{q(c): B}$$

Les deux règles d'égalité sont alors :

$$\frac{a: A \quad b: B}{p(a, b) = a: A} \qquad \frac{a: A \quad b: B}{q(a, b) = b: B}$$

En second lieu, on ne perdra pas de vue qu'il existe plusieurs façons de comprendre le fait que D est une démonstration de A si et seulement si $f(D)$, le terme associé à D , a le type $F(A)$ associé à la proposition A ; et en particulier que tout le monde n'a pas adopté la position de Martin-Löf, qui est aussi celle de de Bruijn, laquelle se caractérise par la décision d'y voir une raison supplémentaire d'abolir la distinction entre le langage des propositions et le langage des preuves.

Les aspects philosophiques : la sémantique informelle et la distinction entre les aspects épistémologiques et non épistémologiques de la logique. Telle qu'elle vient d'être présentée, la notion d'objet preuve renvoie à la théorie de la calculabilité et ce n'est pas de ce côté qu'il faut chercher la rigueur informelle. La théorie constructive des types se

¹⁴ Cf. [3]; de Bruijn a joué un rôle assez important pour que certains estiment plus juste de parler d'isomorphisme de Curry-Howard-de Bruijn.

distingue par la façon dont elle unifie deux lignes de recherche qui s'étaient développées indépendamment l'une de l'autre : au plan technique, l'isomorphisme de Curry-Howard, à un plan beaucoup plus général, la réflexion menée par les intuitionnistes sur le sens des constantes logiques. C'est par là que Martin-Löf prolonge directement les travaux de Gentzen et de Prawitz. Déjà ses prédécesseurs avaient dégagé les principes d'une sémantique informelle et en avaient tiré les premières conséquences; mais ils s'en tenaient le plus souvent à de brèves remarques, que le mathématicien suédois inscrit dans un cadre beaucoup plus vaste, où elles acquièrent une tout autre portée.

Il est notamment incontestable que, comme chez Kreisel, ce travail est pensé comme une critique du formalisme. A ce propos, il convient de commencer par écarter un malentendu possible. Martin-Löf n'est absolument pas un adversaire de la formalisation; bien au contraire, depuis 30 ans, ses efforts visent à confectionner un langage formel où puisse s'exprimer l'essentiel de la pratique mathématique et qui permettrait de mettre fin à l'actuelle «Babel des langues artificielles». Loin d'être évacuée, la formalisation a donc sa place; mais précisément, au lieu d'être surévaluée, elle est remise à sa place et ne dispense pas d'un travail d'un autre ordre, portant directement sur les concepts. Il en résulte un remise en cause de l'orthodoxie logique actuelle, qu'elle s'inspire de Tarski ou de Hilbert, et un retour au point de vue de Frege ou de Russell, plus satisfaisant, ou à tout le moins plus familier, pour un philosophe.

Dans le cas de la théorie de la démonstration, la décision de traiter la preuve comme un objet s'accompagnait, on l'a vu, du refus du métalangage. Dans le cas de la sémantique formelle, on oublie trop souvent que ce qui est présenté comme un travail d'interprétation, comme la mise en rapport du langage et du monde, n'est en fait qu'une traduction d'un langage dans un autre censé être déjà connu (par exemple, du langage de la logique dans celui de la théorie des ensembles), de sorte qu'on ne sort jamais du langage et que le lien attendu avec la réalité n'est en fait jamais établi. Il est clair qu'un tel procédé ne peut pas être poursuivi indéfiniment et que pour expliquer le sens il faut, à un moment ou à un autre, recourir à une tout autre méthode, de nature cette fois plus philosophique. Au lieu d'un système formel dont l'interprétation est donnée après coup, la construction de la sémantique est étroitement associée à celle de la syntaxe, le sens de chaque symbole étant expliqué au fur et à mesure qu'il est introduit. Si par méthode formelle on entend celle qui conclut *vi formae*, cette méthode syntactico-sémantique n'est pas seulement formelle, mais aussi contentuelle : elle conclut *ex vi terminorum*. La forme est là, mais douée de contenu. C'est de cette façon que l'on s'assure du sens des termes primitifs, et donc de la vérité des propositions primitives, puisque celles-ci sont vraies en vertu du sens des termes.

Pour comprendre le rapport existant entre constantes logiques et règles d'inférence, il y a lieu tout d'abord de bien voir que les premières opèrent sur des propositions, alors que les secondes font intervenir les jugements; qu'il y a lieu, en d'autres termes, de réintroduire une distinction tenue aujourd'hui pour désuète ou, si l'on préfère, de séparer les aspects épistémologiques et non épistémologiques de la logique¹⁵. L'archi-réaliste qu'était Frege l'admettait sans peine, lui qui distinguait soigneusement la pensée, simple saisie d'une proposition, du jugement, reconnaissance de la vérité de cette proposition. Aller de la proposition au jugement, disait-il, c'est aller du sens à la vérité. Le *turnstile*, \vdash , aujourd'hui prédicat métalinguistique signifiant *être un théorème*, avait été conçu initialement comme résultant de la combinaison d'un trait

¹⁵ Cf. [25].

horizontal, la «barre de contenu», et d'un trait vertical pouvant éventuellement le compléter, la «barre de jugement».

Puisqu'un raisonnement est dit valide s'il transmet à la conclusion la vérité des prémisses, les lois logiques portent sur des jugements et non sur de simples propositions. Mais le respect de l'ordre de priorité conceptuelle et la volonté d'être explicite amènent la théorie constructive des types à poser comme première forme de jugement :

A prop,

qui reconnaît une expression comme formant une proposition, et où l'on peut voir l'équivalent du «contenu» frégéen : $\text{— } A$. Il est alors possible d'introduire une seconde forme de jugement :

A vrai,

qui reconnaît une proposition comme vraie, et qu'on note parfois : $\text{— } A$, *A vrai* étant obtenu de $a : A$ par occultation de l'objet preuve.

La première forme de jugement amène encore à écrire dans le format des règles d'inférence ce qui figure d'ordinaire comme une des clauses de la définition inductive des expressions bien formées (alors que les expressions bien formées forment un ensemble, les propositions ne forment qu'un type). A chaque constante sera ainsi associée une règle de formation; par exemple, pour la conjonction :

$$\frac{A \text{ prop} \quad B \text{ prop}}{A \& B \text{ prop}}$$

Au lieu des deux règles usuelles, il y en a maintenant quatre, puisque sont venues s'ajouter les règles de formation et d'égalité. Il est même possible de concevoir les règles d'introduction comme des règles de formation, puisqu'elles disent comment sont formés les objets preuves canoniques.

Le rapport, établi par Gentzen et précisé par Prawitz, entre règles d'introduction et d'élimination est conservé : les premières donnent le sens des constantes logiques et, ce faisant, justifient les secondes. Mais la présence des objets preuves et des règles d'égalité permet d'apporter des éclaircissements supplémentaires. Du point de vue technique tout d'abord, quand la proposition est conçue comme un type, — ou plutôt comme un ensemble, puisque, pour un intuitionniste, la proposition est l'ensemble de ses preuves¹⁶ — , les preuves canoniques deviennent des éléments canoniques de

¹⁶ Cent ans après son introduction par Russell, qui y voyait «le domaine de signifiante d'une fonction propositionnelle», il n'y a toujours pas de consensus sur le statut exact de la notion de type qui renvoie d'un côté à celle d'ensemble, de l'autre à celle de catégorie, au sens philosophico-grammatical du mot. L'usage qui en est fait dans la grammaire de Montague donne une assez bonne image de la situation. A chaque expression signifiante est associé un *type*, ce qu'on aurait appelé autrefois une *partie du discours* et qu'on préfère appeler aujourd'hui une *catégorie* ou *catégorie syntactique*. A chaque type est associé un *ensemble de dénnotations possibles*, ce que Russell appelait *type* et que d'autres appellent *catégorie sémantique*.

Per Martin-Löf distingue soigneusement ces deux composantes de la notion de type et parle pour cette raison du principe de la proposition comme ensemble et non, comme c'est le plus souvent le cas, du principe de la formule comme type. D'un point de vue constructif, pour être autorisé à parler d'un ensemble, il faut pouvoir préciser comment en sont formés les éléments; cette exigence ne s'applique pas aux catégories, où il suffit de pouvoir expliquer ce qu'est un objet d'une catégorie donnée.

l'ensemble, qui sont formés par des *constructeurs*. De même, les règles d'élimination montrent comment sur cet ensemble définir des fonctions, ou *sélecteurs* : par exemple, le produit cartésien a pour constructeur la paire, et pour sélecteurs les deux projections gauche et droite. Les règles d'égalité relient alors constructeurs et sélecteurs, introduction et élimination, puisqu'elles montrent comment les fonctions définies par les règles d'élimination opèrent sur les éléments canoniques engendrés par les règles d'introduction; à ce titre, elles peuvent aussi être considérées comme une autre façon de justifier les règles d'élimination (Cf. [14] p. 24 et [21] p. 42).

Du point de vue philosophique, l'aspect épistémique de la logique passe au premier plan et le caractère linguistique des explications de sens s'estompe au profit d'une théorie de l'évidence beaucoup plus proche de la phénoménologie que de l'actuelle philosophie de l'esprit d'inspiration analytique. Les règles opérant sur des jugements, la justification s'effectue au plan épistémique, puisqu'elle stipule ce qu'il faut *savoir* pour être autorisé à inférer. De surcroît, introduction et élimination constituant des inférences élémentaires, immédiates, celles dans lesquelles toutes les autres sont analysables sans qu'elles soient elles-mêmes susceptibles d'analyse, leur justification ne saurait être de l'ordre de l'inférence mais repose sur le sens des termes : quand on comprend les prémisses et qu'on les sait vraies, alors la vérité de la conclusion est immédiate, évidente. Dans ce contexte, il semble même inapproprié de parler d'analyse.

Cet appel à l'évidence indique qu'il y a là plus qu'un simple passage de la philosophie du langage à la philosophie de l'esprit. Ce qui est donné comme explication de sens s'appuie en fait sur une intuition des essences. Quine fondait sa critique de la théorie de la signification sur celle de l'essentialisme : le sens, disait-il, n'est rien d'autre que l'essence, une fois celle-ci séparée de l'objet et rattachée au mot. Il n'y a donc rien d'étonnant si, quand la philosophie du langage cède le pas à la philosophie de l'esprit, le sens reconduit à l'essence. Avec la méthode syntactico-sémantique pratiquée par Martin-Löf, la rigueur informelle, sans cesser d'être clarification conceptuelle, se rapproche de la réduction eidétique chère aux phénoménologues.

* *
*

De ce qui précède, on retiendra la critique d'une conception courante du formalisme. Ceux que Poincaré appelle «les coupeurs de difficulté en quatre» aimeraient nous faire croire qu'ils ont le monopole de la rigueur. Pourtant, de même qu'on peut être rigoureux sans être rigoriste, on peut être pour la formalisation sans être formaliste. Quelle que soit la force des liens qui unissent rigueur et forme, ou plutôt en raison même de ces liens, il importe de maintenir distinctes les deux notions et de faire une place à la rigueur informelle.

On pourra nous reprocher de n'avoir fait qu'enfoncer une porte ouverte et d'atteindre moins le formalisme lui-même qu'une de ses caricatures. De fait, pour le métamathématicien, la formalisation n'a jamais représenté une fin en soi et il sait bien que le véritable travail de justification revient à un raisonnement intuitif, doué de contenu. Cela n'autorise pas cependant à oublier que la popularité du formalisme est en bonne partie indépendante du programme de Hilbert et doit beaucoup à un positivisme de mauvais aloi dont témoignent aussi bien ceux que Frege accablait de ses sarcasmes que, cent ans plus tard, les tenants de l'IA ou des «physical symbol systems». Face à cette alliance sans cesse renouée du positivisme et du formalisme, il a paru utile de réactiver l'idée de Kreisel. L'exemple de la sémantique des preuves et de la théorie constructive des types a permis d'en modifier quelque peu le contenu et d'en montrer la pertinence.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] BOOLOS, G., «The Iterative Conception of Set» *Journal of Philosophy* 68(1971) p. 215-232.
- [2] BOURDEAU, M., *Pensée symbolique et intuition*, P. U. F., Paris, 2000.
- [3] de BRUIJN, N. G., «On the role of types in mathematics», dans *The Curry-Howard Isomorphism* (Ph. de Groote, éd.) Cahiers du centre de logique 8, département de philosophie de l'université catholique de Louvain, 1995.
- [4] DUMMETT, M., *Truth and Other Enigmas*, Harvard U. P., Cambridge (mass.), 1980.
- [5] DUMMETT, M., *The Logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, Londres, 1991.
- [6] GENTZEN, G., *Recherches sur la déduction logique* (1934), traduction française par R. Feys et J. Ladrière, P.U.F, Paris, 1955.
- [7] GENTZEN, G., *La consistance de l'arithmétique élémentaire* (1935), dans J. Largeault : *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, Vrin, Paris, 1992.
- [8] KREISEL, G., KRIVINE, J.-L., *Éléments de logique mathématique*, Gauthier-Villard, Paris, 1966.
- [9] KREISEL, G., «Informal Rigour and completeness proofs», dans *Problems in the Philosophy of Mathematics*, I. Lakatos (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967; repris dans J. Hintikka (ed.) : *Philosophy of Mathematics*, Oxford U.P., Oxford, 1969.
- [10] KREISEL, G., «The Formalist Positivist Doctrine of Mathematical Precision in the Light of Experience», *L'Age de la Science*, 1970, p. 17-45.
- [11] KREISEL, G., «Church's Thesis and Informal Rigour», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol.28(1987), p. 499-519.
- [12] KRIVINE, J.-L., *La théorie axiomatique des ensembles*, P.U.F., Paris, 1969.
- [13] MANCOSU, P., *From Brouwer to Hilbert*, Oxford U. P., New York, 1998.
- [14] MARTIN-LÖF, P., *Intuitionistic Type Theory*, Bibliopolis, Naples, 1984.
- [15] ODDIFREDDI, P., *Classical Recursion Theory*, North Holland, Amsterdam, 1992.
- [16] OKADA, M., «On a Theory of Weak Implications», *Journal of Symbolic Logic* 53 (1988), p. 200-211.
- [17] PRAWITZ, D., *Natural Deduction*, Almquist & Wiksell, Stockholm, 1965.

- [18] PRAWITZ, D., « Ideas and Results in Proof Theory », dans *Proceedings of the Ssecond Scndinavian Logic Symposium* , J. E. Fenstad (éd.), Amsterdam, North-Holland, 1971.
- [19] PRAWITZ, D., «Remarks on some approaches to the concept of logical consequence» , *Synthese* 62(1985), p. 153-71.
- [20] PRIOR, A., «The Runabout Inference Ticket», *Analysis* 21(1960), p. 38-39; repris par exemple dans P. Strawson (éd.): *Philosophical Logic*, Oxford, Oxford U. P., 1967.
- [21] RANTA, A., *Type Theoretical Grammar*, Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [22] SHAPIRO, ST., *Foundations without Foundationalism*, Clarendon Press, Oxford, 1991.
- [23] STRAWSON, P. F., «Carnap's view of the advantage of constructed systems over natural languages» dans Schillp, P.A. (éd.) *The Philosophy of Rudolf Carnap*, Open Court, La Salle Ill., 1963; repris en partie dans les Actes du colloque de Royaumont sur la philosophie analytique (Paris, Minuit, 1962), sous le titre *Analyse, science et métaphysique*.
- [24] SUNDHOLM, G., «Proof Theory and Meaning», dans D. Gabbay et G. Guentner (éds) : *Handbook of philosophical Logic*, vol. III, Dordrecht, Kluwer, 1986, p. 471-506.
- [25] SUNDHOLM, G., «Implicit Epistemic Aspects of Constructive Logic» *Journal of Logic, Language and Information* 6 (1997), p. 191-212.
- [26] TROELSTRA, A., VAN DALEN, D., *Constructivism in Mathematics*, II, Amsterdam, North Holland, 1988.