



La théorie de l'ordre de Poincaré à Bourgois : mathématiques, philosophie, art ornemental

Jenny Boucard, Christophe Eckes

► To cite this version:

Jenny Boucard, Christophe Eckes. La théorie de l'ordre de Poincaré à Bourgois : mathématiques, philosophie, art ornemental. *Revue de Synthèse*, 2015, Le vif de l'histoire, 136 (3), pp.403-447. 10.1007/s11873-015-0281-3 . halshs-01351710

HAL Id: halshs-01351710

<https://shs.hal.science/halshs-01351710>

Submitted on 13 Apr 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA THÉORIE DE L'ORDRE DE POINSOT À BOURGOIN : MATHÉMATIQUES, PHILOSOPHIE, ART ORNEMENTAL

Jenny BOUCARD* et Christophe ECKES**

RÉSUMÉ : L'enjeu de cet article est d'appréhender la dynamique de la *théorie de l'ordre* au XIX^e siècle et de mettre au jour une approche spécifique des mathématiques, des sciences, de la philosophie et de l'art ornemental dans laquelle l'ordre joue un rôle prééminent. Nous reviendrons sur la signification singulière que Poincaré assigne à l'ordre dans les sciences mathématiques, avant de décrire la circulation de ses écrits sur l'ordre au XIX^e siècle. Poincaré constitue l'une des principales sources de Cournot qui situe l'ordre et la forme au fondement de son système de connaissances. Enfin, nous nous intéresserons aux écrits de Bourgoïn qui développe une combinatoire des ornements, fondée sur les catégories d'ordre et de forme.

MOTS-CLÉS : histoire des mathématiques, histoire de l'art ornemental, théorie de l'ordre, combinatoire, classification des savoirs.

THE THEORY OF ORDER FROM POINCARÉ TO BOURGOIN: MATHEMATICS, PHILOSOPHY, ORNAMENTAL ART

ABSTRACT: *The aim of this paper is to understand the dynamics of the theory of order in the nineteenth century and to reveal a specific approach to mathematics, science, philosophy and decorative art in which order plays a prominent role. We will analyze the singular meaning that Poincaré assigns to the notion of order in the mathematical sciences, before describing the circulation of his writings on the order in the nineteenth century. Poincaré is one of the main sources of Cournot, who places the notions of order and form as the basis of his knowledge system. Then we will study the writings of Bourgoïn who develops a combinatorics of ornaments based on the categories of order and form.*

KEYWORDS: *history of mathematics, history of ornamental art, theory of order, combinatorics, classification of knowledge.*

* Jenny Boucard, née en 1981, est maître de conférence à l'université de Nantes et membre du Centre François Viète. Ses travaux portent sur l'histoire de la théorie des nombres et sur la théorie de l'ordre. Elle a récemment publié « Cyclotomie et formes quadratiques dans l'œuvre arithmétique d'A.-L. Cauchy (1829-1840) », *Archive for History of Exact Sciences*, t. 67(4), 2013. Adresse : Centre François Viète, UFR Sciences et Techniques, 2 rue de la Houssinière, F-44322 Nantes cedex 3 (jenny.boucard@univ-nantes.fr).

** Christophe Eckes, né en 1979, est maître de conférence en mathématiques à l'université de Lorraine et membre des Archives Henri Poincaré. Ses travaux portent sur Hermann Weyl, l'histoire de la perspective aux XVIII^e et XIX^e siècles et de l'art ornemental au XIX^e siècle. Adresse : UMR 7117 CNRS – Université de Lorraine, 91, avenue de la Libération, BP 454, F-54001 Nancy Cedex. (christophe.eckes@univ-lorraine.fr).

During the first half of the nineteenth century, the mathematician Louis Poinsoot initiated a theory of order, highlighting the importance of the notion of order in mathematical sciences. If order is introduced as a fundamental idea by many scientists – for example René Descartes proposed a definition of mathematics based on order and measurement – Poinsoot attributed to this notion a specific meaning of “mutual disposition [which] can be observed currently between objects.” By the 1840s several authors claimed to adhere to Poinsoot’s theory of order in various mathematical, philosophical, and artistic works, but until recently, when the theory of order was mentioned in historiography, it was regarded as a marginal phenomenon or it was retrospectively associated with the emergence of group theory. Poinsoot’s indication of the notion of order offers a fresh perspective on a wide range of both scientific (algebra, number theory, geometry, crystallography), philosophical and artistic (ornamental art) works, which are now often interpreted through the prism of group theory.

The aim of this paper is to understand the dynamics of the theory of order in the nineteenth century and reveal a specific and transversal approach to mathematics, science, philosophy and ornamental art in which order plays a prominent role. This analysis thus shows the existence of different forms of transversal organisations of knowledge based on the notion of order, which stands in contrast to the development of disciplinarity in the first half of the twentieth century. We focus on three key authors who address this notion of order. Besides Poinsoot’s memoirs, we analyse the mathematical and philosophical contributions of Antoine Augustin Cournot, and the work of the architect and decorator Jules Bourgoin.

*We first propose an overall view of Poinsoot’s work published between 1808 and 1845 in order to understand how this notion of order is introduced and used in a diversity of ways. The seventh and final section of Gauss’s *Disquisitiones arithmeticae* (1801) on the division of the circle and binomial equations is Poinsoot’s principal source. With this reference in mind, he deeply analyses the interaction between algebra, geometry and number theory throughout Gauss’s work. The notion of order enables Poinsoot to examine these interactions with the image of the circle as the principal example. Poinsoot assigns a triple role to the theory of order: as the basis for inherited Gauss’ decomposition methods in solving equations, the theory of order also appears as one of the two categories – along with the notion of measure – that define the mathematical sciences. The theory of order is also used by Poinsoot as a process of demonstration, which in particular justifies the central position – for Poinsoot – of number theory in mathematics.*

*It was in 1843 that Cournot thematised the notion of order, drawing freely in his *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*. Even if his work first limited itself to the development of a theory of ordered combinations – also called syntactic – and focused on questions of enumeration, Cournot was already stressing the importance of concepts of combination and order in domains as diverse as logic, general grammar or chemistry. In his book on the origin and limits of the correspondence between algebra and geometry (1847), Cournot explicitly acknowledges his debt to Poinsoot, for example by stressing the role of the periodical order in solving the binomial equations, while incorporating Poinsoot’s distinction between ordinary algebra – that deals with quantities – and higher algebra, that focuses on questions of order. Cournot tries to overcome Poinsoot’s dualism between a “mathematics*

of magnitudes” and a “mathematics of order”. To this end, he progressively develops the notion of order from a philosophical perspective and, in his Treatise on the Sequence of Fundamental Ideas in the Sciences and in History (1861), he works out a general system of knowledge based on “order” and “form”, which are considered as two closely interrelated categories of the human understanding. According to Cournot, these two notions are essential criteria for knowledge to be considered scientific. More generally, Cournot analyses the notion of order from two different standpoints which imply a kind of tension in his philosophical reflections: on the one hand, he considers his theory of order (also called syntactic) as a specific branch of the logico-mathematical sciences dealing with ordered combinations; additionally, he also intends by order a very general and transversal category which is at the foundation of every scientific construction.

Cournot’s philosophical reflections play a central and a structuring role in Bourgoin’s theoretical investigations on ornaments. The architect and ornamental artist Jules Bourgoin attended the lectures given by Isidore Francœur (Louis-Benjamin Francœur’s son) in mathematics given at the Parisian Ecole des Beaux-Arts in 1858. During this period, Bourgoin was initiated into mathematical culture, studying geometry, arithmetics and algebra. He was thus capable of reading Cournot’s book on the correspondence between algebra and geometry. Bourgoin then deepened his knowledge in mathematics, extending it into other domains, and accumulated numerous notes based on his reading of books and articles in mathematics, physics, biology and philosophy. These notes represent a core source material for our present study. They confirm the importance of Cournot’s work in Bourgoin’s writings and they demonstrate that Bourgoin had detailed knowledge of Poinso’s article on polygons and polyhedra. They also show that Bourgoin was interested in branches of the natural sciences dealing with the notions of form, order, situation or combination: as well as physics, we can mention phyllotaxy (a branch of botany), geometrical crystallography, and stereochemistry. Along with Cournot, Bourgoin considers the categories of order and form as the foundation of his Theory of Ornament (1873). In this book, he outlines a wide classification of ornaments, in other words a general grammar of ornaments that disregards the distinctive features of each ornament style. The Theory of Ornament can be considered precisely as a “grammar of ornaments” in the image of Owen Jones’ Grammar of Ornament published in 1856. Bourgoin’s approach is much more formal and combinatorial than Jones’. In his Theory of Ornament, Bourgoin resumes Cournot’s system of knowledge and extends it to graphic arts. Already in this book, he intends to develop a “syntactic” in ornamental art, i.e. a purely formal way of combining ornamental motifs. Bourgoin’s “syntactic” culminated in his book Graphique (1905). In it, he enumerates numerous combinations of geometrical figures, and in particular presents the very first elements and operations in the learning of drawing. Graphique must be analysed in the framework of a long-term controversy between Bourgoin and some advocates of linear drawing in primary school, for instance the French sculptor Eugène Guillaume.

The weaving industry also represented a constant source of inspiration for Bourgoin in his classification of ornaments. For instance, the manufacturer Edouard Gand (the principal founder of the Société industrielle d’Amiens) is mentioned in Bourgoin’s

reading notes. Bourgoin also refers to the mathematician Edouard Lucas, who developed a “geometry of fabrics” in several works, especially in his *Theory of numbers* (1891) which Bourgoin cites. Lucas was a member of the *Association française pour l'avancement des sciences*; deeply inspired by Poinot, Lucas underlined the interconnections between geometry, combinatorics and number theory. We should also mention the mathematician Charles-Ange Laisant, who refers to Poinot in his works on the applications of number theory in weaving industry.

In summary, our investigation of Poinot, Cournot and Bourgoin has revealed the existence of a specific method of reasoning, based on the notions of order, combination and form, which is shared by several authors throughout the 19th century. We have found many traces of this approach in various branches of the sciences – geometry, algebra, arithmetics, cristallography, phyllotaxy, etc. – with important ramifications for the weaving industry and ornamental art at the end of the 19th century.

Dans son système de connaissances publié en 1861, Antoine-Augustin Cournot affirme que « nous ne connaissons scientifiquement en toute chose que l'ordre et la forme : les idées qui s'y rattachent étant le principe, le moyen et la fin de toute explication scientifique¹ ». Cournot estime que l'ordre et la forme permettent de classer nos connaissances et qu'ils constituent même une condition de possibilité des sciences en général. Dans ses travaux publiés entre 1843 et 1861, Cournot souligne l'importance de l'ordre dans les sciences logico-mathématiques, en chimie, en cristallographie, dans les sciences du vivant, dans les sociétés humaines, dans l'histoire.

L'argument de Cournot ne représente pas un phénomène isolé, tout particulièrement dans les sciences physico-mathématiques. Ainsi, Camille Jordan insiste sur l'importance de la notion d'ordre dans l'introduction à sa thèse en 1860 ou dans sa notice sur travaux, rédigée pour sa candidature à la succession de Michel Chasles à l'Académie des sciences en 1881. Jordan se réfère alors tour à tour à la théorie des nombres, l'algèbre, la géométrie, la mécanique ou encore la cristallographie. Dans le domaine des arts, l'architecte et théoricien de l'ornement Jules Bourgoïn s'inspire directement de Cournot lorsqu'en 1873, il propose une théorie de l'ornement fondée sur la juridiction de l'ordre et de la forme.

Il s'avère que Cournot, Jordan et Bourgoïn partagent une source commune, à savoir Louis Poinso. Ainsi, Cournot se réfère régulièrement à Poinso dès 1845. Pour sa part, Jordan reprend intégralement certains propos de Poinso dans sa notice avant de conclure :

« Ces réflexions de Poinso qui ont servi d'épigraphe à mes premiers essais, caractérisent assez nettement la tendance générale de mes recherches.

Elles ont eu presque constamment pour but d'approfondir la théorie de l'ordre au double point de vue de la Géométrie pure et de l'Analyse². »

Enfin, Bourgoïn connaît et reprend certains aspects des thèses de Poinso sur l'ordre, notamment *via* Cournot. Ces quelques indications montrent l'importance de la circulation de la notion d'ordre parmi plusieurs auteurs du XIX^e siècle dans des domaines différents. De plus, elles permettent de souligner la polymorphie de la réception des travaux de Poinso sur la théorie de l'ordre. Elles nous amènent enfin à réévaluer la place qu'occupe la notion d'ordre en mathématiques, en cristallographie ou encore dans l'art ornemental au XIX^e siècle.

Il s'agit là de domaines régulièrement associés dans l'historiographie à l'émergence de la théorie des groupes. Par exemple, Felix Klein, dans son histoire des mathématiques publiée à titre posthume, identifie l'algèbre du XIX^e siècle à la naissance du concept de groupe et il fait comme si les travaux de Joseph-Louis Lagrange, Carl Friedrich Gauss, Niels Henrik Abel, Évariste Galois ou encore Augustin-Louis Cauchy préfiguraient la théorie des groupes et son autonomisation³. Or, dans le tome « algèbre supérieure » de son manuel destiné aux candidats à l'École Polytechnique,

1. JORDAN, 1881, p. 7-8.

2. JORDAN, 1881, p. 7-8.

3. KLEIN, 1926, p. 355 *sq.*

Charles de Comberousse construit par contraste une trame historique centrée sur la figure de Poincaré et sur l'ordre :

« Nous sommes forcés d'indiquer seulement ces résultats et de renvoyer le lecteur aux écrits mêmes des savants illustres qui ont commencé à élucider ces questions si vastes et si difficiles. Lagrange et Gauss, Abel et Galois, Cauchy et J.-A. Serret, MM. Bertrand, Hermite, E. Mathieu, Camille Jordan, ainsi que d'autres célèbres géomètres étrangers, ont jeté les fondements de cette Algèbre transcendante, où l'ordre a pris la place prédominante que lui assignait Poincaré⁴. »

Cette mise en perspective diffère donc radicalement de la thèse historique soutenue par Klein.

Par ailleurs, dans son ouvrage de vulgarisation intitulé *Symmetry*, publié en 1952, Hermann Weyl soutient que l'art ornemental et la cristallographie dépendent de principes communs, fondés exclusivement sur la théorie des groupes. Il illustre son propos en se référant à des exemples d'ornements, notamment issus de la *Grammar of Ornament* (1856) de l'architecte Owen Jones. Weyl suggère à son lecteur que la théorie des groupes s'impose comme « la grille de lecture » pour comprendre le développement de l'art ornemental et de la cristallographie, ce qui peut induire une histoire rétrospective de ces deux domaines. Or, l'œuvre de Bourgoïn nous incite à nous distancier de cette lecture historique. En effet, pour rapprocher mathématiques, cristallographie et art ornemental, il ne se réfère jamais à la théorie des groupes mais à la notion d'ordre telle qu'elle est introduite par Poincaré et systématisée par Cournot.

En étudiant les travaux de Poincaré, Cournot et Bourgoïn à travers le prisme de la notion d'ordre, nous souhaitons contribuer à combler les lacunes qu'implique une histoire fondée sur la recherche de traces d'objets apparus *a posteriori*⁵, comme c'est notamment le cas chez Klein et Weyl.

Aussi bien Poincaré que Cournot et Bourgoïn insistent sur le caractère transversal de la notion d'ordre. Poincaré l'applique à divers domaines des mathématiques, Cournot l'étend aux sciences en général, Bourgoïn la prolonge même à l'art ornemental. Dans leurs travaux, la notion d'ordre, bien que centrale, n'a pas de définition stabilisée et elle prend des formes différentes en fonction des contextes. Nous souhaitons en conséquence étudier sa circulation et la pluralité de ses usages chez ces trois auteurs, pour en souligner la complexité.

Nous aborderons tout d'abord l'ordre tel qu'il est conceptualisé par Poincaré entre 1808 et 1845. Nous verrons comment il le caractérise et l'utilise pour rapprocher algèbre, théorie des nombres et géométrie. Nous décrirons également la circulation

4. COMBEROUSSE, 1890, p. 619. L'auteur renvoie en note à POINCARÉ, 1845. Charles de Comberousse (1826-1897) fut professeur au Conservatoire national des Arts et Métiers et à l'École centrale des Arts et Manufactures. La citation reproduite ici est issue de la conclusion au chapitre consacré à la démonstration de l'impossibilité de la résolution générale de l'équation du cinquième degré.

5. Sur cette thématique, et dans le cadre de l'histoire des mathématiques, nous renvoyons à quelques travaux récents : GOLDSTEIN et SCHAPPACHER, 2007 pour la théorie des nombres ; EHRHARDT, 2011 et EHRHARDT, 2012 sur les travaux de Galois et la théorie des groupes ; BOUCARD, 2011 sur les travaux de Poincaré ; BRECHENMACHER, 2011 sur les recherches de Jordan.

de ses travaux sur l'ordre au XIX^e siècle. Nous montrerons ensuite comment Cournot s'approprie la théorie de l'ordre de Poinot et la remodèle pour aboutir à un système général de connaissances. Nous insisterons également sur l'éclairage philosophique que Cournot donne à cette notion. Enfin, nous analyserons la place de l'ordre dans la théorie de l'ornement de Bourgoin en montrant comment il s'inspire du système de connaissances de Cournot pour parvenir à une grammaire générale des ornements.

LA NOTION D'ORDRE CHEZ POINSOT DE 1808 À 1845

Une source privilégiée de Poinot : les Disquisitiones arithmeticae de Gauss

Avant d'aborder directement le contenu des travaux de Louis Poinot⁶, arrêtons-nous rapidement sur une référence fondamentale pour ses réflexions sur la notion d'ordre : les *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss, publiées en 1801. Cet ouvrage constitue un traité de référence pour la théorie des nombres au XIX^e siècle⁷. Dès la première section, Gauss y introduit un nouvel objet mathématique, les congruences⁸, qu'il étudie et applique dans les sections suivantes. Poinot s'inspire particulièrement de la septième et dernière section de l'ouvrage. Dans sa préface, Gauss commente : « La théorie de la division du cercle, ou des polygones réguliers, qui compose la section VII, n'appartient pas par elle-même à l'Arithmétique, mais ses principes ne peuvent être puisés que dans l'Arithmétique transcendante⁹ ». Dans cette partie, Gauss propose en effet une méthode de résolution algébrique des équations binômes de degré premier, c'est-à-dire les équations de la forme « $x^n = 1$ » où n est un nombre premier, ce qui lui permet d'obtenir une condition suffisante de construction à la règle et au compas des polygones réguliers. Cette méthode repose sur l'utilisation des racines primitives, objets de la théorie des nombres¹⁰. La section VII est très rapidement reprise en France : par exemple, Lacroix et Lagrange intègrent la méthode de Gauss sous des formes résumées dans les traités d'algèbre qu'ils publient respectivement en 1804 et en 1808¹¹. Poinot est d'ailleurs l'auteur d'une analyse du *Traité des équations numériques* de Lagrange¹² et il s'appuie sur la variante proposée par Lagrange pour exposer les principes du travail de Gauss, en insistant quasi-exclusivement sur la méthode de résolution algébrique¹³. Or, nous verrons que pour Poinot, un aspect fondamental du travail de Gauss est de mettre

6. Pour des indications biographiques sur Poinot, nous renvoyons à BERTRAND, 1890.

7. Pour une analyse du contenu et de la réception des *Disquisitiones arithmeticae*, ainsi que leurs liens avec d'autres domaines des mathématiques, nous renvoyons particulièrement à Goldstein *et al.*, 2007.

8. Deux nombres a et b sont dits *congrus modulo p* lorsque leur différence est divisible par p . On obtient ainsi une congruence : $a \equiv b \pmod{p}$. Dans ce qui suit, nous indiquerons les définitions des notions mathématiques mobilisées mais ne nous arrêterons pas sur les développements techniques : à ce sujet, nous renvoyons à BOUCARD, 2011.

9. GAUSS, 1801, Préface.

10. Une racine primitive d'un nombre premier p est un nombre tel que les restes de ses puissances successives après division par p donnent tous les nombres entiers compris entre 1 et $p-1$.

11. LACROIX, 1804, p. 294-315 ; LAGRANGE, 1808, note XIV.

12. LAGRANGE, 1808.

13. POINSOT, 1808.

en exergue le lien existant entre les différents objets en jeu, et plus généralement entre la géométrie, l'algèbre et la théorie des nombres. Cela constituera également un fil rouge dans les parties les plus mathématiques des travaux de Cournot et Bourgoïn.

L'ordre comme lien entre algèbre, théorie des nombres et géométrie

Poinsot évoque pour la première fois l'ordre comme notion fondamentale en mathématiques en 1818 :

« Nous avons repris et continué toutes ces recherches qui sont liées entre elles de la manière la plus intime, et qui ont en général pour objet, *la théorie de l'ordre et de la situation des choses sans aucune considération de la grandeur* : théorie neuve et profonde, dont les éléments nous sont à peine connus, mais qu'on doit regarder comme le premier fondement de l'algèbre, et la source naturelle des principales propriétés des nombres¹⁴. »

Les « recherches » évoquées par Poinsot ont pour objet les polygones¹⁵, les permutations¹⁶, les racines des équations binômes et des congruences binômes¹⁷. L'étude de ce corpus permet de saisir différents aspects de la théorie de l'ordre chez Poinsot. Ce dernier développe finalement plusieurs réflexions sur la théorie de l'ordre dans un mémoire de théorie des nombres, publié en 1845.

Il revendique donc un lien fort entre algèbre, théorie des nombres et géométrie *via* la notion d'ordre. Il aborde cette question dès 1810 dans son *Mémoire sur les polygones et les polyèdres*, mais sans se fonder explicitement sur ce qu'il nommera ensuite la théorie de l'ordre. Ce travail a pour objet la géométrie de situation, « parce qu'on y considère moins la grandeur et la proportion des figures, que l'ordre et la situation des divers éléments qui la composent¹⁸ ». Poinsot place l'origine de cette géométrie

14. POINSOT, 1818, p. 382-383.

15. POINSOT, 1810.

16. POINSOT, 1818, p. 382-385. Dans ce mémoire, Poinsot résume également un mémoire sur les permutations présenté à l'Académie des sciences en mai 1813. Une version manuscrite de ce travail est disponible à la Bibliothèque de l'Institut de France. Une transcription et une analyse sont proposées dans BOUCARD, 2011. Au début du XIX^e siècle, et pour Poinsot dans ses recherches, une permutation est un ensemble ordonné d'objets. Pour une discussion plus approfondie sur les notions de permutation et de substitution, voir par exemple DAHAN DALMEDICO, 1980. L'intérêt des permutations pour la théorie algébrique des équations est particulièrement mis en avant avec les travaux de Waring, Lagrange et Vandermonde dans les années 1770. Pour un aperçu de l'évolution du statut des permutations au XIX^e siècle, voir EHRHARDT, 2012.

17. POINSOT, 1808 ; POINSOT, 1820. Si Poinsot ne se réfère pas ici explicitement à (POINSOT, 1808), il est cependant clair que l'idée d'ordre y est déjà sous-jacente dans ses raisonnements. De plus, il indique dans un manuscrit : « [...] c'est l'idée d'ordre : unique principe et source naturelle de toute la science qu'on nomme algèbre. Cette idée capitale s'est montrée pour la première fois dans l'analyse que j'ai donnée en 1808 de l'ouvrage de Lagrange sur la résolution des équations numériques » (Ms. 954, fol. 192, Bibliothèque de l'Institut de France).

18. POINSOT, 1810, p. 16.

chez Leibniz¹⁹ et rappelle qu'Euler²⁰, Vandermonde²¹ et Condorcet²² ont également travaillé sur la géométrie de situation avec cette définition. À travers son étude des polygones étoilés²³, Poinsoot relie géométrie et algèbre d'une part, géométrie et théorie des nombres d'autre part.

Ainsi, il remarque que tous les polygones réguliers étoilés de m côtés peuvent être obtenus à partir du polygone régulier ordinaire correspondant en reliant ses sommets de 2 en 2, de 3 en 3, ... Mais la réciproque est fautive, ce que Poinsoot illustre à travers le cas de l'hexagone régulier. Il en profite pour souligner le lien entre la formation des différents polygones réguliers, et les relations entre les racines de l'équation binôme correspondante :

« Par exemple, en prolongeant dans l'hexagone les côtés pris de 2 en 2, il en résulte en apparence un nouvel hexagone étoilé ; mais ce n'est que la réunion de deux triangles distincts mis en croix l'un sur l'autre, et non pas une figure simple formée par la suite continue de plusieurs droites. Dans l'analyse algébrique des polygones réguliers, ce cas répondrait à l'un de ceux où l'équation binôme se décompose, et où toutes les racines imaginaires ne sont pas propres à reproduire, par leurs puissances successives, toute la série des racines²⁴. »

Deux paragraphes plus loin, le lien entre géométrie et théorie des nombres est suggéré par une « définition géométrique d'un nombre premier²⁵ », qui sera réutilisée dans ses travaux ultérieurs : un nombre h est premier à m si et seulement si, lorsqu'on on joint « de h en h , m points rangés en cercle dans l'ordre $a, b, c, d, e, \& c.$, on [passe] par tous ces points avant de revenir au premier²⁶ ». Un nombre m est alors premier si cette situation se reproduit pour tous les nombres h inférieurs à m .

19. Poinsoot indique en note que l'on peut trouver une référence à l'analyse de situation de Leibniz dans l'article *Situation*, écrit par d'Alembert dans l'*Encyclopédie*. Poinsoot ne se satisfait pas de cette caractérisation et semble avoir cherché dans les *Acta Eruditorum* des références originales données par Leibniz, sans succès. Pour appuyer sa propre version de la définition de la géométrie de situation, Poinsoot cite une lettre de Leibniz à M. de Montmort sur les jeux (POINSOT, 1810, p. 17). Notons plus généralement que Leibniz n'a rien publié de son vivant sur son projet d'*Analysis situs*, dont le contenu est explicité partiellement dans sa correspondance avec Huygens, publiée en 1833. Voir également LEIBNIZ, ECHEVERRÍA, PARMENTIER, 1995, p. 8.

20. Dans EULER, 1741, p. 128, Euler donne une définition très semblable de cette géométrie et se réfère également à Leibniz et à sa *Geometria situs*.

21. VANDERMONDE, 1774.

22. BRIAN, 2006.

23. Un polygone étoilé est la figure fermée obtenue en joignant m points rangés en cercle à égale distance de h en h , où h est premier avec m . Poinsoot qualifie ces polygones étoilés de « figures nouvelles ». Néanmoins, ces polygones étoilés ont déjà été considérés à diverses reprises par d'autres savants précédemment comme le rappelle Michel Chasles (CHASLES, 1837, p. 476-487). Poinsoot expose également de nouveaux résultats sur les polyèdres étoilés dans ce texte. Ces résultats seront régulièrement cités et développés au XIX^e siècle. Ce mémoire sera d'ailleurs traduit en allemand et publié en 1906 dans les *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften* avec trois autres mémoires sur les polyèdres de Cauchy, Bertrand et Cayley : voir POINSOT *et al.*, 1906.

24. POINSOT, 1810, p. 27.

25. POINSOT, 1810, p. 28.

26. POINSOT, 1810, p. 27-28.

Un « rapprochement curieux de l'algèbre et de la théorie des nombres »²⁷ est avancé par Poinsoot dans son *Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres* (1820). Il y démontre que l'on peut obtenir les racines des congruences binômes, et donc les racines primitives d'un nombre premier²⁸, à partir de l'expression des racines des équations binômes. Il s'appuie ainsi sur une analogie entre équations et congruences binômes, qu'il prolonge pour démontrer son théorème : il expose une partie de la démonstration que Lagrange propose en 1808 pour la résolution des équations binômes en la traduisant en termes de congruences. Il en profite pour revenir sur l'agencement particulier des racines des équations et congruences binômes. Poinsoot note le peu d'efficacité de sa méthode en pratique mais « il ne s'agit point ici de calculs et de résultats particuliers ; nous n'étudions que la théorie et les méthodes générales, dans la seule vue des progrès et de la dignité de la science »²⁹. Nous verrons qu'un argument similaire sera avancé par Jordan en 1860.

L'ordre comme méthode de décomposition

Poinsoot développe une autre forme d'analogie dans ses textes³⁰ : ainsi, entre 1808 et 1820, il applique à différents objets mathématiques – permutations, racines d'équations et racines de congruences – un même type de raisonnement, qui consiste à décomposer à l'aide d'une loi un ensemble donné en sous-ensembles qu'il nomme « groupes »³¹. Il évoque pour la première fois cette idée en 1808 dans son analyse de la note XIV du *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* de Lagrange à propos de la méthode de résolution algébrique des équations binômes « $x^n = 1$ », où n est premier, exposée par Gauss en 1801 et simplifiée par Lagrange. Celle-ci est fondée sur la ré-indexation des racines de l'équation à l'aide d'une racine primitive g du nombre n , qui permet ainsi de passer d'une racine à la suivante en appliquant systématiquement la même opération et de partager l'ensemble des racines en sous-ensembles de racines ayant des propriétés particulières. Ce procédé réduit ainsi la résolution de l'équation de départ à la résolution d'équations auxiliaires de degré moindre. Une longue partie de la section VII est ensuite consacrée à la démonstration, très technique, de la résolubilité des équations auxiliaires ainsi obtenues.

27. POINSOT, 1845, p. 402.

28. Une racine d'équation ou de congruence est dite primitive lorsqu'elle engendre toutes les autres racines de l'équation ou de la congruence considérée. D'après le petit théorème de Fermat, lorsque p est un nombre premier, les racines primitives de la congruence $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ sont également les racines primitives de p .

29. POINSOT, 1820, p. 346.

30. Sur l'utilisation des analogies par Poinsoot, voir BOUCARD, 2011, p. 99-106. Plus généralement, sur l'analogie dans les mathématiques et dans les sciences, voir DURAND-RICHARD, 2008 ; KNOBLOCH, 1991.

31. Rappelons que le terme « groupe » acquiert au cours du XIX^e siècle un sens mathématique précis. Le concept de groupe est souvent attribué à Évariste Galois, qui donne une définition d'un « groupe » dans ses écrits de 1830. Sur cette construction historique, nous renvoyons particulièrement à EHRHARDT, 2010 et EHRHARDT, 2011. Poinsoot, dans ses différents écrits, ne définit jamais ce terme. Néanmoins, l'utilisation régulière de ce terme pour décrire des configurations similaires suggère que Poinsoot associe au terme « groupe » le fait que des objets sont « inséparables » relativement à une loi : voir ce qui suit et BOUCARD, 2011, p. 103-104.

En 1808, le commentaire de Poinot souligne le principe « essentiel » de la méthode de Gauss sans rentrer dans le détail des justifications et des calculs³² :

« Ainsi, l'on verra sans peine que les douze racines imaginaires de l'équation binôme du 13^e degré se partage en quatre groupes de trois racines, telles, dans chacun d'eux, qu'en mettant l'une à la place de l'autre, ces trois racines ne se séparent pas ; et par conséquent, si l'on échange les racines d'un groupe à l'autre, les groupes ne feront que changer de place en conservant toujours leurs mêmes racines³³. »

Les *périodes* de Gauss sont donc devenues des *groupes* de racines inséparables chez Poinot qui reprend ce vocabulaire et utilise des formulations très proches dans ses travaux sur les permutations et les congruences. D'une part, en 1818, Poinot résume sa méthode de partage des permutations présentée en 1813 à l'Académie des Sciences :

« Nous avons fait voir comment le système de toutes les permutations possibles de plusieurs choses, peut-être partagé en plusieurs groupes de permutations associées entre elles de manière que, malgré tous les échanges qu'on voudrait faire de ces choses, les permutations d'un même groupe ne pussent jamais se séparer. Et de même on a montré comment chacun de ces groupes principaux pouvaient se partager en groupes secondaires de permutations également inséparables [...]»³⁴. »

D'autre part, en 1820, Poinot discute l'agencement des racines des équations binômes en ces termes :

« [...] au lieu de considérer à la fois toutes les racines r, r^2, r^3, r^4, r^5 , etc., r^{n-1} , il faudra les partager en plusieurs groupes de racines liées entre elles de la même manière. On formera immédiatement chacun de ces groupes au moyen de la suite ordonnée, $r, r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, r^{a^4}$, etc., $r^{a^{n-2}}$ en y prenant les racines de h en h , si h est un diviseur de $n-1$ [...]. On décomposera de même chaque groupe, en y prenant les racines de k en k , où k est un diviseur de leur nombre $\frac{n-1}{n}$. »³⁵. »

Dans les deux cas, Poinot forme des « groupes » en appliquant une loi qui permet de passer d'un objet à un autre par le même procédé. Ces groupes peuvent ensuite être décomposés en « groupes secondaires », et ainsi de suite. Dans le cas des permutations, Poinot utilise ce qu'on nomme actuellement une substitution circulaire : il avance toutes les lettres d'une place, ou de deux places, ..., et obtient ainsi ce qu'il nomme des permutations « conjuguées ». Dans le cas des racines, il introduit une racine primitive.

32. Poinot indique d'ailleurs : « Sans entrer ici dans le détail des propriétés des nombres qui ont conduit M. Gauss à cette réduction nouvelle, nous ferons observer qu'elle tient essentiellement à ce que les racines se conjuguent non seulement deux à deux [...] mais se groupent encore 3 à 3, 5 à 5, etc. » (POINOT, 1808, p. 369-370).

33. POINOT, 1808, p. 370.

34. POINOT, 1818, p. 382-383.

35. POINOT, 1820, p. 91.

Poinsot considère deux utilisations de cette loi : son application aux objets successivement obtenus permet de décomposer le groupe initial en groupes primaires, secondaires, etc. ; son utilisation sur tous les objets d'un même groupe engendre un nouveau groupe de même cardinal. Poinsot nomme ce second procédé « conjugaison mutuelle des groupes ».

Cette approche, développée par Poinsot à partir de 1808, caractérise partiellement la notion d'ordre, qui est alors associée à une méthode de décomposition d'un ensemble d'objets en sous-ensembles d'objets « inséparables », elle-même formulée de manière très similaire dans des contextes différents. Pour illustrer cette procédure, Poinsot évoque à plusieurs reprises l'image du cercle.

Théorie de l'ordre et image du cercle

Toujours en 1820, Poinsot présente une caractérisation très générale de l'ordre :

« Je ferai voir que les principes généraux de l'analyse mathématique ont leur source naturelle dans la simple considération de l'*ordre*, ou de la disposition mutuelle qu'on peut observer actuellement entre plusieurs objets : ce qui me paraît le plus haut point d'abstraction et de généralité où il soit permis de porter la science³⁶. »

Malgré la généralité de cette définition, Poinsot applique la théorie de l'ordre à des situations cycliques seulement et il s'appuie régulièrement sur l'image du cercle pour symboliser les différents cas étudiés. Dès 1808, Poinsot affirme que les racines des équations binômes sont « exactement comme si elles étaient écrites en cercle³⁷ ». On retrouve cette exacte formulation en 1820, lorsqu'il commente longuement l'« ordre ingénieux » et « naturel » dans lequel sont disposées les racines des équations binômes. Des manuscrits de Poinsot vont dans le même sens : les « premiers principes » de la théorie de l'ordre s'appuient sur la configuration suivante : « Considérez plusieurs objets situés d'une manière quelconque dans l'espace et regardez-les dans un ordre tel que celui-ci, a, b, c, d, e [...] et considérez les comme n points distribués régulièrement en cercle³⁸ ». Cette disposition, également utilisée par Poinsot en 1810 dans sa définition géométrique d'un nombre premier et centrale dans ses « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres » (1845), semble jouer le rôle d'exemple paradigmatique pour la notion d'ordre.

L'ordre comme grande catégorie des mathématiques

Le dernier texte dans lequel Poinsot s'appuie sur la notion d'ordre est publié en 1845. La préface de ce mémoire est un manifeste en faveur de la théorie des nombres et de la théorie de l'ordre. Selon Poinsot, bien que négligée par la plupart des savants, la théorie des nombres est fondamentale en mathématiques et devrait être intégrée dans

36. POINSOT, 1820, p. 402.

37. POINSOT, 1808, p. 373.

38. Ms. 963, fol. 163, Bibliothèque de l'Institut de France.

l'enseignement des mathématiques³⁹. Sa singularité et son inutilité, qui lui sont souvent reprochées, ne sont qu'illusoirs : comme Poinot le rappelle, des liens réciproques unissent théorie des nombres, algèbre et géométrie. Il annonce de plus des démonstrations de théorèmes arithmétiques fondamentaux qui grâce à la notion d'ordre sont « à la fois plus simples et plus directes, ou qui, étant tirées d'un nouvel ordre de considérations, sont propres à mettre la doctrine dans un nouveau jour⁴⁰ ».

Or, celle-ci est essentielle pour Poinot : « les mathématiques, considérées de la manière la plus générale, pourraient être définies [comme] la science qui a pour objet le *nombre*, l'*ordre* et la *mesure*⁴¹ ». Il propose donc une classification binaire des mathématiques : la science mathématique des *grandeurs* est composée de l'arithmétique ordinaire, qui consiste en la science du calcul et dépend du système de numération considéré, l'algèbre ordinaire considérée comme une arithmétique généralisée, la géométrie ordinaire, fondée sur la considération des rapports de grandeurs et une partie de la mécanique ; la science mathématique de l'*ordre* et de la situation comprend l'arithmétique transcendante, l'« algèbre supérieure, qui repose toute entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons, qui s'occupe de la nature et de la composition des formules considérées en elles-mêmes, comme de purs symboles, et sans aucune idée de valeur ou de quantité⁴² », la géométrie de situation, et la mécanique qui en découle. Dans sa définition de l'algèbre supérieure, Poinot associe pour la première fois les idées d'ordre et de combinaison. Nous verrons que Cournot en fera de même dès ses premiers ouvrages.

Au sein de la classification de Poinot, les notions d'ordre et de nombre acquièrent un statut privilégié :

« Il résulte donc de ces réflexions que la théorie des nombres, qui, au premier coup d'œil, ne paraît qu'une spéculation singulière en mathématiques, s'y présente au contraire d'une manière naturelle, et qu'elle forme même la première partie essentielle de la doctrine, comme étant celle où la science générale des rapports a elle-même ses premiers fondements. C'est par cette théorie de l'ordre et des nombres qu'on peut connaître la nature propre de l'algèbre [...] »⁴³.

39. Poinot présente cette préface à l'Académie des sciences dès 1841, c'est-à-dire une année après avoir retrouvé son poste au Conseil de l'Instruction publique. Notons d'ailleurs que nous avons retrouvé d'autres commentaires allant dans ce sens dans des articles d'enseignants (comme Olry Terquem ou Eugène Prouhet par exemple) publiés dans les *Nouvelles annales de mathématiques*.

40. POINOT, 1845, p. 1.

41. POINOT, 1845, p. 5.

42. POINOT, 1845, p. 4. Cette définition de l'algèbre supérieure par Poinot peut rappeler l'algèbre symbolique développée par George Peacock et fondée sur « une attention exclusive portée aux propriétés des opérations conçues comme combinaison de symboles arbitraires » (DURAND-RICHARD, 2001, p. 332). Néanmoins, il est peu vraisemblable que Poinot ait eu connaissance des travaux de Peacock. De plus, le statut de l'analogie est différent chez les deux hommes et si Poinot insiste sur l'étude de la « disposition mutuelle [...] entre plusieurs objets », la théorie de l'ordre ne sert jamais pour analyser des opérations complètement générales et abstraites. Nous reviendrons sur cette question lors de notre analyse des ouvrages de Cournot.

43. POINOT, 1845, p. 7.

L'ordre comme procédé de démonstration

Dans la suite de son mémoire, Poinsoot expose les démonstrations annoncées en trois parties : la plupart des premières preuves sont déjà connues ; les suivantes s'appuient sur deux principes, la commutativité de la multiplication et un théorème arithmétique ; la dernière partie, où la notion d'ordre intervient, permet de justifier la position fondamentale de la théorie des nombres au sein des mathématiques. La théorie de l'ordre, utilisée ici comme principe démonstratif, conduit Poinsoot à statuer sur l'importance et la cohérence interne de la théorie des nombres.

Pour cela, Poinsoot reprend la configuration déjà évoquée précédemment :

« Considérons donc plusieurs objets a, b, c, d, e , etc., situés d'une manière quelconque dans l'espace, et regardons-les d'abord dans un certain ordre tel que celui-ci : a, b, c, d, e , etc., de manière qu'après a vienne b , ensuite c , ensuite d , etc. : et comme ici nous n'avons en vue que le nombre et l'ordre, supposons que tous ces objets soient égaux, à égale distance l'un de l'autre, et simplement représentés par N points a, b, c, d , etc., rangés en cercle, et formant ainsi les sommets d'un polygone régulier de N côtés⁴⁴. »

À partir de cette disposition et de la définition de nombre premier introduite dès 1810, Poinsoot démontre notamment le théorème généralisé d'Euler⁴⁵ et il propose une version géométrique de l'algorithme d'Euclide ainsi qu'une méthode de résolution des équations indéterminées du premier degré. Voici la « démonstration tirée de la considération de l'ordre » du théorème d'arithmétique utilisé pour obtenir les démonstrations de la seconde partie : *si a et β sont deux nombres premiers à un même nombre N , alors le produit $a\beta$ est également premier à N* . Poinsoot considère un polygone de N sommets et parcourt ces sommets de a en a : puisque a et N sont premiers entre eux, il obtient un nouveau polygone de N sommets. En parcourant les sommets de ce nouveau polygone de β en β , un nouveau polygone de N côtés est engendré. Ceci revient à considérer des intervalles de $a\beta$ sommets pour engendrer un polygone de N sommets : le produit $a\beta$ est bien premier à N . Le fait que Poinsoot démontre en particulier ce principe à partir de la notion d'ordre n'est pas anodin : cela donne une légitimité aux preuves proposées en seconde partie de son mémoire, qui reposent ainsi sur la théorie de l'ordre.

La notion d'ordre est donc abordée sous plusieurs formes dans l'œuvre de Poinsoot. Reliant diverses branches mathématiques, elle suggère des analogies riches entre différents objets. Que ce soit à travers la méthode de décomposition ou l'analogie entre équations et congruences qui permet à Poinsoot d'obtenir l'expression des racines des congruences binômes, la notion d'ordre acquiert indéniablement une fonction heuristique. *Via* sa fonction démonstrative, la théorie de l'ordre renforce le statut de la théorie des nombres au moment où Poinsoot souhaite que la théorie des nombres soit pleinement intégrée dans les programmes d'enseignement. Enfin, l'ordre devient une grande catégorie des mathématiques dans les « Réflexions sur les principes fondamentaux

44. POINSOT, 1845, p. 45-46.

45. Ce théorème peut s'énoncer ainsi : soit n un entier naturel et a un entier premier à n . Alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, où $\varphi(n)$ désigne le nombre d'entiers naturels non nuls inférieurs à n et premiers avec n .

de la théorie des nombres » de 1845, et elle participe à leur unification. Avec sa théorie de l'ordre, Poinot développe donc une notion polymorphe, dont les différents aspects vont être repris par d'autres auteurs au XIX^e siècle dans des contextes variés.

Circulations au XIX^e siècle

La question de la réception et de la postérité des idées de Poinot n'est pas évidente *a priori* : la plupart des travaux de Poinot évoqués ici ne contiennent que des résultats déjà connus sans que l'ordre soit défini. Ses travaux sont néanmoins cités régulièrement à partir des années 1820. La prise en compte de la multiplicité des lectures des travaux de Poinot siècle montre comment la notion d'ordre peut être réinterprétée, utilisée ou négligée par divers auteurs du XIX^e siècle. Ici, l'objectif est de donner une typologie des renvois à Poinot sans pour autant dresser une liste exhaustive des références que nous avons pu trouver lors de nos recherches.

Commençons par les références non liées explicitement à la notion d'ordre mais qui permettent de saisir la circulation de certains aspects des recherches de Poinot. Ainsi, avant 1845, les travaux Poinot sont régulièrement mobilisés pour alimenter des questions arithmétiques et algébriques ponctuelles ; la théorie de l'ordre n'y est pas mentionnée. C'est par exemple le cas de Carl Gustav Jacob Jacobi et Victor-Amédée Lebesgue qui s'appuient sur l'analogie construite entre équations et congruences binômes⁴⁶. Les démonstrations tirées de la considération de l'ordre proposées par Poinot en 1845 sont également reprises dans des journaux destinés à l'enseignement : Johann August Grunert les précise dans *Archiv der Mathematik und Physik* ; Auguste Aubry les prolonge dans *l'Enseignement mathématique*⁴⁷. Ces preuves géométriques sont également reprises dans des synthèses consacrées à la théorie des nombres⁴⁸. Là encore, les auteurs n'évoquent pas la théorie de l'ordre : seul le procédé de démonstration est mis en avant. Enfin, Poinot est également mentionné dans le cadre d'une interprétation rétrospective de ses travaux à la lumière de la théorie des groupes : c'est le cas d'Ettore Bortolotti et de Paul Bachmann qui relie la méthode de décomposition de Poinot à la théorie des groupes. Ainsi, pour Ettore Bortolotti, Poinot « fait déjà usage du mot 'groupe' dans un sens technique⁴⁹ » ; pour Paul Bachmann, la notion de groupe constitue le fondement de la méthode de Poinot⁵⁰.

46. LEBESGUE, 1829 ; JACOBI, 2007.

47. GRUNERT, 1846 ; AUBRY, 1907.

48. BACHMANN, 1892 ; SMITH, 1859.

49. MEYER & MOLK, 1904-1916, Tribunes publiques, p. 141.

50. « Die Lehre von den Congruenzen gründet sich sodann wesentlich auf jenen Fundamentalbegriff der Mathematik, der im Grunde auch schon bei dem Poinot'schen Verfahren zur Geltung kommt, auf den Begriff der Gruppe » (BACHMANN, 1892, p. IV). George Abram Miller donne d'ailleurs une traduction de cette affirmation dans (MILLER, 1903). Notons que Paul Bachmann est également l'auteur de la section *Niedere Zahlentheorie* de l'*Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* (1900) : aucune référence à Poinot n'y apparaît. Pourtant, il établit au début de son texte une liste de références contenant par exemple un ouvrage d'introduction à la théorie des nombres de Victor-Amédée Lebesgue (LEBESGUE, 1862), dont la position institutionnelle est bien plus marginale que celle de Poinot par exemple. On peut donc s'interroger sur les raisons de cet « oubli » de la part de Bachmann.

La théorie de l'ordre de Poinot est citée par plusieurs savants sous des formes diverses dans la seconde moitié du XIX^e siècle. Ainsi, Poinot et sa notion d'ordre sont parfois convoqués dans des reconstructions historiques : c'est le cas de Comberousse, cité en introduction, ou de Rodolphe Guimarães. Chez ce dernier, « les élégantes investigations de Poinot, qui font dépendre l'Arithmétique et l'Algèbre de l'ordre et de la combinaison⁵¹ » sont parmi les cinq principaux points listés dans sa description synthétique de l'état des mathématiques en 1850. Poinot et ses propos sur l'ordre sont également cités dans les travaux mathématiques de plusieurs auteurs. Par exemple, Édouard Lucas reprend un extrait du « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres » de 1820 dans sa *Théorie des nombres*⁵². Charles-Ange Laisant s'appuie sur le texte de 1845 pour illustrer la « nature particulière des questions » où « la notion de *place* ou de *classification* y domine absolument la notion de grandeur ou de rapport⁵³ ». Ces références à Poinot leur permettent de promouvoir une certaine vision de la théorie des nombres par exemple. Ces deux auteurs sont justement reconnus pour leur approche graphique des mathématiques.

L'utilisation de la théorie de l'ordre est par ailleurs explicite dans les travaux que Théodore Despeyrous et Jordan consacrent à la théorie des substitutions et à la question du nombre de valeurs que peut prendre une fonction au début des années 1860⁵⁴. Les deux savants situent expressément leurs travaux dans la lignée de ceux de Poinot et reprennent à leur compte la méthode de décomposition que ce dernier décrit dès 1808.

Despeyrous débute son *Mémoire sur la théorie générale des permutations* par une référence à Poinot et se réclame de la « théorie de l'ordre périodique », assimilée à « une géométrie spéciale qui ne considère que la situation des choses⁵⁵ ». Remarquons que cette expression, qui n'est jamais utilisée par Poinot, est employée par Cournot en 1847. Cournot et Despeyrous, qui évoluent tous deux à Dijon dans les années 1850, utilisent également des notations similaires pour les suites périodiques. Cela fait donc penser à une circulation de la théorie de l'ordre de Poinot à Despeyrous, *via* Cournot. L'objet du mémoire de Despeyrous est d'établir, à partir de la théorie de l'ordre, « deux lois générales de classification » permettant d'obtenir « en quelques lignes et de la manière la plus simple, les beaux théorème de Gauss et d'Abel⁵⁶ » : les travaux de Gauss et Abel peuvent donc être liés dans une certaine mesure à la théorie de l'ordre de Poinot. Despeyrous s'approprie le vocabulaire et les méthodes développées par Poinot : il s'appuie sur les « polygones de Poinot » et il montre que sa méthode « partage les racines de toute *équation abélienne* en plusieurs groupes de racines *inséparables*⁵⁷ ».

51. GUIMARÃES, 1900, p. 7.

52. LUCAS, 1891, p. XVIII-XIX.

53. LAISANT, 1882, p. 108. Sur les travaux de Lucas et Laisant, nous renvoyons respectivement à DÉCAILLOT, 1998 ; DÉCAILLOT, 2002 et à AUVINET, 2011.

54. Notons que ces thématiques sont proposées pour le grand prix de mathématiques de l'Académie des sciences de l'année 1860. Voir EHRHARDT, 2012, p. 160-170.

55. DESPEYROUS, 1861, p. 417.

56. DESPEYROUS, 1861, p. 417-418.

57. DESPEYROUS, 1861, p. 417.

Comme Despeyroux, Jordan se revendique de l'héritage de Poincaré et de sa théorie de l'ordre dès l'introduction de sa thèse⁵⁸. Toujours comme Despeyroux, Jordan propose une filiation avec certains travaux de Cauchy, Abel et Galois⁵⁹. Cela suggère d'ailleurs une source possible de la reconstruction historique donnée par Comberousse en 1890. Jordan développe une méthode de réduction successive dans laquelle la représentation analytique des substitutions est fondamentale, qui « semble être dans l'essence même de la question [de la théorie des équations]⁶⁰ ». Or, cette méthode de réduction repose sur deux formes de substitutions agissant sur des groupes de lettres, tout comme les lois de Poincaré dans sa méthode de décomposition : « [...] toute substitution du système T résulte de la combinaison de déplacements d'ensemble entre les groupes, et de permutations des lettres de chaque groupe entre elles⁶¹ ». Comme Poincaré en 1820, Jordan note que sa méthode n'est pas la plus avantageuse en termes d'applications mais que, « plus naturelle et plus directe, [elle] peut seule conduire aux vrais principes ». Vingt ans plus tard, dans sa *Notice sur travaux*, Jordan reprend intégralement des extraits des « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres » de 1845 et décrit la théorie de l'ordre comme caractéristique de « la tendance générale de [ses] recherches⁶² ». Avec Jordan, les champs d'application de la théorie de l'ordre ne sont plus circonscrits à l'algèbre et la théorie des nombres : la cristallographie et la mécanique font partie de ses thèmes de recherche.

Enfin, Cournot⁶³, qui nous intéresse particulièrement ici, évoque les travaux de Poincaré dans plusieurs contextes. Nous savons qu'il prend connaissance des recherches de Poincaré dès les années 1820 : dans le *Bulletin de Férussac*, il publie un compte rendu du « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres » en se référant aux travaux de Poincaré sur les polygones étoilés à plusieurs reprises⁶⁴. Il mobilise également les résultats de Poincaré pour nourrir ses réflexions sur les racines imaginaires de congruences à l'occasion d'un compte rendu d'un mémoire de Jacobi⁶⁵. Cournot se réfère ensuite de manière récurrente aux « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres » dans son traité de 1847, qui a pour objet l'étude des correspondances et des discordances entre algèbre et géométrie. Il s'inspire notamment de la théorie de l'ordre de Poincaré pour élargir le champ d'application de la notion d'ordre au-delà des mathématiques : tel est d'ailleurs l'objet de la partie suivante.

58. JORDAN, 1860.

59. JORDAN, 1860, p. 3.

60. JORDAN, 1860, p. 5. Comme précédemment, nous renvoyons à BRECHENMACHER, 2011 pour une analyse détaillée de ce lien entre les travaux de Jordan et la théorie de l'ordre. Notons que, toujours dans cette introduction, Jordan suggère également une analogie avec un théorème de mécanique.

61. JORDAN, 1860, p. 4.

62. JORDAN, 1881, p. 8.

63. Pour une bibliographie sur l'œuvre de Cournot, nous renvoyons à MARTIN, 2005. Dans nos commentaires en lien avec l'œuvre mathématique et philosophique de Cournot, nous nous appuyons régulièrement sur l'analyse de Thierry Martin : MARTIN, 1995 ; MARTIN, 1996a ; MARTIN, 1996b.

64. Voir par exemple le tome IV en 1824 (p. 66-67) et le tome X en 1828 (p. 105-107). Nous renvoyons également à COURNOT, 2010, p. 160-162. Plus généralement, Cournot est l'auteur de nombreux comptes rendus dans le *Bulletin de Férussac* : voir COURNOT, 2010 ; BRU ET MARTIN, 2005. Ainsi, sa participation très régulière au *Bulletin de Férussac* lui garantit une culture scientifique générale solide.

65. COURNOT, 1827, p. 302.

La notion d'ordre est centrale dans les quatre ouvrages de Cournot auxquels notre analyse se réfère⁶⁶. Par exemple, dans les traités de 1843 et 1847, le terme « ordre » apparaît dans le titre de trois chapitres : dans l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843), le premier chapitre est intitulé « Des combinaisons et de l'ordre » et les premier et quatrième chapitres de *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* (1847) ont respectivement pour titre « De l'arithmétique pure ou de la théorie des nombres, et de ses liaisons avec la théorie des combinaisons et de l'ordre » et « De l'algèbre et de ses rapports avec la théorie de l'ordre. Origine des valeurs imaginaires ». Comme Poincaré, Cournot ne définit pas explicitement la notion d'ordre et il l'utilise à des niveaux différents. Il en est de même pour les idées associées à l'ordre (combinaison, syntactique ou encore forme).

Nous nous proposons de montrer ici comment Cournot s'approprie et transforme la théorie de l'ordre de Poincaré afin de parvenir à un système de connaissances fondé sur les catégories d'ordre et de forme. Mais arrêtons-nous tout d'abord sur deux particularités qui traversent l'œuvre de Cournot et qui montrent pourquoi il est important d'en traiter parallèlement les aspects mathématiques et philosophiques.

En premier lieu, sans confondre sciences et philosophie, Cournot pense néanmoins que ces deux domaines sont intimement liés⁶⁷. Il souligne ainsi dès 1847 que toute « construction scientifique » dépend d'une théorie philosophique mais que les problèmes philosophiques soulevés en science n'affectent pas la « certitude » des résultats scientifiques. Il ne subordonne donc pas les sciences à la philosophie, même s'il estime qu'une pratique scientifique dépourvue d'éclairage philosophique serait aveugle.

En second lieu, Cournot utilise de proche en proche les idées de Descartes, Leibniz, Kant ou encore Poincaré sur l'ordre sans toujours bien distinguer les diverses acceptions que les auteurs mentionnés assignent à cette notion. Bien souvent d'ailleurs, Cournot combine indifféremment des références mathématiques et philosophiques à l'appui de ses thèses. Ainsi, dans une discussion sur l'analyse et la synthèse⁶⁸, il passe insensiblement de la philosophie kantienne aux débats qui engagent certains géomètres tels que Monge, Carnot, Gergonne ou encore Poncelet durant le premier tiers du XIX^e siècle sur les rapports entre l'analyse et la synthèse ainsi que sur leurs mérites

66. Nous nous intéresserons tout d'abord à son *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843) dans laquelle il donne aux probabilités un statut de théorie mathématique. Nous aborderons ensuite *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* (1847). Il y montre comment le calcul algébrique appliqué à des questions de géométrie permet ou non d'obtenir exactement les solutions répondant aux problèmes géométriques posés, il tente ensuite d'expliquer ces deux possibilités (COURNOT, 1847, p. v). Notons d'ailleurs que cette question est également abordée par Poincaré dans son mémoire de 1845. Nous évoquerons par ailleurs son *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique* (1851) qui contient une analyse philosophique de l'idée d'ordre. Enfin, nous nous appuyerons sur son *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* (1861) dans lequel il ébauche un système de connaissances fondé sur les idées de forme et d'ordre.

67. COURNOT, 1847, p. 362-363.

68. COURNOT, 1847, p. 376-384.

respectifs en mathématiques. Or, chez Kant, la distinction analyse/synthèse s'applique à des jugements ; chez Monge, Carnot, Poncelet, elle vaut pour des méthodes, des procédures ou des raisonnements. En adoptant une telle stratégie argumentative, Cournot sur-interprète très souvent les auteurs qu'il cite, ce que nous signalerons dans notre commentaire.

Cournot, héritier de Poincaré

Combinaisons, ordre et syntactique en 1843

Le premier chapitre de l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* est consacré aux notions de combinaison et d'ordre⁶⁹. Pour Cournot, la combinaison est l'une des idées abstraites les « plus générales et [les] plus simples⁷⁰ ». Son application n'est pas limitée aux sciences mathématiques : « Au fond, toute synthèse scientifique s'opère par une suite de combinaisons de certains principes ou faits primordiaux. Sous ce point de vue, la logique, la grammaire générale, la chimie relèvent de la syntactique aussi bien que l'algèbre⁷¹ ». Cournot identifie ici théorie des combinaisons et syntactique, qu'il relie aux « Allemands »⁷².

Après cette définition très générale de la syntactique, Cournot semble limiter la théorie des combinaisons à des problèmes de dénombrement. La notion d'ordre intervient dans le cas des combinaisons ordonnées : si a et b désignent deux objets, alors ils existe deux combinaisons ordonnées possibles (ab et ba) mais une seule combinaison (ab et ba sont alors équivalents). En guise d'application, il calcule le nombre de combinaisons et de combinaisons ordonnées possibles entre n objets. Il justifie l'introduction de ce nouveau vocabulaire par l'inadéquation entre les dénominations usuelles et les phénomènes en jeu⁷³. Il définit enfin une permutation comme le passage d'une combinaison ordonnée à une autre.

En restreignant les combinaisons et l'ordre à des questions de dénombrement, Cournot adopte une approche finalement moins générale que celle de Poincaré. Mais dès 1847, Cournot montre à l'instar de Poincaré l'importance de l'ordre en théorie des nombres, en algèbre et en géométrie.

Ordre périodique, théorie des nombres et géométrie

En effet, dès le premier chapitre de *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, Cournot étudie les liens entre théorie des nombres et

69. À partir des années 1830, les objets liés à la combinatoire – comme les combinaisons et les permutations – sont régulièrement traités dans les manuels d'algèbre et font l'objet d'articles dans le *Journal de Liouville* à partir de 1836 et dans les *Nouvelles annales de mathématiques* à partir de 1842. Voir EHRHARDT, 2012, p. 47 sq.

70. COURNOT, 1843, p. 1.

71. COURNOT, 1843, p. 2.

72. C'est le seul endroit où Cournot évoque conjointement syntactique et savants allemands. Il est difficile de savoir si Cournot a réellement eu accès aux travaux originaux de l'école combinatoire allemande ou s'il s'appuie uniquement sur des allusions de Lacroix (MARTIN, 1996b).

73. COURNOT, 1843, p. 7.

théorie de l'ordre. À partir de la définition abstraite du nombre vu comme « un groupe d'unités décomposables en d'autres groupes⁷⁴ », il introduit les idées d'addition, de soustraction, de multiple, de diviseur, de nombre premier, de résidu, etc. Puis il affirme en général :

« 4. Pour mettre de l'ordre dans tout assemblage d'objets individuels, pour les classer d'après leurs rapports naturels ou d'après certaines vues de notre esprit, l'on est toujours conduit à former d'abord certains groupes d'individus ou d'unités, puis à former avec ces premiers groupes des groupes supérieurs ou de second ordre, avec les groupes de second ordre des groupes de troisième ordre, et ainsi de suite⁷⁵. »

La ressemblance entre cette formule et certains procédés utilisés par Poincaré est frappante. Il en va de même lorsqu'il met en exergue les notions de nombre, d'ordre et de combinaison : « À côté de l'idée de nombre se placent dans l'entendement des idées non moins générales, non moins abstraites, non moins nécessaires de combinaison et d'ordre⁷⁶. » Chez Cournot, le lien entre ordre et combinaison reste ambivalent : ces deux notions, non confondues, sont néanmoins équivalentes sous un certain rapport. Il illustre cette idée en proposant par exemple deux preuves de la commutativité de la multiplication, fondées respectivement sur la théorie des combinaisons et sur la théorie de l'ordre.

Si les méthodes précédentes font encore appel à des procédés de dénombrement, il n'en est rien des raisonnements dépendant de ce que Cournot appelle l'« ordre périodique⁷⁷ ». Dans ce cas, il part de suites périodiques *abcde abcde, ...* qu'il transforme en considérant les lettres de *h* en *h* ($h=1, 2, 3, 4$). Ainsi : « Beaucoup de théorèmes d'arithmétique peuvent être élégamment démontrés en faveur de rapprochements de ce genre, entre les propriétés des nombres et les propriétés de l'ordre périodique⁷⁸. » Il se réfère ici explicitement aux « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres » de Poincaré.

Il évoque également l'ordre périodique dans le chapitre XII⁷⁹ : la notion d'ordre y est attachée au partage du cercle en *n* parties égales. Cournot met en exergue les liens existants entre partage du cercle, équations algébriques, théorie des nombres et théorie de l'ordre et des combinaisons. Pour illustrer son propos, il s'appuie sur la configuration de *n* points disposés régulièrement en cercle, qui constitue déjà chez Poincaré la représentation graphique par excellence pour la théorie de l'ordre.

74. COURNOT, 1847, p. 6.

75. COURNOT, 1847, p. 6.

76. COURNOT, 1847, p. 13.

77. COURNOT, 1847, p. 19.

78. COURNOT, 1847, p. 22.

79. COURNOT, 1847, p. 255-258.

Ordre et algèbre

Cournot met également en avant la théorie de l'ordre dans son quatrième chapitre, consacré à « l'algèbre et [...] ses rapports avec la théorie de l'ordre⁸⁰ ». Cournot commence par s'interroger sur la possibilité de définir l'algèbre⁸¹ ; il reviendra d'ailleurs sur cette question lorsqu'il discutera la nature des quantités négatives et imaginaires par exemple. Partant du principe que les définitions existantes ne permettent de connaître ni l'objet de l'algèbre, ni son rapport aux autres branches des mathématiques, il s'appuie sur les « indications lumineuses⁸² » de Poinsoy : « Suivant M. Poinsoy, l'algèbre est la science de l'ordre : idée fine et profonde, mais qui a besoin de commentaires, et que l'auteur lui-même, dans un de ses derniers écrits, a lucidement commentée⁸³ ». Il illustre cette affirmation en reprenant les définitions d'« algèbre ordinaire » et d'« algèbre supérieure » dues à Poinsoy en 1845. Ici, Cournot identifie algèbre et « science de l'ordre » et il attribue d'abord de manière erronée cette position à Poinsoy. Cournot se corrige ensuite : « l'algèbre est la science de l'ordre, ou plutôt procède de la science de l'ordre⁸⁴ ». Cette distinction est importante dans la pensée de Cournot : la science de l'ordre ne peut pas se réduire à l'algèbre puisqu'elle doit pouvoir s'étendre à d'autres branches des mathématiques.

Pour Cournot, la difficulté à définir l'algèbre est inhérente à son évolution : elle a d'abord joué le rôle de « langue conventionnelle⁸⁵ ». Cournot semble ici faire allusion à Condillac, qui définit l'algèbre comme la langue des mathématiques dans sa *Langue des calculs* en 1798. Dès 1825, dans son compte-rendu du « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres » de Poinsoy, Cournot relève l'insuffisance de la conception de l'algèbre par Condillac :

« [Poinsoy] a fait voir comment la multiplicité des valeurs dont un radical algébrique est susceptible, constituait l'un des caractères propres de l'algèbre, et en faisait une science indépendante, non pas seulement une *arithmétique universelle*, comme l'appelait Newton, ou une *langue des calculs*, ainsi que le voulait Condillac⁸⁶. »

Cournot estime que l'algèbre a progressivement acquis un objet propre : la généralisation de principes valables dans des cas particuliers (une certaine catégorie de nombres par exemple). Pour illustrer son propos, il s'appuie notamment sur la formule du binôme de Newton pour un exposant quelconque entier naturel⁸⁷ m et il note que

80. COURNOT, 1847, p. 59.

81. Sur la question de la définition de l'algèbre au XIX^e siècle, nous renvoyons à : BRECHENMACHER & EHRHARDT, 2010 ; EHRHARDT, 2011, ch. 2 ; EHRHARDT, 2012, ch. 2.

82. COURNOT, 1847, p. 62.

83. COURNOT, 1847, p. 61.

84. COURNOT, 1847, p. 66.

85. COURNOT, 1847, p. 364.

86. COURNOT, 1825, p. 144.

87. Cournot évoque « une formule générale, applicable à toutes les valeurs de l'exposant m », mais il semble se limiter aux exposants entiers naturels.

les seuls « caractères » de la multiplication en jeu sont la distributivité et la commutativité. Ainsi :

« Il en résulte que toute combinaison ou opération offrant ces caractères généraux, conduira à une formule soumise à la même loi, parce qu'en effet la loi ne dépend point de la nature spéciale de l'opération, ou de l'idée accessoire de multiplication qui vient s'associer, dans les éléments d'arithmétique ou d'algèbre, à l'idée fondamentale de combinaison. Cet exemple, si élémentaire et si connu, suffit pour faire entendre en quel sens l'algèbre est la science de l'ordre, ou plutôt procède de la science de l'ordre : si bien que l'élégance des formules algébriques consiste à mettre, par suite d'un choix heureux de notations, la loi des combinaisons et de l'ordre dans la plus grande évidence⁸⁸. »

Comme Poinot, Cournot insiste ici sur la prise en compte des premiers principes à l'œuvre dans une formule et sur l'importance des notions d'ordre et de combinaison en algèbre⁸⁹. Finalement, cette évolution de la nature de l'algèbre dans le temps justifie les difficultés rencontrées pour la définir de manière universelle⁹⁰. Cette remarque de Cournot pourrait également s'appliquer aux notions d'ordre et de syntactique, qui posent aussi un problème de définition au vu de leurs divers niveaux d'utilisation chez Cournot.

« Considérations générales sur le système des mathématiques »

Selon Cournot, la question de la nature de l'algèbre est cruciale en philosophie des mathématiques. Il y revient d'ailleurs dans le dernier chapitre intitulé « Considérations générales sur le système des mathématiques ». Il se demande alors comment classer les sciences mathématiques. Il distingue tout d'abord les mathématiques et les sciences de la nature. Les mathématiques désignent un « système de connaissances scientifiques⁹¹ » établies indépendamment de l'expérience, tout en pouvant être appliquées à l'expérience. Pour lui, la « philosophie des mathématiques » consiste à déterminer les « conditions de la construction rationnelle et régulière des mathématiques⁹² ».

La suite de son argumentation est motivée par le paradoxe suivant : « les mathématiques, sciences exactes par excellence, sont du nombre de celles où il y a le plus de vague et d'indécision dans la classification des parties, où la plupart des termes

88. COURNOT, 1847, p. 66.

89. Là encore, lorsque Cournot propose de mettre de côté la « nature spéciale de l'opération », la référence à l'algèbre symbolique anglaise semble s'imposer. Celle-ci n'est cependant une source d'inspiration ni pour Cournot, ni pour Poinot. De plus, comme nous le verrons plus loin, la philosophie de Cournot ne s'accorde pas avec celle de John Locke, qui inspire le réseau des algébristes anglais liés à Cambridge (voir à ce sujet DURAND-RICHARD, 1990).

90. COURNOT, 1847, p. 67.

91. COURNOT, 1847, p. 355.

92. COURNOT, 1847, p. 366. Notons que ces deux arguments sont d'inspiration kantienne ; une première traduction en français par Tissot de la *Critique de la raison pure* paraît d'ailleurs en 1835. Nous verrons cependant dans le prochain paragraphe que Cournot est réaliste et qu'il sur-interprète le kantisme en y voyant un idéalisme absolu.

qui l'expriment se prennent, tantôt dans un sens plus large, tantôt dans un sens plus rétréci⁹³ ». Un exemple en a été fourni précédemment avec l'algèbre. Selon Cournot, les frontières entre les branches des mathématiques ne sont pas fixées une fois pour toutes. De plus, les rapports mutuels qu'elles entretiennent sont trop complexes pour que l'on puisse les compartimenter⁹⁴. Par exemple, « la théorie des nombres relève de celle de l'ordre et des combinaisons ; et, sous un autre aspect, le calcul des combinaisons est une application de l'arithmétique⁹⁵.

Pourtant, il ne s'en tient pas à cette attitude sceptique. Après avoir énuméré les idées sur lesquelles portent les sciences mathématiques, à savoir « les idées de nombre, de grandeur, d'ordre, de combinaison, de chances, d'étendue, de situation, de figure, de ligne, de surface, d'inclinaison⁹⁶ », il dégage certains caractères communs qui permettent de les ranger en deux catégories : la grandeur et l'ordre ou la situation. À ce stade, Cournot reconstruit artificiellement une généalogie philosophique fondée sur Leibniz et Descartes afin de mettre en exergue la vision des mathématiques développée par Poincaré :

« De là une conception philosophique clairement exprimée par Descartes, que Leibniz n'a point négligée, et qu'en dernier lieu M. Poincaré a reproduite avec des développements très dignes de fixer l'attention des géomètres, conception d'après laquelle les spéculations mathématiques auraient pour caractère commun et essentiel de se rattacher à deux idées ou catégories fondamentales : l'idée d'ordre, sous laquelle on peut ranger comme autant de variétés ou de modifications spécifiques, les idées de *situation*, de *configuration*, de *forme* et de *combinaison* ; et l'idée de grandeur, qui implique celles de *quantité*, de *proportion* et de *mesure*⁹⁷. »

Mettant sur le même plan ses emprunts à Descartes, Leibniz et Poincaré sur la grandeur et l'ordre, il fait donc comme si ces notions étaient définies et utilisées de manière identique chez ces trois auteurs, ce qui n'est pas le cas.

Cournot n'est cependant pas totalement convaincu par les arguments de Poincaré. En effet, le « dualisme » entre ordre et grandeur que l'on trouve chez Poincaré empêche d'unifier les mathématiques. Invoquant Leibniz dont il fait librement l'usage, Cournot suggère qu'une telle unité pourrait être rétablie en plaçant les mathématiques sous la seule juridiction de l'ordre. Le conditionnel est ici de mise puisqu'il ajoute aussitôt : « nous ne nous proposons pas de faire de telles excursions dans la région des abstractions de la métaphysique, et si loin du terrain des sciences positives⁹⁸ ».

93. COURNOT, 1847, p. 369.

94. Cournot note d'ailleurs que même si l'on pouvait compartimenter les domaines mathématiques, « l'espace, avec ses trois dimensions, ne suffirait pas pour nous donner une image sensible des rapports très-multipliés, ou même infiniment multipliés, qu'ont entre elles les diverses parties d'un système, objet de l'intuition intellectuelle ; et ceci s'observe notamment pour le système des mathématiques » (COURNOT, 1847, p. 370).

95. COURNOT, 1847, p. 370.

96. COURNOT, 1847, p. 371.

97. COURNOT, 1847, p. 372-373.

98. COURNOT, 1847, p. 374.

Cette analyse montre que Cournot emprunte à Poincaré différents aspects de la notion d'ordre. D'une part, Cournot revient à plusieurs reprises sur les correspondances entre algèbre, géométrie et théorie des nombres *via* la notion d'ordre. Cette dernière est d'ailleurs appliquée à certains thèmes arithmétiques, géométriques (sous la forme d'un ordre périodique) et algébriques. D'autre part, Cournot se réfère à Poincaré lorsqu'il aborde la classification des sciences mathématiques. Cournot pointe cependant certaines limites dans la pensée de Poincaré en raison du dualisme ordre/grandeur.

Cournot interprète plus spécifiquement la catégorie d'ordre en fonction d'une philosophie de style réaliste, comme nous allons le voir en étudiant quelques passages de son *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique* (1851).

Une conception réaliste de l'ordre

Dans la préface de l'*Essai*, Cournot indique que ce « livre de pure philosophie⁹⁹ » est un projet initié il y a plus de vingt ans. Une partie de sa rédaction est donc contemporaine de l'ouvrage de 1847.

Dans le chapitre VI de l'*Essai*, Cournot traite une question « classique » de philosophie : déterminer si l'ordre est une construction de l'esprit ou s'il existe indépendamment de nous. Il défend alors une thèse *réaliste* et il cherche à se démarquer de Kant qu'il considère abusivement comme un idéaliste absolu :

« Si l'ordre que nous observons dans les phénomènes n'était pas l'ordre qui s'y trouve, mais l'ordre qu'y mettent nos facultés, comme le voulait Kant, il n'y aurait plus de critique possible de nos facultés, et nous tomberions tous, avec ce grand logicien, dans le scepticisme spéculatif le plus absolu¹⁰⁰. »

L'ordre n'est donc pas pour Cournot une simple construction de notre esprit. Ce réalisme se retrouve dans ses thèses sur les mathématiques qu'il refuse de réduire à un simple langage¹⁰¹.

Pour Cournot, il existe un ordre dans les choses et l'objectif des sciences consiste à harmoniser cet ordre avec celui que nous construisons. Cet argument va de pair avec la thèse selon laquelle l'idée d'ordre constitue une catégorie fondamentale de pensée :

99. COURNOT, 1851, p. I.

100. COURNOT, 1851, p. 179.

101. Cela confirme sur un plan philosophique nos réserves précédentes quant à un lien possible entre l'algèbre symbolique de Peacock et l'algèbre supérieure de Poincaré et Cournot. Les présupposés philosophiques de Cournot et Peacock sont radicalement différents. L'algèbre symbolique de Peacock est liée à une conception de l'abstraction et du langage inspirée de Locke (voir DURAND-RICHARD, 2001, p. 333). Par contraste, Cournot soutient la thèse suivante : « On doit accorder qu'il existe dans les choses un ordre indépendant de la manière de les concevoir, et que, s'il n'y avait pas harmonie entre l'ordre de réception par nos facultés et l'ordre inhérent aux objets représentés, il ne pourrait arriver que par un hasard infiniment peu probable que ces deux ordres s'ajustassent de manière à produire un ordre simple ou un enchaînement régulier dans le système de représentations. » (COURNOT, 1851, p. 179).

« L'idée de l'ordre a cela de singulier et d'éminent, qu'elle porte en elle-même sa justification ou son contrôle. Pour savoir si nos autres facultés nous trompent ou ne nous trompent pas, nous examinons si les notions qu'elles nous donnent s'enchaînent ou ne s'enchaînent pas suivant un ordre qui satisfasse à la raison ; mais l'idée de l'ordre ne peut être donnée que par l'ordre même¹⁰². »

De plus, Cournot développe en 1851 une conception de l'abstraction très différente de celle défendue par Locke qui inspire les algébristes anglais¹⁰³. Cournot veut dépasser dans le chapitre XI de l'*Essai* une définition commune de l'abstraction entendue comme acte d'isoler les propriétés d'un objet afin de les étudier à part. Pour Cournot, il existe un autre « type » d'abstraction qui revient à distinguer « par la pensée des éléments indépendants les uns des autres, quoique la sensation les confonde¹⁰⁴ ».

Il différencie ensuite les abstractions logique et rationnelle¹⁰⁵. Une abstraction logique consiste à séparer artificiellement des phénomènes qui dépendent réellement les uns des autres. Une abstraction rationnelle dépend en revanche de la nature des choses. Pour Cournot, les sciences mathématiques sont fondées sur des abstractions rationnelles, ce qui confirme sa vision réaliste des mathématiques¹⁰⁶.

Il montre ensuite qu'il faut distinguer plusieurs niveaux d'abstraction. La distinction concret/abstrait est donc relative et elle dépend du niveau d'abstraction choisi : « il est à remarquer que plusieurs de ces idées, malgré leur haut niveau de généralité et d'abstraction, ne sont que des formes particulières, et en quelque sorte des espèces concrètes d'idées encore plus abstraites et plus générales¹⁰⁷ ». L'idée d'ordre relève selon lui d'un genre supérieur d'abstraction : il s'agit d'une catégorie fondamentale de pensée qui se conditionne elle-même. Comme le montre Thierry Martin, la conception cournotienne de l'abstraction permet de comprendre le caractère surplombant qu'il assigne à la notion d'ordre dans son système de connaissances¹⁰⁸. Nous allons même montrer que l'ordre conditionne la classification des sciences établie par Cournot en 1861.

Vers un système de connaissances fondé sur les notions d'ordre et de forme

Plusieurs passages de l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (1843), de *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* (1847) et de l'*Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique* (1851) indiquent que le projet de Cournot dépasse le cadre des sciences mathématiques. Par exemple, en 1847, il estime que la philosophie doit permettre de déterminer « les conditions de la construction du système général des connaissances humaines¹⁰⁹ ». Le projet cournotien d'un tel système trouve son

102. COURNOT, 1851, p. 180.

103. DURAND-RICHARD, 2001, p. 332.

104. COURNOT, 1851, p. 319.

105. COURNOT, 1851, p. 322.

106. COURNOT, 1851, p. 322-323.

107. COURNOT, 1851, p. 327.

108. MARTIN, 1995, p. 116 sq.

109. COURNOT, 1847, p. 363.

aboutissement dans son *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* (1861).

L'ordre apparaît alors chez Cournot comme ayant une réalité indépendante de nous – il garantit leur objectivité à nos connaissances – et comme une catégorie fondamentale qui permet leur classification. Il se sert ainsi de cette notion pour résoudre deux difficultés philosophiques : celle du fondement objectif de nos connaissances et celle de leur distribution dans un système qui va des sciences mathématiques à l'étude des sociétés humaines¹¹⁰. Le terme système a ici son importance dans la mesure où Cournot ne se contente pas d'énumérer différentes sciences, il les classe selon un ordre prescrit¹¹¹. Il commence par les sciences logico-mathématiques (livre I), puis il aborde la physique (livre II), les sciences du vivant (livre III), les sociétés humaines (livre IV), pour finir avec les civilisations et l'histoire (livre V).

Dans le premier chapitre, Cournot annonce que « la forme précède les autres catégories, [et qu'] elle les domine toutes¹¹² ». Il s'agit d'une catégorie constitutive de notre entendement que Cournot ne définit pas tellement elle semble s'imposer dans tout acte d'intellection. Il propose ensuite une série d'exemples qui débordent largement des sciences logico-mathématiques puisqu'ils vont des actes législatifs au règne végétal¹¹³. Puis, il identifie les idées de forme et d'ordre sans préciser leur sens. Pour justifier leur statut fondamental, Cournot affirme qu'elles conditionnent le développement de toute science : « Nous ne connaissons scientifiquement en toute chose que l'ordre et la forme : les idées qui s'y rattachent étant le principe, le moyen et la fin de toute explication scientifique¹¹⁴. »

Notons que Cournot envisage l'ordre et la forme à deux niveaux : comme *conditions* à des connaissances et comme *objet* de connaissances. Selon le premier point de vue, l'ordre et la forme s'étendent à tout savoir scientifique. Selon le second point de vue, l'ordre et la forme constituent l'objet des sciences formelles ou logico-mathématiques auxquelles il assigne un statut privilégié dans son système :

« On conçoit bien, d'après tout cela, que, dans un enchaînement systématique de connaissances humaines, les spéculations sur l'ordre et la forme, les sciences que nous appelons formelles parce que l'ordre et la forme y sont non seulement la condition, mais l'objet même de la construction scientifique, doivent nécessairement précéder toutes les autres ; et que celles-ci à leur tour devront être rangées, de manière à faire passer d'abord celles qui tiennent de plus près, par l'ensemble de leurs caractères, aux sciences placées en tête de la série. Il ne s'agit pas seulement d'une disposition à mettre dans un tableau encyclopédique ; il s'agit de l'ordre logique des études¹¹⁵. »

110. COURNOT, 1861.

111. COURNOT, 1861, p. XIV.

112. COURNOT, 1861, p. 1.

113. Nous verrons dans le troisième chapitre que Bourgoin est très sensible aux motifs végétaux dans l'art ornemental qu'il fait dépendre des mêmes catégories que Cournot.

114. COURNOT, 1861, p. 3.

115. COURNOT, 1861, p. 8.

Les sciences logiques et mathématiques conditionnent donc la physique et la chimie, qui conditionnent elles-mêmes la médecine, etc., la réciproque étant fausse. C'est donc en vertu d'un ordre logique dans son système de connaissances que Cournot commence par les sciences logico-mathématiques.

Cournot précise et organise les différents domaines que recouvrent les sciences logico-mathématiques à partir du chapitre II. Il évoque tout d'abord la logique et l'arithmétique. Il aborde ensuite la géométrie (chapitre III). Les chapitres IV à VII sont finalement consacrés à la cinématique, au calcul infinitésimal, aux idées de hasard et de probabilité. Ainsi, Cournot prétend pouvoir classer les mathématiques sans nier la complexité des rapports entre ses diverses branches.

Pour ce faire, il énumère certaines idées et décrit leur enchaînement pour justifier sa classification. Il commence par l'idée de nombre : « Parmi les idées que la nature même des choses nous suggère et qui ne tiennent pas seulement à notre manière de les concevoir, il n'y en a pas de plus simple, de plus claire, de plus générale que l'idée de nombre¹¹⁶. » Ce passage peut surprendre puisque Cournot suggère à son lecteur que l'idée de nombre serait, en quelque sorte, la plus fondamentale. Cournot ajoute cependant qu'elle n'est pas auto-suffisante : elle suppose celle de « genre » et elle est « intimement unie à l'idée d'ordre¹¹⁷ ». Pour clarifier le second point qui nous intéresse ici, Cournot évoque la distinction entre nombres cardinaux et ordinaux. Il montre de manière plus précise que les idées d'ordre et de nombre se conditionnent mutuellement :

« Nous ne pouvons faire un dénombrement, qu'en comptant les objets dans un certain ordre, ni fixer un ordre que par une étiquette numérique ou par des étiquettes, telles que les lettres de l'alphabet ou les notes de l'échelle musicale, dont nous connaissons déjà le numéro d'ordre¹¹⁸. »

Cournot évoque ensuite l'idée de combinaison pour en venir à la syntactique comme science des combinaisons et de l'ordre. Il montre alors les liens étroits entre la syntactique et l'arithmétique, déjà évoqués dans l'ouvrage de 1843. En fait, les idées de nombre et de combinaison relèvent de ce que Cournot appelle l'ordre *intelligible* qu'il différencie de l'ordre *phénoménal*. Cette distinction structure sa classification des sciences formelles.

En effet, les sciences logiques – syntactique comprise – et l'arithmétique relèvent exclusivement de l'ordre intelligible. Pour sa part, l'ordre phénoménal implique les idées d'espace et de temps qui *dépendent* donc de l'ordre en général. Ainsi, la géométrie, que Cournot aborde dans le chapitre III, repose sur l'idée d'espace et elle relève en conséquence de l'ordre phénoménal. C'est également le cas de la cinématique qui suppose de plus l'idée de temps. Cette classification des sciences mathématiques est conforme au double statut qu'il leur confère dès 1847 : à la fois sciences rationnelles et sciences positives. En effet, elles appartiennent pour partie à l'ordre phénoménal et

116. COURNOT, 1861, p. 11.

117. COURNOT, 1861, p. 12.

118. COURNOT, 1861, p. 12.

elles sont alors susceptibles de vérifications empiriques – c’est notamment le cas de la cinématique.

Une différence de taille sépare néanmoins le texte de 1847 de celui de 1861 : en 1847, Cournot soutenait qu’il n’est *a priori* pas évident de classer les diverses branches des mathématiques, tandis qu’en 1861, il propose un principe de classification des sciences logico-mathématiques.

Cette classification semble d’ailleurs rigidifier les correspondances subtiles entre l’algèbre et la géométrie qu’il avait mises en exergue en 1847 à la suite de Poinot. En outre, même si Cournot unifie les sciences mathématiques et logiques grâce aux catégories d’ordre et de forme, sa classification est traversée par une série de clivages entre l’ordre phénoménal et l’ordre intelligible, entre l’arithmétique et la géométrie, etc. Souvenons-nous que Cournot critiquait en 1847 le dualisme entre mathématiques des grandeurs et mathématiques de l’ordre chez Poinot. Ce dualisme compromettait aux yeux de Cournot l’unité des mathématiques. Cournot opte finalement pour la distinction ordre phénoménal/ordre intelligible en 1861 dans sa classification des sciences formelles. Il s’appuie sur une autre forme de dualisme, ne répondant donc pas clairement à l’objection qu’il avait adressée à Poinot en 1847. Toujours est-il que le tableau qui résume cette classification servira de source d’inspiration essentielle au théoricien de l’ornement Jules Bourgoïn lorsqu’il proposera sa propre classification des motifs ornementaux.

ART ORNEMENTAL ET THÉORIE DE L’ORDRE : BOURGOÏN

La théorie de l’ordre de Cournot connaît une fortune au-delà des sciences comme en attestent les écrits de l’architecte Jules Bourgoïn (1838-1908) sur l’art ornemental. Dès 1873, ce dernier fait jouer un rôle fondamental aux notions d’ordre et de combinaison, empruntées à Cournot, pour parvenir à un système de motifs ornementaux appelé théorie ou grammaire des ornements.

Rapport aux œuvres de Cournot

Bourgoïn reçoit une formation en architecture à l’école impériale des Beaux-Arts¹¹⁹ à la fin des années 1850. Les dessins exécutés lors de sa formation suggèrent qu’il a suivi les cours de Victor-Marie Ruprich-Robert en art ornemental à l’école spéciale de dessin¹²⁰. Bourgoïn s’intéresse d’ailleurs à des aspects mathématiques d’un niveau relativement élevé, notamment quand il se réfère à Cournot. L’analyse de ses notes de lecture conservées dans le fonds d’archives à l’Institut National d’Histoire de l’Art¹²¹ montre également que Bourgoïn a étudié de nombreux ouvrages mathématiques requérant une réelle

119. Voir à ce propos les travaux de Mercedes Volait, en particulier : VOLAIT, 2009. On peut également consulter une brève synthèse du parcours de Bourgoïn dans BIDEAULT, 2012, p. 4.

120. Pour une analyse des cours dispensés par Ruprich-Robert dans ce qui sera la future Ecole des Arts Décoratifs de Paris, nous renvoyons à D’ENFERT, 2004, p. 87-88.

121. Nous avons pris connaissance du contenu de ces archives *via* les travaux d’Estelle Thibault notamment. Avec son aide précieuse, nous avons ainsi pu accéder à de nombreuses notes de lecture de Bourgoïn, qui ont alimenté notre réflexion sur son œuvre.

culture mathématique. Non seulement Bourgoïn a suivi des cours de géométrie et de statique dispensés par Isidore Francœur – le fils de Louis-Benjamin Francœur – dans le cadre de sa formation à l'École des Beaux-Arts, mais il semble également avoir profité d'un enseignement en algèbre qui ne fait pas partie du *curriculum* habituel des étudiants de cette École : des notes de la main de Bourgoïn sont vraisemblablement issues d'un cours d'algèbre dont les thématiques abordées correspondent au contenu habituel d'un cours de mathématiques spéciales, à savoir des notions de combinatoire, la formule du binôme de Newton et des applications aux piles de boulets par exemple¹²². Il est donc possible que Bourgoïn ait également assisté à des cours de mathématiques professés par Francœur au collège Chaptal à la même époque.

Au début de ses *Études architectoniques et graphiques*¹²³, Bourgoïn précise qu'il a étudié Cournot dès sa première mission en Egypte¹²⁴, soit entre 1863 et 1866. Il décrit ensuite la genèse de sa *Théorie de l'ornement* initialement intitulée *L'ordre et la forme*¹²⁵ en hommage à Cournot. Il la publie finalement en 1873, en même temps que les *Arts arabes*.

Dès 1873, Bourgoïn entend classer les motifs ornementaux en les reliant à certains principes géométriques. Il fait allusion à Cournot dans sa définition des arts arabes :

« On peut considérer l'art arabe comme étant un système de décoration fondé tout entier sur l'ordre et la forme géométriques, et qui n'emprunte rien ou presque rien à l'observation de la nature¹²⁶. »

En associant l'ordre et la forme, Bourgoïn renvoie au premier chapitre du *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* de Cournot. Il insiste sur l'importance des figures géométriques dans l'art ornemental arabe, montrant que celui-ci n'a rien de naturaliste. Il s'appuie en effet sur une théorie élémentaire des polygones et des pavages du plan avant de présenter les ornements observés lors de sa mission.

Les emprunts à Cournot sont plus explicites dans sa *Théorie de l'ornement*. Dès l'introduction, Bourgoïn se place sous son autorité :

« Nous avons eu le bonheur d'étudier à loisir, un philosophe éminent dont les œuvres fortes et substantielles nous ont fourni un guide sûr et éprouvé qui nous permît de mettre les choses en leur place et de les contempler sous le jour qui convient. Voilà ce que nous y avons appris, disons-nous, mais il ne faudra point attribuer à notre maître, M. Cournot, les erreurs et les fautes qui sont nôtres¹²⁷. »

122. Nous renvoyons notamment à EHRHARDT, 2012, et à la table des matières du *Traité élémentaire d'algèbre* de MAYER et CHOQUET, 1836, qui y est reproduite.

123. BOURGOIN, 1899, p. 26 et suiv.

124. Lors de cette mission, Bourgoïn exécute de nombreux dessins qui constitueront la matière des *Arts arabes* (1873).

125. Il s'agissait au départ de la première partie d'un vaste projet sur l'art ornemental qu'il développera dans des publications ultérieures, voir BOURGOIN, 1899, p. 27-28.

126. BOURGOIN, 1873a, p. iv.

127. BOURGOIN, 1873b, p. ix-x.

Plus précisément, Bourgoïn souhaite établir une *grammaire générale* des ornements, c'est-à-dire un système portant sur des motifs élémentaires et les règles de leurs combinaisons. Cette grammaire est en partie inspirée de la *syntactique* de Cournot que Bourgoïn cite explicitement en quatrième partie¹²⁸. Estelle Thibault a d'ailleurs récemment montré que les planches préparatoires à cet ouvrage reflètent une approche combinatoire :

« Une première série d'une vingtaine de planches organise les exemples selon une disposition encore provisoire, et inclut des modèles absents de l'ouvrage final [...]. Dans les compositions les plus complexes, les dessins cherchent à mettre en évidence les motifs de base (fig. 6.2). Une seconde série de dix-neuf planches, de format plus grand, se rapproche de la version publiée. Par la confrontation des exemples, Bourgoïn veut dégager des structures formelles communes ou montrer différentes variations possibles à partir d'un même motif¹²⁹. »

Cette référence à Cournot apparaît également dans la *Grammaire élémentaire de l'ornement* de Bourgoïn (1880), version remaniée de sa *Théorie de l'ornement*, enrichie par ses activités d'enseignement à l'École des Beaux-Arts en 1879. Bourgoïn cite le *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* en préambule à sa *Grammaire*¹³⁰. Plus tardivement, les *Études architectoniques et graphiques* (premier tome 1899, second tome 1901) sont même dédiées à la mémoire de Cournot. Enfin, Bourgoïn développe au début du xx^e siècle une combinatoire formelle en dessin qu'il appelle la *Graphique*. Elle fera l'objet d'un ouvrage en trois volumes publiés en 1905. Avec ce projet, il réalise un analogue de la syntactique cournotienne dans les arts graphiques. Ainsi, la référence à Cournot traverse l'ensemble des publications de Bourgoïn entre 1873 et 1905.

Ce dernier puise l'essentiel de ses sources sur l'ordre et la forme dans le *Traité* de Cournot de 1861 qui lui sert de modèle. Bourgoïn s'inspire dans sa *Théorie de l'ornement* (1873) de la classification cournotienne des sciences logico-mathématiques qu'il étend aux arts. Les passages plus mathématiques de la *Théorie de l'ornement* sont généralement inspirés de l'*Exposition de la théorie des chances et des probabilités* et *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* de Cournot. Bourgoïn connaît donc dès le début des années 1870 les écrits tant mathématiques que philosophiques dans lesquels Cournot thématise la notion d'ordre ; ils lui offrent les ressources théoriques nécessaires à l'élaboration de son système d'ornements.

La *Théorie de l'ornement*, qui est l'ouvrage le plus emblématique des emprunts de Bourgoïn à Cournot sur l'ordre, est divisée en quatre parties. La première est consacrée à des préliminaires généraux sur l'ordre, la forme, le relief et la couleur. La seconde est intitulée « définitions et matériaux analytiques ». Elle porte sur les éléments arithmétiques, géométriques et plastiques qui président à la construction d'un ornement.

128. BOURGOIN, 1873b, p. 311 *sq.*

129. THIBAUT, 2012a, p. 14.

130. BOURGOIN, 1880.

La troisième est dévolue à l'agencement entre ornements – séries, frises, réseaux, etc. Enfin, comme nous l'avons signalé, la dernière partie est directement inspirée de la syntactique de Cournot. Bourgoïn y paraphrase le début de *L'exposition de la théorie des chances* à ceci près qu'il remplace la chimie par la partie morphologique des sciences naturelles qui, d'après ses notes de lecture, suscite son intérêt¹³¹ :

« L'idée abstraite de combinaison, très générale et très simple, envisagée dans sa pureté abstraite, donne lieu à une théorie purement rationnelle, qui a des connexions avec les sciences mathématiques et avec les sciences logiques et des applications particulières dans la grammaire générale, dans la partie morphologique des sciences naturelle¹³². »

À l'instar de Cournot, Bourgoïn mentionne la grammaire générale comme branche d'une vaste théorie des combinaisons. Précisément, Bourgoïn a en vue une grammaire générale des ornements qui surplomberait chaque style ornemental. Malgré ces rapprochements, nous allons voir que Bourgoïn interprète les notions de forme et d'ordre en fonction de sa pratique du dessin et de sa classification des motifs ornementaux, alors que Cournot les envisage avant tout en rapport avec les sciences.

Ordre et forme dans la théorie de l'ornement de Bourgoïn

Le chapitre II de la première partie de la *Théorie de l'ornement* permet de comprendre comment Bourgoïn conceptualise l'ordre. Il interprète immédiatement cette notion d'un point de vue esthétique en partant de l'idée de forme :

« L'idée usuelle de la *forme* correspond à toutes les formes naturelles, ouvrées ou inventionnelles, qui ont trois dimensions. Par extension, on appelle du nom de forme l'espace plan délimité, la figure ou l'à-plat terminé par des contours, et par suite ces contours eux-mêmes, c'est-à-dire les lignes ou les délinéations. Cette figure est la représentation, l'image ou le dessin d'une forme naturelle ou ouvrée, ou bien est purement une figuration inventionnelle¹³³. »

Il relie la forme à la pratique du dessin. En outre, contrairement à Cournot qui va jusqu'à identifier ordre et forme, Bourgoïn les distingue : l'ordre intervient dans l'agencement des parties d'une forme et il commande l'arrangement de plusieurs formes (ornementales). Il ajoute :

« L'idée de l'ordre, essentiellement indépendante de l'idée de forme (en ce sens qu'elle est plus abstraite), a cependant avec celle-ci une connexion étroite. Cette relation est telle, le plus souvent, que l'idée de l'ordre et la notion de la forme sont inséparables et se présentent simultanément à l'esprit¹³⁴. »

131. En particulier, Bourgoïn étudie les ouvrages du botaniste Charles Fermond (1810-1882).

132. BOURGOIN, 1873b, p. 311.

133. BOURGOIN, 1873b, p. 19.

134. BOURGOIN, 1873b, p. 21.

Bourgoin se réfère ensuite plus spécialement à la syntactique de Cournot :

« Si l'on associe à l'idée pure de combinaison, celles de certains rapports d'ordre et de situation, on a les *combinaisons ordonnées* où l'on tient compte, non seulement des éléments associés, mais de l'ordre dans lequel ils sont associés ou du rôle que joue chaque élément [...].

La *permutation* est l'opération par laquelle on substitue un arrangement à un autre, les choses arrangées restant les mêmes.

Tels sont les fondements rationnels de la syntactique ou de la science de l'ordre et des combinaisons dont les développements, exclusivement logiques ou mathématiques, doivent rester étrangers à ce livre ¹³⁵. »

À l'instar de Cournot, Bourgoin distingue une *combinaison* et une *combinaison ordonnée* ; il rappelle ainsi que Cournot envisage l'ordre dans le cadre d'une combinatoire. Bourgoin montre également comment les dispositions ornementales exemplifient l'idée de combinaison *ordonnée*. Pour ce faire, il utilise plusieurs formes d'écriture et de représentations. Il s'appuie ainsi sur des systèmes de lettres minuscules qu'il *permut*e pour décrire des combinaisons ordonnées de motifs le long d'une frise ¹³⁶. Dans le cas des pavages, Bourgoin s'appuie sur une classification des polygones réguliers qui, comme nous l'avons vu en première partie, alimentent les réflexions générales de Poinot sur l'ordre en algèbre, en arithmétique et en géométrie.

Arrêtons-nous plus spécialement sur les figures polygonales afin de dégager les liens entre Poinot et Bourgoin. Dès *Les Arts arabes*, Bourgoin rappelle les propriétés élémentaires des polygones réguliers. Il indique sommairement comment diviser une circonférence en *n* parties égales et construire certains polygones réguliers convexes élémentaires à la règle et au compas ¹³⁷. Il précise ensuite combien de polygones étoilés peuvent être engendrés à partir de polygones réguliers convexes ayant respectivement un nombre pair ou un nombre impair de côtés ¹³⁸. Il développe son propos sur les polygones dans la *Théorie de l'Ornement* ¹³⁹. Il souligne à ce propos les liens entre l'étude des polygones et certaines propriétés arithmétiques élémentaires.

Si Bourgoin a vraisemblablement pris connaissance des travaux de Poinot *via* sa lecture de Cournot, Estelle Thibault a établi que Bourgoin a consulté le « Mémoire sur les polygones et les polyèdres » de Poinot : il en a conservé des notes de lecture dans lesquelles il a recopié des passages entiers du texte de Poinot, sur la notion d'ordre, la théorie des polygones étoilés et la théorie des polyèdres. Il est frappant de constater que dès 1873, Bourgoin mentionne *d'un seul tenant* les rapports étroits entre la théorie

135. BOURGOIN, 1873b, p. 23.

136. Voir en particulier les dispositions sériées : BOURGOIN, 1873b, p. 218 et suiv.

137. BOURGOIN, 1873a, p. 3 et suiv. Plus tardivement, dans le second tome de ses *études architectoniques et graphiques* (BOURGOIN, 1901, p. 35-39), Bourgoin reproduit des passages entiers d'un ouvrage de géométrie élémentaire écrit par Felix Klein en 1895 et traduit en français l'année suivante (KLEIN 1896). Klein y aborde le problème de la construction des polygones réguliers à la règle et au compas qui est résolu par Gauss à la fin de ses *Recherches arithmétiques* (1801). La solution de Gauss suscite l'intérêt de Bourgoin.

138. BOURGOIN, 1873a, p. 8-11.

139. BOURGOIN, 1873b, p. 117-157.

des nombres, la géométrie et l'algèbre : « nous aurions pu nous étendre sur les relations curieuses qui existent entre la théorie des nombres, l'algèbre et la géométrie¹⁴⁰ ». Il fait davantage écho ici à Poinot qu'à Cournot. En effet, Poinot relie explicitement théorie des nombres, algèbre et géométrie à plusieurs reprises tandis que cette relation tripartite n'est qu'évoquée par Cournot.

Toujours est-il que Bourgoïn n'étudie pas les polygones en mathématicien. Il souligne avant tout leur importance dans la construction et la composition de motifs ornementaux. À la fin du chapitre XI, il revient sur l'exemplarité des formes polygonales dans les arts arabes : « on abandonnera aux mathématiciens ce qui, de ces matières, relève de la curiosité scientifique, et aux Orientaux, les développements souvent extraordinaires, qu'au seul point de vue purement ornemental on en peut tirer¹⁴¹ ». Cet argument traduit l'ambiguïté de son rapport aux sciences mathématiques dont il s'inspire pour établir sa théorie de l'ornement, tout en se gardant bien de réduire l'art ornemental à une science formelle.

Manuels de dessin linéaire, recueils d'ornements et grammaires d'ornements

Nous devons situer Bourgoïn par rapport à toute une littérature sur l'art ornemental afin de mieux comprendre en retour comment il se sert de la notion d'ordre empruntée à Cournot. Les ornements sont abordés dans les manuels de dessin linéaire¹⁴² et des recueils d'ornement ; à partir du milieu du XIX^e siècle, ils font l'objet d'une classification systématique dans des grammaires d'ornements. Nous allons voir que les ouvrages de Bourgoïn appartiennent à cette troisième catégorie d'ouvrages et qu'il s'oppose aussi bien aux manuels de dessin linéaire qu'aux recueils d'ornements.

Dès les *Arts arabes*, Bourgoïn précise les rapports entre dessin et géométrie dans l'enseignement des arts et métiers. Bourgoïn distingue la « géométrie descriptive », héritée de Monge, qu'il situe entre les sciences et l'industrie, et la « géométrie esthétique », à mi-chemin entre l'art et l'industrie. L'art ornemental relève selon Bourgoïn de la géométrie esthétique et il ne saurait être subordonné à la géométrie élémentaire :

« Il ne faut pas entendre que l'art est subordonné à la géométrie, ce qui serait absurde, ou ce qui n'est vrai qu'en thèse métaphysique ; mais il faut entendre que la géométrie esthétique, donnant la théorie des formes, comprend essentiellement tout ce qui dans l'art tient à l'*ordre* et à la *forme* envisagés dans leur pureté abstraite¹⁴³. »

Cet argument se retrouve à l'identique dans la *Théorie de l'ornement* et la *Grammaire élémentaire de l'ornement* (1880). Bourgoïn prend part ici aux débats sur l'enseignement du dessin en s'appuyant, comme nous allons le voir, sur l'autorité de Cournot.

140. BOURGOIN, 1873b, p. 157.

141. BOURGOIN, 1873b, p. 157.

142. Bourgoïn évoque explicitement le dessin linéaire au début de BOURGOIN, 1873b.

143. BOURGOIN, 1873a, p. VI.

De nombreux manuels consacrés à la géométrie pratique et au dessin linéaire paraissent au cours du XIX^e siècle, notamment sous l'impulsion de Louis-Benjamin Francœur¹⁴⁴. Le tracé d'ornements – notamment des pavages du plan – fait partie des exercices couramment abordés dans ces manuels¹⁴⁵. Les publications de Bourgoïn se situent à rebours de ces manuels. En effet, la *Théorie de l'ornement* ou la *Grammaire élémentaire* s'apparentent moins à des manuels qu'à des essais théoriques visant à légitimer l'art ornemental. En outre, Bourgoïn déconsidère le dessin linéaire. Selon lui, le dessin linéaire implique de réduire la pratique du dessin à des apprentissages scolaires fondés sur la géométrie élémentaire.

Ces critiques sont déjà présentes dans la *Théorie de l'ornement*. Bourgoïn va alors à l'encontre des thèses soutenues notamment par le sculpteur académique et théoricien de l'art Eugène Guillaume (1822-1905). Le 23 mai 1866, il prononce devant l'Union centrale des Beaux-Arts appliqués à l'industrie¹⁴⁶ une conférence intitulée « Idée générale d'un enseignement du dessin¹⁴⁷ ». Il se fait alors l'écho des thèses prônées par l'Union centrale sur les rapports entre la géométrie et le dessin : la géométrie « contient le principe exact de toutes les branches du dessin et affirme l'unité du dessin lui-même¹⁴⁸ ». Elle permet d'unifier des pratiques qu'il juge trop empiriques. Il regrette par ailleurs que l'enseignement du dessin linéaire « soit généralement séparé du dessin d'art et qu'au lieu d'en être considéré comme le fondement, il ne soit pas même envisagé comme en étant une branche parallèle¹⁴⁹ ».

Bourgoïn affirme par contraste :

« Les nécessités vulgaires de l'enseignement, tel que l'ont établi les professeurs de mathématiques et les fonctionnaires publics, ont imprimé à la géométrie élémentaire un caractère dogmatique et sacramentel qui a eu déjà et qui aura longtemps encore la plus déplorable influence, car de l'enseignement scolastique de la géométrie est née une sorte d'enseignement gauche et maladroit qu'on appelle le dessin linéaire¹⁵⁰. »

Il fait un détour par Cournot pour justifier ses positions :

« 15. Les matériaux de la science de la géométrie, non plus réduits à la forme scientifique, non plus considérés seulement comme des grandeurs ou des quantités

144. Voir à ce propos D'ENFERT, 2003. Bourgoïn a suivi dans les années 1850 les cours de géométrie et de statique dispensés par Isidore Francœur (fils de L.-B. Francœur) à l'École des Beaux-Arts. Le contenu de ces cours, conservés sous la forme de notes manuscrites dans les archives Bourgoïn, accrédite l'idée chère à Francœur-père selon laquelle la géométrie joue un rôle fondamental dans l'apprentissage du dessin.

145. Voir les planches 25-26 de la *Géométrie théorique et pratique* (troisième édition) d'Hyppolite Sonnet (SONNET, 1848, pl. 25-26).

146. Il s'agit d'une association, créée par des industriels français à la suite des premières expositions universelles. Elle vise à rapprocher l'art et l'industrie afin de concurrencer l'Angleterre.

147. GUILLAUME, 1896, p. 1-91. Bourgoïn reproduit des passages entiers de cette conférence dans BOURGOIN, 1899, p. 93 et suiv. Rien n'atteste cependant qu'il ait eu connaissance de cette conférence dès la parution de sa *Théorie de l'ornement*.

148. GUILLAUME, 1896, p. 5.

149. GUILLAUME, 1896, p. 10.

150. BOURGOIN, 1873b, p. 14.

mathématiques, mais conçus et imaginés en toute simplicité, avec leurs caractères de forme et aussi de beauté ou d'élégance propres, arrivent à leur rang dans la série des formes construites suivant les principes très-généraux de l'ordre et de la forme.

Isoler, pour les considérer à part, les formes ou les figures susceptibles d'une définition mathématique, c'est sortir des conditions vraiment humaines pour entrer dans le monde des abstractions logiques, c'est faire de la science ; et si l'on veut que la géométrie ainsi comprise serve d'introduction naturelle à l'étude ou à la pratique des arts, on a le droit de trouver qu'il se commet par suite une méprise totale¹⁵¹. »

Bourgoin propose une interprétation toute personnelle du *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*. Il estime que les catégories générales de l'ordre et de la forme permettent de concevoir les figures géométriques sous un jour purement esthétique, c'est-à-dire comme motifs d'une composition artistique. Selon Bourgoin, le dessin linéaire procède exactement à rebours de ce qu'il préconise ici. La pratique du dessin est alors annexée à des figures géométriques envisagées de manière rigide. L'objectif de Bourgoin, lorsqu'il se réfère au *Traité* de Cournot n'est surtout pas d'envisager l'art ornemental comme une partie des sciences logico-mathématiques. Bourgoin emploie de manière détournée les notions d'ordre et de forme pour critiquer le rapprochement entre le dessin industriel et le dessin d'art prôné par l'Union centrale via la promotion de la géométrie dans les écoles de dessin. Ainsi, Bourgoin s'appuie sur la figure tutélaire de Cournot pour mettre en évidence l'écart qui sépare les manuels de dessin linéaire et ses propres ouvrages sur l'art ornemental.

Ces derniers s'apparentent de plus à des grammaires d'ornements et non à des recueils d'ornements. Précisons cette distinction. Un *recueil* d'ornements rassemble divers motifs ornementaux sans réel souci de cohérence. Visant un public d'amateurs et de connaisseurs en art, un recueil d'ornements est le fruit d'une activité de collecte. L'objectif n'est pas d'analyser et de combiner des motifs ornementaux, mais de les reproduire sans les insérer dans un projet de classification systématique.

Par contraste, à partir de la seconde moitié du XIX^e siècle paraissent des *grammaires* d'ornements. Fondées sur des méthodes analytiques, elles montrent comment des motifs ornementaux se combinent, s'engendrent et se déclinent¹⁵². C'est par exemple le cas de la *Grammar of Ornament* d'Owen Jones¹⁵³ qui connaît une grande notoriété bien au-delà de l'Angleterre, puisqu'elle est traduite en français en 1865. Même s'il ne cite pas explicitement Jones, Bourgoin ne peut pas ignorer les travaux de ce dernier. Tous deux partagent un même objectif : établir un système de motifs ornementaux fondé sur des règles générales. L'approche de Bourgoin est cependant plus formelle que celle de Jones. Alors que Jones classe de manière ordonnée des styles d'ornements, Bourgoin va jusqu'à établir une « combinatoire » de motifs élémentaires qui transcende les différents styles.

Nous pouvons mieux cerner à présent les usages de la théorie cournotienne de l'ordre chez Bourgoin. Ce dernier l'utilise pour parvenir à une grammaire *générale*

151. BOURGOIN, 1873b, p. 16.

152. Sur la distinction entre recueil et grammaire d'ornements, voir en particulier : LABRUSSE, 2011, p. 206.

153. JONES, 1856.

des ornements qu'il commence à construire en s'appuyant sur l'exemplarité des arts arabes, à l'image de ce que faisait Jones avec les motifs de l'Alhambra dans sa *Grammar of Ornament*. En outre, Bourgoïn utilise l'œuvre de Cournot pour montrer que l'art ornemental est susceptible d'une théorisation. Enfin, il se réfère aux concepts d'ordre et de forme de manière relativement détournée pour rejeter le dessin linéaire et critiquer les prescriptions de l'Union centrale dans l'enseignement du dessin.

Des sources en cristallographie, en botanique, en chimie et en combinatoire

L'œuvre de Cournot ne constitue pas la seule référence philosophique et scientifique de Bourgoïn. Ce dernier développe un répertoire de formes inspiré de la botanique, de la cristallographie et de la chimie dont ses notes de lecture, ses écrits et ses planches portent témoignage¹⁵⁴. À travers l'étude des notes de lecture de Bourgoïn, nous apprenons qu'il a consulté les publications du botaniste Charles Fermond¹⁵⁵. Il semblerait que Bourgoïn s'inspire de Fermond dès sa *Théorie de l'ornement*, comme le suggère le passage suivant : « Selon que les parties d'une figure ou d'une disposition sont rapportées au point, à la ligne ou au plan, la symétrie est d'espèce différente, le motif est défini et porte une épithète assortie¹⁵⁶. »

Précisément, Fermond distingue dans ses *Études sur la symétrie* (1855) les symétries par rapport à un point, une ligne et un plan qu'il associe respectivement aux minéraux, aux végétaux et aux animaux. Bourgoïn fait allusion à cette distinction dans le passage ci-dessus. En outre, dans son *Essai de phytomorphie*, Fermond entreprend une classification des végétaux selon leur *forme*¹⁵⁷. Signalons que, dans le livre III du *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales* consacré à la vie de l'organisme, Cournot suggère de diviser *a priori* les sciences de la nature en deux types : celles qui sont placées sous la juridiction de la forme et de l'ordre et celles qui dépendent de la catégorie de force¹⁵⁸. Fermond distingue justement la phytomorphie qui a pour objet la forme des végétaux et la phytogénie ou théorie mécanique des végétaux.

Bourgoïn a également lu l'*Essai géométrique sur la symétrie des feuilles curvisériées et rectisériées* (1835) signé par Louis et Auguste Bravais¹⁵⁹. Ces derniers mathématisent et classent les rapports de situation qui président à la disposition des feuilles le long d'une tige. Dans sa *Théorie de l'ornement* comme dans sa *Grammaire élémentaire*, Bourgoïn étudie les motifs ornementaux empruntés aux végétaux (tiges, feuilles, arbres). Il conjugue ici l'héritage de Ruprich-Robert¹⁶⁰ avec les travaux des Bravais et de Fermond en botanique. Par exemple, dans sa *Théorie de l'ornement*, Bourgoïn consacre un chapitre aux nervures des feuilles¹⁶¹ et aux dispositions ramifiées

154. THIBAUT, 2012b.

155. FERMOND, 1855 ; FERMOND 1864.

156. BOURGOÏN, 1873b, p. 187.

157. FERMOND, 1864, p. IV.

158. CURNOT, 1861, p. 243.

159. Louis Bravais, qui est botaniste, est le frère aîné d'Auguste Bravais, ce dernier étant surtout connu pour ses travaux en cristallographie.

160. RUPRICH-ROBERT, 1866-1876.

161. BOURGOÏN, 1873b, p. 107 sq.

(les arbres)¹⁶². Il fait alors allusion à « la partie morphologique de la science des végétaux¹⁶³ ». Il regroupe ces analyses éparses dans le chapitre VIII de sa *Grammaire élémentaire de l'ornement*¹⁶⁴.

Il existe une étroite parenté entre ce mémoire des frères Bravais en botanique et les apports ultérieurs d'Auguste Bravais en cristallographie rassemblés dans les *Études cristallographiques* (1866). Dans les deux cas, il s'agit de dégager les principes mathématiques qui commandent la forme et la disposition d'un être naturel (végétal ou cristal). Il est d'ailleurs possible que Bourgoïn ait eu connaissance des contributions d'Auguste Bravais en cristallographie, même s'il ne les cite pas expressément. Toujours est-il que la cristallographie, telle qu'elle est géométrisée par Bravais et ses successeurs, tient lieu de modèle pour Bourgoïn :

« Toutes ces idées d'ordre, de configuration, de figures, de formes à l'aide desquelles on peut grouper les atomes et imaginer chacune des hypothèses que l'on peut faire sur la composition moléculaire ou infinitésimale, trouvent leur application, et alors sous une forme sensible et perceptible dans la cristallographie proprement dite, qui, lorsqu'on n'aborde pas les arcanes des causes physiques de la cristallisation, repose tout entière sur des caractères de forme, sur des définitions intelligibles par la pure géométrie¹⁶⁵. »

Estelle Thibault relève qu'à plus long terme, Bourgoïn a pris de notes tirées des *Éléments de cristallographie physique* du physicien suisse Charles Soret¹⁶⁶, dont la première partie est consacrée à la cristallographie géométrique¹⁶⁷. Soret montre alors le rôle fondamental des lois de symétrie dans la classification des cristaux, soit juste après les publications décisives de Fedorov et Schönflies portant sur la classification des groupes cristallographiques¹⁶⁸. Bourgoïn s'intéresse à la cristallographie en autodidacte. Cependant ses lectures indiquent qu'il a parcouru des ouvrages difficiles – à l'image de celui de Soret – et elles témoignent de son goût pour l'érudition que traduit d'ailleurs la précision de ses planches dévolues aux motifs cristallins. Enfin, Bourgoïn a également parcouru un ouvrage d'Édouard-Gabriel Monod portant sur la stéréochimie, qui a pour objet l'étude formelle des combinaisons et arrangements des atomes dans une molécule¹⁶⁹.

Ainsi, nombre de sources scientifiques de Bourgoïn ont en commun de mettre en valeur les notions de situation, d'ordre, de forme, de combinaison et de symétrie en cristallographie, en chimie et en botanique. Ils illustrent l'universalité de la syntactique cournotienne. Dès 1843, Cournot l'appliquait non seulement aux sciences logico-mathématiques, mais encore à la chimie et à la grammaire générale.

162. BOURGOIN, 1873b, p. 297 *sq.*

163. BOURGOIN, 1873b, p. 111.

164. BOURGOIN, 1880, p. 123 *sq.*

165. BOURGOIN, 1873b, p. 277.

166. SORET, 1893.

167. THIBAUT, 2012b.

168. Pour une étude des contributions de Sohncke, Fedorov ou encore Schönflies en cristallographie, nous renvoyons le lecteur à SCHOLZ, 1989.

169. MONOD, 1895.

Bourgoin ajoute à cette liste l'art ornemental. Son corpus scientifique est homogène et en adéquation avec les idées cournotiennes de combinaison, d'ordre et de forme. Bourgoin aspire d'ailleurs à développer une combinatoire en dessin qui prendra finalement le nom de *Graphique*.

Graphique et syntactique

La dernière partie de la *Théorie de l'ornement* (1873) est dévolue à un projet de syntactique en dessin¹⁷⁰ que Bourgoin se contente alors d'esquisser. Par exemple, il analyse les différentes combinaisons possibles entre quatre quarts de cercles rangés en damier. Il les désigne par des lettres minuscules de manière à les combiner indépendamment de ce qu'ils représentent. Il s'agit là des prémisses d'une combinatoire graphique qu'il développe dans sa *Grammaire élémentaire de l'ornement*. Le chapitre II de cet ouvrage porte sur la « conjugaison » des traits¹⁷¹. Il y étudie également les combinaisons possibles de motifs situés dans des cases réparties en damier. Ce projet trouve son aboutissement avec la publication de sa *Graphique* en 1905.

Selon Bourgoin, « la Graphique est la langue et la science des figures. Son enseignement a pour but de nous initier au monde des figures, tout comme par l'arithmétique nous sommes initiés au monde des nombres¹⁷² ». Bourgoin ambitionne donc de mettre en application cette approche combinatoire dans l'enseignement des arts graphiques au niveau du primaire, comme il le suggère déjà dans le premier tome des *Études architectoniques et graphiques* (1899)¹⁷³. Il estime que la graphique doit se substituer au dessin linéaire. Selon lui, la graphique est à la géométrie ordinaire, ce que l'arithmétique supérieure est à l'arithmétique ordinaire¹⁷⁴. On retrouve cette dernière distinction à la fois dans les « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres » de Poinso et dans *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie* de Cournot. La graphique consiste donc à combiner des figures en faisant abstraction de leur nature ; de même l'arithmétique supérieure implique de s'abstraire de tout système particulier de numération. Bourgoin va même jusqu'à envisager la graphique comme « le fond essentiel, primordial et préexistant à toute géométrie¹⁷⁵ ».

Bourgoin projette concrètement de réformer l'apprentissage du dessin en accordant une place centrale à sa graphique :

« reléguant la géométrie ordinaire dans le système des sciences mathématiques, donc dans l'enseignement secondaire, il nous restera dans l'enseignement primaire la graphique d'une part, c'est-à-dire l'apprentissage du mécanisme des figures en général et, d'autre part, la métrologie, c'est-à-dire la théorie et la pratique du *système métrique*¹⁷⁶ ».

170. BOURGOIN, 1873b, p. 311 sq.

171. BOURGOIN, 1880, p. 33 sq.

172. BOURGOIN, 1905, p. vi.

173. BOURGOIN, 1899, p. 143.

174. BOURGOIN, 1899, p. 145.

175. BOURGOIN, 1899, p. 146.

176. BOURGOIN, 1899, p. 146.

Alors qu'en 1873 il se contentait de critiquer le dessin linéaire sans lui substituer quoi que ce soit, il aboutit entre 1899 et 1905 à un vaste projet de combinatoire en dessin qui, selon lui, doit à terme remplacer le dessin linéaire. Ce projet sera cependant très peu diffusé et il sera sans effet sur l'enseignement du dessin.

Les planches qui illustrent ce projet théorique et pratique indiquent qu'il radicalise les procédés formels que l'on trouvait à la fin de sa *Théorie de l'ornement*. Estelle Thibault note que :

« [les planches issues de *La Graphique*] réduisent les compositions formelles aux notations les plus schématiques, résumées à un simple trait à main levée, dont l'élève peut aisément s'approprier le tracé. Ensuite parce que la mise en page en explicite parfaitement les procédés combinatoires, explorés de façon exhaustive. Enfin parce que les commentaires qui accompagnent les planches insistent, outre sur la taxinomie des figures et des modes de répétition, sur les opérations de l'analyse combinatoire¹⁷⁷. »

La *Graphique* constitue ainsi une réalisation de la syntactique de Cournot dans la pratique et l'enseignement du dessin. Bourgoïn la divise en trois volumes. Dans le premier, il décline des combinaisons de traits élémentaires à l'image de ce qu'il avait fait dans sa *Théorie* et sa *Grammaire élémentaire*. Le second est dédié aux figures d'échiquiers. Bourgoïn ne précise pas les sources qui le conduisent à s'y intéresser. Néanmoins, dans plusieurs de ses ouvrages, des développements sont consacrés aux figures textiles, qu'il annonce dès 1873 comme des applications importantes des réseaux quadrillés¹⁷⁸. D'ailleurs, selon Thibault :

« Si l'univers textile stimule l'invention classificatoire [de Bourgoïn], l'industrie des tissus lui apparaît également comme l'un des premiers domaines d'application de sa science de la graphique, comme il tente de le démontrer, dans les années 1890, dans des conférences données à l'École nationale des arts industriels de Roubaix ou à la Chambre de commerce de Lyon¹⁷⁹. »

De plus, ses notes de lecture contiennent des références aux travaux d'Édouard Gand ce qui montre que Bourgoïn est familier de questions théoriques liées aux satins.

Durant le dernier tiers du XIX^e siècle, plusieurs mathématiciens tels qu'Édouard Lucas ou Charles-Ange Laisant s'intéressent également aux liens entre géométrie et théorie des nombres dans l'étude des figures d'échiquiers. Lucas, qui est originaire d'Amiens comme Gand, développe une géométrie des tissus en lien avec les recherches de Gand¹⁸⁰. Dans sa *Théorie des nombres*, Lucas aborde des thématiques chères à Bourgoïn, à savoir la combinatoire, la géométrie de situation, les échiquiers, les polygones, les réseaux ou encore les polyèdres¹⁸¹. Il est d'ailleurs fort probable que Bourgoïn ait eu connaissance de cet ouvrage : ainsi, dans sa *Graphique*,

177. THIBAUT, 2012c, p. 44.

178. BOURGOIN, 1873b.

179. THIBAUT, 2012d.

180. DÉCAILLOT, 2002.

181. LUCAS, 1891.

il utilise l'expression « permutations figurées », introduite par Lucas et la planche 61 de Bourgoin est semblable à la figure 28 de l'ouvrage de Lucas. Bourgoin partage donc avec ces mathématiciens une même source, à savoir Poinot, ainsi qu'un intérêt similaire pour les aspects combinatoires dans la fabrication des tissus et les figures d'échiquiers.

Le troisième tome de sa *Graphique* est consacré aux pavages de Truchet et à leurs variantes. Bourgoin y reprend certaines planches issues du « Mémoire sur les combinaisons » de Sébastien Truchet¹⁸² qui constitue l'objet principal de l'article « Combinaison » de l'*Encyclopédie* de Diderot et D'Alembert. Dans ce mémoire, Truchet développe des pavages qui portent maintenant son nom en combinant plusieurs copies d'un même motif, à savoir un carré divisé dans le sens de l'une des diagonales en deux parties respectivement blanche et noire. Bourgoin utilise ce procédé combinatoire pour générer des nouveaux pavages du plan. Par extension, Bourgoin estime que sa grammaire générale des ornements (1873, 1880) et sa *Graphique* (1905) doivent permettre d'engendrer des motifs ornementaux inédits à partir de la combinaison de figures.

CONCLUSION

Notre analyse permet donc d'appréhender la circulation de la notion d'ordre développée chez nos trois auteurs. Ainsi, Cournot s'appuie sur la théorie de l'ordre de Poinot pour mettre en place un système général des connaissances humaines, qui inspire ensuite Bourgoin dans ses travaux sur l'art ornemental. De plus, nous avons vu que Bourgoin, *via* Cournot, reprend à son compte certains aspects de la théorie de l'ordre de Poinot. Il serait cependant certainement plus juste de parler de plusieurs pratiques liées à un même terme – l'ordre – tant ses utilisations et ses champs d'application évoluent en fonction des auteurs et des périodes.

Malgré cette diversité, nous pouvons néanmoins repérer certains points communs. Nos trois auteurs utilisent la notion d'ordre pour élaborer des classifications – des sciences mathématiques (Poinot, Cournot), des connaissances en général (Cournot), de l'art ornemental (Bourgoin). Une même représentation graphique de l'idée d'ordre, fondée sur l'image du cercle et des polygones réguliers, traverse leurs œuvres. Notons de plus que Poinot et Bourgoin s'appuient tous deux sur la théorie de l'ordre pour légitimer un domaine considéré comme mineur par leurs pairs. Ainsi, chez Poinot, l'importance de la théorie des nombres est motivée par le fait que ses principes sont fondés sur la notion d'ordre. Bourgoin s'appuie de son côté sur l'ordre chez Cournot pour légitimer l'art ornemental, alors subalterne par rapport à l'architecture.

Lorsque l'on parcourt le corpus de références de Bourgoin et de Cournot, on trouve une prédominance de travaux mathématiques en liens avec les idées d'ordre, de situation et de combinaisons (théorie des nombres, cristallographie, théorie des polygones et polyèdres). Remarquons que ces thèmes font également partie des « tendances générales » des recherches évoquées par Jordan dans la préface de sa *Notice sur travaux*. En dehors des sciences mathématiques, ce sont les travaux de botanique, de chimie, voire

182. TRUCHET, 1704.

de grammaire générale qui sont évoqués par Cournot et Bourgoin, tous ces domaines intégrant également des questions de combinaison, de situation et d'ordre. Nous avons souligné que Bourgoin s'intéresse aussi aux arts du textile. Une géométrie des textiles est justement développée à la même époque par les mathématiciens Lucas et Laisant, qui se réfèrent tous deux à la théorie de l'ordre de Poinot.

Ces points de recoupement confirment donc l'existence, tout au long du XIX^e siècle, de pratiques liées aux questions de combinaison et d'ordre dans les sciences mathématiques, les sciences de la nature, l'art des tissus et l'art ornemental. De plus, les références données par Bourgoin et Cournot nous montrent qu'ils associent ces différents thèmes *via* les notions d'ordre ou de combinaison. Notons enfin que ces pratiques sont généralement envisagées dans l'historiographie à partir de la théorie des groupes. Nous avons montré qu'il s'agit là d'une illusion rétrospective et qu'il est important de considérer les travaux de Poinot, Cournot et Bourgoin avant tout par rapport à une théorie de l'ordre.

SOURCES PRIMAIRES

- AUBRY (Auguste), 1907, « Le lemme fondamental de la théorie des nombres », *L'Enseignement mathématique*, t. 9, p. 286-305.
- BACHMANN (Paul), 1892, *Die Elemente der Zahlentheorie*, Leipzig, Teubner.
- BOURGOIN (Jules), 1873a, *Les Arts arabes*, Paris, Auguste-Jean Morel.
- BOURGOIN (J.), 1873b, *Théorie de l'ornement*, Paris, A. Lévy.
- BOURGOIN (J.), 1880, *Grammaire élémentaire de l'ornement*, Paris, Delagrave.
- BOURGOIN (J.), 1899, *Études architectoniques et graphiques, tome I*, Paris, Charles Schmid.
- BOURGOIN (J.), 1901, *Études architectoniques et graphiques, tome II*, Paris, Charles Schmid.
- BOURGOIN (J.), 1905, *La Graphique, I, II, III*, Paris, Delagrave.
- BRAVAIS (Auguste), 1866, *Études cristallographiques*, Paris, Gauthier-Villars.
- CHASLES (Michel), 1837, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne*, Bruxelles, Hayez.
- COMBEROUSSE (Charles De), 1890, *Cours de mathématiques à l'usage des candidats à l'École polytechnique, à l'École normale supérieure, à l'École centrale des arts et manufactures. Tome quatrième. Algèbre supérieure. Seconde partie*, Paris, Gauthier-Villars.
- CONDILLAC (Étienne Bonnot De), 1798, *La Langue des calculs*, Paris, Imprimerie de Ch. Houel.
- COURNOT (Antoine Augustin), 1825, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres ; par M. Poinot », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, t. 3, p. 144-145.
- COURNOT (A. A.), 1827, « Des résidus cubiques ; par le Dr. Jacobi », *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, t. 8, p. 302.
- COURNOT (A. A.), 1843, *Exposition de la théorie des chances et des probabilités*, Paris, Hachette.
- COURNOT (A. A.), 1847, *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, Paris, Hachette.
- COURNOT (A. A.), 1851, *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Paris, Hachette.

- COURNOT (A. A.), 1861, *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, Paris, Hachette.
- COURNOT (A. A.), 1872, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes*, t. 2, Paris, Hachette.
- COURNOT (A. A.), 1913, *Souvenirs (1760-1860)*, Paris, Hachette.
- COURNOT (A. A.), 2010, *Œuvres complètes T. XI : Écrits de jeunesse et pièces diverses*, Paris ; Besançon, Vrin ; Presses universitaires de Franche-Comté, édité par B. Bru et T. Martin.
- DESPEYROUS (Théodore), 1861, « Mémoire sur la théorie générale des permutations », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, série II, t. 6, p. 417-439.
- EULER (Leonhard), 1741, « Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis », *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, t. 8, p. 128-140.
- FERMOND (Charles), 1855, *Études sur la symétrie : considérée dans les trois règnes de la nature*, Paris, Chaix et Cie.
- FERMOND (C.), 1864, *Essai de phytomorphie, tome I*, Paris, Librairie médicale Germer Baillière.
- GAUSS (Carl Friedrich), 1801, *Disquisitiones Arithmeticae*, Leipzig, Fleischer.
- GRUNERT (Johann August), 1846, « Ueber zwei Sätze aus der Algebra und aus der Zahlenlehre », *Archiv der Mathematik und Physik*, t. 7, p. 367-386.
- GUILLAUME (Eugène), 1896, *Essais sur la théorie du dessin*, Paris, Perrin.
- GUIMARÃES (Rodolphe), 1900, *Les Mathématiques en Portugal*, Coïmbre, Imprimerie de l'Université.
- JACOBI (Carl Gustav Jakob), 1827, « De residuis cubiscis commentatio numerosa », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 2, p. 66-69.
- JACOBI (C. G. J.), 2007, *Vorlesungen über Zahlentheorie—Wintersemester 1836/37, Königsberg, Augsburg, Dr. Erwin Rauner Verlag*, édité par F. Lemmermeyer et H. Pieper.
- JONES (Owen), 1856, *The Grammar of Ornament*, Londres, Quaritch.
- JORDAN (Camille), 1860, *Mémoire sur le nombre des valeurs d'une fonction, Thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris par Camille Jordan, 1^{ère} thèse*, Paris, Mallet-Bachelier.
- JORDAN (C.), 1881, *Notice sur les travaux de M. Camille Jordan, ingénieur des Mines, professeur à l'École polytechnique, à l'appui de sa candidature à l'Académie des sciences (section de géométrie)*, Paris, Gauthier-Villars.
- KLEIN (Felix), 1896, *Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire*, Paris, Librairie Nony.
- KLEIN (F.), 1926, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Berlin, Springer, édité par Richard Courant et Otto Neugebauer.
- LACROIX (Sylvestre-François), 1804, *Complément des élémens d'algèbre*, 3^{ème} édition, Paris, Courcier.
- LAGRANGE (Joseph-Louis), 1808, *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés, avec des notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*, 2^e ed., Paris, Courcier.
- LAISANT (Charles-Ange), 1882, « Sur le développement de certains produits algébriques », dans *Association française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 10^e session. Alger 1881*, Paris, Masson, p. 84-108.
- LEBESGUE (Victor-Amédée), 1829, « Extrait d'un Mémoire inédit sur les congruences d'un degré quelconque à une seule inconnue », *Bulletin du Nord, Journal scientifique et littéraire*, vol. 1, cahier 1, p. 23-43 ; cahier 3, p. 255-274 ; cahier 5, p. 19-33.
- LEBESGUE (V.-A.), 1862, *Introduction à la théorie des nombres*, Paris, Mallet-Bachelier.
- LUCAS (Édouard), 1891, *Théorie des Nombres. Tome premier*, Paris, Gauthier-Villars.

- MONOD (Edouard-Gabriel), 1895, *Stéréochimie, exposé des théories de Le Bel et Van't Hoff*, Paris, Gauthier-Villars.
- MEYER (Franz), MOLK (Jules), éd., 1904-1916, *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome I : arithmétique et algèbre (4 vols)*, [s. l.], Leipzig, Teubner & Paris, Gauthier-Villars.
- MILLER (George Abram), 1903, « Appreciative Remarks on the Theory of Groups », *The American Mathematical Monthly*, t. 10, n° 4, p. 87-89.
- PEACOCK (George), 1834, « Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis », *Report of the Third Meeting of the British Association for the Advancement Of Science*, Londres, Murray, p. 185-352.
- POINSOT (Louis), 1808, « Analyse du Traité de la résolution des équations numériques... par J. - L. Lagrange », *Magasin encyclopédique, ou Journal des sciences, des lettres et des arts*, t. 4, p. 343-375.
- POINSOT (L.), 1810, « Mémoire sur les polygones et les polyèdres », *Journal de l'École polytechnique*, t. 4, p. 16-49.
- POINSOT (L.), 1818, « Extrait de quelques recherches nouvelles sur l'algèbre et la théorie des nombres », *Mémoires de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France, Années 1813, 1814, 1815*, t. 14, p. 381-392.
- POINSOT (L.), 1820, « Mémoire sur l'application de l'algèbre à la théorie des nombres », *Journal de l'École polytechnique*, t. 11, p. 342-410.
- POINSOT (L.), 1845, « Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres », *Journal de mathématiques pures et appliquées*, t. 10, p. 1-101.
- POINSOT (L.) ET AL., 1906, *Abhandlungen über die regelmässigen Sternkörper: Abhandlungen von L. Poinso (1809), A. L. Cauchy (1811), J. Bertrand (1858), A. Cayley (1859)*, (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, t. 151), Leipzig, W. Engelmann.
- SMITH (Henry J. S.), 1859, « Report on the Theory of Numbers », dans *Report of the British Association for the Advancement of Science*, Oxford Clarendon Press p. 228-267.
- RUPRICH-ROBERT (Victor), 1866-76, *Flore ornementale : essai sur la composition de l'ornement, éléments tirés de la nature et principe de leur application*, Paris, Dunod.
- SONNET (Hippolyte), 1848, *Géométrie théorique et pratique, troisième édition*, Paris, Hachette.
- SORET (Charles), 1893, *Éléments de cristallographie physique*, Genève, Georg & Paris, Gauthier-Villars.
- TRUCHET (Sébastien), 1704, « Mémoire sur les combinaisons », *Mémoires de l'Académie royale des sciences*, p. 36-372.
- VANDERMONDE (Alexandre-Théophile), 1774, « Remarques sur les problèmes de situation », *Histoire de l'Académie royale des sciences, avec les Mémoires de mathématiques et de physique, Année 1771*, p. 566-574.

SOURCES SECONDAIRES

- AUVINET (Jérôme), 2011, *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920)*, Thèse de doctorat, Université de Nantes.
- BERTRAND (Joseph), 1890, *Éloge historique de Louis Poinso*, Paris, Institut de France.
- BIDEAULT (Maryse), 2012, « Jules Bourgo. Une vie pour l'ornement », dans *Jules Bourgo (1838-1908). L'obsession du trait*, Paris, Institut national d'histoire de l'art, 2012, p. 4-5.
- BOUCARD (Jenny), 2011, « Louis Poinso et la théorie de l'ordre : un chaînon manquant entre Gauss et Galois ? », *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 17, n° 1, p. 41-138.

- BRECHENMACHER (Frédéric), 2011, « Self-Portraits with Évariste Galois, (and the Shadow of Camille Jordan) », *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 17, n° 2, p. 271-369.
- BRECHENMACHER (F.), EHRHARDT (Caroline), 2010, « On the Identities of Algebra in the 19th Century », *Oberwolfach Reports*, t. 12, p. 24-32.
- BRIAN (Éric), 2006, « Combinaisons et disposition. Langue universelle et géométrie de situation chez Condorcet (1793-1794) », *Early Science and Medicine*, t. 11, n° 4, p. 455-477.
- BRU (Bernard), MARTIN (Thierry), 2005, « Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journal électronique d'histoire des probabilités et de la statistique*, t. 1, n° 2, p. 1-43.
- DAHAN DALMEDICO (Amy), 1980, « Les travaux de Cauchy sur les substitutions. Étude de son approche du concept de groupe », *Archive for History of Exact Sciences*, t. 23, n° 4, p. 279-319.
- DÉCAILLOT (Anne-Marie), 1998, « L'arithméticien Édouard Lucas (1842-1891) : théorie et instrumentation », *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 4, p. 191-236.
- DÉCAILLOT (A.-M.), 2002, « Géométrie des tissus. Mosaïques. Échiquiers. Mathématiques curieuses et utiles », *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 8, p. 145-206.
- DURAND-RICHARD (Marie-José), 1990, « Genèse de l'algèbre symbolique en Angleterre : une influence possible de John Locke », *Revue d'histoire des sciences*, t. 43, n° 2-3, p. 129-180.
- DURAND-RICHARD (M.-J.), 2001, « Révolution industrielle, logique et signification de l'opérateur », *Revue de synthèse*, t. 2-3-4, p. 319-346.
- DURAND-RICHARD (M.-J.), éd., 2008, *L'analogie dans la démarche scientifique. Perspective historique*, Paris, Harmattan.
- EHRHARDT (Caroline), 2010, « Un concept mathématique, trois notions : les groupes au XIX^e siècle chez Galois, Cayley, Dedekind », *Images des mathématiques*, CNRS.
- EHRHARDT (C.), 2011, *Évariste Galois. La fabrication d'une icône mathématique*, Paris, Éditions de l'EHESS.
- EHRHARDT (C.), 2012, *Itinéraire d'un texte mathématique. Les réélaborations d'un mémoire d'Évariste Galois au XIX^e siècle*, Paris, Hermann.
- D'ENFERT (Renaud), 2003, *L'enseignement du dessin en France. Figure humaine et dessin géométrique (1750-1850)*, Paris, Belin.
- D'ENFERT (R.), 2004, « De l'École royale gratuite de dessin à l'École nationale des arts décoratifs (1806-1877) », dans *Histoire de l'École nationale supérieure des arts décoratifs (1766-1941)*, *Journal de l'Ensad* n° 24, p. 64-107.
- GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert) et SCHWERMER (Joachim), eds., 2007, *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin, Springer.
- GOLDSTEIN (Catherine), SCHAPPACHER (Norbert), 2007, « A Book in Search of a Discipline (1801-1860) », dans GOLDSTEIN (C.), SCHAPPACHER (N.) & SCHWERMER (J.), *The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae*, Berlin, Springer, p. 3-65.
- KNOBLOCH (Eberhard), 1991, « L'analogie et la pensée mathématique », dans RASHED (Roshdi), éd., *Mathématiques et philosophie de l'Antiquité à l'âge classique*, Paris, CNRS, p. 217-237.
- LABRUSSE (Rémi), 2011, *Islamophilies, L'Europe moderne et les arts de l'Islam*, Paris, Somogy Éditions d'arts.
- LEIBNIZ (Gottfried Wilhelm), ECHEVERRÍA (Javier), PARMENTIER (Marc), 1995, *La caractéristique géométrique*, Paris, Vrin.
- MARTIN (Thierry), 1995, « Probabilités et philosophie des mathématiques chez Cournot », *Revue d'histoire des mathématiques*, t. 1, p. 111-138.

- MARTIN (T.), 1996a, « Cournot et les mathématiques », dans BARBIN (Évelyne) et CAVEING (Maurice), éd., *Les philosophes et les mathématiques*, Ellipses, p. 193-211.
- MARTIN (T.), 1996b, *Probabilités et critique philosophique selon Cournot*, Paris, Vrin.
- MARTIN (T.), 2005, *Nouvelle bibliographie cournotienne*, Besançon, Université de Franche-Comté.
- SCHOLZ (Erhard), 1989, *Symmetrie, Gruppe, Dualität: zur Beziehung zwischen theoretischer Mathematik und Anwendungen in Kristallographie und Baustatik des 19. Jahrhunderts*, Basel, Birkhäuser Verlag.
- THIBAUT (Estelle), 2012a, « La *Théorie de l'ornement* (1873) », dans *Jules Bourgoïn (1838-1908). L'obsession du trait*, Paris, Institut national d'histoire de l'art, p. 14-16.
- THIBAUT (E.), 2012b, « Un imaginaire scientifique. Cristaux et figures organiques. », dans *Jules Bourgoïn (1838-1908). L'obsession du trait*, Paris, Institut national d'histoire de l'art, p. 40-41.
- THIBAUT (E.), 2012c, « La *Graphique* (1905) », dans *Jules Bourgoïn (1838-1908). L'obsession du trait*, Paris, Institut national d'histoire de l'art, p. 44-45.
- THIBAUT (E.), 2012d, « Figures textiles », dans *Jules Bourgoïn (1838-1908). L'obsession du trait*, Paris, Institut national d'histoire de l'art, p. 42-43.
- VOLAIT (Mercedes), 2009, *Fous du Caire : excentriques et amateurs d'art islamique en Égypte (1867-1914)*, Apt, L'archange Minotaure.