De nouveaux éclairages sur le théorème de Coase et la vacuité du coeur

Stéphane Gonzalez, Alain Marciano

GATE LYON SAINT-ÉTIENNE
UMR 5824

93, chemin des Mouilles
69130 Ecully - France

Maison de l'Université, Bâtiment B
10, rue Tréfilerie
42023 Saint-Etienne cedex 02 - France

http://www.gate.cnrs.fr
gate@gate.cnrs.fr

WP 1718 – June 2017

De nouveaux éclairages sur le théorème de Coase et la vacuité du cœur

Stéphane Gonzalez, Alain Marciano

Abstract:

Cet article contribue à la littérature sur les conditions de validité du théorème de Coase. En modélisant sous la forme d'un jeu coopératif des situations de négociations entre un pollueur et deux pollués, nous affinons les conditions sous lesquelles le coeur associé est non vide. Premièrement, nous montrons que la (non)vacuité du coeur dépend des règles de responsabilités et de la répartition des droits. Deuxièmement, nous montrons que lorsque l'externalité est non-transférable, le coeur est non vide si le pollueur est non responsable mais que le coeur est toujours non vide lorsque le pollueur est responsable et ne peut polluer qu'après avoir obtenu l'accord unanime de ses victimes. Nous construisons des contre-exemples à la non-vacuité du coeur dans toutes les autres situations. Enfin, nous montrons que si l'externalité est non-transférable, alors un individu qui ne participe pas à une négociation peut malgré tout en influencer le résultat.

Keywords:
Théorème de Coase, externalités, négociation, jeux coopératifs, cœur

JEL codes:
D71

De nouveaux éclairages sur le théorème de Coase et la vacuité du cœur *

Stéphane Gonzalez† et Alain Marciano‡

Cet article contribue à la littérature sur les conditions de validité du "théorème" de Coase. En modélisant sous la forme d'un jeu coopératif des situations de négociations entre un pollueur et deux pollués, nous affinons les conditions sous lesquelles le cœur associé est non vide. Premièrement, nous montrons que la (non)vacuité du cœur dépend des règles de responsabilités et de la répartition des droits. Deuxièmement, nous montrons que lorsque l'externalité est non-transférable, le coeur est *non* vide si le pollueur est *non* responsable mais que le coeur est toujours non vide lorsque le pollueur est responsable et ne peut polluer qu'après avoir obtenu l'accord unanime de ses victimes. Nous construisons des contre-exemples à la non-vacuité du coeur dans toutes les autres situations. Enfin, nous montrons que si l'externalité est non-transférable, alors un individu qui ne participe pas à une négociation peut malgré tout en influencer le résultat.

Mots-clés: Théorème de Coase, externalités, négociation, jeux coopératifs, cœur.

JEL codes: C71

New insights on the Coase theorem and the emptiness of the core

This paper is a contribution to the literature which uses the theory of cooperative game in order to show the non validity of the Coase Theorem in a 3-player game. We examine new

*Ce travail a été réalisé grâce au soutien financier du Programme Avenir Lyon Saint-Etienne de l'Université de Lyon, dans le cadre du programme "Investissements d'Avenir" (ANR-11-IDEX-0007), ainsi que du programme "Investissements d'avenir", contrat ANR-10-LABX-l l-0l de l'Université de Montpellier.

†Univ Lyon, UJM Saint-Etienne, GATE L-SE, UMR 5824, F-42023 Saint-Etienne, France, e-mail: stephane.gonzalez@univ-st-etienne.fr

‡Université de Montpellier, LAMETA-UMR CNRS INRA 5474. e-mail: alain.marciano@umontpellier.fr

situations which give rise to the refinement of the conditions under which the core of a game with three players is (non)empty and put forward three main results. First, we demonstrate that the nonemptiness of the core depends on the liability rules and the allocation of rights. Second, we show that when the externality is non transferable, the core is nonempty if the polluter is not liable but also that the core is always nonempty when the negotiations over a pollution level require unanimity. We provide a counterexample of the nonemptiness of the core in all other situations. Third, we show that, if the externality is non transferable, then an agent who does not negotiate can nevertheless influence the outcome of the negociation.

Keywords: Coase theorem, externality, negociation, cooperative game, core.

1 Introduction

En 1966, George Stigler inventait le “théorème” de Coase en présentant de manière abstraite et réduite l’argument central de l’article de Ronald Coase intitulé “The Problem of Social Cost” (1960)[1]. Par la suite, plusieurs autres formulations de ce “théorème” ont été proposées, utilisant des hypothèses (plus ou moins) différentes ou insistant (plus ou moins) sur les mêmes aspects. Ces différentes formulations ont même conduit à l’idée qu’il n’existerait “pas” un “théorème” de Coase (Medema, 2011b, 4) mais “plusieurs” (Bertrand, 2006, p. 984). Cependant, toutes ces versions partagent les deux mêmes thèses qui résument ou synthétisent ce qu’est le “théorème” de Coase, à savoir :

(i) **la thèse de l’efficience** : en l’absence de coûts de transaction et si les droits de propriété sont bien définis, les individus impliqués dans une externalité négocieront de façon à obtenir une allocation efficace des ressources ;

(ii) **la thèse de l’invariance** : le produit de cette négociation est indépendant de la répartition originale des droits de propriété[2].

[1] La formulation exacte donnée par Stigler est: “[t]he Coase theorem thus asserts that under perfect competition private and social costs will be equal.’ (1966b, 113). Par ailleurs, les conditions dans lesquelles Stigler a inventé ce “théorème” avaient été présentées à plusieurs reprises (cf. Bertrand 2010; Marciano 2013; Medema 2011a).

[2] Steven Medema et Richard Zerbe (2000, pp. 837-838) puis Medema (2011b, 4-5) présentent plusieurs de ces versions. Les citer toutes dépasse le cadre de cet article. Toutefois, pour illustrer notre propos, nous pouvons noter, parmi d’autres, deux des caractérisations du “théorème” de Coase. Celle de Donohue: “[t]he efficiency prediction asserts that in a world of zero transaction costs parties will bargain to efficient outcomes regardless of the assignment of the initial legal entitlement. The invariance prediction asserts that in the absence of wealth effects the allocation of resources will be invariant to the legal rule” (1989, p. 550). Voir aussi Medema: “If transaction costs are zero and property rights over the relevant resources are well-defined, parties involved in an externality situation will bar-

Ainsi, si ces thèses sont satisfaites simultanément, on peut dire que le "théorème" de Coase est également satisfait.

Comme Stigler avait donc été le premier à le souligner, cela signifie que le problème du coût social n'existe pas : le marché serait toujours efficace pour allouer les ressources, quelle que soit la répartition des droits de propriété entre les individus. Dit autrement, cela signifierait que les échecs du marché pourraient toujours être controlés de manière décentralisée, directement par les individus concernés et sans intervention de l'État. Il n'est pas surprenant qu'un résultat aussi fort ait donné naissance à une littérature particulièrement vaste, que ce soit pour le défendre ou le critiquer.

Une grande partie de cette littérature formalise le théorème de Coase en utilisant des modèles de microéconomie classique (voir, par exemple, Medema et Zerbe, 2000, p. 840-851). Cependant, ces modèles ignorent, d'une part, que Coase s'était placé dans la perspective d'un petit nombre d'individus impliqués et, d'autre part, que ces individus pouvaient adopter des comportements stratégiques dans les négociations (Medema et Zerbe, 2000, p. 851). La prise en compte de ces deux aspects a conduit à de nombreuses analyses en terme de jeux non-coopératifs (voir une présentation dans Medema et Zerbe, 2000, p. 851-855). Toutefois, d'autres auteurs ont souligné que le "théorème" s'inscrivait dans une logique de la coopération et devrait plutôt être analysé en utilisant la théorie des jeux coopératifs. Cependant, les travaux qui ont été produits selon cette perspective ne représentent qu'une petite partie de la littérature cherchant à formaliser le "théorème" de Coase. Parmis les critiques de cette approche, Urs Schweizer (1988, p. 246 et 254), par exemple, explique que les formalisations en termes de jeux coopératifs "illustrent" le "théorème" de Coase et ne le démontrent pas parce qu'elles présupposent l'efficacité : les jeux coopératifs changeraient le "théorème" en simple "hypothèse sur le concept de solution" (Schweitzer, 1988, 246). Cet argument doit malgré tout être relativisé : d'abord parce que le "théorème" de Coase ne porte pas seulement sur l'efficacité mais aussi sur l'invariance du droit ; ensuite parce qu'il existe des situations dans lesquelles des solutions coopératives peuvent être vides, ce qui contredit l'argument de Urs Schweizer selon lequel ces solutions seraient toujours efficaces. Préciser, d'une part, la nature des solutions pertinentes pour modéliser un problème de coût social et, d'autre part, les conditions sous lesquelles l'efficacité peut être atteinte peut contribuer, ou bien à réduire encore la formulation du "théorème", ou bien à le démontrer. La théorie des jeux coopératifs a donc un grand intérêt et nous utiliserons cette approche dans cet article.

Ce faisant nous contribuons à une littérature lancée par Varouj Aivazian et

gain to an efficient and invariant resolution, regardless of to whom the property rights are initially assigned" (2014, p. 66).

Jeffrey Callen en 1981[3]. Aivazian et Callen étudient un cas à trois joueurs où deux usines qui polluent affectent l'activité d'une troisième firme. Ils montrent que le cœur du jeu n'est pas vide quand les deux pollueurs sont responsables des dommages créés et qu'il est donc possible, dans ce cas, d'atteindre une allocation optimale des ressources. En revanche, continuent-ils, le cœur du jeu est vide quand les deux pollueurs ne sont pas responsables du dommage qu'ils créent puisque, selon Aivazian et Callen, les entreprises peuvent négocier et re-négocier à l'infini. Donc, pour dire les choses autrement, ni la thèse de l'efficacité – puisque le cœur peut être vide – ni la thèse de l'invariance – puisque la non-vacuité du cœur dépend de la règle de droit – ne sont satisfaits. Par conséquent, le "théorème" de Coase n'est pas satisfait non plus (voir aussi Aivazian, Callen et Lipnowsky, 1987; Aivazian et Callen, 2003; Aivazian, Callen and McCracken, 2009). Notons ici qu'Aivazian et Callen raisonnent en supposant des coûts de transaction nuls.

Précisément, ce fut le point que Coase soulignait dans sa réponse : les firmes ne peuvent pas rompre leurs contrats aussi facilement que ce qu'Aivazian et Callen supposent dans leur modèle parce qu'il existe des coûts de transaction. Les négociations ne peuvent donc pas se prolonger indéfiniment, ce qui implique que le cœur ne serait pas vide et le "théorème" ne serait pas invalidé[4]. C'est aussi l'argument que défend Peter Bernholz (1997, 1999) quand il insiste sur la nécessité de contrats (internes et externes) pour garantir que le cœur du jeu ne soit pas vide, et donc que le "théorème" de Coase soit valide. Aivazian et Callen (2003), Francesco Parisi (2003) et Barbara Luppi et Parisi (2012) reprennent la discussion en prenant en compte des coûts de transactions. Néanmoins, pour Aivazian et Callen, non seulement la prise en compte des coûts de transaction ne change pas le résultat : selon l'attribution des droits de propriété, le cœur reste vide (Aivazian et Callen , 2003, p. 296) ; mais, en outre, cela ne fait que renforcer, "exacerber", le problème posé par la vacuité du cœur : ces coûts rendent encore plus difficile la possibilité que le cœur ne soit pas vide (Aivazian et Callen, 2003, p. 296)[5]. Ainsi, la littérature sur la théorie des jeux coopératifs et le "théorème" de Coase semble converger vers un résultat : le "théorème" de Coase ne peut pas être valable puisque le cœur peut être vide dans certaines configurations juridiques.

[3]Les travaux sur le cœur et les externalités sont plus anciens, voir Shapley et Shubik, 1969.

[4]De son côté, Jean Magnan de Bornier montre que les conclusions de Aivazian et Callen ne tiennent qu'à la condition que les deux pollueurs puissent fusionner. Si on supprime cette condition, alors le cœur n'est jamais vide (1996: 270).

[5]Enrico Guzzini et Antonio Palestrini (2009) ont une conclusion plus mesurée selon laquelle les coûts de transactions ne garantissent pas que le cœur soit non vide. Ces coûts réduiraient les cas de vacuité. Plus récemment, Robson (2014) parvient à la même conclusion. Voir aussi Robson and Skaperdas (2008).

C'est également le résultat que démontre cet article : sous certaines conditions de responsabilité, le cœur d'un jeu coopératif à trois joueurs n'est pas vide mais le devient dès lors qu'on change la règle de responsabilités. Cependant, notre contribution enrichit la littérature en envisageant des cas non étudiés jusqu'à présent. Plus précisément, les apports et l'originalité de notre article sont les suivants. D'abord, même si nous étudions une situation à trois joueurs, ce qui est usuelle dans la littérature qui porte sur le "théorème" de Coase et le cœur, nous innovons en prenant en considération le cas où il y a un seul pollueur et deux pollués contrairement au modèle d'Aivazian et Callen où il y a deux pollueurs et un pollué. Cela permet d'éviter certaines difficultés du modèle d'Aivazian et Callen, en particulier celle notée par Magnan de Bornier (1996) présentée dans la note 4. Surtout, cela nous semble correspondre à des situations plus réalistes. Il est en effet plutôt fréquent que, dans la réalité, le nombre de pollués soit plus important que le nombre de pollueurs. La conséquence, et c'est la seconde innovation de notre article, est que nous pouvons analyser l'impact de possibles coalitions entre pollués pour empêcher l'activité du pollueur. De ce point de vue, nous comparons les cas où les pollués doivent s'entendre ou bien peuvent négocier séparément pour modifier l'activité du pollueur. Cela nous permet de relier notre analyse à une discussion sur l'impact de la majorité et de l'unanimité sur les externalités. Ensuite, nous prenons en considération un cas passé sous silence dans la littérature, y compris chez Coase lui-même, à savoir le fait que les victimes puissent être affectées différemment par la pollution, ou encore que l'externalité soit transférable ou pas. Ce point est évidemment très important puisqu'il a un impact sur les possibilités de formation des coalitions entre les victimes.

Ceci nous permet d'obtenir des résultats proches mais nouveaux par rapport à ceux trouvés dans la littérature. En effet, si nous montrons que le cœur peut être vide, et donc que les négociations peuvent ne pas aboutir, nous déterminons aussi quelles sont les conditions en termes de responsabilité sous lesquelles le cœur est non vide. En particulier, nous mettons en avant que lorsque les joueurs sont pessimistes[6], il existe un type d'externalités très naturel tel que le cœur n'est jamais vide quand le pollueur n'est pas responsable : ce résultat est l'exact contraire du résultat d'Aivazian et Callen (1981) qui démontrent que le cœur est vide quand il n'y a pas de responsabilité pour le pollueur. Nous montrons également que, indépendamment de la croyance et du type d'externalités, le cœur n'est jamais vide si la possibilité de polluer ne se fait qu'après un accord à l'unanimité.

[6]Ce cadre est particulièrement bien adapté à la théorie des jeux coopératifs, voir Bloch et van den Nouweland (2014).

2 Hypothèses de l'article

Comme nous l'avons écrit en introduction, nous nous intéressons au cas particulier où il y a trois joueurs – notés 1, 2 et 3. Nous supposons que l'activité du joueur 1 engendre une externalité négative (pollution) qui affecte l'activité des joueurs 2 et 3.

Évidemment, la possibilité que le joueur 1 pollue les joueurs 2 et 3 ne dépend pas de son envie de maintenir son activité et donc de polluer. Cela dépend de la définition des droits et, plus précisément, de la responsabilité du pollueur pour les dommages que son activité crée. L'alternative est la suivante : ou bien le joueur 1 est n'est pas responsable, et cela signifie que des victimes doivent négocier avec lui si elles souhaitent réduire l'activité du joueur 1 ; ou bien 1 est responsable, et cela signifie qu'il existe des victimes ayant le droit de contrôler l'activité du joueur 1 et que celui-ci doit donc négocier avec certaines de ses victimes pour pouvoir polluer.

Pour représenter ces différentes situations, nous pourrions étudier la variété des possibles définitions des droits. Or, différents types de responsabilité peuvent avoir des conséquences similaires en terme de pouvoir de pollution. Il peut donc être pertinent de représenter l'ensemble des situations en raisonnant en termes de pouvoir. Cela réduit le nombre d'options possibles. Ainsi, pour modéliser ces différentes possibilités, nous utilisons une fonction ϕ qui consiste à associer à chaque coalition S non vide de $\{1, 2, 3\}$ une valeur $\phi(S) \in \{0, 1\}$ telle que $\phi(S) = 1$ signifie que la coalition S a le pouvoir d'empêcher le joueur 1 d'exercer son activité, c'est-à-dire de polluer ; si la coalition S n'a pas le pouvoir d'empêcher le joueur 1 d'exercer son activité et de polluer, alors $\phi(S) = 0$.

Nous faisons ensuite deux hypothèses très naturelles sur cette fonction ϕ :

(i) nous supposerons que le joueur 1 a toujours le pouvoir de ne pas être actif. Autrement dit, il a le pouvoir de contrôler son activité, ce qui signifie que $\phi(\{1\}) = 1$;

(ii) nous supposons de plus que si une coalition S a le pouvoir d'empêcher 1 d'être actif, alors toute coalition contenant S a également ce pouvoir. Autrement dit, la fonction ϕ est croissante :

$$\forall S, T \subseteq \{1, 2, 3\}, \ (S \subseteq T \text{ et } \phi(S) = 1) \Rightarrow \phi(T) = 1.$$

A trois joueurs, nous pouvons vérifier facilement qu'il n'y a que cinq fonctions ϕ possibles, décrites dans le tableau ci-dessous :

	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
cas 1 :	1	0	0	1	1	0	1
cas 2 :	1	1	0	1	1	1	1
cas 2 bis :	1	0	1	1	1	1	1
cas 3 :	1	0	0	1	1	1	1
cas 4 :	1	1	1	1	1	1	1

Nous pouvons alors retranscrire les différents cas en terme de droits et responsabilité de la manière suivante.

Dans **le cas 1**, le joueur 1 peut toujours polluer : il n'est pas responsable des dommages que son activité engendre. Les victimes, de leur côté, ne peuvent bloquer l'activité du pollueur ($\phi(\{2\}) = \phi(\{3\}) = 0$), même si elles s'allient ($\phi(\{2,3\}) = 0$). Elles peuvent néanmoins négocier (à titre individuel ou pas) avec le pollueur un contrat ayant pour effet de limiter ou de modifier – par exemple contre transfert monétaire – la nature de son activité afin de réduire sa pollution. La fonction ϕ prend donc la valeur 1 pour les coalitions $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ et $\{1,2,3\}$.

Les cas 2 et 2 bis sont comparables et seront donc traités comme un seul et même cas dans la suite de l'article : l'une des victimes **seulement** – le joueur 2 dans **le cas 2** et le joueur 3 dans **le cas 2 bis** – dispose du droit de bloquer l'activité du pollueur. Cette vicitime dispose donc d'une autorité exclusive dont dépend l'activité du pollueur qui doit donc négocier avec cette victime pour obtenir le droit de produire.

À la différence des deux cas précédents, dans lesquels le pollueur doit négocier avec une victime précise, dans **le cas 3**, celui-ci n'a pas à obtenir l'accord d'une victime en particulier pour produire et polluer. Il doit obtenir l'accord de l'une **ou** de l'autre des victimes. Dit autrement, il doit obtenir l'accord d'une majorité – ici, une sur deux – des victimes pour pouvoir exercer son activité. Cela peut correspondre au cas où la décision de permettre à 1 de polluer serait prise à l'issue d'un référendum à la majorité[7].

Enfin, **le cas 4** correspond au cas où le pollueur doit obtenir l'accord du joueur 2 **et** du joueur 3 pour pouvoir exercer son activité ; il faut donc qu'il y ait unanimité parmi les victimes pour que le joueur 1 puisse continuer de produire et de polluer.

En outre, ces quatre cas doivent être étudiés deux fois chacun en fonction de la nature de l'externalité[8] qui est produite par le joueur 1 puisque, comme nous l'avons aussi mentioné en introduction, nous introduisons une distinction

[7] L'exemple récent du référendum de l'aéroport de Notre-Dame des Landes peut illustrer ce cas de figure.

[8] Pour une étude appronfondie des jeux coopératifs avec externalités, voir l'article de Francis Bloch dans ce numéro.

entre les externalités "transférables" et les externalités "non-transférables". En l'occurrence, nous définissons ces types d'externalités de la manière suivante.

(i) Nous disons que l'externalité négative du joueur 1 n'est pas "transférable" d'une victime à l'autre lorsque le dommage que subit un individu ne dépend que du niveau d'activité du pollueur. Ainsi, la baisse du dommage que subit un individu – par exemple s'il négocie avec le pollueur – ne conduit pas à une augmentation des dommages que subit l'autre individu. Une négociation visant à transférer l'externalité sur une seule des deux victimes est donc impossible si l'externalité est non-transférable.

(ii) L'externalité négative du joueur 1 est dite transférable lorsque, à l'opposé de la situation précédente, il est précisément possible de reporter l'externalité sur le joueur qui n'a pas pris part à la négociation. Par exemple, si le joueur 1 est un éleveur faisant paître son bétail sur les champs voisins des joueurs 2 et 3, la négociation entre les joueurs 1 et 2 (par exemple) peut avoir pour conséquence, voire comme objectif, de faire en sorte que le bétail aille paître uniquement sur le champ du joueur 3 (et donc que ce dernier subissent l'externalité négative).

L'intérêt de cette distinction nous semble évident. Lorsque l'externalité n'est pas transférable, la seule incitation que les victimes (potentielles) ont à négocier avec le joueur 1 réside dans le gain privé (personnel) qu'elles peuvent réaliser. En outre, dans ce cas non-transférable, il est évident que le joueur qui n'a pas pris part à la négociation bénéficie malgré tout des conséquences positives de cette négociation (c'est-à-dire la baisse du niveau d'activité du joueur 1) sans avoir pour autant à donner de contreparties au joueur 1[9]. Ainsi, nous avons deux effets opposés dont il va falloir évaluer l'impact : d'un côté, une incitation à négocier pour soi; de l'autre, une incitation à ne pas prendre part aux négociations et donc à se comporter en passager clandestin. La situation est inverse lorsque l'externalité est transférable puisqu'une négociation entre les joueurs 1 et 2 entraîne des conséquences néfastes pour le joueur 3 qui doit alors subir l'intégralité des dommages. Une externalité transférable semble inciter davantage les victimes à la négociation.

Plus formellement, soit $N = \{1, 2, 3\}$ l'ensemble des joueurs. Soit $X \subset \mathbb{R}$, un ensemble compact contenant 0, et qui représente l'ensemble des niveaux

[9]Plus précisément, il s'agit d'un des "bénéfices externes" qui sont engendrés par la règle de décision, proches de ceux évoqués par James Buchanan et Gordon Tullock dans "The Calculus of Consent" (1962; voir aussi Buchanan, 1962, pp. 5, 21 et 23). Mais à la différence des cas étudiés par Buchanan et Buchanan et Tullock, la "coalition" qui se forme ne s'assure pas de gains au détriment de la "minorité". Il n'y a pas, sous cette hypothèse d'externalité non-transférable, d'exploitation de la minorité par la majorité.

d'activité du joueur 1. Soit $G_1 : X \to [0, +\infty[$ une fonction continue croissante représentant le gain du joueur 1 en fonction de son niveau d'activité. Pour $i \in N \setminus \{1\}$, on notera $D_i : X \to]-\infty, 0]$ la fonction représentant la perte du joueur i en fonction du niveau d'activité du joueur 1. Nous supposerons que D_i est une fonction continue décroissante. Nous supposerons aussi qu'en cas d'activité nulle, les gains et les pertes sont nulles: $G_1(0) = D_2(0) = D_3(0) = 0$.

Un jeu coopératif est une fonction $v : 2^N \to \mathbb{R}$ associant à chaque coalition $S \subseteq N$ une valeur réelle $v(S)$ et telle que $v(\emptyset) = 0$.

A chaque quadruplet (G_1, D_2, D_3, ϕ) nous associerons tout au long de l'article deux types de jeux coopératifs : le premier jeu, noté $\overline{v}$, associera à chaque coalition $S \subseteq N$ la somme des gains plus dommages que peuvent se garantir les joueurs de S lorsque ceux-ci pensent que les joueurs de $N \setminus S$ négocieront ensemble ce qu'il y a de mieux pour eux-mêmes étant donné la description des droits donnée par la fonction ϕ. Le deuxième jeu, noté $\underline{v}$, associera, toujours en fonction de ϕ, à chaque coalition $S \subseteq N$ la somme des gains plus dommages que peuvent se garantir les joueurs de S lorsque ceux-ci pensent que les joueurs de $N \setminus S$ ne négocieront pas.

Le cœur d'un jeu coopératif v est défini par :

$$\mathsf{C}(v) := \left\{ y \in \mathbb{R}^N, \text{ tel que } \forall S \subseteq N \ \sum_{i \in S} y_i \geq v(S) \text{ et } \sum_{i \in S} y_i = v(N) \right\}.$$

La non-vacuité du cœur assure qu'il existe un moyen de rémunérer chaque joueur de telle manière qu'aucune sous-coalition $S \subseteq N$ ne puisse prétendre à une plus haute rémunération de ses membres par simple redistribution de sa valeur $v(S)$. La forme forte du théorème de Bondareva-Shapley (Bondareva 1963; Shapley 1967) donne une condition nécessaire et suffisante de non-vacuité du coeur. Tout au long de l'article N n'est constitué que de trois joueurs, ainsi $\mathbb{R}^N$ est identifiable à $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley peut se résumer à l'énoncé suivant :

Forme forte du théorème de Bondareva-Shapley à trois joueurs.
Le coeur d'un jeu v est non-vide si et seulement si les cinq inégalités suivantes sont satisfaits :

$$v(1) + v(2) + v(3) \leq v(N) \tag{1}$$

$$v(1) + v(23) \leq v(N) \tag{2}$$

$$v(2) + v(13) \leq v(N) \tag{3}$$

$$v(3) + v(12) \leq v(N) \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}(v(12) + v(13) + v(23)) \leq v(N) \tag{5}$$

Pour démontrer que le cœur d'un jeu est vide, il suffit donc de trouver un exemple de fonction de gains et de pertes tel que le cœur du jeu coopératif associé soit vide. Précisément, il sufffit de trouver un exemple tel que l'une au moins des inégalités (1)-(5) ne soit pas satisfaite. Nous allons construire deux situations appelées **Situation 1** et **Situation 2** qui nous permettront de fournir un contre-exemple à chacune des distributions de droits où il est possible d'obtenir un coeur vide.

Situation 1 :

x	G1	D2	D3	G1+D2	G1+D3	D2+D3	G1+D2+D3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	500	-10	-100	490	400	-110	390
2	900	-25	-250	875	650	-275	625
3	1200	-350	-600	850	600	-950	250
4	1400	-750	-1000	650	400	-1750	-350
5	1500	-1200	-1500	300	0	-2700	-1200

Situation 2 :

x	G1	D2	D3	G1+D2	G1+D3	D2+D3	G1+D2+D3
0	0	0	0	0	0	0	0
1	500	-10	-100	490	400	-110	390
2	900	-25	-250	875	650	-275	625
3	1200	-60	-600	1140	600	-660	540
4	1400	-100	-1000	1300	400	-1100	300
5	1500	-150	-1500	1350	0	-1650	-150

Observons que nous avons choisi dans ces deux situations des hypothèses tout à fait usuelles en économie : la fonction de gain croît à un taux décroissant en fonction du niveau d'activité tandis que les pertes décroissent de plus en plus vite à mesure que l'activité du pollueur augmente.

Nous allons donc utiliser ces fonctions de gains pour illustrer notre raisonement pour chacun des quatre cas présentés ci-dessus et pour chaque type d'externalité transférable ou non-transférable.

3 Le cas d'une externalité non-transférable

3.1 Cas 1 : le joueur 1 possède les droits de manière exclusive

Posséder les droits de manière "exclusive" signifie que le joueur 1 a le droit de polluer. Il ne sera donc pas responsable juridiquement des dommages que son activité engendre. Ce sont donc les victimes potentielles qui doivent assumer les coûts du dommage. Cela correspond, en particulier, au principe du *caveat emptor*, selon lequel ce sont les consommateurs qui doivent supporter le coût des dommages qu'ils peuvent subir lors de l'utilisation d'un produit qui serait défectueux. Dans ce cas, le joueur 1 peut choisir son niveau d'activité sans être contraint. Par exemple, si nous prenons la fonction de gain décrite correspondant à la **situation 1**, on voit que le joueur 1 peut toujours se garantir un montant de 1500.

Dans ce cas, c'est à la victime de prendre des mesures pour essayer de minimiser le coût de l'externalité qu'elle subit. La victime peut prendre les précautions pour éviter le dommage (ou en corriger les effets) – par exemple en installant des mécanismes de protection ou en s'assurant – ou essayer de compenser le producteur de l'externalité pour qu'il réduise son activité. Cette compensation ne peut avoir lieu que s'il y a des gains à réaliser dans l'échange, c'est-à-dire uniquement si ce que gagnerait la victime à éviter le dommage est suffisant pour que le joueur 1 accepte de réduire son activité. Ici, les victimes ont une incitation à ce que le joueur 1 réduise son activité. Il suffirait que le joueur 1 réduise son niveau d'activité de 5 à 4, pour que les victimes gagnent suffisamment pour compenser le joueur 1 de sa diminution de gains.

La vraie difficulté provient ici du fait qu'il y a deux victimes qui peuvent envisager de négocier séparément et indépendamment avec le pollueur ou essayer de former une coalition pour modifier le comportement du joueur 1. C'est précisément l'intérêt d'une approche en termes de jeux coopératifs de déterminer s'il existe des sous-coalitions ayant interêt à bloquer une allocation.

Ainsi, le dommage que le joueur 2 (resp. le joueur 3) imaginera subir en l'absence de négociation dépendra de son type de croyance sur le joueur 3 (resp. le joueur 2). Plus précisément, si nous supposons qu'un accord existe entre les joueurs 1, 2 et 3, une des deux victimes peut rester dans la coalition ou envisager d'en sortir. Supposons, par exemple et pour commencer, qu'il s'agisse du joueur 2. Sa décision va dépendre de ce qu'il pense que les joueurs 1 et 3 feront. Deux cas sont possibles : 2 peut croire que les joueurs 1 et 3 chercheront toujours à négocier afin d'obtenir la meilleure situation "gagnante-gagnante" – le joueur 3 négociant pour réduire le coût de l'externalité et le joueur 1 négociant pour obtenir un dédommagement de la part du joueur 3 s'il accepte de réduire son niveau d'activité. Si tel est le cas, le niveau d'activité $x = 2$ sera choisi de telle sorte que la valeur que le joueur 2 peut assurer sera $\overline{v}(2) = -25$. Alternativement, il peut penser que les joueurs 1 et 3 ne chercheront pas à négocier, et donc va nécessairement conclure que le joueur 1 n'aura pas de raison de sélectionner un niveau d'activité x inférieur à 5; donc, la valeur du joueur 2 sera $\underline{v}(2) = -1200$. Un raisonnement similaire pour le joueur 3 nous permet de construire les deux jeux coopératifs suivants :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	1500	-25	-250	875	650	-2700	625
$\underline{v}(S)$	1500	-1200	-1500	875	650	-2700	625

On remarque alors que **le cœur du jeu $\overline{v}$ est vide** car l'inégalité (1) de la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley n'est pas satisfaite tandis que celui de $\underline{v}$ **est non vide** puisqu'il contient par exemple l'allocation $x_1 = 1600, x_2 = -25$, $x_3 = -950$.

Pour rendre ce résultat plus général, il faut regarder si la non-vacuité du cœur de $\underline{v}$ n'est dû qu'à la particularité de notre exemple ou si elle est toujours satisfaite dans un cadre à trois joueurs. Dans le cas que nous étudions, le joueur 1 possède les droits et chaque coalition $S \subseteq N$ cherche à maximiser la somme de ses gains et de ses pertes lorsque les joueurs de $N \setminus S$ jouent individuellement. Sous cette hypothèse, toute coalition S contenant le joueur 1 cherchera à maximiser la valeur $\underline{v}(S)$ définie par :

$$\underline{v}(S) = \max_{x \in X}(G_1(x) + \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq 1}} D_i(x))$$

Pour chaque coalition S contenant 1, nous noterons $x_S^* \in X$ un niveau d'activité tel que

$$\underline{v}(S) = G_1(x_S^*) + \sum_{\substack{i \in S \\ i \neq 1}} D_i(x_S^*).$$

Notons que l'existence de $\underline{v}(S)$ est assurée par l'hypothèse de compacité de l'ensemble X ainsi que par la continuité des fonctions de gains et de dommages. Ces hypothèses indiquent en particulier que $\underline{v}(1)$ existe et qu'il existe un niveau d'activité x_1^* tel que $G_1(x_1^*) = \underline{v}(1)$. Si le joueur 1 n'appartient pas à S, les joueurs de S penseront donc que le joueur 1 cherchera à maximiser ses gains. Dans ce cas,

$$\underline{v}(S) = \sum_{i \in S} D_i(x_1^*).$$

Nous avons donc défini formellement **le cas 1**. Nous avons trouvé un (contre-)exemple de fonction de gain (celle correspondant à la **situation 1**) pour lequel le cœur du jeu n'est pas vide. Il est alors possible de démontrer que **le cœur de $\underline{v}$ est toujours non-vide dans le cas 1** (voir démonstration compltète en annexe 1).

3.2 Cas 2 : l'une des victimes possède le droit de manière exclusive

Supposons que l'une des victimes (disons le joueur 2), possède le droit de manière "exclusive" de ne pas être pollué. Cela signifie que le pollueur – le joueur 1 – est responsable : il ne peut engager son activité et créer une externalité négative sans avoir au préalable obtenu l'accord du joueur 2. Ainsi, de toute évidence, les situations des deux victimes potentielles sont asymétriques. Le joueur qui possède le droit de ne pas être pollué – le joueur 2 – a un pouvoir dont ne dispose pas le joueur 3 : le joueur 2 peut s'accorder – et former une coalition – avec le joueur 1 pour que ce dernier ne pollue pas. Notons ici un point important : ce cas ne signifie pas que la pollution sera reportée sur le joueur 3, puisque l'externalité est ici supposée ne pas être transférable. Malgré tout, la question se pose de savoir si la négociation entre deux joueurs peut se faire au détriment d'un troisième, en l'occurrence une autre victime.

Pour répondre à cette question, prenons la fonction de gain correspondant à la **situation 2**. Dans cette situation, puisqu'il ne peut produire ou agir que s'il s'est accordé avec le joueur 2, le joueur 1 ne pourra donc jamais espérer obtenir *à lui seul* une meilleure allocation que celle correspondant à sa valeur $\overline{v}(1) = \underline{v}(1) = 0$. Ainsi nous obtenons $\overline{v}(23) = \underline{v}(23) = 0$. Symétriquement, le joueur 2, possédant les droits de manière exclusive, peut se garantir $\overline{v}(2) = \underline{v}(2) = 0$. L'externalité n'étant pas transférable, cela donne $\overline{v}(13) = \underline{v}(13) = 0$: l'externalité ne peut pas être transférée sur le joueur 3. Enfin, si les joueurs 1 et 2 négocient, ils peuvent se garantir $\overline{v}(12) = \underline{v}(12) = 1350$ ce qui permet de poser $\overline{v}(3) = -1500$ (cas où le joueur 3 pense qu'effectivement cette négociation aura lieu en cas de retrait de sa part des négociations dans la coalition $\{1, 2, 3\}$) et $\underline{v}(3) = 0$ (cas où le joueur 3 ne pense pas que cette négociation aura lieu en cas de retrait de sa part des négociations).

Nous obtenons donc :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	0	0	-1500	1350	0	0	625
$\underline{v}(S)$	0	0	0	1350	0	0	625

On constate que **les cœurs de $\overline{v}$ et de $\underline{v}$ sont vides** car, dans les deux jeux, l'inégalité (5) de la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley n'est pas satisfaite. Par conséquent, et ce résutlat nous semble important et utile, une négociation peut ne pas aboutir quand l'une des victimes potentielles n'est pas impliquée dans la négociation ou quand une seule victime est impliquée et que l'autre ne l'est pas. Dit autrement, une des victimes peut ne pas trouver d'accord avec un pollueur qui lui permettrait de se protéger de l'externalité alors que l'autre individu la supporterait quand même. Réciproquement, vu du côté du pollueur, cela signifie que ce dernier ne peut pas trouver d'accord avec une des victimes pour continuer son activité au détriment de l'autre victime. Cette autre victime, tout en ne participant pas à la négociation, en contrôle néanmoins le résultat. Elle dispose, par sa seule présence, d'un droit de veto.

Le résultat se retrouve-t-il si les deux victimes ont des caractéristiques symmétriques en termes de droits pour réduire l'externalité qu'elles subissent ? Nous répondons à cette question dans les deux paragraphes suivants.

3.3 Cas 3 : le joueur 1 ne peut pas agir sans majorité

Dans ce cas, comme dans le cas précédent, le joueur 1 doit obtenir l'accord d'une victime sur deux. Mais, ce cas se distingue du cas précédent dans le sens où le joueur 1 ne doit pas obtenir l'accord d'un joueur spécifique, précisément désigné, mais il peut obtenir l'accord de n'importe lequel des deux autres joueurs, quel qu'il soit – du joueur 2 **ou** du joueur 3. Il suffit qu'il ait l'accord de l'un des deux. Nous parlons alors de majorité parce que, d'une part, le joueur 1 doit convaincre une majorité des victimes – une sur deux – et, d'autre part, parce qu'il va former une majorité avec la victime avec laquelle il se met d'accord.

Pour étudier ce cas, prenons la fonction de gains décrite dans la **situation 2** et regardons ce qui se passe. Le joueur 1 ne peut pas agir sans obtenir le consentement de l'un des deux autres joueurs. Par conséquent, il ne pourra jamais espérer obtenir à lui seul une meilleure rémunération que $\overline{v}(1) = \underline{v}(1) = 0$, ainsi nous obtenons $\overline{v}(23) = \underline{v}(23) = 0$.

Si le joueur 1 négocie avec le joueur 2 pour former une coalition, ces deux joueurs peuvent se garantir l'allocation $\overline{v}(12) = \underline{v}(12) = 1350$, ce qui permet de poser $\overline{v}(3) = -1500$ (cas où le joueur 3 pense qu'effectivement cette négociation aura lieu en cas de retrait de sa part des négociations) et $\underline{v}(3) = 0$ (cas où le joueur 3 ne pense pas que cette négociation aura lieu en cas de retrait de sa part des négociations). Le raisonnement est similaire si les joueurs 1 et 3 négocient.

Nous obtenons donc :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	0	-25	-1500	1350	650	0	625
$\underline{v}(S)$	0	0	0	1350	650	0	625

On constate que **les cœurs de $\overline{v}$ et $\underline{v}$ sont tous les deux vides** car l'inégalité (5) de la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley n'est pas satisfaite. Ainsi, cette situation, naturelle d'un point de vue démocratique, et dont la mise en œuvre concrète pourrait prendrait la forme d'un referendum, n'assure en fait pas du tout la stabilité du point de vue du cœur : la thèse d'efficience du "théorème" de Coase n'est pas validée dans une telle situation.

3.4 Cas 4 : le joueur 1 ne peut agir sans un accord à l'unanimité

Dans ce cas, pour que le joueur 1 agisse, il doit nécessairement obtenir l'accord de l'ensemble des joueurs sur lesquels son activité provoque une externalité négative. On peut vérifier dans ce cas que quelque soit la situation considérée,

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	0	0	0	0	0	0	625
$\underline{v}(S)$	0	0	0	0	0	0	625

Les cœurs de ces jeux sont égaux et clairement non-vides. Plus généralement, le lecteur pourra facilement vérifier que dans le cas 4, on a :

$$\overline{v}(N) = \underline{v}(N) \geq 0 \text{ et } \overline{v}(S) = \underline{v}(S) = 0.$$

Les cœurs de $\underline{v}$ et $\overline{v}$ sont donc toujours non-vides dans le cas 4. Toutes les distributions positives de la valeur de la grande coalition sont alors stables au sens du cœur.

4 L'externalité est "transférable"

Supposons à présent que les dommages causés par l'activité du joueur 1 puissent être transférés d'une victime (potentielle) à l'autre. Comme nous l'avons vu dans la section 2, cette hypothèse ne s'applique qu'à un certain nombre de cas (déplacement d'une usine, d'un aéroport, éleveur laissant ses animaux paître dans les champs des fermiers voisins etc.[10]). Lorsque l'externalité est transférable, il n'y a aucune incitation à se comporter en passager clandestin de la négociation car être en dehors de la négociation conduit nécessairement à accroître le niveau d'externalité que l'on subit.

Pour représenter cette hypothèse, nous supposons que les dommages que l'activité – dont le niveau est toujours noté x – du joueur 1 – et qui lui procure toujours un gain $G_1(x)$ – ont une valeur égale à $D(x)$. Comme dans le cas précédent d'une externalité non-transférable, nous savons que ce dommage peut être divisé ou réparti entre les joueurs 2 et 3. En revanche, à la différence du cas précédent, ce dommage n'est pas différencié entre les joueurs 2 et 3.

[10]Ce cas est très différent du cas discuté par Magnan de Bornier (1996), et Aivazian et Callen (2003) où il existe une seconde externalité. Ici, il ne s'agit pas d'une seconde externalité. Ce cas se rapproche plus du "garbage game" envisagé par Shapley et Shubik (1969) ou du syndrome NIMBY, dans lequel chaque individu peut laisser un sac de détritus sur le terrain d'un autre individu. Shapley et Shubik (1969) montrent que le cœur du jeu est vide. Dans notre cas, il s'agirait d'un garbage game dans lequel un pollueur peut s'entendre avec un pollué pour laisser les détritus sur le champ de 3.

Supposons que cette situation puisse être décrite par le tableau suivant :

x	G1	D	G1+D
0	0	0	0
1	500	-110	390
2	900	-275	625
3	1200	-660	540
4	1400	-1100	300
5	1500	-1650	-150

Remarquons que dans ce cadre, deux types de négociations sont possibles :

(i) les joueurs 2 et 3 négocient des compensations avec le joueur 1 pour que ce dernier diminue son activité (type de négociation identique au cadre établi pour les externalités “non-transférables”) ;

(ii) le joueur 2 (resp. 3) négocie pour que le joueur 1 exerce ses externalités négatives davantage sur le joueur 3 (resp.2). Pour reprendre l'exemple ci-dessus, le joueur 1 (l'éleveur) négocie avec le joueur 2 (le fermier 2) un contrat qui stipule qu'il doit faire paître ses bêtes ailleurs[11], c'est-à-dire sur le champ du joueur 3.

Les deux types de négociations sont inclus simultanément dans les cas ci-après.

4.1 Cas 1 : le joueur 1 possède les droits de manière exclusive

Ici, le joueur 1, puisqu'il détient de manière exclusive le droit de polluer (et ne sera donc pas responsable de sa pollution), peut assurer $\overline{v}(1) = \underline{v}(1) = 1500$. Le joueur 2 peut, de son côté, négocier avec 1 de façon à ce que son activité n'endommage que le joueur 3. Si tel est le cas, le joueur 1 peut exercer son activité maximale sans gêner le joueur 2 tandis que toutes les pertes seront du coté du joueur 3. Ainsi $\underline{v}(12) = \overline{v}(12) = 1500$ et $\overline{v}(3) = -1650$. Remarquons que le joueur 3 peut potentiellement subir cette perte de -1650 si 1 et 2 ne négocient pas. Le joueur 3 ne peut donc prétendre à plus que $\underline{v}(3) = -1650$.

En poursuivant le même raisonnement pour les autres coalitions, on obtient :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	1500	-1650	-1650	1500	1500	-1650	625
$\underline{v}(S)$	1500	-1650	-1650	1500	1500	-1650	625

[11] Contrat qui ne peut en réalité être rendu possible que dans le cas où le joueur 3 n'a pas le pouvoir de s'y opposer.

Contrairement au cas où les externalités sont non-transférables, dans le cas où les externalités sont transférables, **les cœurs des jeux $\overline{v}$ et $\underline{v}$ sont vides** car l'inégalité (5) de la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley n'est pas satisfaite.

4.2 Cas 2 : l'une des victimes possède les droits de manière exclusive

Supposons que le joueur 1 ne puisse exercer son activité sans l'autorisation du joueur 2. Le joueur 1 ne pourra jamais obtenir plus que 0 sans négocier avec le joueur 2. Le joueur 2 pourra toujours se garantir un montant de 0. Il est possible que le joueur 3, de son côté, ait à assumer la totalité des dégâts provoqués par le joueur 1 si (et seulement si) ce dernier parvient à négocier au mieux avec le joueur 2. Le raisonnement nous permet d'avoir le tableau des valeurs par coalition suivant :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	0	0	-1650	1500	0	0	625
$\underline{v}(S)$	0	0	0	1500	0	0	625

Le lecteur pourra vérifier que **les cœurs de ces jeux sont vides** comme dans la situation où l'externalité était non-transférable.

4.3 Cas 3 : le joueur 1 ne peut pas agir sans majorité

Supposons que le joueur 1 ne puisse exercer son activité sans l'autorisation d'une de ses victimes. Le joueur 1 ne pourra jamais obtenir plus que 0 sans négocier. Chaque victime risque, de son côté, d'assumer la totalité des dommages si (et seulement si) l'autre victime négocie dans ce sens avec le joueur 1. Ce raisonnement nous permet d'avoir le tableau des valeurs par coalition suivant :

S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$\overline{v}(S)$	0	-1650	-1650	1500	1500	0	625
$\underline{v}(S)$	0	0	0	1500	1500	0	625

Le lecteur pourra vérifier que **les cœurs de ces jeux sont vides** comme dans la situation où l'externalité était non-transférables.

4.4 Cas 4 : le joueur 1 ne peut agir sans un accord à l'unanimité

Ce cas est identique à celui présenté dans le cadre d'une externalité non-transférable. Le cœur est non vide. Le lecteur pourra aisément vérifier que ce résultat est indépendant des valeurs numériques de notre exemple et peut facilement se démontrer en toute généralité. Il est impossible pour une victime de reporter l'intégralité des dommages sur l'autre victime. Ainsi, dans le cas 4, la nature des externalités (transférable ou non), n'a pas d'effet sur l'issue de la négociation.

5 Conclusion

L'objet de notre article est d'étudier les conditions sous lesquelles le "théorème" de Coase est valide en utilisant la théorie des jeux coopératifs. Les travaux qui existent sur ce sujet montrent en général que le cœur d'un jeu à plusieurs joueurs peut être vide selon la manière dont sont attribués les droits de propriété. En étudiant des cas différents par rapports à ceux analysés dans la littérature, nous parvenons à un résultat général similaire selon lequel la non-vacuité du cœur dépend de la structure des droits. Cela infirme donc aussi la thèse de l'invariance contenue dans le "théorème" de Coase. Mais nous mettons également des résultats nouveaux qui contribuent selon nous à effectivement affiner le domaine de validité du "théorème" de Coase.

D'abord, en distinguant entre externalité transférable et externalité non-transférable, nous montrons – et ceci est différent de ce qui était démontré dans les autres articles – que, dans le cas non-transférable, le cœur est *non* vide dans le cas où le pollueur est *non* responsable. Excepté dans le **cas 4** où la stabilité coalitionnelle est assurée lorsque le pollueur a besoin de l'accord unanime de ses victimes potentielles pour polluer, le cœur est en général vide quand le pollueur est responsable. Ce dernier résultat étant valable aussi bien dans le cas où l'externalité est transférable que dans le cas où elle est non-transférable.

Par ailleurs, l'autre résultat intéressant que nous avons mis en évidence concerne le **cas 2** où le pollueur essaye de négocier avec un joueur pour obtenir le droit de polluer. Dans ce cas, le cœur est effectivement vide et l'on peut remarquer en particulier que le joueur qui ne participe pas à la négociation exerce malgré tout un contrôle implicite sur celle-ci.

Les résultats peuvent être résumés par le tableau suivant :

		cas 1	cas 2	cas 3	cas 4
cas non-transférable	$\underline{v}$	**cœur non vide**	cœur vide	cœur vide	**cœur non vide**
	$\overline{v}$	cœur vide	cœur vide	cœur vide	**cœur non vide**
cas transférable	$\underline{v}$	cœur vide	cœur vide	cœur vide	**cœur non vide**
	$\overline{v}$	cœur vide	cœur vide	cœur vide	**cœur non vide**

Bien entendu, s'il est possible, pour une distribution de droits et une situation de coût social données, de montrer que le coeur du jeu coopératif associé est vide, cela ne signifie pas que cette distribution de droit conduise systématiquement à la vacuité du coeur. Précisément, pour toute les distributions de droits, il existe des situations où le coeur du jeu associé est non vide[12]. Nous laissons pour de futures recherches le calcul de la généricité des situations qui, pour une distribution de droit donnée, conduisent à la vacuité du coeur.

References

[1] AIVAZIAN, V. A. et CALLEN J. L. [1981], The Coase Theorem and the Empty Core, *Journal of Law and Economics*, 24 (1), p. 175-181.

[2] AIVAZIAN, V. A. et CALLEN J. L. [2003], The core, transaction costs, and the Coase theorem, *Constitutional Political Economy*, 14, p. 287-299.

[3] AIVAZIAN, V. A. et CALLEN J. L. et LIPNOWSKI I. [1987], The Coase Theorem and Coalitional Stability, *Economica*, 54 (216), p. 517-520.

[4] AIVAZIAN, V. A. et CALLEN J. L. et McCRACKEN S. [2009], Experimental Tests of Core Theory and the Coase Theorem: Inefficiency and Cycling, *Journal of Law and Economics*, 52 (4), p. 745-759.

[5] BERNHOLZ, P. [1986], A Generalized Constitutional Possibility Theorem, *Public Choice*, 51, p. 249-65.

[6] BERNHOLZ, P. [1997], Property Rights, Contracts, Cyclical Social Preferences and the Coase Theorem: A Synthesis, *European Journal of Political Economy*, 13, p. 419-442.

[12] On pourra par exemple penser à une sitation où les externalités négatives sont très faibles par rapport aux gains liés à l'activité du pollueur.

[7] BERNHOLZ, P. [1999], The generalized Coase Theorem and separable individual preferences: an extension, *European Journal of Political Economy*, 15, p. 331-335.

[8] BERTRAND, É. [2006]. La thèse d'éfficience du théorème de Coase . Quelle critique de la microéconomie?, *Revue économique*, 57 (5), pp. 983-1007.

[9] BERTRAND, É. [2010], The three roles of the "Coase theorem" in Coase's works, *European Journal of History of Economic Thought*, 17(4), p. 975-1000.

[10] BLOCH, F. et van den NOUWELAND, A. [2014] Expectation formation rules and the core of partition function games, *Games and Economic Behavior*, 88, p. 538-553.

[11] BONDAREVA, O. N. [1962], Theory of the core in the n-person game, *Vestnik Leningradskii Universitet*, 13, p. 141-142 (in Russian).

[12] BUCHANAN, J. M. [1962], Politics, Policy, and the Pigovian Margins, *Economica*, 29 (113), p. 17-28.

[13] BUCHANAN, J. M. et TULLOCK G. [1962], The Calculus of Consent. *University of Michigan Press*, Ann Arbor.

[14] COASE, R. H. [1960], The Problem of Social Cost, *Journal of Law and Economics*, 3, p. 144.

[15] COASE, R. H. [1981], The Coase Theorem and the Empty Core: A Comment, *Journal of Law and Economics*, 24 (1), p. 183-187.

[16] DONOHUE, J. J. [1989], Diverting The Coasean River: Incentive Schemes To Reduce Unemployment Spell, *Yale Law Journal*, 99 (December), p. 549-609.

[17] GUZZINI, E. et PALESTRINI A. [2009], The empty core in the Coase theorem: a critical assessment, *Economics Bulletin*, 29 (4), p. 3095-3103.

[18] LUPPI, B. et PARISI F. [2012], Politics with(out) Coase, *International Review of Economics*, 59 (2), p. 75-187.

[19] MAGNAN de BORNIER, J. [1986], The Coase theorem and the empty core: a reaximanation. *International Review of Law and Economics*, 6:265-271.

[20] MARCIANO, A. [2013], Ronald Coase: An Obituary. *History of Economic Ideas*, XXI (2), p. 11-27.

[21] MEDEMA, S. G. [2011a], A case of mistaken identity: George Stigler, The Problem of Social Cost, and the Coase theorem, *European Journal of Law and Economics*, 31 (1), p. 11-38.

[22] MEDEMA, S. G. [2011b], The Coase Theorem: Lessons For The Study of The History of Economic Thought, *Journal of the History of Economic Thought*, 33 (1), p. 1-18.

[23] MEDEMA, S. G. [2014], *Juris Prudence*: Calabresi's Uneasy Relationship with the Coase Theorem, *Law and Contemporary Problems*, 77 (2), p. 65-95.

[24] MEDEMA, S. G. et ZERBE, R. O., Jr. [2000], The Coase Theorem.? In Boudewijn Bouckaert and Gerrit De Geest, eds., *The Encyclopedia of Law and Economics*, Aldershot: Edward Elgar Publishing, pp. 836?892.

[25] PARISI, F. [2003], The political Coase theorem, *Public Choice*, 115, p. 1-36.

[26] ROBSON, A. [2014], Transaction costs can encourage Coasean bargaining. *Public Choice*, 160, p. 539-549.

[27] ROBSON, A. et SKAPERDAS S. [2008], Costly enforcement of property rights and the Coase theorem, *Economic Theory*, 36, p. 109-128.

[28] SCHWEIZER, U. [1988], Externalities and the Coase Theorem: Hypothesis or Result?, *Journal of Institutional and Theoretical Economics*, 144, p. 245-266.

[29] SHAPLEY, L S. [1967], On balanced sets and cores, *Naval Research Logistics*, 14, p. 453-460.

[30] SHAPLEY, L S. et SHUBIK M. [1969], On the Core of an Economic System with Externalities, *American Economic Review*, 59 (4), p. 678-684.

[31] STIGLER, G. J. [1966], The Theory of Price, *New-York: Macmillan Library Reference.*

Annexe 1. Démonstration du cas 1: le joueur 1 possède les droits de manière exclusive

Pour démontrer que le coeur est non vide, il suffit d'appliquer la forme forte du théorème de Bondareva-Shapley (Bondareva 1963; Shapley 1967). Dans le cas où N n'est constitué que de trois joueurs, il suffit de vérifier les cinq inégalités suivantes :

$$\underline{v}(1) + \underline{v}(2) + \underline{v}(3) \leq \underline{v}(N) \tag{6}$$

$$\underline{v}(1) + \underline{v}(23) \leq \underline{v}(N) \tag{7}$$

$$\underline{v}(2) + \underline{v}(13) \leq \underline{v}(N) \tag{8}$$

$$\underline{v}(3) + \underline{v}(12) \leq \underline{v}(N) \tag{9}$$

$$\frac{1}{2}(\underline{v}(12) + \underline{v}(13) + \underline{v}(23)) \leq \underline{v}(N) \tag{10}$$

Les inéquations (6) et (7) sont facilement satisfaites puisque

$$\begin{array}{rcl} \underline{v}(1) + \underline{v}(2) + \underline{v}(3) & = & \underline{v}(1) + \underline{v}(23) \\ & = & G_1(x_1^*) + D_2(x_1^*) + D_3(x_1^*) \\ & \leq & \max_{x \in X}[G_1(x) + D_2(x) + D_3(x)] \\ & = & \underline{v}(123). \end{array}$$

L'inéquation (8) se vérifie ainsi :

$$\begin{array}{rcl} \underline{v}(2) + \underline{v}(13) & = & D_2(x_1^*) + G_1(x_{13}^*) + D_3(x_{13}^*) \\ & \leq & D_2(x_{13}^*) + G_1(x_{13}^*) + D_3(x_{13}^*) \\ & \leq & \max_{x \in X}[G_1(x) + D_2(x) + D_3(x)] \\ & = & \underline{v}(123). \end{array}$$

La deuxième inéquation provient du fait que la fonction D_2 est décroissante : l'externalité étant non-transférable, la négociation entre les joueurs 1 et 3 profitera au joueur 2. On a $x_1^* \geq x_{13}^*$.

L'inéquation (9) se vérifie exactement de la même façon.

Il ne reste plus qu'à vérifier l'inéquation (10). Posons

$$V = \frac{1}{2}(\underline{v}(12) + \underline{v}(13) + \underline{v}(23))$$

Quitte à échanger les joueurs 2 et 3, nous pouvons supposer, sans perdre de généralité, que $x_{13}^* \leq x_{12}^*$. On a :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}((G_1 + D_2)(x_{12}^*) + (G_1 + D_3)(x_{13}^*) + (D_2 + D_3)(x_1^*)) \\
&= \frac{1}{2}(G_1(x_{13}^*) + D_2(x_{13}^*) + D_3(x_{13}^*) + G_1(x_{12}^*) + D_2(x_{12}^*) \\
&\quad -D_2(x_{13}^*) + (D_2 + D_3)(x_1^*)).
\end{aligned}$$

Comme D_2 est décroissante et que $x_{13}^* \leq x_{12}^*$, on a :

$$D_2(x_{12}^*) - D_2(x_{13}^*) \leq 0.$$

De plus, la décroissance de D_2 et D_3 donne :

$$(D_2 + D_3)(x_1^*) \leq (D_2 + D_3)(x_{12}^*).$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}
V &\leq \tfrac{1}{2}(G_1(x_{13}^*) + D_2(x_{13}^*) + D_3(x_{13}^*)) + \tfrac{1}{2}(G_1(x_{12}^*) + D_2(x_{12}^*) + D_3(x_{12}^*)) \\
&\leq \max\{G_1(x_{13}^*) + D_2(x_{13}^*) + D_3(x_{13}^*), G_1(x_{12}^*) + D_2(x_{12}^*) + D_3(x_{12}^*)\} \\
&\leq \underline{v}(N).
\end{aligned}$$

Les inéquations (6) à (10) sont satisfaites, ce qui permet de conclure que **le cœur de $\underline{v}$ est toujours non vide dans le cas 1**.