Introduction : “ Eléments d’une biographie de l’espace projectif ”

Lise Bioesmat-Martagon

Introduction au volume « Eléments d'une biographie de l'espace projectif »

Lise Bioesmat-Martagon

Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie – Archives Poincaré

Souvent l'histoire d'une notion peut être abordée sous l'angle d'une sorte de tension « outil/objet ». De ce point de vue, les entités mathématiques seraient principalement le produit complexe de métamorphoses successives entre un statut « d'objet », sur lequel travaillent les mathématiciens, et un statut « d'outil » permettant précisément aux mêmes mathématiciens de percer les secrets de leurs autres objets d'étude. Ainsi, avant de devenir des objets à part entière — d'abord des points idéaux, puis des points comme les autres… — les « points à l'infini » de la géométrie projective n'étaient-ils que de simples outils, des façons de parler en quelque sorte, qui ne relevaient que de principes difficilement étayés et insuffisants pour leur donner une « existence » reconnue par tous.

Toutefois cet éclairage semble bien difficilement applicable à l'histoire de notions comme celle d'espace géométrique, qu'il s'agisse de l'espace projectif ou d'un autre…

Le renouveau tout au long du 19e siècle du point de vue projectif, que ce soit en géométrie synthétique ou analytique, ne mobilise pas directement la notion d'espace projectif. Les outils-objets spécifiques de l'étude des propriétés projectives des figures ou des formes fondamentales seront les éléments à l'infini, les coordonnées homogènes, les transformations projectives, la dualité… Les objets-outils en seront les transformations, les formes fondamentales, les coniques, etc. Les méthodes mises en place, le renouvellement des modes de questionnement et l'utilisation des nouveaux outils contribuent à construire certes un cadre inédit, mais il se trouve précisément que celui-ci sera « isolé » — et même *désigné* très tard. De fait, en tant qu'objet d'étude ou à titre d'exemple, l'espace projectif et plus généralement les espaces géométriques interviennent dans des domaines excentrés par rapport à leur lieu de construction. Ainsi, l'expression « espace projectif » n'apparaît pas avant que l'espace projectif ne devienne un exemple emblématique de l'étude des surfaces. C'est-à-dire au fond un objet relativement banalisé au sein d'une problématique complètement différente. La géométrie projective, en revanche, qu'elle soit axiomatisée ou non n'est jamais l'étude de l'espace projectif mais un ensemble de méthodes plus ou moins formalisées pour étudier des propriétés qui apparaissent dans un contexte général de recherche de généralité et de recomposition des pratiques des géomètres. La mise en œuvre de ces méthodes fait émerger des propriétés inhabituelles entraînant peu à peu la prise de conscience du changement du cadre géométrique.

Des notions comme celles d'*espace géométrique* semblent donc susceptibles d'une étude historique que l'on qualifiera de *biographique* en ce sens que leur installation dans le paysage mathématique apparaît comme résultant de l'émergence de méthodes, de pratiques, ou de modes de questionnement qui ne sont ni centrés, ni même directement concernés par ces notions. Nous voulons donc d'abord signifier en cela que l'histoire de la géométrie projective n'est pas celle du cadre qu'elle définit rétrospectivement… et il est clair qu'il s'agit aussi pour nous d'interroger ici cette notion même de "biographie" d'un être mathématique, aussi bien du point de vue de l'histoire que du point de vue de l'épistémologie.

Proposer une *biographie* d'une notion mathématique comme celle d'*espace projectif* relève-t-il essentiellement de la métaphore ?

La métaphore de la biographie peut être filée classiquement, c'est-à-dire, comme l'étude d'un parcours individuel. Concernant l'espace projectif, il s'agira donc de reconstruire les étapes de la constitution du cadre dans lequel se développe ce que l'on appelle aujourd'hui la géométrie projective ; ce cadre par delà ses définitions par une axiomatique ou comme un espace homogène ou encore ses réalisations comme l'ensemble des droites d'un espace vectoriel ou comme la clôture d'un espace affine condense une histoire qui débute par la recherche de la généralité en géométrie synthétique. Au début du 19e siècle, l'école de géométrie française héritée de l'enseignement de Gaspard Monge considère que les méthodes de la géométrie synthétique doivent être rénovées de manière à assurer des résultats et résoudre des problèmes, aussi généraux que ceux de la géométrie qui utilise des méthodes algébriques par le bais des coordonnées. Jean Victor Poncelet en décrivant son projet géométrique comme l'étude des propriétés projectives des figures parachève ce programme de recherche. La théorie de Poncelet met en place les questions d'éléments à l'infini, de dualité et fait émerger la notion de transformations projectives entre figures. La polémique avec Joseph Diez Gergonne autour de la question de la dualité est symptomatique des divers mouvements qui agitent le champ de la géométrie : d'un côté, Poncelet qui assoit la dualité de sa théorie sur les propriétés de la polarité, de l'autre, Gergonne qui fonde la dualité sur une symétrie intrinsèque des énoncés de la géométrie. Le recours à la polarité par Poncelet n'est convaincant que dans la mesure où il propose quelques aménagements linguistiques qui, au prix de l'introduction d'expression comme « point à l'infini », « droite à l'infini » ou « plan à l'infini », permettent de clore le corpus des énoncés de la théorie des polaires réciproques et ainsi de rendre compte de la symétrie des énoncés de la géométrie. Gergonne défend une version de la dualité assez proche de celle expliquée dans les exposés axiomatisés des manuels actuels. Il essaye de la poser dès les premiers énoncés en soulignant la symétrie des énoncés par une présentation en colonne. Néanmoins, sa tentative n'est pas totalement achevée puisqu'il n'osera pas affirmer que deux droites coplanaires se coupent toujours. Le « cadre naturel » de ce qui sera la géométrie projective est alors en cours de constitution. La nécessité de compléter les relations d'incidence peut s'exprimer chez Poncelet lorsqu'il pose les principes de projection mais n'a pas encore acquis le caractère d'évidence qui permette sans problème de mettre en regard l'une de l'autre la demande euclidienne selon laquelle il passe une droite par deux points et celle (projective) que deux droites coplanaires se coupent.

A partir de Jakob Steiner et Karl Georg Christian von Staudt, la figure géométrique n'est plus l'objet fondamental de la géométrie, remplacée par les formes fondamentales comme les ponctuelles, les faisceaux ou les gerbes. L'outil essentiel des théories de Steiner et von Staudt est la notion de relation projective entre formes. La nécessité de clore l'espace usuel par des éléments impropres et ou à l'infini est constitutive de la nouvelle conception de la géométrie puisqu'elle permet de donner commodément une définition de la notion de formes en perspective. Von Staudt développe ainsi une géométrie dans un nouveau cadre dont il ose une description partielle en soulignant par exemple qu'une droite ne coupe pas le plan qu'il considère en deux parties. Moritz Pasch présentera le corpus de la géométrie projective comme un corpus d'énoncés qui se déduisent d'axiomes qui assurent à la fois une clôture des axiomes d'incidence et de la dualité. Pasch construit ainsi à partir du champ de notre expérience le cadre d'une géométrie dans laquelle une droite et un plan se coupent toujours, assurant en même temps le caractère projectif et la tridimensionalité de ce qui n'est toujours pas désigné comme espace. De ce point de vue, on peut considérer que la notion d'espace projectif arrive à une certaine maturité avec les présentations axiomatiques de la fin du 19e siècle, même s'il faut attendre la présentation historique de Federigo Enriques dans l'*Encyclopédie des mathématiques pures et appliquées* initiée par Felix Klein pour que les axiomatiques définissent explicitement un espace projectif.

La métaphore de la biographie peut être aussi servir à exprimer que la compréhension par les mathématiciens d'une notion s'effectue aussi par l'utilisation qu'ils en font de la même manière que la biographie d'un individu ne peut s'arrêter à la simple description de son ou de ses parcours mais doit rendre compte de son inscription et de ses investissements dans des réseaux de relations sociales, professionnelles, intellectuelles, familiales, politiques. Dans une approche de type biographique, l'espace projectif devra par exemple être saisi dans sa fonction d'exemplarité pour les géomètres ou les topologues. Partant de préoccupations de classification de surfaces fermées, les géomètres à la suite de Riemann mettent au point la technique des coupures qui appliquée au plan projectif, donne le premier exemple de surface non-orientable. Le plan projectif apparaît ainsi comme le premier élément de la suite des surfaces closes non-orientables et est intégré dans la « communauté » des surfaces. Avec la bouteille de Klein, il servira d'exemple emblématique pour comprendre le phénomène d'orientation. Dans le même temps, se pose le problème de « réaliser » le plan projectif comme une surface fermée, c'est-à-dire d'abord de le plonger dans l'espace ordinaire, puis au 20e siècle, dans un espace de dimension quelconque. L'étude des plongements dans l'espace à trois dimensions fait émerger de délicates questions d'intersection. Dans le cadre de cette problématique, le plan projectif obtiendra une certaine matérialité grâce aux modèles en plâtre ou en fil.

Une biographie de l'espace projectif ne peut ignorer non plus son implication dans les programmes d'enseignement. Les diverses manières de le définir et de le présenter contribuent à comprendre ses identités multiples et les liens étroits qu'il entretient avec entre autres la structure de corps.

En conclusion, s'intéresser à la biographie de l'espace projectif c'est chercher une voie originale pour étudier l'espace projectif, mais cela signifie aussi se pencher sur la spécificité de ce genre d'entrée dans la pratique de l'histoire des mathématiques.

Un peu comme l'entomologie qui s'efforce de mettre en lumière les métamorphoses des insectes et qui dévoile en même temps sa manière de regarder son objet d'étude : c'est la question des représentations que l'on se fait des objets qui est peut-être la plus importante.

Dans le premier chapitre, Philippe Lombard propose une relecture de l'histoire de la géométrie projective sur une longue durée en la présentant comme l'histoire de la mise au point d'un cadre formel permettant de penser et d'éclairer certaines questions comme celle des propriétés d'incidence, celle du rapport entre énoncé géométrique et figure… Ce chapitre est organisé autour de trois programmes de recherche, celui de Desargues, de Leibniz et de Hilbert.

Le second chapitre est consacré aux contributions de Poncelet à l'élaboration du questionnement et du point de vue projectif. Jean-Pierre Friedelmeyer suit le cheminement de la pensée de Poncelet, analyse ses rapports avec les géomètres contemporains et montre comment son engagement en faveur de la géométrie synthétique l'amène en mettant en place de nouvelles méthodes à élargir le cadre traditionnel de la géométrie.

Le rôle et le statut des éléments à l'infini sont étudiés dans le troisième chapitre en suivant l'énoncé projectif selon lequel deux droites coplanaires se coupent toujours. Philippe Nabonnand montre que l'introduction des éléments à l'infini est justifiée d'un point de vue pratique pour assurer les principes de projection, la dualité de la théorie ou définir la notion de correspondance projective.

Le quatrième chapitre évoque une polémique sur l'« existence » des éléments à l'infini parue dans le *Journal de Hoffmann*.

Jean Daniel Voelke s'intéresse dans le cinquième chapitre à différents moments de la compréhension de l'espace projectif. Il distingue essentiellement quatre approches (la méthode synthétique, la méthode des coordonnées homogènes, les axiomatisations et la présentation de la géométrie projective à partir de l'algèbre linéaire ou de la théorie des treillis) qu'il cerne en examinant les divers traités et manuels publiés depuis le début du 19e siècle jusque dans les années 1950.

L'objet du sixième chapitre est de retracer l'histoire des réalisations du plan projectif comme surface fermée non-orientable, et par là de répondre à la question de savoir comment les mathématiciens arrivent à une conception globale et intuitive du plan projectif. Klaus Volkert rappelle la définition riemannienne de la connexion d'une surface close par les coupures et montre comment à partir de ce moment il devient possible de reconnaître le plan projectif comme un cas spécial de surface close non-orientable. A partir de 1900, ce point de vue se prolonge par la question du plongement du plan projectif dans l'espace ordinaire.

Je remercie la Maison des Sciences de l'Homme de Lorraine qui a soutenu ce projet de recherche, Cindy Neeves qui en assure la gestion administrative et l'ensemble des personnels de l'hôtel du Grand Ballon auquel je dédie cet ouvrage.

Sommaire