Esquisse d'une cartographie des carnets de notes d'élie Cartan, et quelques remarques sur les nombreuses pistes de recherches qu'ils ouvrent

Emmylou Haffner

Esquisse d'une cartographie des cahiers d'Élie Cartan

et quelques remarques sur les nombreuses pistes de recherches qu'ils ouvrent*

Emmylou Haffner†

Version acceptée pour publication dans la *Revue d'Histoire des Mathématiques*.
Merci de ne pas citer cette version.

Abstract

Élie Cartan's archive was donated in 2009 to the Académie des Sciences. I present, here, a part of the archive, namely Cartan's notebooks. These notebooks contain notes from Cartan's research, reading notes (among which notes on the doctoral dissertations read or advised by Cartan), notes in preparation for Cartan's lectures, and notes written by Cartan's students during his lectures. First, we give a general presentation of these forty-five notebooks, which go with and complete the analytical commented catalogue and database *Élie Cartan Papers*. We give quantitative elements allowing for a better grasp of the content and organisation of the archive, and to give a first cartography of it. Secondly, I study in more details certain specific points, so as to shed light on the richness of this archive.

Résumé

Le fonds Élie Cartan résulte d'un don fait en 2009 à l'Académie des Sciences. Nous présentons, ici, une partie de ce fonds, les cahiers de notes de Cartan qui contiennent des recherches de Cartan, des notes de lecture (notamment sur les thèses que Cartan a dirigées ou pour lesquelles il a été rapporteur), des préparations de cours, des notes administratives et personnelles, et des notes rédigées par les étudiants de Cartan lors de ses cours. D'une part, nous donnons une présentation générale de ces quarante-cinq cahiers accompagnant et complétant le catalogue analytique commenté et la base de données *Élie Cartan Papers*. Nous donnons des éléments quantitatifs permettant de mieux discerner le contenu et l'organisation des cahiers de Cartan et d'en dresser une première cartographie. D'autre part, nous étudions plus précisément certains exemples, afin de mettre en lumière la richesse de ce fonds.

*Ce travail a bénéficié du soutien de la Région Lorraine et de la Fondation Clemens Heller. Mes remerciements à Frédéric Brechenmacher, Marc Moyon, Philippe Nabonnand et deux rapporteurs anonymes pour leurs commentaires sur une première version de ce texte.

†Arbeitsgruppe Didaktik und Geschichte der Mathematik, Bergische Universität Wuppertal

La carrière d'Élie Cartan en mathématiques et en physique est très riche[1]. Ses apports sont fondamentaux, notamment pour la géométrie différentielle, la classification des groupes de Lie et des espaces symétriques et les mathématiques de la relativité générale. À l'Académie des Sciences de Paris, sont conservés neuf cartons contenant les archives d'Élie Cartan, dont les enfants d'Henri Cartan ont fait don en 2009. Michèle Audin a été chargée, par les enfants d'Henri Cartan, de trier l'immense volume d'archives laissé par Henri Cartan qui semble n'avoir rien (ou presque) jeté de ses papiers ([Audin, 2012], 2). Les archives d'Élie Cartan en constituaient, nous a dit Audin, moins d'un quart. Le fonds aujourd'hui conservé à l'Académie des Sciences, numéroté 38J, se compose de cahiers, de documents administratifs (concernant la Faculté des Sciences de Paris, le Centre National de la Recherche Scientifique, l'Académie des Sciences et d'autres sociétés scientifiques), d'extraits de sa correspondance, de manuscrits divers (notes scientifiques, brouillons d'articles, livres, conférences, polycopiés de cours...) et reproductions d'articles d'autres mathématiciens[2].

Je présente ici une partie du fonds, les cahiers de notes de Cartan, afin d'esquisser une vue d'ensemble des nombreux éléments qui s'entrecroisent dans ces cahiers, et d'indiquer quelques unes des nombreuses portes qui s'ouvrent par l'exploration de ce fonds. D'une part, je donne une présentation générale de ces quarante-cinq cahiers, accompagnant et complétant le catalogue analytique commenté et la base de données *Élie Cartan Papers*[3], et j'exploite les données disponibles sur le site *Élie Cartan Papers*, d'un point de vue descriptif et quantitatif. D'autre part, en parallèle de cette étude prospective et descriptive, je propose de considérer de plus près certains des aspects des cahiers qui ont attiré mon attention (et relevant d'un choix forcément subjectif) pour mettre en lumière la richesse de ce fonds – sans aucune prétention à l'exhaustivité. La taille du fonds et la variété des sujets abordés dans les cahiers donnent à ces archives une ampleur qui les rendent difficilement exploitables par une seule personne. Suivant la mise en place du site *Élie Cartan Papers* qui se veut un outil pour les historiens souhaitant étudier les archives de Cartan, je souhaite ici mettre en avant cette richesse en proposant une présentation générale plus poussée, et qui pourra mener à des analyses plus précises.

Si la mise en place du site *Élie Cartan Papers* s'est jusqu'ici concentrée exclusivement sur les cahiers de Cartan, le but n'est pas pour autant d'isoler cette partie du fonds des autres ressources qui y sont disponibles. Mentionnons, notamment que l'on trouve des extraits de correspondance dans le carton 6, des carnets de notes de petit format utilisés

[1] Je cite, ici, quelques sources qui m'ont aidée dans mon travail sur le fonds Élie Cartan : [Chorlay, 2007], [Chorlay, 2009], [Cogliati, 2012], [Chern et Chevalley, 1952], [Nabonnand, 2009], [Nabonnand, 2016], [Sharpe, 1997], [Scholz, 2012], [Scholz, 2016]. Ces références ont guidé mon travail sans qu'il soit possible de leur faire toute leur place dans le corps de l'article : d'une part, de nombreux extraits que j'ai choisis datent des années 1930, tandis que la plupart de ces études se concentrent sur des travaux de Cartan datant d'avant ou de pendant les années 1920 ; d'autre part, je propose ici une description du fonds et ai préféré, pour cette première cartographie, en parcourir l'ensemble afin de donner une vision panoramique des textes qui rassemblent déjà à eux seuls plus de 6000 pages. Il m'a donc fallu remettre à plus tard l'établissement de liens entre ces cahiers, les travaux publiés de Cartan et les analyses qui en ont été faites.

[2] Voyez `http://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/fonds_pdf/Fonds_Cartan.pdf`.

[3] `http://eliecartanpapers.ahp-numerique.fr/` que je présente dans le paragraphe 1.1.

lors de concours et examens dans la boîte 7-01, les manuscrits de ses livres et articles dans le carton 8 du fonds, et des textes de conférences (dont les brouillons peuvent parfois être trouvés dans les cahiers) dans le carton 9. Tous ces éléments apporteront naturellement des éclairages complémentaires à ce qui se trouve dans les cahiers. Dans ce qui suit, je n'évoquerai toutefois presque pas le reste du fonds.

1 Les cahiers d'Élie Cartan : présentation générale du fonds

Le fonds Élie Cartan comprend soixante cahiers. Les quinze premiers cahiers du fonds (1-01 à 1-15) contiennent des notes prises par Cartan lorsqu'il était lui-même élève de l'École Normale Supérieure puis étudiant en thèse. Ces cahiers contiennent des notes sur les cours et conférences à l'ENS et à la Sorbonne d'Appell, Bourlet, Darboux, Friedel, Gernez, Hermite, Picard, Poincaré, Goursat et Tannery. Ils abordent donc d'autres sujets que les mathématiques.

Les quarante-cinq cahiers restants (1-15bis à 1-57) couvrent la période de 1893 à 1947 et contiennent :

- des recherches personnelles de Cartan ;
- des notes de lecture de travaux de ses contemporains (envoyés directement à Cartan, présentés à l'Académie des Sciences, lus pour son usage personnel, ou encore sur lesquels Cartan avait un rapport à rédiger) ;
- des notes de lecture des thèses que Cartan a dirigées ou pour lesquelles il a été rapporteur ;
- des notes de préparation de ses cours : plans détaillés, plannings, quelques leçons rédigées, parfois également des recherches en lien avec le sujet du cours ;
- des bibliographies (sur les équations différentielle, la géométrie, ...) ;
- des notes administratives : rapports d'activité du CNRS, notices nécrologiques, la préparation de son jubilé, des allocutions à l'Académie – en particulier, au cours de son année de présidence de l'Académie ;
- diverses notes personnelles (comptes, exercices d'anglais...) ;
- enfin, des notes rédigées par les étudiants de Cartan lors de ses cours.

Il ne fait aucun doute que les quinze premiers cahiers, contenant des notes forment eux-mêmes un objet extrêmement intéressant pour l'histoire des mathématiques et pour l'histoire de l'enseignement. Les cahiers 1-15bis à 1-57 sur lesquels nous avons choisi de nous concentrer sont ceux dont on peut identifier le contenu comme étant originellement de Cartan, c'est-à-dire les cahiers de sa main ou provenant de ses enseignements[4].

[4] Le fonds contient également 29 carnets de notes de petit format (boîtes 7-01 et 7-02), qui n'ont pas été étudiés. Parmi eux, les vingt-cinq carnets de 7-01 sont des carnets utilisés lors de concours et examens, rassemblant des sujets et les notes prises lors des oraux. Certains des cahiers de la boîte 1, contiennent de telles notes et l'on pourra se faire une idée de leur contenu. Les quatre cahiers de 7-02 sont essentiellement des notes de lecture ou des notes bibliographiques. Le carnet 7-02/02, par exemple, contient de nombreuses références que Cartan a visiblement lues d'après les notes (plus ou moins détaillées) qui accompagnent une grande partie de ces références.

Dans les quarante-cinq cahiers étudiés, il y a trente-huit cahiers écrits par Cartan. Les cahiers restants sont constitués de notes rédigées par les étudiants de Cartan pendant certains de ses cours (voyez le paragraphe 3.2). La répartition des cahiers est loin d'être linéaire et présente un certain nombre de lacunes : 8 cahiers avant 1912 (dont 6 dans les années 1890), aucun cahier entre 1913 et 1919, 11 cahiers pour les années 1920, 15 cahiers pour les années 1930, 10 cahiers entre 1940 et 1947, et un cahier dont la datation est difficile car il semble constitué de plusieurs morceaux de cahiers différents (sur lequel quelques détails sont donnés ci-dessous)[5]. Je présente un graphique de la répartition par année des cahiers en annexe de cet article (Annexe A).

Il est notable que les lacunes constatées dans les cartons de cahiers se retrouvent dans de nombreuses parties du fonds. En particulier, dans les lettres conservées de la correspondance de Cartan, aucune n'est antérieure à 1922[6]. D'après Audin[7], les archives d'Élie Cartan avaient déjà été triées par Henri Cartan et son épouse. Les lacunes constatées dans le fonds sont donc vraisemblablement antérieures à la mise en archives.

Les cahiers contenant des notes de la main de Cartan et les cahiers rédigés par ses étudiants ont été traités séparément. Un cahier fait une exception notable à cette règle, le cahier 1-36, constitué pour moitié d'un cours sur l'applicabilité des surfaces écrit par Marcel Brousseau, vraisemblablement plus d'une dizaine d'années avant d'être utilisé par Cartan pour préparer, à partir du 17 mars 1944, un rapport d'activités du CNRS. Les cahiers rédigés par les étudiants de Cartan datent, dans l'ensemble, des années 1920-30 et sont dans un état remarquable.

La plupart des cahiers de la main de Cartan sont également en excellent état (bien que les pages écrites au crayon à papier n'aient pas toujours très bien survécu aux années), à une exception notable : les cahiers 1-20ter et 1-21. Le cahier 1-20ter, en très mauvais état et dont la plupart des pages se détachent, contient les notes d'un cours de mécanique (mouvements, attraction universelle, dynamique...). Les pages en ont été numérotées dans le désordre (lors de la mise en archive) – un détail qui ne se remarque qu'à la lecture. Les pages du cahier, dont la graphie suggère un jeune Cartan, sont systématiquement divisées en deux : une partie gauche servant de marge, dans laquelle se trouvent des dessins, titres, et quelques annotations, et une partie droite contenant le texte même. Cette présentation est atypique par rapport aux autres cahiers, mais se retrouve dans les quinze premiers cahiers, comme le cahier 1-11 contenant les notes d'un cours d'électrodynamique de Poincaré ou le cahier 1-15 contenant les notes de conférences de Tannery à la Sorbonne.

Le cahier 1-21 est partiellement constitué de notes mathématiques et de pages complétant vraisemblablement le cahier 1-20ter : non seulement la présentation est similaire, mais certaines pages complètent de manière assez évidente des pages du cahier 1-20ter[8].

[5] La numérotation du catalogue de l'Académie des Sciences n'est pas exactement chronologique.

[6] Le fonds comprend une lettre de Vessiot de 1913, mais celle-ci est adressée à Émile Borel, pas à Cartan.

[7] Communication personnelle.

[8] Ainsi, par exemple, la dernière page du cahier 1-21 se termine sur une phrase interrompue : « On peut considérer celles [des manières possibles de faire la réduction de forces appliquées à un corps solide

J'ai tenté de reconstruire le cahier initial, mais avec un succès seulement partiel – si cette reconstruction est la bonne, il manque alors des pages au cahier. Enfin, tandis que les notes mathématiques du cahier 1-21 ont pu être datées de 1912, les pages de cours de mécanique, elles, semblent être à rapprocher des notes prises par Cartan lorsqu'il était étudiant, au début des années 1890.

1.1 Le site *Élie Cartan Papers* et l'exploitation du fonds

Élie Cartan Papers

Pour naviguer dans l'ensemble des cahiers étudiés, a été mis en place un catalogue analytique linéaire page à page de chaque cahier[9]. Le catalogue, qui se présente sous forme de tableau, tente de répondre à deux exigences : fournir un maximum d'informations et éviter d'y imposer des biais de lecture. Il est donc organisé en seulement quatre catégories : sujet, contenu, résultats et notes. Les trois premières suivent exclusivement les indications laissées par Cartan, la dernière contient des notes explicitement laissées par les lecteurs / rédacteurs du catalogue. La colonne "Résultats" ne donne, en règle générale, que ce qui est présenté par Cartan comme un résultat notable (théorème, lemme, etc.) de manière explicite. Il arrive donc souvent que dans la colonne "Contenu" se trouvent des 'résultats' au sens de conclusions de recherches (conclusion de calculs, constatation d'une erreur, explicitation de propriétés trouvées...).

Ce catalogue s'accompagne d'un système de mots-clefs et de références (dont je dirai quelques mots plus bas), et vise à offrir une cartographie générale du fonds sous forme de base de données textuelle et iconographique. Afin de rendre disponible cette cartographie, nous avons conçu, avec l'aide de Pierre Couchet (Archives Poincaré – Université de Lorraine), un site utilisant le logiciel libre OMEKA et permettant d'explorer le fonds grâce aux métadonnées, mots-clefs, références et au contenu du catalogue. Cette base de données se trouve sur le site `http://eliecartanpapers.ahp-numerique.fr`[10].

Les cahiers sont organisés en « Collections », permettant de différencier entre les cahiers rédigés de la main de Cartan et les cahiers de notes prises par ses étudiants[11]. Pour naviguer dans le corpus, le site *Élie Cartan Papers* propose de parcourir les cahiers par date, référence et par mots-clefs. Il est ainsi possible de parcourir le fonds par de simples recherches (par mot-clef, par référence, mais également dans les tableaux du catalogue qui sont retranscris en plein texte), et d'avoir un aperçu immédiat du panorama dessiné par les cahiers.

à deux forces dont l'une passe par un point arbitraire] pour lesquelles la force ϕ est perpendiculaire à la force F, alors les forces... » La suite peut alors se trouver sur la troisième page du cahier 1-20ter : « ... engendrent un cône du 2e ordre... ». Cette page faisait initialement suite à la phrase : « Il y a 2 solutions. ».

[9] Un exemple de quelques pages du catalogue est donné en Annexe B.

[10] La mise en place de ce site se veut le début d'un travail collaboratif pour étudier de manière plus approfondie le fonds d'archives É. Cartan. Ainsi, d'une part, les utilisateurs sont invités à participer à l'amélioration de la cartographie. D'autre part, nous complèterons au fur et à mesure le contenu du site avec les quinze cahiers restants et, à terme, avec sa correspondance et d'autres éléments du *Nachlass*.

[11] Nous avons créé une collection supplémentaire pour les cours suivis par Cartan à l'ENS et à la Sorbonne et mis en ligne des photographies de deux de ces cahiers.

Exploration et exploitation du fonds

La mise en place du site Élie Cartan Papers repose sur l'étude et le catalogage intégral des cahiers de Cartan. Soulignons qu'il ne s'agit pas d'une édition à proprement parler, mais plutôt d'un inventaire, qui se doit d'être utilisé par l'historien comme un outil, un intermédiaire pour l'accès aux sources.

Dans l'étude des cahiers de Cartan, certaines questions ayant guidé l'étude de corpus étendus[12] ne se posent pas, puisque celui-ci est déjà constitué. Le travail se fait alors du point de vue de l'organisation interne du corpus. Une première organisation se présente naturellement en distinguant entre Cartan élève, Cartan chercheur, et les cahiers qui ne sont pas de la main de Cartan. Une fois cette première distinction effectuée, il s'agit de concilier la volonté de conserver l'intégrité physique des cahiers et la possibilité de déplier le contenu du fonds et de permettre l'accès à une archive structurée. En effet, l'un des intérêts principaux de ce fonds est de mettre en lumière les nombreuses couches des activités du mathématicien mêlées et mises au même niveau, offrant la possibilité d'observer comment ces différents aspects se rencontrent et, parfois, se complètent. Ainsi, l'intégrité des cahiers est essentielle pour saisir toute la richesse du fonds, et le document physique fait loi. En cela, la démarche adoptée est à rapprocher d'une approche génétique[13].

Dans les cahiers de la main de Cartan, il n'existe ni différence matérielle notable entre les éléments du corpus[14], ni différence de nature[15]. L'exploration et la cartographie du fonds a été associée aux contenus (notes de cours, de lecture, différentes recherches, travaux administratifs...) : cela permet de reconnaître la multiplicité desdits contenus sans projeter sur le fonds des catégories établies pour d'autres sortes de fonds et qui auraient gommé la spécificité de ce corpus. Je n'ai procédé à aucun tri qualitatif qui m'aurait paru imposer un biais dans l'abord du corpus : les contenus sont listés plutôt que séparés ou classés, les différents degrés d'avancement ne sont pas pris en compte, et aucune hiérarchie n'est établie.

La possibilité d'une exploitation efficace d'un corpus d'une telle densité est également soulevée. Peut-on le traiter autrement que par tranches de taille réduite (temporelle ou thématique, par exemple) ? Est-il possible – et cohérent – de s'en faire une idée globale ? Comment mettre au jour et saisir les articulations au sein des cahiers ? Peut-on donner à voir, par exemple, les réseaux d'exemples ou de méthodes, les récurrences thématiques, les singularités ? Quelle stratégie adopter pour permettre au lecteur un accès à une archive structurée, sans gommer pour autant les spécificités de chaque cahier ? Considérant la forte unité du fonds et l'aspect foisonnant de la plupart des cahiers, il s'agit alors de mettre en place des catégories transversales afin de pouvoir effectivement naviguer dans le fonds tout en évitant de préjuger des (possibles) connexions entre cahiers

[12]Par exemple [Gispert, 2015], [Goldstein, 1999], [Leloup, 2009], [Brechenmacher, 2010].

[13]Précisons toutefois qu'il ne s'agit, ici, que des prémisses d'une possible étude de génétique textuelle pour les cahiers de Cartan. Sur la génétique textuelle, on pourra consulter par exemple [de Biasi, 2011], ainsi que [Guilbaud, 2013], [Barrellon et Guilbaud, 2014].

[14]Il arrive, de manière assez anecdotique, que des feuilles imprimées soient glissées entre les pages des cahiers – feuilles que j'ai toujours signalées.

[15]Par exemple, il est difficile de trouver des distinctions similaires aux différents types de lettres ([Passeron, 2009]).

– un problème commun pour toute approche de ce type.

Pour cela, j'ai complété le catalogue par une liste de sujets étudiés dans les cahiers (par exemple, « détermination des sous-groupes maximums des groupes simples »), de références, de dates et de mots-clefs. Les références sont celles données explicitement par Cartan. Les dates sont établies soit par des indications explicites (par Cartan, ou des événements marquants signalés dans les cahiers, comme la préparation de son jubilé ou les discours lors de la présidence de l'Académie des Sciences), soit grâce aux thèses qu'il lit, soit enfin en liant les recherches de Cartan à ses travaux publiés (par exemple, dans le cas de recherches sur la théorie de la relativité).

Ce sont les mots-clefs qui permettent le plus efficacement de cartographier le fonds et d'esquisser des réponses aux questions évoquées ci-dessus. Les mots-clefs choisis répondent aux principes suivants :

– Utilisation de la terminologie de Cartan.
– Les mots-clefs sont établis cahier par cahier.
– Éviter les mots-clefs trop généraux (par exemple plutôt que « groupes », utiliser « groupe abstrait », « groupes continus », « groupes simplement transitifs », etc.)

Ce dernier point implique qu'il est fréquent que certains termes apparaissent une seule fois dans tout le corpus. Le système de mots-clefs est donc généreux (846 mots-clefs au moment de la rédaction de cet article) mais permet ainsi de concilier la prise en compte du corpus dans son ensemble et les singularités des cahiers[16]. Si le mur de mots-clefs[17] peut paraître vertigineux, j'espère avoir fait justice à la richesse (de cette partie) du fonds Cartan, et rendue possible une meilleure exploitation du fonds – qui, comme je l'ai dit plus haut, ne saurait être le travail d'une seule personne.

1.2 Une (première) cartographie

Les cahiers de Cartan sont le plus souvent éclectiques et abordent de nombreux thèmes différents alternant, parfois à chaque page, entre de nombreux sujets. Néanmoins, Cartan précise systématiquement les sujets abordés et il est généralement facile de s'orienter dans les cahiers. Ceux-ci étant un outil de travail pour Cartan, il lui arrive également de numéroter les pages et de renvoyer lui-même aux pages précédentes lorsque cela est nécessaire[18]. Je donne ci-dessous un exemple de table des matières d'un cahier de Cartan (cahier 1-39, 140 pages, écrit en 1933-34).

---

[16] Des détails supplémentaires sur les mots-clefs sont donnés ci-dessous.

[17] Voyez `http://eliecartanpapers.ahp-numerique.fr/items/tags?sort_field=name&sort_dir=a`

[18] Mentionnons toutefois une exception notable, lorsque les notes de lecture, et particulièrement pour les thèses, s'étendent sur plusieurs pages (voire plusieurs dizaines de pages) et reprennent les sujets abordés dans le manuscrit, donnant l'illusion de changements de sujets.

Cartan 1-39
Table des matières

La plupart des thèmes abordés dans les cahiers sont assez typiques de ce que l'on connaît des activités mathématiques de Cartan. Dans les mots-clefs mis en place pour cartographier les cahiers de Cartan, les trente plus fréquents sont les suivants :[19]

espace riemannien	25	connexion projective	11
transformations infinitésimales	21	équations de Pfaff	11
connexion	17	cours	11
géodésiques	16	espace euclidien à n dimensions	10
trièdre	15	formes de Pfaff	10
thèse	14	congruences	10
forme fondamentale	13	congruences paratactiques	9
lignes de courbure	13	espace projectif	9
courbure	13	espace métrique	9
homographie	12	extrémale	9
invariants	12	connexion euclidienne	9
rapport anharmonique	12	caractéristique	9
torsion	12	surfaces	9
groupes semi-simples	12	variété	9
groupes simples	12	réseaux	9

Comme je l'ai mentionné plus haut, et comme on peut le constater avec, par exemple, des mots-clefs tels que « connexion », « connexion projective », et « connexion euclidienne », j'ai choisi de différencier entre les connexions et de même pour les groupes, variétés, etc.

On trouve parmi les notes de Cartan, des incursions dans des domaines à la lisière de ses recherches, comme par exemple, plusieurs pages sur la théorie de Galois (cahier 1-43, page 51 et suivantes, ca. 1940)[20] ou l'arithmétique dans les corps de Gauss (cahier 1-46, page 15 et suivantes, août 1940), ainsi que des notes de lectures (parfois détaillées) sur *Les étapes de la philosophie mathématique* de Brunschvicg (cahier 1-52), *La valeur de la science* de Poincaré (cahier 1-38), et plusieurs dizaines de pages sur la pédagogie de Herbart (cahier 1-15b). Néanmoins, si l'on classifie les recherches présentes dans les cahiers en thèmes (ou sous-disciplines) mathématiques, la géométrie est largement dominante (en particulier les recherches sur les surfaces et variétés), suivie de près par les recherches sur les groupes. De ce point de vue, donc, les cahiers n'offrent pas de surprise – et il serait sans doute naïf d'en attendre – et reflètent l'unité structurelle de l'œuvre de Cartan.

L'évolution temporelle des thématiques des recherches contenues dans les cahiers est, elle aussi, cohérente avec ce que l'on sait déjà des travaux de Cartan. On note quelques changements dans la forme, néanmoins. Cartan jeune est soigné, rigoureux,

[19] Chaque mot-clef apparaît une seule fois par cahier, qu'il y soit consacré cinquante ou une seule page. De même pour les notes de thèse de ses étudiants : pour faciliter la navigation dans le système de mots-clefs, j'ai choisi d'utiliser simplement « thèse » au lieu de « thèse de X ». Aussi, « thèse » n'apparaît qu'une seule fois par cahier même si plusieurs thèses y sont annotées. Les listes de sujets et références présentes pour chaque cahier permet immédiatement d'avoir plus de détails sur les thèses en question.

[20] Cartan publie « La théorie de Galois et ses généralisations. » ([Cartan, 1938a]) dans le volume 11 (1938-1939) de *Commentarii Mathematici Helvetici.*

systématique dans ses notes et brouillons. Les années passant, Cartan explique moins ce qu'il fait – mais les instances de recherches où il n'explique *rien* restent rares – et l'on voit s'amplifier une tendance à étudier de nombreux cas particuliers, à faire et refaire de nombreux calculs dont seront tirés les résultats généraux... qui ne sont pas toujours prouvés dans les cahiers. Si les calculs qui semblent parfois interminables peuvent être difficiles à pénétrer, ce n'est pourtant pas parce que Cartan n'explicite pas le cadre dans lequel ils se déroulent – au contraire. En plus des titres mentionnés plus haut, les rédactions sont souvent déjà soignées au brouillon, les résultats mis en avant clairement, les résultats antérieurs ou liens avec d'autres travaux sont également souvent mentionnés explicitement – il arrive même que Cartan mette en place des références internes dans un cahier, en numérotant lui-même les pages.

Quoi qu'il en soit, les cahiers peuvent être difficiles à appréhender pour qui ne connaît pas bien l'œuvre et les habitudes de Cartan – et pas seulement en raison de la difficulté des calculs. Une difficulté supplémentaire réside en ce qu'ils ne sont que rarement explicités ou contextualisés, et dans les raccourcis de Cartan qui restent souvent opaques. Ainsi, les cahiers de Cartan semblent amplifier la difficulté déjà connue de lecture des travaux de Cartan, évoquée (entre autres) par Chern et Chevalley en 1952[21].

2 Les recherches de Cartan

Comme la répartition chronologique des cahiers le suggère, on ne trouvera, dans les carnets de Cartan, ni vision d'ensemble, ni vision exhaustive de ses travaux. Je propose, dans ce paragraphe, une description des contenus des cahiers qui ne sont pas explicitement présentés comme préparations de cours ou notes de lectures par Cartan[22]. Je m'intéresserai en particulier aux possibilités d'exploitation des brouillons en lien avec les recherches publiées de Cartan et tenterai de mettre en avant certaines des possibilités spécifiques à la nature des cahiers en tant que cahiers de brouillons. Ici, il s'agira donc de l'exploitation 'locale' de certains cahiers (ou de certains extraits) dans le but de tirer profit de passages déterminés.

En tant que carnets de notes (ou de brouillon), les cahiers de Cartan sont un instrument de rédaction et d'élaboration du texte – une étape indispensable pour le mathématicien qui est ensuite gommée par la constitution du texte lissé et retravaillé pour la

[21] « *[H]is approach which, though leading to the heart of the problem, was unconventional, and partly due to inadequate exposition. Thus, Weyl, in reviewing one of Cartan's book [*La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*] wrote in 1938 : "Cartan is undoubtedly the greatest living master in differential geometry (...) I must admit that I found the book, like most of Cartan's papers, hard reading."* » ([Chern et Chevalley, 1952], 218). Weyl, dans [Weyl, 1938], continue : « *Does the reason lie only in the great French geometric tradition on which Cartan draws, and the style and contents of which he takes more or less for granted as a common ground for all geometers (...) ?* »

[22] Précisons, ici, que, bien que Cartan lui-même ne donne que très peu d'indications de ce point de vue, la coïncidence de recherches sur certains sujets et d'un plan de cours dans le même cahier invite à étudier plus en détail la possibilité que certaines de ces notes soient des recherches approfondies en vue de cours.

publication. Le texte scientifique publié présente les idées de manière logiquement ordonnée et l'ordre d'exposition ne reflète que rarement l'ordre de découverte. Les brouillons donnent à voir plusieurs des couches d'activités du mathématicien, des étapes et états de recherche(s) qui sont invisibles dans les publications – et souvent invisibles également dans les correspondances. Le brouillon porte ainsi chaque geste d'écriture, chaque étape du chemin emprunté et montre les moments successifs de la recherche mathématique – une vision interne de la pratique mathématique vivante et mouvante, en quelque sorte. La richesse des cahiers de Cartan permet notamment de suivre les phases de son travail dans de nombreux cas : comprendre les sources de son travail, les méthodes de découverte (que l'on pourra contraster avec les méthodes d'exposition), parfois également les hésitations et les erreurs.

Dans mon analyse des cahiers, je m'appuie d'une part sur des recherches d'histoire des sciences autour des carnets de notes de recherche, en particulier des carnets de laboratoires (par exemple, dans [Holmes *et al.*, 2003]) qui mettent en évidence de quelle manière les notes de recherche permettent de « reconstruire les chemins vers les découvertes » en outrepassant les « arrangements temporels, [les] omissions des fausses pistes, pistes abandonnées, et des autres étapes rétrospectivement non-essentielles » qui accompagnent la constitution du texte publié ([Holmes *et al.*, 2003], vii). Les notes de recherche, ou ici les cahiers de brouillon, délimitent ainsi un espace de la recherche avant la réécriture structurée qui sera imprimée et communiquée à la communauté scientifique. D'autre part, les recherches autour de la génétique textuelle et de l'exploitation des brouillons en littérature, que j'ai évoquées au début de cet article, ont également guidé certains aspects de ma recherche. En effet, dans certains cas (chanceux), les cahiers de Cartan peuvent offrir des outils et arguments purement textuels pour reconstruire les phases du travail, les étapes des explorations, impasses, et découvertes mathématiques – et peut-être proposer une analyse génétique de certains travaux.

Les exemples proposés ci-dessous ne sont que des moments choisis, mais ils se veulent surtout une illustration du potentiel des cahiers de Cartan.

2.1 Les cahiers et le corpus publié de Cartan

Il est essentiel pour l'exploitation du fonds, et en particulier en ce qui concerne toutes les recherches mathématiques de Cartan, de prendre en compte le lien entre les cahiers et le corpus publié de Cartan[23]. Détacher le fonds d'archive des travaux publiés de Cartan n'a, bien entendu, pas beaucoup de sens et peu d'intérêt. Les cahiers révèlent, sans aucun doute, des facettes de Cartan que l'on connaît mal et que les textes publiés (articles, manuels, etc.) ne nous montrent que partiellement (Cartan enseignant, Cartan lecteur) voire que l'on ne connaissait pas (Cartan lecteur de philosophie, quelques incursions en

[23]Les *Œuvres complètes* de Cartan ont été publiées en trois parties et cinq volumes, entre 1952 et 1955 ([Cartan, 1955]). Les *Œuvres* de Cartan rassemblent l'intégralité de ses travaux publiés organisés de manière thématique. Les articles y sont reproduits exactement comme ils ont été publiés (avec la pagination originale en parallèle de la pagination des œuvres) et aucun travail inédit n'est publié. Dans l'introduction de [Audin, 2011a], Audin mentionne l'existence d'un dossier consacré à l'édition des œuvres de Cartan dans les papiers d'Henri Cartan ([Audin, 2011a], 4).

dehors de ses spécialités mathématiques). Cependant, une grande majorité du contenu des cahiers de Cartan est en lien avec ses recherches publiées, et permettent d'enrichir notre compréhension des travaux de Cartan sous de nombreux poins de vue, par exemple sur la genèse de ses travaux (à la fois dans un sens de genèse textuelle et de constitution 'conceptuelle'), sur certaines pratiques mathématiques qui ne sont pas toujours reflétées dans ses publications (sur lesquelles je reviendrai), ou encore sur les (possibles) influences mutuelles entre recherche et enseignement.

Mentionnons, tout d'abord, que dans les cahiers se trouvent un certain nombre de brouillons de conférences données par Cartan. Ainsi, par exemple, dans le cahier 1-43 (1938-39 à 1942, pages 159-170), Cartan écrit longuement plusieurs versions d'un texte titré « Évolution moderne de la géométrie différentielle ». Ce texte est très proche du bien connu « Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne » ([Cartan, 1936]), mais a visiblement été écrit plus tard[24]. Certains textes, en revanche, semblent ne jamais avoir été publiés. Par exemple, Cartan rédige le brouillon d'un texte titré « L'importance de la notion de structure en géométrie » dans le cahier 1-39 (ca. 1934, pages 5 à 7bis[25]) dans lequel il fait de nombreuses références au Programme d'Erlangen[26], mais dont je n'ai pu retrouver la trace.

Concernant les recherches mathématiques dans les cahiers de Cartan, il convient de souligner en premier lieu que celles-ci sont souvent encore au stade exploratoire. Il est parfois possible de relier certaines recherches des cahiers aux travaux publiés de Cartan, notamment grâce aux dates, mais cela requiert naturellement de prendre des précautions sur l'interprétation des brouillons. Comme le soulignent [Holmes *et al.*, 2003], les brouillons sont « en un sens très proches, et font même presque partie, des instruments et objets de la recherche (...). En même temps, par leur caractère habituellement elliptique, ils possèdent un élément de subjectivité, indiscipline, et d'intimité dont ils doivent être libérés s'ils doivent devenir éléments d'un texte scientifique. Dans cet espace intermédiaire, les objets de la recherche ont été posés sur le papier mais doivent encore devenir prose » ([Holmes *et al.*, 2003], viii). Le processus de « poser sur le papier » peut prendre, chez Cartan, un temps considérable et c'est l'un des aspects qui appelle à la prudence dans une tentative de reconstruction des travaux de Cartan. Il arrive que le lien entre le brouillon et la publication puisse être fait de manière directe. Par exemple[27], dans le cahier 1-15b (ca. 1900), dans lequel il étudie les « groupes infinis transitifs simples à une fonction arbitraire » (page 103 et suivantes), Cartan énonce et prouve le théorème suivant :

[24] Cartan ne fait toutefois pas de référence à son texte de 1936

[25] Une erreur dans la numérotation des pages donne la numérotation suivante : Page 6, Page 7, Page 8, Page 7bis, Page 8bis, Page 9. Il m'a semblé qu'il serait plus facile pour le lecteur de se reporter au numéro effectivement inscrit sur le cahier. Le texte de Cartan, ici, fait donc 5 pages.

[26] La graphie de Cartan étant particulièrement difficile à déchiffrer, pour ce texte, j'ai dû abandonner l'idée de le retranscrire. Cartan y parle essentiellement de groupes et d'équivalences de géométries.

[27] Les exemples, ici et plus loin dans l'article, on été choisis selon deux critères principaux. D'une part, ils illustrent clairement la caractéristique présentée, à la fois sur le fond et sur la forme. D'autre part, sans être triviaux, ils ne demandent pas de mise en contexte extensive qui détournerait l'article de son but premier.

> Le seul groupe simple transitif dépendant d'une fonction arbitraire est le groupe général à une variable. (Cartan 1-15b, 103)

Ce résultat se trouve, de manière plus complète, dans « Sur la structure des groupes infinis » ([Cartan, 1902], 854) et est développé dans le mémoire « Sur la structure des groupes infinis de transformation » ([Cartan, 1904]) de 1904-1905. Dans beaucoup d'autres cas, en revanche, une observation fine des recherches, qui apparaissent comme préliminaires à certains résultats, est essentielle.

Je propose ici un cas dans lequel on retrouve des recherches que Cartan évoque mais qu'il n'a pas publiées : dans [Cartan, 1925], Cartan évoque ses recherches infructueuses pour prouver « le théorème d'après lequel tout tenseur attaché à un groupe linéaire simple ou semi-simple est décomposable en tenseurs irréductibles »[28] :

> Au moment de la rédaction de ce Mémoire (décembre 1922), je regardais comme très vraisemblable, mais sans en avoir la démonstration, le théorème d'après lequel tout tenseur attaché à un groupe linéaire simple ou semi-simple est décomposable en tenseurs irréductibles. M. H. Weyl a réussi tout récemment à démontrer cet important théorème[29]. ([Cartan, 1925], 934)

Le cahier 1-25, daté d'entre 1919 et 1923 d'après des comptes personnels de Cartan en début et fin de cahier, qui contient essentiellement des recherches sur les variétés et la théorie d'Einstein, contient également de nombreuses recherches autour des tenseurs.

Entre ces recherches, quelques pages de recherches sur un « Th[éorè]m[e] de Weyl » (pages 34 à 40) semblent être en préparation de l'article de Cartan « Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl » ([Cartan, 1923]) qui concerne le *Raumproblem* de Weyl[30] et suggèrent donc que cette partie du cahier a été écrite en 1922. Ces notes pourraient également avoir été écrites en vue de la communication de Cartan dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences le 10 juillet 1922 ([Cartan, 1922]). Notons également qu'une lettre de Cartan à Weyl du 9 octobre 1922 indique que l'article, au moment de

[28] Le groupe linéaire (de degré n d'un corps commutatif K) est le groupe des matrices $n \times n$ inversibles (à coefficients dans K, muni de la multiplication matricielle. C'est un groupe de Lie.
Cartan introduit la notion de tenseur de la manière suivante : dans un espace affine, on note $y_1 y_2 ... y_p$ les coordonnées. « Lorsqu'on fait un changement de coordonnées, ces quantités subissent une transformation et toutes les transformations qui correspondent à tous les changements de coordonnées possibles forment évidemment un groupe. Nous dirons que l'ensemble des quantités y_i constitue un tenseur à p composantes. Nous réservons plus spécialement le nom de tenseurs au cas où le groupe des transformations effectuées sur les y_i est linéaire. Les coordonnées d'un point, les composantes d'un vecteur, les coefficients de l'équation d'une quadrique, etc. constituent autant de tenseurs. (...) Le tenseur sera dit irréductible lorsqu'il sera impossible de trouver un certain nombre de combinaisons linéaires (à coefficients constants) des composantes du tenseur donné formant pour elles-mêmes un tenseur. » [Cartan 1925e 934]

[29] Chorlay ([Chorlay, 2009], 253) indique les références suivantes pour les articles de Weyl : "Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung", (Gött. Nachr., 1924)], et "Zur Theorie der Darstellung der einfachen kontinuirlichen Gruppen" (Sitzungsb. Berlin, 1924, p. 338-345).

[30] Voyez [Chorlay, 2015]. Pour une comparaison des approches de Weyl et Cartan, on pourra consulter [Scholz, 2012]. Je tiens à remercier Christophe Eckès pour son aide dans l'identification du « Th[éorè]m[e] de Weyl ».

la lettre, était déjà rédigé[31].

Ces notes situent donc le cahier – du moins ses 40 premières pages – entre juin/juillet et octobre 1922, et donc dans le bon intervalle temporel pour les recherches de Cartan sur la décomposition des groupes semi-simples en tenseurs irréductibles. Cartan revient (après les notes sur le *Raumproblem*) aux groupes simples et émet l'hypothèse suivante :

> Il semblerait qu'on pourrait avoir un tenseur non décomposable en tenseurs irréductibles. (Cartan 1-25, 42)

Les pages suivantes (page 43 à 46) sont composées exclusivement de calculs, à la suite desquels Cartan arrive à la conclusion que son hypothèse est, en fait, impossible. On retrouve donc le soupçon de Cartan, ici, sur la décomposition des groupes linéaires simples ou semi-simples en tenseurs irréductibles, sans énonciation d'un théorème. Il semble que le fonds ne contienne aucune autre recherche sur ce sujet.

Enfin, terminons en mentionnant la possibilités de suivre, dans certains cas, le cheminement de Cartan (du moins, en partie). De ce point de vue, en suivant les notes et recherches de Cartan au fil des cahiers, il semble que deux approches soient possibles : d'une part, étudier la genèse de certains travaux, et d'autre part suivre des recherches autour d'un thème spécifique (par exemple, les groupes clos ou le théorème de Lie) à différentes étapes de la carrière de Cartan.

Considérons, par exemple, les recherches de Cartan sur les représentations linéaires des groupes[32]. Celles-ci parcourent l'œuvre de Cartan et se retrouvent en particulier dans les cahiers 1-33 (1928-30), 1-38 (1933-38), 1-40 (1937-40) et 1-51 (1943-44). Une étude fine des brouillons de Cartan – notamment en les liant aux articles publiés – sur le sujet peut selon le point de vue adopté permettre d'explorer la genèse de certains travaux publiés en 1930, ou de suivre les travaux de Cartan sur le sujet sur une période longue[33] Dans ce qui suit, je n'entrerai pas dans le détail de l'analyse, qui demanderait sans doute plus d'un article, mais tenterai de mettre en exergue quelques points qui me semblent saillants.

En 1930, sont publiées deux notes de Cartan dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences sur les représentations linéaires des groupes de rotations de la sphère et des groupes clos simples et semi-simples ([Cartan, 1930b], [Cartan, 1930a]). Dans

[31] « ... Permettez-moi de vous envoyer un exemplaire d'un mémoire que je viens de faire paraître dans le *Journal de Mathématiques*. Les procédés de calcul que j'y emploie ne sont pas ceux du calcul différentiel absolu ; ce sont les mêmes qui m'ont permis d'établir une théorie générale des groupes continus... » [Cartan et Weyl, 1922] cité dans [Nabonnand, 2005]. L'étude de l'exemple des recherches sur la décomposition en tenseurs irréductibles des groupes linéaires simples et semi-simples a donc permis d'identifier également des recherches liées à [Cartan, 1923], une conséquence imprévue mais qui illustre bien la richesse des cahiers.

[32] Une représentation linéaire d'un groupe consiste à représenter ses éléments comme des transformations linéaires d'espaces vectoriels. Il s'agit de décrire le groupe pour le voir comme un groupe de matrices.

[33] Il n'est pas toujours possible de suivre un fil des travaux de Cartan de cette manière. Non seulement le fonds a des lacunes, mais certains travaux, comme ceux sur les spineurs, n'apparaissent que très peu dans les cahiers conservés à l'Académie des Sciences.

[Cartan, 1930b], Cartan montre que toute représentation linéaire bornée est continue (pour le groupe de rotation des sphères). Dans [Cartan, 1930a], il étend ce résultat à tout groupe de Lie clos simple ou semi-simple. La même année, il publie un article plus long sur les représentations linéaires des groupes clos dans les *Commentarii Mathematici Helvetici* ([Cartan, 1930c]).

Certains des cahiers, comme le cahier 1-33, qui précède des travaux de Cartan sur le sujet, donnent à voir les différentes étapes des explorations de Cartan. La question des représentations linéaires revient régulièrement dès la première page du cahier 1-33, où Cartan s'intéresse à la représentation linéaire du groupe des déplacements. La page 39 est consacrée à une étude des « [s]ous-groupes clos d'un groupe simple clos et représent[ation] linéaire ». Cartan étudie les caractères pour les groupes clos (pages 76 à 85), les groupes finis (pages 89 à 100) et les groupes symétriques (pages 100 à 125). Ces parties du cahier comportent plusieurs dizaines pages couvertes de calculs généralement dépourvus d'explication puis une reprise au propre de la page 120 à la page 125[34].

Cartan y esquisse ensuite le début d'une démonstration d'un résultat essentiel pour prouver le résultat présenté dans [Cartan, 1930a] : la continuité des « automorphies des groupes clos semi-simples »[35] ([Cartan, 1930a], 723). À l'issue d'une quinzaine de pages d'études de cas particuliers sur les espaces clos, comme l'espace hermitien elliptique (page 223), Cartan note :

> Les automorphies du groupe de déplacements hermitiens elliptiques à 2 dimensions sont-elles continues ? Mystère. Oui. (Cartan 1-33, page 237)

Suivent, alors, 17 pages d'études de différents cas (groupe hyperbolique, groupe homographique, groupe orthogonal à $2n$ variables...) pour lesquels Cartan montre que les automorphismes sont continus, au terme desquelles Cartan note :

> Il doit y avoir là les éléments d'une méthode générale applicable à tous les groupes semi-simples clos dont toutes les automorphies sont très probablement continues. (page 254)

Cartan ne donne pas, ici, de preuve générale de la continuité des automorphismes des groupes clos semi-simples. En revanche, il montre que toute automorphisme d'un groupe simple clos est continu, à la page 264 du cahier.

Si l'on souhaite continuer à tirer le fil des recherches de Cartan autour des représentations linéaires, on peut consulter, notamment, les cahiers 1-38 et 1-40 qui correspondent à l'époque de la publication de [Cartan, 1938b], ainsi que le cahier 1-51, daté de 1943-44, dans lequel se trouvent près d'une cinquantaine de pages de recherches – et de calculs – autour des représentations linéaires (groupes finis, groupes linéaires continus, G_{14}, E_6, ...).

[34] Le cahier comprend également une trentaine de pages de recherches sur les espaces et groupes clos, mais qui ne semblent pas directement liées à la question des représentations linéaires.

[35] Un automorphisme d'un groupe G est une bijection de G dans lui-même conservant la structure de groupe.

Je ne développe pas plus cet exemple pour des raisons d'espace et de complexité du sujet – en particulier considérant le caractère clairement exploratoire des recherches exposées ici. J'ai seulement souhaité mettre en avant de quelle manière l'exploration menée par Cartan se dessine clairement dans (certains de) ses cahiers.

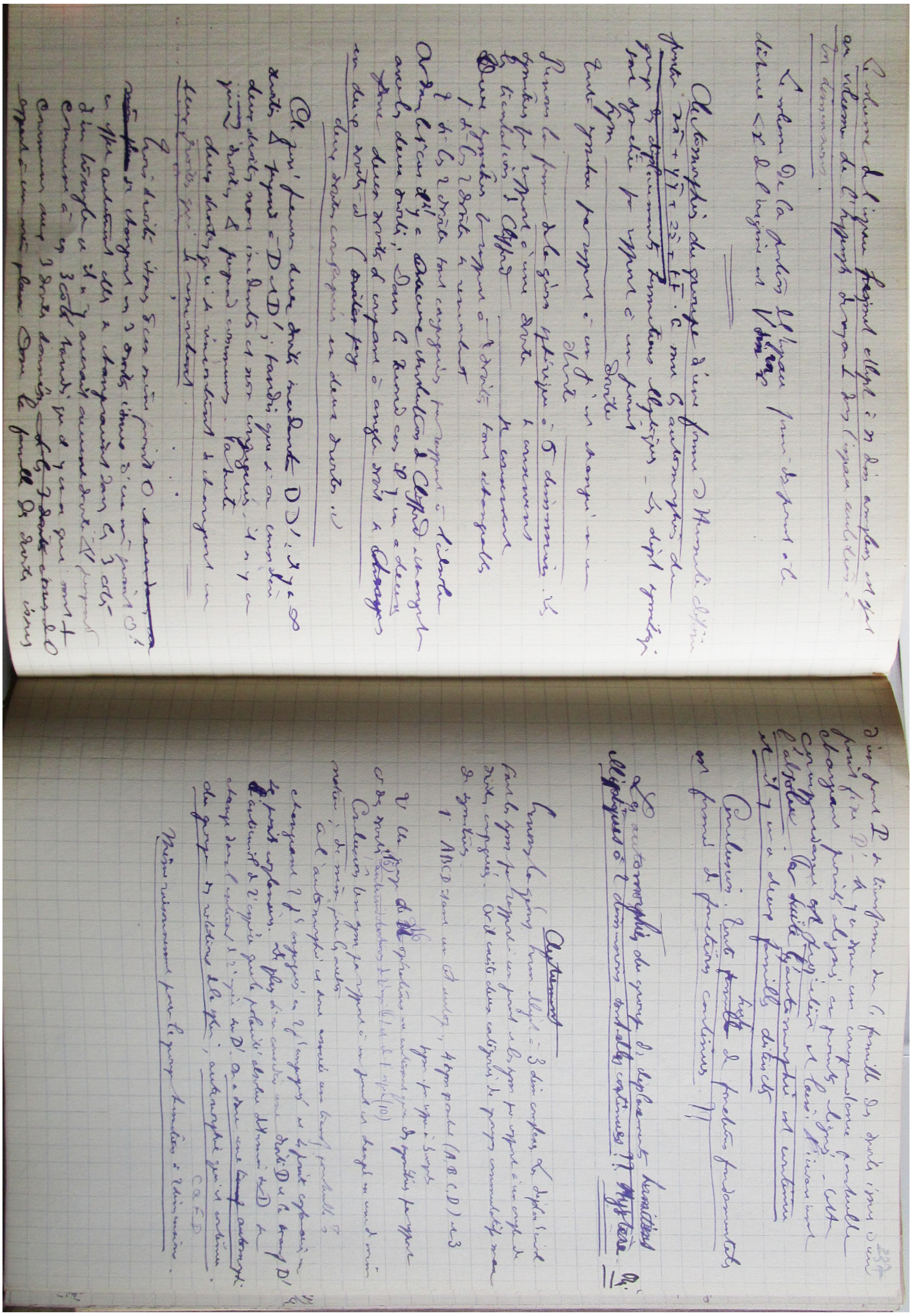
Ainsi, du point de vue d'une étude de la « genèse » de certaines recherches de Cartan, les cahiers ont beaucoup à offrir. En l'occurrence, bien entendu, la richesse foisonnante des cahiers de Cartan est autant un avantage qu'un handicap : il s'agit de pouvoir identifier les bons textes, trier les brouillons, pénétrer suffisamment les textes pour pouvoir émettre des hypothèses sur les pistes (et fausses pistes) menant aux travaux de Cartan. L'étude des brouillons permet ainsi de mener une analyse micro-historique sur les procédés et pratiques développés par Cartan, ainsi que la manière dont il choisit de constituer son texte pour la publication. D'autre part, ces cahiers donnent également de nombreux éléments pour analyser certaines pratiques mathématiques, ou certains aspects des pratiques mathématiques, de Cartan, qui ne sont pas toujours reflétées dans ses publications.

2.2 Cartan, les calculs et les cas particuliers

Comme je l'ai déjà évoqué, les brouillons, les notes de recherche, expriment le processus de découverte de leur auteur. Dans le cas de Cartan, il apparaît clairement dans ses cahiers qu'il entre souvent dans un sujet par l'étude de divers exemples, et l'explore en grande partie à travers des calculs qu'il n'hésite pas à refaire plusieurs fois et de plusieurs manières différentes. Un certain nombre de résultats sont également trouvés de cette manière (comme le théorème sur les automorphies des groupes semi-simples mentionné ci-dessus). Les recherches sur les représentations linéaires (et les caractères) des groupes mentionnées dans le paragraphe précédent exhibent cette caractéristique. De ce point de vue, les cahiers peuvent également donner la possibilité de distinguer entre la démarche de Cartan au brouillon, ce qu'il choisit de publier, et la forme sous laquelle il choisit de publier.

Remarques sur les calculs

Les cahiers contiennent une grande quantité de calculs, ce qui ne surprendra pas les connaisseurs de Cartan. En 1930, dans une recension de [Cartan, 1930d], A. Buhl écrit de Cartan qu'il est « le prodigieux calculateur de la Théorie des Groupes ; quels patients et prodigieux monuments de transformations algébriques explicites il a bâtis en de longs et nombreux mémoires amorcés par une thèse déjà magnifique ! » ([Buhl, 1930], 192). Buhl souhaite souligner, ici, que Cartan, quoique « prodigieux calculateur », reste ouvert aux nouvelles méthodes et les maîtrise même mieux que les « géomètres plus jeunes tels M. H. Weyl » ([Buhl, 1930], 192). Néanmoins, les calculs ne perdent pas en importance, au fil du temps, dans les cahiers de Cartan (d'ailleurs, une majorité des exemples choisis dans cet article proviennent de cahiers datés des années 1930). Il est difficile de donner une quantification précise des calculs dans l'ensemble des cahiers. Dans les cahiers



Cahier 1-33, pages 236-237.

de notes scientifiques de Cartan, on relève près de 1700 occurrences du mot « calculs » dans les tableaux formant le catalogue analytique (pour environ 5000 pages de Cartan)[36]. Certains cahiers contiennent plusieurs dizaines de pages de calculs d'affilée (e.g. le cahier 1-56, de 1939). Il est fréquent que les calculs soient complètement ou en partie raturés, voire que plusieurs couches d'écriture se recouvrent (sans qu'il soit très clair si Cartan a refait les mêmes calculs ou pas).

Les cahiers traitant des représentations des groupes, évoqués dans le paragraphe précédent (1-33, 1-38, 1-40, 1-51) fournissent d'excellents exemples pour illustrer cette pratique. Pour souligner qu'il ne s'agit pas d'une occurrence rare, je cite ici quelques exemples appuyant ce point de vue. Plutôt que donner un exemple précis dont le sens mathématique serait sans doute perdu dans trop de concision, je propose ici une sélection (non exhaustive) de sujets et de cahiers dans lesquels les calculs jouent un rôle prépondérant, afin de mettre en avant l'amplitude et l'importance des calculs dans les brouillons mathématiques de Cartan.

– Les surfaces et hypersurfaces dans les cahiers 1-21[37] (pages 27-52), 1-43[38] (pages 7-44, 107-115, et 130-144), et 1-38[39] (pages 16-35) ;
– Les espaces (de Weyl, de Finsler, ...) dans les cahiers 38 (pages 37-80), 1-43 (pages 91-102), et 1-51[40] (pages 22-41) ;
– Les groupes, notamment dans les cahiers 1-21 (pages 27-52), 1-43 (pages 251-259), et 1-38 (pages 111-200) ;
– Les travaux de ses étudiants : dans le cahier 1-40 la thèse de Hachtroudi (pages 4-10), dans le cahier 1-43 le diplôme de Libermann (pages 145-250), dans le cahier 1-38 la thèse de Devisme (pages 93-95) et le problème de Wachs (pages 98-101) ;
– La méthode du repère mobile dans le cahier 1-43 (pages 240-244) ;
– Les représentations linéaires (que j'ai évoquées plus haut) notamment dans le cahier 1-51 (pages 146-190) ;
– Les équations différentielles dans le cahier 1-51 (pages 61-66).

Cette liste n'est évidemment pas exhaustive ni concernant les sujets des calculs, leur quantité ou encore les cahiers dans lesquels retrouver certains des sujets évoqués ici (notamment les équations différentielles).

Les calculs, chez Cartan, sont en effet présents dans une grande variété – si ce n'est une grande majorité – de ses travaux et ne sont certainement pas restreints à certaines

[36]Sont exclus ici les cahiers de notes de cours prises par ses étudiants. Notons par ailleurs que ce décompte est une borne inférieure pour la quantité de calculs. En effet, d'une part je n'ai relevé ici que les fois où le catalogue mentionne seulement que Cartan fait des « calculs » ; d'autre part le catalogue est assez détaillé et certains calculs, s'ils sont explicités dans ledit catalogue, ont sans doute échappé à la recherche par mots clefs.

[37]Le cahier 1-21 est daté de 1912.

[38]Le cahier 1-43 est daté de 1938/39-1942.

[39]Le cahier 1-38 est daté de 1933-1938.

[40]Le cahier 1-51 est daté de 1943-1944.

investigations déterminées[41]. Les carnets permettent ainsi non seulement de révéler l'importance et l'ampleur de ces pratiques chez Cartan, mais ouvrent également la porte à une historicisation de la notion de calcul. En effet, ils offrent la possibilité d'analyser, sur un corpus large et compréhensif ce que recouvre la notion de calcul : comment se situe-t-elle en tant que catégorie d'acteur ? Une distinction est-elle opérée entre calculs, preuves, déductions et autres activités mathématiques ? Quel(s) rôle(s) les calculs jouent-ils s'ils ne sont pas seulement heuristiques ?

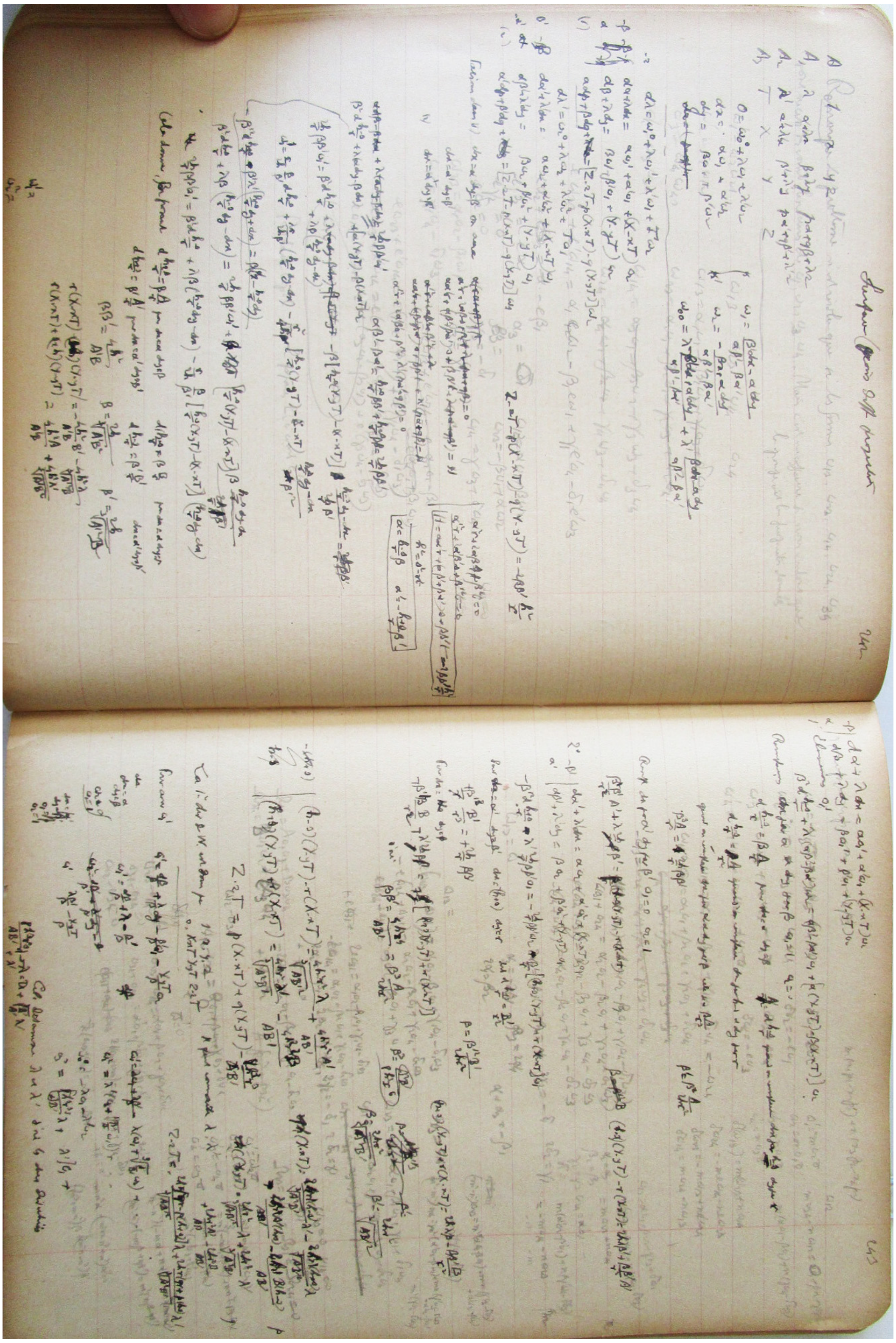
Les pages de calculs sont souvent très denses, et continuent sur plusieurs pages, voire plusieurs dizaines de pages. Il y aurait ainsi beaucoup à apprendre sur la manière de travailler de Cartan, et son utilisation des calculs pour explorer les problèmes. Les cahiers montrent de quelle manière et à quel point la recherche par les calculs fait partie de la pratique mathématique de Cartan dans la phase d'exploration et dans la manière de s'approprier certains sujets. On le remarque bien, notamment, dans ses notes de lecture, lorsqu'il commence à s'intéresser à certains sujets (e.g. la théorie de la relativité), ou par le fait qu'il recommence souvent les calculs (la plupart du temps explicitement, voyez par exemple, dans le cahier 1-38, page 18). Un certain nombre de notes procèdent ainsi d'une première réécriture par Cartan qui reformule un problème dans son propre langage, avec ses notations et ses concepts – c'est le cas notamment de l'étude du *Raumproblem* de Weyl mentionné plus haut – et l'appréhende (ou l'apprivoise) souvent à grands renforts de calculs.

L'exploration par les calculs se révèle aussi dans certaines recherches laissées inachevées dans les notes de Cartan, qui conclut par exemple des recherches sur les connexions projectives par :

> On n'a plus qu'à vérifier que cela marche ! (Cahier 1-38, page 35)

Bien entendu, certains aspects matériels des brouillons mettent également cela en avant, et notamment la grande quantité de ratures. Il est souvent facile de localiser les endroits où Cartan corrige ses erreurs de calculs, comme dans les recherches sur la géométrie des hypersurfaces ducahier 1-38, où Cartan recommence plusieurs fois ses calculs (par exemple, page 28, pour corriger une « [e]rreur »). Précisons toutefois que les raisons qui poussent Cartan à recommencer plusieurs fois les mêmes calculs ne sont pas toujours de simples erreurs. Il arrive également qu'il souhaite essayer une approche différente. Ainsi, des changements de notation apparaissent régulièrement pour mieux les recommencer (mais également en cours de calcul) – toujours explicitement mais sans justification (voyez par exemple, à la page 24 du cahier 1-38). À cette première réécriture suit celle (que je n'évoquerai pas ici) de la constitution du texte pour la publication, où les calculs foisonnants sont ordonnés, et parfois cachés.

[41] Ainsi, ils servent, par exemple, pour le calcul différentiel (extérieur, notamment), le calcul des équations de structure, du degré de généralité, des nombres de Betti, des invariants, de pôles, de focales, de torsion, de courbure, de lignes géodésiques (et lignes de courbure, lignes asymptotiques, ...), d'absolu, de connexion, de diverses correspondances, transformations, applications, pour la recherche des éléments intégraux ou encore la représentation géodésique, pour le calcul du dernier et de l'avant-dernier groupe dérivé, du groupe adjoint, des sous-groupes invariants, du groupe de rotation d'un repère, du caractère et pour la représentation linéaire des groupes.



Cahier 1-43, pages 242-243.

Notons, enfin, que si j'insiste ici sur l'aspect exploratoire des calculs, il semble clair que ceux-ci ont, chez Cartan, plusieurs statuts. Certains servent à entrer dans un problème donné et à l'explorer, d'autres à prouver des résultats (lemmes, théorèmes, etc.), parfois les calculs sont le problème et la solution (e. g. structure des groupes), ou encore ils peuvent servir d'exemple (e.g. dans l'étude des variétés holonomes dans le cahier 1-24).

Des calculs trop compliqués

Dans une série de notes sur le travail de Robert Potier (cahier 1-40, 1937-1940), qui sont présentées par Cartan comme des « remarques » après une conférence, Cartan souligne à plusieurs reprises que les calculs et formules employés sont (trop) compliqués. Quelques pages plus loin, se trouvent des notes de lecture d'une thèse dont l'auteur n'est pas précisé, mais dont le contenu est similaire – parfois au mot près – aux remarques sur le travail de Potier. Ce dernier a soutenu, en 1940, une thèse intitulée « Sur certaines questions de géométrie différentielle conforme »[42]. Dans l'introduction de sa thèse, Potier annonce qu'il utilise la méthode du repère mobile :

> C'est l'application de la méthode de M. Élie Cartan qui nous a conduit à tous les résultats développés dans les pages qui suivent. L'élégance de cette méthode et son aptitude à résoudre les problèmes posés par la géométrie différentielle étant bien connues, il est presque superflu d'ajouter que son choix pour la résolution des problèmes que nous nous étions posés a grandement facilité notre travail. ([Potier, 1940], 1)

La thèse est dédiée à Cartan, qui a « conseillé et encouragé » l'étudiant au cours de sa thèse ([Potier, 1940], 1).

D'après leur contenu, les extraits que je commente ici semblent également faire partie du travail de thèse de Potier. De plus, les notes de Cartan contiennent des remarques sur une « nouvelle rédaction » du second paragraphe. Cependant, il est vraisemblable qu'il ne s'agit, ici, que de versions préliminaires du travail de thèse.

Les notes de lecture suivent la rédaction de Potier et rappellent le plan. Le premier paragraphe concerne les « propriétés diff[érentielles] des courbes en géométrie conforme », et contient une partie dont le titre est « [é]tude des différentielles des surfaces : leur repère intrinsèque ». Dans ce paragraphe, Cartan note les insuffisances (« suppose implicitement... ») et s'interroge essentiellement sur la méthode suivie. Le second paragraphe est titré « [é]tude des courbes de l'espace conforme tant qu'elles sont tracées sur une surface » et étudie, dans un premier temps, les « repères intrinsèques ». Les notes de lecture de Cartan consistent essentiellement en une description de la manipulation des repères par Potier. Par exemple :

> Les calculs sont compliqués : il exprime les $d\overline{A}_i$ et les $d\overline{\overline{A}}_i$ de deux manières différentes. Formules extrêmement compliquées. (Cartan 1-40, pages 54-55)

[42] On pourra consulter également [Leloup, 2009], 193-196.

Des remarques similaires sont faites pour la seconde rédaction du paragraphe.

Sans le texte de Potier, les notes de Cartan manquent de clarté, mais les remarques sur la complexité des calculs apportent des informations supplémentaires sur le rapport de Cartan aux calculs. Bien qu'il s'agisse de la seule occurrence d'une telle remarque que j'ai relevée (la plupart des notes de lecture de Cartan se contentent de reprendre ou refaire les calculs (et éventuellement de les corriger), ces remarques de Cartan soulignent à nouveau qu'il existe certains idéaux sur les calculs et leur valeur.

Cas particuliers et théorèmes « probablement » généraux

Comme on vient de le voir, les calculs chez Cartan servent à explorer certains problèmes. Les recherches sur les espaces et groupes clos, mentionnés précédemment, suggèrent également que l'étude de cas particuliers peut servir de base pour avancer vers des résultats plus généraux. Cette manière de travailler avec des cas particuliers est assez fréquente chez Cartan, qui, dans une lettre à Einstein du 3 janvier 1930 sur les solutions sans singularités des systèmes en involution, présente un exemple en expliquant « qu'il donne probablement un avant-goût de la difficulté du problème général » ([Debever, 1979], 102). Dans ses carnets de notes, on trouve de nombreux exemples de cette approche, dans lesquels il étudie un ou des cas particuliers en vue d'un résultat général. Fonder le général sur des cas particuliers peut procéder de deux approches possibles : soit trouver (ou prouver) un résultat général en fractionnant la preuve en plusieurs cas, soit généraliser un résultat à partir de l'étude de quelques cas particuliers. Ces deux approches se retrouvent dans les cahiers de Cartan, qui dans le second cas ne fournit pas toujours de preuve pour les résultats généraux en question.

Dans [Robadey, 2006][43], Robadey met en évidence une certaine pratique de la généralité dans les publications de Poincaré (dont Cartan a suivi les cours à la Faculté des sciences de Paris, au début des années 1890[44]) mettant en jeu l'usage de cas particuliers et le passage du particulier au général. Elle distingue deux attitudes face aux cas particuliers chez Poincaré : la première consiste à reconnaître ce qui est exceptionnel pour se concentrer sur ce qui est général, la seconde à étudier des cas particuliers pour en tirer des enseignements sur ce qui est général. Robadey exhibe ainsi plusieurs pratiques chez Poincaré, et notamment l'utilisation de « paradigmes » permettant de fonder le résultat général, ou l'étude de listes de cas exhaustives pour établir le cas général[45]. Nous verrons que l'approche de Cartan présente des similarités avec celle Poincaré. Cependant, il est important de souligner que mes remarques, ici, ne peuvent servir pour une comparaison

[43] On pourra également consulter [Robadey, 2004] et [Robadey, 2016].

[44] Signalons également que Cartan reprend un certain nombre de terminologies utilisées par Poincaré dans ses propres travaux (voyez par exemple [Nabonnand, 2009]).

[45] « Après l'étude locale des points singuliers dans le deuxième chapitre de son mémoire, Poincaré considère effectivement dans son troisième chapitre l'ensemble des points singuliers d'une équation différentielle. Il commence par montrer qu'il existe toujours au moins un point singulier en procédant à nouveau par énumération des diverses situations qui peuvent se produire. Mais il s'agit ici d'une énumération explicitement exhaustive dans laquelle Poincaré ne s'intéresse pas au degré de généralité des différents cas. L'ordre paraît surtout régi par la simplicité : le premier cas traité est celui où il y a des points singuliers évidents, et plus on avance dans l'énumération plus l'exhibition d'un point singulier requiert un traitement élaboré. » ([Robadey, 2006], 85)

complète des approches respectives de la généralité des deux mathématiciens. En effet, Robadey étudie les textes publiés de Poincaré, et mes observations ne concernent que les brouillons de Cartan. Pour qu'une telle comparaison soit effective, il serait indispensable de mener une étude similaire dans les publications de Cartan – ce qui n'entre pas dans le cadre de cet article. En revanche, l'étude au sein des cahiers de brouillon permet une analyse de l'approche du général sur des pratiques potentiellement différentes de ce que l'on trouve dans les textes publiés, en ce qu'elle reflète une partie distincte de l'activité mathématique.

L'étude d'une liste exhaustive de cas est une pratique fréquente dans les cahiers de Cartan. Cartan ne se préoccupe pas de hiérarchiser les cas, mais commence par étudier un exemple simple et avance progressivement vers des cas plus complexes, jusqu'à obtenir une vue générale (comme c'est le cas dans certains travaux de Poincaré, [Robadey, 2006], 85). On retrouve cette approche dans une grande majorité des travaux de Cartan. D'après le catalogue des *Élie Cartan Papers*, seuls deux cahiers de la main de Cartan ne présentent pas de telles considérations : le cahier 1-44 qui contient des notes (succinctes) pour la préparation d'un cours de géométrie supérieure, et le cahier 1-50, qui est un cahier très court dans lequel figurent seulement des notes sur des travaux d'autres mathématiciens. Je ne listerai donc pas les sujets que Cartan approche ou étudie en considérant des listes (exhaustives, la plupart du temps) de cas particuliers, que l'on retrouve aussi bien dans ses travaux en géométrie, physique, sur les groupes, ou les équations différentielles. Sans qu'il s'agisse d'une stratégie systématique, il est clair que c'est une méthode favorisée par Cartan[46].

On trouve, par ailleurs, dans les brouillons de Cartan, une approche sensiblement différente de celle observée dans les publications de Poincaré, dans laquelle Cartan étudie différents cas et se dirige progressivement vers le cas général. Ici, il s'agit d'une augmentation progressive de la généralité des cas étudiés pour arriver au cas général, et non pas d'arriver à un résultat général conçu comme l'ensemble de tous les cas.

Plutôt que donner des indications trop vagues car trop... générales, je propose ici de considérer un exemple et des citations directes d'un cahier de Cartan illustrant bien la mise en œuvre de cette pratique. L'exemple choisi se trouve dans le cahier 1-37, daté aux alentours de 1931, et Cartan y étudie les espaces de plans. L'extrait que je propose se trouve entre les pages 149 et 154 (le cahier comporte plus de 350 pages). Ces quelques pages sont titrées « Espaces de plans »[47] et commencent ainsi :

[46]Soulignons par ailleurs que cette approche se retrouve également beaucoup dans les notes de cours prises par ses étudiants, dans lesquels Cartan considère différents cas un par un. Si la dimension pédagogique n'est pas un moteur pour l'utilisation de cas particuliers chez Poincaré ([Robadey, 2006] 195), elle semble importante dans le cas de Cartan.

[47]Dans ce cahier, Cartan étudie également les espaces de droites, de variétés ainsi que des espaces du type espace des plans d'un espace projectif à 5 dimensions... Cartan étudie donc différentes sortes d'espaces, en utilisant essentiellement des considérations de théorie des groupes. La stratégie souvent utilisée par Cartan consiste à attacher un système de Pfaff (i.e. un système obtenu en égalant à 0 un nombre fini de formes différentielles à r variables, notées ω_i) à une structure géométrique ce qui lui permet d'appliquer ses précédentes recherches sur la théorie des groupes de Lie. La réflexion sur les espaces de plans, présentée ici, est essentiellement fondée sur des manipulations de théorie des groupes mais semble dirigé vers un but géométrique (l'intersection de variétés, et l'intersection d'espaces).

Considérons ~~la variété ($h00$)~~

$$\omega_{h00}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}{}^{48}$$

> Je dis que $A_{\alpha\beta\gamma}$ est le nombre entier qui donne la décomposition en groupes irréductibles de deux groupes linéaires ($h00$) et (abc). (Cartan 1-37, 149)

Le reste des recherches sur ces pages consiste à prouver et généraliser ce résultat. Cartan donne la condition à vérifier :

$$\begin{vmatrix} x^{a+2} & y^{a+2} & z^{a+2} \\ x^{b+1} & y^{b+1} & z^{b+1} \\ x^{c} & y^{c} & z^{c} \end{vmatrix} \sum x^\lambda y^\mu z^\nu = \sum A_{\alpha\beta\gamma} \begin{vmatrix} x^{\alpha+2} & y^{\alpha+2} & z^{\alpha+2} \\ x^{\beta+1} & y^{\beta+1} & z^{\beta+1} \\ x^{\gamma} & y^{\gamma} & z^{\gamma} \end{vmatrix}$$

avec $\lambda+\mu+\nu = h$ et entame une preuve. La première étape est de considérer le coefficient de $x^{\alpha+2}y^{\beta+1}z^\gamma$ qui « provient de 6 termes possibles du 1e m[embre] », qui sont énumérés par Cartan (et notés respectivement I, II, III, I', II', III'). Cartan remarque que

> On a nécessairement $\alpha \geq a, \beta \geq b, \gamma \geq c$. (Page 149)

Il suppose alors différents cas possibles d'inégalités entre les α, β, γ et les a, b, c et recherche le terme considéré en fonction des termes énumérés plus haut. Il étudie ensuite la réciproque, en supposant les conditions trouvées juste au dessus réalisées et affirme :

> Il y a un plan et un seul commun à $V_{n,n-1,n-h-2}$, $V_{n-2,n-b-1,n-a-2}$, et $V_{\alpha+2,\beta+1,\gamma}$.[49] (Page 149)

La preuve de cette affirmation mène à voir que « nous avons à chercher un plan (...) [qui] est dans un $E_{\alpha+\beta+\gamma-a-b-c+2} = E_{h+2}$[50] et ce plan doit rencontrer » un parmi deux E_{h+2} vérifiant des conditions données. Cartan en conclut que « ce plan est dans » un parmi deux $E_{v_1+v_2+2}$ vérifiant des conditions données. Il en tire qu'il « y a donc bien un plan et un seul. CQFD. » Il énonce ensuite directement le théorème suivant :

> Si $\omega_{h00}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}$, les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ sont les mêmes que ceux qui donnent la décomposition du produit de deux groupes linéaires $(a_1x_1 + a_2x_2 + ...)^h$ et $(a_1x_1 + ...)^{a-b}(a_{12}x_{12} + ...)^{b-c}$. (Page 150)

Cartan propose ensuite d'étendre au « cas général », en considérant ω_{hk0} et en montrant que l'on a

$$\omega_{hk0} = \omega_{h00}\omega_{k00} - \omega_{h+100}\omega_{k-100}.{}^{51}$$

Il en conclut que

> dans la formule $\omega_{hk0}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}$, les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ sont aussi ceux qui se représentent dans la décomposition du produit de deux groupes irréductibles de poids dominants $hx + ky$, $ax + by + cz$. (Page 151)

[48]Les A_{ij} sont des tenseurs.
[49]Les $V_{i,j,k}$ sont des variétés.
[50]Les E_i sont vraisemblablement des espaces linéaires.
[51]Les indices des ω doivent se lire $k+1$ (ou $k-1$) et 00.

Cartan note, sous le résultat « Très important », ce qui suggère qu'il a, dans cette généralisation des considérations précédentes, un théorème essentiel pour la théorie des groupes. Il étend ensuite la réflexion aux ω_{abcd} (cas $p = 4$), en considérant des équations similaires au cas précédent. La condition sur les déterminants est également similaire. Le terme recherché, qui est $x^{\alpha+3}y^{\beta+2}z^{\gamma+1}t^{\delta}$, peut alors « provenir de 24 termes », énumérés par Cartan (page 151). Il isole le seul cas possible (sans explication) et poursuit la preuve de manière similaire au cas précédent ($p = 3$) – sa conclusion est d'ailleurs « la démonstration s'achève comme avant ». Cartan a alors « démontré le théorème si l'un des facteurs est ω_{h000} ». Il ajoute :

> Or $\omega_{hk00} = \omega_{h000}\omega_{k000} - \omega_{h+1000}\omega_{k-1000}$.
> Le théorème est par suite démontré si l'un des facteurs est de la forme ω_{hk00}.
> (Page 152)

Pour le cas ω_{hkl0}, Cartan note seulement :

> $\omega_{hkl0} = \omega_{hk00}\omega_{l000}$ [fin barrée] $\alpha = h, \beta = k, \gamma = l, \delta = 0$ $a = h, b = k, c = 0, d = 0$ $h \geq h \geq k \geq k \geq l \geq 0$... ce qui est vrai.
>
> C'est probablement général.
>
> (Page 153)

Cartan considère ensuite le cas des ω_{abcde} et montre (avec plusieurs « ainsi de suite ») que le théorème est valide « pour les produits de la forme $\omega_{h0000}\omega_{abcde}$, donc il est général ». Il conclut par

> Et ainsi de suite. (Page 154)

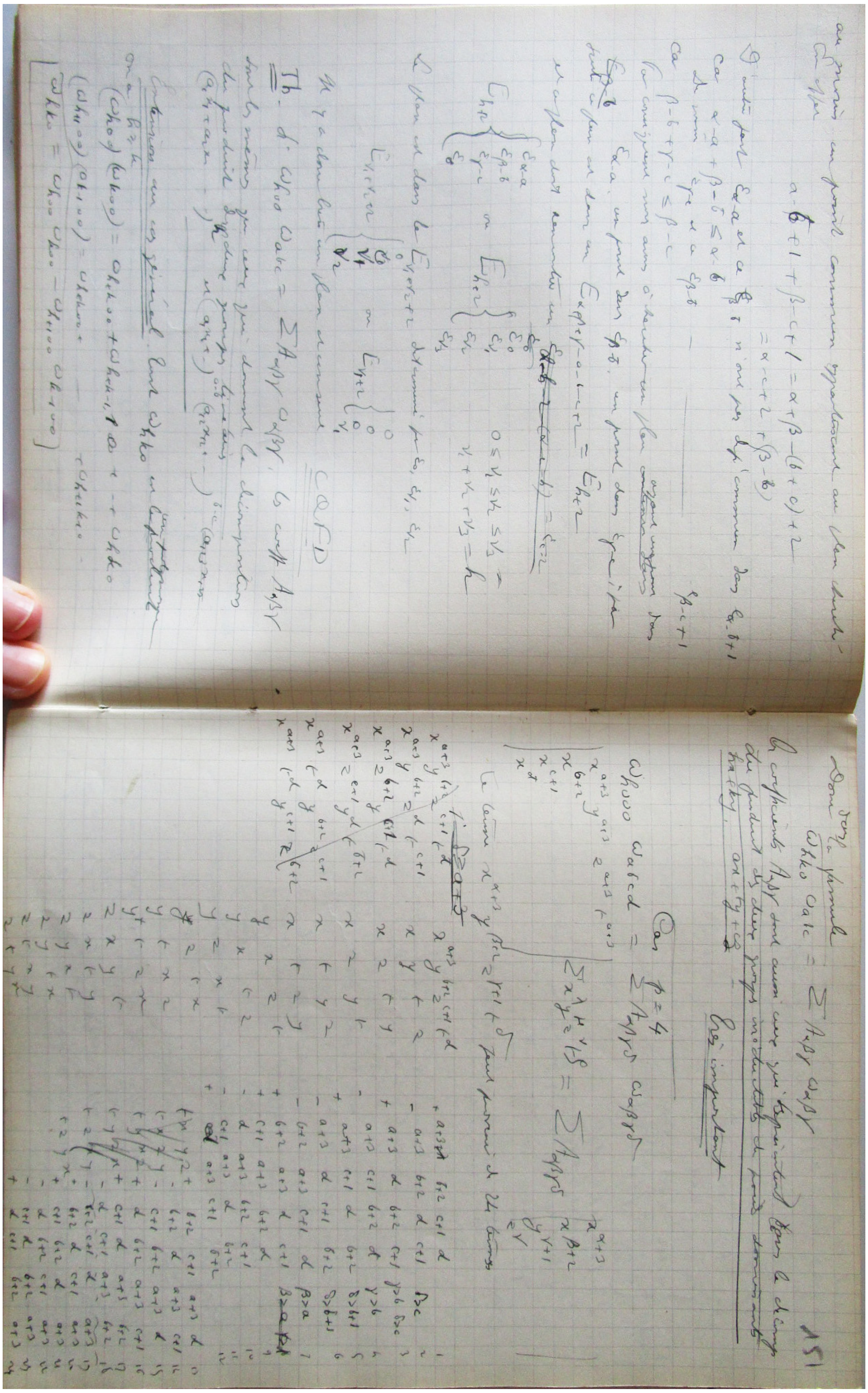
Cartan énonce alors un "théorème général" sur l'intersection de deux variétés :

> Théorème général. Soit l'intersection de $V_{n-d,n-c-1,n-b-2,n-a-3}$ et $V_{n-d',n-c'-1,n-b'-2,n-a'-3}$. L'ordre d'indice $(\alpha\beta\gamma\delta)$ de cette intersection est le nombre de fois que le produit de deux groupes linéaires irréductibles $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ contient le groupe irréductible $(\alpha\beta\gamma\delta)$. (Page 155)

Pour la preuve, les considérations précédentes de théorie des groupes sont essentielles mais la motivation de Cartan semble, ici, être essentiellement géométrique[52].

On voit, ici, que Cartan procède au cas par cas et à une généralisation progressive jusqu'à arriver à l'hypothèse que le résultat est « probablement général » (ce qu'il ne prouve pas, ici). L'étude des cas semble tenir ici essentiellement d'un processus heuristique, l'étude des cas particuliers guidant le raisonnement. En l'occurrence, le passage du particulier au général et l'utilisation de cas particuliers ne tient pas d'une utilisation de cas particuliers génériques ou de paradigmes, comme ce que Robadey met en lumière dans les travaux de Poincaré, mais plutôt une avancée graduelle vers le cas général, une exploration du problème via les cas particuliers. Les cas particuliers semblent posséder

[52] Dans les pages suivantes, Cartan applique la même approche pour des intersections de E_k.



Cahier 1-37, pages 150-151.

pour Cartan une valeur heuristique essentielle. Il convient, comme je l'ai déjà mentionné, de poser quelques réserves sur cette comparaison, puisque l'analyse de Robadey se base sur des textes publiés : dans ce qu'elle présente, l'utilisation des cas particuliers (par liste ou comme paradigmes) est « un choix délibéré de l'auteur » plutôt qu'un « procédé heuristique, [un] premier état du théorème, encore mal débarrassé du contexte dans lequel il a été découvert » ([Robadey, 2006], 195). Ainsi, il s'agit d'un choix d'écriture qui entre en jeu dans la constitution du texte publié. Dans ce que je viens d'exposer du cas de Cartan, nous sommes témoins d'une réflexion à l'état brut, du procédé heuristique à proprement parler, puisque l'on travaille ici avec une vue directe sur le procédé de découverte.

3 Cartan enseignant

On connaît déjà plusieurs facettes de Cartan en tant qu'enseignant, notamment par des témoignages comme ceux de Weil ([Weil, 1991], [Audin, 2011b]) ou encore d'après [Chern et Chevalley, 1952] :

> Cartan était un excellent enseignant ; ses cours étaient des expériences intellectuelles gratifiantes qui laissaient généralement à l'étudiant l'impression fausse qu'il avait saisi tout ce qu'il y avait [à comprendre] sur le sujet. [53] [Chern et Chevalley, 1952], 217)

On sait également son influence dans les thèses d'entre-deux-guerres ([Gispert et Leloup, 2009] et [Leloup, 2009], en particulier pages 179-195). Potier, cité plus haut dans cet article, remercie Cartan pour ses conseils et encouragements et n'est pas le seul. Leloup souligne :

> Il semble que l'influence de Cartan ne se résume pas seulement à l'influence de certains de ses travaux mathématiques. L'utilisation du terme « dirigé » par Féraud comme la mention du rôle de « guide » qu'il a exercé avec Nicoladzé laissent penser que le mathématicien s'est impliqué dans les travaux de recherche des doctorants. Cette implication de Cartan et son influence intellectuelle, que révèlent les thèses, vont à l'encontre de la description du mathématicien qui est souvent faite : celle d'un mathématicien « enfermé dans sa tour d'ivoire », dont la recherche est « incomprise ». (([Leloup, 2009], 189)

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, que Cartan était un lecteur attentif des travaux de thèses dont il était directeur[54] ou jury.

[53] *« Cartan was an excellent teacher ; his lectures were gratifying intellectual experiences, which left the student with a generally mistaken idea that he had grasped all there was on the subject. »*

[54] Comme le souligne Leloup à plusieurs reprises, la notion de « direction de thèse » est assez vague pendant l'entre-deux-guerres (notamment [Leloup, 2009], 80). La mention de Cartan comme « directeur » de thèse apparaît néanmoins à plusieurs reprises, mais il est à comprendre plutôt comme un guide (et peut-être, pour certains comme Potier, un soutien) qu'au sens moderne de directeur de thèse ([Leloup, 2009], 189, 195, 222).

Ses carnets de notes donnent aussi des informations supplémentaires sur sa manière d'enseigner, en nous donnant à voir la préparation des cours et le programme d'un certain nombre de cours pour lesquels nous n'avons pas de notes, les notes (dans les deux sens du terme) et appréciations de Cartan pour différents examens et concours (en particulier à l'École Normale Supérieure d'Ulm et de Sèvres), ainsi que les notes de lecture et appréciations de Cartan sur les travaux de thèse dont il était directeur, rapporteur ou examinateur.

3.1 Les cours de Cartan

Les cahiers contenant des notes de préparations pour des cours sont lui suivants :

- 1-16, quelques notes sur un cours de probabilités.
- 1-27, plan du cours de 1922 sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation.
- 1-24, cours de mécanique à l'École Centrale (non daté).
- 1-28, cours de géométrie supérieure, 1925.
- 1-31, plan détaillé du cours de géométrie supérieure de 1927/1928.
- 1-32, plan du cours de 1924 sur les petites oscillations d'une masse fluide en équilibre de rotation (sans doute celui auquel a assisté Weil mentionné dans la lettre commentée dans [Audin, 2011b]).
- 1-33, notes détaillées d'un cours de géométrie projective complexe, 1928/1929. Sommaire d'un cours de géométrie projective, 1929/1930.
- 1-43, cours de géométrie supérieure, 1938/1939.
- 1-44, notes pour le cours de géométrie supérieure de 1938-39 : plan détaillé de chaque séance de cours sur la géométrie conforme (28 leçons).
- 1-45, notes pour le cours de Géométrie à l'École Normale de Sèvres (1939/1940) (en alternance avec des notes d'oraux).
- 1-51, notes détaillée d'une séance de cours sur les surfaces (15 mars 43).

Pour avoir une idée plus précise de ce que Cartan note sur ses cours, je propose une retranscription du plan détaillé rédigé par Cartan pour la première leçon de son cours de géométrie supérieure de 1927/28 (cahier 1-31, pages 110-111). Ces deux pages, qui n'offrent pas de grande difficulté technique, sont parmi les plus détaillées que l'on trouve dans les cahiers. Pour avoir une vision vraiment claire de ce que Cartan enseigne et de la manière dont il l'enseigne, il faut se référer aux notes prises par ses étudiants (voyez le paragraphe 3.2).

Cartan 1-31, page 110

Plan

But de la géométrie projective. Définition de l'espace projectif, ses premières propriétés. Coordonnées homogènes. Propriétés topologiques de la droite (segment, sens), du plan (triangles, non orientabilité), de l'espace (tétraèdres, droite et gauche, orientabilité). L'espace projectif n'est pas simplement connexe. L'espace projectif complexe l'est.

Projectivités définies par l'invariance des relations d'appartenance. Les transformations homographiques sont des projectivités ; il y en a toujours une et une seule qui fait correspondre à 5 p[oin]ts tels que 4 q[uel]c[on]q[ues] d'entre eux ne sont pas dans un même plan 5 autres analogues ; on peut aussi faire correspondre à 3 p[oin]ts en ligne droite 3 autres p[oin]ts en ligne droite.

Problème. Y a-t-il des projectivités qui ne sont pas des homographies ? Retour sur quelques th[éorè]mes ; rapport anharmonique de 4 p[oin]ts en ligne droite, son invariance par une tr[ansformation] homog[raphique], rapport anharm[onique] de 4 plans passant par une droite. Si deux quadruples de p[oin]ts alignés ont même rapport anh[armonique], ils sont changés par toute projectivité en deux centres quadr[uples ?] de points ayant même rapport anh[armonique] (peut-être pas égal au premier). Enfin, toute transf[ormation] homog[raphique] de l'espace conserve le rapp[ort] anharm[onique].

Distances harmoniques ; elles se conservent par projectivité ; cela tient au théorème sur le quadrilatère complet ; sa démonstration analytiq[ue].

Th[éorème]. Si D est changé en D' par une proj[ectivité] $\mathcal{P}$, le rapport anharmonique est conservé. Soit en effet $\mathcal{H}$ une homog[raphie] particulière. Changeons 3 p[oin]ts [illisible] de D dans les 3 p[oin]ts corresp[ondants] de D' ; la project[ivité] $\mathcal{P}\mathcal{H}^{-1}$ conserve la droite D ainsi que 3 p[oin]ts de cette droite. Elle se réduit (sur la droite) à l'identité. Donc $\mathcal{P}$ transforme les points de D de la même manière que $\mathcal{H}$ autrement dit le rapport anh[armonique] est conservé par une projectivité.

Corollaire. Le rapp[ort] anh[armonique] de 4 plans se conserve par projectivité.

Th[éorème]. Toute projectivité qui laisse invariants 5 p[oin]ts est une identité.

Conclusion. Toute projectivité est une transformation homographique.

Coordonnées projectives

[Dans la marge, à l'horizontale :] Ce serait à mettre après.

Remarque sur la démonstr[ation] du th[éorème] fondamental de v[on] Staudt. Elle exige une hypothèse de continuité ou une équivalente, par ex[emple] conservation de l'ordre cyclique de la droite. Sinon le th[éorème] n'est peut-être plus vrai.

Exemple. On ne [considère ?] de l'espace que les p[oin]ts dont les coord[onnées] homogènes sont rectangles[? ?] dans le corps algéb[rique] $(\sqrt{2})$; les plans ayant aussi leurs coordonnées rationnelles dans le même corps. La transf[ormation]

$$x' = ax_0 + by_0 + cz_0 + dt_0$$

$$y' =$$

est une projectivité sans être une homographie.

De même dans l'espace projectif complexe, Segre a démontré

Cartan 1-31, page 111

que les antihomogr[aphies] étaient des projectivités.

Est-il possible de fonder la géométrie projective sans passer par l'interm[édiaire] de la géométrie élémentaire ? C'est l'œuvre de von Staudt. Montrons seulement comment des postulats d'appartenance, on peut déduire le caract[ère] projectif des transf[ormations] harmoniques et la possibilité d'introd[uire] des coordonnées projectives.

1) Th[éorème] de Desargues (triangles homologiques)

2) Th[éorème] sur le quadrilatère complet ; symétrie des 2 couples de points de la division

3) Introduction sur une droite d'un réseau de rationalité. Indication sur les autres axiomes.

Certains cahiers contiennent également des notes concernant des oraux, concours, examens (à la Sorbonne, l'École de Sèvres, École de Physique Chimie, ...), ainsi que des sujets (d'agrégation, par exemple), dont Cartan fait parfois la corrections lui-même (en particulier dans le cahier 1-21) :

– 1-21, Concours d'entrée à l'ENS : liste d'exercices et de sujets donnés aux concours (entre autres) ;
– 1-45, École de Sèvres, 2e année,1939-40 ;
– 1-47, Notes et appréciations étudiants. Concours d'entrée à l'Ecole Normale, Septembre 1940 ;
– 1-48, École de Physique et Chimie. Problèmes donnés aux concours, entre 1940-1943.

Ces notes constituent une partie seulement des cahiers en question. Les cahiers 1-21 et 1-48 contiennent essentiellement des exercices, problèmes et corrigés. Dans le cahier 1-47 se trouvent des notes prises lorsque Cartan était examinateur pour les oraux d'entrée à l'École Normale Supérieure. À chaque élève sont consacrées, en moyenne, deux pages, donnant les questions posées, les solutions proposées par l'élève, quelques remarques de Cartan sur le fond comme la forme de l'exposé, et bien sûr la note obtenue. Le fonds conservé à l'Académie des Sciences contient également vingt-cinq carnets de notes de petit format (boîte 7-01), rédigés entre 1913 et 1942, et utilisés lors de concours et examens. Ils rassemblent des sujets et les notes prises lors des oraux, de la même manière que les cahiers 1-45 et 1-47. Le cahier 1-45 alterne ce qui semble être des plans de cours et des problèmes accompagnés de notes des étudiantes les ayant résolus pour la deuxième année (1939-1940) de la promotion de 1938 de l'École de Sèvres.

3.2 Les notes prises par les étudiants de Cartan

Dans le fonds, on trouve sept cahiers de notes de cours entièrement rédigées par les étudiants de Cartan :

– Cahier 1-22, Cours de géométrie infinitésimale, auteur et date inconnus ;
– Cahier 1-23, Cours de Géométrie riemannienne, auteur et date inconnus ;
– Cahier 1-29, Cours sur la théorie projective des surfaces, ca. 1927, notes de Claude Chevalley ;
– Cahier 1-30, Cours de géométrie projective, ca. 1927, notes de Claude Chevalley ;
– Cahier 1-34, Cours sur le trièdre mobile et la théorie des groupes, ca. 1930, notes de Maurice Brousseau ;
– Cahier 1-35, Cours de [géométrie et] théorie des groupes, ca. 1930, notes de Maurice Brousseau ;
– Cahier 1-42, Cours de géométrie conforme, ca. 1938, notes de Jean Châtelet.

On trouve également deux cahiers formés en partie de notes rédigées par les étudiants, en partie de brouillons de Cartan :

– Cahier 1-36, Cours sur applicabilité des surfaces, ca. 1930, Maurice Brousseau ;
– Cahier 1-57, Notes partielles d'un cours de géométrie, auteur et date inconnus (graphie semblable aux cahiers rédigés par C. Chevalley).

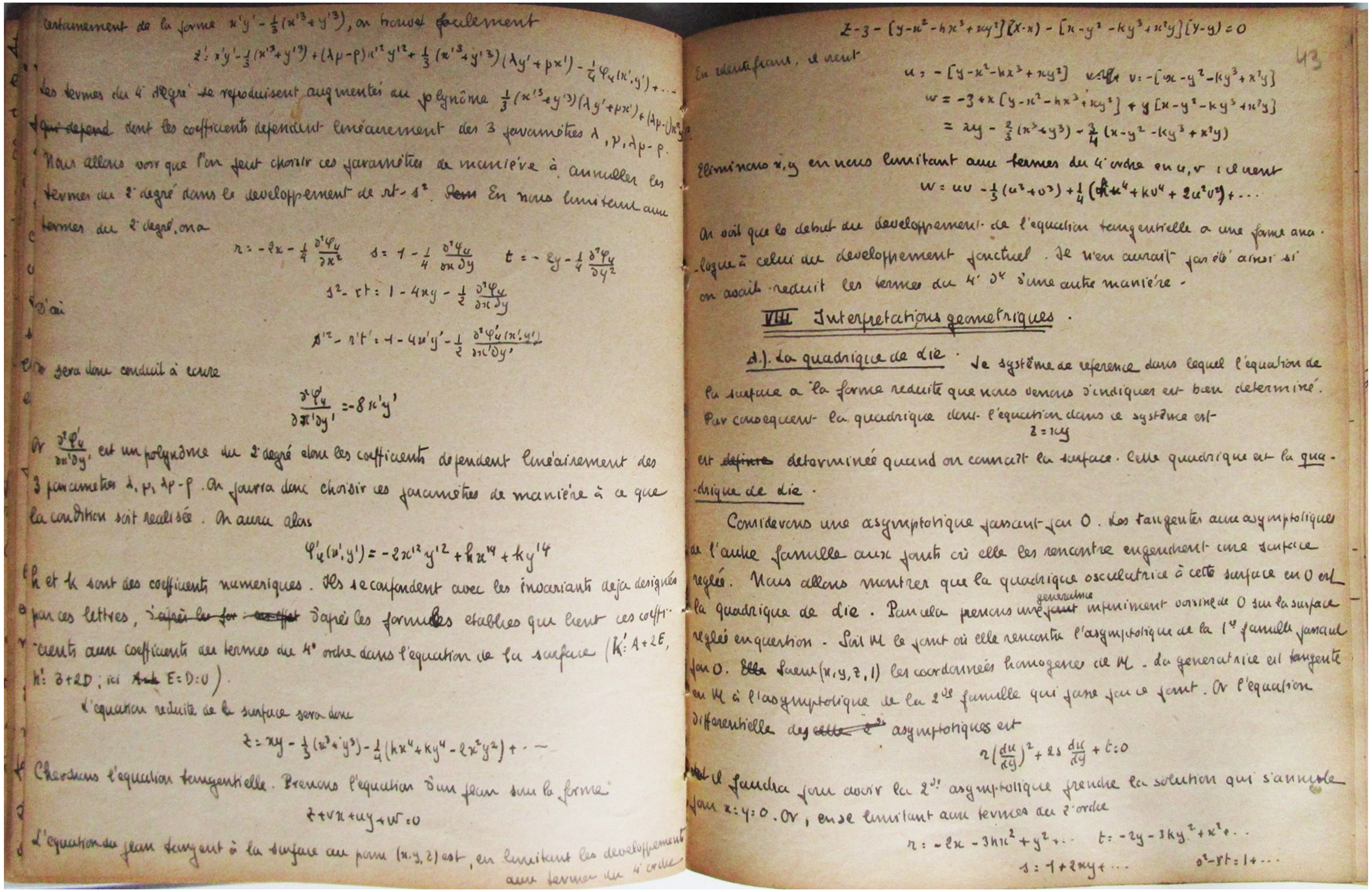
Les cahiers sont rédigés de manière très soignée et remarquablement bien conservés, et se lisent comme un manuel.

3.3 Les notes de lecture des thèses

Les carnets de notes de Cartan contiennent beaucoup de notes de lecture de thèses entre 1924 et 1945. Dans l'introduction de sa thèse, Robert Potier écrit, au sujet de Cartan[55] :

> Ceux qui ont travaillé sous la direction de notre Maître savent combien il est impossible de payer la dette de reconnaissance contractée à son égard à l'aide d'une quelconque formule de remerciements. C'est pourquoi nous lui demandons simplement ici de croire à la sincérité du sentiment d'affection respectueuse que nous avons pour lui. ([Potier, 1940], 2)

[55] Voyez aussi [Leloup, 2009]



certainement de la forme $x'y' - \frac{1}{3}(x'^3+y'^3)$, on trouve facilement

$$z' = x'y' - \frac{1}{3}(x'^3+y'^3) + (\lambda\mu-\rho)x'^2y'^2 + \frac{1}{3}(x'^3+y'^3)(\lambda y'+\mu x') - \frac{1}{4}\varphi_4(x',y') + \dots$$

Les termes du 4e degré se reproduisent augmentés du polynôme $\frac{1}{3}(x'^3+y'^3)(\lambda y'+\mu x') + (\lambda\mu-\rho)x'^2y'^2$ ~~qui dépend~~ dont les coefficients dépendent linéairement des 3 paramètres $\lambda, \mu, \lambda\mu-\rho$.

Nous allons voir que l'on peut choisir ces paramètres de manière à annuler les termes du 2e degré dans le développement de $rt-s^2$. ~~Dans~~ En nous limitant aux termes du 2e degré, on a

$$r = -2x - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x^2} \qquad s = 1 - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y} \qquad t = -2y - \frac{1}{4}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial y^2}$$

$$s^2 - rt = 1 - 4xy - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x\partial y}$$

D'où

$$s'^2 - r't' = 1 - 4x'y' - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi'_4(x',y')}{\partial x'\partial y'}$$

On sera donc conduit à écrire

$$\frac{\partial^2\varphi'_4}{\partial x'\partial y'} = -8x'y'$$

Or $\frac{\partial^2\varphi'_4}{\partial x'\partial y'}$ est un polynôme du 2e degré dont les coefficients dépendent linéairement des 3 paramètres $\lambda, \mu, \lambda\mu-\rho$. On pourra donc choisir ces paramètres de manière à ce que la condition soit réalisée. On aura alors

$$\varphi'_4(x',y') = -2x'^2y'^2 + hx'^4 + ky'^4$$

h et k sont des coefficients numériques. Ils se confondent avec les invariants déjà désignés par ces lettres, ~~d'après les for~~ ~~en effet~~ d'après les formules établies qui lient ces coefficients aux coefficients des termes du 4e ordre dans l'équation de la surface ($k = A+2E$, $h = B+2D$; ici ~~A=~~ $E=D=0$).

L'équation réduite de la surface sera donc

$$z = xy - \frac{1}{3}(x^3+y^3) - \frac{1}{4}(hx^4+ky^4-2x^2y^2) + \dots$$

Cherchons l'équation tangentielle. Prenons l'équation d'un plan sous la forme

$$z + vx + uy + w = 0$$

L'équation du plan tangent à la surface au point (x,y,z) est, en limitant les développements aux termes du 4e ordre,

$$Z - z - [y - x^2 - hx^3 + xy^2][X-x] - [x - y^2 - ky^3 + x^2y][Y-y] = 0$$

43

En identifiant, il vient

$$u = -[y - x^2 - hx^3 + xy^2] \quad v = -[x - y^2 - ky^3 + x^2y]$$

$$w = -z + x[y - x^2 - hx^3 + xy^2] + y[x - y^2 - ky^3 + x^2y]$$

$$= xy - \frac{2}{3}(x^3+y^3) - \frac{3}{4}(x - y^2 - ky^3 + x^2y)$$

Éliminons x, y en nous limitant aux termes du 4e ordre en u, v ; il vient

$$w = uv - \frac{1}{3}(u^3+v^3) + \frac{1}{4}(hu^4 + kv^4 + 2u^2v^2) + \dots$$

On voit que le début du développement de l'équation tangentielle a une forme analogue à celui du développement ponctuel. Il n'en aurait pas été ainsi si on avait réduit les termes du 4e d. d'une autre manière.

VIII Interprétations géométriques.

1). La quadrique de Lie. Le système de référence dans lequel l'équation de la surface a la forme réduite que nous venons d'indiquer est bien déterminé. Par conséquent la quadrique dont l'équation dans ce système est

$$z = xy$$

est ~~définie~~ déterminée quand on connaît la surface. Cette quadrique est la quadrique de Lie.

Considérons une asymptotique passant par O. Les tangentes aux asymptotiques de l'autre famille aux points où elle les rencontre engendrent une surface réglée. Nous allons montrer que la quadrique osculatrice à cette surface en O est la quadrique de Lie. Pour cela prenons une ~~point~~ génératrice infiniment voisine de O sur la surface réglée en question. Soit M le point où elle rencontre l'asymptotique de la 1re famille passant par O. ~~Elle~~ Soient $(x,y,z,1)$ les coordonnées homogènes de M. La génératrice est tangente en M à l'asymptotique de la 2e famille qui passe par ce point. Or l'équation différentielle des ~~cette 2e~~ asymptotiques est

$$r\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 2s\frac{dx}{dy} + t = 0$$

Il faudra pour avoir la 2e asymptotique prendre la solution qui s'annule pour $x=y=0$. Or, en se limitant aux termes du 2e ordre

$$r = -2x - 3hx^2 + y^2 + \dots \qquad t = -2y - 3ky^2 + x^2 + \dots$$

$$s = 1 + 2xy + \dots \qquad s^2 - rt = 1 + \dots$$

Cahier 1-29, pages 42-43.

Les notes de lecture de Cartan sont parfois réduites à une table des matières annotée, mais peuvent reprendre en détails certaines parties des travaux voire faire certains calculs. Cartan renvoie toujours au manuscrit en indiquant la page qu'il commente, ce qui permet si on le souhaite de comparer ses notes de lecture et la thèse. Certains rapports de thèse, comme celui pour la thèse de Galvani ([Galvani, 1944]) sont rédigés dans les cahiers. Cependant, il semble qu'assez fréquemment, Cartan lise des versions préliminaires des thèses – comme c'est le cas avec la thèse de Potier citée plus haut, mais également celles de Dubourdieu, Féraud et Guérard des Lauriers. Les dates et le fait que Cartan revienne parfois plusieurs fois sur la même thèse dans différents cahiers sont une bonne indication. Dans ces cas, les notes de Cartan sont plus difficiles à exploiter[56]. On trouvera sur le site *Élie Cartan Papers* une liste des thèses lues et commentées par Cartan[57].

La thèse de Paul Belgodère

Paul Belgodère, élève de l'École Normale Supérieure (1940) et agrégé de mathématiques (1942) a eu une carrière d'ingénieur au CNRS. Il a été secrétaire de la Société Mathématique de France puis directeur de la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré de 1949 à 1986. Belgodère a peu publié (8 articles sur MathSciNet entre 1944 et 1955).

Dans le cahier 1-47 (ca. 1944), Cartan consacre sept pages à la thèse de Belgodère (pages 23 à 29). Il y commente page à page le contenu de la thèse. Les notes de Cartan sont assez détaillées et émaillées de critiques sur l'imprécision, voire la validité seulement partielle de résultats, de « ? » et « ? ? » voire de remarques du type :

> (Allumez votre lanterne ! il semble dire que la continuité se [... ?] soit en restant dans le domaine réel, soit en passant dans le domaine complexe.) (Cartan 1-47, page 26)

Les notes de Cartan montrent également que certaines affirmations de Belgodère sont trop imprécises pour être compréhensibles :

> (Qu'est-ce qu'il appelle <u>géométrie des quadriques abstraites à une quadrique absolue</u>. Il dit qu'à un dédoublement près de l'espace, elle est isomorphe à la géométrie euclidienne euclidienne des sphères (c['est-]à[-]d[ire] je pense à la géom[étrie] anall[agmatique] classique).)
>
> (Qu'est-ce que la géométrie des coniques [illisible] à une conique fixe et la géométrie des coniques passant par deux points fixes ?)
>
> (Cela veut peut-être dire que tout peut ê[tre] ramené à la géom[étrie] cayleysienne d'un espace à une dim[ension] de plus.) (Page 27)

À la page 29, datée du 4 juin 1944, Cartan rédige une page de « remarques d'ordre général sur le travail de Belgodère », dont je donne une transcription ci-dessous.

---

[56] Le cahier 1-43 contient également des notes sur les diplômes de Lefort et de Libermann.

[57] `http://eliecartanpapers.ahp-numerique.fr/theses`

Cartan 1-47, page 29

Ce travail a souvent l'allure d'une conférence ayant simplement pour objet de donner un aperçu sommaire d'une question. Trop souvent du vague [sic ?]. Des expressions employées sans qu'on sache très bien le sens des termes employés. Souvent, on ne sait pas si l'on est dans le domaine réel ou le domaine complexe. Que signifie la géométrie des quadriques inscrites dans une quadrique donnée (absolue) ? Aucune distinction ne semble faite entre ~~la géométrie anallagmatique~~ l'espace dans lequel opère la géométrie anallagmatique et l'espace dans lequel opère la géométrie projective (c'est ce qui rend vague la généralisation de la géométrie anallagmatique !).

Dans le chapitre sur l'orientation, bien qu'au début l'auteur signale deux points de vue distincts desquels on peut envisager la notion d'orientation, on ne sait pas toujours ensuite à quel point de vue l'auteur se place et[?] incertitudes sur le sens qu'il convient de donner à telle ou telle phrase.

Exemple. Dans le plan projectif (réel) une droite n'est pas orientable : que signifie ici le mot orientable ?

[Dans la marge] Il y aurait aussi à distinguer exactement quel sens donner à l'expression géom[étrie] proj[ective] réelle (on peut y considérer[?] des figures imag[inai]res). Ex[emple] : géom[étrie] plane, point réel orienté, point imaginaire non[?].

Fréquentes affirmations plusieurs fois démontrées quelques lignes plus loin et qui reposent simplement sur la considération de q[uel]q[ues] exemples qui viennent à l'esprit de l'auteur. Exemple. La notion de signature disparaît dans le domaine complexe. Figures cherchées inversement égales (construction qui disparaît dans un espace à un nombre pair de dimensions si on prend le surcorps convenable car réalité des relations[?] entre fig[ures] [?sautent ?] et deviennent[?] semblables en géométrie complexe).

Orientation des droites disparaît en géom[étrie] projective réelle plane (que signifie le mot orientation 1e point de vue ou 2e point de vue ?)

Transformation de Darboux. En réalité, c'est une transformation ponctuelle entre l'espace projectif et l'espace anallagmatique (ou encore entre le ~~domaine complexe~~ l'espace non euclidien et les parties de l'espace anallagmatique internes une sphère.

Il y a aussi l'attention sur la géom[étrie] anall[agmatique] réelle au point de vue des sphères orientées réelles et la questions des invariants de figures formées par des sph[ères] orientées réelles : 2 figures ont le même invariant sans être anall[agmatiquemen]t égales.

Des notes de lectures supplémentaires sur la thèse de Belgodère se trouvent dans le cahier 1-51 (1943-44). Ces deux pages de notes sont moins critiques mais soulignent tout de même des lacunes importantes dans le travail de Belgodère. Belgodère publie dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, en 1944 ([Belgodère, 1944a], [Belgodère, 1944b]). En revanche, il semble que sa thèse n'ait pas été soutenue. On n'en trouve trace ni dans le catalogue des thèses de l'entre-deux-guerres[58], ni dans le catalogue du Sudoc.

4 Cartan lecteur

Cartan lecteur de ses étudiants ou de ses contemporains est un lecteur actif. Il prend des notes, refait les calculs et les preuves. Dans le catalogue des *Élie Cartan Papers*, j'ai listé les auteurs auquel Cartan fait référence pour un résultat, une preuve, ou en commentant explicitement certains travaux[59]. Je donne ici la liste des auteurs qui sont cités dans plus d'un cahier :

Darboux	7	Féraud	3	Cayley	2	Pascal	2
Lagrange	5	Galvani	3	Ch. Pierre	2	Poisson	2
Lie	5	Gauss	3	Clifford	2	Potier	2
Brucker	4	Golab	3	Crudeli	2	Riccati	2
Einstein	4	Henri Cartan	3	Del Pezzo	2	Ricci	2
Engel	4	Klein	3	Desargues	2	Saltykov	2
Halphen	4	Kosambi	3	Devisme	2	Study	2
Poincaré	4	Long	3	Finikoff	2	Thomas	2
Schouten	4	Vincensini	3	Fubini	2	Titt	2
Wachs	4	Weyl	3	Harmegnies	2	Veblen	2
Wilczynski	4	Van der Vennet	2	Jacobi	2	Vessiot	2
Bianchi	3	Belgodère	2	Lipschitz	2	Voss	2
Bonnet	3	Blaschke	2	Mentré	2	Vranceanu	2
Chern	3	Bonnet	2	Meusnier	2	Whitehead	2
Decuyper	3	Carathéodory	2	Newton	2	E. E. Levi	2

Soulignons tout d'abord que les étudiants dont Cartan lit et commente les thèses apparaissent dans ce tableau. D'autre part, il convient de souligner que j'ai compté chaque auteur une fois par cahier. Ainsi, si certains auteurs sont rencontrés plusieurs fois dans un même cahier, ils ne sont recensés qu'une seule fois. Cela explique que l'on ne retrouve que deux fois, ici, des auteurs comme Vranceanu ou Blaschke. Cela explique également l'importance des références à Darboux et Lagrange, dont les manuels sont souvent cités. Enfin, des occurrences telles que « normale de Fubini » ne sont pas comptabilisées,

[58] `http://www.numdam.org/theses/`

[59] Sur la question des lectures (ici, mathématiciennes), voyez [Goldstein, 1995]. Le Cartan lecteur que je présente dans ces exemples est un Cartan professeur et critique – c'est également le cas dans le cas des thèses lues, bien entendu. Ce n'est pas le seul aspect de Cartan lecteur que l'on peut voir dans ses cahiers, mais c'en est un qui revient souvent.

puisque j'ai souhaité, avec ce recensement, avoir un aperçu des lectures (référencées) de Cartan. Ainsi, Fubini n'apparaît que deux fois dans cette liste, mais si l'on considère les sujets abordés, Fubini apparaît 6 fois (e.g. géodésiques de Fubini), et il est référencé une douzaine de fois dans les mots-clefs (e.g. forme de Fubini) – de même les références à Lie ou Wilczynski (e.g. groupes de Lie, congruences Wilczynski) de sont bien plus nombreuses de ce point de vue.

Par ailleurs, que Cartan dresse des bibliographies sur divers sujets dans cinq cahiers, les cahiers 1-20, 1-37, 1-40, 1-41, et 1-57[60]. Ce dernier cahier, à l'exception de quelques notes de cours, est entièrement dédié à une bibliographie de 117 pages, portant essentiellement sur la géométrie différentielle, la théorie des groupes et la relativité. Cartan a regroupé les articles par auteurs, laissant parfois de grands espaces comme s'il comptait y revenir. Les références s'étendent des années 1880 jusqu'à 1936, et parcourent un grand nombre d'auteurs, depuis Engel, Lie, Fubini et Frobenius jusqu'à Ehresmann, van Kampen, et Chevalley. En marge des références, Cartan note parfois « jeté » ou « intéressant ».

Dans les cahiers 1-20, 1-37, 1-40, 1-41, se trouvent respectivement des bibliographies sur les équations différentielles (1872-1899, environ 160 références), les variétés (1903-1931, une douzaine de références), la théorie d'Einstein-Mayer (1892-1937, environ 60 références) et une courte bibliographie en préparation de ses contributions à l'Encyclopédie Française. Les bibliographies données par Cartan, si elles ne sont pas exhaustives, sont relativement complètes, puisque, d'une part, elles couvrent des périodes temporelles assez larges. D'autre part, Cartan référence des travaux en français, allemand, italien, anglais, polonais, et russe.

4.1 Quelques exemples

Je donne ci-dessous deux exemples : des notes de lectures sur un livre inconnu la *Géométrie* de Brucker, sur lequel Cartan revient à quatre reprises entre 1941 et 1944 et des notes en vue d'un rapport sur un mémoire de Jean Mariani (ca. 1944).

La *Géométrie* de Brucker

Entre 1941 et 1944, dans les cahiers 1-46, 1-47, 1-50, et 1-51, Cartan prend des notes sur un ouvrage qu'il titre « La Géométrie de Brucker ». Cartan lit et commente plusieurs versions successives, et communique ses remarques à l'auteur. En particulier, dans le cahier 1-46, glissées entre les pages 95 et 96, se trouvent sur des pages volantes plusieurs versions d'un brouillon de lettre à Brucker, daté du 15 mai 1941, dans lequel Cartan développe les critiques et remarques déjà faites dans ses notes personnelles. Il m'a été impossible de retrouver le livre de Brucker. Dans les répertoires d'agrégés, il existe un seul Brucker : Emile Brucker (1873-1946), agrégé en sciences naturelles (1896), proviseur de lycée à Cherbourg. Il est l'auteur de nombreux livres sur la pédagogie et l'éducation scientifique, et notamment de l'article « L'éducation de l'esprit scientifique » dans la

[60] Ces bibliographies ne sont pas comptabilisées dans la liste précédente.

Revue scientifique en 1918 ([Brucker, 1918]) dans lequel il argumente en faveur de l'apprentissage des méthodes scientifiques, avec de nombreux exemples notamment issus des mathématiques[61].

La lecture de Cartan est attentive et consciencieuse. Dans le cahier 1-46 (1941, pages 89 à 94 et feuilles volantes 1 à 4), Cartan prend des notes et fait des remarques critiques sur les vingt premières pages du livre, auxquelles il réfère comme étant l'introduction, dans sa lettre à Brucker (qui reprend, plus diplomatiquement, les remarques faites dans les notes). Dans le cahier 1-47 (ca. 1944, pages 3 à 6), Cartan prend des notes plus détaillées. Malheureusement, celles-ci sont rédigées au crayon à papier et difficiles à déchiffrer. Les notes continuent dans le cahier 1-51 (1943-44, pages 48-49). Enfin, dans le cahier 1-50, (1943, pages 5 à 7), Cartan étudie (à nouveau) certaines des preuves en détail.

Je donne ici un extrait du brouillon de lettre adressée à Brucker.

Cartan 1-46, feuille volante 1 recto

Paris, le 15 mai 41

Mon cher camarade,

J'ai encore examiné votre Introduction et réfléchi à différentes choses et je vous envoie tout de suite le résultat de quelques unes de mes réflexions.

I. Vous énoncez (II, 1) p. 7) l'axiome d'après lequel <u>une figure invariable qui a trois points fixes en ligne droite est fixée</u>. Le contexte invite à interpréter cette phrase de la manière suivante : <u>Si on fixe deux des trois points il est impossible d'effectuer sur la figure un déplacement continu qui laisse fixe le troisième point</u>. Mais ce dernier énoncé n'est pas tout à fait équivalent au suivant : <u>Il est impossible d'effectuer sur la figure un déplacement continu ramenant les trois points donnés à leurs positions initiales sans que tous les points de la figure reprennent aussi leurs positions initiales</u>. Ce dernier énoncé est plus strict que le premier et ne découle pas avec évidence du fait qu'on peut arrêter une roue avec un bâton. Il entraîne par exemple la conséquence que lorsque dans un mouvement de rotation un point non situé sur l'axe a repris sa position initiale, tous les points de la figure ont repris la leur, et par suite quand un point a tourné d'un demi-tour, tous les points ont tourné d'un demi-tour.

Cela permet de rendre plus claire la démonstration du fait que le milieu de MM', M et M' étant deux points diamétralement opposés d'un cercle, est situé sur l'axe : en effet après une rotation d'un demi-tour, la droite MM' est revenue sur elle-même, M étant en M' et M' en M ; donc le milieu O de MM' a repris sa position initiale ; si O n'était pas sur l'axe, tous les points

[61]Brucker y cite Poincaré, Mittag-Leffler, Hermite, et Borel.

auraient dû reprendre leur position initiale, ce qui n'est pas le cas pour M.

Cartan 1-46, feuille volante 1 verso

Il ne faut pas oublier non plus de démontrer que tous les diamètres du cercle ont même milieu, ce qui n'est pas évident mais ce qui est facile à prouver.

II. Au sujet de la sphère, je ne vois pas pourquoi une droite qui ne passe pas par le centre ne peut couper la sphère qu'en deux points à moins qu'on ne se représente par intuition la sphère partageant l'espace en deux régions distinctes. Il faudrait dire alors qu'on admet le résultat comme évident. (...)

Pourquoi deux sphères qui ont un point commun M non situé sur la ligne des centre AB n'ont-elles en commun que les points du cercle engendré par la rotation de M autour de AB ? Ce théorème joue un rôle fondamental dans la suite et on est tenté de dire qu'il est moins intuitif que le théorème d'après lequel un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres. (...)

IV. J'arrive au plan défini, au moins jusqu'à nouvel ordre par un centre O, un axe $Z'Z$ passant par O et un cercle engendré par la rotation autour de $Z'Z$ (ou[?] même un diamètre $X'X$).

Cartan 1-46, feuille volante 2 recto

Une première question se pose. Prenons dans le plan un cercle Λ et un diamètre $X'X$ partageant Λ en deux demi-cercles Λ_1, Λ_2. Il me semblerait nécessaire d'énoncer comme axiome la propriété suivante. ~~Il existe~~ La rotation d'un demi-tour autour de $X'X$ amène en coïncidence le demi-cercle Λ_1 avec le demi-cercle Λ_2. (...)

Une deuxième question est la suivante : Existe-t-il un plan admettant un centre donné O et deux diamètres donnés distincts $X'X$ et $Y'Y$? On peut démontrer facilement l'existence d'un tel plan en partant d'un plan connu et en le déplaçant d'une manière convenable. Mais la question suivante semble plus difficile : Le plan qui admet un centre donné O et deux diamètres donnés $X'X$ et $Y'Y$ est-il conique ? Tant que cette question ne sera pas résolue, on ne pourra pas dire si l'affirmation « l'angle XOY est droit » a un sens ou n'en a pas ! Cette question revient à la suivante : Un plan de centre donné peut-il avoir deux axes distincts ?

Je croyais être arrivé à démontrer l'unicité de l'axe, mais en rédigeant ma démonstration, je trouve une grave lacune. (...)

Dans la suite de la lettre, Cartan expose sa tentative de démonstration. Les feuillets suivants contiennent des brouillons additionnels de la preuve en question.

Mémoire de Mariani
La thèse de Belgodère n'est pas une exception, Cartan, lorsqu'il lit et commente ses étudiants ou contemporains, ne bride pas ses critiques. Au début du mois de juillet 1944 (du 9 juillet au 11 juillet, cahier 1-47, pages 32 à 44), Cartan lit et commente un mémoire de Jean Mariani (dont il ne donne pas le titre, mais dont le contenu invite à le rapprocher de *Théorie des champs macroscopiques*, publié en 1947 dans la collection Les Cours de Sorbonne) pour lequel il rédige un rapport. Le mémoire semble assez technique, et par conséquent les remarques de Cartan également et je n'en donnerai pas les détails ici. La plupart des commentaires de Cartan sont des reproches sur le manque de clarté ou de justification des affirmations, qu'il trouve souvent trop « fortes » ou « arbitraires ». Certains sont plus radicaux. Cartan recopie le passage suivant en l'annotant de « ? ? ? ? ? ? » (sic) :

> Les lois de la nature doivent être indépendantes non seulement du système de coordonnées de Gauss auquel on les réfère mais encore du repère cartésien choisi en chaque point ; le choix de repère est donc arbitraire comme celui du système de Gauss, aucun d'entre eux n'est privilégié et n'est susceptible de donner une forme spéciale aux lois de la nature et par conséquent aux équations qui les représentent. (Cartan 1-47 citant Mariani, 34)

Il note ensuite que les pages 27-28 sont « extraordinaires ! ». Le brouillon du rapport de Cartan, aux pages 41 à 44, ne mâche pas ses mots :

> Par un raisonnement abracadabrant où le mot de relativité est exploité d'une manière qui passe les bornes de la raison, il démontre ou croit démontrer 1) que [le] tenseur [de courbure de l'espace] ne peut qu'être symétrique et 2) qu'il est à un facteur scalaire près égal au tenseur fondamental. (...) [I]l se livre à des raisonnements d'une fantaisie extraordinaire, exploitant le mot magique de relativité auquel il attribue le pouvoir suivant : La relativité veut que ce tenseur soit symétrique. (...) La relativité veut que le tenseur symétrique ne diffère du tenseur fondamental que par un facteur scalaire. (...) (Pages 41-43)

Il ne s'agit pas, ici, de peindre un portrait de Cartan en enseignant implacable – portrait qui contredirait les nombreux témoignages de ses étudiants. On pourra trouver un Cartan plus encourageant dans les notes sur la thèse de Wachs (cahier 1-41), par exemple, ou le diplôme de Libermann (cahier 1-43). Néanmoins, il m'a semblé plus intéressant de montrer ces lectures d'auteurs peu connus.

Autres notes de lecture
Je ne listerai pas ici les mémoires commentés ou annotés par Cartan, pour éviter la redondance avec les références mentionnées plus haut. Soulignons toutefois qu'en plus des notes de lectures mathématiques (e. g. Blaschke, Wachs, Einstein) et de nombreuses notes pour préparer des interventions à l'Académie des Sciences (pour les Comptes-

Rendus, la présentation de membres étrangers[62] et les notices suivant les décès des Académiciens), on trouve également des notes sur *La valeur de la science* de Poincaré (cahier 1-38, 1933-38, envers pages 8-10), sur *Les étapes de la philosophie mathématique* de Brunschvicg (cahier 1-52, 1945, pages 193-195 et 197, Cartan décèle un problème dans la définition des parallèles chez Brunschvicg), ainsi que plusieurs dizaines de pages sur Herbart.

Ces dernières, qui se trouvent dans le cahier 1-15b daté aux alentours de 1899, sont accompagnées de diverses notes sur la pédagogie, depuis l'*Émile* de Rousseau jusqu'aux programmes d'enseignement et règles d'hygiène des écoles maternelles et primaires. Les vingt-et-une premières pages, couvrant les programmes et règlements de l'enseignement primaire et maternel, sont rédigées dans une cursive soignée qui semble ne pas appartenir à Cartan[63]. On retrouve la graphie habituelle de Cartan dans les cinquante pages suivantes, consacrées essentiellement à Herbart. Les notes sur Herbart (et Rousseau) sont des notes de lecture, suivant assez fidèlement le texte et avec peu de commentaires critiques. On ne pourrait donc qualifier ces notes d'une réflexion sur la pédagogie et la philosophie herbartiennes à proprement parler, et il est difficile d'avoir une idée précise de Cartan lecteur de Herbart.

5 Notes administratives, personnelles, ...

Enfin, les cahiers de Cartan contiennnent un certain nombre de notes personnelles et de notes administratives. Je ne m'étendrai pas sur les notes vraiment personnelles (comptes des années 1919-1923, cahier 1-25, pages 1 à 6 ; exercices d'anglais en 1939, cahier 1-56, pages 1-12) mais soulignons également que Cartan liste ses mémoires envoyés à des collègues (et notamment les mémoires envoyés à Kazan, cahier 1-39, pages 134-136), ou encore les revues conservés à l'Institut Poincaré (cahier 1-38, dernières pages).

Notons, par exemple, que l'on trouve dans les cahiers des traces des activités académiques de Cartan : la préparation de son jubilé (1939, cahier 1-56), le rapport d'activité du CNRS entre 1940 et 1943 (1944, cahier 1-36), ses activités comme président de l'Académie des Sciences (1946, cahiers 1-52 et 1-53). Ces cahiers en particulier de nombreux brouillons de ses interventions : plusieurs versions du brouillon du discours pour son élection ([Cartan, 1946b]) ; des notes pour les jubilés, notices nécrologiques, élections, des statistiques comparant l'Académie des Sciences de Paris et celle d'URSS[64], la préparation du 200e anniversaire de la naissance de Monge (cahier 1-53), enfin plusieurs versions du brouillon de son allocution du 16 décembre 46 ([Cartan, 1946a]).

[62] C'est en particulier le cas pour Hermann Weyl, dont Cartan prépare longuement la présentation dans le cahier 1-52, en 1945, soit deux ans avant l'élection de Weyl. Merci à Christophe Eckes pour avoir aidé à élaborer (voire confirmer) cette hypothèse.

[63] Parmi celles-ci se trouvent des notes prises lors d'une conférence donnée par une certaine Mlle Allibert sur la laïcité et la neutralité en mai 1899, ayant permis la datation du cahier.

[64] Dans le cahier 1-52, pendant plus d'une dizaine de pages, Cartan liste les noms des membres, avec leurs dates de naissance, d'élection et leur âge en 45, pour calculer d'une part la moyenne d'âge et d'autre part la moyenne d'âge d'élection.

6 Conclusion

Cette première incursion dans les cahiers d'Élie Cartan est restée très descriptive. Pour terminer cette esquisse de cartographie – qui ne saurait se passer de l'utilisation du site *Élie Cartan Papers* et de la consultation des photographies qui y figurent – je souhaite souligner un dernier point qui me semble intéressant. Comme je l'ai évoqué au début de cet article, l'une des richesses des cahiers de Cartan est la grande diversité de leurs contenus, et l'intrication des différents sujets qu'ils contiennent. L'un des points qui vient immédiatement à l'esprit, mais dont l'analyse m'aurait amenée trop loin dans cet article, sont les (possibles) liens entre recherche et enseignement.

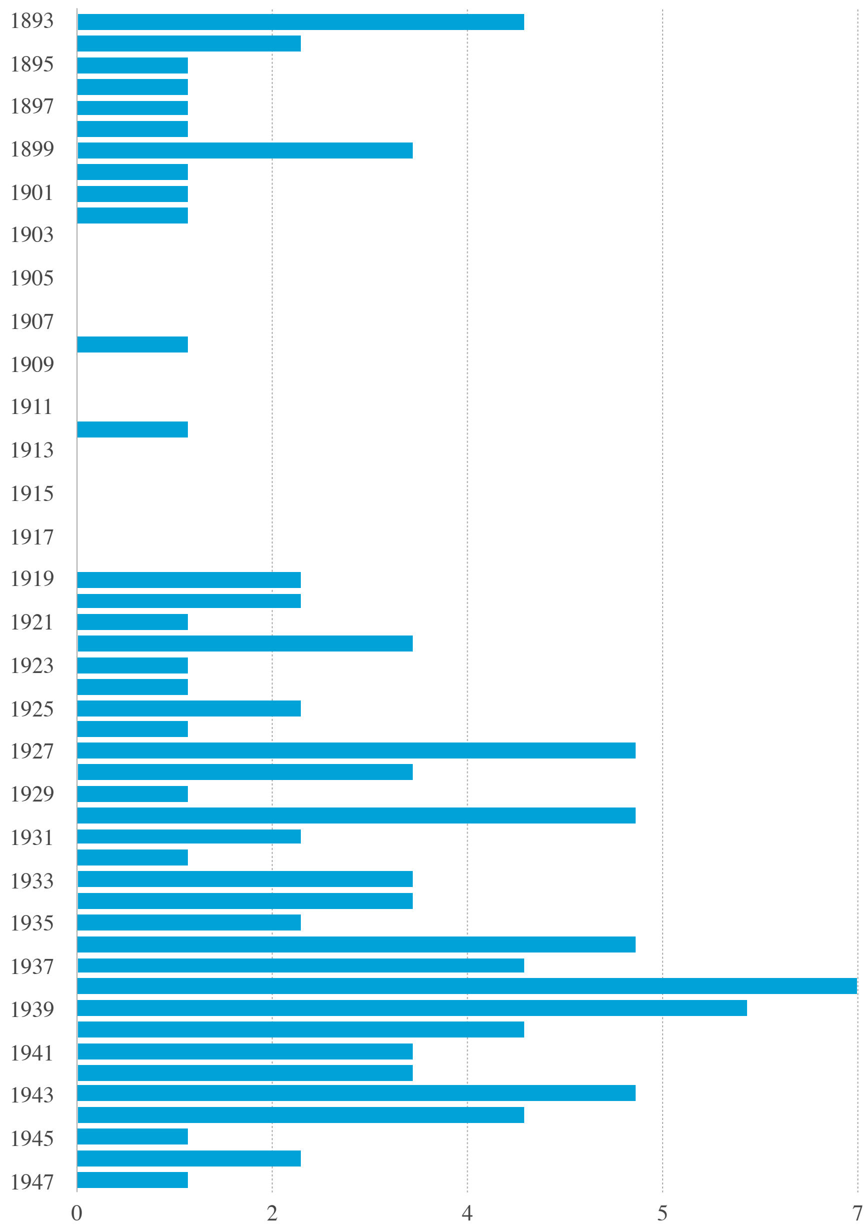
De manière assez évidente, connaître le sujet, la date et le contenu (parfois de manière très détaillée, dans le cas des notes prises par ses étudiants) des cours de Cartan permet de considérer les possibles coïncidences temporelles entre ses recherches et ses enseignements. On pourra ainsi regarder, par exemple, si les recherches menées par Cartan influencent le contenu de ses cours – ce que les cahiers permettent d'étudier. Réciproquement, il semble que l'on puisse reconnaître, dans les notes scientifiques, des recherches liées aux cours donnés par Cartan. C'est en particulier le cas dans le cahier 1-33 (1928/1930, daté par Cartan) qui contient des notes (relativement détaillées) pour un cours de géométrie projective complexe de 1928/1929, et le sommaire d'un cours de géométrie projective de 1929/1930. Sans toutefois exclure qu'il ne s'agisse que d'une coïncidence, il est intéressant de remarquer que les cours de géométrie considèrent des sujets sur lesquels Cartan travaille et publie au début des années 1930 (e.g. les espaces symétriques). Au moins une cinquantaine de pages du cahier 1-33 (pages 175 à 215) semblent consacrées à la préparation du cours, d'après leur contenu (Cartan ne l'indique pas explicitement). Les notes du cahier 1-33 sont très détaillées, touffues, et semblent contenir plus que le simple contenu du cours.

Enfin, soulignons que dans ce cahier, le plan des cours – et une grande partie des notes – rejoignent le contenu des *Leçons sur la géométrie projective complexe* ([Cartan, 1931]). Ainsi, dans les pages précédant celles que je viens de mentionner, se trouvent de nombreuses notes sur des sujets liés aux cours, évoqués dans le plan mais également présents dans [Cartan, 1931], comme par exemple les polynômes harmoniques, les invariants intégraux de l'espace projectif complexe, les espaces de chaînes, les involutions et anté-involutions (dans le domaine complexe), les espaces clos, les groupes clos (notamment la recherche des sous-groupes clos d'un groupe simple clos et sa représentation linéaire), les groupes continus, les espaces symétriques, les formes de Klein, la géométrie hermitienne elliptique...

Nous espérons que le catalogue et la base de données qui se trouvent sur le site *Élie Cartan Papers* et la cartographie proposée dans cet article pourront fournir des outils profitables pour les futures recherches sur les travaux d'Élie Cartan.

Annexes

A Répartition chronologique des cahiers



Nombre de cahiers par année. [39]

B Pages du catalogue

Je reproduis ci-dessous quelques pages du catalogue pour le cahier 1-37[40].

[39] Trois cahiers n'ont pu être datés précisément (cahier 1-19, ca. 189 ? ; cahiers 1-22 et 1-23, ca. 193 ?), aussi je lai ai comptabilisés pour la décennie en question, plutôt que de ne pas les compter (ou de les placer au hasard !).

[40] Comme je l'ai déjà mentionné, le catalogue analytique n'est pas auto-suffisant et requiert la consultation des cahiers disponibles sur la base de données iconographique.

Sujet	Contenu	Résultat	Notes

Pages 148-149

Page 148

Sujet	Contenu	Résultat	Notes
Note de Vranceanu			notes de lecture de Vranceanu, G. Sur quelques théorèmes relatifs aux variétés non holonomes et aux systèmes de formes de Pfaff. C. R. 192, 721-724 (1931).
	Système non holonome, ds^2.		
	Equations d'anholonomie.		
	Certains équations ne peuvent s'écrire avec seulement 3 différentielles, mais on a quand même un groupe à 6 paramètres.		
	C. renvoie à son propre article : Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre. Ann. de l'Éc. Norm. (3) 27, 109-192 (1910).		

Page 149

Sujet	Contenu	Résultat	Notes
Espaces de plans			
	On considère une variété dont on donne l'équation de structure $\omega_{h00}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}$.		
	C. affirme que $A_{\alpha\beta\gamma}$ est le nombre entier donnant la décomposition en groupes irréductibles de 2 groupes linéaires $(h00)$ et (abc).		

	Condition pour que cela soit le cas.		
	Preuve.		
	Etude des valeurs des coefficients.		
	Réciproque.		

Pages 150-151

Page 150

	Preuve de la réciproque.		
	On en déduit le théorème :		
		Théorème : Si $\omega_{h00}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}$, les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ sont les mêmes que ceux qui donnent la décomposition du produit de 2 groupes linéaires $(a_1x_1 + a_2x_2 + ...)^h$ et $(a_1x_1 + ...)^{a-b}(a_{12}x_{12} + ...)^{b-c}$.	
	Extension au cas général.		

Page 151

		Dans la formule $\omega_{hk0}\omega_{abc} = \sum A_{\alpha\beta\gamma}\omega_{\alpha\beta\gamma}$, les coefficients $A_{\alpha\beta\gamma}$ sont les mêmes que ceux qui donnent la décomposition du produit de 2 groupes irréductibles de poids dominants $hx + ky$, $ax + by + cz$.	
	C. note que ce résultat est très important.		
	Cas $p = 4$. Calculs.		

Pages 152-153

Page 152

	Preuve du théorème pour un facteur de la forme ω_{h000}.		

Page 153

	Décomposition des ω_{hkl0} en produit de 2 ω. Condition sur les indices.		
	C. note que c'est "probablement général".		
	On peut obtenir tous les ω_{hkl0}.		
	Preuve.		
	On en déduit que tous les ω_{abcd} sont des polynômes construits avec les ω_{i000}		
	Etude de l'espace des E_4		

Pages 154-155

Page 154

	On finit de démontrer le théorème pour les produits de la forme $\omega_{abcde}\omega_{h0000}$.		
	Donc le théorème est général.		
	Et ainsi de suite.		
		Théorème général :	
		Soit l'intersection de $V_{n-d,n-c-1,n-b-2,n-a-3}$ et $V_{n-d',n-c'-1,n-b'-2,n-a'-3}$. L'ordre d'indice $(\alpha\beta\gamma\delta)$ de cette intersection est le nombre de fois que le produit de 2 groupes linéaires irréductibles $(abcd)$ et $(a'b'c'd')$ contient le groupe irréductible $(\alpha\beta\gamma\delta)$.	

Références

[Audin, 2011a] Audin, M. (2011a). *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (1928-1991).* Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris.

[Audin, 2011b] Audin, M. (2011b). Portrait d'Élie Cartan par André Weil.

[Audin, 2012] Audin, M. (2012). Henri Cartan & André Weil - Du XXe siècle et de la topologie. *In Actes des journées X-UPS 2012. Henri Cartan & André Weil mathématiciens du XXe siècle*, Paris. Éditions de l'École polytechnique.

[Barrellon et Guilbaud, 2014] Barrellon, V. et Guilbaud, A. (2014). *Claude Simon. Les Vies de l'Archive*, chapitre ORIGAMI : première démonstration et perspectives de développement, pages 211–224. Éditions universitaires de Dijon, Dijon.

[Belgodère, 1944a] Belgodère, P. (1944a). Courbure moyenne généralisée. *Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris*, 218:739–740.

[Belgodère, 1944b] Belgodère, P. (1944b). Extremales d'une intégrale de surface $\iint g(p, q)dxdy$. *Comptes Rendus, Acad. Sci. Paris*, 219:272–273.

[Brechenmacher, 2010] Brechenmacher, F. (2010). Une histoire de l'universalité des matrices mathématiques. *Revue de Synthèse*, 131(4):569–603.

[Brucker, 1918] Brucker, E. (1918). L'éducation de l'esprit scientifique. *Revue Scientifique*, A56:198–209.

[Buhl, 1930] Buhl, A. (1930). Élie Cartan – La Théorie des Groupes finis et continus et l'Analysis Situs. (Recension). *L'Enseignement Mathématique*, 29:191–192.

[Cartan, 1902] Cartan, É. (1902). Sur la structure des groupes infinis. *C. R. Acad. Sci Paris*, 135:851–853.

[Cartan, 1904] Cartan, É. (1904). Sur la structure des groupes infinis de transformation. *Ann. sci. ENS*, 21:153–206.

[Cartan, 1922] Cartan, É. (1922). Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl dans la théorie de l'espace métrique. *C. R. Acad. Sci Paris*, 175:82–85.

[Cartan, 1923] Cartan, É. (1923). Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2(167-192).

[Cartan, 1925] Cartan, É. (1925). Sur les variétés à connexions affines et la théorie de la relativité généralisée (2e partie). *Ann. sci. ENS*, 42:17–88.

[Cartan, 1930a] Cartan, É. (1930a). Les representations linéaires des groupes simples et semi-simples clos. *C. R. Acad. Sci Paris*, 190:723–725.

[Cartan, 1930b] CARTAN, É. (1930b). Les representations linéaires du groupe des rotations de la sphere. *C. R. Acad. Sci Paris*, 190:610–612.

[Cartan, 1930c] CARTAN, É. (1930c). Sur les représentations linéaires des groupes clos. *Comment. Math. Helv.*, 2:269–283.

[Cartan, 1930d] CARTAN, É. (1930d). *La Théorie des Groupes finis et continus et l'Analysis Situs.* Mémorial des Sciences mathématiques dirigé par Henri Villat ; fasc. XLII, Paris.

[Cartan, 1931] CARTAN, É. (1931). *Leçons sur la géométrie projective complexe.* Gauthiers-Villars, Paris.

[Cartan, 1936] CARTAN, É. (1936). Le rôle de la théorie des groupes de Lie dans l'évolution de la géométrie moderne. *C. R. Congrès Math. Internat. (Oslo)*, 1:92–103.

[Cartan, 1937] CARTAN, É. (1937). *La Théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile. Leçons professées à la Sorbonne. Rédigées par Jean Leray.* Cahiers Scientifiques, no. 18, Gauthier-Villars, Paris.

[Cartan, 1938a] CARTAN, É. (1938a). La théorie de Galois et ses généralisations. *Comment. Math. Helv.*, 11:9–25.

[Cartan, 1938b] CARTAN, É. (1938b). Les représentations linéaires des groupes de Lie. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 17:1–12.

[Cartan, 1946a] CARTAN, É. (1946a). Allocution de M. Élie Cartan, en la séance annuelle des prix, 16 décembre 1946. *C. R. Acad. Sci Paris*, 222:1041–1054.

[Cartan, 1946b] CARTAN, É. (1946b). Allocution prononcée en prenant possession du fauteuil de la Présidence. *C. R. Acad. Sci Paris*, 221:19–21.

[Cartan, 1955] CARTAN, É. (1952-1955). *Œuvres complètes. En trois parties. Partie 1 : Groupes de Lie (1952) ; Partie 2, vol. 1 : Algèbre, formes différentielles, systèmes différentiels (1953) ; Partie 2, vol. 2 : Groupes infinis, systèmes différentiels, théories d'équivalence (1953) ; Partie 3, vol. 1 : Divers, géométrie différentielle (1955) ; Partie 3, vol. 2 : Géométrie différentielle (suite) (1955).* Gauthier-Villars, Paris.

[Cartan et Weyl, 1922] CARTAN, É. et WEYL, H. (1922). Korrespondenz, 09.10.1922 (Cartan à Weyl). *Nachlass Wey l, University Library ETH Zürich, Hs 91.*

[Chern et Chevalley, 1952] CHERN, S.-S. et CHEVALLEY, C. (1952). Élie Cartan and his mathematical work. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58(2):217–250.

[Chorlay, 2007] CHORLAY, R. (2007). *L'émergence du couple local / global dans les théories géométriques, de Bernhard Riemann à la théorie des faisceaux 1851-1953.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris.

[Chorlay, 2009] Chorlay, R. (2009). Passer au global : le cas d'Élie Cartan, 1922-1930. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 15(2):231–316.

[Chorlay, 2015] Chorlay, R. (2015). *"Sourcebook" Géométrie et topologie différentielles, 1918-1932. Textes traduits, présentés et annotés par R. Chorlay.* Hermann, Paris.

[Cogliati, 2012] Cogliati, A. (2012). *Continuous groups of transformations. Elie Cartan's structural approach.* Thèse de doctorat, Université de Milan.

[de Biasi, 2011] de Biasi, P.-M. (2011). *Génétique des textes.* CNRS éditions, Paris.

[Debever, 1979] Debever, R., éditeur (1979). *Élie Cartan - Albert Einstein Letters on Absolute Parallelism 1929-1932.* Princeton University Press.

[Galvani, 1944] Galvani, O. (1944). *Sur la réalisation des espaces ponctuels à torsion en géométrie euclidienne.* Thèse de doctorat, Paris.

[Gispert, 2015] Gispert, H. (2015). *La France mathématique de la Troisième République avant la Grande Guerre.* SMF, Paris.

[Gispert et Leloup, 2009] Gispert, H. et Leloup, J. (2009). Des patrons des mathématiques en France dans l'entre-deux-guerres. *Revue d'Histoire des Sciences*, 62:39–117.

[Goldstein, 1995] Goldstein, C. (1995). *Un théorème de Fermat et ses lecteurs.* Presses Universitaires de Vincennes, Saint-Denis.

[Goldstein, 1999] Goldstein, C. (1999). Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en france (1870–1914). *Acta historiae rerum naturalium technicarum*, 3 (New series):187–214.

[Guilbaud, 2013] Guilbaud, A. (2013). Le logiciel ORIGAMI et l'édition des Eloges de D'Alembert. *D'Alembert, l'Encyclopédie & al.* En ligne. Mis en ligne le 26/01/2013, consulté le 17/04/2016. URL : `http://dalembert.hypotheses.org/101`.

[Holmes *et al.*, 2003] Holmes, F. L., Renn, J. et Rheinberger, H.-J., éditeurs (2003). *Reworking the Bench. Research Notebooks in the History of Science.* Numéro 7 de Archimedes New Studies in the History and Philosophy of Science and Technology. Kluwer Academic Publishers, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

[Leloup, 2009] Leloup, J. (2009). *L'entre-deux-guerres mathématique àa travers les thèses soutenues en France.* Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie.

[Nabonnand, 2005] Nabonnand, P. (2005). Cartan et les connexions. *In Fibrés, fibrations et connexions.* Journées d'études des 17-18 mars 2015, Maison des Sciences de l'Homme. En ligne, consulté le 20/09/2016. URL :`http://semioweb.msh-paris.fr/f2ds/docs/fibres_2005/fibres_2005.pdf`.

[Nabonnand, 2009] Nabonnand, P. (2009). La notion d'holonomie chez Élie Cartan,. *Revue d'Histoire des Sciences*, 62(1):221–245.

[Nabonnand, 2016] NABONNAND, P. (2016). *Éléments d'une biographie de l'espace géométrique*, chapitre L'apparition de la notion d'espace généralisé d'Élie Cartan en 1922, pages 313–336. PUN-Edulor, Histoires de Géométries, Nancy.

[Passeron, 2009] PASSERON, I. (2009). *Inventaire analytique de la correspondance, Jean Le Rond D'Alembert, Œuvres completes.* CNRS Editions.

[Potier, 1940] POTIER, R. (1940). *Sur certaines questions de géométrie différentielle conforme.* Thèse de doctorat, Paris.

[Robadey, 2004] ROBADEY, A. (2004). Exploration d'un mode d'écriture de la généralité : l'article de Poincaré sur les lignes géodésiques des surfaces convexes (1905). *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 10:257–318.

[Robadey, 2006] ROBADEY, A. (2006). *Différentes modalités de travail sur le général dans les recherches de Poincaré sur les systèmes dynamiques.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris.

[Robadey, 2016] ROBADEY, A. (2016). Elaboration of a statement on the degree of generality of a property : Poincaré's work on the recurrence theorem. *In* CHEMLA, K., CHORLAY, R. et RABOUIN, D., éditeurs : *The Oxford Handbook on Generality in Mathematics and the Sciences*, pages 169–222, Oxford. Oxford University Press.

[Scholz, 2012] SCHOLZ, E. (2012). H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. *Newsletter European Mathematical Society*, 84:22–30.

[Scholz, 2016] SCHOLZ, E. (2016). *Éléments d'une biographie de l'espace géométrique*, chapitre The problem of space in the light of relativity : the views of Hermann Weyl and Elie Cartan, pages 255–312. PUN-Edulor, Histoires de Géométries, Nancy.

[Sharpe, 1997] SHARPE, R. W. (1997). *Differential Geometry Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program.* Springer, New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow.

[Weil, 1991] WEIL, A. (1991). *Souvenirs d'apprentissage.* Vita Mathematica, 6. Birkhauser Verlag, Basel.

[Weyl, 1938] WEYL, H. (1938). Cartan on groups and differential geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44:598–601.