Éthique de la population : l'apport des critères de bien-être dépendant du rang

Stéphane Zuber

Documents de Travail du
Centre d'Economie de la Sorbonne

CES Working Papers

Ethique de la population : l'apport des critères de bien-être dépendant du rang

Stéphane ZUBER

2016.12

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
http://centredeconomiesorbonne.univ-paris1.fr/
ISSN : 1955-611X

Éthique de la population : l'apport des critères de bien-être dépendant du rang

Stéphane Zuber *

29 janvier 2016

Résumé

Cet article présente l'intérêt que peuvent avoir des critères de bien-être dépendant du rang dans le cadre de l'éthique de la population. Ce champ de recherche s'intéresse à l'évaluation et à la comparaison d'allocations lorsque des populations de tailles différentes sont en jeu. On montre que les critères de bien-être dépendant du rang ne sont pas sujets à plusieurs écueils auxquels sont confrontés les critères utilitaristes (généralisés) habituellement étudiés dans ce champ.
Mots clés : Évaluation sociale, éthique de la population, utilitarisme, critères de bien-être dépendant du rang.
Classification JEL : D63.

Abstract

This paper discusses the interest of rank-dependent welfare criteria for population ethics. Population ethics is concerned with the evaluation and the comparison of allocations when population size is variable. It is shown that rank-dependent criteria may be immune to several drawbacks faced by (generalized) utilitarian criteria, which are usually considered in that field.
Mots clés : Social evaluation, population ethics, utilitarianism, rank-dependent welfare criteria.
JEL Classification numbers : D63.

*Paris School of Economics – CNRS. *Correspondance :* Centre d'Économie de la Sorbonne, Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de l'Hôpital, 75013 Paris. *Courriel :* stephane.zuber@univ-paris1.fr.
Ce texte a été rédigé pour la journée d'étude « Économie de la justice sociale » organisée le 16 janvier 2015 par la *Revue Économique* à l'occasion de la remise du prix de la *Revue Économique* à Marc Fleurbaey. Je tiens à remercier les participants à cette journée pour leurs commentaires et remarques. Je veux aussi remercier Marc Fleurbaey pour ses commentaires sur cet article et pour notre collaboration sur de nombreux projets, dont certains portent sur l'éthique de la population. Il n'est bien entendu en rien responsable du contenu du présent article. Je tiens enfin à remercier un rapporteur anonyme pour ses remarques et corrections.

Introduction

Les économistes ont depuis longtemps lié taille de la population et développement économique, pour souligner notamment, suivant l'intuition malthusienne, qu'une population excessive pouvait nuire au développement économique. La problématique des ressources naturelles non-renouvelables et celle du changement climatique ont remis au goût du jour ce questionnement et l'on enrichi. Le récent rapport du Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC ou IPCC en Anglais) souligne ainsi l'importance de la prise en compte des changements de taille de population dans l'évaluation des politiques climatiques. Il mentionne que cela soulève d'importantes questions éthiques (p. 223 du Rapport du Groupe de Travail 3, IPCC [2015]).

En effet, l'arbitrage auquel on peut faire face est alors le suivant : vaut-il mieux une population nombreuse mais pauvre, ou plus réduite mais riche ? Pour émettre ce type de jugement, il est nécessaire de comparer des populations de tailles différentes. Cela pose des problèmes nouveaux aux méthodes habituelles d'évaluation des politiques publiques. Un critère d'évaluation souvent utilisé par les économistes est par exemple l'utilitarisme classique, qui calcule la somme totale d'utilité ou de bien-être engendrée par telle ou telle décision. Mais se présente alors une difficulté, mise en évidence par Derek Parfit dans son ouvrage *Reasons and Persons* [Parfit, 1984], et qu'il a nommé la « Conclusion révoltante » (*Repugnant Conclusion*) : il est possible que l'utilitarisme préfère une population dans laquelle le niveau de bien-être moyen est extrêmement faible à une population de taille importante bénéficiant d'un bien-être moyen très élevé, pourvu que la première population soit suffisament grande.

On pourrait opposer à cette perspective une perspective plus malthusienne qui ne considère que le bien-être moyen. Mais là encore, une difficulté se fait jour : une population très réduite peut être préférée à une population bien plus grande simplement parce que le bien-être moyen au sein de la première est légèrement plus élevé que dans la seconde. Pour éviter des arbitrages extrêmes entre « quantité » (taille de la population) et « qualité » (niveau de bien-être moyen), plusieurs alternatives de type utilitariste ont été explorées dans la littérature théorique. Une solution fameuse consiste à supposer l'existence d'un « niveau critique » de bien-être, c'est-à-dire un niveau tel qu'il est souhaitable d'ajouter des individus à une population si et seulement si leur niveau de bien-être est plus grand que ce seuil (Broome [2004], Blackorby, Bossert et Donaldson [1995]). Cette solution n'est cependant elle-même pas exempte de problèmes (cf. infra). Généralement, les solutions utilitaristes qui ont été offertes pour évaluer des populations de tailles différentes ont toutes des implications qui peuvent se révéler contre-intuitives (cf. Blackorby, Bossert et Donaldson [2005, Chap. 5] et Arrhenius [2016]).

Cet article a pour objet de présenter certaines de ces difficultés et de plaider pour une approche alternative aux approches utilitaristes qui ont principalement été explorées jusqu'ici. Cette approche alternative sera qualifiée d'approche du « bien-être dépendant du rang ». Il s'agit d'amender l'utilitarisme en pondérant le bien-être individuel en fonction de son rang dans la distribution des utilités : les individus les moins bien lotis recevront un poids plus fort, qui permettra d'accorder une attention supplémentaire à l'amélioration de leur situation. Les approches mettant en jeu des pondérations dépendantes du rang ont été largement utilisées en théorie de la décision (Quiggin [1982], Yaari [1987], Cohen et Tallon [2000]) et en théorie de la mesure des inégalités (Donaldson et Weymark [1980], Weymark [1981], Ebert [1988], Gajdos [2001]).

Ces approches n'ont en revanche quasiment pas été étudiées dans le champ de l'éthique de la population (les deux seules exceptions dont j'ai connaissance sont Sider [1991] et Asheim et Zuber [2014]). Cette absence de prise en considération est probablement liée au fait que les principaux auteurs du domaine s'inscrivent dans une perspective utilitariste ou « prioritariste » (utilitariste généralisée), et mettent ainsi en avant de façon privilégiée un principe d'indépendance ou de séparabilité de l'utilité des individus. On peut citer notamment D. Parfit, J. Broome, C. Blackorby, W. Bossert et D. Donaldson, qui ont tous fondé leur analyse autour de tels principes d'indépendance. Les critères de bien-être dépendant du rang ne peuvent satisfaire que des versions restreintes de ces principes. Le parti pris de cet article est que de tels affaiblissements de l'indépendance peuvent être acceptés pour pouvoir satisfaire d'autres principes propres au cadre de l'éthique de population. En effet, sa contribution est de montrer que les critères de bien-être dépendant du rang ne sont pas sujets à plusieurs écueils auxquels sont confrontés les critères utilitaristes généralisés. Les remarques conclusives reviendront sur le conflit entre la séparabilité et d'autres principes d'éthique de la population et discuteront les difficultés qu'impliquent un abandon de l'indépendance. Elles évoqueront également les quelques approches égalitaristes proposées par un petit nombre d'auteurs (notamment M. Fleurbaey et G. Arrhenius).

Pour mieux comprendre ce qui différencie critères utilitaristes et critères de bien-être dépendant du rang, on peut remarquer que ces derniers ont la particularité d'être des critères d'évaluations à valeur variable (*variable value principles*, cf. Arrhenius [2016]) : la valeur d'une population égalitaire ne varie pas de façon affine avec la taille de la population, de sorte qu'il est de moins en moins bénéfique d'ajouter des individus à un niveau d'utilité donné. Ce sont aussi des approches sensibles au contexte (*context sensitive theory*, cf. Arrhenius [2016]) : la valeur contributive d'une vie dépend du bien-être des autres individus vivant dans cette population. En particulier, la position relative de l'individu ajouté joue un rôle important. Ces caractéristiques permettent de résoudre certaines difficultés que ne peuvent surmonter les critères utilitaristes.

Dans la prochaine section, on présente le cadre formel d'analyse pour évaluer des décisions ayant un impact sur la taille de la population et les niveaux de bien-être. Sont également présentés certains des critères qui ont pu être analysés dans la littérature théorique, et la classe des critères de bien-être dépendant du rang qui est l'objet de cet article. Dans la section suivante, on énonce certains principes qu'il peut sembler souhaitable de respecter quand on compare des allocations au sein de populations de tailles différentes. On montre qu'au contraire des critères utilitaristes (généralisés) les critères de bien-être dépendant du rang peuvent satisfaire simultanément nombre de ces principes. Une dernière section propose quelques remarques conclusives. Des preuves formelles des différents résultats énoncés dans l'article sont disponibles en annexe.

Cadre d'analyse et définitions

Le but de l'analyse est de comparer des allocations de ressources au sein de populations de tailles différentes. Les allocations sont décrites comme des vecteurs d'utilités pour les individus qui existent. Formellement, les objets comparés sont donc des vecteurs de taille variable, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n(\mathbf{x})})$, avec $n(\mathbf{x})$ la longueur du vecteur $\mathbf{x}$. L'ensemble des allocations possibles est donc $\mathbf{X} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$. Ce type d'allocations peut être illustré graphiquement comme dans la Figure 1.

On suppose ainsi que l'on dispose pour chaque individu vivant dans une situation donnée d'un niveau de bien-être, qui est mesurable par un nombre réel, x_i, et comparable entre individus [1]. On fait l'hypothèse que les mesures de bien-être

1. Tout au long de l'article, on utilise indifféremment les termes de bien-être et d'utilité pour désigner une mesure numérique de l'avantage individuel. On ne fait pas d'hypothèse substantielle sur la façon dont le bien-être est mesuré ; il peut s'agir aussi bien d'une mesure hédonique, d'un indice de la satisfaction des préférences, d'une mesure plus générale des ressources disponibles pour l'individu, ou encore d'une mesure des « capabilités ». La littérature philosophique sur le sujet a tendance à supposer que l'utilité est mesurable et comparable, mais Fleurbaey et Tadenuma [2014] ont montré que des approches monétaires n'utilisant qu'une information ordinale et non comparable sur l'utilité pouvaient être mises en œuvre.

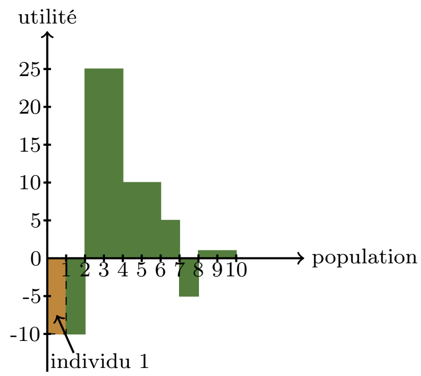


FIGURE 1 – Illustration de l'allocation $(-10, -10, 25, 25, 10, 10, 5, -5, 1, 1)$.

Note : Dans les figures, chaque unité de l'axe des abscisses correspond à un individu classé par ordre d'apparition, avec en ordonnées son niveau de bien-être. Ainsi, l'intervalle $[0, 1]$ sur l'axe des abscisses correspond à l'individu 1 et le niveau d'utilité sur cet intervalle (en l'occurence -10) à son bien-être. Une figure plus large correspond donc à une population plus nombreuse.

sont normalisées de sorte que le niveau 0 soit le niveau dit de *neutralité*, c'est-à-dire le niveau à partir duquel une vie vaut la peine d'être vécue (du point de vue de l'individu) [2]. Ainsi le bien-être est normalisé de sorte qu'au-dessus de 0 une vie a de la valeur, tandis qu'elle ne vaut pas d'être pour des niveaux négatifs.

Pour classer ces allocations, on suppose qu'il existe une relation de bien-être social $\succsim$ définie sur l'ensemble $\mathbf{X}$. Ainsi, quels que soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{x} \succsim \mathbf{y}$ signifie que l'allocation $\mathbf{x}$ est jugée socialement préférable à l'allocation $\mathbf{y}$. Par exemple, $(2, 2, 2, 2, 2) \succsim (3, 3, 3)$ signifie qu'une allocation dans laquelle cinq individus ont un niveau de bien-être de 2 est socialement préférable à une allocation dans laquelle seuls trois individus avec un niveau de bien-être de 3 existent. On suppose que la relation $\succsim$ est représentable par une fonction de bien-être social W définie sur $\mathbf{X}$. Le fait que $\succsim$ soit *représentée* par $W : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ correspond formellement à

2. Cette notion même de niveau de neutralité est problématique et très discutée parmi les philosophes. Il ne s'agit pas ici de la discuter plus avant. Mais on renvoie à Arrhenius [2016] pour une discussion récente.

la propriété suivante : quels que soient $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$,

$$\mathbf{x} \succsim \mathbf{y} \Longleftrightarrow W(\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{y}).$$

Pour pouvoir présenter un certain nombre de principes et de critères proposés dans le cadre qui nous occupe, il est nécessaire d'introduire quelques notations supplémentaires. Quel que soit $z \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $(z)_n \in \mathbf{X}$ correspond au vecteur d'utilité de taille n tel que les n individus qui existent jouissent tous d'un niveau de bien-être égal à z. On note également $(\mathbf{x}, z)$ le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ auquel a été ajouté un individu avec un niveau de bien-être z, et $(\mathbf{x}, (z)_n)$ le vecteur $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ auquel ont été ajoutés n individus avec un niveau de bien-être z.

Par ailleurs, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, on notera $\mathbf{x}_{[\,]} = (x_{[1]}, \ldots, x_{[r]}, \ldots, x_{[n(\mathbf{x})]})$ le vecteur aux composantes croissantes qui est un réarrangement de $\mathbf{x}$; i.e., pour tout rang $r \in \{1, \ldots, n(\mathbf{x}) - 1\}$, $x_{[r]} \leq x_{[r+1]}$. La permutation qui transforme $\mathbf{x}$ en $\mathbf{x}_{[\,]}$ n'est pas nécessairement unique (si plusieurs individus ont le même niveau de bien-être) mais le vecteur ordonné selon le rang $\mathbf{x}_{[\,]}$ est lui défini de façon unique.

On peut tout d'abord introduire une large classe de relations de bien-être social $\succsim$ abondamment discutée dans la littérature.

Definition 1 Une relation de bien-être social $\succsim$ est *prioritariste avec niveau critique et pondération de la population* s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ et deux fonctions croissantes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{++}$ et $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec ϕ continue et concave et $\phi(0) = 0$) tels que $\succsim$ est représentée par

$$W(\mathbf{x}) = \tfrac{f(n(\mathbf{x}))}{n(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^{n(\mathbf{x})} \left(\phi(x_i) - \phi(c)\right), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \tag{1}$$

Ces critères s'inscrivent dans une logique que l'on qualifie de « prioritariste » plus que d' « utilitariste », car ils amendent utilitarisme en adjoignant au principe d' « utilité » un principe de priorité dans la définition du bien-être social [3]. Cela apparaît dans l'utilisation d'une transformation concave ϕ des niveaux de bien-être pour donner plus de poids (marginalement) au bien-être des individus moins bien lotis.

Dans l'Équation (1), c est un paramètre de niveau critique. Si l'on considère une situation de parfaite égalité à un niveau x de bien-être, le critère (1) devient $f(n)\big(\phi(x) - \phi(c)\big)$, de sorte qu'il est toujours bon d'étendre la population au niveau x si est seulement si $x \geq c$. Le concept de « niveau critique » désigne normalement le niveau de bien-être tel que si on ajoute un individu avec ce niveau à une population donnée la situation est aussi bonne du point de vue de l'évaluation sociale. La litérature s'est focalisée sur le cas d'un niveau critique constant, comme c'est par exemple le cas pour l'utilitarisme avec niveau critique promu par Blackorby, Bossert et Donaldson [2005] :

$$W^{UNC} = \sum\nolimits_{i=1}^{n(\mathbf{x})} (x_i - c)\,.$$

Il existe cependant plusieurs critères qui permettent au niveau critique de varier selon la population déjà existante. En particulier, Ng [1989] a proposé une classe de critères utilitaristes avec pondération de la population (*Number-dampened utilitarianism*) pour lesquels la valeur d'une population égalitaire varie de façon non-affine et qui ont la propriété que la valeur contributive des vies additionnelles change selon la distribution du bien-être dans le reste de la population. La forme générale de ces critères utilitaristes avec pondération de la population est :

$$W^{UPP} = \tfrac{f(n(\mathbf{x}))}{n(\mathbf{x})} \sum\nolimits_{i=1}^{n(\mathbf{x})} x_i.$$

3. La doctrine « prioritariste » a été défendue par Parfit [1997] et Arneson [2000]. Blackorby, Bossert et Donaldson [2005] donnent au prioritarisme le nom d' « utilitarisme généralisé », formulation que l'on retrouve souvent en économie.

Un cas particulier très connu est l' « utilitarisme classique », lorsque $f(n) = n$ (cela correspond aussi à l'utilitarisme avec niveau critique quand $c = 0$). Mais un autre cas particulier important est l' « utilitarisme moyen », lorsque $f(n) = 1$. Dans ce dernier cas, ajouter une vie à une population donnée augmente le bien-être social seulement si le bien-être de la personne additionnelle est supérieur au bien-être moyen. Il y a donc bien dépendance de la valeur contributive des vies additionnelles à l'égard de la population déjà existante.

Dans cet article nous proposons d'étudier des alternatives aux critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population : les critères de bien-être dépendant du rang.

Definition 2 Une relation de bien-être social $\succsim$ est un *critère de bien-être dépendant du rang* s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$, une fonction continue, croissante et concave $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (avec $\phi(0) = 0$) et une suite positive et décroissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que $\succsim$ est représentée par

$$W(\mathbf{x}) = \sum\nolimits_{r=1}^{n(\mathbf{x})} a_r \left(\phi(x_{[r]}) - \phi(c)\right), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}. \tag{2}$$

L'idée d'utiliser des critères dépendant du rang pour évaluer les situations économiques (ou les effets de politiques publiques) n'est pas nouvelle. Elle joue par exemple un rôle fondamental en théorie de la mesure des inégalités, puisque l'une des mesures les plus souvent utilisées est l'indice de Gini. En effet, l'indice de Gini se caractérise par le fait qu'il accorde aux différents niveaux de revenu des poids qui dépendent de leurs rangs dans la distribution des revenus, ces poids étant précisément la suite des nombres impairs : le revenu le plus élevé se voit doté d'un poids égal à un, le revenu immédiatement inférieur, d'un poids égal à trois, etc.

Toute une littérature théorique s'est attachée à rationaliser ces pondérations et proposer des formulations plus générales. Parmi les contributions les plus significatives pour le développement de ces approches, on peut citer notamment Donaldson et Weymark [1980], Weymark [1981] et Ebert [1988]. Ces travaux ont bénéficié du développement parallèle des modèles d'utilité espérée dépendant du rang (RDEU pour *Rank-Dependent Expected-Utility*), notamment suite aux travaux de Quiggin [1982] et Yaari [1987].

Ce type d'approche n'a cependant pas connu d'écho dans la littérature sur l'éthique de la population. A ma connaissance, il n'y a que deux exceptions (si on exclut les critères de type « Leximin », que l'on peut considérer comme des critères de bien-être dépendant du rang, mais font en général l'objet d'une analyse à part). Tout d'abord, un article de Sider [1991] qui met en avant un critère dénommé GV. Ce critère correspond à une fonction ϕ linéaire et au choix $c = 0$ dans la Définition 2. Cependant, il ne correspond pas tout à fait au cadre posé dans cette définition, car il suppose que les individus sont classés par ordre décroissant (et non croissant) de bien-être, de sorte qu'une pondération plus forte est donnée aux individus ayant un niveau plus haut de bien-être. Cela conduit donc à un principe anti-redistributif puisqu'il est souhaitable de faire des transferts vers les individus qui sont déjà les plus favorisés.

Avec G. Asheim, nous avons fait une autre proposition [Asheim et Zuber, 2014]. Nous avons caractérisé une classe de critères nommés critères de bien-être escompté en fonction du rang (*rank-discounted critical-level generalized utilitarian*). Ils correspondent au cas ou $a_r = \beta^r$ (avec $0 < \beta < 1$) dans l'Équation (2).

Il s'agit cependant ici de considérer une classe beaucoup plus large, permettant d'autres formes de pondération. On pourrait penser par exemple à une pondération semblable à celle proposée par Donaldson et Weymark [1980] pour généraliser l'indice de Gini [4] :

$$a_r = (r^\delta - (r-1)^\delta), \qquad\qquad 0 < \delta < 1.$$

Comme montré par Donaldson et Weymark [1980], ce type de pondération permet de satisfaire une propriété d'invariance à la réplication des populations.

Propriétés des critères d'évaluation

Pour comparer différents critères d'évaluation dans le cadre à population variable, on adopte ici une démarche axiomatique. On va donc proposer une liste de principes qu'il semble intuitivement souhaitable de respecter. On vérifie ensuite s'ils sont satisfaits par les critères étudiés, et à quelles conditions. Il faut souligner qu'il s'agit de définir des propriétés des critères eux-mêmes, et non des solutions « optimales » dans des contextes ou modèles économiques particuliers. Il faut également signaler que les résultats obtenus ci-dessous ne sont pas des résultats de caractérisation (qui définissent précisément les classes de critères capables de satisfaire certains principes), mais uniquement de résultats de possibilité ou d'impossibilité au sein des deux classes particulières de critères définies à la section précédente.

Le premier principe qu'on se propose de définir porte sur l'arbitrage entre taille de la population et bien-être moyen (en fait, bien-être égal de toute la population). Il s'agit d'éviter une position extrême dans laquelle le nombre d'individus pourrait toujours venir compenser un faible niveau moyen d'utilité. Cette propriété permet une certaine préférence pour la « qualité » : une population suffisamment nombreuse avec un niveau de bien-être suffisamment élevé doit pouvoir être pré-

4. En fait, Donaldson et Weymark [1980] proposent cette forme de pondération avec $\delta > 1$, mais dans le cas où les niveaux de bien-être sont ordonnés de façon décroissante.

férée à une population dans laquelle le niveau de bien-être est très faible même si celle-ci est très nombreuse. Cette propriété est nommée « Sensibilité à la qualité » (en reprenant la dénomination *Quality Condition* proposée par Arrhenius [2016][5]) :

> **Sensibilité à la qualité (*Quality Condition*)** Une relation de bien-être social $\succsim$ est *sensible à la qualité* s'il existe $y > z > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, tels que, pour tout $n > k$, $(y)_k \succ (z)_n$.

Cette propriété empêche une forme de Conclusion révoltante selon laquelle pour toute allocation égalitaire au sein d'une population, il existe une allocation égalitaire au sein d'une population plus grande qui lui est préférée, et ce pour tout niveau de bien-être positif, aussi faible que l'on puisse vouloir[6]. En particulier, l'utilitarisme classique, critiqué par Parfit [1984] parce qu'il implique la Conclusion révoltante, ne satisfait pas la Sensibilité à la qualité. Notons que ce principe n'impose pas de seuil à partir duquel le niveau de bien-être y serait préférable au niveau z, mais garantit seulement qu'il n'est pas possible de pouvoir toujours compenser un faible niveau de bien-être par une population très forte. Il ne s'agit donc pas, comme dans l'utilitarisme à niveau critique, de définir un niveau à partir duquel les vies additionnelles seraient jugées socialement profitables.

Un deuxième principe concerne la comparaison des populations dans lesquelles les individus ont un niveau de bien-être positif (supérieur au niveau « neutre ») et des populations dans lesquelles les individus ont un niveau de bien-être négatif. Il indique simplement que les premières doivent toujours être préférées aux secondes. L'intuition derrière ce principe est qu'une vie avec un niveau négatif est une vie qui

5. Sauf mention contraire, je reprends toujours les dénominations proposées par Arrhenius [2016], qui sont mentionnées en italique entre parenthèses.

6. La Conclusion révoltante introduite et discutée par Parfit [1984] a une formulation plus générale que cela. Il se trouve que les critères étudiés dans le présent article qui satisfont la Sensibilité à la qualité évitent également la Conclusion révoltante dans ce sens plus large.

ne vaut pas d'être vécue, de sorte que l'on ne peut souhaiter créer une population constituée uniquement d'individus avec une utilité négative au dépend d'individus qui ont tous un bien-être positif.

> **Priorité aux vies valant d'être vécues (*Priority for lives worth living*)** Une relation de bien-être social $\succsim$ donne la *priorité aux vies valant d'être vécues* si pour tous $y \in \mathbb{R}_{++}$, $z \in \mathbb{R}_{--}$ et $k, n \in \mathbb{N}$, $(y)_k \succ (z)_n$.

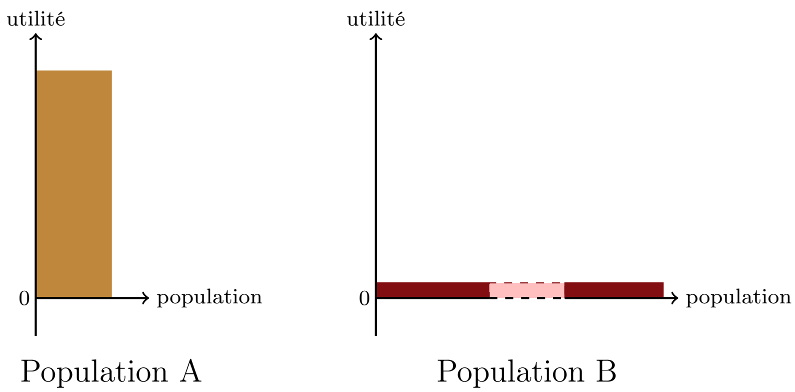
Cette propriété de Priorité aux vies valant d'être vécues est discutée par Blackorby, Bossert et Donaldson [2005, chap. 5]. Elle implique une propriété plus faible qui est d'éviter la « Conclusion très sadique »(*Very sadistic conclusion*), discutée par Arrhenius [2016] [7]. La Priorité aux vies valant d'être vécues n'est pas satisfaite par l'utilitarisme avec niveau critique (quand $c > 0$), car une population très nombreuse d'individus ayant un bien-être positif mais inférieur au niveau critique peut être jugée moins bonne qu'une population plus faible d'individus dont le bien-être est négatif.

Les deux principes de Sensibilité à la qualité et de Priorité aux vies valant d'être vécues sont illustrées dans la Figure 2. Nous commençons par préciser quels sont les critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population et les critères de bien-être dépendant du rang qui satisfont ces deux propriétés.

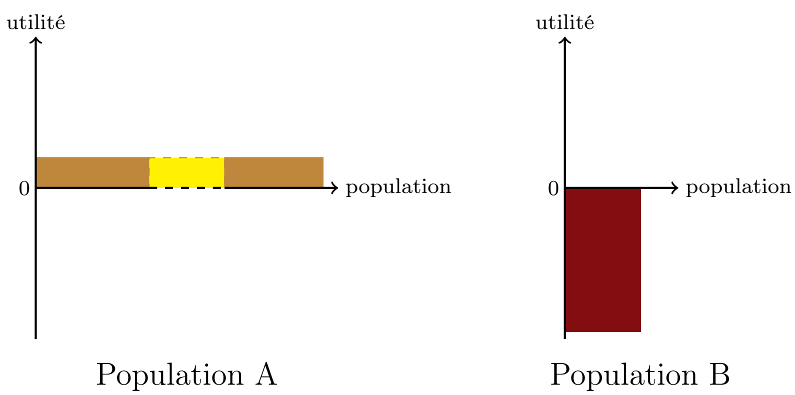
Proposition 1

1. *Les relations de bien-être prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population sont sensibles à la qualité et donnent la priorité aux vies valant d'être vécues si et seulement si $c = 0$ et f est bornée.*

7. Le Conclusion très sadique est obtenue lorsque, pour tout niveau de bien-être négatif $z \in \mathbb{R}_{--}$ et pour toute taille de population $n \in \mathbb{N}$, il existe un niveau positif de bien-être $y \in \mathbb{R}_{++}$ et une taille de population $k \in \mathbb{N}$ tels que $(z)_n \succ (y)_k$. Cela signifie que toute population dans un état aussi tragique que l'on veut est jugée meilleure qu'une autre population dans laquelle tous les individus ont un niveau positif de bien-être.



(a) Sensibilité à la qualité : la population A doit être préférée à la population B si le bien-être dans A est suffisamment grand et le bien-être dans B suffisamment petit.



(b) Priorité aux vies valant d'être vécues : la population A doit être préférée à la population B si le bien-être dans A est positif et le bien-être dans B est négatif.

FIGURE 2 – Illustration des principes de Sensibilité à la qualité et de Priorité aux vies valant d'être vécues.

Note : Voir la Figure 1 pour la lecture des figures. L'échelle n'est pas précisée car on peut vouloir rendre taille de la population et niveau de bien-être aussi grands que possible. Les zones en pointillés correspondent à une rupture d'échelle pour rendre la population très grande.

2. *Les relations de bien-être dépendant du rang sont sensibles à la qualité et donnent la priorité aux vies valant d'être vécues si et seulement si* $c = 0$ *et la série* $\sum_{r=1}^{n} a_r$ *est bornée.*

La Proposition 1 met en avant deux caractéristiques importantes des critères satisfaisant nos deux premières propriétés. Tout d'abord, le paramètre c, qui définit le niveau pour lequel une population égalitaire engendre un bien être social positif, doit être égal à 0, contrairement à ce que promeut entre autres l'utilitarisme avec niveau critique. D'autre part, étendre infiniment une population égalitaire doit avoir une valeur finie, ce qui s'exprime par une condition de borne supérieure. Les critères obtenus sont donc des principes d'évaluation à valeur variable.

Les deux principes précédents comparent des populations égalitaires. Nous allons maintenant considérer des principes mettant en jeu l'ajout d'un individu à une population préexistante. Comme nous l'avons discuté précédemment, cet ajout sera bénéfique si le niveau de bien-être de l'individu ajouté est au-dessus du « niveau critique. »

Une première propriété que l'on peut demander d'un tel niveau critique, c'est qu'il ne soit pas négatif, c'est à dire qu'il ne soit jamais souhaitable d'ajouter un individu dont la vie ne vaut pas d'être vécue. C'est ce que propose le principe suivant.

Principe d'expansion négative (*Negative expansion principle*)

Une relation de bien-être social $\succsim$ satisfait le *Principe d'expansion négative* si pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et tout $y \in \mathbb{R}_{--}$, $\mathbf{x} \succ (\mathbf{x}, y)$.

La propriété opposée consiste à dire qu'il est toujours souhaitable d'ajouter un individu dont le bien-être est positif. En effet, cette vie est au-dessus du niveau de neutralité, de sorte qu'il semble acceptable du point de vue individuel de vivre à ce niveau de bien-être.

Principe d'addition (*Mere Addition Principle*) Une relation de bien-être social $\succsim$ satisfait le *Principe d'addition* si, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et tout $z \in \mathbb{R}_{++}$, $(\mathbf{x}, z) \succsim \mathbf{x}$.

Les deux principes d'expansion négative et d'addition sont illustrés dans la Figure 3. Il se trouve que si on ajoute ces propriétés aux premières conditions exposées plus haut, on arrive à une impossibilité pour les critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population. Au contraire, pour les relations de bien-être dépendant du rang, il est possible de respecter le Principe d'expansion négative, mais pas le Principe d'addition.

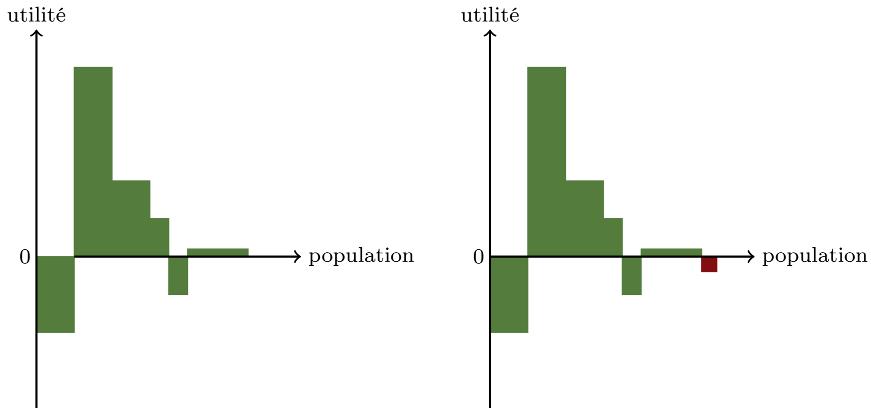
Proposition 2

1. *(i) Il n'existe pas de relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population qui puisse à la fois être sensible à la qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et respecter le Principe d'expansion négative.*

   (ii) Si $c = 0$ et $\sum_{r=1}^{n} a_r$ est bornée, les relations de bien-être dépendant du rang sont sensibles à la qualité, donnent la priorité aux vies valant d'être vécues et respectent le Principe d'expansion négative.

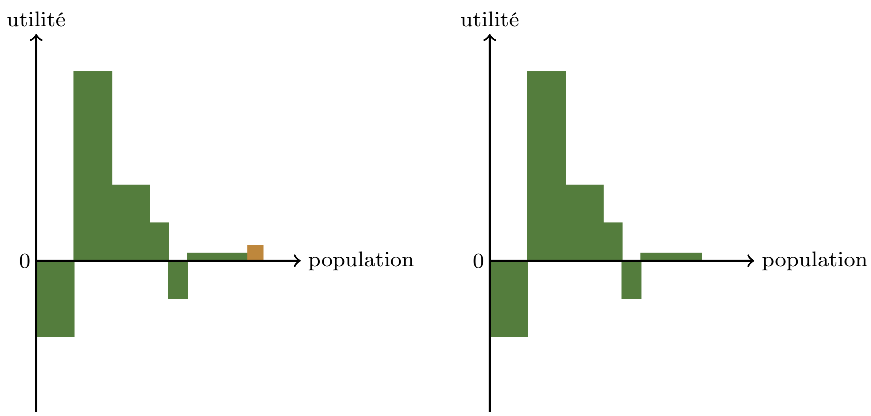
2. *Il n'existe pas de relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population ni de relation de bien-être dépendant du rang qui puisse à la fois être sensible à la qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et satisfaire le Principe d'addition.*

La première conséquence de la Proposition 2 est que les relations de bien-être dépendant du rang semblent se comporter mieux que les relations de bien-être prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population puisqu'elles jugent toujours néfaste l'addition d'invidus dont la vie ne vaut d'être vécue, sans violer d'autres propriétés intéressantes. Cependant, la deuxième conséquence de



Population A Population B

(a) Principe d'expansion négative : la population A doit être préférée à la population B qui contient un individu supplémentaire dont le bien-être est négatif.



Population A Population B

(b) Principe d'addition : la population A doit être préférée à la population B car elle contient un individu supplémentaire dont le bien-être est positif.

FIGURE 3 – Illustration du Principe d'expansion négative et du Principe d'addition.

Note : Voir la Figure 1 pour la lecture des figures. L'échelle n'est pas précisée car on peut vouloir rendre taille de la population et niveau de bien-être aussi grands que possible.

la Proposition 2 est plus négative pour les critères de bien-être dépendant du rang : ils ne peuvent satisfaire le Principe d'addition. Il convient de remarquer cependant que Carlson [1998] a montré que si on ajoute au Principe d'addition un principe faible de redistribution (*Non-Anti Egalitarianism Principle*), on est nécessairement conduit à violer la Sensibilité à la qualité. L'ensemble des critères étudiés ici ont une préférence pour la redistribution, dans le sens où un transfert de bien-être d'une personne bien lotie à une personne moins bien lotie est toujours souhaitable. Il n'est donc pas étonnant d'obtenir l'impossibilité exposée dans la Proposition 2.

Nous passons maintenant à l'examen de principes qui ajoutent à une population donnée non pas un individu mais tout un ensemble d'individus égaux. Il s'agit de reprendre les intuitions qui justifient les principes de Sensibilité à la qualité et de Priorité aux vies valant d'être vécues, mais désormais ces intuitions s'appliqueront également lorsque une population donnée existe préalablement au moment où la décision d'addition d'individus supplémentaires est prise. L'objectif est donc de garantir une certain cohérence temporelle dans les intuitions qui guident les jugements concernant l'ajout de populations de tailles différentes. Il est important de noter que cela n'est pas garanti en général à moins que l'on suppose une propriété très forte d'indépendance de l'existence des morts qui rend les jugement sociaux invariants à la taille et au niveau de bien-être des générations passées [8]. Un premier principe généralise l'idée de Sensibilité à la qualité.

Principe fort d'addition de qualité (*Strong Quality Addition Principle*) Une relation de bien-être social $\succsim$ satisfait le *Principe*

8. Le Principe d'indépendance de l'existence des morts (*Independence of the utilities of the dead*) s'énonce formellement de la façon suivante. Une relation de bien-être social $\succsim$ satisfait ce principe si, quels que soient $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ et $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \succsim (\mathbf{x}, \mathbf{z})$ si et seulement si $\mathbf{y} \succsim \mathbf{z}$. Cela signifie que, lorsque l'on veut choisir d'ajouter une population $\mathbf{y}$ ou une population $\mathbf{z}$, la préexistence d'une population $\mathbf{x}$ ne joue aucun rôle. Ce principe, mis en avant par Blackorby, Bossert et Donaldson [1995, 2005], caractérise l'utilitarisme avec niveau critique (dans le cas de critères continus).

fort d'addition de qualité s'il existe $y > z > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et tout $n > k$, $\big(\mathbf{x}, (y)_k\big) \succ \big(\mathbf{x}, (z)_n\big)$.

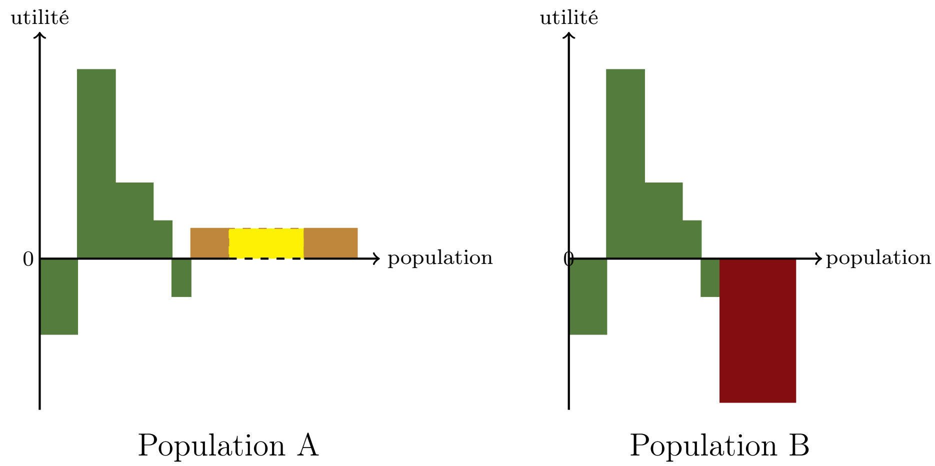
Le deuxième principe, appelé Condition faible d'absence de sadisme (*Weak non-sadism condition*), généralise l'idée de Priorité aux vies valant d'être vécues. Cependant, l'impossibilité mentionnée dans la Proposition 2 indique que l'ajout d'une population dont le bien-être est positif n'augmente pas toujours le bien-être social, car cet ajout peut introduire de l'inégalité ou diminuer le bien-être moyen. On ne peut donc espérer que l'ajout d'une population nombreuse d'individus ayant un bien-être positif mais faible soit toujours meilleure que l'ajout d'un petit nombre d'individus dont le bien-être est négatif. La Condition faible d'absence de sadisme énonce donc seulement qu'il existe un niveau de bien-être négatif et une taille de population tels que l'ajout d'une population de cette taille à ce niveau d'utilité est toujours jugée moins bonne que l'ajout d'une population dans laquelle les individus ont un niveau de bien-être positif.

Condition faible d'absence de sadisme (*Weak non-sadism condition*) Une relation de bien-être social $\succsim$ satisfait la *Condition faible d'absence de sadisme* s'il existe $y \in \mathbb{R}_{--}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $z \in \mathbb{R}_{++}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\big(\mathbf{x}, (z)_n\big) \succ \big(\mathbf{x}, (y)_k\big)$.

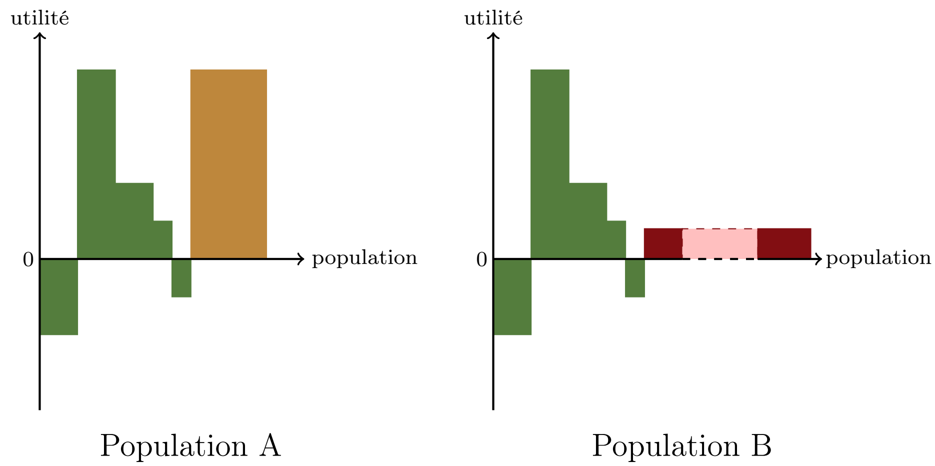
Les deux principes, Condition faible d'absence de sadisme et Principe fort d'addition de qualité, sont illustrés dans la Figure 4. Comme dans la Proposition 2, on obtient des résultats de possibilité pour les relations de bien-être dépendant du rang alors qu'on arrive à une impossibilité pour les critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population.

Proposition 3

1. (i) Il n'existe pas de relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population qui puisse à la fois être sensible à la



(a) Condition faible d'absence de sadisme : la population A doit être préférée à la population B si le bien-être de la population ajoutée dans A est positif et le bien-être de la population ajoutée dans B suffisamment négatif.



(b) Principe fort d'addition de qualité : la population A doit être préférée à la population B si le bien-être de la population ajoutée dans A est suffisamment grand par rapport au bien-être de la population ajoutée dans B.

Figure 4 – Illustration de la Condition faible d'absence de sadisme et du Principe fort d'addition de qualité.

Note : Voir la Figure 1 pour la lecture des figures. L'échelle n'est pas précisée car on peut vouloir rendre taille de la population et niveau de bien-être aussi grands que possible. Les zones en pointillés correspondent à une rupture d'échelle pour rendre la population très grande.

qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et satisfaire la Condition faible d'absence de sadisme.

(ii) Il existe des relations de bien-être dépendant du rang telles que $c = 0$ *et* $\sum_{r=1}^{n} a_r$ *est bornée et qui sont à la fois être sensibles à la qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et satisfaire la Condition faible d'absence de sadisme.*

2. (i) Il n'existe pas de relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population qui puisse à la fois être sensible à la qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et respecter le Principe fort d'addition de qualité.

(ii) Il existe des relations de bien-être dépendant du rang telles que $c = 0$ *et* $\sum_{r=1}^{n} a_r$ *est bornée et qui sont à la fois être sensibles à la qualité, donner la priorité aux vies valant d'être vécues et respecter le Principe fort d'addition de qualité.*

Les résultats donnés dans la Proposition 3 pour les relations de bien-être dépendant du rang sont uniquement des résultats d'existence, sans décrire de façon précise les conditions nécessaires et suffisantes pour que de telles relations satisfassent tous les principes souhaités. La preuve de la Proposition donnée en annexe permet cependant d'identifier des conditions suffisantes.

Pour le Principe fort d'addition de qualité, il suffit que le taux de croissance (négatif) des pondérations soit borné par des nombres strictement compris entre entre 0 et $-\infty$. Pour la Condition faible d'absence de sadisme, il faut en plus que la fonction ϕ soit bornée (ce qui exclut les fonctions linéaires) et que les niveaux de bien-être négatifs contribuent suffisamment à diminuer le bien-être social [9]. Il faut noter que, même avec ces conditions supplémentaires sur la fonction ϕ,

9. En particulier, tous les principes énoncés dans cet article, à l'exception notable du Principe d'addition, sont satisfaits par les critères de bien-être escompté en fonction du rang (voir Asheim

les relations de bien-être prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population ne peuvent satisfaire la Condition faible d'absence de sadisme tout en étant sensible à la qualité et en donnant la priorité aux vies valant d'être vécues.

Remarques conclusives

Dans cet article, on s'est attaché à montrer l'intérêt pour l'éthique de la population des critères de bien-être dépendant du rang. Pour ce faire, nous avons indiqué qu'ils peuvent satisfaire conjointement tout un ensemble de principes que ne peuvent satisfaire les critères utilitaristes (généralisés) habituellement étudiés dans ce champ. Une des raisons pour cela est que les critères de bien-être dépendant du rang ne donnent qu'une valeur finie à toute population ayant un niveau de bien-être donné. Une autre raison est que la pondération en fonction du rang permet de moduler la valeur contributive au bien-être social de l'ajout d'un individu en fonction de sa position relative dans la distribution du bien-être, permettant de donner un poids très fort à l'ajout d'individus ayant une utilité négative (pour satisfaire la Condition faible d'absence de sadisme) et en limitant l'apport des populations les mieux loties (pour satisfaire le Principe fort d'addition de qualité).

Il faut cependant souligner que les critères de bien-être dépendant du rang ne sont pas incontestables. On a montré qu'ils ne pouvaient respecter le Principe d'addition conjointement avec d'autres propriétés désirables. Comme d'autres approches mettant en jeu des pondérations en fonction du rang, ils ne sont pas différentiables (dans le sens habituel), ce qui peut poser des problèmes pour leur

et Zuber [2014]) représentés par des fonctions de bien-être social de la forme

$$W(\mathbf{x}) = \sum\nolimits_{r=1}^{n(\mathbf{x})} \beta^{r-1} \phi(x_{[r]}), \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X},$$

à condition que la fonction ϕ soit bornée.

utilisation théorique. Surtout, les critères de bien-être dépendant du rang engendrent une forme de non-séparabilité puisque la pondération sur le bien-être dépend de l'ensemble de la distribution du bien-être au sein de la population. Ils ne satisfont donc pas le Principe d'indépendance de l'utilité des morts (défini dans la note 8), de sorte que pour prendre des décisions à une période donnée il faut prendre en compte ce qui est arrivé aux générations passées. Cela peut être source de difficulté dans un contexte de choix dynamique car cela peut engendrer des jugements intertemporels incohérents si le décideur cherche à utiliser le critère de façon invariante, en ne considérant que le futur. Notons que la dépendance du passé en elle-même ne crée pas l'incohérence temporelle, elle doit pour cela s'accompagner d'une utilisation particulière, invariante, du critère de choix. Il ne reste pas moins que, du point de vue informationnel, la nécessité de connaître le passé est une difficulté et que des erreurs concernant ce passé peuvent engendrer des erreurs de jugement.

Il faut remarquer que la plupart des critères utilitaristes, comme l'utilitarisme moyen, ne satisfont pas la propriété d'Indépendance de l'utilité des morts. Dans un cadre d'éthique de la population, cette propriété peut donc sembler imposer des exigences excessives sur la façon dont on doit comparer des populations de tailles différentes. Si on lève la nécessité de l'indépendance, les critères de bien-être dépendant du rang apparaissent comme une alternative naturelle. Ils peuvent d'ailleurs satisfaire des propriétés plus faibles d'indépendance, comme l'indépendance de l'existence des moins bien lotis (*Existence independence of the worst off*, cf. Asheim et Zuber [2014]). Cette propriété est suffisante pour garantir la cohérence temporelle si on se concentre sur des chemins de consommation soutenables (Zuber et Asheim [2012]).

Pour conclure, on peut mentionner deux pistes de recherche concernant les fonctions de bien-être sociales utilisées pour évaluer des populations de taille variable.

Une première piste consiste à explorer d'autres familles de critères que les deux grandes familles étudiées dans cet article. En particulier, des critères égalitaristes de type « Leximin » ont été mentionnés par quelques auteurs (Blackorby, Bossert et Donaldson [1996], Fleurbaey et Tadenuma [2014] et Arrhenius [2016]). Les exemples qui ont été proposés impliquent des arbitrages entre taille de population et niveau de moyen de bien-être qui peuvent paraître extrêmes. Le critère proposé par Blackorby, Bossert et Donaldson [1996] compare des populations de tailles différentes en ajoutant dans la population de plus faible taille des individus jouissant exactement du niveau critique de bien-être. Le critère Leximin est ensuite appliqué à ces populations de même taille. Cela implique qu'une population plus grande est toujours préférée, pourvu que tout le monde ait un niveau de bien-être supérieur au niveau niveau critique, même si cette expansion se fait au prix une forte baisse du niveau moyen. Au contraire, le critère proposé par Fleurbaey et Tadenuma [2014] satisfait une propriété d'indifférence vis-à-vis de la taille de la population, de sorte qu'une population plus grande n'est pas meilleure, même si cette expansion n'abaisse pas le niveau moyen. Le critère proposé par Arrhenius [2016] applique le Leximin directement en comparant les niveaux minimums de chaque population, de sorte qu'une population dans laquelle le niveau minimum d'utilité est plus grand est toujours préférée, même si la taille de cette population est très petite. Il serait sans doute possible de définir des positions intermédiaires.

Une autre piste consiste à intégrer la problématique du risque, qui est présente dans la plupart des questions appliquées, notamment concernant l'impact du changement climatique sur la taille de la population. Cette problématique n'a pour l'instant été que peu discutée (Blackorby, Bossert et Donaldson [2005, Chap. 7] est une exception notable, s'intéressant uniquement au cas utilitariste).

Références

ARNESON R. [2000], « Luck egalitarianism and prioritarianism », *Ethics*, 110, p. 339-349.

ARRHENIUS G. [2016], *Population Ethics*, Oxford, Oxford University Press (à paraître).

ASHEIM G.B. et ZUBER S. [2014], « Escaping the repugnant conclusion : Rank-discounted utilitarianism with variable population », *Theoretical Economics*, 9, p. 629-650.

BLACKORBY C., BOSSERT W. et DONALDSON D. [1995], « Intertemporal population ethics : Critical-level utilitarian principles », *Econometrica*, 63, p. 1303-1320.

BLACKORBY C., BOSSERT W. et DONALDSON D. [1996], « Leximin population ethics », *Mathematical Social Sciences*, 31, p. 115-131.

BLACKORBY C., BOSSERT W. et DONALDSON D. [2005], *Population Issues in Social Choice Theory, Welfare Economics, and Ethics*, Cambridge, Cambridge University Press.

BROOME J. [2004], *Weighing Lives*, Oxford, Oxford University Press.

CARLSON E. [1998], « Mere addition and two trilemmas of population ethics », *Economics and Philosophy*, 14, p. 283-306.

COHEN M. et TALLON J.-M. [2000], « Décisions dans le risque et l'incertain : l'apport des modèles non-additifs », *Revue d'Économie Politique*, 110, p. 631-681.

DONALDSON D. et WEYMARK J. [1980], « A Single-Parameter Generalizarion of the Gini Indices of Inequality », *Journal of Economic Theory*, 22, p. 67-86.

Ebert U. [1988], « Measurement of inequality : An attempt at unification and generalization », *Social Choice and Welfare*, 5, p. 147-169.

Fleurbaey M. et Tadenuma K. [2014], « Universal social orderings », *Review of Economic Studies*, 81, p. 1071-1101.

Gajdos T. [2001], « Les fondements axiomatiques de la mesure normative des inégalités », *Revue d'Économie Politique*, 111, p. 683-720.

Intergovernmental Panel on Climate Change [2015], *Climate Change 2014 : Mitigation of Climate Change*, Cambridge, Cambridge University Press.

Ng Y-K. [1989], « What should we do about future generations ? Impossibility of Parfit's theory X », *Economics and Philosophy*, 5, p. 235-253.

Parfit D. [1984], *Reasons and Persons*, Oxford, Oxford University Press.

Parfit D. [1997], « Equality and priority », *Ratio*, 10, p. 202-221.

Quiggin J. [1982], « A theory of anticipated utility », *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, p. 323-343.

Sider T.R. [1991], « Might theory X be a theory of diminishing marginal value ? », *Analysis*, 51, p. 265-271.

Yaari M. [1987], « The dual theory of choice under risk », *Econometrica*, 55, p. 95-115.

Weymark J. [1981], « Generalized Gini inequality indices », *Mathematical Social Sciences*, 1, p. 409-430.

Zuber S. et Asheim G.B. [2012], « Justifying social discounting : The rank-discounted utilitarian approach », *Journal of Economic Theory*, 147, p. 1572-1601.

Annexe : Preuve des propositions

Preuve de la Proposition 1

Cas des critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population. Si $f(n)$ est constant (cas de l'utilitarisme moyen), on peut sans perte de généralité prendre $c = 0$ (le critère ne dépend pas de c dans ce cas).

Dans les autres cas, supposons que $c > 0$. Comme $f(n)$ n'est pas constant, il existe n tel que $f(n+1) > f(n)$. Notons $\varepsilon = f(n+1)/f(n) - 1$ et soient $y, z \in \mathbb{R}$ tels que $y < 0 < z < c$ et $\phi(c) - \phi(y) < (1+\varepsilon)\big(\phi(c) - \phi(z)\big)$ (ce qui est possible par continuité de ϕ). On a donc :

$$\tfrac{\phi(c)-\phi(y)}{\phi(c)-\phi(z)} < (1+\varepsilon) = f(n+1)/f(n),$$

soit $f(n)\big(\phi(y) - \phi(c)\big) > f(n+1)\big(\phi(z) - \phi(c)\big)$, ce qui implique que $(y)_n \succ (z)_{n+1}$. Ceci est contraire au Principe de priorité aux vies valant d'être vécues. Il est donc nécessaire d'avoir $c = 0$.

Supposons que f ne soit pas bornée. Cela veut dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\Upsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n)/f(k) > \Upsilon$. Cela implique que pour tout $y > z > 0$ (avec $\Upsilon = \frac{\phi(y)}{\phi(z)} > 0$), et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que (en utilisant $\phi(0) = 0$)

$$f(n)\big(\phi(z) - \phi(0)\big) > f(k)\big(\phi(y) - \phi(0)\big).$$

Cela implique $(z)_n \prec (y)_k$, ce qui contredit le Principe de sensibilité à la qualité. Il est donc nécessaire que f soit bornée quand $c = 0$.

Cas des critères bien-être dépendant du rang. La preuve est semblable au cas précédent.

Supposons que $c > 0$. Soient $y, z \in \mathbb{R}$ tels que $y < 0 < z < c$ et $\phi(c) - \phi(y) <$

$(1 + a_2/a_1)\big(\phi(c) - \phi(z)\big)$. On a donc :

$$\tfrac{\phi(c)-\phi(y)}{\phi(c)-\phi(z)} < (1 + a_2/a_1) = \frac{a_1 + a_2}{a_1},$$

soit $a_1\big(\phi(y) - \phi(c)\big) > (a_1 + a_2)\big(\phi(z) - \phi(c)\big)$, ce qui implique que $(y)_1 \succ (z)_2$. Ceci est contraire au Principe de priorité aux vies valant d'être vécues. Il est donc nécessaire d'avoir $c = 0$.

Supposons que la série $\sum_{r=1}^{n} a_r$ ne soit pas bornée. Cela veut dire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\Upsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\Big(\sum_{r=1}^{n} a_r\Big)/\Big(\sum_{r=1}^{k} a_r\Big) > \Upsilon$. Cela implique que pour tout $y > z > 0$ (avec $\Upsilon = \frac{\phi(y)}{\phi(z)} > 0$), et pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que (en utilisant $\phi(0) = 0$)

$$\left(\sum_{r=1}^{n} a_r\right)\big(\phi(z) - \phi(0)\big) > \left(\sum_{r=1}^{k} a_r\right)\big(\phi(y) - \phi(0)\big).$$

Cela implique $(z)_n \succ (y)_k$, ce qui contredit le Principe de sensibilité à la qualité. Il est donc nécessaire que $\sum_{r=1}^{n} a_r$ soit bornée quand $c = 0$.

Preuve de la Proposition 2

Partie 1.(i). Par la Proposition 1, on sait qu'une condition nécessaire pour qu'une relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues est que $c = 0$ et f soit bornée.

Soient $y < z < 0$. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\big((y)_n, (z)_k\big) \succ (y)_n$, il doit nécessairement exister $0 \leq \ell < k$ tel que $\big((y)_n, (z)_{\ell+1}\big) \succ \big((y)_n, (z)_\ell\big)$. Une telle situation constitue une violation Principe d'expansion négative. Donc pour établir une violation du Principe d'expansion négative, il suffit de montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\big((y)_n, (z)_k\big) \succ (y)_n$ ou bien, de façon équivalente d'après la Definition 1 (en utilisant $\phi(0) = 0$), tels que :

$$\frac{f(n)}{f(n+k)} > \frac{\frac{n}{n+k}\phi(y) + \frac{k}{n+k}\phi(z)}{\phi(y)}. \tag{A.1}$$

Or, comme f est bornée (et croissante, donc convergente) et que $\phi(y) < \phi(z) < 0$ (avec z aussi proche qu'on le souhaite de 0), il doit nécessairement être le cas que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe un nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f(n)}{f(n+k)} \geq \frac{\phi(z)}{\phi(y)} + \varepsilon.$$

Le numérateur du membre de droite de l'inégalité (A.1) peut être rendu aussi proche que l'on veut de $\phi(z)$ lorsque que k devient grand. Il existe donc bien $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $\big((y)_n, (z)_k\big) \succ (y)_n$ lorsque $y < z < 0$. Cela prouve qu'une relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population qui est sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues doit nécessairement violer le Principe d'expansion négative.

Partie 1.(ii). On sait par la Proposition 1 que les relations de bien-être dépendant du rang telles que $c = 0$ et $\sum_{r=1}^{n} a_r$ est bornée sont sensibles à la qualité et donnent la priorité aux vies valant d'être vécues.

Il s'agit de montrer qu'elles satisfont le Principe d'expansion négative. Soit $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbb{R}_{--}$. Soit $l = |\{k : x_k \leq y\}|$ le nombre d'individus dans la population $\mathbf{x}$ dont le niveau de bien-être est inférieur ou égal à y. Soit $m = |\{k : y < x_k \leq 0\}|$ le nombre d'individus dans la population $\mathbf{x}$ dont le niveau de bien-être est entre

y et 0. On a (en utilisant $\phi(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}
W\big((\mathbf{x}, y)\big) &= \sum_{r=1}^{l} a_r \phi(x_{[r]}) + a_{l+1}\phi(y) + \sum_{r=l+2}^{n(\mathbf{x})} a_r \phi(x_{[r-1]}) \\
&= \sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}) + a_{l+1}\big(\phi(y) - \phi(x_{[l+1]})\big) \\
&\qquad + \sum_{r=l+2}^{l+m+1} a_r \big(\phi(x_{[r-1]}) - \phi(x_{[r]})\big) + \sum_{r=l+m+2}^{n(\mathbf{x})+1} a_r \phi(x_{[r-1]}) \\
&< \sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}) + \sum_{r=l+m+2}^{n(\mathbf{x})+1} a_r \phi(x_{[r-1]}) \\
&< \sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}) + \sum_{r=l+m+1}^{n(\mathbf{x})} a_r \phi(x_{[r]}) = W(\mathbf{x}).
\end{aligned}$$

La première inégalité vient du fait que $y < 0$ et $x_{[r-1]} \leq x_{[r]}$; la seconde vient du fait que les pondérations sont décroissantes (et le bien-être positif pour les individus concernés par la deuxième somme). On a donc bien $W(\mathbf{x}) > W\big((\mathbf{x}, y)\big)$, soit $\mathbf{x} \succ (\mathbf{x}, y)$, ce que demande le Principe d'expansion négative.

Partie 2.

Cas des critères prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population.

Par la Proposition 1, on sait qu'une condition nécessaire pour qu'une relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues est que $c = 0$ et f soit bornée.

Comme f est bornée, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n+1)/f(n) < (n+1)/n$ [10]. Soient $y > z > 0$. Comme $c = 0$ et $\phi(0) = 0$, on a

$$((y)_n, z) \succeq (y)_n \Longleftrightarrow f(n+1)\frac{n}{n+1}\phi(y) + f(n+1)\frac{\phi(z)}{n+1} \geq f(n)\phi(y).$$

10. Sinon la suite $f(n)$ croît plus vite que la suite des entiers naturels, et n'est donc pas bornée.

Par continuité de ϕ, on peut rendre le terme $f(n+1)\frac{\phi(z)}{n+1}$ aussi proche que l'on veut de 0 et comme $f(n+1)/f(n) < (n+1)/n$ et $\phi(y) > 0$ l'inégalité ci-dessus ne peut être vérifiée pour z suffisamment proche de 0. Le Principe d'addition n'est alors pas satisfait.

Cas des critères bien-être dépendant du rang. Par la Proposition 1, on sait qu'une condition nécessaire pour qu'une relation de bien-être dépendant du rang soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues est que $c = 0$. On sait également que la suite des pondérations a_k est décroissante. On a donc $\sum_{r=1}^{n} a_r > \sum_{r=2}^{n+1} a_r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient $y > z > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme $c = 0$, on a

$$\big((y)_n, z\big) \succeq (y)_n \Longleftrightarrow a_1\phi(z) + \left(\sum_{r=2}^{n+1} a_r\right) \phi(y) \geq \left(\sum_{r=1}^{n} a_r\right) \phi(y).$$

Par continuité de ϕ, on peut rendre le terme $a_1\phi(z)$ aussi proche que l'on veut de 0 et comme $\sum_{r=1}^{n} a_r > \sum_{r=2}^{n+1} a_r$ l'inégalité ci-dessus doit donc être violée pour z suffisamment proche de 0. Le Principe d'addition n'est alors pas satisfait.

Preuve de la Proposition 3

Partie 1.(i). Considérons une relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population telle que $c = 0$ et f est bornée, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues (Proposition 1). Supposons de plus qu'elle satisfait la Condition faible d'absence de sadisme et donc qu'il existe $y \in \mathbb{R}_{--}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que, pour tous $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $z \in \mathbb{R}_{++}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\big(\mathbf{x}, (z)_n\big) \succ \big(\mathbf{x}, (y)_k\big)$.

Soient $v \in \mathbb{R}_{++}$ et $\ell \in \mathbb{N}$ tels que :

$$f(\ell+k)\left(\tfrac{\ell}{\ell+k}\phi(v) + \tfrac{k}{\ell+k}\phi(y)\right) > 0. \tag{A.2}$$

Nommons M l'expression de gauche de l'inégalité (A.2). Comme f est bornée et ϕ continue, croissante et telle que $\phi(0) = 0$, il existe $z > 0$ tel que $f(n)\phi(z) < M$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$. Donc, si $n \in \mathbb{N}$ est suffisamment grand, on a [11] :

$$f(\ell + n) \left(\tfrac{\ell}{\ell+n}\phi(v) + \tfrac{n}{\ell+n}\phi(z)\right) < M. \tag{A.3}$$

Par définition des relations de bien-être prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population telles que $c = 0$, les deux inégalités précédentes impliquent que $\big((v)_\ell, (y)_k\big) \succ \big((v)_\ell, (z)_n\big)$, ce qui contredit la Condition faible d'absence de sadisme.

Partie 1.(ii). Considérons une relation de bien-être dépendant du rang telle que $c = 0$ et $\sum_{r=1}^{n} a_r$ est bornée, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues (Proposition 1).

Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$, notons $A_\ell^k = \sum_{r=\ell}^{k+\ell} a_r$ et $A_\ell^\infty = \lim_{k\to\infty} A_{k,\ell}$. Supposons qu'il existe $0 < \underline{\beta} \leq \bar{\beta} < 1$ tels que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\underline{\beta} \leq \frac{a_{r+1}}{a_r} \leq \bar{\beta}$. Cela signifie que le taux de croissance (négatif) des pondérations est borné par des nombres strictement compris entre entre 0 et $-\infty$. Par conséquent, on a $a_\ell \times \frac{1-\underline{\beta}^k}{1-\underline{\beta}} \leq A_\ell^k \leq a_\ell \times \frac{1-\bar{\beta}^k}{1-\bar{\beta}}$ et $a_\ell \times \frac{1}{1-\underline{\beta}} \leq A_\ell^\infty \leq a_\ell \times \frac{1}{1-\bar{\beta}}$ et donc

$$(1 - \underline{\beta}^k) \times \tilde{A} \leq \frac{A_\ell^k}{A_\ell^\infty} < 1,$$

avec $\tilde{A} = \frac{1-\bar{\beta}}{1-\underline{\beta}}$.

Supposons également que la fonction ϕ est bornée et notons $\bar{u} := \sup\{\phi(x) : x \in \mathbb{R}\}$. Supposons enfin qu'il existe $v \in \mathbb{R}_{--}$ tel que $\phi(v) < -\frac{1-\tilde{A}}{\tilde{A}}\bar{u}$.

11. Le terme $\frac{\ell}{\ell+n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et le terme $\frac{n}{\ell+n}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Soient $y \in \mathbb{R}_{--}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que

$$(1-\underline{\beta}^k) \times \tilde{A} \times \phi(y) + \big(1 - (1-\underline{\beta}^k) \times \tilde{A}\big) \times \bar{u} \leq 0\,. \tag{A.4}$$

Considérons maintenant n'importe quels $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et $z > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Soit $l = |\{r : x_{[r]} < y\}|$ et $m = |\{r : y \leq x_{[r]} < 0\}|$. Par définition, comme $c = 0$, on a $\big(\mathbf{x}, (z)_n\big) \succ \big(\mathbf{x}, (0)_n\big)$. Pour prouver que la Condition faible d'absence de sadisme est satisfaite, il suffit donc de montrer que $\big(\mathbf{x}, (0)_n\big) \succeq \big(\mathbf{x}, (y)_k\big)$. Or, par définition (comme $c = 0$ et $\phi(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{x}, (0)_n\big) \succeq \big(\mathbf{x}, (y)_k\big) \iff & \sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}) + \sum_{r=l+m+n+1}^{n(\mathbf{x})+n} a_r \; \phi(x_{[r-n]}) \\ & \geq \sum_{r=1}^{l} a_r \phi(x_{[r]}) + \left(\sum_{r=l+1}^{l+k} a_r\right) \phi(y) + \\ & \sum_{r=l+k+1}^{l+k+m} a_r \phi(x_{[r-k]}) + \sum_{r=l+k+m+1}^{n(\mathbf{x})+k} a_r \phi(x_{[r-k]}).\end{aligned} \tag{A.5}$$

Mais

$$\sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}) + \sum_{r=l+m+n+1}^{n(\mathbf{x})+n} a_r \phi(x_{[r-n]}) \geq \sum_{r=1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r]}),$$

et

$$\left(\sum_{r=l+1}^{l+k} a_r\right) \phi(y) + \sum_{r=l+k+1}^{l+k+m} a_r \phi(x_{[r-k]}) \leq \left(\sum_{r=l+m+1}^{l+k+m} a_r\right) \phi(y) + \sum_{r=l+1}^{l+m} a_r \phi(x_{[r-k]}).$$

Pour que l'inégalité (A.5) soit satisfaite, il suffit donc de montrer que

$$\left(\sum_{r=l+m+1}^{l+k+m} a_r\right) \phi(y) + \sum_{r=l+k+m+1}^{n(\mathbf{x})+k} a_r \phi(x_{[r-k]}) < 0.$$

Or,

$$\left(\sum_{r=l+m+1}^{l+k+m} a_r\right)\ \phi(y)+\sum_{r=l+k+m+1}^{n(\mathbf{x})+k} a_r\phi(x_{[r-k]}) < \left(\sum_{r=l+m+1}^{l+k+m} a_r\right)\ \phi(y)+\left(\sum_{r=l+k+m+1}^{+\infty} a_r\right)\bar{u},$$

et

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{r=l+m+1}^{l+k+m} a_r\right)\ \phi(y)+\left(\sum_{r=l+k+m+1}^{+\infty} a_r\right)\bar{u} &= A_{l+m+1}^{\infty}\left(\frac{A_{l+m+1}^{k}}{A_{l+m+1}^{\infty}}\ \phi(y)+\left(1-\frac{A_{l+m+1}^{k}}{A_{l+m+1}^{\infty}}\right)\ \bar{u}\right)\\
&\leq A_{l+m+1}^{\infty}\Big((1-\underline{\beta}^k)\times\tilde{A}\times\phi(y)+\\
&\qquad \big(1-(1-\underline{\beta}^k)\times\tilde{A}\big)\times\bar{u}\Big)\leq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\big(\mathbf{x},(z)_n\big)\succ\big(\mathbf{x},(y)_k\big)$ quels que soient $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ et $z>0$ et $n\in\mathbb{N}$. La Condition faible d'absence de sadisme est ainsi vérifiée.

Partie 2.(i). Considérons une relation de bien-être prioritariste avec niveau critique et pondération de la population telle que $c=0$ et f est bornée, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues (Proposition 1). Supposons de plus qu'elle satisfait le Principe fort d'addition de qualité et donc qu'il existe $y>z>0$ et $k\in\mathbb{N}$ tels que, pour tous $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ et $n>k$, $\big(\mathbf{x},(y)_k\big)\succeq\big(\mathbf{x},(z)_n\big)$.

Soient v et $\ell\in\mathbb{N}$ tels que $0<v<z$ et [12] :

$$\tfrac{\ell}{\ell+k}\phi(v)+\tfrac{k}{\ell+k}\phi(y)<\phi(z).$$

Pour tout $0<\varepsilon<\phi(z)-\phi(v)$, on peut trouver $n>k$ tel que :

$$\phi(z)-\varepsilon<\tfrac{\ell}{\ell+n}\phi(v)+\tfrac{n}{\ell+n}\phi(z)<\phi(z).$$

12. Ceci est toujours possible pour ℓ suffisamment grand car ϕ est une fonction croissante.

Il est donc toujours possible de trouver $n > k$ tel que

$$\tfrac{\ell}{\ell+k}\phi(v) + \tfrac{k}{\ell+k}\phi(y) < \tfrac{\ell}{\ell+n}\phi(v) + \tfrac{n}{\ell+n}\phi(z),$$

ce qui, par définition des relations de bien-être prioritaristes avec niveau critique et pondération de la population telles que $c = 0$, implique que $\big((v)_\ell, (z)_n\big) \succ \big((v)_\ell, (y)_k\big)$. Cela contredit le Principe fort d'addition de qualité.

Partie 2.(ii). Considérons une relation de bien-être dépendant du rang telle que $c = 0$ et $\sum_{r=1}^{n} a_r$ est bornée, ce qui est nécessaire pour qu'elle soit sensible à la qualité et donne la priorité aux vies valant d'être vécues (Proposition 1).

Supposons, comme dans la preuve pour la Partie 1.(ii), qu'il existe $0 < \underline{\beta} \leq \bar{\beta} < 1$ tels que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\underline{\beta} \leq \frac{a_{r+1}}{a_r} \leq \bar{\beta}$. Cela implique qu'il existe $0 < z < y$, et un entier naturel k tels que pour tout ℓ

$$\frac{A_\ell^k}{A_\ell^\infty} > \phi(z)/\phi(y).$$

Considérons maintenant n'importe quels $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ et $n > k$. Soit $l = |\{r : x_{[r]} < z\}|$ et $m = |\{r : z \leq x_{[r]} < y\}|$. Par définition (comme $c = 0$ et $\phi(0) = 0$) :

$$\begin{aligned}\big(\mathbf{x}, (y)_k\big) \succ \big(\mathbf{x}, (z)_n\big) \iff & \sum_{r=1}^{l+m} a_r\phi(x_{[r]}) + \left(\sum_{r=l+m+1}^{l+m+k} a_r\right)\phi(y) + \sum_{r=l+m+k+1}^{n(\mathbf{x})+k} a_r\,\phi(x_{[r-k]}) \\ & > \sum_{r=1}^{l} a_r\phi(x_{[r]}) + \left(\sum_{r=l+1}^{l+n} a_r\right)\phi(z) + \sum_{r=l+n+1}^{n(\mathbf{x})+n} a_r\phi(x_{[r-n]}).\end{aligned}$$

Mais, comme les pondérations a_r sont décroissantes (et $n > k$),

$$\left(\sum_{r=l+1}^{l+n} a_r\right)\phi(z) + \sum_{r=l+n+1}^{l+n+m} a_r\phi(x_{[r-n]}) \leq \left(\sum_{r=l+m+1}^{l+n+m} a_r\right)\phi(z) + \sum_{r=l+1}^{l+m} a_r\phi(x_{[r]}),$$

et
$$\sum_{r=l+m+k+1}^{n(\mathbf{x})+k} a_r \ \phi(x_{[r-k]}) \geq \sum_{r=l+m+n+1}^{n(\mathbf{x})+n} a_r \ \phi(x_{[r-n]}).$$

Pour avoir $\big(\mathbf{x}, (y)_k\big) \succ \big(\mathbf{x}, (z)_n\big)$, il suffit donc de montrer que

$$\left(\sum_{r=l+m+1}^{l+m+k} a_r\right) \ \phi(y) > \left(\sum_{r=l+m+1}^{l+m+n} a_r\right) \ \phi(z). \tag{A.6}$$

Or,
$$\frac{\sum_{r=l+m+1}^{l+m+k} a_r}{\sum_{r=l+m+1}^{l+m+n} a_r} \geq \frac{A_{l+m+1}^{k}}{A_{l+m+1}^{+\infty}},$$

et $\frac{A_{l+m+1}^{k}}{A_{l+m+1}^{+\infty}} > \phi(z)/\phi(y)$. L'inégalité (A.6) est donc bien vérifiée, de sorte que le Principe fort d'addition de qualité est respecté.