Interacción Dialógica y Contenido

Shahid Rahman, Juan Redmond, Nicolas Clerbout

Interacción Dialógica y Contenido[1]

Shahid Rahman[2], Juan Redmond[3], Nicolas Clerbout[4]

I. Introducción

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950 por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz[5], ambos inspirados por la noción de Wittgenstein de significado como *uso* (2009). La idea básica del enfoque dialógico de la lógica, es que el significado de las constantes lógicas está dado por normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas específicas de estructuración de la interacción argumentativa – es por ello que en la literatura se identifica el enfoque dialógico como un marco pragmático del significado. [6] Más generalmente, desde el punto de vista dialógico, el significado de una expresión es comprendido como un conjunto de reglas de interacción que determinan cómo requerir y proveer razones para sustentar una afirmación que involucra tal expresión

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (**P**); su rival, que pone en tela de juicio la tesis, se llama Oponente (**O**). Los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina después de un número finito de jugadas, con sólo un jugador ganador. Acciones o jugadas en un diálogo a menudo son entendidas como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas, sino en el contexto del desarrollo de un juego dialógico. Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas de partículas regulan aquellas jugadas que constituyen *ataques* (en forma de *peticiones* o *requerimientos*) y aquéllas que son *defensas* (es decir, *respuestas* – a esas peticiones); mientras que las reglas estructurales determinan el curso general o desarrollo de un juego dialógico (también llamado *diálogo*).

---

[1] Los resultados presentados en el presente artículo fueron obtenidos en el marco del proyecto Fondecyt Regular N° 1141260 (CONICYT) y en el marco de los programas de investigación *Argumentation, Décision, Action* (ADA) de *Maison Européenne des Sciences de l'Homme et de la Société* – USR 318, el eje transversal de investigación *Argumentation* del laboratorio UMR 8163: STL y el proyecto ANR SEMAINO.

[2] Université de Lille, UMR: 8163 STL, ADA-MESH (NpdC).

[3] Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso.

[4] CDHACS Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso.

[5] Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen/Lorenz (1978, 2001) y Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de nuevos desarrollos se puede encontrar en Keiff (2009). Para la metalógica subyacente, ver Rahman (1993), Clerbout (2014a, b). Para presentaciones en libros de texto ver: Clerbout (2014b), Redmond/Fontaine (2011). Para estudios de la relación entre la dialógica, lógica y juegos, véase Rahman/Keiff (2010), Rahman/Tulenheimo (2009). Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la TCT, ver Clerbout/Rahman (2015), Rahman/Clerbout/Jovanovic (2015) y Rahman/Redmond (2015).

[6] Respecto a *marco pragmático del significado*, véase Keiff (2007, 2009), y Peregrin (2014, pp. 98-106), Martin-Löf (2015, 2017a,b).

Ahora bien, hasta el presente la mayor parte de los trabajos en dialógica se limitan a establecer el significado de constantes lógicas (incluyendo operadores modales), pero no hay realmente estudios que muestren en detalle como introducir en el marco dialógico reglas de interacción que den cuenta del significado de expresiones arbitrarias como el conjunto de los números naturales. Precisamente, el objetivo del trabajo es mostrar sucintamente como incorporar contenido en el cuadro dialógico. Los diálogos resultantes se llaman *diálogos materiales*. La idea es de enriquecer la concepción dialógica de la lógica con la noción de lenguajes totalmente interpretados de la Teoría Constructiva de Tipos (TCT). A modo de ilustración discutiremos brevemente la formulación de reglas dialógicas para el conjunto de números naturales, para la noción de identidad predicativa y para el conjunto de objetos Booleanos
.
Como mencionamos en la conclusión Per Martin Löf, el creador de la TCT, en sus más recientes charlas afirma que la originalidad de la dialógica consiste en proponer una nueva forma de vincular pragmática y semántica en la lógica. En, nuestro artículo mostramos como implementar esos vínculos por medio de diálogos materiales.

De estas consideraciones se sigue la organización del artículo:
Comenzamos con una breve presentación de las nociones básicas de la TCT; luego presentamos el cuadro dialógico para la lógica de primer orden clásica e intuicionistas y finalmente la dialógica para la TCT.

Las secciones correspondientes no pretenden ser introducción completa ni a la TCT ni a la lógica dialógica. Sin embargo, las secciones contienen las nociones fundamentales relevantes para el artículo.

II. Igualdad definicional en la Teoría Constructiva de Tipos

II.1 Algunos postulados relevantes de la Teoría constructiva de tipos

Las constantes lógicas son interpretadas en la TCT a través de la correspondencia Curry-Howard entre proposiciones y conjuntos. Una proposición se interpreta como un conjunto cuyos elementos representan las pruebas de la proposición. También es posible visualizar un conjunto como la descripción de un problema y sus elementos como las soluciones al problema de una manera similar a la explicación de Kolmogorov del cálculo proposicional intuicionista. Además, en la TCT los conjuntos se entienden también como tipos, de modo tal que las proposiciones pueden ser vistas como datos o tipos de prueba.[7]
El objetivo filosófico fundamental de la TCT es desarrollar un *cuadro para lenguajes totalmente interpretados* (*fully interpreted languages*)[8], donde se presta especial atención de evitar mantener sintaxis y semántica aparte y de introducir en el nivel del lenguaje objeto características que determinan el significado y que se formulan usualmente en el nivel meta – véase Martin-Löf (1984, p. 3).

Otros dos principios básicos de la TCT son los siguientes:

- Ninguna entidad sin tipo
- Ningún tipo sin identidad

[7] Ver Nordström/Petersson/Smith (1990) y Granström (2011).
[8] Ver Sundholm (1983,1986, 1997, 2001, 2013).

Si A es un tipo y tenemos un objeto b que satisface las condiciones correspondientes, entonces b es un objeto de tipo A. Esto se escribe formalmente $b : A$.[9] Lingüísticamente, la afirmación "b es A" expresa el ***juicio*** de quién lo profiere, esto es, que A está justificada y que la justificación es precisamente b – por ende por medio de tal afirmación se expresa que él sabe que A.

Más aun,

$b : A$	A es verdadera

Pueden ser leídas como:[10]

b es una prueba de la proposición A	A es verdadera
b es un elemento del conjunto A	A tiene un elemento
b satisface con las expectativas de A	A es satisfecha
b es una solución al problema A	A tiene una solución

Es esencial distinguir entre el *elemento de prueba b* (*proof-object*), el tipo A y el juicio $b : A$, que establece, en este ejemplo, que b es un elemento de prueba para la proposición A (si A es del tipo proposición). En lógica estándar, que hay una prueba para una proposición dada se expresa en el nivel de metalenguaje. En la TCT, el fundamento de una afirmación se formula en el nivel del lenguaje objeto por medio de la afirmación de que hay un elemento-prueba de la proposición correspondiente.

Siempre que en TCT se introduce una nueva expresión se lo hace por medio de lo que se llama una *explicación semántica*. En el caso de la introducción de un nuevo tipo, la explicación semántica consiste en (1) describir sus objetos canónicos (aquellos que no son definidos por medio de otros), (2) proporcionar un algoritmo para reconocer si un objeto no canónico es o no de ese tipo y (3) dar las condiciones que permitan establecer la igualdad (o no) de dos objetos respecto a ese tipo. El punto 3 se entiende como la tarea de definir una relación de equivalencia apropiada. De este modo, por medio de la expresión $a = b : A$, se afirma que los dos objetos a y b satisfacen la relación de equivalencia definida para el tipo A. La afirmación $a = b : A$ es también llamada una afirmación de igualdad definicional, dado que mediante ella se introducen definiciones explícitas – por ejemplo de funciones. Una tal igualdad se trasmite entonces por reflexividad, simetría y transitividad, y por substitución de iguales definicionales. (cf. Ranta 1994, p. 52).

En la próxima sección nos limitaremos a transmitir las nociones de la TCT relevantes para los objetivos del presente trabajo mediante la discusión de la conjunción y de una versión *simplificada* de las reglas para el existencial. Para más información sobre esta perspectiva véase Martin-Löf (1984, 1996), Ranta (1988, 1994), Nordström et al. (1990), Sundholm (1997, 1998, 2009, 2013). Véase también Granström (2011).

II.2 Las bases de la lógica intuicionista de predicados en el cuadro de la TCT

II.2.1 Cuatro tipos de reglas

[9] Martin-Löf usa el signo "∈" con el fin de indicar que algo, por ejemplo a, es de tipo B; incluso sugiere que se puede entender como la cópula "es". En la literatura más reciente se ha impuesto el uso del doble punto ":". Nosotros vamos a utilizar el doble punto.

[10] Véase Ranta, 1994, p. 40, tabla 2.1

Dado que en este marco teórico las proposiciones son conjuntos, los operadores lógicos están definidos como operadores conjuntistas. El significado de tales operadores se establece por medio de cuatro tipos de reglas diferentes:

Reglas de formación. La inclusión explícita de reglas de formación en un sistema inferencial es una de las características más distintivas de la TCT. Las reglas de formación establecen simultáneamente la sintaxis y los tipos básicos a los que corresponden las constantes lógicas y no lógicas del lenguaje considerado. Más precisamente, las reglas de formación especifican bajo qué condiciones podemos inferir que algo es un tipo (conjunto), y bajo qué condiciones podemos decir que dos tipos (conjuntos) son iguales. Por ende, dado que la buena formación incluye no solo los modos de composición sintáctica sino también la identificación de los tipos básicos correspondientes, podemos decir que las reglas de formación despliegan al mismo tiempo las reglas de buena formación sintáctica y semántica específicas a un lenguaje determinado.
Reglas de introducción. Las reglas de introducción que definen los tipos del sistema, prescriben el modo de formar elementos canónicos y el modo de determinar si dos elementos canónicos son iguales.
Reglas de eliminación. Ellas establecen el modo de definir funciones (llamados selectores) en el conjunto definido por las reglas de introducción.
Reglas de igualdad. Las reglas de igualdad especifican el modo en el que operan los selectores definidos por las reglas de eliminación y como ejecutar su computación dados los elementos canónicos generados por las reglas de introducción.

II.2.2 Elementos de prueba e igualdad definicional

El ejemplo más claro de interacción entre proposiciones y elementos de prueba en un sistema de inferencia es el caso de la conjunción. La proposición $A \wedge B$ (o el conjunto AxB) se explica estableciendo que un elemento canónico de $A \wedge B$ es un par de elementos de prueba (a, b) donde $a : A$ y $b : B$ – es decir, donde a es un elemento de prueba de A y b de B:

$$\frac{A : prop \qquad B : prop}{A \wedge B : prop}\ \wedge\text{-Formación} \qquad\qquad \frac{a : A \qquad b : B}{(a, b) : A \wedge B}\ \wedge\text{-introducción}$$

Con el fin de definir $\wedge$-eliminaciones vamos a hacer uso de cierto tipo de operadores llamados *selectores*, a partir del cual se pueden definir nuevas funciones que extraen aquellos componentes que constituyen un elemento de prueba complejo c (como por ejemplo $c = (a, b)$). En el caso de la conjunción los selectores son las funciones de proyección p y q que tienen como valor el lado izquierdo y derecho del par de elementos de prueba, respectivamente. Por lo tanto, si c es un elemento de prueba para la conjunción, entonces $p(c)$ nos da el componente izquierdo de c y $q(c)$ su componente derecho. En breve la eliminación a la izquierda se lleva a cabo por medio del selector p y la eliminación a la derecha por medio del selector q.

$$\frac{c : A \wedge B}{p(c) : A}\ \wedge\text{-}p\text{-eliminación} \qquad\qquad \frac{c : A \wedge B}{q(c) : B}\ \wedge\text{-}q\text{-eliminación}$$

Si sabemos que $c = (a, b)$, entonces $p(c)$ restaura el componente izquierdo de c (obtenido por la regla de introducción) esto es: $p(c) = p((a, b)) = a$, tal que $a : A$, análogamente $q(c)$ restaura el componente derecho:

$$\frac{a : A \qquad\qquad b : B}{p((a, b)) = a : A}\wedge\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad} \qquad\qquad \frac{a : A \qquad\qquad b : B}{q((a, b)) = b : B}\wedge\text{-}der\text{-}\beta\text{- igualdad}$$

Aquí tenemos ejemplos claros de cómo usar la noción de igualdad definicional mencionada anteriormente: las funciones de proyección p y q se definen explícitamente por medio de una regla de inferencia de modo que, dados los elementos de prueba a y b, la proyección q de (a, b) es definicionalmente igual a b, respecto a la relación de equivalencia que define el tipo B, y análogamente se introduce la proyección p. Estas reglas de igualdad definicional, como ha señalado Sundholm (1997, p. 200), no son más que versiones lineales de las etapas de normalización de Prawitz (1965).
Desde el punto de vista del juicio las reglas del existencial están estrechamente ligadas a los *juicios* en los que ocurren proposiciones existenciales. En efecto, una forma simplificada de tales reglas da como resultado:

$$\frac{A : set \qquad \begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ B(x) : prop\end{array}}{(\exists x : A)B(x) : prop}\exists F \qquad\qquad \frac{a : A \qquad\qquad b : B(a)}{(a, b) : (\exists x : A)B(x)}\exists I$$

$$\frac{(c) : (\exists x : A)B(x)}{p(c) : A}\exists\text{-}p\text{-eliminación} \qquad\qquad \frac{(c) : (\exists x : A)B(x)}{q(c) : B(a)}\exists\text{-}q\text{-eliminación}$$

$$\frac{a : A \quad b : B(a)}{p((a, b)) = a : A}\exists\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad} \qquad\qquad \frac{a : A \quad b : B(a)}{q((a, b)) = b : B(a)}\exists\text{-}der\text{-}\beta\text{- igualdad}$$

La diferencia entre el caso proposicional y el caso de la cuantificación reside en la *dependencia*. En efecto, mientras que los componentes de una conjunción son tipos independientes entre sí, el segundo componente del existencial es un tipo dependiente del tipo del primer componente.
Un paralelismo similar puede establecerse entre las reglas para el universal y la implicación (véase Martin-Löf, 1984, pp. 16-18).
Una vez que las igualdades ocurren en la demostración, se transmiten por medio de la reflexividad, la simetría y la transitividad, y por la substitución de iguales definicionales. (Véase Ranta, 1994, p. 52).
Como ya anunciamos no discutiremos en el presente artículo el caso de la igualdad como un predicado.

Nota: En la sección siguiente vamos a comenzar con la dialógica estándar antes de desarrollar el marco dialógico para TCT.

III El Cuadro Dialógico y la Teoría Constructiva de Tipos

Desde el punto de vista dialógico una proposición es definida como una expresión para la cual hay una partida que comienza con la afirmación de *A* por parte del Proponente, y que termina con éxito o derrota. La partida está constituida por un número finito de jugadas prescritas por las reglas locales y las estructurales – Lorenz (2001, p. 258).

III.1 Lógica dialógica estándar

Sea $\mathbb{L}$ un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado.

Ampliamos el lenguaje $\mathbb{L}$ con dos etiquetas **P** y **O** que corresponden a los participantes del diálogo y los signos de admiración "!" y de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa (lo que llamamos un *jugador anónimo*), utilizamos variables **X** o **Y** (siendo **X** ≠ **Y**).

Tabla Reglas de partículas para la dialógica estándar

Afirmación	**X** ! $A\wedge B$	**X** ! $A\vee B$	**X** ! $A\supset B$	**X** ! $\neg A$
Ataque	**Y** $?_L$ y/o **Y** $?_R$	**Y** ? [A, B]	**Y** ! A	**Y** ! A
Defensa	**X** ! A y/o **X** ! B	**X** ! A o **X** ! B	**X** ! B	– –

Afirmación	**X** ! $\forall xA$	**X** ! $\exists xA$
Ataque	**Y** ?[! $A(x / a_i)$]	**Y** [! $A(x / a_1)$,..., ! $A(x / a_n)$]
Defensa	**X** ! $A(x / a_i)$	**X** ! $A(x / a_i)$ con $1\leq i \leq n$

En ambas tablas el símbolo "!" anuncia que a continuación sigue una proposición que el jugador del que se trate debe defender si la atacan. Una expresión del tipo a_i es una constante individual y $A(a_i/x)$ expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de x en A por a_i. Cuando una jugada consiste en una pregunta de la forma '? [A_i, …, A_n]' o de la forma $?_L$, $?_R$ entonces el otro jugador elige una proposición entre A_i, …, A_n y la juega. Así, podemos –en términos de qué jugador tiene una opción– distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación existencial, el defensor es el único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla para la negación.

Las reglas de partículas especifican el modo en el que una proposición puede atacarse o defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Las reglas de partículas son reglas para jugadores *anónimos*[11] en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*).

---

[11] La simetría de la reglas inmuniza el enfoque dialógico contra conectivas del tipo *tonk*. Cf. Redmond / Rahman (2016). Pero, independientemente de ello porqué es crucial que las locales sean anónimas debiera ser inmediato: un juego en el que cada jugador sigue reglas diferentes no constituye un juego! (por ejemplo las reglas para mover

La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, otorgan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para φ, escrito D(φ), es el conjunto de todas las partidas con φ como *tesis* (ver la regla de inicio). Las reglas estructurales son las siguientes:

SR0 (Regla de inicio): Sea φ una proposición compleja de L. Para cada partida **p** ∈D(φ) tenemos:

$\rho_{\mathbf{P}}$(**P**-A)=0,
$\rho_{\mathbf{P}}$(**O**-n:=i)=1,
$\rho_{\mathbf{P}}$(**P**-m:=j)=2

COMENTARIO: En otras palabras, cualquier partida **p** en D(φ) comienza con **P** ! φ. Llamamos φ a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de esto, el Oponente y el Proponente eligen sucesivamente un número entero llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de jugadas.[12]

SR1 (Regla clásica):

- Toda jugada después de la elección de los rangos de repetición es: o bien un ataque, o bien una defensa.
- El rango de repetición elegido por un jugador representa el número máximo de veces que puede ‘desafiar a’ o ‘defenderse de’ una jugada determinada del adversario.

SR1i (regla intuicionista): Los jugadores sólo pueden defenderse del último de los ataques aún no respondido.[13]

SR2 (Regla formal): El Proponente puede afirmar una proposición elemental, solo si **O** la afirmó ya antes.

Esta regla es una de las características más sobresalientes de la Dialógica. Como se discute en Marion/Rückert (2015), la regla se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es atacada, entonces –desde el punto de vista puramente argumentativo– la única respuesta posible es apelar a las concesiones del Oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de las jugadas realizadas durante la interacción argumentativa). De hecho, la regla formal implementa un tipo de *jugada de espejo* (conocida en teoría de juegos como *copy-cat strategy*): *mis razones para afirmar tal proposición son exactamente las mismas que las suyas cuando concedió Ud. la misma proposición.*

---

la reina en el ajedrez no dependen de quién es el jugador que las mueve. Las reglas de desarrollo en cambio sí que son dependientes del jugador, por ejemplo en el ajedrez son la blancas que comienzan)

[12] Toda partida será finita aunque una estrategia pueda incluir un número infinito de partidas (finitas). Se puede mostrar que el rango de repetición 1 para **O** es suficiente para determinar la validez logica en lógica de primer orden clásica e intuicionista – véase Clerbout (2014a,b). Una de las consecuencias para la dialógica del teorema de indecidibilidad de Church es que no puede determinarse de antemano un rango de repetición para **P fijo** para cualquier proposición arbitraria – véase Clerbout (???).

[13] Esta cláusula también se conoce como la regla de *responda primero a la última obligación* (*Last Duty First*) y permite desarrollar juegos para la lógica intuicionista.

En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

SR2* (Regla formal modificada): O puede atacar una proposición elemental si y sólo si él mismo aún no la afirmó. Sólo el Oponente puede atacar proposiciones elementales. El Proponente se defiende, de un ataque a una proposición elemental, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el Oponente será forzado a conceder la proposición elemental atacada, digamos en la jugada n. En cuanto **O** jugó n, entonces **P** se defiende del ataque respondiendo *sic* (n) (léase: porque tú mismo acabas de conceder en n la misma proposición elemental).

Prosigamos ahora con el resto de las definiciones y reglas estructurales:

- Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en jugadas sucesivas lícitas. Decimos que es **X**-terminal cuando la última jugada en la partida es una jugada del jugador **X.**

SR3 (Partida ganada): El jugador **X** gana la partida **p** sólo si es **X**-terminal

- Una *estrategia* para un jugador **X** en D(A) es una función que para cada partida no-terminal **p** cuyo último miembro es una jugada de **Y**, asigna una jugada M, tal que, si extendemos **p** con M obtenemos una nueva partida.

- Una estrategia de **X** es *ganadora* en D(A) si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de **X** para A sin importar cómo juegue **Y.**

La próxima definición relaciona la estrategia ganadora para **P** con validez:

- **P** tiene una *estrategia ganadora* para φ, si y solamente si, φ es válida en la lógica clásica y/o en la lógica intuicionista jugando de acuerdo con las reglas clásicas y/o intuicionistas.

III.2 El cuadro dialógico para la TCT

En 1988, Ranta comenzó a explorar la forma de relacionar la TCT con una teoría lúdica del significado para la lógica intuicionista. Su idea es definir una proposición como el conjunto de sus estrategias ganadoras de modo que el juicio $p : A$, se interpreta ahora como "p es una estrategia ganadora para para la proposición A". En principio la idea es simple y atractiva. Sin embargo desde el punto de vista inherente a la perspectiva del cuadro dialógico, reducir el la proposición A al conjunto de estrategias ganadoras es insatisfactorio. Una estrategia está constituida por secuencias de jugadas posibles. Las secuencias constituyen a su vez partidas posibles. Dada esta distinción entre nivel de partida y nivel de estrategia, parece natural distinguir la *razón local* p que se asocia a una proposición φ en el nivel de partida – tal como en "$p : \varphi$", que leemos "p es la razón local que sustenta mi afirmación φ" – de las razones estratégicas asociadas a φ en el nivel estratégico.
Son estas últimas las que corresponden a los elementos de prueba de la TCT.
Antes de comenzar con el enriquecimiento del lenguaje del cuadro dialógico estándar con razones locales, discutamos cómo implementar en Dialógica la noción de formación de proposiciones constituidas por constantes lógicas.

III.2.1 La Formación de proposiciones

Inspirados por la TCT queremos introducir aquí reglas en el lenguaje objeto que permitan verificar si una expresión determinada está bien formada, y más particularmente si una expresión determinada es o no una proposición. Por razones de brevedad solamente presentaremos una versión condensada. Más aún, nos restringimos aquí solo al caso de la formación de constantes lógicas – la formación de las proposiciones elementales será discutida cuando introduzcamos diálogos materiales. Para una presentación completa véase Clerbout/Rahman (2015).

La tabla sigue las siguientes convenciones:

" $A \mathcal{K} B$ " expresa una conectiva diádica, "$(\mathcal{Q}x : A)\, A(x)$ " expresa un cuantificador
En caso que haya varios ataques posibles, es el atacante el que elige

Tabla I: Reglas de formación

Afirmación	Ataque	Defensa
X $A\mathcal{K}B$: *prop*	**Y** $?_{F\mathcal{K}1}$ y/o **Y** $?_{F\mathcal{K}2}$	**X** A : *prop* y/o **X** B : *prop*
X $(\mathcal{Q}x : A)\, B(x)$: *prop*	**Y** $?_{F\mathcal{Q}1}$ y/o **Y** $?_{F\mathcal{Q}2}$	**X** A : *set* y/o **X** $B(x)$: *prop* $(x : A)$
X $\perp$: *prop*	–	–

III.2.2 Diálogos con razones locales

III.2.2.1 Razones locales y reglas de síntesis de una razón local

Las reglas que proveen el significado local de una afirmación π incluyen reglas de interacción que indican cómo producir la razón local requerida por la proposición (o conjunto) en juego: ellas indican el proceso de **síntesis de la razón local**.

Las reglas de síntesis de una razón local incluyen la indicación de qué acción dialógica (afirmación o defensa) debe ser llevada a cabo, por quién (defensor o atacante) y cuál es la razón que debe ser aducida. Así, la regla de síntesis de una razón local para la afirmación de la implicación $A \supset B$ afirmada por un jugador **X** indica:

a) que el adversario **Y** debe afirmar el antecedente (proporcionando al mismo tiempo una razón local para el mismo) – es decir, **Y** $p_1 : A$.[14]
b) que el defensor, **X**, debe responder afirmando el consecuente solicitado (con su correspondiente razón local) – es decir, **X** $p_2 : B$.

En otras palabras, la regla de síntesis de una razón local para la implicación es la siguiente:

Afirmación: **X** ! $A \supset B$
Ataque: **Y** $p_1 : A$

[14] La notación es una adaptación del formalismo de Keiff (2007, secciones 2.3.4).

Defensa: **X** $p_2 : B$

Más generalmente, las reglas de síntesis de una razón local para una constante lógica $\mathcal{K}$ está determinada (a nivel local) por el triple:

X ! $\varphi_{[\mathcal{K}]}$ Afirmación en la que ocurre $\mathcal{K}$	Ataque de **Y** específico a $\mathcal{K}$	Defensa de **X** haciendo explícita la razón local específica de $\mathcal{K}$

III.2.2.2 Reglas de análisis de la razón local

Aparte de las reglas que prescriben las reglas de síntesis de una razón local, necesitamos reglas que indiquen cómo descomponer una razón local que sustenta una proposición compleja. Tomemos como ejemplo lo siguiente:

Afirmación: **X** ! $(A\wedge B)\supset A$

Ataque: **Y** $p_1 : A\wedge B$

La expresión **X** ! $(A\wedge B)\supset A$ (en la que **no ocurre** aún razón local alguna) compromete a **X** a proveer una razón local para el consecuente, a condición de que el antagonista provea una razón local para el antecedente. Para defender *A*, **X** puede optar por analizar el antecedente, de manera de obtener la razón local para la izquierda de la conjunción. Las reglas de análisis prescriben cómo llevar a cabo tal proceso de descomposición.

A fin de formular las *reglas de análisis de la razón local*, introducimos ciertos operadores que llamamos *instrucciones*, como $L^{\vee}(p)$, $R^{\wedge}(p)$. Así, por ejemplo, la regla de análisis de la conjunción $p : A\wedge B$ indica que su defensa incluye expresiones tales como $L^{\wedge}(p)$ y $R^{\wedge}(p)$, llamadas respectivamente instrucciones izquierda y derecha de la conjunción. Informalmente pueden leerse como la indicación siguiente: para la defensa de la conjunción $p : A\wedge B$ *analice la razón local p en su componente izquierdo (derecho) de p de manera que tal componente pueda ser aducido como defensa del componente izquierdo (derecho) de la conjunción.*

De esto se desprenden fácilmente las reglas de análisis de la razón local para el resto de las constantes lógicas. Por ejemplo, la de la implicación es

Afirmación: **X** $p : A\supset B$
Ataque: **Y** $L^{\supset}(p) : A$
Defensa: **X** $R^{\supset}(p) : B$

De hecho, las reglas de análisis incluyen un índice de jugador que determina qué jugador se hará cargo de reemplazar la instrucción de una razón local concreta (el proceso de reemplazar la instrucción es gobernado por reglas que *llamamos reglas de resolución y de sustitución*). Así la notación completa del cuantificador universal es la siguiente:

Afirmación: **X** $p : (\forall x : A)B(x)$
Ataque: **Y** $L^{\forall}(p)^{\mathbf{Y}} : A$
Defensa: **X** $\mathrm{R}^{\forall}(p)^{\mathbf{X}} : B(L^{\forall}(p)^{\mathbf{Y}})$

El llevar a cabo la prescripción indicada por una instrucción requiere de tres reglas, a saber:

- *resolución de instrucciones*, que indica cómo llevar a cabo la instrucción indicada por la regla de análisis
- *substitución de instrucciones*, que asegura que una vez que una instrucción determinada ha sido resuelta por medio de la elección de una razón local, digamos *b*, entonces toda vez que la *misma instrucción* vuelva a ocurrir, la misma instrucción será siempre reemplazada por la misma razón local *b*.
- *armonización*, que establece cómo relacionar las formas de síntesis y análisis por medio de expresiones de igualdad

IV Igualdad e Interacción

IV.1. La Jugada de espejo y el razonamiento inmanente

Como ya mencionamos, una de las características más sobresalientes de la Dialógica es la llamada *regla formal* que prescribe *jugadas de espejo*. Comencemos nuestro estudio mediante la presentación informal de un ejemplo que muestra cómo la jugada de espejo permite introducir la igualdad definicional en el lenguaje objeto a partir de un proceso argumentativo:

Supongamos que el Proponente adelanta la tesis de que si el Oponente afirma que tiene una razón p para sustentar, por ejemplo $A \wedge B$, él (el Proponente) será capaz de defender con éxito la afirmación de que q sustenta $B \wedge A$. Es decir, **P** afirma que posee una estrategia ganadora para la transformación conmutativa de la conjunción. Desde un punto de vista estratégico, **P** está considerando a la razón local de la parte derecha de p como definicionalmente equivalente al de la parte izquierda de q. En efecto, la estrategia ganadora para $B \wedge A$ está constituida por el par $<p_2, p_1>$ tal que p_2 es definicionalmente equivalente a la razón que constituye la parte derecha de p $A \wedge B$ y p_1 definicionalmente equivalente a su parte izquierda. De modo que obtenemos:

$$q = <R^{\wedge}(p), L^{\wedge}(p)> = \text{par } <p_2, p_1>: B \wedge A$$

No importa en realidad qué razón local p_i elija para la parte derecha (o ziquierda) de la conjunción, **P** la copiará cuando **O** resuelva la instrucción. Esta interacción es la que llamamos *jugada de espejo*.

La igualdad expresa en forma compacta la interacción que produce la estrategia ganadora: Si se le preguntara a **P** de justificar $p_2 : B$, él podrá responder con la igualdad definicional $R^{\wedge}(p) = p_2 : B$. Es decir, léase,

yo elegí b como justificación de B pues tú mismo justificaste B con b.

El punto de vista estratégico es sólo una generalización del procedimiento que se lleva a cabo en el nivel de partida.

Como detallaremos a continuación, la introducción de la reflexividad de la igualdad definicional emerge como resultado de una jugada de espejo por medio de la cual **P** "copia" una razón local postulada antes por **O** para la misma proposición.

IV.2 La Regla Socrática y la igualdad definicional

Las consideraciones precedentes nos llevan a una reformulación de la regla formal, que llamamos Regla Socrática, cuya idea básica es la siguiente:

- Si **P** debe jugar una afirmación elemental, él puede optar por jugarla sin razón local explícita.
- Expresiones elementales de **P,** sin razón local explícita, pueden ser atacadas por **O**. La respuesta consiste en hacer explícita una razón local adecuada.
- Expresiones elementales de **P,** que resultan de la resolución de instrucciones, pueden ser atacadas por **O**.
- La respuesta a estos ataques consiste en la afirmación de una igualdad definicional. **Y** se distinguen los casos reflexivos y no reflexivos mencionados en la discusión precedente.
- De hecho, una igualdad definicional afirmada por **P** expresa la igualdad entre una razón local, introducida por **O**, y una instrucción también introducida por **O**.

En la próxima sección presentaremos por medio de tablas (simplificadas) las reglas del juego. Luego ilustraremos cómo aplicarlas.

IV.3 Las reglas de juego

Significado Local

Reglas de síntesis de la razón local

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
X ! $(\exists x{:}A)B(x)$	**Y** $?_L$ O **Y** $?_R$	**X** $p_1{:}A$ Respectivamente **X** $p_2{:}B(p_1)$
X ! $A\wedge B$	**Y** $?_L$ O **Y** $?_R$	**X** $p_1{:}A$ Respectivamente **X** $p_2{:}B$
X ! $(\forall x{:}A)B(x)$	**Y** $p_1{:}A$	**X** $p_2{:}B(p_1)$
X ! $A\supset B$	**Y** $p_1{:}A$	**X** $p_2{:}\ B$
X ! $\neg A$ También expresado como **X** ! $A\supset\bot$	**Y** $p_1{:}A$	**X** ! $\bot$ (Jugador **X** abandona)
X ! $A\vee B$	**Y** ? $\vee$	**X** $p_1{:}A$ O **X** $p_2{:}B$

Reglas de análisis de la razón local

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
X $p{:}(\exists x{:}A)B(x)$	**Y** $?_L$ O **Y** $?_R$	**X** $L^{\exists}(p)^{\mathbf{X}}{:}A$ Respectivamente **X** $R^{\exists}(p)^{\mathbf{X}}{:}B(L^{\exists}(p)^{\mathbf{X}})$

$\mathbf{X}\ p{:}A\wedge B$	$\mathbf{Y}\ ?_L$ O $\mathbf{Y}\ ?_R$	$\mathbf{X}\ L^{\wedge}(p)^{\mathbf{X}}{:}A$ Respectivamente $\mathbf{X}\ R^{\wedge}(p)^{\mathbf{X}}{:}B$
$\mathbf{X}\ p{:}(\forall x{:}A)B(x)$	$\mathbf{Y}\ L^{\forall}(p)^{\mathbf{Y}}{:}A$	$\mathbf{X}\ \mathrm{R}^{\forall}(p)^{\mathbf{X}}{:}B(L^{\forall}(p)^{\mathbf{Y}})$
$\mathbf{X}\ p{:}A\supset B$	$\mathbf{Y}\ L^{\supset}(p)^{\mathbf{Y}}{:}A$	$\mathbf{X}\ R^{\supset}(p)^{\mathbf{X}}{:}B$
$\mathbf{X}\ p{:}\neg A$ También expresado como $\mathbf{X}\ p{:}A\supset\bot$	$\mathbf{Y}\ L^{\neg}(p)^{\mathbf{Y}}{:}A$ $\mathbf{Y}\ L^{\supset}(p)^{\mathbf{Y}}{:}A$	$\mathbf{X}\ R^{\neg}(p)^{\mathbf{X}}{:}\ \bot$ $\mathbf{X}\ R^{\supset}(p)^{\mathbf{X}}{:}\bot$
$\mathbf{X}\ p{:}A\vee B$	$\mathbf{Y}\ ?\vee$	$\mathbf{X}\ p^{L\vee\mathbf{X}}{:}A$ O $\mathbf{X}\ p^{R\vee\mathbf{X}}{:}B$

Substitución de afirmaciones dependientes (Subst-AD)[15]		
$\mathbf{X}$! $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i{:}A_i)$ ("π" es una afirmación)	$\mathbf{Y}$ $\tau_1{:}A_1, \ldots, \tau_n{:}A_n$ (τ_i es una razón local de la forma $a_i{:}A$ o bien de la forma $x_i{:}A$)	$\mathbf{X}$! $\pi(\tau_1 \ldots \tau_n)$

Las reglas de desarrollo: Significado global

SR0 (Regla de inicio):

- Un diálogo *de razonamiento inmanente* comienza con una jugada de **P** por medio de la cual propone la *tesis*. La tesis puede ser propuesta a condición de que **O** esté dispuesto a conceder ciertas otras afirmaciones llamadas *concesiones iniciales*. En el último caso la tesis tiene la forma ! $\alpha\,[\beta_1, \ldots, \beta_n]$.
- Un diálogo bajo condiciones tiene lugar si y solamente si **O** acepta tales condiciones. **O** acepta las condiciones propuestas afirmando las concesiones iniciales ! β_1, …, ! β_n.
- Después de la afirmación de la tesis, el Oponente y el Proponente eligen sucesivamente un número entero llamado *rango de repetición*. El rango de repetición elegido por un jugador representa el número máximo de veces que puede "desafiar a" o "defenderse de" una jugada determinada del adversario. Toda jugada después de la elección de los rangos de repetición es: o bien un ataque, o bien una defensa de acuerdo a las reglas de síntesis y análisis y en concordancia con el resto de las reglas de desarrollo.
- Después de la elección del rango de repetición, si la tesis es una expresión elemental, **O** solicitará a su rival que proponga una razón local en favor de tal tesis. Si hay condiciones iniciales, y entre ellas se encuentra una elemental también **P** puede exigir una razón local para tal concesión. Los ataques (solicitando una razón local) tienen la forma:

  X ! B (B es una proposición elemental)
  Y $?_{razónB}$

- **Preguntar por razones locales para proposiciones elementales tiene prioridad por sobre otros ataques.**

[15] Esta regla es la expresión (a nivel de partida) de la regla que regula la substitución de variables en el seno de un juicio hipotético. Véase Martin-Löf (1984, pp. 9-11).

SR1i (Regla de desarrollo intuicionista): igual a la de la dialógica estándar.

SR1c (Regla de desarrollo clásica): igual a la de la dialógica estándar.

SR2 (**Partida de formación para la constantes lógicas**:

- Una partida de formación para una constante lógica comienza con un ataque de **O** de la forma '$?_{\mathbf{prop}}$'. La partida se desarrolla siguiendo las reglas de formación hasta que la tesis ha sido analizada en sus componentes elementales. Una vez que se ha llegado a esa etapa, el diálogo se continúa con el resto de las reglas locales y globales.
- Si una de la expresiones que constituyen la tesis no tiene regla local, entonces **P** debe proponer una definición nominal haciendo uso de un *definiendum* que se encuentra en una de las tablas para el significado local.

SR3 (**Resolución de instrucciones**):

(1) Un jugador puede requerir que el adversario lleve a cabo la instrucción prescripta y exhibir así una razón local adecuada. Una vez que el defensor reemplazó la razón local requerida decimos que la *instrucción ha sido resuelta*.

(2) El índice de jugador de una instrucción determina cuál de los jugadores tiene el derecho de elegir la razón local que resuelve la instrucción

Si la instrucción $\mathscr{I}$ para la constante lógica $\mathcal{K}$ tiene la forma $\mathscr{I}^{\mathcal{K}}(p)^{\mathbf{X}}$ y es el jugador **Y** quién solicita la resolución, entonces la petición tiene la forma Y ?…/ $\mathscr{I}^{\mathcal{K}}(p)^{\mathbf{X}}$.

Si la instrucción $\mathscr{I}$ para la constante lógica $\mathcal{K}$ tiene la forma $\mathscr{I}^{\mathcal{K}}(p)^{\mathbf{Y}}$ y es el jugador **Y** quién solicita la resolución, entonces la petición tiene la forma **Y** p_i/ $\mathscr{I}^{\mathcal{K}}(p)^{\mathbf{Y}}$**.**

(3) En el caso de una secuencia de instrucciones de la forma $\pi[\mathscr{I}_i(...(\mathscr{I}_k(p))...)]$, las instrucciones se resuelven desde el interior ($\mathscr{I}_k(p)$) al exterior ($\mathscr{I}_i$).

SR3.2 (Substitución de instrucciones):

Una vez que la razón local *b* ha sido empleada para resolver la instrucción $\mathscr{I}^{\mathcal{K}}(p)^{\mathbf{X}}$, y si la misma instrucción ocurre una otra vez los jugadores tienen el derecho a requerir que la instrucción vuelva a resolverse con *b*.

SR3.3 (Resolución y substitución de funciones):

Las funciones se atacan y se defienden exactamente de la misma manera que instrucciones

SR4 (La Regla Socrática y la igualdad definicional):

La idea básica es la siguiente

- Expresiones elementales de **P** pueden ser atacadas por **O**.
- La respuesta a estos ataques consiste en la afirmación de una igualdad definicional. Y se distinguen los casos reflexivos y no reflexivos mencionados en la discusión precedente.
- De hecho, una igualdad definicional afirmada por **P** expresa la igualdad entre una razón local, introducida por **O**, y una instrucción también introducida por **O**.
- La Regla Socrática se aplica también a la resolución o substitución de funciones, aunque la formulación mencione solamente instrucciones.

Se distinguen casos en que las respuestas consisten en la igualdad reflexiva de una razón local y otros casos no reflexivos en los cuáles la respuesta involucra la igualdad entre una razón local y una instrucción. Tales reglas no cubren los casos de transmisión de igualdad (la transmisión se efectúa por la forma usual, es decir, empleando reflexividad, transitividad y simetría)

SR4.1 Casos no reflexivos

El Oponente puede atacar afirmaciones elementales de la forma **P** $a : A$ o **P** $a : A(b)$ (en dónde A es una proposición elemental) solicitando la producción de una igualdad definicional. Sólo el Oponente puede llevar a cabo esta forma de ataque.

La respuesta obtenida no puede volver a ser atacada con la Regla Socrática (con la excepción de SR4.1c) tampoco con una regla de resolución o substitución de instrucciones.

Estamos en presencia de un caso no-reflexivo cuando **P** responde al ataque con la indicación que **O** adujo la misma razón local para la misma proposición cuando tuvo que resolver o substituir la instrucción $\mathscr{I}$.

Ataque y defensa tienen la forma siguiente:

SR4.1a	SR4.1b	SR4.1c
P a:A **O** ? = a **P** $\mathcal{I}$ = a:***A***	**P** a:$A(b)$ **O** ? = $b^{A(b)}$ **P** $\mathcal{I}$ = b:***D***	… **P** $\mathcal{I}$ = b:***D*** (la afirmación resulta de **SR4.1b)** **O** ? --- = $A(b)$ **P** $A(\mathcal{I}) = A(b)$:*prop*

Presuposiciones:

1. La respuesta prescripta por **SR4.1a** presupone que **O** afirmó $a : A$ o $a = b : A$, como resultado de la resolución o substitución de la instrucción $\mathcal{I}$ que ocurre en $\mathcal{I} : A$ o en $\mathcal{I} = b : A$.
2. La respuesta prescripta por **SR4.1b** presupone que **O** afirmó $a : A$, y $b : D$, como resultado de la resolución o substitución de la instrucción $\mathcal{I}$ que ocurre en $a : A(\mathcal{I})$.
3. **SR4.1c** presupone que **P** $\mathcal{I} = b$: ***D*** es el resultado de la aplicación de **SR4.1b**. El ataque consiste ahora en verificar que el reemplazo de la instrucción produce una igualdad en *prop*. La respuesta prescripta por esta regla presupone la afirmación de **O** $A(b)$: *prop* o $A(\mathcal{I}) = A(b)$: *prop*.

SR4.2 Casos reflexivos

El Oponente puede atacar afirmaciones elementales de la forma **P** $a : A$ o **P** $a : A(b)$ (en dónde A es una proposición elemental) solicitando la producción de una igualdad definicional. Sólo el Oponente puede llevar a cabo esta forma de ataque.

La respuesta obtenida no puede volver a ser atacada con la Regla Socrática.

Estamos en presencia de un caso con respuestas reflexivas cuando **P** responde al ataque con la indicación de que **O** adujo la misma razón local a para la misma proposición, pero en dicha afirmación de **O**, a **no es el resultado de resolución o substitución alguna**.

Los ataques tienen la misma forma que los prescriptos por **SR4.1.** Respuestas que consisten en una igualdad reflexiva presupone que **O** hizo antes la misma afirmación .

SR5 (Partida ganada).

- Si un jugador afirma "⊥" abandona la partida y el adversario gana. Si no hay una jugada de abandono el jugador que hace la última jugada gana la partida.[16]

Partidas terminales y estrategias ganadoras: La definiciones son las mismas que para diálogos estándar.

V. Tres casos de diálogos materiales

Como mencionamos anteriormente, lo que caracteriza a los diálogos es la formulación de la Regla Socrática que incluye la prescripción de una forma de interacción que permite al Proponente basar la afirmación de una proposición elemental propuesta por el Oponente (cuando el último postula tal proposición), en identidades específicas a la proposición en cuestión. A continuación discutiremos la formulación de la Regla Socrática para la noción de identidad predicativa, para el conjunto de números naturales, y para el conjunto de Booleanos.

La Regla Socrática para diálogos materiales, requiere también reglas de síntesis y análisis **globales**. Es decir reglas que indican cómo componer y descomponer la razón local para la proposición elemental en cuestión. A diferencia de las reglas análisis y síntesis para razones locales, las globales son específicas **a un jugador**.

V.1 El predicado de identidad Id

[16] Esta regla acorta las partidas. En realidad, puede darse la siguiente regla especial para ⊥: si el jugador **X** la afirma, abandona y eso le permite al adversario **Y** de responder a un ataque con la razón local: tú has abandonado: **X**-*abandona (n).*

La idea principal del predicado de tres lugares **Id**(x, y, z) en donde x es una proposición A (conjunto o tipo), y, z son razones locales de A, es la siguiente: **P** tiene el derecho de afirmar la proposición **Id**(A, a, b) (léase "a es idéntica a b, dado A)" si esa identidad está basada en afirmaciones de **O**. Más precisamente, o bien **O** afirmó exactamente la misma identidad, o una de la que puede desprenderse por sustitución esa identidad, o bien pues **O** hizo uso de a, b, para defender la proposición A (o en otra lectura, pues **O** concedió que a, b son elementos de A).
Esto sugiere ya la regla de formación:

Regla de Formación de Id

Afirmación	Ataque	Defensa
X Id(A, a_i, a_j)**:prop**	**Y** ?$_{F1}$ **Id**	**X** A:**set**
	Y?$_{F2}$ **Id**	**X** $ai{:}A$
	Y?$_{F3}$ **Id**	**X** $aj{:}A$

Puesto que el caso básico de una jugada en la que ocurre **Id** involucra la afirmación de una proposición elemental, las reglas que prescriben la interacción dialógica de tales afirmaciones conciernen la Regla Socrática. Pero la Regla Socrática que rige los diálogos formales no es suficiente. En efecto en el presente contexto de diálogos materiales necesitamos una formulación específica para afirmaciones elementales de identidad.

V.1.1 Regla Socrática para Id

Afirmaciones de identidad de **O** solo pueden ser cuestionadas mediante la regla de regla de análisis global y la regla de sustitución.

Si es el Proponente quien afirma **Id**(A, a, b), **P** tiene que afirmar también $a = b$: A. Puesto que $a = b$: A es elemental, la misma proposición tiene que estar basada en una afirmación de **O**. Es así que **P** "importa" una cierta igualdad definicional y la transforma en un predicado de identidad.

Dado que *Id* (A, a, b) expresa la identidad de a y b en A, la razón local correspondiente es **refl**(A, a), cuya única estructura interna es su dependencia de a. De hecho, el caso **refl**(A, a): **Id**(A, a, a) es el fundamental. Comencemos con él:

Si **P** afirma **Id**(A, a, a), entonces sólo dos ataques son posibles. A saber,

1. Solicitar la razón local adecuada. En otras palabras, **O** pide a **P** que afirme **refl**(A, a) : **Id**(A, a, a), mediante una solicitud de la forma prescrita por la reglas siguientes:

Síntesis global para P ! Id(*A, a, a*)
e igualdad definicional

Afirmación	Ataque	Respuesta
P ! **Id**(A, a, a)	**O** ? $_{razón\textbf{Id}}$	**P refl**(A, a):**Id**(A, a, a)
P refl(A, a):**Id**(A, a, a)	**O** ? = **refl**(A, a)	**P** $a = a{:}A$
P refl(A, a):**Id**(A, a, a)	**O** ? =**refl**(A, a)	**P** a = **refl**(A, a):A

La segunda línea de la tabla condiciona la afirmación de identidad de **P** a una afirmación de igualdad defincional – el ataque solicita que **P** haga explícita tal igualdad. La tercera es una aplicación de la Regla Socrática general para razones locales.

2. Solicitar de **P** que afirme que a es del tipo correcto. Por lo tanto, una vez que el primer ataque ha sido respondido entonces **O** pide a **P** que afirme a : A. Esto equivale a la solicitud de formación ya descrita.

Las siguientes reglas que constituyen una excepción a la prohibición en los ataques sobre las afirmaciones elementales de **O**, permiten a **P** defender ataques a **refl**(A, a). Es decir, si **O** ataca **refl**(A, a), **P** puede defenderse con **refl**(A, a) = a : A, si **O** afirma **refl**(A, a). **O** está forzado a conceder **refl**(A, a) = a : A bajo las siguientes circunstancias:

Regla de análisis global para Id(A, a, a)
afirmado por el Oponente

Afirmación	Ataque	Respuesta
O a:A	**P** ?-$_{\mathbf{Id}\text{-}a}$	**O** **refl**(A, a):**Id**(A, a, a)
O p:**Id**(A, a, a)	**P** ? $_{\mathbf{Id}}$= p	**O** **refl**(A, a) = p:**Id**(A, a, a)

Las reglas para el caso general **Id**(A, a, b), se obtienen de las anteriores por la simple substitución de una de las ocurrencias de a por b.

Nota:

- Es importante de recordar que la **regla de síntesis global** se refiere a las obligaciones contraídas por **P** cuando afirma la identidad entre a y b. Tales obligaciones son i) proveer una razón para tal identidad ii) afirmar a = b : A.
- Por el contrario la **regla de análisis global** es la regla que establece qué puede requerir el Proponente cuando es **O** quién afirma la identidad. En ése caso, el Proponente no puede obtener a = b : A de la afirmación de **O** de que a y b son idénticos. Esto sólo es posible con la llamada versión extensional de la identidad proposicional (véase Nordström et al. 1990, pp. 57-61). El punto de vista dialógico de la no reversibilidad es que la regla de síntesis establece cuáles son **las condiciones que P tiene que satisfacer** para defender una afirmación de identidad, no lo que se **sigue** de tal afirmación.

Reglas de Sustitución para Id

Comencemos por considerar una forma general de sustitución pare el nivel de partida.

Supongamos que **O** afirmó ! **Id** (A, a, b). Supongamos también que **O** ha afirmado d : B(a). **P** puede ahora forzar afirmar B(b) basándose en la afirmación de identidad proposicional de **O**. La regla descrita por la tabla a continuación es en efecto la versión dialógica de la regla de sustitución de Leibniz definida para afirmaciones de identidad proposicional intensional.

Afirmación	Sustitución de Leibniz para Id
O c:**Id**(A, a, b) … **O** d:B(a) -------------------------------- **O** **Lbz-Id-subst**(c, d)**:**B(b)	**P** ?$_{\text{Lbz-Id}}$ b / a

La substitución permite desarrollar el juego involucrando la igualdad definicional para **Lbz-Id-subst**(c, d) que no se detiene como en los juegos formales con la afirmación de reflexividad definicional: El objetivo es hacer explícito, por medio de una serie de igualdades definicionales, que la razón local **Lbz-Id-subst**(c, d) para $B(b)$, es a fin de cuentas igual a la razón local para $B(a)$, dado que **O** afirmó que a y b son razones locales indistinguibles en A.

En otras palabras la razón local para $B(b)$ si está basada en una aplicación de la regla de sus-ticución de Leibniz es **Lbz-Id-subst**(c, d) = $d(a) : B(b)$. Tal igualdad está basada en las igual-des **refl**(A, a) = $c^{\mathbf{O}\ c\ :\mathbf{Id}(A,\, a,\, b)}$: A y $d = d(a/x) : B(a/x)$ [a/x : A] – dejamos al lector la tarea de formular como tales igualdades afirmadas por **P** son el resultado de preguntas respecto a la igualdad definicional de c y d. En la práctica, el juego respecto a una afirmación de identidad se reduce responder no con la reflexividad definicional, pero directamente con $d(a)$ = **Lbz-Id-subst**(**refl**(A, a), d) : $B(b)$.

La identidad proposicional satisface la reflexividad, la simetría y la transitividad. Dejamos al lector elaborar los diálogos relevantes.

V. 2 Diálogos Materiales para ℕ

Discutamos ahora brevemente las especificaciones principales que producen diálogos materiales para los números naturales (ℕ). Dado que estamos en el presencia de diálogos materiales debemos cumplir dos tareas principales (1) "armonizar" las reglas de síntesis y análisis con reglas de igualdad **específicas** a ℕ, (2) formular las reglas estructurales que determinen el desarrollo de una partida en la se empleen definiciones nominales.

Afirmación	Ataque	Defensa	Descripción
Síntesis **X** n:ℕ	**Y** ?$_{\mathbf{s}(n)}$	**X** $\mathbf{s}(n)$:ℕ	Si **X** afirma que n es un número natural, se compromete con ello a afirmar que también su sucesor lo es.
Análisis I **X** p:$C^{ℕ}(n)$ **Análisis I of** ℕ **X** p:$C^{ℕ}(n)$ (para un n:ℕ arbitrario, y bajo la presuposición $C(z)$:**set** [z:ℕ])	**Y** ? $L^{ℕ}{}_{\text{–df-}C}$	**X** $L^{ℕ}(p)^{\mathbf{X}}$:$C(0)$	Si **X** afirma que $C^{ℕ}(n)$ para un número **natura**l n; entonces se compromete con ello a dos afirmaciones: 1) a afirmar $C(x)$ también de 0 , es decir a afirmar $C(0)$. 2) afirmar $C(\mathbf{s}(m))$ para cualquier número natural m del que **Y** afirma $C(x)$. Por ende p está constituido por una parte izquierda que se obtiene por medio de la regla de análisis I, y una parte derecha que obtiene aplicando la regla siguiente.
Análisis II **X** p:$C^{ℕ}(n)$ ….. **X** $L^{ℕ}(p)^{\mathbf{X}}$:$C(0)$	**Y** $L(R^{ℕ}(p))^{\mathbf{Y}}$:$C(m^{\mathbf{Y}})$	**X** $R(R^{ℕ}(p))^{\mathbf{X}}$:$C(\mathbf{s}(m^{\mathbf{Y}})$	Si **X** afirma $C^{ℕ}(n)$ para un número natural n y $C(0)$, entonces se compromete con ello a afirmar $C(\mathbf{s}(m))$ para cualquier número natural m del que **Y** predica $C(x)$. Esta regla analiza la parte derecha

(para un n:ℕ arbitrario, y bajo la presuposición $C(z)$:**set** [z:ℕ])	**Y** ataca concediendo $C(m)$ para un número natural m elegido por él mismo		de p en otras dos componentes: la izquierda de la derecha de p, que provee una razón para la afirmación de **Y** que $C(x)$ se aplica a un m elegido por **Y**; la derecha de la derecha de p, que provee una razón para la afirmación de **X** que $C(x)$ se aplica a un m elegido por **Y**
Reglas Socratica para ℕ ____________________ **Igualdad definicional I** **P** $p_1 : C(0)$ __________________ **Igualdad definicional II** **P** $p_2 : C(\mathbf{s}(m))$	**O** ? = p_1 ____________________ **O** ? = p_2	**P** $p_1^{\mathbf{O}} = L^{\mathbb{N}}(p){\cdot}C(0)$ __________________ **P** $p_2^{\mathbf{O}} = R(R^{\mathbb{N}}(p)){\cdot}C(\mathbf{s}(m))$	Las igualdades suponen las siguientes etapas: 1) **P** responde con la instrucción, 2) **O** requiere la resolución. 3) **P** responde con una igualdad tal que p_1 y p_2 fueron aducidos por **O** para $C(0)$ y para $C(\mathbf{s}(m))$ respectivamente.
X $p : C(k)$	**Y** ? ^{Ck}? La forma precisa del ataque depende del significado de C. Por ejemplo; si "C" es el predicado " x es número impar", la afrimación atacada es el existencial **X** ! (∃ x:ℕ) **Id**(ℕ, (**s**(0), 2.x $^{\mathbf{X}}$+1, y el ataque debe atenerse a las jugadas prescritas por las reglas locales para atacar un existencial.	**X** ! **Id**(ℕ, **s**(0), 2.0$^{\mathbf{X}}$) La respuesta es la defensa a un ataque sobre el componente derecha del existencial. La respuesta al ataque sobre el componente izquierdo es obviamente **X** ! 0:ℕ	En nuestro ejempo la expresión "**X** p:$C(n)$" debe leers como la afirmación **X** p: (∃ x:ℕ) **Id**(ℕ, (**s**(0), 2.x $^{\mathbf{X}}$+1) que presupone Odd(**s**(0)) = (∃ x:ℕ) **Id**(ℕ, **s**(0), 2.x +1): $prop$ [**s**(0):ℕ] que a su vez presupne la definición: $Odd(y)$ = (∃ x:ℕ) **Id**(ℕ, y, 2.x +1): $prop$ [y:ℕ]

Regla structural para afirmaciones de la forma P 1 : ℕ [0 : ℕ], 2 : ℕ [0 : ℕ], 3 : ℕ [0 : ℕ], …

Afirmaciones de la forma **P** n : ℕ [0 : ℕ], en donde "n" es "1" o bien "2" ..., se atacan por medio de la jugada $?_n$
Si la afirmación inicial de **P**'s es 1 : ℕ [0 : ℕ] (y el ataque por ende es $?_1$) **P** puede responder con **s**(0) $\equiv_{df}$ 1 : ℕ si y solamente si **O** afirmó **s**(0): ℕ. Ataque y defensa para 2 : ℕ [0 : ℕ], etc. siguen la siguiente regla general

P n : ℕ

O $?_b$ **O** **s**(….(**s**(**s**(0)) : ℕ

P $n \equiv_{df}$ **s**(….(**s**(**s**(0)) : ℕ

Desarrollemos brevemente como ejemplo una las partidas relevantes para la constitución de la estrategia ganadora para la tesis 3 : ℕ [0 : ℕ].

O			P		
				3:ℕ [0:ℕ]	0
1	m:= 1			n:= 2	2
3	0:ℕ			3:ℕ	4
5	? $_3$			**P** s(s(s(0))) $\equiv_{df}$ 3:ℕ	10
7	s(0):ℕ		3	**P** ? s(0)	6
7	s(s(0)):ℕ	6		**P** ?$_{s(s(0))}$	6
9	s(s(s(0))):ℕ	8		**P** ?$_{s(s(s(0)))}$	8

Glosas:

0-5 Estas jugadas establecen : la tesis 3 : ℕ, la afirmación 0 : ℕ asumida por la tesis y que **O** debe conceder si está dispuesto a jugar la partida, y el ataque a la tesis

6-7 **P** aplica la regla de síntesis a la concesión 0 : ℕ. **O** responde.

8-9 **P** aplica la regla de síntesis a la jugada 7. **O** responde.

10 **P** aplica la definición nominal de "3" establecida por la Regla Socrática, respondiendo así al ataque de la jugada 5. La jugada establece la victoria de **P**.

Estudiemos brevemente el caso del conjunto **Bool**.

V. 3 Diálogos materiales para Bool

El conjunto **Bool** contiene en la TCT dos elementos canónicos, a saber, **t** y **f**. Esto permite introducir en las funciones de verdad de la lógica clásica como elementos no canónicos del tipo **Bool**. En el enfoque dialógico, los elementos de **Bool** son respuestas a preguntas del tipo **sí-no**. Respuestas como b = **sí** o b = **no** hacen explícitas una de los posibles orígenes de la respuesta **sí** o **no** (la pregunta es o no el caso que b?).

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
Síntesis Global **X** ! **Bool**	**Y** ? $^{\textbf{Bool}}$	**X sí**:**Bool** **X no**:**Bool**
Análisis e Igualdades **X** p:$C(c)$ (c:**Bool**)	**Y** ?= $c^{\textbf{Bool}}$	**X** c = **sí: Bool** **X** c = **no**: **Bool**
X c = **sí: Bool** … **X** p:$C(c)$ (c:**Bool**)	**Y** ? $_{\text{razón } C(}$**=sí**$_{)}$	**X** $p_{1:}$ C(**sí**)
X c = **no: Bool** … **X** p:$C(c)$ (c:**Bool**)	**Y** ? $_{\text{razón } C(}$**=no**$_{)}$	**X** $p_{2:}$$C$(**no**)

		Si **P** $p_{1:}$ C(**sí**) (o **P** $p_{2:}$ C(**no**)) El juego continúa aplicando la Regla Socrática general que prescribe como atacar la afirmación elemental de **P**

Regla Socratica Especial para Bool

P está autorizado a formular preguntas de la forma **P** $?^{\mathbf{Bool=}}$ a, a condición que **O** haya concedido a : **Bool.** Las posibles respuestas están descritas en la tabla siguiente:

Ataque	Defensa
P ?= $a^{\mathbf{Bool}}$ (presupone la afirmación **O** a:**Bool)**	**O** a = **sí: Bool** o bien **O** a = **no:Bool**

Introducimos ahora las reglas para las conectivas veritativo-funcionales clásicas como operaciones entre elementos de **Bool**. Dejamos la descripción de los cuantificadores a la diligencia del lector.
Nótese los objetos procesados por las operaciones booleanas son objetos no-canónicos: no son proposiciones!

Afirmación	Ataque	Defensa	Razón estratégica
X $a \times b$: **Bool**	**Y** ? = $a \times b$	**X** ($a \times b$)=**sí** : **Bool** respectivamente **X** ($a \times b$)=**no** : **Bool**	
X ($a \times b$)=**sí** : **Bool**	**Y** $?_L{}^{\times}$**sí** **Y** $?_R{}^{\times}$**sí**	**X** a=**sí** : **Bool** respectivamente **X** b=**sí** : **Bool**	**sí** $\llbracket \langle a=\textbf{sí}, b=\textbf{sí} \rangle \rrbracket^{\mathbf{O}}$ P :Bool **no** $\llbracket a=\textbf{no} \mid b=\textbf{no} \rrbracket^{\mathbf{O}}$

X (*a*x*b*)=**no** : **Bool**	**Y**? $^{\times}$**no**	**X** *a*=**no** : **Bool** O **X** *b*=**no** : **Bool**	**Glosario**: Si ambos componentes de la conjunción son contestados con **sí** – dadas las concesiones de **O** - entonces la respuesta general recapitulante es **sí.** Si al menos uno de los componentes de la conjunción se responde con **no**, entonces la respuesta general recapitulante es **no**.
X *a*+*b* : **Bool**	**Y** ? = *a*+*b*	**X** (*a*+*b*)=**sí** : **Bool** respectivamente **X** (*a*+*b*)=**no** : **Bool**	**sí** ⟦*a*=**sí** | *b*=**sí** ⟧ ^{O} **P** :**Bool** **no** ⟦<*a*=**no** , *b*=**no**>⟧ ^{O}
X (*a*+*b*)=**sí** : **Bool**	**Y**?$^{+}$**sí**	**X** *a*=**sí**:**Bool** o **X** *b*=**sí** : **Bool**	
X (*a*+*b*)=**no**: **Bool**	**Y** ?$_{L}^{+}$**no** o **Y** ?$_{R}^{+}$**no**	**X** *a*=**no** : **Bool** respectivamente **X** *b*=**no** : **Bool**	
X *a*→*b* : **Bool**	**Y** ? =*a*→*b*	**X** (*a*→*b*)=**sí** : **Bool** respectivamente **X** (*a*→*b*)=**no** : **Bool**	
X (*a*→*b*)=**sí** : **Bool**	**Y** *a*=**sí** : **Bool** o **Y** *b*=**no** : **Bool**	**X** *b*=**sí** : **Bool** **X** *a*=**no**:**Bool** **(no puede ser atacado)**	**sí** ⟦<*a*=**sí** , *b*=**sí** | *b*=**no** , *a*=**no**>⟧^{O} **P** :**Bool** **no** ⟦<*a*=**sí** , *b*=**no**>⟧^{O}
X (*a*→*b*)=**no** : **Bool**	**Y** ?$_{L}$→ **no** **Y** ?$_{R}$→ **no**	**X** *a*=**sí** : **Bool** **X** *b*=**no** : **Bool**	
X ~*a* : **Bool**	**Y** ? =~*a*	**X** ~*a*=**sí** : **Bool** respectivamente **X** ~*a*=**no** : **Bool**	
X ~*a*=**sí** **Bool**	**Y** ? ~**sí**	**X** *a*=**no**:**Bool**	**sí** ⟦ *a*=**no** ⟧^{O}

			P :Bool **no** ⟦ *a*=**sí** ⟧^{O}
X ~*a*=**no**:**Bool**	**Y** ? ~**no**	**X** *a*=**sí** : **Bool**	

Ejemplo:
Una aplicación interesante es la interpretación y demostración del tercero excluido en un tal contexto. Observe que dado que el conjunto **Bool** contiene sólo dos elementos, la cuantificación universal sobre **Bool** se puede probar considerando cada uno de los elementos del conjunto. Cada uno de ellos desencadena una nueva partida:

O			P		
				! (∀*x*:**Bool**) (**Id**(**Bool**, *x*, **sí**) ∨ **Id**(**Bool**, *x*, **no**)).	0
1	m =1			n = 2	2
3	**sí:Bool**	0		**sí**:(**Id**(**Bool**, **sí**, **sí**) ∨ **Id**(**Bool**, **sí**, **no**)).	4
5	? ∨	4		$L^{\vee}$(**sí**):**Id**(**Bool**, **sí**, **sí**)	6
7	? --- / $L^{\vee}$(**sí**)	6		**refl**(**Bool**, **sí**):**Id**(**Bool**, **sí**, **sí**)	8
9	? = **refl**(**Bool**, **sí**)	8		**sí** = **refl**(**Bool**, **sí**):**Bool**	10
11	? **Id**$^{(\mathbf{Bool},\ \mathbf{sí},\ \mathbf{sí})}$	8		**sí** = **sí**:**Bool**	12
				Victoria de P	

Las jugada 9 a 12 se obtienen de una aplicación del segundo y tercer ataque prescrito por la regla de síntesis para **Id** – la regla que condiciona la afirmación de identidad de **P** a una afirmación de igualdad y la regla Socrática general para razones locales.

Dejamos al lector comprobar ahora el caso donde **O** decide atacar con **no** y **P** elije entonces la derecha de la disyunción.

Observación: en un tal cuadro, si bien es trivial encontrar una estrategia ganadora para

P *a*+~*a* : **Bool**

no podemos constituir una estrategia ganadora para la tesis:

P ! (∀*x* : **Bool**) (**Id**(**Bool**, *x*, **sí**) ∨ ¬**Id**(**Bool**, *x*, **sí**)),

a menos de tener ya a nuestra disposición una demostración para ¬**Id**(**Bool**, **no**, **sí**). En efecto, la demostración de una afirmación tal requiere la introducción de *universos*, que no son tema del presente artículo.

VI. Conclusiones

Desarrollos recientes en Dialógica muestran que el enfoque de los lenguajes totalmente interpretados propio de la TCT emerge naturalmente en un cuadro pragmatista del significado.[17] Así, de alguna manera, esto reivindica, aunque de manera muy diferente, el argumento de Hintikka sobre la fecundidad de la GTS (semántica de la teoría de juegos), en el contexto de los enfoques epistémicos de la teoría del significado en la lógica y los fundamentos de la matemática.[18] En efecto, si el significado es concebido como constituido durante la interacción, entonces todas las acciones involucradas en la constitución del significado de una expresión deben ocurrir explícitamente en el lenguaje objeto. Las raíces de esta perspectiva se hallan en la *Unhintergehbarkeit der Sprache* de Wittgenstein – uno de los principios de Wittgenstein que Hintikka rechaza explícitamente.[19] Según esta perspectiva de Wittgenstein, los juegos de lenguaje pretenden cumplir la tarea de mostrar esta "característica internalista del significado – véase Lorenz (1970, pp. 74-79), Sundholm (1997).

Como fue señalado por Per Martin Löf en su más reciente charla (*Assertion and Request*, Oslo, Agosto 2017): la contribución de la dialógica puede resumirse en dos puntos

1) Ella propone una nueva perspectiva para el estudio de la interacción entre pragmática, semántica y epistemología en lógica. La sugerencia de Martin-Löf es que en lugar de reglas de inferencia la dialógica propone desarrollar un sistema lógico por medio de reglas de interacción que tienen la forma:

$$(Req1) \qquad \frac{\vdash C}{\underset{may}{?} \vdash C}$$

$$(Req2) \qquad \frac{\vdash C \qquad\qquad ? \vdash C}{\underset{must}{\vdash} C'}$$

Martin–Löf (2017a, pp. 1-3)

Es así que según la lectura de Martin-Löf la dialógica propone que en lógica las nociones lógicas se encuentran en un nivel más básico que el epistémico:.

> *What I have advocated here, you could say, is a deontic basis of ordinary assertoric logic, rather than basing deontic logic on ordinary logic.*
> […] *maybe it can be explained in this way, that one has got the order of priority between the deontic notions and the epistemic notions the wrong way around.* Martin–Löf (2017b, p. 9)

2) La dialógica involucra el *saber cómo hacer* (*knowing how*) necesario para llevar a cabo una afirmación. El *saber cómo hacer* es el saber desplegado en una partida, el lugar en el que se hace manifiesto el contenido de las afirmaciones en juego.

Nuestro papel muestra cómo se traducen tales innovaciones en el caso concreto de diálogos que no se limitan al estudio de las constantes lógicas.

Por último, quisiéramos observar que los objetos Booleanas estudiados pueden generalizarse para conjuntos finitos. Una tal generalización permite incorporar operaciones conocidas en el ámbito de lógicas multi-valentes. Más aún una tal generalización permite estudiar el caso de afirmaciones que involucran proposiciones con contenido empírico y no solamente matemático

[17] Cf. Ranta (1988), Clerbout/Rahman (2015), Dango (2016).
[18] Cf. Hintikka (1973).
[19] En ese sentido Hintikka (1996) está mucho más próximo a la semántica formal estándar basada en teoría de modelos, que a las teorías pragmatistas de la significación.

(como en el presente artículo). El desarrollo de una tal extensión es materia de trabajos en progreso.

Referencias

Clerbout, N., 2014a, “First-order dialogical games and tableaux”, *Journal of Philosophical Logic* 43(4), pp. 785–801.

Clerbout, N., 2014b, *La sémantique dialogique* : *Notions fondamentales et éléments de metathéorie*, College Publications, London.

Clerbout, N. and Rahman, S., 2015, *Linking Game-Theoretical Approaches with Constructive Type Theory*: *Dialogical Strategies as CTT-Demonstrations,* Springer, Dordrecht.

Dango, A. B., 2016, *Approche dialogique de la révision des croyances dans le contexte de la théorie constructive des types*. London: College Publications.

Granström, J., 2011, *Treatise on Intuitionistic Type Theory*, Springer, Dordrecht.

Hintikka, J., 1973, *Logic, Language-Games and Information: Kantian Themes in the Philosophy of Logic*, Clarendon Press, Oxford.

Hintikka, J., 1996, *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator: An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*, Kluwer, Dordrecht.

Keiff, L., 2009, “Dialogical Logic”, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL http://plato.stanford.edu/entries/logic-dialogical/

Keiff, L. (2007). *Le Pluralisme Dialogique. Approches dynamiques de l’argumentation formelle*. PHD thesis, Lille: Université de Lille, 2007.

Lorenz, K., 1970, *Elemente der Sprachkritik.Eine Alternative zum Dogmatismus und Skeptizismus in der Analytischen Philosophie*, Suhrkamp, Frankfurt.

Lorenz, K., 2001, “Basic objectives of dialogue logic in historical perspective”, *New Perspectives in Dialogical Logic, Synthese* 127 (1-2), pp. 255–263.

Lorenz, K., 2008, *Dialogischer Konstruktivismus*. Berlin / New York: de Gruyter.

Lorenz, K., 2010a, *Logic, Language and Method: On Polarities in Human Experience*, De Gruyter, Berlin/New York.

Lorenz, K., 2010b, *Philosophische Variationen: Gesammelte Aufstze unter Einschluss gemeinsam mit Jürgen Mittelstraß geschriebener Arbeiten zu Platon und Leibniz,* De Gruyter, Berlin/New York.

Lorenzen, P. and Lorenz, K., 1978, *Dialogische Logik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Marion, M., and Rückert, H., 2015, “Aristotle on Universal Quantification: A Study from the Perspective of Game Semantics”, *History and Philosophy of Logic*, Taylor & Francis, UK.

Martin-Löf, P (1984). *Intuitionistic Type Theory. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Naples: Bibliopolis.

Martin-Löf, P (1996). "On the meanings of the logical constants and the justifications of the logical laws". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, pp. 11–60.

P. Martin-Löf (2015). "Is logic part of normative ethics?". Lecture held at the research unity *Sciences, normes, décision (FRE 3593),*Paris, May 2015. Transcription by Amsten Klev.

P. Martin-Löf (2017a). "Assertion and Request". Lecture held at Oslo, 2017. Transcription by Amsten Klev.

P. Martin-Löf (2017a). "Assertion and Request". Lecture held at Stockholm, 2017. Transcription by Amsten Klev.

Nordström, B., Petersson, K. and Smith, J. M., 1990, *Programming in Martin-Löf's Type Theory: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford.

Peregrin, J (2014). *Inferentialism; Why Rules Matter*.New York: Palgrave MacMillan.

Prawitz, D. (1965). *Natural Deduction*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.

Rahman, S., 1993, Über Dialogue, *Protologische Kategorien und andere Seltenheiten*, P. Lang, Frankfurt/Paris/N. York.

Rahman, S. y Keiff, L., 2010, "La Dialectique entre Logique et Rhétorique", *Revue de Métaphysique et de Morale* 66(2), pp. 149–178.

Rahman, S. y Redmond, J., 2015, "A Dialogical Frame for Fictions as Hypothetical Objects", *Filosofía Unisinos* 16(1), pp. 2–21.

Rahman, S., Clerbout, N. y Jovanovic, R., 2015, "The Dialogical Take on Martin-Löf's Proof of the Axiom of Choice", *South American Journal of Logic* 1(1), pp. 179–208.

Rahman, S., Clerbout, N. & Redmond, J., 2017, "Interacción e Igualdad. La interpretación dialógica de la Teoría Constructiva de Tipos", *Crítica*, vol. 149, No. 145, pp. 51-91.

Ranta, A., 1988, "Propositions as games as types", *Synthese* 76, pp. 377–395.

Ranta, A., 1994, *Type-Theoretical Grammar*, Clarendon Press, Oxford.

Redmond, J. y Fontaine, M., 2011, *How to Play Dialogues*: *An Introduction to Dialogical Logic*, College Publications, London.

Redmond, J. y Rahman, S., 2016, "Armonía Dialógica: tonk, Teoría Constructiva de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos", *Theoria* 31(1), pp. 27–53.

Sundholm, G., 1997, "Implicit epistemic aspects of constructive logic", *Journal of Logic, Language, and Information* 6(2), pp. 191–212.

Sundholm, G., 1998, "Inference versus Consequence", en Childers, T. (ed.), *The Logica Yearbook 1997*, Filosofía, Prague, pp. 26–36.

Sundholm, G., 2009, "A Century of Judgment and Inference: 1837–1936", en Haaparanta, L. (ed.), *The Development of Modern Logic*. Oxford University Press, Oxford, pp. 263–317.

Sundholm, G., 2013, "Inference and Consequence in an Interpreted Language", presentación en el Workshop *Proof theory and Philosophy*, Groningen, Diciembre 3-5 de 2013.

Wittgenstein, L, 2009, *Philosophical Investigations (PI)*, 4th edition, 2009, P.M.S. Hacker and Joachim Schulte (eds. and trans.), Oxford: Wiley-Blackwell.