Effets potentiels des énoncés des exercices sur les inégalités sociales d'apprentissage en mathématiques.

Eric Roditi

Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

EFFETS POTENTIELS DES ENONCES DES EXERCICES SUR LES INÉGALITÉS SOCIALES D'APPRENTISSAGE EN MATHÉMATIQUES

Eric RODITI*

Résumé – Cette recherche contribue aux travaux menés pour comprendre comment certains choix d'enseignement, en lien avec certaines dispositions des élèves, peuvent favoriser ou bien pénaliser ces derniers, de façon différenciée selon leur milieu social d'origine. Elle repose sur une analyse comparative d'exercices de mathématiques à différentes époques, selon les contextes des énoncés (enfantins, professionnels, sociétaux ou scientifiques) et selon le niveau des connaissances en jeu. En recherchant si les énoncés à contextes professionnels, qui sont les plus évocateurs pour les élèves de milieux populaires, permettent d'en apprendre autant que les énoncés à contextes scientifiques, il s'agit finalement de savoir si l'enfant est institué comme élève de façon différente, avant même d'entrer en classe de mathématiques.

Mots-clefs : Exercices de mathématiques, Inégalités scolaires, Rapport aux savoirs, Proportionnalité

Abstract – This study contributes to research carried out in order to understand how teaching choices, linked to certain pupil's behavior, may favor or penalize these pupils in different ways depending on their initial social milieu. It is based on a comparative analysis of mathematical exercises from different periods, according to the context of their formulation (for children, for professionals, in social or scientific contexts) and the level of knowledge involved. We examine, for example, the degree to which formulations in professional contexts, which are the most evocative for pupils from working-class groups, allow as much to be learnt as formulations in scientific contexts. The aim is thus to know if the child is conceived as a pupil in different ways, before even venturing into the mathematics classroom

Keywords: Scholar inequities, Proportional reasoning, Mathematics exercises

L'activité d'un élève qui résous un problème de mathématiques dépend de nombreux facteurs concernant à la fois l'élève, le problème et le contexte scolaire dans lequel se déroule son activité. La recherche présentée ici (Ayala & Roditi, 2014) vise à mieux comprendre comment certains choix d'enseignement, en lien avec certaines dispositions des élèves, peuvent favoriser ou bien pénaliser ces derniers de façon différenciée selon leur milieu social d'origine. Notre perspective est donc didactique, mais elle convoque certains outils construits par des chercheurs ayant une approche sociologique de la différenciation scolaire.

Nous commençons par expliciter, dans le cas des exercices de mathématiques, une hypothèse relationnelle entre rapport à l'école et aux savoirs d'une part, et enseignement-apprentissage d'autre part. Puis nous indiquons la méthodologie mise en œuvre pour spécifier et interroger cette hypothèse. Nous présentons enfin les analyses effectuées et les résultats

* Sorbonne Paris-Cité, Université Paris Descartes, Laboratoire EDA – France – eric.roditi@paris5.sorbonne.fr

obtenus quant à notre interrogation sur les potentiels effets différenciateurs des énoncés eux-mêmes. Un tel questionnement, même s'il est relatif aux énoncés des exercices, concerne bel et bien la pratique enseignante dont on peut supposer qu'elle subit, au moins autant que les auteurs des manuels, l'influence des instructions officielles.

I. RAPPORT AU SAVOIR, ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE : UNE DOUBLE HYPOTHESE RELATIONNELLE

Les inégalités scolaires ont longtemps été observées par le biais du devenir scolaire des élèves et, plus récemment, par celui des inégalités d'apprentissage (Broccolichi, Sinthon, 2011). Malgré les tendances mises au jour concernant ces inégalités, la variabilité des résultats empêche de considérer l'origine sociale comme un *déterminant* de la réussite scolaire. Des chercheurs ont alors enquêté sur les histoires des enfants et des adolescents pour comprendre ce qui s'y construit et qui pourrait expliquer les inégalités d'apprentissage (Charlot, Bautier, Rochex, 1992). Par des études cliniques, certains auteurs ont également tenté d'analyser comment elles se génèrent durant les séances d'enseignement (Rochex, Crinon, 2011). Notre étude porte sur les énoncés des exercices de mathématiques, elle pose la question de leur possible effet différenciateur à partir d'une double hypothèse selon laquelle, d'une part, les contextes des énoncés d'exercices seraient conjointement plus ou moins attractifs pour les enseignants et différemment mobilisateurs pour les élèves suivant l'origine socio-familiale de ces derniers, et, d'autre part, ce que donnent à apprendre les exercices se serait pas indépendant de ces contextes d'énoncés d'exercices.

1. Rapports à l'école et aux savoirs et contextes des exercices de mathématiques

Nous nous inspirons d'anciens travaux de l'équipe ESCOL qui a mis au jour des formes idéaltypiques de rapports à l'école et aux savoirs non indépendantes des origines socio-familiales des élèves (Charlot, Bautier, Rochex, 1992). Nous les rappelons brièvement en les désignant par une expression pour pouvoir nous expliquer sur notre hypothèse.

Le premier idéaltype, « aller à l'école obligatoire », rend compte du fait que certains élèves considèrent l'école comme un lieu d'activités imposées pour les enfants. L'école elle-même et ses exigences prennent sens de façon indépendante des savoirs, l'école est vue comme une course d'obstacle où le but est de tenir le plus longtemps possible. Selon le deuxième idéaltype, « obtenir un bon métier », l'école a une fonction de formation préprofessionnelle, comme si le fait d'y aller permettait d'avoir un métier, et même un bon métier si l'on y travaille bien. Les savoirs enseignés prennent alors un sens lorsqu'ils sont interprétables selon leur utilité pour la vie professionnelle. Le troisième idéaltype, « apprendre la vie », conduit à assimiler les savoirs scolaires à des moyens de comprendre des expériences vécues, la sienne comme celle d'un parent ou d'un ami. Les difficultés que rencontre un frère pour trouver un emploi, par exemple, sont éclairées par les enseignements d'économie. Le quatrième idéaltype, « apprendre des savoirs importants », recouvre le fait que des élèves considèrent les savoirs comme des objets construits par une activité intellectuelle, sur lesquels on peut porter des jugements de valeur, d'intérêt, de pertinence, de transférabilité, etc. Comme l'ont montré les auteurs, non seulement ces rapports à l'école et aux savoirs ne sont pas indépendants des appartenances sociales des élèves, mais ils sont en outre corrélés à leur niveau de réussite scolaire.

On ne peut manquer de remarquer la proximité entre les rapports aux savoirs où le positionnement idéal-typique des élèves est celui d'un enfant, d'un professionnel, d'un citoyen ou d'un scientifique et les contextes des problèmes scolaires de mathématiques dont quatre type peuvent également être distinguées (c'est la classification que propose le PISA par exemple) : personnel, sociétal, professionnel, scientifique. Notre hypothèse, admise dans ce travail, est que, suivant leur rapport à l'école et aux savoirs, les élèves se mobiliseraient de façon variable suivant les contextes des exercices de mathématiques et que, parallèlement, les enseignants privilégieraient eux-aussi certains contextes en fonction de l'origine sociale des élèves de leur classe.

Bien sûr, la réussite aux exercices peut être facilitée par un contexte ajusté aux dispositions des élèves, les travaux en psychologie à ce sujet sont nombreux, concernant les mathématiques on peut citer notamment ceux de Beswick (2011). Mais de quelle réussite s'agit-il ? Même en supposant que ces réussites correspondent à des apprentissages effectifs, la question de la nature de ces apprentissages reste posée, ce qui pose conjointement la question de la nature précise des tâches afin de savoir si ce que donnent à apprendre les exercices est ou non dépendant du contexte. C'est exactement cette dernière question que nous nous posons. Nous nous demandons, en particulier, si les exercices portant sur des contextes professionnels ne conduiraient pas l'élève à seulement appliquer des techniques alors que ceux portant sur des contextes scientifiques exigeraient une disponibilité plus grande des savoirs mathématiques. Si cela était le cas, alors les élèves des milieux populaires dont le rapport à l'école correspond plus fréquemment à l'idéal-type « obtenir un bon métier » pourraient à la fois plus facilement s'engager dans les exercices à contexte professionnels, plus facilement réussir à les résoudre, mais aussi avoir moins à apprendre et donc construire des connaissances moindres que celles que construiraient les élèves de milieux plus aisés, plus enclins à s'engager dans les exercices à contexte sociétaux ou scientifiques plus riches en apprentissages potentiels.

2. *Rapports à l'école et aux savoirs et instructions officielles*

Nous supposons que les enseignants puissent choisir les exercices en fonction des contextes et du niveau social de leurs élèves parce que nous les considérons comme des sujets sociaux, influencés par les missions que se donne l'institution scolaire et qu'elle traduit dans les programmes d'enseignement. Or ces programmes ont sensiblement varié depuis la seconde moitié du 20e siècle.

En nous appuyant sur les instructions officielles pour l'école primaire et la classe de sixième, ainsi que sur les travaux de D'Enfert (2011) et de D'Enfert & Gispert (2010), nous constatons que durant cette période, les programmes d'enseignement des mathématiques de la fin de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire ont subi plusieurs évolutions visant à instaurer une progressivité entre les deux cycles d'enseignement dont les objectifs sont longtemps restés différents suivant qu'il s'agissait de l'école du peuple ou de celle de la bourgeoisie.

Jusqu'aux années soixante, la scolarité obligatoire préparait ainsi plutôt les élèves à la vie active et les mathématiques leur permettaient d'acquérir des techniques de résolution de problèmes issus de la vie courante ou professionnelle. À la fin de cette décennie, l'égalité des chances constituait le défi à relever par le système scolaire, et la réforme des *mathématiques modernes* en composait l'un des leviers : elle conduisit à une modification profonde des contenus d'enseignement, avec pour objectif de développer à la fois, chez tous les élèves, les grandes fonctions de la pensée logique et les savoirs qui fondent les techniques. Les effets n'ont pas été à la hauteur des attentes, et les programmes scolaires ont été révisés à peine quelques années plus tard lors de la réforme Haby de 1975. Néanmoins, ces changements ne sont pas très profonds. Il faudra attendre le milieu des années 80 pour que la *contre-réforme* élimine des programmes tout ce qui caractérisait les mathématiques modernes. Dans un contexte d'enseignement différencié, les mathématiques enseignées doivent alors contribuer à la formation du citoyen, être plus accessibles, utilisables dans d'autres disciplines scolaires, et permettre de résoudre des problèmes en relation avec le monde actuel. Depuis, malgré quelques évolutions, les programmes conservent globalement cette inspiration politique.

Ces évolutions de programmes rendent plausible notre hypothèse selon laquelle ce qui est à apprendre d'un exercice ne soit pas indépendant du contexte de son énoncé. Cela nous a conduit à mener une étude comparative et diachronique de manuels de mathématiques dans laquelle ont été croisés les contextes des exercices et les principaux apprentissages potentiels auxquels conduit la résolution de ces exercices.

II. METHOLOGIE : CATERORISATION DES ENONCES ET ANALYSES CROISEES

1. La proportionnalité comme privilégiée pour cette étude

La proportionnalité a été choisie comme notion pour cette recherche parce qu'elle est enseignée à la fin de l'école élémentaire comme au début de l'enseignement secondaire durant toute la période qui nous intéresse, et que les exercices qui nécessitent de la mettre en œuvre peuvent aisément porter sur les quatre contextes envisagés. Nous avons choisi d'analyser des manuels scolaires du début de l'enseignement secondaire, c'est-à-dire de la classe de 6^{e} (élèves de 11 ans), nous avons ainsi évité de comparer des manuels adressés à des élèves pour lesquels les auteurs savaient qu'ils poursuivraient ou qu'ils ne poursuivraient pas d'études secondaires. Neuf manuels scolaires ont ainsi été étudiés : trois datent d'avant la réforme (période pré-moderne), trois de la fin de la réforme (période moderne) et trois d'après la réforme (période post-moderne)[1].

Au total, 495 énoncés d'exercices ont été analysés. Voici, illustrés par des exemples, les critères retenus pour l'analyse de leur énoncé.

Le premier critère est celui des contextes :

– *Enfant*. Exemples :

[E01] 4 cahiers coûtent 10 euros ? Combien coûtent 14 cahiers ?

[E02] Pendant ses vacances, Jean a fait 96 photos. Pour les ranger, il les met dans son album. En mettant 8 photos par page, combien de pages remplira-t-il avec ses photos ?

[E03] Dans la classe, il y a 25 élèves dont 22 savent nager. Quel est le pourcentage des élèves de la classe sachant nager ?

– *Professionnel.* Exemples :

[E04] Une couturière a confectionné 273 robes en 13 jours de travail. Combien de robes confectionne-t-elle par jour si elle travaille tous les jours au même rythme ?

[E05] Un employé dont le salaire horaire est de 11,50 euros est augmenté de 4%. Quel est le montant de son augmentation ?

---

[1] Mathématiques 6^{e} : Belin (1960), Hachette (1960), Nathan (1965) ; Mathématiques 6^{e} : Colin (1977), Istra (1977), Nathan (1977) ; Cinq sur Cinq 6^{e} Hachette (1994), Pythagore 6^{e} Hatier (1994), Transmath 6^{e} Nathan (1994).

[E06] Un fabricant vend des chaussures à un marchand, il réalise un bénéficie de 25% sur le prix de fabrication, le marchand vend ces chaussures avec un bénéfice de 20%. Quel est le prix de fabrication d'une paire de chaussures vendue 135 euros ?

– *Citoyen*. Exemples :

[E07] M. Lemarchand roule sur autoroute à 120km/h pendant 2h. Les durées comprises entre 0 et 120 min sont-elles proportionnelles aux distances parcourues correspondantes ?

[E08] Le montant annuel de ma facture d'électricité est de 960 euros, celui de ma facture de gaz est de 134 euros. L'année suivante, le montant de ma facture d'électricité est de 1 104 euros et celui de ma facture de gaz est de 160,80 euros. Quelle est l'énergie qui a le plus augmenté ?

– *Scientifique*. Exemples :

[E09] Compléter ce tableau de proportionnalité :

12	16	4/7		
18			3,6	0,6

[E10] La masse de farine f produite à partir d'une masse de blé b s'obtient grâce à la formule suivante : $f = 0,8 \times b$. Quelle est la quantité de farine produite avec 5 tonnes de blé ?

[E11] À un crochet on a fixé un ressort et au bout de ce ressort un dispositif permettant d'accrocher des masses marquées. Lorsqu'il n'y a pas de masse, la longueur du ressort est 33mm. Avec une masse de 500g, le ressort a une longueur de 53mm. Quelle est la masse accrochée au ressort si sa longueur est de 45mm ?

Les autres critères portent sur les apprentissages potentiels auxquels conduit la résolution des exercices. Les recherches sur la proportionnalité (Hersant, 2005) invitent à distinguer différents types de tâches que nous classons selon quatre niveaux en fonction des procédures requises pour la résolution. Ces types de tâches sont définis ci-dessous où nous renvoyons, pour illustration, le lecteur aux exercices précédents en indiquant leur référence entre crochets.

Les tâches du premier niveau nécessitent seulement de reconnaitre une situation de proportionnalité à partir de la connaissance des grandeurs en jeu dans une situation. Dans l'exercice [E07], par exemple, l'élève doit reconnaître qu'à vitesse constante, la durée du parcours et la distance parcourues sont proportionnelles.

Au deuxième niveau, les tâches demandent de déterminer une valeur dans un problème à quatre termes numériques, c'est-à-dire de calculer une quatrième proportionnelle [E01] ou [E11], une répartition [E02] ou un coefficient de proportionnalité [E04]. Ainsi, dans l'exercice [E01], l'élève doit calculer le prix de 14 cahiers sachant que 4 cahiers coûtent 10 euros. Dans l'exercice [E02] le calcul de la répartition des 96 photos sachant qu'on peut mettre 8 photos par page conduit à des raisonnements analogues : l'élève peut calculer qu'il range 80 photos en 10 pages, 16 photos en 2 pages donc 96 photos en 12 pages ou déterminer par une division qu'il y a 12 fois 8 photos dans 96 photos et que 12 pages seront donc nécessaires pour les ranger. De même encore, dans le problème [E04] si la couturière confectionne 273 robes en 13 jours, en travaillant au même rythme, elle en confectionne 273 / 13 en un seul jour de travail c'est-à-dire 21 robes.

Les tâches de niveau trois requièrent l'application directe d'un pourcentage [E05] ou d'une formule [E10] dans un problème à trois termes numériques où l'un d'entre eux représente implicitement une fonction. Ainsi, dans l'exercice [E05], l'employé est payé 11,50 euros de l'heure et voit son salaire augmenter de 4%. L'élève calculera l'augmentation de 4% en multipliant les 11,50 euros de salaire par 0,04 et trouvera le montant de 0,46 euro d'augmentation. De même, dans l'exercice [E10], La masse de farine produite à partir de 5 tonnes de blé se calcule en multipliant la masse de blé par 0,8 ce qui donne 4 tonnes de farine. Dans les deux cas, une fonction linéaire de coefficient respectif 0,04 et 0,8 est sous-jacente au calcul.

Les tâches du quatrième niveau demandent de répondre à des questions peu fréquentes ou de calculer des valeurs qui, dans les situations réelles, sont celles qui sont connues : comparer deux coefficients de proportionnalité [E08], déterminer un pourcentage [E03], inverser un pourcentage [E06] ou calculer un antécédent [E11]. Ainsi, par exemple, dans l'exercice [E06] il s'agit du délicat problème d'inversion d'un pourcentage. On sait que le prix de fabrication d'une paire de chaussures subit une première augmentation de 25% puis une seconde augmentation de 20% pour devenir le prix de vente. Le calcul du prix de fabrication d'une paire de chaussures vendue 135 euros est difficile, il demande de déterminer le coefficient multiplicatif permettant de passer directement du prix de fabrication au prix de vente ($1,25 \times 1,20 = 1,5$) puis de diviser le prix de vente par ce coefficient ($135 / 1,5 = 90$).

Trois autres critères ont été définis pour rendre compte des connaissances importantes à mobiliser dans les problèmes de proportionnalité. Deux portent sur la nature des nombres en jeu : nous avons distingué, d'une part, les nombres entiers [E04] ou non-entiers [E05] et, d'autre part, les nombres concrets (ils expriment la mesure d'une grandeur [E08]) ou abstraits (ils n'ont pas d'unité [E09]). Le troisième concerne les registres de représentation des données du problème ou des réponses demandées : le langage naturel [E01], les tableaux de valeurs [E09], les graphiques ou les dessins figuratifs. Ce critère distingue les exercices selon qu'ils peuvent (ou non) être lus et résolus dans le même registre de représentation. Les changements de registres, auxquels s'associent souvent des changements de cadres, sont en effet reconnus comme étant des vecteurs d'apprentissages (Douady, 1986 ; Duval, 1995). Les méthodes d'utilisation de ces critères peuvent maintenant être décrites.

2. *Les analyses croisées nécessaires pour mener cette étude*

Les deux principales questions posées dans cette recherche conduisent à des analyses croisées des exercices selon les périodes, les manuels, les contextes et les critères relatifs aux apprentissages potentiels. Les techniques mises en œuvre sont exposées dans le détail à partir du cas du premier tableau croisé, nous exposons ici seulement les comparaisons qui seront effectuées.

La comparaison des manuels des trois périodes – pré-moderne, moderne et post-moderne – évalue l'impact des programmes scolaires sur la manière dont l'enfant est institué en tant qu'élève en classe de mathématiques, c'est-à-dire s'il est plutôt considéré en tant qu'enfant, futur professionnel, futur citoyen ou scientifique. L'étude des manuels d'une même période permet de mesurer l'éventuel impact institutionnel : une grande homogénéité des manuels pourra s'interpréter comme un impact important, alors qu'une grande hétérogénéité invitera plutôt à le relativiser.

L'analyse croisée des exercices permettra enfin de savoir s'ils conduisent à des apprentissages mathématiques équivalents indépendamment des contextes. Dans le cas contraire, il faudra envisager que les énoncés puissent bien, eux-mêmes, être vecteurs de différenciation scolaire.

III. INFLUENCE DES PROGRAMMES SCOLAIRES ET CONSEQUENCES SUR LES APPRENTISSAGES

L'étude débute donc par l'examen de l'effet éventuel des programmes scolaires sur les énoncés des exercices de proportionnalité proposés dans les manuels de la classe de 6e qui ont été étudiés, et plus précisément sur les contextes dans lesquels les problèmes sont posés. Elle se poursuit par une analyse du lien entre les contextes et les apprentissages potentiels.

1. Variation des contextes selon les périodes et les manuels scolaires

Le tableau n°1 indique la répartition des 495 exercices selon les trois périodes et les quatre contextes. Comme annoncé précédemment, nous allons exposer la méthode mise en œuvre pour analyser ce tableau et qui sera également utilisée pour les suivants.

À chaque ligne du tableau n°1 correspond une période, et à chaque colonne correspond un contexte. Dans chaque case du tableau figurent deux valeurs : à gauche et en caractères droits sont présentés les effectifs empiriques c'est-à-dire ceux qui ont été déterminés par le codage des énoncés ; à droite et en italiques figurent les effectifs théoriques arrondis auxquels on aboutirait en cas d'indépendance entre les périodes et les contextes des exercices, c'est-à-dire si les programmes n'avaient pas d'influence sur les auteurs des manuels scolaires et donc sur la manière dont l'enfant est institué en tant qu'élève, en mathématiques, pour l'enseignement de la proportionnalité en 6e.

	Enfant		Pro.		Citoyen		Scientif.		Total
Pré-mod.	0	*6*	49	*29*	92	*70*	29	*65*	170
Moderne	0	*4*	17	*23*	45	*54*	68	*49*	130
Post-mod.	17	*7*	20	*34*	67	*80*	91	*74*	195
Total	17		86		204		188		495

Tableau 1 *- Périodes et contextes des énoncés*

Ainsi, par exemple, peut-on lire dans ce tableau les deux effectifs de la case concernant les exercices à contexte professionnel des manuels de la période pré-moderne, c'est-à-dire la case correspondant à la première ligne et à la deuxième colonne : 49 en caractères droits et 29 en italiques. Le nombre 49 est l'effectif empirique, c'est celui qu'a donné le codage des 170 exercices de la période pré-moderne. Le nombre 29 est l'effectif théorique, il correspond à un calcul effectué à partir des résultats obtenus pour l'ensemble des exercices : ayant codé 86 exercices à contexte professionnel (total de la deuxième colonne) sur l'ensemble des 495 exercices analysés, il y en aurait théoriquement 29 sur les 170 de la période pré-moderne si ces 86 exercices étaient répartis proportionnellement selon les périodes ($29/170 \approx 86/495$). La comparaison de ces deux effectifs est très instructive : durant la période pré-moderne, les exercices à contextes professionnels sont plus fréquents qu'ils ne le seraient sans influence de la période sur les contextes (ils sont 49 sur 170 au lieu de 29 sur 170). Cette méthode d'analyse des tableaux croisés nous permet de déceler une corrélation éventuelle entre les périodes et les contextes, c'est-à-dire entre les programmes scolaires et les choix d'exercices effectués par les auteurs de manuels de mathématiques. Poursuivons donc l'analyse.

L'examen de la première colonne révèle que les exercices qui placent l'élève en tant qu'enfant sont caractéristiques de la période post-moderne, il n'y en avait pas avant. Dans la première ligne, les écarts entre effectifs empiriques et théoriques indiquent que, lors de la période pré-moderne, les contextes professionnel et citoyen sont sur-représentés au détriment du contexte scientifique. Ce constat cohérent avec les orientations de la politique scolaire autorise l'hypothèse d'une influence institutionnelle sur les choix des auteurs des manuels.

Pour la période moderne, c'est au contraire le contexte scientifique qui est sur-représenté au détriment des autres ; l'influence institutionnelle se manifeste donc encore. Pour la période post-moderne, on remarque surtout une sur-repésentation du contexte de l'enfance et une sous-représentation du contexte professionnel, ce qui est une fois de plus convergent avec une influence institutionnelle.

L'ensemble de ces interprétations reposent sur le constat d'écarts entre les effectifs empiriques et les effectifs théoriques, mais ces écarts sont-ils suffisamment importants pour leur accorder une signification, comme nous venons de le faire ? La statistique inférentielle apporte une réponse précise à cette question. Sans exposer ici la théorie des tests, rappelons qu'un test d'indépendance produit une valeur de probabilité p qui, lorsqu'elle est inférieure à 1% ($p < 0{,}01$), permet de déduire que les écarts entre les effectifs empiriques et théoriques sont suffisamment importants pour que variables étudiées ne soient pas considérées comme indépendantes[2]. Dans le cas contraire où la probabilité est supérieure à 1% ($p > 0{,}01$), on doit donc renoncer à conclure à l'effet d'une variable sur l'autre. En ce qui concerne le tableau précédent, un test d'indépendance a été effectué qui confirme l'existence d'un effet de la période sur les contextes des exercices (test du chi² de Pearson avec correction de Yates, $p < 0{,}01$).

En complément de l'analyse du tableau n°1, nous nous sommes demandé si la répartition des contextes des exercices était analogue pour les auteurs des trois manuels d'une même période. Nous avons donc, pour chaque période, construit un tableau sur le même modèle que le tableau n°1, mais qui croise, cette fois-ci, les manuels et les contextes des exercices. Le tableau n°2 concerne la période post-moderne.

	Enfant		Pro.		Citoyen		Scientif.		Total
Manuel 1	2	*3*	2	*4*	9	*11*	20	*15*	33
Manuel 2	10	*7*	14	*8*	21	*27*	33	*36*	78
Manuel 3	5	*7*	4	*8*	37	*29*	38	*40*	84
Total	17		20		67		91		195

Tableau 2 *- Manuels et contextes des énoncés, période post-moderne*

Dans ce tableau comme dans ceux qui concernent les périodes pré-moderne et moderne, peu d'écarts apparaissent entre effectifs empiriques et théoriques. Cela signifie qu'aucun des manuels ne propose une répartition des exercices entre les quatre contextes qui soit sensiblement différente de la répartition moyenne observée sur l'ensemble des trois manuels. Un test statistique a été effectué qui atteste la faiblesse de ces écarts (test de Fisher, $p > 0{,}01$). L'ensemble de ces résultats permettent d'attester d'un effet des politiques scolaires sur les programmes et sur les auteurs des manuels de mathématiques. Pendant ces trois périodes différemment marquées politiquement, la manière d'instituer l'enfant en tant qu'élève varie sensiblement. Les énoncés des exercices portant sur la proportionnalité projettent particulièrement les élèves comme futurs professionnels et futurs citoyens durant la période pré-moderne, comme scientifique durant la période moderne, et plutôt comme enfant ou scientifique durant la période post-moderne.

[2] Le seuil de 1% a été choisi car les effectifs sur lesquels portent les analyses sont assez importants relativement à l'utilisation des tests de statistique inférentielle. C'est un seuil assez strict. Lorsque les effectifs sont plus faibles, le seuil plus souple de 5% est fréquemment admis en sciences humaines et sociales.

Il s'agit maintenant de savoir, d'une part si les apprentissages auxquels peut conduire la résolution des exercices sont dépendants des contextes dans lesquels les problèmes sont posés, et d'autre part si cette éventuelle dépendance varie selon les périodes étudiées.

2. *Variation des apprentissages potentiels selon les contextes*

Pour chacune des périodes, des croisements entre le contexte des énoncés d'une part, et le niveau des tâches, la nature des nombres en jeu (entiers ou non, abstraits ou non) et les changements éventuels de registre de représentation d'autre part.

<u>La relation contextes-apprentissages durant la période pré-moderne</u>

Le tableau n°3 indique la répartition des 170 énoncés des exercices de la période pré-moderne suivant le contexte et le niveau des tâches requises. Il a été construit sur le même modèle que les précédents ; la méthode d'analyse est analogue à celle qui a déjà été exposée.

	Niveau 1		Niveau 2		Niveau 3		Niveau 4		Total
Profession.	0	*1*	18	*13*	25	*20*	7	*17*	50
Citoyen	2	*2*	16	*23*	33	*37*	40	*29*	91
Scientifique	2	*1*	9	*7*	10	*11*	8	*9*	29
Total	4		43		68		55		170

Tableau 3 *- Contextes et niveaux des tâches, période pré-moderne*

Les effectifs empiriques de la première colonne indiquent que durant la période pré-moderne, on ne demandait pratiquement jamais aux élèves de reconnaître une situation de proportionnalité. L'examen des différences entre les effectifs empiriques et théoriques révèle que les tâches de niveau 4 sont sur-représentées lorsque les contextes invitent les élèves à se projeter comme futur citoyen alors que ces tâches sont sous-représentées lorsque le contexte est professionnel. Ces écarts méritent d'être pris en compte : un test d'indépendance a été effectué qui permet de conclure à un effet significatif de la variable contexte sur la variable niveau de procédure (test de Fisher, $p < 0,01$).

Le tableau suivant (tableau n°4) indique la répartition des 170 énoncés suivant le contexte et les trois autres indicateurs d'apprentissage : nombres entiers ou non, concrets ou non, changement de registres de représentation ou non.

	Entiers / non		Concrets / non		Chgt reg /non		Total
Profession.	30/20	*25/25*	50/0	*50/0*	0/50	*0/50*	50
Citoyen	42/49	*45/46*	91/0	*90/1*	0/91	*0/91*	91
Scientifique	12/17	*14/15*	28/1	*29/0*	0/29	*0/29*	29
Total	84/86		169/1		0/170		170

Tableau 4 *- Contextes et autres apprentissages, période pré-moderne*[3]

On remarque que, durant la période pré-moderne, les nombres en jeu dans les exercices de proportionnalité sont toujours concrets et qu'aucun changement de registre n'est demandé. Une légère dysharmonie apparaît dans la première colonne, mais l'analyse statistique ne

[3] **Indication de lecture** : à l'intersection de la première ligne et de la première double colonne, 30/20 signifie que parmi les énoncés à contexte professionnel, 30 portent sur des nombres entiers et 20 sur des nombres non entiers (effectifs empiriques), et 25/25 signifie qu'en l'absence d'effet du contexte sur la nature des nombres, on devrait en observer 25 portant sur des nombres entiers et 25 sur des nombres non entiers (effectifs théoriques).

permet pas de la considérer comme significative (test de Fisher, $p > 0{,}01$). C'est donc au niveau des procédures requises qu'un effet des contextes sur les apprentissages potentiels est constaté durant la période pré-moderne.

La relation contextes-apprentissages durant la période moderne

Un travail analogue a été mené pour la période moderne, il ne fait pas ressortir de variation significative des apprentissages potentiels en fonction des contextes. Ni quant aux procédures de résolution des problèmes (tableau n°5), si l'on excepte la sur-représentation des tâches de niveau 1 pour les énoncés à contextes scientifiques et qui n'affecte pas sensiblement les autres valeurs :

	Niveau 1		**Niveau 2**		**Niveau 3**		**Niveau 4**		**Total**
Profession.	0	*5*	34	*27*	13	*14*	11	*12*	58
Citoyen	1	*4*	18	*21*	14	*11*	12	*9*	45
Scientifique	10	*2*	9	*13*	5	*7*	3	*5*	27
Total	11		61		32		26		130

Tableau 5 *- Contextes et niveaux des tâches, période moderne*

Ni quant aux nombres et aux changements de registre (tableau n°6), excepté que les problèmes dont les contextes sont scientifiques portent davantage que les autres sur des nombres abstraits :

	Entiers / non		**Concrets / non**		**Chgt reg /non**		**Total**
Profession.	11/6	*9/8*	17/0	*12/5*	1/16	*1/16*	17
Citoyen	27/18	*24/21*	45/0	*32/13*	2/43	*1/44*	45
Scientifique	31/37	*36/32*	31/37	*49/19*	1/67	*2/66*	68
Total	69/61		93/37		4/126		130

Tableau 6 *- Contextes et autres apprentissages, période moderne*

Autrement dit, durant la période moderne, le contexte de l'énoncé n'a pas d'influence sensible sur ce qui est donné à apprendre aux élèves.

La relation contextes-apprentissages durant la période post-moderne

La relation entre contextes et apprentissages potentiels est loin d'être aussi neutre durant la période post-moderne. C'est ce que révèle le tableau n°7.

	Niveau 1		**Niveau 2**		**Niveau 3**		**Niveau 4**		**Total**
Enfant	1	*4*	12	*5*	3	*7*	1	*1*	17
Profession.	1	*4*	11	*6*	8	*9*	0	*1*	20
Citoyen	15	*14*	14	*21*	36	*30*	2	*2*	67
Scientifique	25	*20*	24	*29*	38	*39*	4	*3*	91
Total	42		61		85		7		195

Tableau 7 *- Contextes et niveaux des tâches, période post-moderne*

On remarque en effet une sur-représentation des tâches de niveau 3 lorsque le contexte de l'exercice projette l'élève comme futur citoyen, alors que le niveau 2 est sur-représenté lorsque le contexte est celui de l'enfance ou du monde professionnel. Un test statistique a été effectué qui permet de conclure à un effet significatif du contexte sur le niveau de tâche (test du chi² de Pearson avec correction de Yates, $p < 0{,}01$).

Les croisements présentés dans le tableau n°8 montrent en outre un effet du contexte sur les indicateurs d'apprentissage concernant les nombres. Le contexte scientifique conduit en effet à une sur-représentation des énoncés portant sur des nombres non-entiers et abstraits, alors que les nombres sont toujours concrets lorsque les élèves sont amenés à se projeter comme futur professionnels ou futur citoyens. Ces différences concernant la nature des nombres – entiers ou non, concrets ou abstraits – sont toutes les deux significatives (test de Fisher, $p < 0{,}01$).

	Entiers / non		Concrets / non		Chgt reg /non		Total
Enfant	13/4	*11/6*	15/2	*13/4*	5/12	*3/14*	17
Profession.	15/5	*12/8*	20/0	*15/5*	0/20	*3/17*	20
Citoyen	46/21	*42/25*	67/0	*50/17*	11/56	*10/57*	67
Scientifique	47/44	*56/35*	43/48	*68/23*	14/77	*14/77*	91
Total	121/74		145/50		30/165		195

Tableau 8 *- Contextes et autres apprentissages, période post-moderne*

Finalement, l'étude menée sur les exercices de la période post-moderne permet de conclure, pour ce qui concerne la proportionnalité en classe de 6^e^, à un effet différenciateur des énoncés des problèmes de mathématiques. Lorsque les contextes sont relatifs à la vie citoyenne ou au monde scientifique, les exercices offrent des opportunités d'apprendre globalement supérieures à celles qu'ils offrent lorsque les contextes portent sur l'enfance ou le monde professionnel.

IV. CONCLUSION

Les programmes d'enseignement des mathématiques instituent les enfants en tant qu'élèves en définissant les moyens qui devraient leur permettre d'acquérir les connaissances et les techniques nécessaires pour résoudre un ensemble de problèmes fixé. Une analyse comparative des énoncés d'exercices sur la proportionnalité proposés dans des manuels correspondant à trois périodes différentes de l'enseignement en France, fait apparaître une homogénéité des choix des auteurs des manuels scolaires au cours de chaque période et donc une influence effective des instructions officielles sur les choix d'enseignement de ces auteurs. Les énoncés de problèmes de proportionnalité évoquant des contextes professionnels et citoyens dominent durant la période pré-moderne, les contextes scientifiques sont prépondérants durant la période moderne alors que plus récemment, durant la période post-moderne, les auteurs privilégient plutôt les contextes de l'enfance ou du monde scientifique.

Il est légitime alors de penser qu'à leur insu, en proposant des problèmes issus de contextes professionnels à leurs élèves, les enseignants risquent fort de renforcer une conception selon laquelle on va à l'école pour obtenir un bon métier, conception qui, justement, est partagée par les élèves dont les parcours scolaires sont les moins prestigieux… On retrouve ici la problématique de ces chercheurs qui tentent de mettre au jour des formes de malentendus à l'origine de la différenciation scolaire.

Dans cette recherche, nous avons poussé plus loin l'analyse en franchissant une étape supplémentaire : nous nous sommes demandés, et c'était là le cœur de notre problématique, si les occasions d'apprendre qu'offre la résolution d'exercices de mathématiques étaient indépendantes des contextes de ces exercices. L'étude a été réalisée sur l'enseignement de la proportionnalité en classe de 6^e^, elle porte sur près de cinq cents énoncés de problèmes extraits de manuels scolaires des trois périodes pré-moderne, moderne et post-moderne. Les analyses effectuées révèlent deux résultats. Le premier est que les contextes des énoncés ne contraignent pas directement les mathématiques qu'ils permettent d'apprendre : à la période des mathématiques modernes, période marquée par la démocratisation de l'enseignement par la recherche de l'égalité des chances, les apprentissages potentiels sont indépendant des contextes des énoncés d'exercices. Le second est que les énoncés proposés dans les manuels de la période post-moderne ne sont pas neutres : les contextes des problèmes se retrouvent une deuxième fois hiérarchisés, non seulement en fonction des rapports à l'école et aux savoirs auxquels ils correspondent, mais aussi en fonction des apprentissages potentiels auxquels conduit leur résolution. Et cette hiérarchie ne fait que soutenir la précédente : les énoncés dont le contexte est lié à l'enfance ou au monde professionnel donnent significativement moins d'occasions d'apprendre que ceux dont le contexte est lié à la vie citoyenne ou au monde scientifique.

L'ensemble de ces résultats conduit à une situation où, dans la période post-moderne, tout se passe comme si les élèves dont le rapport à l'école et aux savoirs se décrit selon l'idéaltype « obtenir un bon métier » et qui de ce fait s'investissent davantage dans la résolution des exercices à contexte professionnel, étaient, sauf travail spécifique de l'enseignant, d'une part amenés à renforcer ce rapport à l'école pénalisant, et d'autre part à bénéficier ainsi de moins d'occasions d'apprendre des mathématiques que ceux dont le rapport à l'école et aux savoirs correspond à l'idéaltype « apprendre la vie », qui s'investissent davantage dans les problèmes où les contextes leur demandent de se projeter comme futur citoyen et qui renforcent ainsi un rapport aux savoirs moins pénalisant. Bien qu'il faille encore le vérifier empiriquement, le processus différenciateur qui vient d'être décrit constitue un nouvel apport qui renforce les résultats sur la différenciation sociale des apprentissages scolaires.

REFERENCES

Ayala, J. & Roditi, E. (2014). Inégalités sociales et apprentissages en mathématiques : les énoncés des exercices seraient-ils eux-mêmes différenciateurs ? *Recherches en didactiques, 17,* 45-64.

Bautier É., Goigoux R. (2004). Difficultés d'apprentissage, processus de secondarisation et pratiques enseignantes : une hypothèse relationnelle, *Revue française de pédagogie*, n°148, Lyon, INRP, 89-100.

Beswick, K. (2011). Putting context in context : an examination of the evidence for benefits of « contextualised » tasks, *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*, 367-390.

Blanchard-Laville C. (1989) Questions à la didactique des mathématiques, *Revue française de pédagogie*, n°89, Lyon, INRP, 63-70.

Broccolichi S., Sinthon R. (2011) Comment s'articulent les inégalités d'acquisitions scolaires et d'orientation ? Relations ignorées et rectifications tardives, *Revue française de pédagogie*, n°175, Lyon, IFÉ, 15-38.

Brousseau G. (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 33-115.

Charlot B., Bautier E., Rochex J.-Y. (1992) *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°12.1, Grenoble, La Pensée Sauvage, 73-112.

D'Enfert R. (2011) Une réforme ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970), *dans* d'Enfert Renaud & Kahn Pierre (dir.), *Le temps des* *réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République : les années 1960* , Grenoble, Presses universitaires de Grenoble, pp. 53-73.

D'Enfert R., Gispert H. (2010) « L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire » dans Jacquet-Francillon François, d'Enfert Renaud, Loeffel Laurence (dir.), *Une histoire de l'école. Anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France, XVIIIe-XXe siècle*, Paris, Retz, pp. 333-342.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°7.2, Grenoble, La Pensée Sauvage, 5-31.

Duval R. (1995) *Sémiosis et pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Berne, Peter Lang.

Hersant M. (2005) La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en france, d'hier à aujourd'hui, *Repères-IREM*, n°59, Metz, Topiques éditions, 5-41.

Rochex J.-Y., Crinon J. (dir.) (2011) *La construction des inégalités scolaires*, Rennes, PUR.

Roditi É. (2013) Une orientation théorique pour l'analyse des pratiques enseignantes en didactique des mathématiques. *Recherches en didactiques*, 15, 39-60.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en didactique des mathématiques*, n°10.2-3, Grenoble, La Pensée Sauvage, 133-170.