Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres

Jenny Boucard

Sous la direction de
Christian Gilain et Alexandre Guilbaud

Sciences mathématiques 1750-1850

Continuités et ruptures

CNRS ÉDITIONS

15, rue Malebranche – 75005 Paris

ISBN : 9782271088529

Résidus et congruences de 1750 à 1850 : une diversité de pratiques entre algèbre et théorie des nombres

Jenny BOUCARD

Entre 1750 et 1850, la théorie des nombres est radicalement transformée, tant du point de vue des contenus que de son statut dans la communauté mathématique [1]. Ainsi, au milieu du XVIII^{e} siècle, les publications de nature arithmétique sont marginales ; les questions et outils en jeu sont élémentaires et les résultats semblent déconnectés les uns des autres. L'auteur le plus prolifique est Leonhard Euler. Même s'il publie de nombreux textes, la théorie des nombres reste pour lui un thème secondaire. Il regrette d'ailleurs à plusieurs reprises que ce domaine soit négligé par la plupart de ses contemporains. Le contraste avec le milieu du XIX^{e} siècle est frappant : vers 1850, le nombre d'articles en lien avec la théorie des nombres a considérablement augmenté et des cours complets sont dédiés à ce domaine dans plusieurs universités allemandes. Les auteurs de travaux arithmétiques, qui y consacrent parfois une majorité de leurs recherches, se concentrent sur quelques thèmes principaux et s'appuient sur un langage, des méthodes et des outils spécifiques. Certains, comme Gotthold Eisenstein ou Ernst Eduard Kummer, ont acquis leur reconnaissance institutionnelle sur la base de leurs recherches en théorie des nombres.

Deux traités consacrés à ce domaine paraissent au tournant du XIX^{e} siècle : l'*Essai sur la théorie des nombres* d'Adrien-Marie Legendre [1798] et les *Disquisitiones arithmeticae* [2] de Carl Friedrich Gauss [1801]. Le premier offre une synthèse de résultats centrés sur l'analyse diophantienne déjà énoncés voire démontrés par Pierre de Fermat, Euler ou encore Joseph-Louis Lagrange. Le second est organisé autour d'un nouvel objet arithmétique – les congruences – et des formes quadratiques ; décrit comme novateur et fondamental par de nombreux savants du XIX^{e} siècle et par les historiens de la théorie des nombres [3], sa publication a souvent été présentée comme constituant une rupture radicale dans l'histoire de la théorie des nombres.

1. [Goldstein 1989 ; Goldstein & Schappacher 2007a].
2. Titre abrégé en *D.A.*
3. Sur cet ouvrage et sa réception, voir [Goldstein *et al.* 2007].

L'objectif de cet article est de saisir l'évolution de la théorie des nombres de 1750 à 1850, tout particulièrement en France[4], à partir de l'étude d'un corpus de travail centré sur les congruences. Cette approche nous permettra notamment de souligner des éléments de continuité sur cette période et de montrer la diversité des réceptions des recherches arithmétiques du second XVIIIe siècle par les acteurs du premier XIXe. Nous mettrons également en évidence l'existence de pratiques arithmétiques spécifiques fondées sur un rapprochement entre algèbre et théorie des nombres au cours de la période considérée.

I. La théorie des nombres de 1750 à 1850 : quelques éléments historiographiques

Cette idée de rupture radicale matérialisée par les *D.A.* est avancée dans plusieurs histoires de la théorie des nombres publiées au XXe siècle. Celles-ci proposent un développement du domaine par à-coups jusqu'au XIXe siècle, avec un XVIIe siècle essentiellement centré sur Fermat, dont le travail est ensuite repris par Euler à partir des années 1730. Lagrange et Legendre, dont le rôle et l'importance varient d'une étude à l'autre, interviennent le plus souvent comme des acteurs intermédiaires, avant l'avènement d'une « nouvelle ère » de la théorie des nombres avec Gauss[5]. Ceci est par exemple bien illustré par M. Kline [1972], dans son introduction au chapitre « The Theory of Numbers in the Nineteenth Century » :

> « Up to the nineteenth century the theory of numbers was a series of isolated though often brilliant results. A new era began with Gauss's *Disquisitiones Arithmeticae* which he composed at the age of twenty. [. . .] In this book he standardized the notation ; he systematized the existing theory and extended it ; and he classified the problems to be studied and the known methods of attack and introduced new methods. In Gauss's work on the theory of numbers there are three main ideas : the theory of congruences, the introduction of algebraic numbers, and the theory of forms as the leading idea in Diophantine analysis. This work not only began the modern theory of numbers but determined the directions of work in the subject up to the present time. » [*Ibid.*, p. 813]

---

4. Nous justifierons cette restriction lors de l'analyse globale de notre corpus de travail pour la première moitié du XIXe siècle.

5. Selon A. Weil [1984, p. xii], par exemple, Lagrange et Legendre participent à un « âge de transition ». Weil caractérise l'apport de Gauss de la façon suivante : « The greatness of Gauss lies in his having brought to completion what his predecessors had initiated, no less than in his inaugurating a new era in this history of subject. » [*Ibid.*, p. ix] L'œuvre de Gauss se situe donc, d'après lui, dans la continuité des travaux de ses prédécesseurs, tout en constituant une rupture avec eux.

Trois aspects récurrents de l'historiographie de la théorie des nombres transparaissent dans cette citation. Avant Gauss, la théorie des nombres est un ensemble de résultats disparates[6], intéressant quelques rares auteurs (Fermat, Euler, Lagrange, Legendre), dont les travaux sont le plus souvent étudiés à la lumière de développements ultérieurs. Gauss introduit ensuite la notion de congruence, avec sa notation associée[7], permettant ainsi de standardiser les notations arithmétiques. Son ouvrage inaugure enfin trois branches principales pour la théorie des nombres : les congruences, la théorie des nombres algébriques et la théorie des formes. Ce dernier aspect a alors des conséquences importantes dans la structure des récits historiques proposés[8], qui prennent souvent comme point de départ des catégories qui ne sont pas (ou seulement partiellement) adaptées à la période considérée ici. Comme le soulignent C. Goldstein et N. Schappacher [2007a], plusieurs ouvrages présentent par exemple une histoire de la théorie des nombres principalement limitée à celle de la théorie algébrique des nombres :

> « In this history modern algebraic number theory appears as the natural outgrowth of the discipline founded by the *Disquisitiones Arithmeticae*. Historical studies have accordingly focused on the emergence of this branch of number theory, in particular on the works of Dirichlet, Ernst Eduard Kummer, Richard Dedekind, Leopold Kronecker, and on the specific thread linking the D. A. to the masterpiece of algebraic number theory, David Hilbert's *Zahlbericht* of 1897. » [*Ibid.*, p. 4]

Nous sommes donc face à une histoire presque exclusivement germanique, initiée par Gauss et centrée sur quelques acteurs et résultats précis identifiés rétrospectivement, tels les lois de réciprocité[9] ou les nombres

---

6. Notons que cette image de la théorie des nombres est aussi véhiculée par des contemporains de Gauss. Ainsi, dans son commentaire des *D.A.*, Delambre indique : « Cette analyse se composant d'un grand nombre de propositions isolées et assujetties à des limitations particulières, il seroit difficile d'entrer ici dans le détail des résultats nouveaux annoncés dans l'ouvrage de M. Gauss » [1810, p. 70].

7. Deux nombres entiers a et b sont dits congrus modulo un nombre entier p si leur différence est divisible par p. Autrement dit, a et b sont congrus modulo p s'ils admettent le même reste après division euclidienne par p. Gauss note $a \equiv b \pmod{p}$. Notons que les congruences sont donc liées directement aux résidus, particulièrement étudiés par Euler dans le second XVIII^e^ siècle.

8. On trouve un récit n'intégrant que cet aspect de la réception des recherches arithmétiques de Gauss dans [W. Ellison & F. Ellison 1978].

9. Legendre introduit l'expression « loi de réciprocité » dans un mémoire présenté à l'Académie des sciences de Paris en 1785 [1788]. À l'aide des congruences, son énoncé de la loi de réciprocité quadratique affirme que, pour des nombres premiers p et q, p est un résidu quadratique modulo q – c'est-à-dire qu'il existe un entier x tel que $p \equiv x^2 \pmod{q}$ – si et seulement si q est un résidu quadratique modulo p, sauf lorsque p et q sont de la forme $4n + 3$. Des savants comme Gauss, Jacobi, Kummer, Einsenstein ont énoncé des

idéaux. Cette forme de lecture historique conduit à la mise en place d'un récit linéaire, négligeant certains aspects substantiels de l'histoire de la théorie des nombres. Elle induit également des manques dans la contextualisation des travaux de certains auteurs, tels que ceux d'Évariste Galois ou d'Augustin-Louis Cauchy pour le XIXe siècle. Le travail sur les racines imaginaires de congruences de Galois [1830] est souvent décrit comme isolé, alimentant ainsi l'image du génie maudit qui lui est traditionnellement associée [10]. À l'exception de sa théorie symbolique des imaginaires [Dahan Dalmedico 1997 ; Flament 2003], les recherches arithmétiques de Cauchy sont pour la plupart oubliées ou évaluées négativement dans la mesure où elles n'entrent pas dans le cadre de la théorie algébrique des nombres ou de la théorie des formes quadratiques telle qu'elle est exposée dans les *D.A.* Ainsi, lorsque l'historien F. Lemmermeyer lit les travaux arithmétiques de Cauchy publiés autour de 1840 à travers le prisme des lois de réciprocité et des sommes de Gauss [11], il les met en regard de ceux de Carl Gustav Jakob Jacobi et commente : « Cauchy also studied these sums, but his lack of understanding higher reciprocity kept him from going as far as Jacobi did » [2009, p. 171].

Une double remise en cause de cette lecture a eu lieu dans les dernières décennies. Des études récentes ont, d'une part, souligné l'importance de l'organisation humaine et matérielle de la recherche et de l'enseignement pour saisir la circulation effective des idées. Au-delà d'Euler, de Lagrange et de Legendre, M. Bullynck [2006, 2009b] met par exemple en évidence l'influence sur Gauss d'une lignée de manuels arithmétiques germaniques et des travaux de Johann Heinrich Lambert autour de la construction de tables numériques. D'autre part, la complexité de la réception des *D.A.* jusque dans les années 1860 a pu être mise au jour à partir d'un relevé systématique des références à l'ouvrage pour la période 1801-1860. Dans cette étude, C. Goldstein et N. Schappacher [2007a] montrent notamment la mise en place d'un champ de recherche, qu'ils nomment *Analyse arithmétique algébrique*, constitué de recherches articulant les congruences, les fonctions elliptiques, les séries infinies et les équations algébriques [*Ibid.*, p. 52]. Ils pointent en outre la part relativement faible des textes contenant des résultats arithmétiques en lien avec la théorie algébrique des nombres dans le second XIXe siècle [12], ce qui offre un contraste notable avec les récits

---

lois de réciprocité d'ordre supérieur, c'est-à-dire des lois donnant une condition pour qu'un nombre p soit une puissance n^e modulo q lorsque q est une puissance n^e modulo p [Lemmermeyer 2000].

10. Pour une analyse de la construction de cette image, voir [Ehrhardt 2011a].

11. Les sommes de Gauss sont des cas particuliers de sommes pondérées de racines de l'unité.

12. [Goldstein 1999 ; Goldstein & Schappacher 2007b].

précédents. Plusieurs travaux historiques récents établissent ainsi comment certains transferts, filiations et pratiques ont été masqués par une historiographie fondée sur une identification rétrospective des résultats importants à considérer.

Notre objectif consiste ici à contribuer à mettre en lumière ces différentes zones d'ombre pour la période 1750-1850. Nous nous appuyons, pour ce faire, sur une analyse systématique menée pour la première moitié du XIXe siècle, qui correspond à la fois à la période suivant directement la publication des traités de Legendre et de Gauss et à celle de l'essor des journaux mathématiques et, par là même, à une diversification des supports de diffusion pour les auteurs. Nous souhaitions, dans ce cadre, pouvoir capturer la multiplicité des pratiques arithmétiques déployées par les différents acteurs de la période. Mais déterminer méthodiquement ce qui relève de ce domaine suppose de pouvoir nous appuyer sur une catégorie « théorie des nombres » relativement stabilisée. Or, cela n'est pas envisageable, que l'on considère le point de vue des acteurs ou les classifications construites dans le second XIXe siècle dans le cadre de journaux de recension comme le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* [13]. Les définitions de la théorie des nombres données par Legendre et Gauss dans leurs traités respectifs témoignent par exemple de présupposés très différents de la part des deux mathématiciens. Legendre identifie ainsi la théorie des nombres à l'analyse indéterminée :

> « Je ne sépare point la théorie des nombres de l'analyse indéterminée, et je regarde ces deux parties comme ne faisant qu'une seule et même branche de l'analyse algébrique. En effet, il n'est pas de Théorème sur les nombres qui ne soit relatif à la résolution d'une ou de plusieurs équations indéterminées. » [1798, p. ix]

Pour Gauss, au contraire, l'« arithmétique transcendante » ne se réduit pas à l'analyse indéterminée :

> « Les Recherches contenues dans cet Ouvrage appartiennent à cette partie des Mathématiques où l'on considère particulièrement les nombres entiers, quelquefois les fractions, mais où l'on exclut toujours les nombres irrationnels. L'Analyse *indéterminée* ou de *Diophante*, qui apprend à distinguer, parmi les solutions d'un problème indéterminé, celles qui sont entières, ou du moins rationnelles et le plus souvent positives, ne constitue pas cette doctrine, mais elle en est une partie très-distincte ; elle a avec elle à-peu-près le même rapport que l'Algèbre, c'est-à-dire, l'art de réduire ou de résoudre les équations, avec l'Analyse universelle. » [1801/1807, Préface]

Notre stratégie a donc consisté en la constitution d'un corpus d'étude grâce au suivi systématique, dans les différentes publications de la première

13. Cette question est précisément discutée dans [Goldstein 1999, p. 194-199].

moitié du XIXe siècle, des différentes occurrences de l'objet arithmétique introduit par Gauss en 1801 (les congruences) et de la notion associée de résidu, le tout en tenant compte des différentes formes d'utilisation de ces objets. En effet, l'appropriation de la notion de congruence de Gauss n'est ni immédiate, ni uniforme : selon les auteurs et les supports de publication utilisés, les résidus et les congruences apparaissent sous différentes formes, dénominations et notations. Les *congruences* de Gauss sont des *équivalences* chez Cauchy, des *équations* chez Poinsot et des *équations indéterminées* chez Legendre. De même, les *résidus* sont parfois des *restes* ou encore des *nombres de même forme*. Du point de vue des notations, les habitudes sont également diverses, comme nous le verrons avec Legendre. Nous avons donc établi un ensemble de mots et symboles clés pour construire notre corpus [14], et ainsi relevé 254 textes [15] (incluant rééditions et traductions) et 56 auteurs [16] pour la période 1801-1850, auxquels nous avons appliqué une double grille de lecture : les références explicites des auteurs et l'analyse de leurs pratiques arithmétiques. C'est à l'aune des références ainsi relevées que nous proposons, dans la partie suivante, une lecture du second XVIIIe siècle centrée sur Euler, Lagrange, Legendre et Gauss, cette restriction à quatre auteurs pour la période constituant le reflet des choix des acteurs du premier XIXe siècle [17]. Notre troisième partie, consacrée à l'analyse du corpus de textes sur les congruences, nous permettra ainsi de brosser un portrait des pratiques arithmétiques pour la période 1750-1850 et de souligner une diversité de filiations et de circulations entre les différents acteurs impliqués.

II. Deux approches arithmétiques au tournant du XIXe siècle

1. Euler, Lagrange et le théorème des quatre carrés

Euler est sans conteste l'auteur qui produit le plus de mémoires arithmétiques au XVIIIe siècle. C'est dans les années 1730 qu'il entame un échange épistolaire avec Christian Goldbach, dans lequel les questions de nombres occupent une place de choix. De son côté, Lagrange publie une

14. La méthodologie employée est détaillée dans [Boucard 2011b, chap. 1].

15. Signalons par exemple que, parmi ces textes, 40% environ ne contiennent aucune référence explicite aux *D.A.* : nous obtenons ainsi un ensemble d'écrits sensiblement différent de celui analysé dans [Goldstein & Schappacher 2007a].

16. Parmi ces 56 auteurs pour 254 textes, nous dénombrons 19 auteurs allemands, pour 123 textes, et 24 français, auteurs de 110 textes. Parmi les 13 autres auteurs, 6 sont britanniques, 2 sont belges, 2 sont italiens et 3 sont russes.

17. Comme nous le verrons plus loin, d'autres acteurs (Hindenburg et Lambert) et d'autres travaux doivent cependant être pris en considération afin de saisir le développement de la théorie des nombres au XVIIIe siècle [Bullynck 2006, 2009a, 2010].

dizaine de mémoires sur une période réduite (1768-1777) correspondant à son arrivée à l'Académie de Berlin. Euler et Lagrange échangent régulièrement par lettres et travaillent sur des questions similaires. Au début des années 1770, ils proposent ainsi des preuves, fondées sur des approches différentes, de deux théorèmes laissés sans démonstration jusque-là : le théorème des quatre carrés et le théorème de Wilson [18]. L'analyse des différents outils et méthodes mis en œuvre par les deux savants pour le théorème des quatre carrés est particulièrement éclairante quant à leurs pratiques arithmétiques respectives [19]. C'est donc sur ce point que nous nous concentrerons ici.

Entre 1749 et 1751, Euler présente à l'Académie de Berlin plusieurs mémoires sur les sommes de carrés, dont une démonstration du théorème des deux carrés [20], dans lesquels il recourt à des outils variés : différences finies, manipulations algébriques, ainsi que ce que l'on appelle aujourd'hui le petit théorème de Fermat [21]. Le fait que les diviseurs de sommes de deux carrés premiers entre eux sont également des sommes de deux carrés constitue une étape fondamentale de cette preuve. Pour démontrer ce résultat, Euler s'appuie sur la méthode de descente infinie [22] dans le cadre d'un raisonnement par l'absurde : il suppose d'abord qu'il existe une somme de deux carrés premiers entre eux divisible par un nombre premier p qui n'est pas une somme de deux carrés, avant d'aboutir à une suite strictement décroissante de sommes de deux carrés possédant cette propriété, ce qui est impossible. En 1751, Euler présente un mémoire [1760] contenant une preuve de la version faible du théorème des quatre carrés. Il introduit pour ce faire un ensemble de résultats sur ce qu'il nomme les *residua* [23], qui désignent les restes de carrés après division par un nombre p, composé ou premier. Il énonce plusieurs propriétés opératoires de ces résidus, qu'il utilise ensuite dans sa preuve, toujours fondée sur un raisonnement par l'absurde. La méthode des différences finies n'est plus utilisée,

18. D'après le théorème de Wilson, si un nombre p est premier, alors $(p-1)!+1$ est divisible par p. Celui des quatre carrés énonce que tout nombre entier est somme d'au plus quatre carrés entiers (ou rationnels dans la version faible de ce résultat).

19. Cette analyse est développée dans [Boucard 2011b, chap. 5 ; 2014].

20. Ce théorème énonce que tout nombre premier de la forme $4n+1$ est somme de deux carrés.

21. Selon le petit théorème de Fermat, pour tout nombre premier p, l'expression $a^{p-1}-1$ est divisible par p si a est premier avec p.

22. Sur l'utilisation de la méthode de descente infinie en théorie des nombres, voir [Goldstein 1993 ; Bussotti 2006].

23. Le terme *résidus*, ou *residua* en latin, n'est pas utilisé par Euler sous une forme stabilisée. Dans [Euler 1761], les *residua* désignent par exemple les résidus de puissances.

Euler indiquant explicitement chercher à construire des preuves fondées uniquement sur des arguments arithmétiques.

La nature des démonstrations est régulièrement évoquée par Euler dans ses travaux arithmétiques. Entre 1741 et 1761, ce dernier publie quatre démonstrations du petit théorème de Fermat construites avec des outils différents. Les deux premières [1741, 1750] s'appuient sur les propriétés de divisibilité des coefficients du binôme de Newton. Dans le mémoire de 1750, Euler montre par exemple que, pour tout nombre premier p, $(a+b)^p - a - b$ est divisible par p, puis en déduit le petit théorème de Fermat par itération. Dans la suite, il utilise ce dernier pour établir des résultats sur les diviseurs premiers des nombres de la forme $a^{2n} + b^{2n}$, qu'il exprime progressivement en termes de restes de division euclidienne. En 1761, Euler commence au contraire par démontrer des résultats sur les résidus de puissances après division par un nombre premier p avant d'obtenir une nouvelle démonstration du petit théorème de Fermat à partir de considérations sur la répartition des résidus de puissance parmi les nombres entiers compris entre 1 et $p-1$. Il qualifie cette preuve de « plus naturelle » [Euler 1761, § 53], témoignant ainsi de sa volonté de construire des raisonnements seulement fondés sur la considération d'outils arithmétiques comme les résidus.

C'est en 1772 que Lagrange publie sa propre démonstration du théorème des quatre carrés – et c'est d'ailleurs l'unique mémoire qu'il consacre à ce résultat. Il y reprend l'architecture de la démonstration proposée par Euler pour sa version faible du théorème des quatre carrés. Pour chaque théorème démontré par Euler à l'aide des résidus, Lagrange propose en revanche de nouvelles preuves construites à partir de méthodes et d'outils qu'il a déjà utilisés dans des écrits sur les problèmes indéterminés du second degré, sans aucune mention de la théorie des résidus d'Euler [Lagrange 1769, 1770, 1773, 1774]. Comme ce dernier, Lagrange recourt à des manipulations algébriques et à la méthode des différences finies. Nous retrouvons aussi chez lui la méthode de descente infinie, mais sous une autre forme : Lagrange construit une suite décroissante d'entiers positifs afin d'aboutir à une équation dont la résolution, triviale, lui permet de démontrer l'existence d'une solution. C'est également sous cette forme qu'il applique la méthode dans sa démonstration du théorème des quatre carrés.

Euler réagit très rapidement en soumettant, dès 1772, sa propre démonstration à l'Académie de Pétersbourg [1780]. Il y reprend certaines simplifications algébriques de Lagrange ainsi que sa façon d'utiliser la méthode de descente infinie. Des spécificités se dégagent néanmoins. Le mémoire d'Euler ne se borne pas aux quatre carrés : il contient au contraire des preuves d'autres théorèmes portant sur la décomposition de nombres entiers en sommes de carrés et reposant sur la même structure argumentative, ce qui semble témoigner d'une volonté de systématisation des raisonnements pour un ensemble donné de résultats. Par ailleurs, Euler ne reprend pas les démonstrations de certains résultats intermédiaires par Lagrange, mais en propose de nouvelles, fondées principalement sur les résidus.

Ce bref survol des outils et méthodes utilisés par les deux hommes pour démontrer un même résultat témoigne non seulement de leurs influences réciproques – une trame de démonstration qui circule, des usages évolutifs de la méthode de descente infinie –, mais aussi de l'existence de pratiques arithmétiques différentes[24] permettant *in fine* d'obtenir les mêmes résultats. Lorsque Lagrange applique une diversité d'outils analytiques, algébriques, arithmétiques à ses recherches arithmétiques – ce qu'il fait également dans ses travaux arithmétiques ultérieurs –, Euler présente des démonstrations de plus en plus centrées sur les résidus, qui deviennent progressivement un objet d'étude à part entière.

Euler utilise de fait les résidus dans un contexte plus large que celui du théorème des quatre carrés. Dès les années 1730, il étudie différents problèmes de restes issus d'ouvrages de mathématiques récréatives[25] et de manuels d'arithmétique (*Rechenbücher*) dans lesquels les solutions proposées sont le plus souvent construites sur des règles de calculs particulières. Il propose une approche générale pour cet ensemble de problèmes dans un mémoire [1740] où il considère par exemple des nombres négatifs pour restes [Bullynck 2009a,b]. À partir des années 1750 au moins, les résidus semblent constituer pour Euler un outil mathématique approprié pour construire des preuves arithmétiques : nous avons par exemple déjà évoqué la démonstration « plus naturelle » [1761, § 53] qu'il propose du petit théorème de Fermat. Dans ce même texte, Euler souligne également la nature particulière d'un résidu, comme représentant d'une infinité de nombres [*Ibid.*, § 3]. Il projette de surcroît la publication d'un traité de théorie des nombres, dont une version inachevée paraîtra finalement de manière posthume [1849]. Les chapitres 5 à 14 sont consacrés aux résidus (de puissances, quadratiques, cubiques, biquadratiques, quintiques) ; les deux derniers, 15 et 16, contiennent des études des formes $x^2 + y^2$ et $x^2 + 2y^2$. D'« instruments de recherche », les résidus deviennent ainsi progressivement des « objets d'étude »[26] dans l'œuvre d'Euler.

Ces différents travaux d'Euler ne sont pas isolés. La place de l'arithmétique élémentaire dans l'éducation devient en effet de plus en plus importante et Christian Wolff, dont la philosophie a un impact fondamental au

24. L'étude de leurs démonstrations respectives du théorème de Wilson permet également de mettre en évidence ces similarités et spécificités dans leurs pratiques.

25. Sur les ouvrages de mathématiques récréatives publiés entre le XVI^{e} et le XVIII^{e} siècle, leurs sources et l'impact de l'avènement de l'algèbre sur ces problèmes, voir [Heeffer 2014].

26. Nous empruntons ces expressions à E. Guisti [2000].

XVIII^e siècle, souligne la nécessité de systématiser l'arithmétique, en proposant des démonstrations et en limitant le recours à des règles particulières [Bullynck 2008, 2009a]. D'autres auteurs, comme Abraham Kästner et Carl Friedrich Hindenburg, poursuivent ce travail de généralisation sur les problèmes de restes. Dans ce contexte, la théorie des congruences de Gauss permet de penser cet ensemble de problèmes de façon cohérente :

> « Finally, Gauss's congruences, functioning as an equation, a relationship and a tool for abbreviating calculation, reshaped this fragmented field of mathematics (which had come from old algebra books, Rechenbücher, recreational mathematics, equation theory, and Diophantus) into a coherent theory. All singular problems, previously treated by Euler and Hindenburg, appear in Section II of the *Disquisitiones Arithmeticae* and are aptly solved using congruences » [Bullynck 2009a, p. 68].

La théorie des nombres est également au cœur de discussions académiques dans les années 1770, engagées par Lambert qui projette de mener une entreprise de constitution de tables de facteurs et qui souligne le besoin, à cet effet, d'une théorie des nombres cohérente. Plusieurs géomètres publient alors des recherches arithmétiques sur des méthodes de factorisation : Johann III Bernoulli, qui fait paraître dès 1771 un mémoire sur les fractions décimales périodiques, utiles pour la factorisation de certains grands nombres, et Euler, qui présente également des recherches à ce sujet l'année suivante devant l'Académie de Pétersbourg. Il est ainsi possible de comprendre certains mémoires d'Euler en lien avec la théorie des résidus comme des réactions aux méthodes proposées par Bernoulli, qui s'est lui-même inspiré de ses précédents travaux [Bullynck 2010].

À partir de la comparaison des preuves d'Euler et de Lagrange du théorème des quatre carrés, nous pouvons donc identifier deux approches distinctes de la théorie des nombres, que nous retrouverons, dans une certaine mesure, chez Gauss et Legendre au tournant du XIX^e siècle.

2. Les traités arithmétiques de Legendre (1798) et Gauss (1801)

Au moment où leurs ouvrages paraissent, Legendre est académicien (depuis 1783), tandis que Gauss est un jeune savant de 24 ans. Ils publient à trois années d'intervalle un traité centré sur la théorie des nombres, dont les présupposés, l'organisation et les contenus sont très différents.

Le traité de Legendre est composé de quatre parties : la première et la quatrième portent sur la résolution d'équations indéterminées, les deuxième et troisième contiennent des résultats sur la loi de réciprocité quadratique, puis sur certaines formes quadratiques et les sommes de trois carrés. Nous retrouvons donc ici, comme chez Lagrange, une théorie des nombres centrée sur l'analyse diophantienne. Legendre produit aussi quelques observations sur les restes de division mais n'énonce ou n'utilise aucune propriété opératoire sur les restes. Il est par exemple reconnu pour son travail sur la loi de réciprocité quadratique et pour avoir introduit ce que l'on qualifie aujourd'hui de *symbole de Legendre*, mais il aborde principalement ces thèmes en termes de divisibilité [27]. Dès son premier mémoire de théorie des nombres [1788], Legendre reprenait des résultats énoncés par Euler sur les résidus, ou démontrés à l'aide de la théorie des résidus, tout en les traduisant en termes de divisibilité. La première édition de son traité se situe donc dans la lignée des travaux de Lagrange : ses recherches portent principalement sur les équations indéterminées et les formes quadratiques ; Legendre considère très ponctuellement des restes de division afin de simplifier la formulation de certains énoncés, mais il n'applique pas les propriétés propres aux résidus données précédemment par Euler. Comme Lagrange, il reformule également en termes de divisibilité et d'équations indéterminées certains résultats énoncés par Euler à l'aide des résidus (les théorèmes de Fermat et de Wilson par exemple).

Le positionnement de Gauss dans les *D.A.* est radicalement différent [28]. L'ouvrage débute précisément par l'introduction de la notion de congruence et de la notation associée, que Gauss justifie par l'analogie avec l'égalité [29].

---

27. Voici, par exemple, le paragraphe contenant la définition du symbole de Legendre : « Nous avons démontré que N étant un nombre quelconque, et c un nombre premier qui ne divise pas N, la quantité $N^{c-1}-1$ est toujours divisible par c ; cette quantité est le produit de deux facteurs $N^{\frac{c-1}{2}}+1$, $N^{\frac{c-1}{2}}-1$; il faut donc que l'un ou l'autre de ces deux facteurs soit divisible par c ; d'où nous conclurons que la quantité $N^{\frac{c-1}{2}}$ divisée par c, laissera toujours le reste $+1$ ou le reste -1. [...] *Comme les quantités analogues à* $N^{\frac{c-1}{2}}$ *se rencontreront fréquemment dans le cours de nos recherches, nous emploierons le caractère abrégé* $\left(\frac{N}{c}\right)$, *pour exprimer le reste que donne* $N^{\frac{c-1}{2}}$ *divisée par* c*; reste qui, suivant ce qu'on vient de voir, ne peut être que* $+1$ *ou* -1 » [Legendre 1798, art. 134-135]. Cet extrait reflète la forme des énoncés de Legendre : le petit théorème de Fermat est présenté en termes de divisibilité, contrairement à ce que nous trouvons chez Euler. Legendre utilise le mot « reste » au sens de la division euclidienne. Il n'applique aucune opération sur les restes.

28. Pour une analyse détaillée du contenu et de la structure de l'ouvrage de Gauss, voir [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 5-18].

29. Gauss était familiarisé dès son plus jeune âge aux raisonnements sur les restes de nombres, bien avant d'avoir eu accès aux travaux d'Euler ou de Lagrange. Dès l'âge de huit ans, le jeune Gauss a eu accès à un *Rechenbuch*, offert par son oncle, et qu'il qualifiait de *Liebes Büchlein* [Siebeneicher s.d.] : le manuel *Arithmetica theoretico-practica* de Christian Stephan Remer [1737], dans lequel les astuces pratiques pour simplifier les calculs à partir de nombreux cas particuliers sont particulièrement mises en avant. L'ouvrage contient également des résultats sur les diviseurs de nombres, les nombres premiers, les méthodes de factorisation et les restes de division. Remer écrit par exemple « de[r] Reste von 10 : 7 = 3 » (le reste de 10 : 7 = 3) pour signifier que le reste de la division de 10 par 7 est 3 [1737, p. 260]. Il détermine ensuite les différents restes des puissances successives de 3 après division par 7 et note que l'on obtient le

Les quatre premières sections des *D.A.* sont dédiées aux congruences et à leurs propriétés fondamentales, résidus de puissances et résidus quadratiques. Contrairement à Legendre qui ne réutilise pas les raisonnements d'Euler sur les résidus, Gauss les cite, les reprend, les développe et les approfondit à l'aide des congruences[30]. La section V, de loin la plus volumineuse, est consacrée aux formes quadratiques, et traite de deux questions centrales : déterminer les nombres représentés par une forme quadratique donnée et classer les formes quadratiques en fonction de leur déterminant. Comme nous l'avons signalé, Lagrange est également reconnu pour avoir produit des recherches sur ce sujet. Il est toutefois important de remarquer que l'approche de Gauss est originale par rapport à ses prédécesseurs :

> « Leonhard Euler, Joseph-Louis Lagrange, and Adrien-Marie Legendre had forged tools to study the representation of integers by quadratic forms. Gauss, however, moved away from this Diophantine aspect towards a treatment of quadratic forms as objects in their own right, and, as he had done for congruences, explicitly pinpointed and *named* the key tools. » [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 8]

Nous retrouverons d'ailleurs ces deux approches de la théorie des formes dans la première moitié du XIX^e siècle. La section VI contient des applications des sections précédentes, dont des tests de primalité et des exemples de résolution d'équations indéterminées. Enfin, la septième section est consacrée à la cyclotomie, c'est-à-dire au problème de la division du cercle en parties égales à la règle et au compas. C'est principalement cette section qui fait connaître les *D.A.* dans un premier temps. Gauss y expose une méthode de résolution algébrique des équations binômes $x^n = 1$, où n est un nombre premier, et en déduit des conditions de constructibilité pour la division du cercle. Comme il le note lui-même, cette section relève *a priori* de l'algèbre et de la géométrie : « La théorie de la division du cercle, ou des polygones réguliers, qui compose la section VII, n'appartient pas *par elle-même* à l'Arithmétique, mais ses *principes* ne peuvent être puisés que dans l'Arithmétique transcendante. » [Gauss 1801/1807, préface]. En effet, la méthode développée repose sur les racines primitives, qui sont des objets arithmétiques introduits dans la troisième section[31]. L'analyse générale que donne Gauss sur la résolubilité de ces équations binômes a constitué un

---

reste de la quatrième puissance à partir du produit du reste (égal à 6) de la troisième puissance par 3 ; il écrit « $3.6 = 7 + 7 + 4 = 4$ » [*Ibid.*, p. 261].

30. Dans la section sur les résidus de puissances par exemple, Gauss réutilise sous la même forme des raisonnements exposés par Euler dans différents mémoires.

31. Une racine primitive d'un nombre premier p est un nombre tel que les restes de ses puissances successives après division par p donnent tous les nombres entiers compris entre 1 et $p - 1$. Cette notion est introduite par Euler [1774].

modèle pour la théorie des équations au début du XIX[e] siècle. L'équation cyclotomique joue le rôle de paradigme pour les différents savants engagés dans le champ de l'analyse arithmétique algébrique [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 54]. Nous verrons qu'elle fait également office d'exemple clé dans une autre approche liée à la théorie des nombres développée dans le premier quart du XIX[e] siècle, celle de Louis Poinsot.

Bien qu'aucun dialogue ne s'instaure entre Gauss et Legendre à travers leurs publications, les écrits ultérieurs du second permettent de saisir son point de vue sur les congruences. Dans les deux éditions suivantes de son traité, ainsi que dans ses mémoires arithmétiques, Legendre témoigne d'une connaissance approfondie du contenu des *D.A.* Dès l'édition de 1808, il indique avoir repris la théorie de la cyclotomie et l'une des démonstrations de la loi de réciprocité quadratique proposées par Gauss, mais note l'écart existant entre leurs deux approches :

> « On aurait désiré enrichir cet Essai d'un plus grand nombre des excellens matériaux qui composent l'ouvrage de M. Gauss : mais les méthodes de cet auteur lui sont tellement particulières qu'on n'aurait pu, sans des circuits très-étendus, et sans s'assujétir au simple rôle de traducteur, profiter de ses découvertes. » [1808, Avertissement, p. vj]

Legendre intègre donc la méthode de résolution des équations binômes de Gauss, mais sans reprendre la terminologie associée aux congruences et aux résidus. Il introduit par contre une nouvelle notation, qui sera reprise par plusieurs auteurs tout au long du XIX[e] siècle : les équations indéterminées de la forme $x^n - b = ay$, qui correspondent en fait à des congruences binômes, sont progressivement notées $x^n - b = M(a)$, où $M(a)$ désigne un multiple de a. Plus tard, Legendre se positionne explicitement vis-à-vis des congruences dans un mémoire sur le dernier théorème de Fermat, à l'occasion d'un commentaire vraisemblablement destiné à Gauss et Sophie Germain :

> « Ces équations entre les restes provenant de la division de plusieurs nombres par un même nombre premier θ, se traitent comme les équations ordinaires, sans qu'il soit besoin des signes nouveaux d'égalité ni des dénominations nouvelles assez *incongrues*, dont quelques géomètres font usage. » [1823, p. 15].

Avec Euler et Lagrange, nous avons repéré deux pratiques arithmétiques différentes. Cette alternative subsiste avec les traités de Legendre et de Gauss : ce dernier fonde sa théorie des nombres sur les résidus et les congruences, tandis que Legendre assimile la théorie des nombres à l'analyse indéterminée et utilise des méthodes fondées sur des manipulations algébriques et des outils analytiques. Les deux savants s'appuient au moins partiellement sur des résultats et des preuves déjà obtenus par Euler et Lagrange, mais en les adaptant à leur propre pratique arithmétique. Avec leurs traités, ils proposent une synthèse de la théorie des nombres au tournant du XIXe siècle, chacun étant porteur d'une façon de penser ce domaine. Ces ouvrages deviennent ensuite des références fondamentales dans la première moitié du XIXe siècle, au cours de laquelle nous retrouvons des filiations diverses parmi les différentes publications arithmétiques : c'est ce que nous mettons en avant dans la partie suivante.

III. Réceptions des congruences dans la première moitié du XIXe siècle

1. Les congruences de 1801 à 1850 : tendances générales

Un premier examen de notre corpus montre que le nombre de textes et d'auteurs augmente sensiblement, tout particulièrement à partir du second quart du XIXe siècle qui voit le lancement de plusieurs journaux mathématiques. Le découpage (1801-1825, 1825-1835 et 1835-1850) que nous adoptons répond donc à l'évolution du paysage éditorial à cette époque [32]. Ces bornes temporelles correspondent en outre à des transformations de certaines pratiques arithmétiques dans les publications. Parmi les 254 textes de notre corpus, 123 et 110 sont respectivement l'œuvre de 19 auteurs allemands et 24 auteurs français, ce qui contraste avec l'historiographie évoquée précédemment, concentrée sur un petit nombre d'acteurs allemands. Ce constat nous incite à orienter notre analyse sur les travaux des auteurs évoluant principalement en France [33], en les mettant en regard des autres textes du corpus.

Tout au long du premier XIXe siècle, les traités de Gauss et Legendre constituent des références fondamentales ; les textes d'Euler et Lagrange sont aussi très souvent cités. Ces quatre auteurs sont alors les références obligées de nombre de mathématiciens souhaitant se former à la théorie des nombres : si des cours sont dédiés à la théorie des nombres dans certaines universités germaniques au moins à partir des années 1830 [34], les programmes officiels français ne contiennent aucun *item* en lien explicite avec les résidus et les congruences [35] et seuls quelques manuels d'algèbre,

---

32. Sur les journaux mathématiques au cours de cette période, voir [Verdier 2009a].

33. Cet ensemble d'auteurs forme ce que nous appellerons la « scène française ».

34. Tel est le cas d'un cours sur la cyclotomie dispensé par Jacobi [2007] pendant le semestre d'hiver de l'année 1836-1837 à l'Université de Königsberg, ou de cours magistraux programmés par Eisenstein à l'Université de Berlin en 1848 [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 37].

35. Seule la résolution des équations indéterminées du premier degré est inscrite au programme du concours d'admission à l'École polytechnique à partir de 1828 [Belhoste 1995].

référant le plus souvent à Gauss et à Legendre, évoquent la théorie des nombres[36].

L'étude de notre corpus pour le premier quart du XIX^e siècle confirme les conclusions de C. Goldstein et N. Schappacher [2007a, p. 18-24] : le nombre de textes en lien avec les congruences est réduit et les publications françaises se concentrent essentiellement sur la section VII des *D.A.*, dans laquelle la théorie des nombres est appliquée à une question d'algèbre. Les quelques traités français contenant des références aux résidus et congruences sont en fait des traités d'algèbre [Lacroix 1804 ; Lagrange 1808] et de théorie des nombres [Legendre 1808] reprenant de manière plus ou moins fidèle la méthode de résolution des équations binômes proposée par Gauss. À côté des livres coexistent plusieurs périodiques institutionnels paraissant à intervalles plus ou moins réguliers (comme les publications liées à l'Académie des sciences ou à l'École polytechnique), ainsi qu'un journal mathématique principalement destiné à la communauté enseignante : les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, lancées par Joseph-Diez Gergonne en 1810. Ces dernières ne contiennent aucun texte en lien avec notre thématique, ce qui recoupe nos remarques précédentes sur l'absence des résidus et congruences dans les programmes d'enseignement français. Au cours de ce premier quart de siècle, seuls deux auteurs publient des textes directement liés à notre thématique : Gauss et Poinsot. Le premier consacre plusieurs mémoires à de nouvelles démonstrations de la loi de réciprocité quadratique et aux sommes de Gauss, qui constitueront ensuite des textes de référence pour plusieurs auteurs. Le second s'appuie principalement sur la section VII des *D.A.* : nous y reviendrons plus loin.

En sus des *Annales de Gergonne* et des périodiques académiques, qui continuent de paraître, trois journaux mathématiques sont créés en Europe en 1825 et 1826 : le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, ou *Journal de Crelle*, du nom de son créateur, la *Correspondance mathématique et physique* et le *Zeitschrift für Physik und Mathematik* [Verdier 2009b]. Chacun à leur mesure, ces nouveaux journaux constituent autant de supports de diffusion permettant de pallier les lenteurs ou les blocages académiques. Le principal pourvoyeur d'articles de théorie des nombres est, dès son lancement, le *Journal de Crelle*. C'est dans ce journal que paraissent des articles considérés comme fondamentaux dans l'histoire de la théorie des nombres et dans la continuité des travaux de Gauss, en lien avec les résidus cubiques [Jacobi 1827], biquadratiques [Dirichlet 1828], ou la loi de réciprocité quadratique pour les entiers de Gauss [Dirichlet 1832].

---

36. Signalons cependant la publication de l'ouvrage de Christian Kramp [1808] et de celui de Heinrich August Rothe [1811], qui intègrent les congruences. Il est difficile d'évaluer la circulation en France de ces écrits dont les auteurs ont participé à l'école combinatoire de Hindenburg.

Jacobi et Dirichlet font partie des quelques jeunes auteurs à reprendre les recherches de Gauss (ses *D.A.* et mémoires publiés avant 1820) sans se focaliser sur la seule section VII. Ils sont tous les deux en contact avec le milieu savant parisien : Dirichlet séjourne à Paris dans les années 1820 et Jacobi correspond très régulièrement avec Legendre et échange avec lui sur la théorie des nombres. La notation introduite par Gauss pour les congruences est quasiment toujours utilisée par les différents auteurs, à une exception près : Crelle, qui reprend la notation de Legendre dans des mémoires principalement centrés sur les équations indéterminées. Ce n'est pas le cas des périodiques français, dans lesquels plusieurs auteurs optent pour la notation de Legendre.

Au sein de cet espace éditorial, le *Bulletin universel des sciences et de l'industrie*, ou *Bulletin de Férussac*, journal scientifique créé en 1823 par le baron de Férussac, fait figure de ressource générale pour la scène française [37]. En effet, toutes les publications en lien avec les résidus et les congruences parues dans le cadre de l'Académie des sciences ou dans le *Journal de Crelle* donnent lieu à un compte rendu dans le *Bulletin*, systématiquement rédigé par Augustin Cournot. Ce dernier, s'il ne produit aucun travail original de théorie des nombres, participe néanmoins de manière importante à sa diffusion [38]. Le *Bulletin* permet également à plusieurs auteurs, comme Galois, Lebesgue, Libri et Cauchy, de faire paraître des recherches inédites. Sa parution s'arrête en 1831 et celle des *Annales de Gergonne* en 1832. C'est à ce moment que deux auteurs de la scène française, Libri et Germain [39], publient pour la première fois un travail de théorie des nombres dans le *Journal de Crelle*.

En 1835 et 1836, deux nouveaux périodiques pertinents pour notre étude sont créés en France : les *Comptes rendus de l'Académie des sciences* et le *Journal de mathématiques pures et appliquées*, ou *Journal de Liouville* [40]. Les *Nouvelles annales de mathématiques*, dont le public visé est lié à l'enseignement, paraissent à partir de 1842. Avec la multiplication des supports de publication, le nombre d'articles de recherche de notre corpus augmente sensiblement ; ceux-ci sont pour la plupart publiés dans les journaux mathématiques et périodiques académiques français, le *Journal de Crelle* et les productions de l'Académie de Berlin. Entre 1835 et 1850, 58 articles principalement dus à Dirichlet, Eisenstein et Kummer

---

37. Sur le *Bulletin de Férussac*, voir [Taton 1947 ; Bru & Martin 2005].

38. Des auteurs comme Victor-Amédée Lebesgue se réfèrent à plusieurs reprises à ses commentaires plutôt qu'aux textes originaux, auxquels ils n'ont pu avoir accès.

39. Germain [1831] y publie une note sur le dernier théorème de Fermat. Libri y insère un mémoire [1832] sur lequel nous reviendrons.

40. D'autres journaux contenant des écrits de mathématiques sont publiés sur des périodes courtes [Verdier 2009a, chap. 5].

paraissent ainsi dans le *Journal de Crelle*. Ils contiennent les résultats fondamentaux de la théorie des nombres de cette période sur les congruences supérieures, la théorie des formes quadratiques à coefficients entiers réels ou complexes, les lois de réciprocité, la cyclotomie. Parmi les articles français, trois principaux ensembles de textes se dégagent : une série d'articles publiés dans les *Nouvelles annales* à destination d'un public majoritairement étudiant et enseignant, des mémoires de Lebesgue, et une série très volumineuse de notes et mémoires de Cauchy.

2. 1801-1825 : premières utilisations des congruences dans un espace éditorial restreint

Poinsot[41], qui remplace Lagrange à l'Académie des sciences en 1813, est le seul français à publier plusieurs textes en lien avec les congruences dans ce premier quart de siècle. Il est l'auteur de deux mémoires, « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres » [1818][42] et « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres » [1820], d'un commentaire publié dans le *Moniteur universel* du 21 mars 1807 à l'occasion de la traduction française des *D.A.* par son ami Antoine-Charles-Marcellin Poullet-Delisle, ainsi que d'une analyse du *Traité de la résolution des équations numériques* de Lagrange [1808]. Dans cette dernière analyse, Poinsot [1808] reformule les principes généraux de la méthode de résolution algébrique des équations binômes de Gauss revue par Lagrange[43]. Il est donc familier des travaux de Gauss et de leur reprise par Lagrange, qui constituent des références fondamentales pour ses écrits. Il connaît par ailleurs l'ouvrage de théorie des nombres de Legendre, dont il reprend la notation *Mp* pour désigner les congruences. Nous retrouvons, dans ces recherches de Poinsot, des traces des auteurs étudiés dans la partie précédente, ainsi que des deux pratiques arithmétiques évoquées.

Comme le titre de ses mémoires le suggère, l'algèbre comprise comme théorie des équations[44] et la théorie des nombres sont étroitement asso-

---

41. Les publications d'algèbre et de théorie des nombres de Poinsot sont analysées de manière détaillée dans [Boucard 2011a].

42. Ce mémoire permet à Poinsot de revenir sur ses recherches sur les polygones et les polyèdres (1810) ainsi que sur la théorie des permutations (présentées à l'Académie en 1813). Il y annonce également de nouvelles recherches arithmétiques [1820].

43. Cette partie de l'analyse de Poinsot sera mobilisée par Joseph Liouville trente-cinq ans plus tard dans le cadre d'une controverse avec Libri [Belhoste & Lützen 1984 ; Ehrhardt 2011b]. L'intégralité de son commentaire paraîtra au début de la troisième édition de ce traité de Lagrange (1826).

44. Comme la théorie des nombres, l'algèbre n'est pas une catégorie stabilisée au XIX^e siècle et sa définition évolue avec le temps et selon les contextes : voir, notamment, [Corry 2004 ; Brechenmacher & Ehrhardt 2010 ; Ehrhardt 2011a].

ciées dans ces travaux de Poinsot, et la méthode de résolution algébrique des équations binômes en constitue un exemple clé. Poinsot met en avant une « analogie remarquable » [1818, p. 386] entre équations et congruences binômes, en montrant que l'expression analytique des racines de l'équation binôme permet d'obtenir les différentes racines de la congruence binôme correspondante : il suffit en effet d'ajouter à la première « des multiples convenables de p » [1820, p. 349]. Poinsot illustre ses propos avec des exemples bien choisis : dans certains cas, il obtient bien les solutions de la congruence considérée ; dans d'autres, la congruence n'admet pas de solution entière mais des « racines impossibles », dont « l'expression sera [...] aussi parfaite que celle des imaginaires dans l'analyse » [*Ibid.*, p. 359]. Pour démontrer ce résultat, Poinsot suit la preuve que propose Lagrange dans sa méthode simplifiée de résolution algébrique des équations binômes, en transposant les égalités absolues en des égalités modulo p, sans justifier explicitement la validité de ce transfert.

Ici, Poinsot traduit donc des problématiques habituelles de la théorie des équations – déterminer une expression analytique des racines, considérer des racines imaginaires – en termes de congruences. Il s'appuie également sur l'analogie équations-congruences pour transposer formellement des manipulations algébriques valables sur le corps des nombres complexes à des opérations modulo p. De même, il ne commente à aucun moment le choix de ces exemples et leur lien avec la loi de réciprocité quadratique par exemple. Ce type de transfert implicite, que des auteurs comme Libri ou Cauchy utilisent aussi dans leurs recherches arithmétiques, va contre l'idée de la mise en place d'une analyse arithmétique rigoureuse au tournant du XIXᵉ siècle.

À côté de cette analogie entre équations et congruences [45], la disposition particulière des racines de l'équation binôme, « exactement comme si elles étaient écrites en cercle » [1808, p. 373], constitue un exemple fondamental chez Poinsot pour développer sa *théorie de l'ordre*, qui correspond, pour les mathématiques, à une approche liant notamment certaines thématiques d'algèbre, de théorie des nombres et de géométrie. Ces travaux de Poinsot, qui connaîtront une postérité dans la seconde moitié du XIXᵉ siècle de ce point de vue [46], font donc apparaître une configuration disciplinaire distincte de l'analyse arithmétique algébrique évoquée dans la première

45. Les analogies jouent un rôle significatif dans ces travaux de Poinsot, dans les procédés opératoires et dans les structures des ensembles étudiés [Boucard 2011a, p. 99-106]. Plus généralement, sur l'utilisation des analogies dans les mathématiques et dans les sciences, voir [Knobloch 1991 ; Durand-Richard 2008].

46. Plusieurs auteurs se réclameront de la théorie de l'ordre de Poinsot : dans des travaux mathématiques pour Camille Jordan, de philosophie pour Cournot, et d'art ornemental pour Jules Bourgoin. Voir [Boucard 2011a ; Brechenmacher 2011 ; Boucard & Eckes *à paraître*].

partie[47]. Dans les deux cas, les acteurs soulignent l'unité existant entre les différentes recherches relevant de l'une ou l'autre de ces deux configurations disciplinaires[48].

Au-delà de la théorie de l'ordre, et même si ces recherches de Poinsot ne contiennent pas de résultats techniques novateurs, plusieurs de leurs caractéristiques seront reprises par des auteurs de la scène française publiant à partir des années 1820. Germain mobilise ainsi les recherches de Gauss et de Poinsot dans l'élaboration de son programme de recherche autour du dernier théorème de Fermat[49], Libri [1829, 1832] reprend l'analogie équation-congruence et Lebesgue [1829] s'appuie sur plusieurs idées de Poinsot, dont son utilisation des racines imaginaires de congruences.

3. 1825-1835 : des pratiques variées autour d'un lien fort entre équations et congruences

Comme nous l'avons mentionné, Galois publie dans le *Bulletin de Férussac* un mémoire « Sur la théorie des nombres » [1830] présenté comme appartenant à ses recherches sur la théorie algébrique des équations. Ce travail porte sur l'étude de toutes les racines des congruences irréductibles modulo un nombre premier p. Comme Poinsot, Galois considère donc les racines imaginaires de congruences, dans le cadre cette fois d'une application à la théorie algébrique des équations.

Les racines imaginaires de congruences sont d'ailleurs évoquées plus tôt dans ce même périodique, dans le compte rendu d'un mémoire de Jacobi [1827] rédigé par Cournot. Ce dernier y souligne leur importance :

> « Depuis long-temps nous avions pensé (et les derniers mémoires de M. Poinsot l'indiquaient assez clairement) que la considération de cette sorte de racines [imaginaires de congruences] était nécessaire pour compléter la théorie des nombres et étendre ses rapports avec l'analyse algébrique. » [Cournot 1827]

---

47. En effet, Poinsot ne mobilise pas d'outils analytiques comme les séries ou les fonctions elliptiques. Rappelons qu'un lien entre géométrie et théorie des nombres est également souligné par Gauss lorsqu'il propose de représenter géométriquement certaines formes quadratiques en 1827 et en 1831 [Gauthier 2011].

48. Dans le cas de l'analyse arithmétique algébrique, voir [Goldstein & Schappacher 2007a, p. 51-52]. De son côté, Poinsot propose une vision unifiée des mathématiques autour de la notion d'ordre.

49. La plupart de ses écrits sont restés sous forme manuscrite. Dans une lettre à Poinsot du 2 juillet 1819 [Del Centina 2005, p. 63], elle le félicite notamment pour la considération des nombres imaginaires dans la théorie des nombres : « L'emploi des racines imaginaires dans les recherches arithmétiques m'a paru fort lumineux. C'est un phanal placé sur la grand route : il éclaire les sentiers détournés. » Sur les travaux arithmétiques de Germain, voir [Del Centina 2008 ; Laubenbacher & Pengelley 2010 ; Del Centina & Fiocca 2012].

Avec cette référence à Poinsot, Cournot recourt à une source non citée par Jacobi, qu'il a déjà commentée par ailleurs [Cournot 1825], et rapproche ainsi les travaux de Jacobi, de Poinsot et de Gauss. À rebours de l'idée de travail isolé souvent attaché à cette contribution de Galois sur les racines imaginaires de congruences [1830], Cournot suggère au contraire que la considération des racines imaginaires de congruences est vue comme pertinente par plusieurs auteurs dès les années 1820 et que les recherches de Galois – qui s'appuient certes sur l'œuvre de Gauss – s'inscrivent dans des thématiques également abordées par d'autres auteurs, voire peut-être même discutées au sein du salon de Férussac [50].

Les publications de Cauchy constituent un autre exemple intéressant de réception des congruences de Gauss. Cauchy profite de la publication de ses *Exercices de mathématiques* [Belhoste 1991] pour insérer deux mémoires [Cauchy 1829b,c] dans lesquels il étudie les propriétés des congruences en lien avec la théorie des équations : il transpose explicitement des résultats et des démonstrations connus de la théorie des équations à celle des congruences. Il publie aussi deux mémoires sur la théorie des nombres [1829a, 1831] dans le *Bulletin de Férussac*. Dès l'introduction du premier de ces deux derniers textes, Cauchy insiste sur l'importance des lois de réciprocité et expose des résultats sur les sommes de Gauss pour obtenir des formules intégrant une version généralisée du symbole de Legendre. Il annonce cependant aussi un autre type de résultat dans son travail : « l'analyse par laquelle je suis parvenu à découvrir ces mêmes lois, m'a offert le moyen de résoudre algébriquement une foule d'équations indéterminées et d'établir des théorèmes dignes de l'attention des géomètres » [1829a, p. 88].

Cauchy propose en effet des résultats sur les formes quadratiques de la forme $x^2 + ny^2$, formes dont certains cas particuliers ont déjà été abordés par Gauss dans la section VII de ses *D.A.* [1801, art. 356-358]. Ici, Cauchy ne se réfère à aucun moment à la théorie des formes quadratiques développée dans la section V des *D.A.* : les formes quadratiques sont traitées dans le cadre d'une étude des équations indéterminées de la forme $4p^{\mu} = x^2 + ny^2$, où p est premier et n un diviseur de $p - 1$. Son second mémoire dans le *Bulletin* [1831] consiste d'ailleurs en l'énoncé d'un théorème général sur ces mêmes formes quadratiques, les considérations sur les lois de réciprocité étant totalement absentes.

50. Sur les réseaux de sociabilité et les salons à Paris et Berlin pour cette période, voir [Verdier 2012].

Seuls deux mémoires arithmétiques d'auteurs évoluant en France paraissent dans le *Journal de Crelle*. Dans l'un deux, Libri [1832] [51] adopte une approche contrastant fortement avec tous les textes évoqués, caractérisée par une position forte vis-à-vis des congruences, qui ne sont pour lui que des cas particuliers de la théorie des équations indéterminées – ce qui renvoie au point de vue de Legendre –, elle-même incluse dans l'analyse [52]. Libri insiste à plusieurs reprises sur la nécessité de traduire algébriquement la nature particulière des racines des équations indéterminées : il exprime donc une condition arithmétique – le fait que les racines en question soient entières – de manière algébrico-analytique, à l'aide des fonctions circulaires [53]. À partir de là, Libri obtient des résultats – souvent déjà connus et démontrés – sur les congruences, dont des relations entre les coefficients et les racines ou le nombre de racines entières de certaines classes de congruences.

Cette seconde période voit encore un nombre relativement restreint de textes en lien avec les résidus et les congruences sur la scène française. Du point de vue des contenus, les parallèles établis entre congruences et équations – déjà soulignés par Gauss en 1801 – orientent nos auteurs vers l'obtention, pour les congruences, de résultats similaires à ceux déjà connus pour les équations (nombres de racines entières, résolution explicite de congruences, considération de racines imaginaires de congruences). L'arithmétique est également souvent liée à d'autres domaines : quand Libri la plonge dans l'analyse, Galois utilise les congruences dans le cadre de ses recherches sur la théorie algébrique des équations et Poinsot propose une analogie avec l'algèbre et la géométrie. Notons que certains auteurs s'inscrivent aussi partiellement dans des thématiques développées par Gauss et reprises par Jacobi et Dirichlet sur cette même période : tel est par exemple le cas de Cauchy, qui obtient des résultats sur les lois de réciprocité, ou de Lebesgue, qui propose quelques réflexions sur les résidus cubiques.

4. 1835-1850 : continuité des pratiques ?

Au cours de la période suivante, plusieurs auteurs œuvrent pour la promotion de la théorie des nombres en France. C'est le cas de Poinsot

51. Libri présente ses travaux à l'Académie des sciences en 1824 et 1825. Acceptés pour publication dans les *Mémoires des savants étrangers*, ils n'y paraîtront cependant qu'en 1838. Libri publie donc des mémoires arithmétiques indépendamment [1829] puis dans le *Journal de Crelle*.

52. Voir, par exemple, l'introduction de [Libri 1832], particulièrement explicite.

53. Libri produit par exemple des équations supplémentaires permettant d'exprimer que les racines des équations considérées sont entières. Ainsi, lorsqu'il considère une équation diophantienne de la forme $\varphi(x, y, z, \ldots) = 0$, il prend également en compte les équations $\sin x\pi = 0$, $\sin y\pi = 0$, $\sin z\pi = 0$, ...

qui met l'accent sur la nécessité d'intégrer la théorie des nombres dans l'enseignement [1845, Introduction] [54]. Liouville profite de son cours sur les intégrales définies au Collège de France pour y inclure des recherches récentes de théorie des nombres [Belhoste & Lützen 1984]. Dans les *Nouvelles annales*, plusieurs auteurs, enseignants dans des collèges royaux pour la plupart, produisent des textes dont l'objectif explicite est de propager la théorie des résidus et des congruences [Boucard 2011b, p. 105-110]. Sous l'impulsion de l'éditeur Olry Terquem, ces mêmes auteurs usent d'une nouvelle notation ($\dot{p}$) pour désigner le multiple d'un nombre p, ne reprenant ni le symbole de Gauss, ni celui de Legendre. S'appuyant par exemple sur des extraits de mémoires d'Euler, Gauss, Legendre ou de Dirichlet pour présenter des résultats de la théorie des résidus, ils proposent ainsi une réception originale des recherches sur la théorie des congruences et des résidus principalement destinée à un public d'élèves et d'enseignants.

Les deux supports intégrant des articles de recherche, les *Comptes rendus* et le *Journal de Liouville*, proposent quant à eux des contenus sensiblement différents. Nous y retrouvons deux auteurs principaux [55] : Lebesgue, qui fait connaître ses travaux *via* le *Journal de Liouville*, et Cauchy, qui utilise intensivement les *Comptes rendus* dès son retour d'exil.

Lebesgue fait figure d'exception sur la scène française, tant du point de vue de sa position institutionnelle marginale que des thématiques qu'il aborde : si une partie de ses « Recherches sur les nombres » [1837] s'attache à déterminer le nombre de racines entières de certaines classes de congruences et entre donc dans le cadre du rapprochement équations-congruences souligné précédemment, la majeure partie de ce texte se concentre néanmoins sur les résidus quadratiques, cubiques, biquadratiques et les lois de réciprocité associées. Lebesgue insiste sur l'importance d'obtenir des preuves strictement arithmétiques des résultats déjà démontrés à l'aide d'arguments algébriques et analytiques, ce qui le distingue d'auteurs comme Libri, par exemple [56]. Par rapport aux autres auteurs de

54. Ce mémoire est publié à une période où Poinsot, nommé au Conseil de l'Instruction publique en mai 1840 (en remplacement de Poisson), prend part aux débats sur l'enseignement des sciences (voir le neuvième volume du *Journal général de l'instruction publique et des cours scientifiques et littéraires*, 1840, p. 274).

55. C'est à la fin des années 1840 que des auteurs comme Liouville, Joseph-Alfred Serret ou encore Charles Hermite commencent à publier leurs recherches arithmétiques.

56. En 1840, Lebesgue remarque ainsi : « Au reste, beaucoup de propriétés des nombres sont des conséquences plus ou moins immédiates de certaines identités. Les unes sont empruntées à l'algèbre élémentaire ; leur nombre pourrait être augmenté. D'autres sont empruntées à une algèbre plus élevée : telles sont les formules singulières de M. Gauss et autres semblables. D'autres dépendent de l'analyse infinitésimale, ou de certaines inté-

la scène française, il semble donc plus directement se situer dans la filiation des travaux de Gauss.

Les travaux arithmétiques de Cauchy sont essentiellement concentrés sur les années 1839-1840 et 1847, avec vingt-deux notes publiées dans les *Comptes rendus* (et parfois reproduites dans le *Journal de Liouville*), quelques mémoires insérés dans ses *Exercices d'analyse et de physique mathématique*, ainsi qu'un nouveau « Mémoire sur la théorie des nombres » [1840] de 450 pages publié dans les recueils de l'Académie sous la forme d'un travail présenté avant son départ de France et complété par quatorze notes. Si, en 1829, Cauchy soulignait l'importance des lois de réciprocité, suggérant un alignement sur les problématiques du *Journal de Crelle*, la seule référence à ces lois dans ses travaux ultérieurs tient dans la preuve qu'il propose de la loi de réciprocité quadratique dans une note [1840, p. 163-180]. Ses textes publiés entre 1839 et 1840 portent essentiellement sur l'établissement, à l'image du théorème énoncé en 1831, d'une méthode générale sur les formes quadratiques de la forme $4p^{\mu} = x^2 + ny^2$, où p est un nombre premier et n un diviseur de $p - 1$. Les recherches arithmétiques du savant sont alors entièrement centrées sur les équations indéterminées ou sur des outils appliqués dans ce cadre, comme les sommes de Gauss et de Jacobi [57]. À l'instar de ses premières publications, les recherches de Cauchy se situent dans la continuité de la section VII des *D.A.* : l'omniprésence de manipulations sur les sommes de Gauss et les racines primitives en témoigne. Mais sa thématique de prédilection renvoie à des questions d'analyse indéterminée, et donc à la tradition issue de Lagrange et de Legendre. Dans ses raisonnements, Cauchy s'appuie régulièrement sur une correspondance entre équation et équivalence, en substituant à une racine d'une équation une racine de l'équivalence associée par exemple [58] ; il semble alors manipuler des égalités ou des équivalences sans interroger explicitement la validité des opérations en cours. Cette analogie transparaît d'ailleurs dans les notations utilisées : si la racine d'une équation est notée ρ, τ ou ς, la racine de la congruence associée sera désignée respectivement par r , t ou s. Partant d'une égalité qu'il transpose, Cauchy obtient ainsi une congruence mettant en jeu les nombres de Bernoulli, qui sont des nombres rationnels non entiers, sans questionner leur existence suivant le module

grales définies, telles que les fonctions elliptiques et les intégrales eulériennes de seconde espèce. Ces dernières applications deviendront sans doute de plus en plus nombreuses et reculeront les bornes de l'arithmétique transcendante ; mais peut-être conviendra-t-il, cependant, de chercher des démonstrations purement arithmétiques des théorèmes obtenus par cette voie. » [1840, p. 188]

57. Pour une analyse détaillée de ces travaux et des problèmes méthodologiques que leur étude soulève, voir [Boucard 2013].

58. Cette correspondance est utilisée sous différentes formes en théorie des nombres : par Jacobi par exemple, dans les années 1830, et sur la même thématique.

considéré. Une fois de plus, nous observons un net contraste avec l'image de rigueur traditionnellement attachée à ses travaux d'analyse.

Dans les années 1840, la méthode générale développée par Cauchy pour la résolution des équations indéterminées de la forme $4p^{\mu} = x^2 + ny^2$ (avec p nombre premier et n diviseur de $p - 1$) n'est reprise par aucun des auteurs de notre corpus. Parmi les notes publiées dans les *Comptes rendus*, les deux seules reproduites dans le *Journal de Liouville* font d'ailleurs partie des rares écrits de Cauchy qui ne comportent pas de mention de son travail sur les formes quadratiques. Ces recherches semblent donc isolées. Pourtant, l'étude de plusieurs textes de Jacobi, Dirichlet, Kummer d'une part, et de Cauchy d'autre part, montre que, s'ils ne se concentrent pas sur les mêmes thèmes arithmétiques, les travaux de ce dernier sont néanmoins connus et repris de manière sélective par les trois premiers. Cauchy [1831] introduit les nombres de Bernoulli pour la résolution de certaines équations indéterminées $4p^{\mu} = x^2 + ny^2$. Dirichlet obtient en 1838 des résultats sur le nombre de classes des formes quadratiques associées $x^2 + ny^2$ à partir de considérations sur les séries infinies. Kummer souligne l'analogie existant entre le nombre de classes de certaines catégories de nombres idéaux et celui des formes quadratiques considérées par Dirichlet ; il fait le lien avec les nombres de Bernoulli en 1847 dans sa démonstration du théorème de Fermat [Boucard 2011b, chap. 12]. Des résultats semblent donc circuler de manière tacite parmi ces auteurs[59], même si ceux-ci développent des perspectives de recherche différentes.

Conclusion

Les quelques exemples étudiés ici montrent qu'il est illusoire de penser une seule approche de la théorie des nombres chez les mathématiciens de la première moitié du XIX$^{\text{e}}$ siècle, dont le développement serait consécutif à la parution des *D.A.* de Gauss. Ils témoignent au contraire d'une diversité des pratiques arithmétiques, réinvestissant différents aspects des travaux des géomètres du siècle des Lumières. Nous pouvons à présent réexaminer les propos de M. Kline cités dans notre première partie à l'aune de notre analyse.

Plusieurs travaux historiques ont déjà montré qu'au XVIII$^{\text{e}}$ siècle, la théorie des nombres n'est pas réduite à un ensemble de résultats isolés produits par quelques auteurs académiciens. Si notre analyse de cette

59. Cette hypothèse se confirme à la lecture de la correspondance de Kummer avec Kronecker, dans laquelle le premier cite explicitement des résultats de Cauchy sur les nombres de Bernoulli [Kummer 1975, p. 91]. Dirichlet [1838, p. 270] se réfère également au mémoire de Cauchy de 1831.

période, construite à partir des références données par les auteurs du premier XIX^e siècle, et donc centrée sur Euler, Lagrange, Legendre et les *D.A.* de Gauss, donne un aperçu d'une reconstruction historique déjà amorcée par les acteurs de notre corpus, elle met également en évidence l'existence d'au moins deux pratiques arithmétiques : l'une axée sur les équations indéterminées, et donc étroitement liée à l'algèbre, dans les travaux de Lagrange et Legendre ; l'autre, développée chez Euler et Gauss, axée sur des objets arithmétiques spécifiques, comme les résidus et les congruences. Des résultats identiques, comme le théorème des quatre carrés chez Euler et Lagrange, sont obtenus, mais à partir de ces deux approches différentes : là où le premier tente d'élaborer une théorie des nombres cohérente et autonome avec les résidus, le second utilise des outils algébriques.

M. Kline met également en avant l'importance de l'introduction des congruences et de leur notation. Comme nous l'avons vu, la définition de ce nouvel objet arithmétique est cependant loin d'induire une rupture globale dans les pratiques arithmétiques. Nombre d'auteurs utilisent leur propre notation – Legendre, mais aussi Poinsot, Crelle et des auteurs des *Nouvelles annales de mathématiques* par exemple –, voire leur propre dénomination, comme Cauchy. De nouvelles démonstrations, reposant sur des principes variés, sont également proposées pour les résultats fondamentaux de la théorie des congruences : Libri plonge celle-ci dans l'analyse et fonde ses preuves sur les fonctions circulaires tandis que Cauchy et d'autres transposent des preuves existant déjà pour la théorie des équations. En 1845, Poinsot fournit quant à lui des preuves construites à partir de principes géométriques.

La prise en compte systématique de tous les écrits du premier XIX^e siècle intégrant les congruences sous une forme ou une autre confirme par ailleurs la nécessité de dépasser une lecture historique centrée sur la théorie algébrique des nombres ou celle des formes. Pour la scène française, le lien fort entre la théorie des nombres et la résolution d'équations est en continuité avec les pratiques arithmétiques de Lagrange et de Legendre ; les écrits de Gauss sont le plus souvent intégrés dans cette perspective. Nous avons ainsi mis en évidence l'existence d'approches variées résultant de combinaisons à divers niveaux de ces deux traditions, et induisant des effets différents. Dans le premier quart du XIX^e siècle, Legendre refuse par exemple l'utilisation des congruences, lorsque Germain intègre rapidement les différentes notions développées dans les *D.A.* de Gauss. On ne peut donc pas conclure de manière globale sur la question des ruptures et des continuités au XIX^e siècle : on ne retrouve en aucun cas une ligne directrice découlant exclusivement de Lagrange ou de Gauss, ou une rupture radicale avec leurs démarches. On assiste plutôt, au contraire, à une ramification complexe de pratiques autour des congruences et se répondant parfois les unes aux autres.

Ce rapprochement entre équations et congruences induit des questionnements et des méthodes caractéristiques, comme nous l'avons souligné à différentes reprises. Chez plusieurs auteurs, comme Poinsot, Libri et Cauchy, cette approche se traduit notamment par le transfert sans justification aux congruences de démonstrations valables pour les équations, ce qui contraste fortement avec l'idée de rigueur souvent attachée aux mathématiques du XIXe siècle.

Notre choix de corpus constitué autour d'un objet mathématique fait enfin ressortir des dynamiques oubliées : ainsi, la remise en contexte des travaux arithmétiques de Poinsot ou Cauchy permet par exemple de souligner différents types de circulations, avec une proposition d'approche des mathématiques *via* la théorie de l'ordre pour le premier et un ensemble de résultats techniques précis pour le second. Bien sûr, la construction d'un corpus centré sur les congruences induit également un extérieur qui masque certaines pratiques transversales. Nous pensons par exemple aux sommes de Gauss ou aux méthodes liées aux fonctions symétriques et alternées, qui sont également mobilisées dans des travaux sans congruences. Leur prise en compte ferait vraisemblablement émerger de nouveaux aspects des pratiques arithmétiques et algébriques de la période étudiée, mettant en avant d'autres formes de filiations avec le XVIIIe siècle.

BIBLIOGRAPHIE

[Belhoste 1991] Bruno Belhoste, *Augustin-Louis Cauchy. A biography*, New York : Springer-Verlag,1991.

[Belhoste 1995] B. Belhoste, *Les sciences dans l'enseignement secondaire français. Textes officiels. Tome 1 : 1789-1914*, Paris : INRP, 1995.

[Belhoste & Lützen 1984] Bruno Belhoste et Jesper Lützen, « Joseph Liouville et le Collège de France », *Revue d'histoire des sciences*, 37/3-4 (1984), p. 255-304.

[Boucard 2011a] Jenny Boucard, « Louis Poinsot et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/1 (2011), p. 41-138.

[Boucard 2011b] J. Boucard, *Un "rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres" : études sur l'utilisation des congruences de 1801 à 1850*, thèse de doctorat, Université Paris 6, 2011.

[Boucard 2013] J. Boucard, « Cyclotomie et formes quadratiques dans l'œuvre arithmétique d'Augustin-Louis Cauchy (1829-1840) », *Archive for History of Exact Sciences*, 67/4 (2013), p. 349-414.

[Boucard 2014] J. Boucard, « Joseph-Louis Lagrange e il teorema dei quattro quadrati », *Lettera Matematica Pristem*, 88-89 (2014), p. 59-69.

[Boucard & Eckes *à paraître*] Jenny Boucard et Christophe Eckes, « La théorie de l'ordre de Poinsot à Bourgoin : mathématiques, philosophie, art ornemental », *Revue de synthèse*, à paraître.

[Brechenmacher 2011] Frédéric Brechenmacher, « Self-Portraits with Évariste Galois, (and the Shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques*, 17/2 (2011), p. 271-369.

[Brechenmacher & Ehrhardt 2010] Frédéric Brechenmacher et Caroline Ehrhardt, « On the Identities of Algebra in the 19th Century », *Oberwolfach Reports*, 12 (2010), p. 24-32.

[Bru & Martin 2005] Bernard Bru et Thierry Martin, « Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, 1/2 (2005).

[Bullynck 2006] Maarten Bullynck, *Vom Zeitalter der Formalen Wissenschaften. Anleitung zur Verarbeitung von Erkenntnissen anno 1800, vermittelst einer parallelen Geschichte*, thèse de doctorat, Universiteit Ghent, 2006.

[Bullynck 2008] M. Bullynck, « The transmission of numeracy : integrating reckoning in Protestant North-German elementary education (1770-1810) », *Paedagogica Historica*, 44/5 (2008), p. 568-585.

[Bullynck 2009a] M. Bullynck, « Modular Arithmetic before C. F. Gauss : Systematizations and Discussions on Remainder Problems in 18th-Century Germany », *Historia Mathematica*, 36 (2009), p. 48-72.

[Bullynck 2009b] M. Bullynck, « Leonhard Eulers Wege zur Zahlentheorie », dans W. Velminski et H. Bredekamp (éd.), *Mathesis & Graphe. Leonhard Euler zum 300. Geburtstag*, Berlin : Akademie-Verlag, 2009, p. 67-85.

[Bullynck 2010] M. Bullynck, « A History of Factor Tables with Notes on the Birth of Number theory 1668-1817 », *Revue d'histoire des mathématiques*, 16/2 (2010), p. 133-216.

[Bussotti 2006] Paolo Bussotti, *From Fermat to Gauss : Indefinite Descent and Methods of Reduction in Number Theory*, Augsburg : Erwin Rauner Verlag, 2006.

[Cauchy 1829a] Augustin-Louis Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 12 (1829), p. 205-221 ; *Œuvres complètes*, 2^{e} série, t. II, Paris : Gauthier-Villars, p. 88-107.

[Cauchy 1829b] A.-L. Cauchy, « Sur diverses propositions relatives à l'algèbre et à la théorie des nombres », *Exercices de mathématiques*, 4 (1829), p. 217-252 ; *Œuvres complètes*, 2^{e} série, t. IX, Paris : Gauthiers-Villars, p. 259-297.

[Cauchy 1829c] A.-L. Cauchy, « Sur la résolution des équivalences dont les modules se réduisent à des nombres premiers », *Exercices de mathématiques*, 4 (1829), p. 253-292 ; *Œuvres complètes*, 2^{e} série, t. IX, Paris : Gauthiers-Villars, p. 298-341.

[Cauchy 1831] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 15 (1831), p. 137-139 ; *Œuvres complètes*, 2^{e} série, t. II, Paris : Gauthier-Villars, p. 115-118.

[Cauchy 1840] A.-L. Cauchy, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 17 (1840), p. 249-768 ; *Œuvres complètes*, 1re série, t. III, Paris : Gauthier-Villars, p. 5-450.

[Corry 2004] Leo Corry, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, 2^{e} éd., Basel : Birkhaüser, 2004.

[Cournot 1825] Antoine-Augustin Cournot, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres ; par M. Poinsot », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 3 (1825), p. 144–145.

[Cournot 1827] A.-A. Cournot, « Des résidus cubiques ; par le Dr. Jacobi », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, 8 (1827), p. 302.

[Dahan Dalmedico 1997] Amy Dahan Dalmedico, « L'étoile "imaginaire" a-t-elle immuablement brillé ? Le nombre complexe et ses différentes interprétations dans l'œuvre de Cauchy », dans D. Flament (dir.), *Le nombre, une hydre à n visages*, Paris : Maison des Sciences de l'Homme, 1997, p. 29-50.

[Del Centina 2005] Andrea Del Centina, « Letters of Sophie Germain preserved in Florence », *Historia Mathematica*, 32 (2005), p. 60-75.

[Del Centina 2008] A. Del Centina, « Unpublished Manuscripts of Sophie Germain and a Reevaluation of her Work on Fermat's Last Theorem », *Archive for History of Exact Sciences*, 62 (2008), p. 349-392.

[Del Centina & Fiocca 2012] Andrea Del Centina et Alessandra Fiocca, « The correspondance between Sophie Germain and Carl Friedrich Gauss », *Archive for History of Exact Sciences*, 66/6 (2012), p. 585-700.

[Delambre 1810] Jean-Baptiste-Joseph Delambre, *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789, et sur leur état actuel*, Paris : Imprimerie Impériale, 1810.

[Dirichlet 1828] Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, « Recherches sur les diviseurs premiers d'une classe de formules du quatrième degré », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 3 (1828), p. 35-69.

[Dirichlet 1832] J. P. G. Lejeune-Dirichlet, « Démonstration d'une propriété analogue à la loi de réciprocité qui existe entre deux nombres premiers quelconques », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 9 (1832), p. 379-389.

[Dirichlet 1838] J. P. G. Lejeune-Dirichlet, « Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 18 (1838), p. 259-274.

[Durand-Richard 2008] Marie-José Durand-Richard (dir.), *L'Analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique*, Paris : L'Harmattan, 2008.

[Ehrhardt 2011a] Caroline Ehrhardt, *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris : Éditions EHESS, 2011.

[Ehrhardt 2011b] C. Ehrhardt, « A Quarrel between Joseph Liouville and Guillaume Libri at the French Academy of Sciences in the Middle of the Nineteenth Century », *Historia Mathematica*, 38/3 (2011), p. 389-414.

[W. Ellison & F. Ellison 1978] William J. Ellison et Fern Ellison, « Théorie des nombres », dans J. Dieudonné (dir.), *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900*, t. I, Paris : Hermann, 1978, p. 165-334.

[Euler 1740] Leonhard Euler, « Solutio problematis arithmetici de inveniendo numero, qui per datos numeros divisus relinquat data residua », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1734-1735, 7 (1740), p. 46-66 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 18-32.

[Euler 1741] L. Euler, « Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, année 1736, 8 (1741), p. 141-146 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 33-37.

[Euler 1750] L. Euler, « Theoremata circa divisores numerorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1747-1748, 1 (1750) p. 20-48 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 62-85.

[Euler 1760] L. Euler, « Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1754-1755, 5 (1760), p. 13–58 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 338-372.

[Euler 1761] L. Euler, « Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, années 1758-1759, 7 (1761), p. 49-82 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 2, p. 493-518.

[Euler 1774] L. Euler, « Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia », *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, année 1773, 18 (1774), p. 85-135 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 3, p. 240-281.

[Euler 1780] L. Euler, « Novae demonstrationes circa resolutionem numerorum in quadrata », *Nova Acta Eruditorum* année 1777 (1780), p. 48-69 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 3, p. 218-238.

[Euler 1849] L. Euler, « Tractatus de numerorum doctrina capita sedecim, quae supersunt », dans *Commentationes arithmeticae*, R. Ferdinand (éd.), vol. 2, Berlin : Teubner, 1849, p. 503-575 ; *Opera Omnia*, série I, vol. 5, p. 182-283.

[Flament 2003] Dominique Flament, *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, Paris : CNRS Éditions, 2003.

[Galois 1830] Évariste Galois, « Sur la théorie des nombres », *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques*, 13 (1830), p. 428-435.

[Gauss 1801] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig : Fleischer, 1801. Trad. fr., *Recherches arithmétiques*, Paris : Courcier, 1807.

[Gauthier 2011] Sébastien Gauthier, « Justifier l'utilisation de la géométrie en théorie des nombres : des exemples chez C. F. Gauss et H. Minkowski », dans D. Flament et P. Nabonnand (dir.), *Justifier en mathématiques*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 2011, p. 103-128.

[Germain 1831] Sophie Germain, « Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\dfrac{4(x^p-1)}{x-1} = y^2 \pm pz^2$, et celles de Y' et Z' dans l'équation $\dfrac{4(x^{p^2}-1)}{x-1} = Y'^2 \pm pZ'^2$ », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 7 (1831), p. 201-204.

[Goldstein 1989] Catherine Goldstein, « Le métier des nombres aux XVII^e^ et XIX^e^ siècles », dans M. Serres (dir.), *Éléments d'histoire des sciences*, Paris : Bordas, 1989, p. 274-295.

[Goldstein 1993] C. Goldstein, « Descente infinie et analyse diophantienne : programmes de travail et mises en œuvre chez Fermat, Levi, Mordell et Weil », *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 2^e^ série, 3 (1993), p. 25-49.

[Goldstein 1999] Catherine Goldstein, « Sur la question des méthodes quantitatives en histoire des mathématiques : le cas de la théorie des nombres en France (1870-1914) », *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum*, 28 (1999), p. 187-214.

[Goldstein *et al.* 2007] Catherine Goldstein, Norbert Schappacher et Joachim Schwermer (éd.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin : Springer, 2007.

[Goldstein & Schappacher 2007a] Catherine Goldstein et Norbert Schappacher, « A Book in Search of a Discipline (1801-1860) », dans [Goldstein *et al.* 2007, p. 3-65].

[Goldstein & Schappacher 2007b] C. Goldstein et N. Schappacher, « Several Disciplines and a Book (1860-1901) », dans [Goldstein *et al.* 2007, p. 67-103].

[Guisti 2000] Enrico Guisti, *La naissance des objets mathématiques*, Paris : Ellipses, 2000.

[Heeffer 2014] Albrecht Heeffer, « How algebra spoiled recreational problems : A case study in the cross-cultural dissemination of mathematics », *Historia Mathematica*, 41 (2014), p. 400-437.

[Jacobi 1827] Carl Gustav Jakob Jacobi, « De residuis cubiscis commentatio numerosa », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2 (1827), p. 66-69.

[Jacobi 2007] C. G. J. Jacobi, *Vorlesungen über Zahlentheorie-Wintersemester 1836/37, Königsberg*, F. Lemmermeyer et H. Pieper (éd.), Augsburg : Dr. Erwin Rauner Verlag, 2007.

[Kline 1972] Morris Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, New York : Oxford University Press, 1972.

[Knobloch 1991] Eberhard Knobloch, « L'analogie et la pensée mathématique », dans R. Rashed (dir.), *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, Paris : CNRS Éditions, 1991, p. 217-237.

[Kramp 1808] Christian Kramp, *Élémens d'arithmétique universelle*, Cologne : Hansen, 1808.

[Kummer 1847] Ernst Eduard Kummer, « Beweis des Fermatschen Satzes der Unmöglichkeit von $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$ für eine unendliche Anzahl Primzahlen λ », *Bericht über die zur Bekanntmachung geeigueten Verhandlungen der Königlichen Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, année 1847, p. 132-139 et 305-314 ; repr. dans [Kummer 1975, p. 274-281 et 283-297].

[Kummer 1975] E. E. Kummer, *Collected Papers. Volume I. Contributions to Number Theory*, A. Weil (éd.), Berlin, New York : Springer-Verlag, 1975.

[Lacroix 1804] Sylvestre-François Lacroix, *Complément des élémens d'algèbre*, 3e éd., Paris : Courcier, 1804.

[Lagrange *Œuvres*] Joseph-Louis Lagrange, *Œuvres*, 14 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1867-1892.

[Lagrange 1769] J.-L. Lagrange, « Sur la solution des problèmes indéterminés du second degré », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1767 (1769), p. 165-310 ; *Œuvres*, t. II, p. 377-535.

[Lagrange 1770] J.-L. Lagrange, « Nouvelle méthode pour résoudre les problèmes indéterminés en nombres entiers », *Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin*, année 1768 (1770), p. 181-250 ; *Œuvres*, t. II, p. 655-726.

[Lagrange 1772] J.-L. Lagrange, « Démonstration d'un théorème d'arithmétique », *Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin* année 1770 (1772), p. 123-133 ; *Œuvres*, t. III, p. 189-201.

[Lagrange 1773] J.-L. Lagrange, « Solution d'un problème d'arithmétique », *Miscellanea Taurinensia*, années 1766-1769, IV, 1773, p. 41-97 ; *Œuvres*, t. I, p. 671-731 [daté du 20 sept. 1768].

[Lagrange 1774] J.-L. Lagrange, « Additions. De l'analyse indéterminée », dans *Élémens d'Algèbre d'Euler, traduits de l'allemand, avec des notes et des additions*, Lyon : Bruyset & Paris : Desaint, t. 2, 1774, p. 369-658 ; *Œuvres*, t. VII, p. 5-180 [paru en 1773].

[Lagrange 1808] J.-L. Lagrange, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*, 2e éd., Paris : Courcier, 1808 ; *Œuvres*, t. VIII.

[Laubenbacher & Pengelley 2010] Reinhard Laubenbacher et David Pengelley, « "Voici ce que j'ai trouvé" : Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem », *Historia Mathematica*, 37 (2010), p. 641-692.

[Lebesgue 1829] Victor-Amédée Lebesgue, « Extrait d'un Mémoire inédit sur les congruences d'un degré quelconque à une seule inconnue », *Bulletin du Nord*, 1-2 (1829), vol. 1, cahier 1 (janvier 1829), p. 23-43; cahier 3 (mars 1829), p. 255-274 ; vol. 2, cahier 5 (mai 1829), p. 19-33.

[Lebesgue 1837] V.-A. Lebesgue, « Recherches sur les nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 2-4 (1837-1839), vol. 2 : p. 253-292 ; vol. 3 : p. 113-144 ; vol. 4 : p. 9-59.

[Lebesgue 1840] V.-A. Lebesgue, « Note sur une formule de Cauchy », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 5 (1840), p. 186-188.

[Legendre 1788] Adrien-Marie Legendre, « Recherches d'analyse indéterminée », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, année 1785 (1788), p. 465-559.

[Legendre 1798] A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, Paris : Duprat, 1798.

[Legendre 1808] A.-M. Legendre, *Essai sur la théorie des nombres*, 2e éd., Paris : Duprat, 1808.

[Legendre 1823] A.-M. Legendre, « Recherches sur quelques objets d'analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France*, 6 (1827), p. 1-60.

[Lemmermeyer 2000] Franz Lemmermeyer, *Reciprocity Laws : from Euler to Eisenstein*, Berlin : Springer-Verlag, 2000.

[Lemmermeyer 2009] F. Lemmermeyer, « Jacobi and Kummer's Ideal Numbers », *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 79/2 (2009), p. 165-187.

[Libri 1829] Guglielmo Libri, *Mémoire de mathématique et de physique*, Florence : Ciardetti, 1829.

[Libri 1832] G. Libri, « Mémoire sur la théorie des nombres », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 9 (1832), p. 54-80, 169-188, 261-279.

[Poinsot 1808] Louis Poinsot, « Analyse du Traité de la résolution des équations numériques… par J.-L. Lagrange », *Magasin encyclopédique, ou Journal des sciences, des lettres et des arts*, 4 (1808), p. 343-375.

[Poinsot 1818] L. Poinsot, « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France*, 14 (1818), p. 381-392.

[Poinsot 1820] L. Poinsot, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres », *Journal de l'École polytechnique*, 11 (1820), p. 342-410.

[Poinsot 1845] L. Poinsot, « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 10 (1845), p. 1-101.

[Remer 1737] Christian Stephan Remer, *Arithmetica theoretico-practica, das ist : Anweisung zu der Arithmetique, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen*, Braunschweig : Schröder, 1737.

[Rothe 1811] Heinrich August Rothe, *Systematisches Lehrbuch der Arithmetik*, vol. 2, Erlangen : Barth, 1811.

[Siebeneicher s.d.] Christian Siebeneicher, *Liebes Büchlein. Das Rechenbuch von Carl Friedrich Gauss*, http://www.math.uni-bielefeld.de/sieben/congruenzen.pdf.

[Taton 1947] René Taton, « Les mathématiques dans le "Bulletin de Férussac" », *Archives internationales d'histoire des sciences*, 26 (1947), p. 100-125.

[Verdier 2009a] Norbert Verdier, *Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIXe siècle (1824-1885)*, thèse de doctorat, Université Paris 11, 2009.

[Verdier 2009b] N. Verdier, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX[e] siècle en Europe », *Philosophia Scientiæ*, 13/2 (2009), p. 97-126.

[Verdier 2012] N. Verdier, « Panthéons, journaux et salons à Berlin, Londres ou Paris : fabriquer des réseaux de sociabilité savante », dans E. Thoizet, N. Wanlin et A.-G. Weber (dir.), *Panthéons littéraires et savants XIX[e]-XX[e] siècles*, Arras : Artois Presses Université, 2012, p. 49-64.

[Weil 1984] André Weil, *Number Theory : An Approach through History from Hammurapi to Legendre*, Boston : Birkhäuser, 1984.