Fermatova čísla ve speciálních trojúhelnících

Florian Luca

Cahiers du CEFRES
N° 28, Matematik Pierre de Fermat
Alena Šolcová, Michal Křížek, Georges Mink (Ed.)

Florian LUCA
Fermatova čísla ve speciálních trojúhelnících

Référence électronique / electronic reference :
Florian Luca, « Fermatova čísla ve speciálních trojúhelnících », Cahiers du CEFRES. N° 28, Matematik Pierre de Fermat (ed. Alena Šolcová, Michal Křížek, Georges Mink).
Mis en ligne en / published on : mai 2010 / may 2010
URL : http://www.cefres.cz/pdf/c28/luca_2002_specialni_trojuhelniky.pdf
Editeur / publisher : CEFRES USR 3138 CNRS-MAEE
http://www.cefres.cz

Fermatova čísla ve speciálních trojúhelnících

Florian Luca, Morelia

1. Úvod

Obr. 1. Portrét P. Fermata od Rolanda Lefévra v městském muzeu v Narbonne ve Francii.

V tomto příspěvku budeme studovat výskyt Fermatových čísel v některých speciálních trojúhelnících. Nechť $m \geq 0$ je celé číslo. Označme

$$F_m = 2^{2^m} + 1$$

Fermatovo číslo odpovídající m. Vlastnostmi těchto čísel se zabýval Pierre de Fermat (1601-1665). Ve svém dopise z 25. prosince 1640

Z francouzského originálu *Les nombres de Fermat en triangles spéciaux* přeložil Michal Křížek.

píše Marinu Mersennovi, že všechna čísla F_m jsou prvočísla. Tento nepravdivý výrok vyvrátil v roce 1732 Leonhard Euler (1707-1783).

2. Fermatova čísla v Heronových trojúhelnících

Zaveďme následující označení:

- a, b, c jsou tři reálná čísla rovná délkám stran trojúhelníku Δ.
- $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ je poloviční obvod Δ.
- $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ je obsah Δ.
- h_a, h_b, h_c jsou délky výšek trojúhelníku Δ.

Definice. *Trojúhelník Δ se nazývá Heronův, jestliže a,b,c i S jsou celá čísla.*

V literatuře lze nalézt mnoho otevřených problémů týkajících se Heronových trojúhelníků. Uveďme některé příklady:

Problém 1. *Existuje Heronův trojúhelník, jehož těžnice mají celočíselné délky?*

Problém 2. *Pro jaké Heronovy trojúhelníky jsou délky všech stran Fibonacciho čísla?*

Co se týče druhého problému, je dobře známo, že všechny takové trojúhelníky musí být rovnoramenné. Jediným zatím známým příkladem je trojúhelník (5,5,8).

V první části tohoto příspěvku se budeme zabývat řešením problému (viz [L1]):

Problém 3. *Pro jaké Heronovy trojúhelníky jsou délky stran a, b, c mocniny prvočísel?*

Snadno nahlédneme, že předchozí problém nám dává dva kandidáty:

- Δ = (3,4,5).
- Pro sudé přirozené číslo n dostáváme, že

$$\begin{aligned}(2^n+1)^2 &= 2^{2n}+2^{n+1}+1 = (2^{2n}-2^{n+1}+1)+2^{n+2}\\ &= (2^n-1)^2+(2^{n/2+1})^2.\end{aligned}$$

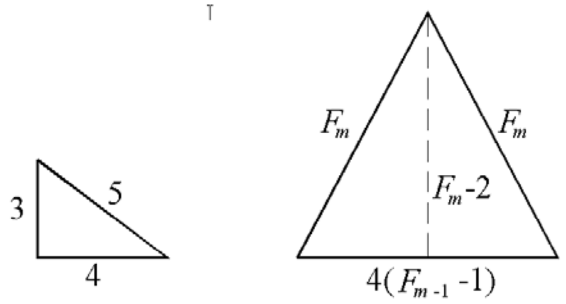
Tedy $\Delta_1 = (2^n+1, 2^n-1, 2^{n/2+1})$ je pythagorejská trojice. Nyní k sobě přiložme dvě zrcadlově symetrické kopie trojúhelníku Δ_1 tak, aby k sobě přiléhaly stranou o délce $2^n - 1$. Tímto způsobem dostaneme rovnoramenný trojúhelník

$$\Delta = (2^n + 1, 2^n + 1, 2^{n/2+2}),$$

který je očividně Heronův. Jestliže $2^n + 1$ je prvočíslo nebo mocnina prvočísla, pak Δ je zřejmě rovnoramenný Heronův trojúhelník, jehož délky stran jsou mocniny přirozených čísel.

Naším hlavním cílem bude ukázat, že jediné Heronovy trojúhelníky vyhovující problému 3 jsou dva výše uvedené trojúhelníky (viz obr. 2).

Věta 1. *Nechť délky stran Heronova trojúhelníku jsou mocniny přirozených čísel. Pak tyto strany mají délky* 3, 4, 5 *nebo* F_m, F_m, $4(F_{m-1} - 1)$ *pro nějaké* $m \geq 1$ *takové, že* F_m *je prvočíslo.*



Obr. 2. Jediné možné Heronovy trojúhelníky, jejichž délky stran jsou mocniny prvočísel.

Pomocná tvrzení

Nadále budeme předpokládat, že $\Delta = (a, b, c)$ je Heronův trojúhelník.

Tvrzení 1. *Číslo* s *je celé.*

D ů k a z . Z Heronova vzorce

(1) $$s(s-a)(s-b)(s-c) = S^2$$

plyne, že s je algebraické celé číslo, neboť s je kořenem monického polynomu s celočíselnými koeficienty (tj. polynomu, jehož vedoucí koeficient je jedna). Protože s je zřejmě navíc racionální, je s celé (viz [EM]). □

Tvrzení 2. *Jestliže* $a = b$ *, pak* c *je sudé číslo a* h_c *je celé číslo.*

D ů k a z . Číslo c je sudé, neboť

$$s = \frac{a+b+c}{2} = a + \frac{c}{2}$$
je celé. Jelikož
$$h_c = \frac{2S}{c},$$
je h_c racionální. Protože navíc

(2) $$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

je h_c algebraické celé číslo. Tedy h_c je celé. □

Tvrzení 3. $\min(a, b, c) \geq 3$.

D ů k a z . Předpokládejme naopak, že $c = \min(a, b, c) < 3$.
Protože
$$|a - b| < c,$$
musí být $c = 1$ nebo $c = 2$.

Pro $c = 1$ dostaneme rovnoramenný trojúhelník o délkách ramen $a = b$, což odporuje tvrzení 2.

Nechť $c = 2$. Pak buď a a b jsou po sobě následující čísla, a tedy s není celé, což odporuje tvrzení 1, anebo $a = b$ a vztah (2) je tvaru
$$a^2 = h_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = h_c^2 + 1,$$
což podle tvrzení 2 také není možné. □

Důkaz věty 1

Případ I. *Trojúhelník* Δ *je rovnoramenný.*

Předpokládejme například, že $a = b$. Z tvrzení 2 víme, že c je sudé. Speciálně $c = 2^\gamma$ pro nějaké celé číslo $\gamma \geq 2$. Podle předpokladu $a = p^\alpha$ pro nějaké prvočíslo p a přirozené číslo α ze vztahu (2) plyne

(3) $$p^{2\alpha} = h_c^2 + 2^{2(\gamma-1)}.$$

Jestliže p=2 , pak $\alpha \geq \gamma$ a $2^{\gamma-1} \mid h_c$. Můžeme tedy napsat $h_c = 2^{\gamma-1}k$ pro jisté přirozené číslo k . Vydělíme-li obě strany rovnice (3) číslem $2^{2(\gamma-1)}$, obdržíme

(4) $$2^{2(\alpha-\gamma+1)} = k^2 + 1,$$

což ale není možné, protože rozdíl dvou nenulových čtverců nemůže být 1.

Tedy p je liché prvočíslo a rovnice (3) implikuje, že $(a, h_c, c/2)$ je primitivní trojice (tj. největší společný dělitel čísel a, h_c a $c/2$ je 1).

Využijeme-li nyní klasickou parametrizaci všech primitivních pythagorejských trojic, vidíme, že existují dvě přirozená čísla $m > n$ taková, že jedno z nich je sudé a druhé liché a že

(5) $$p^{\alpha} = m^2 + n^2, \quad h_c = m^2 - n^2, \quad 2^{\gamma-1} = 2mn.$$

Z poslední rovnice v (5) vyplývá, že $m = 2^{\gamma-2}$ a $n = 1$, a tedy první rovnice v (5) je tvaru

(6) $$p^{\alpha} = 2^{2(\gamma-2)} + 1.$$

Nyní je patrno, že rovnice (6) a skutečnost, že p je liché, implikuje následující nerovnost $\gamma > 2$. Pokud $\alpha > 1$, rovnice (6) je speciálním případem Catalanovy rovnice $x^u = y^w + 1$, kde (x, y, u, w) je čtveřice přirozených čísel a $\min(u, w) > 1$.

Všechna řešení Catalanovy rovnice ale zatím nejsou známa (viz [Ri]). Avšak pro případ, že w je sudé, který byl před mnoha lety vyšetřován V. A. Lebesguem [Le], lze dokázat, že Catalanova rovnice nemá žádné řešení. Lebesgueův výsledek ukazuje, že α nemůže být větší než 1. Vztah (6) se tedy redukuje na rovnici

(7) $$p = 2^{2(\gamma-2)} + 1.$$

Je dobře známo, že všechna prvočísla p tvaru $2^w + 1$ pro celé $w \geq 1$ jsou Fermatova prvočísla, tj. prvočísla tvaru $p = F_m$ pro celé $m \geq 0$. Navíc vidíme, že $m \geq 1$, neboť podle vztahu (7) je číslo p součtem dvou čtverců. Dohromady tedy máme, že $p = F_m$, $m \geq 1$, F_m je prvočíslo a $\gamma - 2 = 2^{m-1}$. To nám dává řešení

$$(a, b, c) = (F_m, F_m, 2^{2^{m-1}+2}) = (F_m, F_m, 4(F_{m-1} - 1)),$$

kde F_m je prvočíslo.

Případ II. *Trojúhelník Δ není rovnoramenný.*

V tomto případě nejprve dokážeme pomocné lemma, které se týká rozkladu délek stran Heronova trojúhelníku na prvočísla.

Lemma. *Nechť a, b, c jsou délky stran Heronova trojúhelníku. Předpokládejme dále, že $p^{\alpha} \| a$ pro nějaké přirozené číslo α a pro prvočíslo p takové, že $p = 2$ nebo $p \equiv 3 \pmod 4$. Pak*

$$p^{\alpha+1} \mid \gcd((b^2 - c^2), 4S) \quad \textit{pro } p = 2$$

a

$$p^{\alpha} \mid \gcd((b^2 - c^2), S) \quad \textit{pro } p > 2.$$

D ů k a z . Lemma dokážeme jen pro $p > 2$, protože případ $p = 2$ lze vyšetřit analogickým způsobem.

Vztah (1) můžeme přepsat do tvaru

$$2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (4S)^2, \tag{8}$$

což lze vyjádřit také takto:

$$2a^2(b^2 + c^2) - a^4 - (b^2 - c^2)^2 = (4S)^2. \tag{9}$$

Zredukujeme-li rovnici (9) modulo $p^{2\alpha}$, dostaneme

$$-(b^2 - c^2)^2 \equiv (4S)^2 (\text{mod } p^{2\alpha}). \tag{10}$$

Pokud $b = c$, jsme hotovi.

Předpokládejme tedy, že $b \neq c$. Rovnice (10) implikuje, že $p^\alpha \mid (b^2 - c^2)$. Abychom se o tomto přesvědčili, předpokládejme naopak, že toto tvrzení není pravdivé, tj. nechť platí $p^\delta \parallel (b^2 - c^2)$ pro $\delta < \alpha$. Vydělíme-li obě strany rovnice (10) číslem $p^{2\delta}$, dostaneme

$$-\left(\frac{b^2 - c^2}{p^\delta}\right)^2 \equiv \left(\frac{4S}{p^\delta}\right)^2 (\text{mod } p^{2(\alpha-\delta)}). \tag{11}$$

Avšak kongruence (11) nemůže platit, protože -1 není kvadratickým reziduem modulo p. Tedy p^α dělí obě čísla $(b^2 - c^2)$ i S. □

Závěr důkazu věty 1

Předpokládejme, že trojúhelník, jehož délky stran jsou $a, b, c,$ není rovnoramenný. Protože jedno ze tří čísel a, b, c je sudé, můžeme předpokládat, že $c = 2^\gamma$ a nechť $a = p^\alpha$ a $b = q^\beta$. Vidíme, že obě prvočísla p i q jsou lichá. Kdyby tomu totiž tak nebylo, pak by čísla a a b byla sudá, a tedy $p = q = 2$. Trojúhelníková nerovnost $a < b + c$ a její modifikace nyní implikují, že všechny tři exponenty α, β a γ nemohou být vzájemně různé. Ale tato skutečnost nám říká, že trojúhelník Δ je rovnoramenný, což je případ, který jsme již vyšetřovali.

Nechť jsou tedy prvočísla p a q lichá. Z předchozího lemmatu použitého na mocninu $2^\gamma \parallel c$, dostaneme, že $2^{\gamma+1} \mid (a^2 - b^2)$ a $2^{\gamma+1} \mid 4S$. Speciálně, $c \mid 2S$ a

$$2^{\gamma+1} \mid (a^2 - b^2) = (a - b)(a + b).$$

Poněvadž a a b jsou dvě lichá čísla, snadno zjistíme, že platí buď $c = 2^\gamma \mid (a-b)$, anebo $c = 2^\gamma \mid (a+b)$. Případ $c \mid (a-b)$ ovšem nemůže nastat díky nerovnosti

$$0 < |a-b| < c.$$

Tudíž $2^\gamma \mid (a+b)$. Jelikož $\gamma \geq 2$, vidíme, že jedno z čísel a a b je kongruentní s 1 modulo 4 a druhé je kongruentní s 3 modulo 4. Speciálně můžeme předpokládat, že $a = p^\alpha \equiv 1 \pmod 4$ a že $b = q^\beta \equiv 3 \pmod 4$. Z poslední kongruence vyplývá, že $q \equiv 3 \pmod 4$ a že β je liché.

Nyní můžeme použít stejné lemma na $q^\beta \parallel b$, abychom ukázali, že $b = q^\beta \mid S$. Tedy $b \mid 2S$. Protože $c \mid 2S$, a proto dostaneme $S \geq bc/2$. Jelikož ale $S = bc\,(\sin(A))\,/\,2$, vidíme, že $\sin(A) \geq 1$, kde A je úhel mezi stranami b a c. Poslední nerovnost je možná jen tehdy, když $A = \pi/2$, tj. pokud je trojúhelník pravoúhlý.

Trojice (a, b, c) je tedy pythagorejská a

$$p^{2\alpha} = q^{2\beta} + 2^{2\gamma}. \tag{12}$$

Užijeme-li opět klasickou parametrizaci primitivních pythagorejských trojic, dostaneme, že existují dvě nesoudělná přirozená čísla $m > n$, z nichž jedno je sudé a druhé liché, taková, že

$$p^\alpha = m^2 + n^2, \quad q^\beta = m^2 - n^2, \quad 2^\gamma = 2mn. \tag{13}$$

Z posledního vztahu v (13) plyne, že $m = 2^{\gamma-1}$ a $n = 1$. Nyní druhá rovnost v (13) implikuje, že $q^\beta = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. Protože $m-1$ a $m+1$ jsou nesoudělná přirozená čísla, přicházíme k závěru, že $m-1=1$, tj. $m = 2$ a $\gamma = 2$. Dále dostáváme, že $q^\beta = 2^2 - 1 = 3$, tj. q=3 a $\beta = 1$. Konečně z první rovnosti v (13) vidíme, že $p^\alpha = 2^2 + 1 = 5$, tj. p = 5, $\alpha = 1$ a (a, b, c) = (5, 3, 4). □

3. Fermatova čísla v Pascalově trojúhelníku

V tomto odstavci budeme vyšetřovat přítomnost Fermatových čísel v Pascalově trojúhelníku (viz [L2]). Jinými slovy, budeme hledat řešení diofantické rovnice

$$F_m = \binom{n}{k}. \tag{14}$$

Díky symetrii trojúhelníku lze předpokládat, že $k \leq n/2$. V následující větě 2 ukážeme, že Fermatova čísla se nevyskytují uvnitř Pascalova trojúhelníku na netriviálních pozicích (srov. obr. 3).

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{3} & & \mathbf{3} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{5} & & 10 & & 10 & & \mathbf{5} & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{array}
$$

Obr. 3. Polohy Fermatových čísel v Pascalově trojúhelníku.

Věta 2. *Jestliže*

(15) $$F_m = \binom{n}{k} \quad \textit{pro celá čísla} \quad n \geq 2k \geq 2,$$

pak $k = 1$.

D ů k a z . Předpokládejme, že rovnice (15) má řešení pro $k > 1$. Zřejmě $m > 4$, protože F_m je prvočíslo pro $m = 0, 1, \ldots, 4$.

Nejprve dokážeme nerovnost $k < 2^m$. Předpokládejme naopak, že $k \geq 2^m$. Protože $m \geq 5$, platí $k \geq 2^5 = 32$. Je snadné prověřit, že

(16) $$k! < \left(\frac{k}{2{,}2}\right)^k \quad \text{pro všechna} \quad k \geq 10.$$

Nerovnost (16) je přímým důsledkem známé Stirlingovy formule. Rovnice (15) a nerovnost (16) implikují, že

$$2^{2^m} + 1 = F_m = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} > \frac{(n-k)^k}{k!}$$

$$> \left(\frac{2{,}2(n-k)}{k}\right)^k \geq (2{,}2)^k \geq (2{,}2)^{2^m},$$

čili

$$1 + \frac{1}{2^{2^m}} > \left(\frac{2{,}2}{2}\right)^{2^m} = \left(1 + \frac{1}{10}\right)^{2^m} > 1 + \frac{2^m}{10},$$

a tedy

$$10 > 2^{m+2^m},$$

což jistě neplatí pro $m > 4$. Tedy $k < 2^m$.

Dále použijeme následující Lucasův výsledek. Předpokládejme, že p je prvočíslo a pišme

(17) $$n = n_0 + n_1 + \cdots + n_t p^t \quad \text{pro} \quad n_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}, \quad n_t \neq 0,$$

a

(18) $$k = k_0 + k_1 p + \cdots + k_t p^t \quad \text{pro} \quad k_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}.$$

Tedy

(19) $$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_0}{k_0}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_t}{k_t} \pmod{p}.$$

Předpokládejme, že

(20) $$n = \prod_{p|n} p^{\alpha_p},$$

a že

(21) $$A = \{\, p \mid \;\; p \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}, \quad p \mid n \}.$$

Konečně nechť $n = n_1 d$, kde

(22) $$n_1 = \prod_{p \in A} p^{\alpha_p}.$$

Dokážeme, že $d \mid k$. To je zřejmé pro $d = 1$. Předpokládejme tedy, že $d > 1$ a zvolme prvočíslo q tak, že $q \mid d$. Protože všichni prvočíselní dělitelé čísla F_m jsou kongruentní s 1 modulo 2^{m+1}, vidíme, že q nedělí F_m. Protože ale $q \mid d \mid n$, dostaneme pomocí vyjádření n v bázi q (podle vztahu (17)), že $n_0 = 0$. Jestliže q nedělí k, pak $k_0 > 0$ a ze vztahu (19) vyplývá, že

$$F_m \equiv \binom{n}{k} \equiv \binom{0}{k_0}\binom{n_1}{k_1}\cdots\binom{n_t}{k_t} \equiv 0 \pmod{q},$$

což není možné, protože q není dělitelem F_m. Tudíž každý prvočíselný dělitel čísla d je také dělitelem k. Abychom dokázali, že $d \mid k$, stačí ukázat, že pokud $q^\alpha \parallel d$ pro přirozené číslo α, potom $q^\alpha \mid k$. Jestliže by ale toto nebylo splněno, dostali bychom, že $q^\beta \parallel k$ pro přirozené číslo $\beta < \alpha$. V tomto případě $n_\beta = 0$ a $k_\beta \neq 0$, což díky vztahu (19) dává, že také q dělí F_m, což není možné.

Tedy $d \mid k$. Speciálně když $k < 2^m$, dostaneme také, že $d < 2^m$. Nyní vidíme, že když n_1 je součinem všech prvočísel vystupujících v definici A, pak $n_1 \equiv 1 \pmod{2^{m+1}}$. Čili $n \equiv d \pmod{2^{m+1}}$. Když ale $d \le k < 2^m < 2^{m+1}$, Lucasova věta pro prvočíslo $p=2$ implikuje, že

(23) $$F_m = \binom{n}{k} \equiv \binom{d}{k} \pmod{2}.$$

Protože F_m je liché a $d \le k$, ze vztahu (23) vyplývá, že $d = k$. Tudíž $k \mid n$.

Nyní napišme rovnici (15) ve tvaru

$$F_m = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, \tag{24}$$

kde k / n je celé. V tomto případě vidíme, že předchozí zdůvodnění bylo založeno jen na tvaru prvočíselných dělitelů čísla F_m . Předchozí argumentaci můžeme tedy iterovat tak, že dostaneme $(k-i) \mid (n-i)$ pro všechna $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Tyto vztahy jsou ekvivalentní kongruencím

$$n \equiv i \pmod{k-i} \equiv k \pmod{k-i} \quad \text{pro} \quad i = 0, 1, \ldots, k-1. \tag{25}$$

Označme

$$N = \operatorname{lcm}(1, 2, \ldots, k), \tag{26}$$

kde lcm označuje nejmenší společný násobek čísel $1, 2, \ldots, k$. Ze vztahu (25) dostaneme $n \equiv k \pmod N$. Proto můžeme psát $n=k+aN$ pro vhodné přirozené číslo a . Rovnice (15) nyní implikuje, že

$$F_m = \binom{n}{k} = \frac{n}{k}\frac{n-1}{k-1}\cdots\frac{n-k+1}{1} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1 + a\frac{N}{k-i}\right). \tag{27}$$

Nechť $N_i = N/(k-i)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Poznamenejme, že právě jedno z čísel N_i je liché a všechna ostatní jsou sudá. Vskutku, jediné liché číslo N_i odpovídá indexu $i = k - 2^{\mu}$, kde 2^{μ} je největší mocnina čísla 2, která je menší nebo rovna k . Rovnici (27) přepíšeme do tvaru

$$2^{2^m} + 1 = \prod_{i=0}^{k-1}(1 + aN_i) = 1 + aS_1 + a^2 S_2 + \cdots + a^k S_k, \tag{28}$$

kde S_j je j-tý symetrický fundamentální polynom v N_i. Protože právě jedno z čísel N_i je liché, dostaneme, že S_1 je liché a S_j jsou sudá pro všechna $j > 3$. Rovnice (28) může být nyní přepsána takto:

$$2^{2^m} = a(S_1 + aS_2 + \cdots + a^{k-1}S_k). \tag{29}$$

Ze vztahu (29) okamžitě vidíme, že součet $S_1 + aS_2 + \cdots + a^{k-1}S_k$ je lichý a větší než 1 (až na tomto místě skutečně používáme toho, že $k > 1$), a tedy nemůže dělit mocninu 2 z levé strany rovnice (29). Tím je věta 2 dokázána. □

Obr. 4. Socha Pierra de Fermata v Musée des Augustins v Toulouse.

Literatura

[EM] Esmonde, J., Murty, M. R.: *Problems in algebraic number theory*. Springer, New York, 1999.

[Le] Lebesgue, V. A.: *Sur l'impossibilité en nombres entiers de l'equation* $x^m = y^2 + 1$. Nouv. Annal. des Math. 9 (1850), 178—181.

[L1] Luca, F.: *Fermat numbers and Heron triangles with prime power sides.* Amer. Math. Monthly, accepted, 2000.

[L2] Luca, F.: *Fermat numbers in the Pascal triangle*, Divulgaciones Math. 9 (2001), 189-194.

[Ri] Ribenboim, P.: *Catalan's conjecture. Are 8 and 9 the only consecutive powers?* Academic Press, London, 1994.

Adresa: Dr. Florian Luca, Instituto de Matematicas UNAM, Campus Morelia, Apartado Postal 61-3 (Xangari), CP 58 089 Morelia, Michoácan, Mexiko, e-mail: fluca@churipo.matmor.unam.mx