Las Raíces Dialógicas de la Teoría Constructiva de Tipos

Shahid Rahman, Nicolas Clerbout

Las Raíces Dialógicas de la Teoría Constructiva de Tipos

.

Estrategias dialógicas,
demostraciones constructivas
y el axioma de elección

Shahid Rahman y Nicolas Clerbout

Al grupo Pragmatismo Dialógico de Lille

Índice

PREFACIO

Un breve examen de la literatura más reciente en lógica hará evidente que una gran parte de las investigaciones en esta área están abocadas al estudio de la interfaz entre juegos, lógica y epistemología. Tales estudios proporcionan la base de nuevas contribuciones en historia y la filosofía de la lógica, que incluyen la exploración de las tradiciones indias, griegas, y árabes, las *obligationes* de la Edad Media, y los desarrollos más contemporáneos en los campos de la informática teórica, la lingüística computacional, la inteligencia artificial, las ciencias sociales y el razonamiento jurídico. De hecho, un *giro dinámico*, como lo llama acertadamente Johan van Benthem, está teniendo lugar en donde los aspectos epistémicos de la noción de inferencia se vinculan con enfoques lúdicos de la teoría del significado.[1]

En lo que se refiere al nacimiento del *giro dinámico* a su vez, podría ser colocado alrededor de la década de 1960, cuando Paul Lorenzen y Kuno Lorenz desarrollaron la lógica dialógica – inspirada en los juegos de lenguaje de Ludwig Wittgenstein y en la teoría matemática de juegos – y cuando un tiempo después Jaakko Hintikka combinó la teoría semántica de juegos (*Game-Theoretical Semantic*s, conocida como GTS) con su propia lógica epistémica (modal). Si tuviéramos que señalar una fecha precisa, el inicio de este giro debería estar situado en 1958, fecha en la que Paul Lorenzen presentó en Venecia la ponencia *Logik und Agon* en el *Arti del XII Congresso Internationale de Filosofia.* [2]

---

[1] En este contexto, cabe mencionar los nuevos resultados que aporta la lógica linear de J.-Y. Girard en la interfaz entre teoría de la demostración y teoría matemática de juegos y los nuevos desarrollos en lógica epistémica dinámica, teoría de la argumentación y la semántica de juegos (game theoretical semantics) que incluye el trabajo de, entre muchos otros, S. Abramsky, J. van Benthem, A. Blass, H. van Ditmarsch, D. Gabbay, M. Hyland, W. Hodges, G. Japaridze, E. Krabbe, H. Prakken, G. Sandu, D. Walton and J. Woods (véase por ejemplo, Blass [1992], Abramsky & Mellies [1999], Girard [1999], Lecomte & Quatrini [2010, 2011], Lecomte [2011], Lecomte & Tronçon [2011]).

[2] Lorenzen[1960].

Sin embargo, las dos vertientes dinámicas de la lógica epistémica, la dialógica y la basada en GTS de Hintikka, ignoraron un avance fundamental respecto al enfoque epistémico, a saber, el desarrollo de la Teoría Constructiva de Tipos de Per Martin-Löf (de ahora en más la abreviaremos con las siglas TCT).[3]

La TCT, que proporciona un desarrollo del isomorfismo de Curry-Howard e introduce tipos dependientes, conduce a la formulación de un lenguaje totalmente interpretado – un lenguaje con contenidos que desafía ambos, el enfoque estándar metalógico del significado basado en teoría de modelos y la interpretación modal de la lógica epistémica. Más aún, un lenguaje inferencial y con contenido basado en TCT se ha aplicado con éxito no sólo a la semántica de los lenguajes naturales, sino también a los fundamentos de la lógica, ciencias de la computación y las matemáticas constructivas (Sundholm [1986, 2001], Ranta [1994]).

Desde el punto de vista filosófico la TCT comparte la perspectiva kantiana de que el juicio, y no la proposición, constituye la unidad fundamental del conocimiento. Según esta perspectiva, la ontología básica está determinada por las dos formas básicas de juicio, es decir, juicios categóricos, cuya justificación requiere *elementos de prueba*[4] *independientes* y juicios hipotéticos, cuya justificación requiere *elementos de prueba dependientes*, es decir, funciones (véase el capítulo 1).

Interesante es el hecho de que, como comentan Rahman y Clerbout [2013], la TCT provee la base teórica pare el desarrollo de

---

[3] Con la única excepción del papel pionero de Aarne Ranta [1988]. En el capítulo 2 discutiremos las diferencias de los estudios de Ranta con nuestros propios desarrollos. Para anticiparlo brevemente, Ranta estudia la teoría semántica de juegos desde el punto de vista de la TCT, y nuestro trabajo explora la otra dirección: la perspectiva de la interacción sobre la TCT.

[4] El término en inglés es *proof-object.* Nos decidimos por la traducción *elemento de prueba* que no es ideal pues puede sugerir que tal prueba no provee una justificación completa. Sin embargo, en el cuadro de la TCT cada *proof-object* por sí mismo provee una justificación suficiente de la proposición correspondiente. En suma, cuando usamos la expresión *elemento de prueba* debe pensarse como un objeto que es suficiente para la justificación requerida, aunque puede haber otros tales objetos (que también son suficientes).

precisamente aquellos campos en donde el marco dialógico – después del ímpetu inicial – se detuvo, a saber: los fundamentos de las matemáticas y el desarrollo de una teoría dialógica general del significado. La falta de interfaz entre el enfoque dialógico y la TCT es particularmente sorprendente si recordamos que el marco dialógico y la lógica constructiva tienen las mismas raíces filosóficas. Una forma de presentar tales fundamentos comunes es proseguir una pista sugerida por Mathieu Marion[5] quién hace uso del inferencialismo pragmatista de Robert Brandom [1994,2000] para ligar enfoques lúdicos con los fundamentación epistémica. En efecto, el pragmatismo de Brandom parte de dos ideas principales, una de origen kantiano y otra de raíces hegelianas:

- Que los juicios son las unidades fundamentales del conocimiento, y
- Que la cognición humana y la acción se caracterizan por ciertas formas de compromiso normativo. [6]

[5] De hecho Mathieu Marion [2006, 2009, 2010] fue el primero en recalcar los lazos conceptuales entre la dialógica y el pragmatismo inferencialista de Robert Brandom en su respuesta a Wilfried Hodges [2001, 2004]. Otro antecedente relevante del presente trabajo es la tesis de Laurent Keiff [2007], quien provee una formulación minuciosa de la dialógica en el cuadro de la teoría de actos de habla.

[6] Aquello que distingue el pragmatismo de Brandom del de otros, (Brandom también a veces se autodenomina un *pragmatista racionalista*) es su concepción de la normatividad que propone substituir el concepto cartesiano de *certitud* por el de *compromiso deóntico de la reglas* (*bindingness of rules*):

> *One of the strategies that guided this work is a commitment to the fruitfulness of shifting theoretical attention from the Cartesian concern with the grip we have on concepts --- for Descartes, in the particular form of the centrality of the notion of* ***certainty*** [...] --- *to the Kantian concern with the grip concepts have on us, that is the notion of* ***necessity*** *as the bindingness of the rules* (*including inferential ones*) *that determine how it is correct to apply those concepts.* Brandom[1994, p.636].

- Que la comunicación está concebida principalmente como una forma específica de cooperación social que no es reducible a compartir contenidos.[7]

La idea fundamental del enfoque epistémico es, como se mencionó anteriormente, que una afirmación expresa el conocimiento desplegado por un acto de juicio – cf. Prawitz [2012, p. 47]. Más aún, si adoptamos el punto de vista que el significado de una expresión se desprende de su papel en los juicios en los que ocurre, entonces la teoría del significado subyacente es una teoría epistémica. En relación al segundo punto, de acuerdo con Brandom, el aspecto normativo se implementa a través de la noción de juegos de dar y pedir razones. Tales, juegos, que provienen de una idea de Roy Wood Sellars, despliegan el entrelazamiento de compromisos y derechos ocasionados por la emisión de un juicio. Más precisamente, la emisión de un juicio nos compromete con la satisfacción de ciertas condiciones a partir de las cuales podemos inferir (materialmente) tal juicio y nos da el derecho de requerir a quién lo emitió de comprometerse con sus consecuencias. [8] Sundholm [2013] proporciona la siguiente formulación de la idea central de la teoría pragmatista de la inferencia[9]:

---

[7] La concepción del significado como resultante de una interacción social lleva a Brandom a defender una cierta forma de holismo:

> *Holism about inferential significances has different theoretical consequences depending on whether one thinks of communication in terms of* ***sharing*** *a relation to one and the same* ***thing*** (*grasping a common meaning*) *or in terms of* ***cooperating*** *in a joint* ***activity*** [...] Brandom [1994, p. 479].

[8] Brandom sostiene que los juegos de dar y preguntar por razones constituyen la base de toda práctica lingüística:

> *Sentences are expressions whose unembedded utterance performs a speech act such as making a claim, asking a question, or giving a command. Without expressions of this category, there can be no speech acts of any kind, and hence no specifically linguistic practice.* Brandom[2000, p. 125].

[9] En realidad la formulación de Sundholm está basada en una observación de J. L. Austin contenida en su famoso artículo “Other Minds” [Austin 1946].

Cuando digo "Por lo tanto" autorizo a los demás a afirmar la conclusión, dada su autoridad para afirmar las premisas.

Si volvemos a la relación entre dialógica, TCT y Brandom, la idea central es que la posibilidad de expresar dependencias funcionales en el lenguaje objeto, típica de la TCT, se implementa en el cuadro dialógico por la posibilidad de expresar explícitamente la interacción desplegada por juegos de preguntas y respuestas. Véase capítulos 2 y 4.

En efecto, como subrayado por Marion, la perspectiva del inferencialismo pragmático de Brandom coincide con algunos principios fundamentales de la teoría del significado subyacente al enfoque dialógico. Sin embargo, también hay ciertas diferencias cruciales. La principal diferencia es que los derechos y obligaciones establecidos por la reglas de inferencia, presuponen, desde el punto de vista dialógico, niveles más básicos del significado de los cuales resultan tales reglas. Estos niveles semánticos incluyen (i) *significado local*: la descripción de cómo formular una pregunta adecuada respecto a una afirmación y cómo responder a ella, y (ii) *significado estructural o nivel de desarrollo del juego* : la descripción del desarrollo de un juego constituido por combinaciones de secuencias de preguntas y respuestas que resultan de implementar el nivel (i) a la tesis que inicia el juego dialógico. Desde la perspectiva dialógica, el nivel inferencial corresponde a la etapa final de la cadena de interacciones que acabamos de mencionar. Más precisamente, dado que los juegos que constituyen una estrategia ganadora son precisamente aquellos juegos que describen una demostración, el entramado de inferencias que Brandom asocia con el significado de un juicio, es, desde el punto de vista dialógico, una selección de los juegos posibilitados por los niveles (i) y (ii), a saber : la selección de aquellos juegos tales que la suma de ellos representa los modos en los que el proponente gana la tesis independientemente de la opciones elegidas por el antagonista (ver detalles en el capítulo 2 del presente trabajo).

Señalemos que las distinciones establecidas en el marco dialógico entre significado local, el nivel de desarrollo del juego y el nivel de estrategia parecen proporcionar una respuesta a la siguiente pregunta de Brandom:

> [si bien la aprehensión de un concepto consiste en la maestría de sus roles inferenciales esto] *no significa que, cuando afirmamos que un individuo aprehendió un concepto particular, tal individuo esté dispuesto en la práctica a llevar a cabo o incluso a adoptar todas las inferencias correctas involucradas. Para poder afirmar que estamos jugando un juego relevante para la aprehensión de un concepto, es necesario hacer las jugadas correctas suficientes – pero ¿cuánto es suficiente? es bastante flexible*. Brandom [1994, p. 636].[10]

De hecho, desde el punto de vista dialógico, con el fin de aprehender el significado de una expresión que ocurre como la tesis de un juego dialógico, un individuo no necesita conocer las jugadas que aseguran su victoria (el individuo no tener una estrategia ganadora para la tesis en cuestión). Lo que se requiere de un individuo para poder decir que aprehendió el significado de una expresión, es que él sepa cuáles son las jugadas de preguntas y respuestas (definidas por los niveles (i) y (ii)) que constituyen un juego asociado con esa expresión. De forma análoga a las condiciones que deben ser satisfechas para poder decir que comprendimos un juego. Por ejemplo, saber cómo jugar al ajedrez no significa necesariamente estar realmente en posesión de una

---

[10] [though the grasp of concepts amounts to the mastery of inferential roles this] *does not mean that in order to count as grasping a particular concept an individual must be disposed to make or otherwise endorse in practice all the right inferences involving it. To be in the game at all, one must make* ***enough*** *of the right moves – but how much is enough is quite flexible.* Brandom [1994, p. 636].

estrategia ganadora. Saber cómo jugar permite conocer lo que puede contar como una estrategia ganadora, cuando hay una, pero antes tenemos que poder entender que son las jugadas legítimas de ese juego.

En realidad, es nuestro parecer que la respuesta a la pregunta de Brandom implica no solo la diferenciación de los niveles más básicos de significados mencionados sino también como implementar tal diferenciación en el lenguaje objeto – sin tales instrumentos metodológicos parece difícil de entrever como llevar a cabo consecuentemente el proyecto de Brandom. Es precisamente ese punto que nos conduce a vincular la teoría del significado como interacción con la elaboración de un lenguaje totalmente interpretado en el estilo de la teoría constructiva de tipos.[11]
A esta altura de esta breve discusión, esperamos que los motivos – o al menos un atisbo de tales motivos – para desarrollar sistemáticamente los vínculos entre el enfoque dialógico y la TCT estén lo suficientemente claros.

De manera más general y resumiendo, el desarrollo de un enfoque dialógico de la Teoría Constructiva de Tipos puede ser motivado por diversas consideraciones entre las cuales se destacan las siguientes – las dos primeras hacen hincapié en la contribución del marco dialógico a la TCT (o a sus aplicaciones), las dos últimas subrayan cómo la TCT puede enriquecer la teoría dialógica general del significado y contribuir al desarrollo de una epistemología consecuente:

1. En su *The Interactive Stance* J. Ginzburg [2012] destaca la importancia de tomar los aspectos conversacionales (interactivos) en cuenta con el fin de desarrollar una teoría del significado, donde el significado se constituye durante la interacción. Para poner en práctica esta teoría del significado Ginzburg hace uso de una versión extendida de la TCT, donde las reglas que constituyen el

[11] Véase también Rahman & Clerbout [2013].

significado se expresan de manera explícita en el lenguaje objeto. Por otra parte, a fin de estudiar los aspectos interactivos del significado Ginzburg diseña una especie de juegos de lenguaje que se desarrollan en lo que llama *tableros de juegos dialógicos* (*dialogical gameboards*).En este contexto, un enfoque dialógico a la teoría constructiva de tipos proporciona tanto un marco dialógico para la lógica subyacente a su teoría conversacional del significado y un enlace natural para los tableros de juegos dialógicos.

2. En algunos trabajos recientes Dybjer [2012] propone utilizar modelos de la teoría semántica juegos para estudiar en profundidad la noción de identidad en TCT. Una vez más, en este contexto, un enfoque dialógico de la TCT provee un marco general de interacción. Más aún, la regla formal, esencial al marco dialógico, proporciona una perspectiva dinámica de la noción de identidad, a partir de la cual, las reglas de identidad emergen de *jugadas de espejo* (*copy-cat moves*).
3. La concepción del significado inherente a la TCT es muy natural a la estructura dialógica donde el significado de las constantes lógicas está dada por movidas como retos y decisiones que forman parte de la lengua objeto del desarrollo de una partida.
4. Los padres de la dialógica tenían la ambición de desarrollar una teoría *general* del significado (no sólo de las constantes lógicas) que ofreciera un nuevo camino para los fundamentos de la ciencia en general y de las matemáticas constructivas en particular.

Tales investigaciones presuponen una prueba de correspondencia entre estrategia ganadora y demostración en el cuadro de la TCT (de ahora en adelante usaremos la expresión *demostración TCT*): éste es el objetivo principal del presente estudio. Más precisamente nuestro propósito es mostrar lo siguiente:

- Hay una estrategia **P**-ganadora en el juego dialógico para φ si y sólo si hay una demostración en TCT de p: φ, donde p es un elemento de prueba para φ.

Un aspecto importante de este estudio es que nos restringimos al fragmento lógicamente válido de la TCT. La razón es que, sólo después de haber probado la equivalencia para el fragmento "lógico" podemos comenzar con desarrollos que cubran extensiones "materiales" de la TCT. La demostración de la equivalencia mencionada se basa en Rahman & al. [2009] en el que se ha investigado la conexión entre la semántica dialógica y la deducción natural. Sin embargo, el presente estudio no asume un conocimiento previo de la dialógica en general ni de ese artículo ni de otras publicaciones previas sobre los lazos entre dialógica y TCT. De todos modos, a fin de adaptar el método de demostración desarrollado en Rahman & al. [2009] hay varios ajustes significativos que deben ser llevados a cabo:

- En el artículo ya mencionado ha sido adoptada la notación de estilo Fitch. En el presente estudio no vamos a seguir esa notación y para ello es necesario adaptar el procedimiento de traducción entre las estrategias y demostraciones TCT a una formulación mucho más cerca de la original de Gentzen.

- El papel de Rahman & al. se ocupa principalmente de la lógica proposicional clásica estándar. Por ende, en el contexto del presente estudio tenemos que ampliar el resultado de modo de incluir cuantificadores y desarrollar un lenguaje explícito que en el que pueda diferenciarse en el lenguaje objeto el nivel de partida, cuyas proposiciones están constituidas por objetos lúdicos y el nivel de estrategia, en el que ocurren aquellos objetos lúdicos que corresponden a los elementos de prueba de una demostración en TCT.

- El papel de Rahman & al no proporciona un método sistemático para extraer demostraciones de estrategias ganadoras (y viceversa). Tal estudio sistemático ha sido llevada a cabo por Clerbout [2014a, c] en relación con el método de árboles semánticos en el estilo Smullyan. En la presente obra adaptaremos convenientemente el método de Clerbout para la extracción de demostraciones.

El presente estudio está organizado de la siguiente manera:

Los capítulos 1 y 2, 3 introducen los marcos teóricos de nuestro trabajo, a saber la teoría constructiva de tipos y la concepción dialógica de la lógica, respectivamente. El segundo y el tercer capítulos sobre la dialógica son más detallado que el primero, dado que el enfoque dialógico no está muy extendido en la literatura en general, y menos aún la formulación dialógica de la TCT, que es nuevo incluso para los lectores familiarizados con la lógica dialógica. En efecto, el capítulo dos incluye una introducción breve a la versión estándar de los juegos dialógicos para la lógica clásica e intuicionista y el tercer capítulo contiene un desarrollo detallado de la perspectiva dialógica de la TCT.
De hecho el segundo capítulo es la primera introducción publicada en español, que presenta en detalla el cuadro dialógico para ambas la lógica clásica y la intuicionista. Nuestra presentación de los fundamentos de la TCT, en el capítulo uno es más breve, en particular porque hay ya una literatura sólida y accesible sobre el tema. Sin embargo creemos que los elementos de la TCT presentados en el capítulo 1 son suficientes para comprender los lazos establecidos en la presente obra entre la TCT y el cuadro dialógico. Para aquellos lectores ávidos de tener una visión sistemática de la TCT le sugerimos la consulta de la obra original de Martin-Löf [1984], y los trabajos de Nordström & al. [1990] y Granström [2011].

El capítulo 4 está dedicado a la demostración de la dirección de izquierda a derecha del resultado de equivalencia.

En el capítulo 5 se ilustra el uso del algoritmo del capítulo 4, mostrando cómo transformar una estrategia ganadora específica en una demostración TCT del axioma de elección. El capítulo expone en detalle la versión intencional del axioma, pero el capítulo también incluye consideraciones sobre la versión extensional.

Capítulo 6 está abocado al desarrollo del algoritmo que transforma demostraciones TCT en estrategias dialógicas. Quizás algún lector se pregunta por qué intercalar entre los dos capítulos (4 y 6) - que tratan de los dos sentidos de la demostración del resultado de equivalencia - la demostración del axioma de elección. La razón es que la demostración del axioma puede entenderse sin necesidad de la segunda dirección. Es ésta la razón de nuestra elección de ilustrar el procedimiento desarrollado en el capítulo 3 con la demostración del teorema, como una especie de interludio antes de reanudar la demostración del resultado de equivalencia.

En la conclusión mencionamos prospectivas epistemológicas y lógicas de nuestro trabajo, algunas de las cuales ya resultaron en publicaciones que exploran consecuencias conceptuales y técnicas del cuadro teórico aquí desarrollado.

- **Observación**: La presente obra está basada en nuestro libro en inglés *Linking Game-Theoretical Approaches with Constructive Type Theory. Dialogical Strategies, TCT Demonstrations and the Axiom of Choice* (Dordrecht: Springer, 2015). Sin embargo, el libro no es una simple traducción sino más bien una versión ampliada (con comentarios sobre nociones fundamentales y con la inclusión de más ejemplos) que también contiene alguna innovaciones técnicas y conceptuales importantes. Más precisamente, en el libro en inglés usamos reglas de igualdad calcadas de las reglas TCT, sin embargo ahora llegamos a la conclusión que la dialógica contiene una concepción original del concepto de igualdad basada en la interacción. Eso provee una generalización del concepto de substitución, que incluye a la vez la substitución de lo que llamamos instrucciones y la igualdad entre elementos lúdicos (y en el nivel estratégico la igualdad entre elementos de prueba). En otras palabras, estamos ahora convencidos que las reglas de igualdad expresan de forma explícita el resultado de una interacción en la que el proponente hace uso de un elemento lúdico como componente de su afirmación π porque el oponente usó en una jugada anterior precisamente tal elemento lúdico como componente de su propia afirmación π (a nivel estratégico el objeto lúdico provee el elemento de prueba sobre el que se basa el juicio expresado por la afirmación π). Desde éste punto de vista una expresión de igualdad codifica implícitamente una interacción específica. En efecto, las reglas de igualdad son a nuestro entender, el resultado de una interacción en la que un jugador repite la movida del otro tal como un espejo duplica el objeto reflejado.

Una tal concepción de la igualdad provee una nueva perspectiva a la relación entre el nivel de partidas (en el que se hace uso de instrucciones computadas) y el nivel de estrategias (en el que se hace uso de instrucciones no computadas). En efecto, ésta nueva perspectiva explica de una manera más precisa el algoritmo de transformación entre estrategias ganadoras y demostraciones en general, y en particular del axioma de elección.

Como ya mencionamos, la presente versión incluye más ejemplos comentados, y discute con detalle la regla formal (que introduce *las jugadas de espejo*) y por primera vez en la literatura especializada la motivación dialógica para la diferencia entre lógica intuicionista y lógica clásica.

Agradecimientos: Nuestro más profundo agradecimiento a Göran Sundholm (Leiden), que inspiró el presente estudio, durante su visita a Lille en 2012 como profesor invitado y a Gerhard Heinzmann (Nancy) por su apoyo incondicional y su colaboración enriquecedora durante todos estos años. También agradecemos a Hans Georg Granström por sus pacientes explicaciones exhaustivas sobre la TCT, y a un árbitro anónimo cuyas sugerencias nos ayudaron a mejorar la organización del manuscrito.
Finalmente, nuestro agradecimiento a Juan Redmond (Valparaíso), con cuya colaboración se publicaron trabajos que hicieron progresar la concepción dialógica de la lógica desde el punto de vista de la TCT y de sus aplicaciones a la filosofía de la ciencia.

El presente estudio es parte de un proyecto en curso en el marco del programa de investigación "Argumentación, Decisión, Acción" (ADA) y la ANR11 FRAL 003 01: JURILOG apoyado por los Maison Européenne des Sciences de l'Homme et de la Société - USR 3185, y también producto de la visita de Shahid Rahman, organizada Juan Redmond (Valparaíso), en el marco de la invitaciones del *Convenio de Desempeño Humanidades, Artes y Ciencias Sociales, Instituto de Filosofía; Universidad de Valparaíso*.

Valparaíso, Julio 2015

Nicolas Clerbout[12]
Shahid Rahman[13]

[12] Convenio de Desempeño Humanidades, Artes y Ciencias Sociales, Instituto de Filosofía; Universidad de Valparaíso.
[13] Université de Lille Nord Pas-de-Calais (Lille3), UMR-8163: STL.

CAPÍTULO 1

PARA UNA PRESENTACIÓN BREVE DE LOS POSTULADOS FUNDAMENTALES DE LA TEORÍA CONSTRUCTIVA DE TIPOS

Dentro de la Teoría Constructiva de Tipos (en adelante TCT) las constantes lógicas son interpretadas a través de la correspondencia Curry-Howard entre proposiciones y conjuntos. Una proposición es interpretada como un conjunto cuyos elementos representan las pruebas de la proposición. También es posible ver un conjunto como la descripción de un problema, en un sentido similar a la explicación de Kolmogorov sobre el cálculo proposicional intuicionista. En particular un conjunto puede ser visto como la especificación de la programación de un problema: los elementos del conjunto son entonces los programas que satisfacen la especificación (Martin-Löf 1984, p. 7). Más aún en TCT, los conjuntos son también entendidos como tipos en el cual las proposiciones pueden ser vistas como tipos de datos (*data-types*) o tipos de pruebas (*proof-types*)[14]. Partiremos con la introducción de los principios fundamentales de la TCT. Y luego revisaremos las reglas de la lógica intuicionista de predicados en TCT.

La idea filosófica general está ligada al programa que se conoce bajo el nombre de *lenguajes totalmente interpretados*[15], en los cuales se toma especial cuidado de

> *evitar de mantener el contenido y la forma apartes. Por el contrario, lo que haremos* [en el marco de un lenguaje totalmente interpretado] *es exhibir ciertas formas de juicio e inferencia que son usadas en las pruebas matemáticas y proveer al mismo tiempo una explicación de significado de*

14 Cf. Nordström et al. (1990) and Granström (2011).

15 Para una discusión más profunda de este asunto, ver Sundholm (1997, 2001).

> *tales formas. De esta manera hacemos explícito lo que usualmente es tomado implícitamente por garantizado* (Martin-Löf, 1984, p.2).

La tarea de *explicitación* envuelve expresar en el interior del lenguaje objeto aquellas características que determinan el significado y que usualmente son formuladas en el metalenguaje.

De acuerdo al punto de vista de la TCT, las premisas y la conclusión en una inferencia lógica no son proposiciones, sino juicios. La justificación de una tal regla requiere una explicación de significado de los juicios que constituyen premisas y conclusión:

> *Una regla de inferencia está justificada cuando se explica la conclusión bajo el supuesto de que las premisas son conocidas. Por lo tanto, antes de que una regla de inferencia pueda ser justificada, debe explicarse qué es lo que hay que saber para tener el derecho de hacer un juicio sobre cualquiera de las diversas formas en que las premisas y la conclusión pueden tener* (Martin-Löf 1984, p. 2).

Otros dos principios básicos de la TCT son los siguientes:

1. Ninguna entidad sin tipo
2. Ningún tipo sin identidad

En consecuencia, podemos tomar la afirmación de que un individuo es un elemento del conjunto *A* como la afirmación de que dicho individuo instancia o ejemplifica el tipo *A*. Un conjunto se define en TCT especificando sus elementos canónicos, y no-canónicos. Los no-canónicos son aquellos elementos de los que se puede mostrar, usando algún método prescrito de transformación, que son iguales (en este conjunto) a uno canónico. La igualdad en el conjunto es precisamente lo que prescribe el segundo principio básico y que, en otras palabras; consiste en la introducción de una relación de equivalencia en un conjunto. Así, si *A* es un tipo y tenemos un objeto *b* que satisface las condiciones correspondientes entonces *b* es un objeto de tipo *A*, que se escribe formalmente $b : A$.[16] Es esencial distinguir entre el *elemento de prueba b* (*proof-object*)[17], el *tipo A* y el *juicio* $b : A$. La última expresión expresa, que *b* es un elemento de prueba para la proposición *A* (si *A* es del tipo proposición). En lógica estándar, que hay una prueba para una proposición dada se expresa en el nivel de metalenguaje. El hecho de que haya algo (un elemento de prueba) *b* que fundamenta la proposición de que *Primus le da 100 monedas a Secundus* (lo que supondría la afirmación correspondiente) se da en el análisis habitual a nivel metalenguaje. En TCT, el fundamento de una afirmación se formula en el nivel de lenguaje objeto por medio de la afirmación de que hay un elemento de prueba de la proposición correspondiente. En un tal marco

$b : A$	*verdadero A*
Puede ser leído como	
b es un elemento del conjunto *A*	*A* tiene un elemento
	A es verdadero

16 Martin-Löf usa el signo "∈" con el fin de indicar que algo, por ejemplo *a*, es de tipo *B*; incluso sugiere que se puede entender como la cópula "es". Nordström, Petersson y Smith (1990) también hacen uso de esta notación, mientras que otros autores, como Ranta (1994), utilizan el doble punto ":". Granström (2011) distingue el doble punto del épsilon, donde el primero se aplica a los elementos no canónicos y el segundo a los canónicos. Nosotros vamos a utilizar el doble punto.

17 El término en inglés es *proof-object*. Nos decidimos por la traducción *elemento de prueba* que no es ideal pues puede sugerir que tal prueba no provee una justificación completa. Sin embargo, en el cuadro de la TCT cada *proof-object* por sí mismo provee una justificación suficiente de la proposición correspondiente. En suma, cuando usamos la expresión *elemento de prueba* debe pensarse como un objeto que es suficiente para la justificación requerida, aunque puede haber otros tales objetos (que también son suficientes).

b es una prueba de la proposición *A*	
b satisface las expectativas de *A*	*A* es satisfecha *A* tiene solución
b es una solución al problema *A*	

Es importante notar que *'Conjunto'* mismo no es instancia del tipo *conjunto*, (i.e. **no** es el caso que *set* : *set*) puesto que no tenemos un método general para generar todas las posibles formas de construir un conjunto. Sin embargo, dado el tipo *'conjunto'* podemos construir los objetos que lo instancian mediante las reglas de introducción de conjuntos descritas anteriormente.

Las cuatro formas básicas de juicio de la TCT son

$$A : set$$
$$A = B : set$$
$$A : prop$$
$$A = B : prop$$

En teoría de tipos de orden superior tenemos también juicios de la forma
.

$$\alpha : type$$
$$\alpha = \beta : type$$

Hipotéticos: Los juicios de los que hablamos hasta ahora no dependen de ninguna suposición. Son juicios categóricos. Sin embargo, el lenguaje de la TCT permite también de expresar juicios hipotéticos por medio de la siguiente formulación

B *type*[18] ($x : A$)

en dónde A es un tipo que no depende de ninguna suposición y B es un tipo cuando se da el caso que $x : A$ (decimos entonces que $x : A$ es la *hipótesis* de B). En el caso que B sea del tipo conjunto (del tipo *set*), b es un elemento de B, bajo la hipótesis de que x sea un elemento de A:

$b : B$ ($x : A$)

La introducción explícita de juicios hipotéticos en el lenguaje requiere la introducción de reglas de sustitución apropiadas, pero trataremos esto más adelante en nuestro texto, cuando presentemos de forma sistemática el punto de vista de la TCT sobre la igualdad.

Granström [2011, p.112] señala que el juicio $b : B$ ($x : A$) puede ser generalizado en tres direcciones:

1. Extender la hipótesis a un número arbitrario;
2. El rango de un variable que ocurre en un juicio hipotético puede depender de otras variables ya introducidas;
3. El conjunto B puede depender de todas las variables ya introducidas.

Una lista de hipótesis lleva el nombre de *contexto*. Los contextos permiten abreviar la notación:

Γ **es un contexto** (i.e., es una lista de hipótesis)
$b : B$ (Γ)
Γ : *contexto*

Aquello que es *dado en un contexto* es todo lo puede inferirse de las hipótesis que constituye un tal contexto. Eso es lo que llamamos

[18] A fin de facilitar la comparación con la literatura original en TCT y el lenguaje de programación que se ha ya difundido e impuesto optamos por no traducir los nombres de los tipos tales como, *type*, *set*, etc.

conocimiento contextualmente dependiente. De hecho, se distingue usualmente entre lo que es *actualmente dado* en el contexto (*conocimiento actual*) – las variables y los juicios en los que ocurren tales variables, y sobre todo lo que puede *potencialmente* inferirse por medio de las reglas de la teoría de tipos desde lo que es actualmente dado.

Supongamos que A_1 : *set* y que A_2 : *set* (x : A_1).
El juicio

A_3 : *set* ($x_1 : A_1; x_2 : A_2$)

expresa

$A_3\,[a_1/x_1; a_2/x_2]$: *set* siempre que $a_1 : A_1$ and $a_2 : A_2\,[a_1/x_1]$.
$A_3\,[a_1/x_1; a_2/x_2] = A_3\,[a'_1/x_1; a'_2/x_2]$: *set*
whenever
$a_1 = a'_1 : A_1$ and $a_2 = a'_2 : A_2\,[a_1/x_1]$.

Decimos en tal caso que A_3 es una familia de conjuntos definidos sobre A_1 y A_2

Por ende, si escribimos explícitamente la lista que constituye el contexto, la forma general de un contexto es el siguiente:

$x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_n : A_n$

presuponiendo que ya sabemos que A_1 es un tipo (que no depende de ningún otro tipo), que A_2 es un tipo en el contexto $x_1 : A_1$, y que A_n es un tipo en el contexto $x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_{n-1} : A_{n-1}$. Esto es:

A_1 *type*
A_2 *type* ($x_1 : A_1$)
…
A_n *type* ($x_1 : A_1, x_2 : A_2, \ldots, x_{n-1} : A_{n-1}$)

En este punto de la presentación ya debiera quedarle claro al lector que los elementos de prueba de un juicio hipotético en el que B depende de la hipótesis A son funciones de A a B:

$$f(x) : B \ (x : A)$$

Es crucial tener claro que la noción de función es intensional más que extensional. De hecho, se desprende del significado de un juicio hipotético que introduce una función que si sustituimos x por un elemento arbitrario a de A en $f(x)$, obtenemos un elemento $f(a)$ de B – la expresión $f(x)$ es así interpretada como una función de A a B[19]. Más aún, la igualdad de dos funciones es definida de tal manera que que la sustitución de elementos iguales de A resulta en elementos intensionalmente iguales de B.

De hecho tales expresiones pueden leerse de diversas maneras, por ejemplo:

$f(x) : B$ para un x arbitrario tal que $x : A$
$f(x) : B$ bajo la hipótesis $x : A$
$f(x) : B$ provisto que $x : A$
$f(x) : B$ dado que $x : A$
$f(x) : B$ si $x : A$
$f(x) : B$ en el contexto $x : A$

En adición a los dominios de individuos, un lenguaje científico interpretado requiere proposiciones. El isomorfismo de Curry-Howard indica que *prop* y *set* son tipos del mismo tipo superior

$$prop : type$$
$$prop = set : type$$

Proposiciones son introducidas en TCT mediante reglas que establecen qué cuenta como prueba de una proposición. De acuerdo

19 Cf. Ranta (1994, p. 21), Nordström/Petersson/Smith (1990, chapter 3.3), Primiero (2008, pp. 47-55) y Granström (2011, pp. 77-102)

a esto, una proposición es verdadera si y solamente si hay una prueba para ella. Escribimos

$$A : prop$$

para expresar el juicio que A es una proposición. Las funciones proposicionales son introducidas mediante juicios hipotéticos. El juicio hipotético requerido para introducir funciones proposicionales tiene la forma:

$$B(x) : prop\ (x : A)$$

que se lee, $B(x)$ *es del tipo proposición*, provisto que la función $B(x)$ se aplica a elementos de A, tal que A es del tipo *set*. Esto motiva las siguiente reglas:

$$\frac{a : A \qquad B(x) : prop\ (x : A)}{B(a) : prop}$$

$$\frac{a{=}b : A \qquad B(x) : prop\ (x : A)}{B(a) = B(b) : prop}$$

La formulación de la noción de función proposicional como elemento de prueba de un juicio hipotético permite introducir subconjuntos por medio de una regla intensional de separación:

$$\frac{A : set \qquad B(x) : prop\ (x : A)}{\{x : A \mid B(x)\} : set} \qquad \frac{b : A \qquad B(b)\ true}{\mathrm{b} : \{x : A \mid B(x)\}}$$

Esta explicación de subconjuntos también justifica las siguiente reglas

$$\frac{b : \{x : A \mid B(x)\}}{b : A} \qquad \frac{b : \{x : A \mid B(x)\}}{B(b)\ true}$$

Dado que este método está basado en conjuntos pre-existentes que han sido construidos por medio de la descripción de sus elementos canónicos, las paradojas estándar de teoría de conjuntos no aparecen (también desaparecen así algunas paradojas que aparecen en algunas formulaciones tempranas del método de Lorenzen en la construcción de conjuntos por abstracción).

Interludio histórico: Antes de continuar con la formulación de la lógica intuicionista en ell cuadro de la TCT nos permitimos de introducir un breve interludio histórico que concierne la distinción entre afirmaciones de la forma $a : A$ y de la forma $A(a)$ true (i.e. $b(a) : A(a)$ $(x : B)$, que presupone B : *set* y $A(x)$: *prop* $(x : B)$). Rahman/Clerbout (2015, pp. 145-46) sugieren que esta distinción parece tener una estrecha relación conceptual con la reconstrucción que proveen Lorenz y Mittelstrass (1967) de la noción de *nombrar correctamente* desarrollada en el *Crátilo* de Platón. En efecto en su papel de 1967 los autores discuten la distinción entre los actos de nombrar (ὀνομάζειν) y de *establecer* (λέγειν). El primer acto de lenguaje consiste en subsumir un individuo bajo un concepto y el segundo en establecer una proposición sobre un individuo previamente nombrado. Un acto de nombrar es *correcto* si el nombrar se efectúa de tal modo que el individuo nombrado revela el concepto que instancia (*names reveal objects for what they are*). *Establecer con verdad* consiste en hacer constar la verdad de la proposición que involucra al individuo (correctamente) nombrado. En nuestra propia reconstrucción *nombrar* (ὀνομάζειν) corresponde a la afirmación que un individuo es un elemento de un conjunto dado (o más generalmente de un tipo) – el nombrar se *efectúa correctamente* si el individuo es en efecto parte del conjunto. En otras palabras, desde nuestra perspectiva, mientras que ὀνομάζειν se lleva a cabo por medio de afirmaciones de la forma siguiente:

$$a : A, \ (A : set)$$

λέΥειν corresponde al acto de construir una proposición como por ejemplo $A(a)$ a partir del conjunto, digamos B:

$$A(a) : prop \ (a : B).$$

En el contexto de nuestro ejemplo, la proposición resultante es verdadera si $A(x)$ puede en efecto decirse del individuo a. En tal caso podemos afirmar que $A(a)$ ha sido establecida con verdad. Más aún, Lorenz/Mittelstrass (1967, pp. 6-7) argumentan convincentemente que en el contexto del Crátilo las calificaciones de *correcto* y *verdadero* son sinónimos. La literatura especializada contiene severas críticas a este punto del diálogo de Platón señalando que verdad se aplica a proposiciones y no a individuos.[20]

[20] Viktor Iliewski (2013, pp. 12-13) condensa este tipo de críticas de la siguiente manera:

> *Socrates next proceeds briefly to discuss true and false speech, with an intention to point out to Hermogenes that there is a possibility of false, incorrect speech. It is a matter of very basic knowledge of logic that truth-value is to be attributed to propositions, or more precisely utterances, specific uses of sentences. Plato's Socrates acknowledges that, but he, somewhat surprisingly, ascribes truth-value to the constituents, or parts of the statements as well, on the assumption that whatever is true of the unit, has to be true of its parts as well. This seems to be an example of flagrant error in reasoning, known as the fallacy of division. Why would Plato's Socrates commit such a fallacy in the course of what seems to be a valid and stable argument? One obvious answer would be that the very theory he is about to expound presupposes the notion of names as independent bearers of meaning and truth, linguistic microcosms encapsulating within themselves both truth-value and reference. In other words, the theory of true and false names has to presuppose that names do not only refer or designate, or even do not only refer and sometimes suggest descriptions, but that they always necessarily represent descriptions of some kind*.

La idea de Lorenz/Mittelstrass (1967, pp. 6-12) para defender al viejo maestro es de proponer una lectura por medio de la cual en ambos casos se trata de actos de adscribir un predicado a un individuo.[21] Si traemos ahora a la discusión la interpretación de la TCT, es claro que para relacionar los actos de habla en cuestión con la verdad no es necesario suponer predicados, provisto que pasemos del nivel de proposiciones al nivel de afirmaciones. En efecto; tomemos una vez como ejemplo el caso en que A se usa ambiguamente para expresar la afirmación A *true* y la afirmación $A(a)$ *true* (en dónde $A(a)$: *prop* (a : B)). De las observaciones introductorias a la TCT se sigue que ambas afirmaciones tienen sentido: mientras que A es verdadera si A tiene un elemento, y por tanto afirmar que a es un elemento de A (i.e. a : A) expresa la verdad de A – provisto que a sea en efecto un tal elemento ;$A(a)$ es verdadera si a is uno de aquellos individuos de B de los que puede establecerse que A. De acuerdo a esta sugestión la calificación de correcto se aplica a las reglas de formación presupuestas por las afirmaciones de la formas a : A y $A(a)$. Esta perspectiva también sugiere que la afirmación $A(a)$ *true* (bajo la presuposición que $A(x)$: *prop* (x : B)) puede ser leída como haciendo explícito la relación entre los actos de *nombrar* y *establecer* que Lorenz y Mittelstrass adscribe a Platón – a condición de no adherir a su propuesta de relacionar ambos actos de habla con predicados:

> Names, i.e. predicates, are tools with which we distinguish objects from each other**.** *To name objects or to let an individual fall under some concept is on the other hand the means to state something about objects, i.e. to teach and to learn about objects, as Plato prefers to say.* Lorenz/Mittelstrass (1967, pp. 13).

---

[21] Lorenz/Mittelstrass (1967, p. 6):

> *It follows that a true sentence SP really does consist of the ' true parts ' S and P, i.e. t ε S and t ε P. In case of a false sentence SP, however, the second part t ε P is false, while the first part t ε S should ex definitione be considered as true, because any sentence is necessarily a sentence about something (Soph. 262e), namely the subject of it. The subject has to be effectively determined, i.e. it must be a thing correctly named, before one is going to state something about it.*

De hecho la reconstrucción propuesta invita a la siguiente generalización: la distinción entre las dos formas fundamentales de afirmación discutidas en el Crátilo se basa en la diferencia entre afirmaciones categóricas, que expresan tipos independientes y afirmaciones hipotéticas que expresan afirmaciones dependientes. Esta es, en nuestra opinión una de las lecciones que Platón ofrece al lector de su diálogo.

1.4 Las bases de la lógica intuicionista de predicados en el cuadro de la TCT

En esta sección introduciremos rápidamente las reglas básicas de la lógica intuicionista en el marco de la TCT. Nuestra presentación está inspirada en la descripción sucinta que da Ranta (1991, sección 3) del sistema de reglas introducido por Martin-Löf (1984, pp.24-25) y de la presentación de Nordström et al. (1990).

1.4.1 Cuatro tipos de reglas

Dado que en este marco teórico las proposiciones son conjuntos, los operadores lógicos están definidos como operadores conjuntistas. El significado de tales operadores se establece por medio de cuatro tipos de reglas diferentes, a saber: reglas de formación, de introducción, de eliminación y reglas de igualdad:

- *Reglas de formación*. La inclusión explícita de reglas de formación en un sistema inferencial es una de las características más distintivas de la TCT. Las reglas de formación establecen simultáneamente la sintaxis y los tipos básicos a los que corresponden las constantes lógicas y no lógicas del lenguaje considerado. Más precisamente, las reglas de formación especifican bajo qué condiciones podemos inferir que algo es un conjunto (tipo), y bajo qué condiciones podemos decir que dos conjuntos son iguales. Por ende, dado que la buena formación incluye no solo los

modos de composición sintáctica sino también la identificación de los tipos básicos correspondientes, podemos decir que las reglas de formación despliegan al mismo tiempo las reglas de buena formación sintáctica y semántica específicas a un lenguaje determinado.
De hecho, toda demostración TCT[22] comienza verificando que las expresiones del juicio a demostrar resultan de la aplicación de las reglas de formación correspondientes. Es éste el modo de implementar en el cuadro de la TCT la idea de un lenguaje totalmente interpretado: cuando leemos una demostración TCT de abajo hacia arriba ella despliega los elementos sintácticos y semánticos del juicio demostrado.

• *Reglas de introducción*. Las reglas de introducción que definen los tipos del sistema, prescriben el modo de formar elementos canónicos y el modo de determinar si dos elementos son iguales.

• *Reglas de eliminación*. Ellas establecen el modo de definir funciones (llamadas *selectores*) en el conjunto definido por las reglas de introducción.

• *Reglas de igualdad*. Como ya mencionamos en la sección anterior, las reglas de igualdad relacionan la "armonía" entre las reglas de introducción y eliminación. Más precisamente las reglas de igualdad especifican el modo en el que operan los selectores definidos por las reglas de eliminación y cómo ejecutar su computación dados los elementos canónicos generados por las reglas de introducción.

1.4.2 La lógica intuicionista en TCT

22 Recordamos al lector que usamos la expresión *demostración TCT* como una abreviación de la expresión *demostración en el cuadro de la teoría constructiva de tipos*.

El operador Π
(el producto cartesiano de una familia de conjuntos):

$$
\frac{A : set \qquad \begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ B(x) : set\end{array}}{(\Pi x : A)B(x) : set}\ \Pi\mathrm{F}
\qquad\qquad
\frac{\begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ b(x) : B(x)\end{array}}{(\lambda x)b(x) : (\Pi x : A)B(x)}\ \Pi\mathrm{I}
$$

$$
\frac{c : (\Pi x : A)B(x) \quad a : A}{Ap(c, a) : B(a)}\ \Pi\mathrm{E}
$$

$$
\frac{a : A \quad \begin{array}{c}(x : A)\\ \vdots \\ b(x) : B(x)\end{array}}{Ap((\lambda x)b(x), a) = b(a) : B(a)}\ \Pi\mathrm{Eq}^1
\qquad\qquad
\frac{c : (\Pi x : A)B(x)}{c = (\lambda x)Ap(c, x) : (\Pi x : A)B(x)}\ \Pi\mathrm{Eq}^2
$$

La regla de introducción asume, como usualmente, que *x* no ocurra libre en ninguna otra suposición que aquellas de la forma *x* : *A*. La función diádica *Ap*(*x*, *y*) (el selector *aplicación*) está definida por la forma en que es introducida (por medio de la regla de eliminación) y por la especificación de su modo de computación (por medio de las reglas de igualdad). Puede leerse como “aplicación de *x* a *y*” y es de hecho un método de obtener un objeto canónico *B*(*a*), provisto que *a* : *A* (véase Martin-Löf,1984, pp.28-29).

En otras palabras, la regla de computación para *Ap*((λ*x*)*b*(*x*), *a*) establece que si *b*(*x*) es un elemento de prueba para *B*(*x*) bajo el supuesto de que *x* : *A*, dado que *a* es una prueba cualquiera de *A*, entonces su ejecución produce un objeto prueba *b*(*a*) : *B*(*a*), tal que *a* reemplaza a *x* en todo *b*(*a*). Dicho brevemente:

$$Ap((\lambda x)b(x), a) \qquad \rightarrow \qquad b(a/x)$$

El operador Π permite definir el cuantificador universal y la implicación material de la siguiente manera:

• $(\forall x : A)B(x) = (\Pi x : A)B(x) : prop$, provisto que $A : set$ y que $B(x) : prop\ (x : A)$.

• $A \rightarrow B = (\Pi x : A)B : prop$, provisto que $A : prop$ y que $B : prop$.

El operador Σ
(la unión disyunta de una familia de conjuntos)

$$\dfrac{A : set \qquad \begin{array}{c}(x : A)\\ \ldots\\ B(x) : set\end{array}}{(\Sigma x : A)B(x) : set}\;\Sigma F \qquad \dfrac{a : A \qquad b : B(a)}{(a, b) : (\Sigma x : A)B(x)}\;\Sigma I$$

$$\dfrac{c : (\Sigma x : A)B(x) \quad \begin{array}{c}(x : A, y : B(x))\\ \ldots\\ d(x, y) : C((x, y))\end{array}}{\mathbf{E}(c, (x, y)d(x, y)) : C(c)}\;\Sigma E$$

$$\dfrac{a : A \qquad \begin{array}{c}(x : A, y : B(x))\\ \ldots\\ d(x, y) : C((x, y))\end{array}}{\mathbf{E}(a, b, (x, y)d(x, y)) = d(a, b) : C((a, b))}\;\Sigma Eq$$

La expresión $\mathbf{E}(c, (x, y)d(x, y))$ que ocurre en la conclusión de la regla de eliminación se lee informalmente como la siguiente instrucción compuesta:

Ejecute c.

El resultado de tal ejecución es un elemento canónico que forma el par (a, b) tal que $a : A$ y $b : B$.

Reemplaze ahora x e y en la premisa derecha, con a y b respectivamente.

Obtenga de este modo $d(a, b)C((a, b))$.

La ejecución de $d(a, b)$ dará como resultado un elemento canónicos e de $C((a, b))$ – no es difícil deducir de esto que, por lo tanto, e es un elemento canónico de $C(c)$ (véase Martin-Löf, 1984, p. 40).

El operador Σ permite definir el cuantificador existencial y la conjunción de la siguiente manera:

- $(\exists x : A)B(x) = (\Sigma x : A)B(x) : prop$, provisto que $A : set$ y que $B(x) : prop\ (x : A)$.
- $A \wedge B = (\Sigma x : A)B : prop$, provisto que $A : prop$ y que $B : prop$.

En el caso de la conjunción obtenemos las reglas de eliminación estándar de la regla de eliminación de Σ,

1. Si decidimos que C sea o bien A o bien B, y
2. Si definimos las reglas de proyección $p(c)$ y $q(c)$, mencionadas en la sección anterior de la siguiente manera: $p(c) \equiv \mathbf{E}(c,(x, y)x)$ y $q(c) \equiv \mathbf{E}(c,(x, y)y)$.

Es decir, si llevamos a cabo los pasos 1 y 2, de ΣE obtenemos

$$\frac{c : A\wedge B}{p(c) : A}\ \wedge E^{1} \qquad \frac{c : A\wedge B}{q(c) : A}\ \wedge E^{2}$$

Recurriendo a las reglas de igualdad obtenemos las siguientes reglas de cómputo para la ejecución de $p(c)$ y $q(c)$, donde el elemento de prueba c está constituido por el par (a, b) tal que $a : A$, $b : B$.

$$p(a, b) \rightarrow a \qquad\qquad q(a, b) \rightarrow b$$

El operador +
(la unión disyunta o el co-productor de dos conjuntos)

$$\frac{A : set \quad B : set}{A{+}B : set}\,+\mathrm{F} \qquad\qquad \frac{a : A}{i(a) : A + B}\,+\mathrm{I}^1$$

$$\frac{a : A}{j(b) : A + B}\,+\mathrm{I}^2$$

$$\frac{\begin{array}{lll} & (x : A) & (y : B) \\ & \ldots & \ldots \\ c : A + B & d(x) : C(i(x)) & e(y) : C(j(y)) \end{array}}{\mathbf{D}(c(x)d(x), (y)e(y)) : C(c)}\ +\mathrm{E}$$

$$\frac{\begin{array}{lll} & (x : A) & (y : B) \\ & \ldots & \ldots \\ a : A & d(x) : C(i(x)) & e(y) : C(j(y)) \end{array}}{\mathbf{D}(i(b),(x)d(x),(y)e(y)) = d(a) : C(i(a))}\ +\mathrm{Eq}^2$$

$$\frac{\begin{array}{lll} & (x : A) & (y : B) \\ & \ldots & \ldots \\ a : A & d(x) : C(i(x)) & e(y) : C(j(y)) \end{array}}{\mathbf{D}(j(b),(x)d(y),(y)e(y)) = e(b) : C(j(b))}\ +\mathrm{Eq}^2$$

Las expresiones *i* y *j* son dos nuevas constantes primitivas (inyecciones) que proveen la información de que un elemento de $A{+}B$ pertenece a A o a B, y cuál es el caso.

La expresión $\mathbf{D}(c, (x)d(x), (y)e(y))$ que ocurre en la conclusión de la regla de eliminación, se lee informalmente como la siguiente instrucción compuesta:

Ejecute c;

Si de la ejecución resulta el elemento canónico $i(a)$ entonces sustituya a por x en $d(x)$.

Si de la ejecución resulta el elemento canónico $j(b)$ entonces sustituya b por y en $e(y)$.

Si ponemos en juego las reglas de igualdad, podemos también expresar esto de la siguiente manera: la ejecución de $\mathbf{D}(c, (x)d(x), (y)e(y))$ produce el elemento de prueba para $C(c)$ construido del elemento de prueba c para $A + B$ y los elementos de prueba $d(x)$ y $e(y)$ para $C(i(x))$ y $C(j(y))$, respectivamente, tal que $x : A$ y $y : B$. Si formulamos ésto con dos reglas de cómputo de obtenemos:

$$\mathbf{D}(i(a), (x)d(x), (y)e(y)) \quad \rightarrow \quad d(a) \text{ (donde } d(a) : C(i(a)))$$
$$\mathbf{D}(j(b), (x)d(x), (y)e(y)) \quad \rightarrow \quad e(b) \text{ (donde } e(b) : C(j(b)))$$

El operador + permite definir la disyunción de la siguiente manera

$A \vee B = A + B : prop$, provisto que $A : prop$ y $B : prop$.

Lo absurdo ⊥

$$\frac{}{\bot : set}\ \bot F \qquad \frac{x : \bot}{\bot : set}\ \bot E$$

El símbolo ⊥ no es otra cosa que el conjunto vacío. Puesto que su regla de formación establece que es siempre un conjunto, la regla establece también que ⊥ es siempre una proposición. El absurdo no requiere regla de introducción. En efecto, la regla de eliminación para $A \rightarrow \bot$ es la que introduce $\bot$. Es evidente que esto se sigue de la perspectiva estándar en la lógica intuicionista por medio de la cual $\sim A$ es visto como una abreviación de $A \rightarrow \bot$. Dado que no hay regla de introducción específica para $\bot$ tampoco hay una regla de igualdad que relacione la eliminación con la introducción. Finamente, la regla de eliminación expresa la regla de, así llamada, *ex falso sequitur quodlibet*. En efecto, el juicio de que algún x es del tipo $\bot$ es contradictorio dado que $\bot$ es el conjunto vacío. Por ende, de tal juicio podemos concluir que $a : A$ (véase Martin-Löf, 1984, pp. 65 – 67).

Puesto que una de las tesis principales de nuestro trabajo se basa en la idea de que la regla formal de la dialógica, que permite la así llamada jugada de espejo, es en realidad la forma dinámica de la noción de igualdad definicional proveniente de la teoría de tipos, es conveniente presentar en forma sistemática, aunque sea brevemente, tal concepción y su relación con la igualdad como un predicado.

Debido a limitaciones de espacio nos restringiremos aquí a discutir los puntos relevantes para los objetivos del presente trabajo. Para más información sobre nuestra perspectiva, ver Martin-Löf (1984), Ranta (1988, 1994), Nordström et al. (1990), Primiero (2008) y Granström (2011).

II. 2 Afirmaciones e igualdad

Como mencionado anteriormente, siempre que en TCT se introduce una nueva expresión, se hace por medio de una *explicación de significado*. En el caso de la introducción de un nuevo tipo, la explicación de significado consiste en (1) describir sus objetos canónicos, (2) proporcionar un algoritmo a fin de reconocer si un objeto no-canónico es de ese tipo y (3) especificar las condiciones que establecen la identidad (o no) de dos objetos respecto de un tipo. El punto 3 se entiende como la tarea definir una relación de equivalencia apropiada. De este modo las afirmaciones de la forma $a = b : A$, afirman que los dos objetos a y b satisfacen la relación de equivalencia definida para el tipo A. La afirmación $a = b : A$ es también llamada *afirmación de la igualdad definicional*, dado que por medio de ella se introducen definiciones explícitas, por ejemplo de funciones. Una tal igualdad se transmite por reflexividad, simetría y transitividad, y por sustitución de iguales definicionales (Ranta, 1994, p. 52). Más aún, definiciones reales como apuntado por Frege en su crítica a Hilbert, pueden proveer la verdad de una proposición basada en estas definiciones, pero *ellas no son portadoras de verdad*. Para decirlo brevemente, la igualdad definicional *no es* un predicado. La expresión $a = b$ es ambigua a menos que usemos la expresión de la afirmación completa: si se encuentra a la izquierda de los dos puntos ella expresa igualdad definicional y si está a la derecha de los dos puntos una tal igualdad debe entenderse como un predicado.

Cuando un tipo es una proposición constituida por constantes lógicas tales como la conjunción, la disyunción y otras, el rol inferencial de las igualdades a la izquierda de los dos puntos es armonizar el proceso de síntesis y análisis que despliega la explicación de significado de las constantes lógicas en juego. En la siguiente sección discutiremos muy brevemente el rol de la la igualdad definicional en el proceso de armonización (para una discusión en profundidad Rahman/Redmond, 2015b)

II.2.1 Elementos de prueba, igualdad y su rol inferencial

En su histórico artículo de 1935 sobre deducción natural, Gerhard Gentzen señaló:

> Las introducciones representan, por así decirlo, las "definiciones" de los símbolos referidos, y las eliminaciones no son más, en el

> análisis final, que la consecuencia de estas definiciones.[23] (Gentzen 1969, p.80)

La idea detrás de la observación de Gentzen es que una regla de introducción de la deducción exhibe el fundamento para la afirmación de una proposición que contiene la constante lógica en cuestión, y que el resultado de la utilización de la regla de eliminación correspondiente muestra exactamente esos componentes de la proposición que la regla de introducción especificó como suficientes para su afirmación. Dummett llama *armonía* a tal coordinación. En breve y haciendo uso de la formulación de Stephen Read (2008, p. 291, nota 5), una regla de eliminación es armónica, si esta regla no hace más que explicar las consecuencias del significado conferido por la regla de introducción. Si comenzamos con las reglas de introducción, una manera de ver la contribución del concepto de armonía es que mientras las reglas de introducción muestran cómo *sintetizar* a partir de ciertas premisas, una expresión que contiene una constante lógica dada, la regla de eliminación muestra cómo *analizar* la expresión en juego mostrando exactamente aquellos componentes que son requeridos por las reglas de introducción para afirmar esta expresión.

El lenguaje explícito de la TCT permite expresar la condición de armonía por medio de igualdades definicionales. Tomemos como ejemplo el caso de la conjunción. La proposición $A \wedge B$ (o con el conjunto $A \times B$) se explica, estableciendo que un elemento canónico de $A \wedge B$ es un par de elementos de prueba (a, b) donde $a : A$ y $b : B$ – es decir, donde a es un elemento de prueba A y b de B:

---

23 En el original: *The introductions represent, as it were; the 'definitions' of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis; than the consequence of these definitions.*

$$\frac{a : A \qquad b : B}{(a, b) : A\wedge B}\ \wedge\text{-introducción}$$

Con el fin de definir ∧-eliminaciones vamos a hacer uso de cierto tipo de operadores llamados *selectores*, a partir del cual se pueden definir nuevas funciones que extraen aquellos componentes que constituyen un elemento de prueba complejo c (como por ejemplo $c = (a, b)$). En el caso de la conjunción los selectores son las funciones de proyección p y q que tienen como valor el lado izquierdo y derecho del par de elementos de prueba respectivamente. Por lo tanto, si c es un elemento de prueba para la conjunción,, entonces $p(c)$ nos da el componente izquierdo de c y $q(c)$ su componente derecho.

$$\frac{c : A\wedge B}{p(c) : A}\ \wedge\text{-}p\text{-eliminación} \qquad\qquad \frac{c : A\wedge B}{q(c) : B}\ \wedge\text{-}q\text{-eliminación}$$

Si sabemos que $c = (a, b)$, entonces $p(c)$ restaura el componente izquierdo de c (obtenido por la regla de introducción) esto es: $p(c) = p((a, b)) = a$, tal que $a : A$, análogamente $q(c)$ restaura el componente derecho

$$\frac{a : A \qquad\qquad b : B}{p((a, b)) = a : A}\ \wedge\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad}$$

$$\frac{a : A \qquad\qquad b : B}{q((a, b)) = b : B}\ \wedge\text{-}der\text{-}\beta\text{-igualdad}$$

Tales reglas proveen ejemplos claros de cómo usar la noción de igualdad definicional mencionada anteriormente: las funciones de proyección *p* y *q* se definen explícitamente por medio de una regla de inferencia de modo que, dados los elementos de prueba *a* y *b*, la proyección *q* de (*a, b*) es definicionalmente idéntica a *b*, respecto a la relación de equivalencia que define el tipo *B*, y análogamente se introduce en la proyección *p*. Estas igualdades pueden ser utilizadas para describir las reglas de cómputo de la proyecciones *p* y *q* en relación al par (*x*, *y*), tal que *x* : *A*, *y* : *B*.

También se puede introducir una regla dual, llamada η, de la siguiente manera:

$$\frac{c : A\wedge B}{(p(c),q(c)) = c : A\wedge B}\ \wedge\text{-}\eta\text{-igualdad}$$

En suma, en nuestro contexto ambas reglas de igualdad pueden ser vistas como aquello que asegura que las reglas son armoniosas. Es decir, si la conjunción ha sido compuesta por (*a*, *b*) entonces ambas reglas de eliminación proveen un análisis del elemento de prueba *c* del que resultan los componentes *a* y *b*.

II. 2.2 Igualdad definicional y proposicional

II. 2.2.1 La igualdad definicional

La igualdad definicional cumple con las condiciones básicas de la igualdad:

Reflexividad

$$\frac{a : A}{a = a : A}$$

Simetría

$$\frac{a{=}b : A}{b = a : A}$$

$$\frac{A : set}{A = A : set} \qquad \frac{A = B : set}{B = A : set}$$

Transitividad Extensionalidad

$$\frac{a = b : A \qquad b = c : A}{a = c : A} \qquad \frac{A = B : set \qquad a : A}{a : B}$$

$$\frac{A = B : set \qquad B = C : set}{A = C : set} \qquad \frac{A = B : set \qquad a = b : A}{a = b : B}$$

En el contexto de juicios hipotéticos, la igualdad definicional entre dos elementos de prueba, por ejemplo *a* y *c*, digamos, en el conjunto *A*, permite obtener la igualdad entre las funciones $b(a)$ y $b(c)$, que se infiere de la sustitución de la variable *x* en la función $b(x)$ de *A* a $B(x)$ por ambas, *a* y *c*:[24]

Sustitución

$$\frac{a = c : A \qquad b(x) : B(x)(x : A)}{b(a) = b(c) : B(a)} \qquad \frac{a = c : A \qquad B(x) : set\ (x : A)}{B(a) = B(c) : set}$$

Los juicios hipotéticos también permiten expresar igualdades hipotéticas que también se rigen por una regla de sustitución adecuada:

24 Presentamos aquí las reglas de sustitución para igualdades entre los elementos de un conjunto, sin embargo se pueden definir de forma análoga la igualdad entre elementos del tipo *set* – es decir las igualdades entre conjuntos (véase Nordström/Peterson/Smith, 1990, p. 39).

Igualdades definicionales entre objetos dependientes

$$\frac{a : A \qquad c(x) = b(x) : B(x)\ (x : A)}{b(a) = c(a) : B(a)}$$

Las reglas de sustitución para igualdades en el contexto de juicios hipotéticos requieren asimismo una noción general de sustitución de variables expresadas por la siguiente regla:

Regla de sustitución general para juicios hipotéticos

$$\frac{a : A \qquad b(x) : B(\mathrm{x})\ (x : A)}{b(a) : B(a)}$$ [25]

Veamos ahora como en el cuadro de la TCT se relacionan las nociones de igualdad definicional e igualdad proposicional.

II.2.2.2 Igualdad proposicional: Los predicados de igualdad intensional y extensional.

Discutimos ahora la formulación de reglas que muestren al mismo tiempo cómo definir un predicado de igualdad y cómo pasar de la igualdad definicional a un tal predicado. En realidad se pueden definir dos predicados de igualdad, uno intensional y otro extensional. El elemento de prueba correspondiente al predicado de

25 En realidad esta regla no es suficiente, pues no incluye el caso de sustituciones simultáneas que son necesarias en casos como $C(x, y) : set(x : A, y : B(x))$. Hay varias soluciones a este respecto, la más práctica desde el punto de vista procedural (tan claro en la perspectiva dialógica), es permitir sustituciones parciales en un contexto. Volviendo a nuestro ejemplo, si es el caso que $a : A$, *llevamos a cabo una primera aplicación de la sustitución para obtener* $C(a, y) : set\ (y : B(a))$, y luego una segunda vez para obtener $b : B(\mathrm{a})$ y $C(a, b) : set$ (véase Nordström/Peterson/Smith, 1990, p. 39).

identidad extensional no depende de los elementos de prueba de las premisas.

- **El predicado de igualdad intensional**

El predicado de igualdad proposicional intensional definido sobre un conjunto, digamos *A*, se expresa usualmente con la notación ***Id***(*A*, *a*, *b*). A veces se utiliza la siguiente notación $a =_{A} B$, sin embargo nosotros usaremos la primera pues manifiesta explícitamente que ***Id*** es una relación.

Formación

$$\frac{A : set \quad a : A \quad b : A}{\boldsymbol{Id}\,(A, a, b) : set}$$

Como hace notar Thompson (1999, p. 110) esta regla de formación es diferente de las otras reglas de formación de tipos. Las últimas toman la forma

$$\frac{\ldots : type \qquad \ldots : type}{\ldots : type}$$

Este género de reglas permite identificar los tipos que corresponden a una expresión dada independientemente de cuáles sean los elementos de prueba que le pertenecen a estos tipos. La regla de formación ***Id*** no posee esta propiedad dado que ella establece que ***Id***(*A*, *a*, *b*) es un tipo si *a* y *b* son de tipo *A*. Esto significa que la regla que hace explícita los tipos presupuestos en ***Id***(*A*, *a*, *b*) está inextricablemente atada a reglas de inferencia con elementos de prueba específicos.

La regla de introducción básica introduce reflexividad y proviene del hecho que dada la afirmación *a* : *A*, tenemos inmediatamente *a*

= a : A. Desde el punto de vista inferencial, esto equivale a introducir el caso de la reflexividad ***Id***(A, a, a) provisto que la premisa esté constituida por la afirmación $a : A$.

$$\dfrac{a : A}{r(a) : \boldsymbol{Id}(A, a, a)}$$

El elemento de prueba para ***Id***(A, a, a) es $r(a)$. La estructura interna de este elemento de prueba es nada más y nada menos que su dependencia de a. Por ende, lo que hace que la proposición ***Id***(A, a, a) sea verdadera es el operador r, que cuando se aplica a a, produce a.

Mediante la aplicación de la regla de sustitución en conjuntos a $a = b : A$ y ***Id***(A, a, x) : *prop* ($x : A$), obtenemos ***Id***(A, a, a) = ***Id***(A, a, b) : *prop*, de tal igualdad más el resultado de la aplicación de la regla de introducción-***Id*** a a, obtenemos, por medio de la igualdad entre conjuntos $r(a)$: ***Id***(A, a, b.

$$\dfrac{\dfrac{a = b : A \quad \dfrac{A : set \qquad a : A \quad x : A}{\boldsymbol{Id}(A, a, x) : prop}\,\boldsymbol{Id}\text{-F}}{\boldsymbol{Id}(A, a, a) = \boldsymbol{Id}(A, a, b) : prop}\,\text{sust}^1 \qquad \dfrac{a : A}{r(a) : \boldsymbol{Id}(A, a, a)}\,\boldsymbol{Id}\text{-introducción}}{r(a) : \boldsymbol{Id}(A, a, b)}\,set\text{-igualdad}$$ [26]

En otras palabras, de $a : A$ y $a = b : A$ obtenemos también la introducción del caso no-reflexivo ***Id*** [27]:

$$\dfrac{a : A \qquad a = b : A}{r(a) : \boldsymbol{Id}(A, a, b)}\,\boldsymbol{Id}\text{-Introducción}$$

---

26 Cf. Ranta, 1994, p. 53.

27 Cf. Nordström/Peterson/Smith, 1990, p. 57.

Eliminación y sustitución

La regla de eliminación es una generalización de la regla de sustitución de Leibniz, sin hacer uso de la cuantificación de segundo orden – presupuesta en las formulaciones estándar de tal regla. La idea rectora detrás de la regla de sustitución de Leibniz es que aquellas expresiones que el predicado de identidad establece como iguales respecto a un conjunto dado, pueden ser sustituídas mutuamente en el seno de un tal conjunto. Supongamos que tenemos una prueba *p* de una proposición *C* en la que ocurre *a*, y supongamos también que sabemos que *c* : ***Id***(*A*, *a*, *b*). Bajo estas condiciones, estamos capacitados entonces para inferir la proposición *C'* resultante de reemplazar (al menos) *alguna* de las ocurrencias de *a* en *C* por *b*. Para capturar la idea de sustitución por alguna de las ocurrencias, pensamos en *C* teniendo la forma *C*[*a/x*, *a/y*] en la cual *a* reemplaza dos variables libres *x* e *y*. De hecho, más generalmente, podemos también pensar una proposición *C* en la que ocurra *r*(*a*). La idea subyacente es que toda proposición en la cual se lleva a cabo una sustitución respecto a ***Id***, puede incluir aquellas proposiciones *P* en la cuales *r*(*x*) ocurre explícitamente, y por ende tale *P* pueden ser llevados a la forma *C*[*a/x*, *a/y*, *r*(*a/x*)]. Estas consideraciones dan paso a la siguiente regla

$a : A$
$b : A$
$c : \boldsymbol{Id}\ (A, a, b)$
$C[x, y, z] : set\ (\ x : A, y : A, z : \boldsymbol{Id}(A, a, b))$
$d(x) : C[x, x, r(\mathrm{x})]\ (x : A)$
-- ***Id***-eliminación
$id(c, d) : C[a, b, c]$

El operador *id* en *id*(*c*, *d*) indica que se está aplicando la identidad *c* : ***Id***(*A*, *a*, *b*) a *d*, en nuestro caso *d*(*a*) y esta regresa el elemento de prueba *d*(*a*) mismo. Esto sugiere las siguientes reglas que determinan cuándo dos *id*(*c*, *d*) son iguales:

$a : A$
$C[x, y, z] : set\ (x : A, y : A, z : \mathbf{Id}(A, a, b))$
$d(x) : C[x, x, r(x)]\ (x : A)$
-- ***Id***-eliminación
$id(r(a), d) = d(a) : C[a, b, r(a)]$

Veamos ahora algunos casos que ejemplifican el uso de la regla de eliminación. Partiremos mostrando que la ley de sustitución de Leibniz puede ser inferida de la regla de eliminación. Como ya hemos mencionado, la idea de la regla de Leibniz es que la premisas $B(a)$ y $\mathbf{Id}(A, a, b)$, nos permiten concluir $B(b)$ reemplazando a con b en $B(a)$.

Ley de Sustitución de Leibniz

Se asume que $(a, b) : A$ y $c : \mathbf{Id}(A, a, b)$ y también que $p : B(a)$.

La primera tarea a llevar cabo es inferir a partir de $B(x)$ alguna expresión que tenga la forma $C[x, x, r(x)]$ – puesto que es ésta la forma que necesitamos para aplicar la regla de eliminación de ***Id***. El modo más directo de obtener una expresión que posea tal forma es inferir $B(x) \rightarrow B(x)$ a partir de $B(x)$ – en este caso, la proposición tiene la forma $C[x, x,]$ que no menciona $r(a)$. Entonces dado que el elemento de prueba de $B(x) \rightarrow B(x)$ es la función de identidad, dado $\lambda x.x$ obtenemos $\lambda x.x : B(x) \rightarrow B(x)$. De esta última afirmación y las premisas $a : A$ y $b : A$, podemos aplicar la regla de eliminación de ***Id*** para obtener $id(c, (x)\lambda x.x) : B(a) \rightarrow B(b)$.

$$
\dfrac{a : A \qquad b : A \qquad c : \mathbf{Id}(A, a, b) \qquad \dfrac{x : B(x)}{\lambda x.x : B(x) \rightarrow B(x)\ (x : A)}\ \rightarrow\mathrm{I}}{id(c, (x)\lambda x.x) : B(a) \rightarrow B(b)}\ \textit{Id}\text{-eliminación}
$$

Haciendo uso de la premisa $p : B(a)$ y aplicando la regla de eliminación de la implicación, obtenemos $subst(c, p) : B(b)$, donde $subst(c, p)$ es una forma de abreviar la expresión $ap(id(c, (x)\lambda x.x), p)$.

$$\dfrac{\dfrac{a : A \qquad b : A \qquad c : \boldsymbol{Id}\,(A, a, b) \qquad \dfrac{x : B(x)}{\lambda x.x : B(x) \rightarrow B(x)\ (x : A)}\rightarrow\mathrm{I}}{id(c, (x)\lambda x.x) : B(a) \rightarrow B(b)}\ Id\text{-eliminación} \qquad p : B(a)}{ap(id(c, (x)\lambda x.x), p) : B(b)}\ \Pi\mathrm{E}$$

Esto nos lleva a la siguiente formulación de la regla de Leibniz:

$$\dfrac{B(\mathrm{x}) : set(x : A) \quad a{:}A \qquad b{:}A \qquad c : \boldsymbol{Id}(A, a, b) \qquad p : B(a)}{subst(c, p) : B(b)}$$

También ***Id*** es transmitida por reflexividad, transitividad y simetría. Esto se sigue de lo anterior de las siguientes consideraciones:

Puesto que la regla de introducción nos la reflexividad directamente, nos queda aún por mostrar que la regla de eliminación nos permite obtener simetría y transitividad.

Simetría: Asumamos que a, b: A, y que d : ***Id***(A, a, b); y consideremos que C es e : ***Id***(A, y, x). Dado que $a : A$ es una de las premisas asumidas, obtenemos de ella (por medio de la regla de introducción de ***Id***) $r(a)$: ***Id***(A, a, a). Aplicando ahora la regla de eliminación de ***Id***, obtenemos $id(d, r(a)) : Id(A, b, a)$. Esto permite anotar la siguiente regla para simetría:

$$\dfrac{d : \boldsymbol{Id}(A, a, b)}{symm(d) : \boldsymbol{Id}(A, b, a)}$$

Donde *symm* (d) es una abreviación de $id(d, r(a))$.

Transitividad: el paso principal para inferir la transitividad de ***Id*** está en considerar que C es $\lambda y.y : \boldsymbol{Id}(A, y, c) \rightarrow \boldsymbol{Id}(A, x, c)$. De las premisas $d : \boldsymbol{Id}(A, a, b)$ y $e : \boldsymbol{Id}(A, b, c)$, obtenemos $id(d, (x)\lambda y.y) : Id(A, b, c) \rightarrow Id(A, a, c)$ como resultado de la aplicación de la regla de eliminación de ***Id***. Por Π-eliminación -haciendo uso de $e : \boldsymbol{Id}(A, b, c)$ – Obtenemos $trans(d, e) : \boldsymbol{Id}(A, a, c)$, donde $trans(d, e)$ abrevia la expresión $ap(id(d,(x)\lambda y.y\ ), e)$. Esto nos conduce a la formulación de la siguiente regla:

$$\frac{d : \boldsymbol{Id}(A, a, b) \qquad e : \boldsymbol{Id}(A, b, c)}{trans(d, e) : \boldsymbol{Id}(A, a, c)}$$

• El predicado de igualdad extensional

La regla de formación del predicado de igualdad extensional entre a y b definida en el conjunto A ($\boldsymbol{Eq}(A, a, b)$) es análoga a la del predicado de identidad intensional.

$$\frac{A : set \qquad a : A \qquad b : A}{\boldsymbol{Eq}(A, a, b) : set}\ \boldsymbol{Eq}\mathrm{F}$$

Introducción de *Eq*

El elemento de prueba ***Eq*** que verifica $\boldsymbol{Eq}(A, a, b)$), no depende de a ni de b. La verificación de $\boldsymbol{Eq}(A, a, b)$ solo necesita de la identidad de algún elemento de prueba arbitrario. Sea eq entonces por ejemplo $s = s$.

$$
\frac{a = b : A}{eq : \boldsymbol{Eq}(A, a, b)}\ \boldsymbol{Eq}\mathrm{I}
$$

La regla representa la forma más débil de relacionar inferencialmente la igualdad ontológica con la proposicional. En efecto el elemento de prueba *eq* no contiene, ni depende de ninguno de los elementos de prueba sobre los que se basa la afirmación de la premisa. Esta falta de lazos entre los elementos de prueba dela premisa y la conclusión se hace aún más evidente en las siguientes reglas de eliminación no inductivas:

Eliminación de *Eq*

$$
\frac{c : \boldsymbol{Eq}(A, a, b)}{a = b : A}\ \boldsymbol{Eq}\mathrm{E}^1
$$

En esta regla de eliminación el elemento de prueba c de la premisa no contiene nada que pueda conducir a la igualdad $a = b$ de la conclusión. Es más, dado que la igualdad expresada por $\boldsymbol{Eq}(A, a, b)$ es identidad numérica, todo elemento c de $\boldsymbol{Eq}(A, a, b)$ es igual a *eq*:[28]

$$
\frac{c : \boldsymbol{Eq}(A, a, b)}{c = eq : \boldsymbol{Eq}(A, a, b)}\ \boldsymbol{Eq}\mathrm{E}^2
$$

Se puede mostrar que con ambas reglas de eliminación podemos obtener una regla de sustitución análoga a la del predicado de identidad intensional y, por tanto, obtener también reglas de transmisión análogas[29].

28 Véase Nordström /Petersson/Smith (1990), p. 61.
29 Véase Nordström /Petersson/Smith (1990), p. 61.

$a : A$
$b : A$
$c : \boldsymbol{Eq}(A, a, b)$
$\quad\quad C[x, y, z] : set\ (x : A, y : A, z : \boldsymbol{Eq}(A, a, b))$
$d(x) : C[x, x, eq]\ (x : A)$
-- $\boldsymbol{Eq}\mathrm{E}^3$
$d(a)\ C[a, b, c]$

CAPÍTULO 2[30]

EL MARCO DIALÓGICO ESTÁNDAR

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950[31] por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz[32], ambos inspirados por la noción de Wittgenstein de significado como uso. La idea básica del enfoque dialógico, de la lógica, es que el significado de las constantes lógicas está dado por las normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas

[30] Revisión y corrección del Capítulo 2 por MD Martínez Cazalla, doctoranda en Lógica, Universidad de Sevilla (España).

[31] De hecho, la lógica dialógica desarrollada por Paul Lorenzen y Kuno Lorenz, fue el resultado de una solución a algunos de los problemas que se suscitan en la Lógica Operativa de Lorenzen (1955) - para una discusión sobre las ideas y las deficiencias de la Lógica Operativa, ver Schröder-Heister (2008).

[32] Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen / Lorenz (1978). Para una visión histórica ver Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de los acontecimientos recientes desde Rahman (1993), se puede encontrar en Rahman / Keiff (2005), Keiff (2009) y Rahman (2012). Para la metalógica subyacente, ver Clerbout (2013, 2014a, b). Para las presentaciones de libros de texto: Lorenzen / Schwemmer (1975), Redmond / Fontaine (2011) y Rückert (2011). Para el papel clave de la dialógica en la recuperación de la relación entre la dialéctica y la lógica, véase Rahman / Keiff (2010). Los artículos de Keiff (2004a, b, 2007) y de Rahman (2009) contienen un estudio de lógica dialógica modal. Fiutek et al. (2010) estudian el enfoque dialógico de revisión de creencias. Clerbout / Gorisse / Rahman (2011) estudian la lógica de los Jainas en el marco dialógico. Popek (2012) desarrolla una reconstrucción dialógica de las *obligationes* medievales. Rahman / Tulenheimo (2009) estudian los vínculos entre el GTS y la lógica dialógica. Otros libros son Redmond (2010) que discute el tema de la ficción en el contexto dialógico, Fontaine (2013) que enlaza intencionalidad, ficción y diálogos y Magnier (2013) que desarrolla, en un marco dialógico, aplicaciones de la lógica epistémica dinámica para el razonamiento jurídico. Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la CTT, ver Clerbout / Rahman (2015), Rahman / Clerbout (2014, 2015), Rahman / Clerbout / Jovanovic (2014), Rahman / Jovanovic / Clerbout (2015) y Rahman / Redmond (2014).

específicas de estructuración de la interacción argumentativa. Esta característica argumentativa subyacente a la dialógica, a menudo lleva a clasificarla como una teoría pragmática del significado.
De un modo más preciso, las reglas que fijan el significado pueden ser de más de un tipo y ellas determinan la reconstrucción de una práctica argumentativa y/o lingüística que una cierta forma de juegos de lenguaje, llamados diálogos, proporciona. Como se mencionó anteriormente, el enfoque dialógico de la lógica no es una lógica, sino un marco de significado pragmático en donde diferentes lógicas pueden desarrollarse, combinarse y/o compararse. Sin embargo, aquí vamos a limitarnos a las versiones dialógicas de la lógica clásica y la intuicionista.

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (**P**), su rival, que pone en tela de juicio la tesis, se llama Oponente (**O**). En su forma original, los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina, después de un número finito de jugadas, con sólo un jugador ganador. Acciones o jugadas en un diálogo, a menudo son entendidas como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas sino, en el contexto del desarrollo de un juego dialógico. Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas de partículas regulan aquellas jugadas que constituyen *peticiones* o *requerimientos* (a las jugadas del rival) y aquéllas que son *respuestas* (a esas peticiones), mientras que las reglas estructurales determinan el curso general de un juego dialógico (también llamado *diálogo*).

Crucial para el enfoque dialógico son los siguientes puntos:

1. La distinción entre significado local (reglas para las constantes lógicas) y significado global (incluido en las reglas estructurales).

2. Las reglas para el significado local sean formuladas para jugadores anónimos.
3. La distinción entre el nivel de partida (triunfo de una partida) y el nivel estratégico (existencia de una estrategia ganadora).
4. Una noción de validez que equivale a una estrategia ganadora para **P**.
5. Que la noción de triunfo en una partida formal sustituye a la noción de estrategia ganadora en un modelo.

En la sección siguiente, presentaremos brevemente la lógica dialógica estándar. La idea es introducir los elementos de la lógica dialógica de una forma auto-contenida antes de enriquecerla con los aportes de la TCT.

2.1 Lógica dialógica estándar

Sea $\mathbb{L}$ un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado (cada uno con una n-adiad fija).

Ampliamos el lenguaje $\mathbb{L}$ con dos etiquetas **P** y **O** que corresponden a los participantes del diálogo y el signo de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa, utilizamos variables **X** o **Y** (siendo **X** ≠ **Y**). Una jugada es una expresión de la forma **X**-*e*, donde *e* es bien una expresión de la forma ! φ para alguna proposición φ de $\mathbb{L}$, bien de la forma ? [φ_1, …, φ_n]. Comenzamos con las reglas de partículas (Tabla 2.1).

Tabla 2.1 Reglas de partículas para la dialógica estándar

Afirmación	**X** ! $\varphi \wedge \psi$	**X** ! $\varphi \vee \psi$	**X** ! $\varphi \rightarrow \psi$	**X** ! $\neg\varphi$
Ataque	**Y** ? [φ] o **Y** ? [ψ]	**Y** ? [φ, ψ]	**Y** ! φ	**Y** ! φ
Defensa	**X** ! φ resp. **X** ! ψ	**X** ! φ o **X** ! ψ	**X** ! ψ	−−

Afirmación	**X** ! $\forall x\varphi$	**X** ! $\exists x\varphi$
Ataque	**Y** ? [$\varphi(x/a_i)$]	**Y** ? [$\varphi(x/a_1)$, ..., $\varphi(x/a_n)$]
Defensa	**X** ! $\varphi(x/a_i)$	**X** ! $\varphi(x/a_i)$ (en donde 1≤ i ≤n)

En esta tabla, una expresión de tipo a_i es una constante individual y $\varphi(a_i/x)$ expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de x en φ por a_i. Cuando una jugada consiste en una pregunta de la forma '? [φ_i, …, φ_n]', entonces el otro jugador elige una proposición entre φ_i, …, φ_n y la juega. Así, podemos –en términos de qué jugador tiene una opción– distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación existencial, el defensor es el único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla de partículas para la negación.

Las reglas de partículas proporcionan una descripción abstracta de cómo se procede en el diálogo a nivel local: especifican el modo en el que una proposición puede atacarse o defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Decimos que tales reglas gobiernan el nivel local del significado. Rigurosamente, las expresiones que aparecen en las tablas precedentes no son jugadas reales porque

tienen proposiciones esquemáticas y los jugadores no están especificados.
Más aún, las reglas de partículas son reglas para jugadores *anónimos*[33] en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*). Por eso están formuladas con la ayuda de variables que pueden ser substituidas (uniformemente) por **P** u **O**. No sería razonable basar un enfoque lúdico-teórico del significado de las constantes lógicas en un sistema de reglas que determine que una constante tal tiene un significado diferente cuando es jugada por un jugador diferente. Esto haría de cualquier interacción un sinsentido.
Además, estas reglas son indiferentes al rol de la proposición en las diversas variedades de diálogos en los que puedan intervenir, por ejemplo: las reglas locales de las constantes lógicas no varían si los diálogos son clásicos o intuicionistas. Por este motivo decimos que la descripción dada por las reglas de partículas es en cierto modo abstracta. Las expresiones "ataque" y "defensa" son convenientes para prescribir ciertas interacciones entre jugadas. Tales interacciones pueden ser definidas con precisión de la forma siguiente:

- Sea σ una secuencia de jugadas. La función ρ_σ asigna una posición para cada jugada en σ, comenzando con 0. La función $\boldsymbol{F}_\sigma$ asigna un par $[m, Z]$ para ciertas jugadas N en σ, donde m denota una posición menor que $\rho_\sigma(N)$ y Z es o bien a (un ataque) o bien d (una defensa). Es decir, la función $\boldsymbol{F}_\sigma$ permite seguir la "historia" de las interacciones ataque-defensa que originaron una jugada dada. Una *partida* p es una secuencia legal de jugadas, es decir, una secuencia de jugadas que observa las reglas del juego.

La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, otorgan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para φ,

---

33 Ver Rahman / Redmond (2015a).

escrito D(φ), es el conjunto de todas las partidas con φ como tesis (ver la regla de inicio más abajo). Las reglas estructurales son las siguientes:

SR0 (Regla de inicio): Sea φ una proposición compleja[34] de **L**. Para cada $\mathfrak{p} \in D(\varphi)$ tenemos:

$\rho_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}\text{-}A)=0$,
$\rho_{\mathfrak{p}}(\mathbf{O}\text{-n:=}i)=1$,
$\rho_{\mathfrak{p}}(\mathbf{P}\text{-m:=}j)=2$

COMENTARIO: En otras palabras, cualquier partida p en D(φ) comienza con **P** ! φ. Llamamos φ a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de esto, el oponente y el proponente eligen sucesivamente un número entero llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de jugadas que queda especificado en la siguiente regla estructural **(SR1).**

SR1 (Regla clásica):

- Sea $\mathfrak{p} \in D(\varphi)$. Para cada M en $\mathfrak{p}$ donde $\rho_{\mathfrak{p}}(M)>2$ tenemos $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(M)=[m', Z]$ donde $m'<\rho_{\mathfrak{p}}(M)$ y $Z\in\{a, d\}$
- Sea r el rango de repetición del jugador **X** y $\mathfrak{p}\in D(\varphi)$ tal que el último miembro de $\mathfrak{p}$ es una jugada de **Y**,
  M_0 es una jugada de **Y** de posición m_0 en π,
  $M_1, ..., M_n$ son las jugadas de **X** en $\mathfrak{p}$ tal que $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(M_1)=...= \boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}}(M_n)=[m_0, Z]$.

COMENTARIO: Considérese la secuencia[35] $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}*N$ donde N es una jugada de **X** tal que $\boldsymbol{F}_{\mathfrak{p}'}(N)=[m_0, Z]$. Tenemos $\mathfrak{p}'\in D(\varphi)$ sólo si $n<r$.

---

[34] Si la tesis no es una proposición compleja sino que es una proposición elemental, entonces la regla estructural que hay que aplicar no es la SR0 sino la SR2, regla que puede verse más adelante en este mismo capítulo.

La primera parte de la regla establece que cada jugada después de la elección de los rangos de repetición es: bien un ataque, bien una defensa. La segunda parte se asegura la finitud de las partidas mediante el establecimiento de un rango de repetición del jugador como el número máximo de veces que puede desafiar a o defenderse de una jugada determinada del otro jugador.

SR1i (regla intuicionista): Los jugadores sólo pueden defenderse del último de los ataques aún no respondidos.[36]

COMENTARIO: Una de las contribuciones originales de la propuesta dialógica es que un marco tal permite, desde una nueva perspectiva, dar cuenta de la diferencia entre la significación clásica y la intuicionista de las constantes lógicas. Si bien la *significación local* es la misma (la reglas de partículas se aplica indistintamente a las dos lógicas), *la significación global*, dada por las reglas estructurales que determinan el desarrollo de un juego, es diferente. Obtenemos juegos dentro del marco de la lógica clásica si permitimos responder a un ataque que no sea el último, y obtenemos juegos dentro del marco de la lógica intuicionista si impedimos tal tipo de jugadas defensivas. Ahora bien, se ha demostrado en la literatura especializada, ya citada, que tales juegos proveen una noción de estrategia adecuada respecto a la noción de validez clásica e intuicionista respectivamente. Sin embargo, la motivación para utilizar la regla estructural clásica o intuicionista fue hasta ahora únicamente dada por las pruebas de adecuación, por ejemplo: introducimos la regla estructural

---

[35] Usamos $\mathfrak{p}*N$ para denotar la secuencia obtenida agregando el movimiento N al juego $\mathfrak{p}$.

[36] Esta cláusula también se conoce como la regla de *responda primero a la última obligación* (*Last Duty First*) y permite desarrollar juegos para la lógica intuicionista.

intuicionista pues consideramos que ella se adecúa a la noción de validez intuicionista. Muy recientemente Clerbout (2015), propuso la idea de caracterizar las reglas por motivaciones basadas puramente en consideraciones que se siguen de la concepción de interacción dialógica. Una manera de verlo, como expondremos en el comentario de los ejemplos, es que la regla estructural intuicionista impone un modo de juego más restrictivo que el la lógica clásica respecto a la elección de una u otra juagada durante el desarrollo de un partida. Si en un momento determinado del juego se eligió afirmar una proposición y más adelante se elige afirmar la contraria para defender *la misma jugada*[37], ello llevará inevitablemente a perder el juego. Pero ésta restricción no se reduce a impedir contradicciones, sino que es de orden más general, por ejemplo, si un jugador eligió una constante individual para defenderse de un existencial (ver ejemplos en 2.4) tal jugador debe, desde el punto de vista expresado por la regla intuicionista, permanecer coherente con tal elección. Tal vez, la idea subyacente a la regla intuicionista pueda formularse deónticamente de la siguiente manera:

Aténgase a los compromisos que se contraen al elegir una jugada.

Es importante notar que la noción de *compromiso* no conlleva, desde el punto de vista del concepto dialógico de la interacción, un matiz necesariamente estratégico. En efecto, desde el punto de vista dialógico la interfaz de ataques y defensas, despliega la interacción de derechos y compromisos (u obligaciones) que determinan el desarrollo de un juego. Por ejemplo, al jugar una conjunción, el adversario tiene el derecho de preguntar por alguno de los compuestos de la conjunción (a

[37] Como veremos en el penúltimo ejemplo, la restricción de los compromisos se refiere a la misma jugada: si la misma proposición es jugada dos veces, es decir, en jugadas distintas, las opciones sí pueden ser distintas.

su elección) y el defensor tiene la obligación de responder con el compuesto requerido.

La regla clásica expresa una forma más liberal respecto a los compromisos adquiridos mediante una afirmación: a fin de defender una proposición en la jugada *n* un jugador puede elegir una opción y más tarde otra (respecto a la misma jugada), aun cuando esas opciones sean incompatibles entre sí (de hecho es lo que pasa en la demostración por *reducción al absurdo*). En otras palabras, la idea es que la regla intuicionista exige un compromiso estricto respecto a las elecciones hechas durante el juego, y la regla clásica centra el compromiso respecto a la tesis en cuestión pero no respecto a las jugadas subsidiarias que son dependientes de tal tesis.

SR2 (Regla formal): Sea φ una proposición elemental, *N* la jugada **P** ! φ y *M* la jugada **O** ! φ. Una secuencia p de jugadas es una partida sólo si se cumple: si $N \in \mathrm{p}$ entonces $M \in \mathrm{p}$ y $\rho_{\mathrm{p}}(M) < \rho_{\mathrm{p}}(N)$.

COMENTARIO: Es decir, si el proponente afirmó una proposición elemental, entonces **O** la afirmó ya antes. Esta regla es una de las características más sobresalientes de la lógica dialógica. Como se discute en Marion / Rückert (2015) la regla se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es desafiada (atacada), entonces –desde el punto de vista puramente argumentativo– la única respuesta posible es apelar a las concesiones del oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de las jugadas realizadas durante la interacción argumentativa). De hecho, uno podría ver la regla formal como la implementación de un tipo de *jugada de espejo* (conocida en teoría de juegos como *copy-cat strategy*): *mis razones para afirmar tal proposición son* *exactamente las mismas que las suyas cuando concedió Ud. la misma proposición*[38].

Ahora bien, si los fundamentos últimos de una tesis dialógica son proposiciones elementales y si esto se lleva a cabo mediante el uso de la regla formal, entonces los diálogos son, en este sentido, necesariamente asimétricos. De hecho, si ambos contendientes estuvieran restringidos por la regla formal ninguna proposición elemental podría ser afirmada. Por lo tanto, implementamos la regla formal mediante el diseño de un jugador, llamado proponente, cuyas afirmaciones de proposiciones elementales están restringidas por esta regla. Como veremos más abajo, es el triunfo del proponente el que proporciona la noción dialógica de validez.

La regla que introduce jugadas de espejo permite incorporar jugadas sobre expresiones elementales sin tener que recurrir a la teoría de modelos para las proposiciones elementales, como lo hace Hintikka en sus juegos para GTS. Sin embargo, es importante observar, que las jugadas de espejo, a pesar de que provienen de la así llamada *regla formal*, no se reducen a pura sintaxis. Cierto es que en las presentaciones estándar, como la presente, donde no se puede hacer explícito el elemento lúdico, pudiera parecer que la regla formal se independiza del significado de las proposiciones elementales. Pero no es ésta la idea, la regla formal consiste en permitir al proponente copiar la razones aducidas por el oponente en favor de la afirmación de la misma proposición elemental introducida por el oponente (en el cuadro dialógico enriquecido con la TCT lo que se copia es el objeto lúdico correspondiente). Dado que en el cuadro estándar los objetos lúdicos no se escriben de forma explícita, el uso de la regla formal pareciera consistir en copiar un signo vacío de contenido.

En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

[38] Cf. Clerbout / Keiff / Rahman (2009) y Rahman / Keiff (2010).

SR2* (Regla formal modificada): O puede atacar una proposición elemental si y sólo si él mismo aún no la afirmó. Sólo el oponente puede atacar proposiciones elementales. El proponente se defiende, de un ataque a una proposición elemental, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el oponente será forzado a conceder la proposición elemental atacada, digamos en la jugada *n*. En cuanto **O** jugó *n*, entonces **P** se defiende del ataque respondiendo *sic* (*n*) (léase: porque tú mismo acabas de conceder en *n* la misma proposición elemental).

En realidad no haremos uso de esta forma modificada en lo ejemplos desarrollados para la lógica estándar. Prosigamos ahora con el resto de las definiciones y reglas estructurales:

- Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en jugadas sucesivas lícitas. Decimos que es **X**-terminal cuando la última jugada en la partida es una jugada del jugador **X.**

SR3 (Partida ganada): El jugador **X** gana la partida p sólo si es terminal **X**.

- Una *estrategia* para un jugador **X** en D(φ) es una función que para cada partida no-terminal p, asigna una jugada *M* a una jugada de **Y** que es el último miembro de p, tal que, si extendemos p con *M* obtenemos una nueva partida.

- Una estrategia de **X** es *ganadora* en D(φ) si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de **X** para φ sin importar cómo juegue **Y.**

La próxima definición relaciona estrategia ganadora para **P** con validez:

- **P** tiene una *estrategia ganadora* para φ, si y solamente si, φ es válida en la lógica clásica y/o en la lógica intuicionista jugando de acuerdo con las reglas clásicas y/o intuicionistas.

2.2 Ejemplos de diálogos estándar para la lógica clásica y para la lógica intuicionista

Considérese por ejemplo la siguiente secuencia de jugadas: **P** ! *Q*a→*Qa*, **O**-n:=1, **P**-m:=1, **O !** *Qa*, **P !** *Qa* que pueden ser escritas del modo siguiente:

	O			**P**	
				! Q*a*→*Qa*	0
1	n:=1			m:=1	2
3	! *Qa*	(0)		! *Qa*	4

Gana P

La partida puede leerse informalmente de la siguiente manera:

0	**P** afirma la tesis
1, 2	Los jugadores elijen rango de repetición 1.
3	Dado que la tesis es una implicación material, el ataque fuerza a **O** a conceder su antecedente.
4	**P** puede ahora hacer uso de la regla formal para afirmar el consecuente (es decir, puede afirmar en 2 la proposición elemental *Qa*, pues **O** la afirmó antes en la jugada 1) y así ganar la partida.

Los números de las columnas externas son las posiciones de las jugadas en la partida. Cuando una jugada es un ataque, la posición de la jugada desafiada se indica en las columnas internas, como ocurre con jugada 3 de este ejemplo. Los ataques introducen una nueva línea, pero las defensas se llevan a cabo en la misma línea.

La idea es que el ataque y la defensa al ataque correspondiente se encuentran en la misma línea (como veremos en próximos ejemplos, este tipo de notación ayuda a identificar gráficamente los usos de la regla intuicionista o la clásica). Dado que las defensas se llevan a cabo en la misma línea en la que se abrió el ataque, las defensas no llevan número en la columna interior (siempre se sabe a qué ataque responde la jugada defensiva). En la literatura especializada se denomina *ronda cerrada* una línea compuesta de un ataque y su defensa correspondiente. Nótese que este tipo de tablas llevan la información facilitada por las funciones ρ y F, además de representar la partida en sí.

Compárese con una partida en dónde la tesis es **P** ! $Qa \rightarrow Qb$. La partida será ganada por **O**, pues **P** no puede afirmar el consecuente: la regla formal sólo le permite afirmar una proposición elemental si el oponente la afirmó antes.

	O			**P**	
				! $Qa \rightarrow Qb$	0
1	n:=1			m:=1	2
3	! Qa	(0)			4

Gana O

El ejemplo siguiente muestra a la vez cómo desarrollar un diálogo con premisas y cómo distinguir las buenas de las malas jugadas. Supongamos que se trata de afirmar $A \vee (C \rightarrow D)$ dada la premisa $B \wedge A$. La premisa, es comprendida aquí como una concesión que **O** hace antes de comenzar la partida:

	O			**P**	
Premisa	$B \wedge A$			! $A \vee (C \rightarrow D)$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	? [A, $C \rightarrow D$]	(0)		! A	6

5	! *A*	(4)	premisa	? [*A*]	4

Gana P

En la jugada 3, **O** le pide a **P** elegir una de las dos partes de la disyunción. **P** no puede por el momento elegir la izquierda pues no ha sido aún afirmada por **O** y la derecha le obligará en el desarrollo del juego a afirmar *D*, sin que él pueda forzar a **O** a afirmarla. Sin embargo, el astuto proponente se da cuenta que puede obligar a **O** a afirmar *A*. Por tanto, pasa al contrataque, abre un ataque en la línea siguiente (jugada 4), exigiendo a **O** que afirme la derecha de la conjunción concedida como premisa de la partida. Esto fuerza a **O** a afirmar *A*, y **P** puede ahora defender la disyunción eligiendo *A*. Aquí presupusimos que **P** jugó de forma óptima desde el punto de vista estratégico. No obstante, desde el punto de vista de la partida, nada impide a **P** elegir defender la disyunción con la derecha, como tampoco elegir en su contrataque la izquierda de la conjunción. Ciertamente, no serían éstas las jugadas óptimas desde el punto de vista estratégico pero serían perfectamente legítimas y estarían en perfecta concordancia con el significado local y global de la constantes lógicas implicadas.

Veamos algunos otros ejemplos:

	O			**P**	
				! $A \vee \neg A$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	?[*A*, $\neg A$]	(0)		! $\neg A$	4
5	! *A*	(4)		--	
				! *A*	6

Gana P

Este juego ha sido desarrollado de acuerdo con reglas estructurales, incluida la regla de la lógica clásica (SR1) y dejando excluida la intuicionista (SR1i), conduciendo esto a que **P** resulte ganador. En efecto, en la jugada 3, el jugador **O** obliga a **P** a tener que elegir una de las partes de la disyunción. **P** opta, en su jugada 4, por afirmar la parte negativa. De hecho, no puede afirmar la positiva dado que es elemental y **O** no la ha afirmado antes. **O** contrataca la negación afirmando él mismo *A*. Nótese que de acuerdo a la regla de partículas, no hay una defensa para la negación, de ahí que haya un vacío a la derecha de la jugada 5. Es más, un ataque a una negación siempre producirá una *ronda abierta*. Dado que no puede defenderse de la negación, **P** decide ahora defenderse de la disyunción con la otra opción y, puesto que **O** ya la ha afirmado, **P** gana: si tú (**O**) concedes *A*, entonces eso es suficiente para defender mi disyunción.

Nótese que la regla estructural clásica, le permite a **P** afirmar primero la negación de *A* (jugada 4) y luego (jugada 6) *A*. Más aún, la jugada 6 cierra la ronda abierta en 3 y que ya había sido cerrada antes con la jugada 4. Desde el punto de vista intuicionista **P** no se atiene al compromiso adquirido cuando eligió en su jugada 4 defender la disyunción con la negación de *A*. Si jugamos con la lógica que se atiene a la regla estructural intuicionista, el juego termina con la jugada 5 de **O**, quien ganaría la partida:

	O			**P**	
				! $A \vee \neg A$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	? [A**,** $\neg A$]	(0)		! $\neg A$	4
5	! A	(4)		--	

Gana O

La ronda abierta con el ataque de la jugada 5, queda abierta y **P** no tiene otra jugada disponible, puesto que la regla intuicionista le obliga a atenerse al compromiso adquirido cuando eligió $\neg A$ en la jugada 4. Es cierto que **P** eligió el número de repetición 2, pero la regla estructural intuicionista le impide usar la repetición para la defensa.

Consideraciones similares explican por qué la siguiente tabla presenta una partida ganada por **P** cuando se juega con la regla de la lógica clásica, mientras que la tabla subsiguiente muestra una tabla desarrollada en donde gana **O**, cuando se juega con la regla de la lógica intuicionista.

	O			**P**	
				! $\neg\neg A \rightarrow A$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	! $\neg\neg A$	(0)		! A	6
	--			! $\neg A$	4
5	! A	(4)		--	

Gana P

	O			P	
				! $\neg\neg A \rightarrow A$	0
1	n:=1			m:=1	2
3	! $\neg\neg A$	(0)			
	--			! $\neg A$	4
5	! A	(4)		--	

Gana O

Lo más interesante de estos ejemplos es que muestran la utilidad de la notación que hace que las defensas se anoten en la misma línea que su ataque: el vacío a la derecha de la jugada 3 muestra que, desde el punto de vista intuicionista, la ronda queda abierta y por ello es que **P** pierde. En efecto, la idea es que, ante el desafío de la jugada 3, **P** podía, en principio, elegir entre defenderse y contraatacar. **P** se decidió por contratacar, afirmando $\neg A$ e ignorando la defensa. La regla intuicionista le impide a **P**, después que **O** afirma A en 5, ignorar su compromiso anterior con la negación y afirmar también A.

El próximo ejemplo muestra la utilidad de la regla de repetición para partidas jugadas siguiendo la regla estructural intuicionista. Es bien sabido que la doble negación de una proposición, válida en la lógica proposicional clásica, es también válida en lógica intuicionista. Veamos como desarrollar una partida que indique (parcialmente) este hecho (para corroborar el hecho totalmente y no sólo parcialmente, deberíamos desplegar todas las partidas relevantes de la estrategia ganadora de **P**):

	O			P	
				! $\neg\neg(A \vee \neg A)$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	! $\neg(A \vee \neg A)$	(0)		--	
	--		(3)	! $(A \vee \neg A)$	4
5	? $[A, \neg A]$	(4)		! $\neg A$	6

7	! A	(6)		--	
	--		(3)	! $(A\vee\neg A)$	8
9	? $[A, \neg A]$	(8)		! A	10

Gana P

La jugada crucial aquí es la jugada 8. El rango de repetición 2 de **P**, que no es afectado por la regla estructural intuicionista (que concierne sólo a las defensas) le permite a **P** atacar la jugada 3 por segunda vez y ganar. El ejemplo pone también de relieve que más que la coherencia lo que está en juego aquí es que el jugador se ciña a su último compromiso respecto a la *misma* jugada: la mientras que la elección manifestada por la jugada 6 está ligada a la jugada 4, la elección manifestada por la jugada 10 está ligada a la jugada 8.

Finalmente veamos un caso con cuantificadores. En el contexto de cuantificadores la clave para la victoria de **P** es elegir aquellas constantes lógicas que conduzcan a **O** a conceder aquellas proposiciones elementales que **P** esté necesitando. El ejemplo, que sólo se puede ganar jugando con la regla estructural clásica, requiere de cierta pericia de **P**:

	O			**P**	
				! $\exists x(A(x)\rightarrow\forall yA(y))$	0
1	n:=1			m:=2	2
3	? $[A(x/a_1), ..., A(x/a_n)]$	(0)		! $A(a)\rightarrow\forall yA(y)$	4
5	! $A(a)$	(4)		! $\forall yA(y)$	6
7	? $[A(x/b)]$	(6)		! $A(b)$	10
				! $A(b)\rightarrow\forall yA(y)$	8
9	! $A(b)$	(8)			

Gana P

P responde, en su jugada 4, al ataque al existencial eligiendo la constante individual a. En la jugada 7 **O** ataca el universal afirmado en 6 eligiendo para su ataque la nueva constante individual b. Nótese que elegir una constante nueva es una jugada óptima desde el punto de vista estratégico, pero desde el punto de vista de la partida nada fuerza a **O** a elegir una nueva constante. La idea es que, como él recuerda que él mismo afirmó en 5 $A(a)$, con su elección de b intenta una jugada que impida a **P** hacer uso de su propia afirmación. **P**, que una vez más suponemos aquí que juega las jugadas óptimas desde el punto de vista estratégico, se decide a repetir su defensa del existencial con la jugada 8 (esto le está permitido por la conjunción del número de repetición elegido y la regla estructural clásica), sin embargo, esta vez **P** elije substituir la variable por la constante individual *b*. **O** se ve forzado a atacar la implicación material y con la jugada 9 concede $A(b)$. Justamente era ésta la afirmación que estaba esperando **P** para defender el universal atacado con *b* en la jugada 7 y ganar la partida. Si se juega la partida haciendo uso de la regla estructural intuicionista, la partida se termina con la jugada 7 de **O** y con su victoria.

2.3 Juegos Extensivos

La notación tabular, empleada en sección anterior, tiene ciertas ventajas cuando se trata de comparar diferentes lógicas como la clásica y la intuicionista. Sin embargo, cuando queremos considerar varias partidas juntas –por ejemplo, en la construcción de una estrategia– dichas tablas no proporcionan el medio de representación más adecuado. De hecho, cuando queremos representar la construcción de una estrategia usamos lo que se conoce como la *forma extensiva*. La forma extensiva del diálogo D(A) es simplemente la representación del árbol del mismo, también llamado a menudo: *árbol-lúdico*. Más precisamente, la forma extensiva EA de D(A) es el árbol (T, l, S) tal que:

i) Cada nodo t en T está etiquetado con la jugada que ocurre en D(A).
ii) $l: T \rightarrow \mathrm{N}$
iii) $S \subseteq T^2$ donde:
- Hay un único t_0 (la raíz) en T tal que $l(t_0)=0$, y t_0 está etiquetado con la tesis del juego.
- Para cada $t \neq t_0$ hay un único t' tal que $t'St$.
- Para cada t y t' en T, si tSt' entonces $l(t')=l(t)+1$.
- Dada la partida p en D(A) tal que $\rho_p(M')=\rho_p(M)+1$ y t, t' respectivamente etiquetadas con M y M', entonces tSt'.

La forma extensiva de una estrategia ζ de **X** en D(A) es el fragmento de árbol $\mathsf{E}_{A,\zeta}=(T_\zeta, l_\zeta, S_\zeta)$ de E_A tal que:

i) La raíz de $\mathsf{E}_{A,\zeta}$ es la raíz de E_A.

ii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con una jugada **X**, tenemos que $tS_\zeta t'$ sea cual fuere tSt'.

iii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con una jugada **Y** y con al menos un t' tal que tSt', entonces hay una única $\zeta(t)$ en T_ζ donde $tS_\zeta\zeta(t)$ y $\zeta(t)$ es etiquetada con la jugada de **X** prescrita por ζ.

He aquí algunos ejemplos de resultados meta-lógicos obtenidos en la literatura reciente y que corresponden al nivel de las estrategias.[39]

- Estrategia ganadora para **P** y hojas: Sea w una estrategia ganadora para **P** en D(A), entonces, cada hoja en $\mathrm{E}_{A,\mathrm{w}}$ está etiquetada con una proposición elemental de **P**.
- Determinación: Hay una estrategia ganadora para **X** en D(A) si y sólo si no hay una estrategia para **Y** en D(A).
- Corrección y Completitud para tablas semánticas (también llamadas árboles semánticos): Considérese una tabla semántica de primer orden y una estrategia dialógica de primer orden. Hay una tabla cerrada para A si y sólo si existe una estrategia ganadora para **P** en D(A).
- Dado que las tablas semánticas (para lógica de primer orden) son correctas y completas respecto a una semántica modelo-teorética, se sigue que la existencia de una estrategia ganadora para **P** coincide con la validez. Es decir, hay una estrategia ganadora para **P** en D(A) si y sólo si A es válida.

EJEMPLOS DE FORMAS EXTENSIVAS

Las formas extensivas de juegos dialógicos y de estrategias son árboles generados infinitamente (árboles con un número infinito de ramas). Aquí no es posible representarlos en su totalidad, pero

[39] Estos resultados están probados, junto con otros, en Clerbout (2013).

como una ilustración sigue siendo útil añadimos a continuación las figuras 1 y 2:

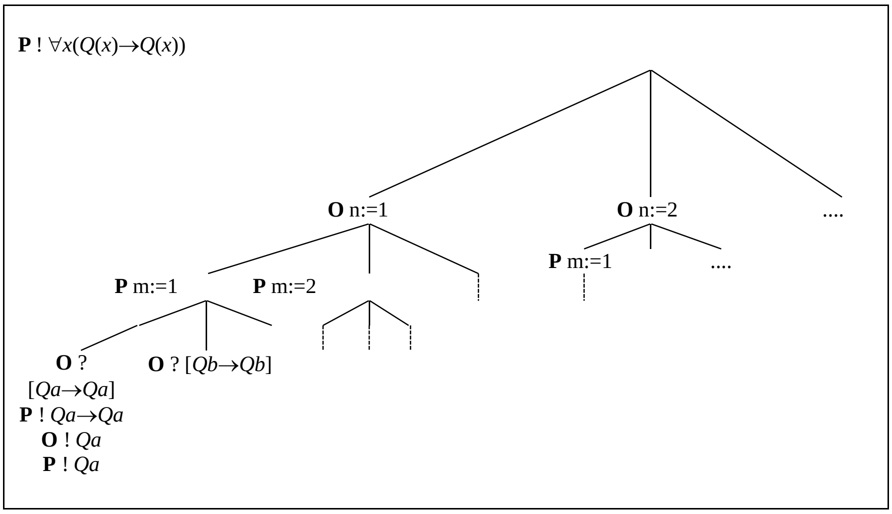

Figura 1

P ! $\forall x(Q(x) \rightarrow Q(x))$

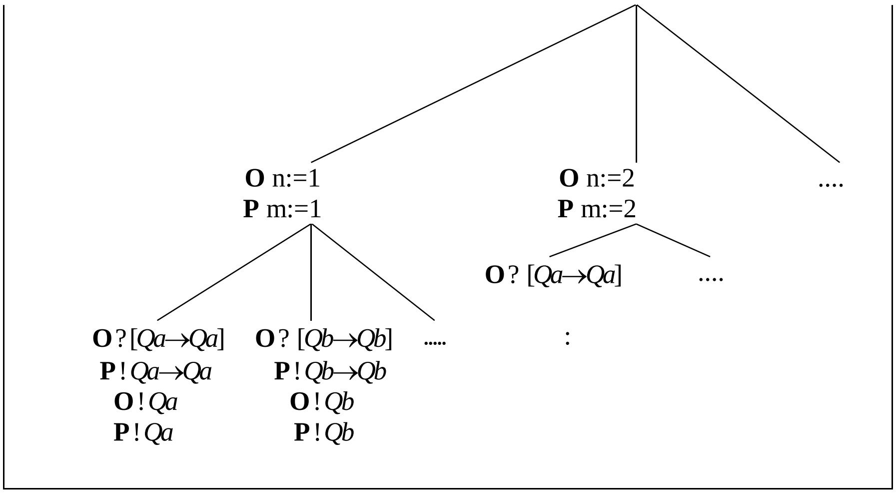

Figura 2

La Figura 1 representa parcialmente la forma extensiva del juego dialógico para la proposición $\forall x(Q(x)\rightarrow Q(x))$. Cada partida en este diálogo se representa como una rama en la forma extensiva. El ejemplo que hemos dado es el que la rama de la izquierda, el cual representa una de las partidas más simples y más cortas en el juego dialógico. La raíz de la forma extensiva se etiqueta con la tesis. Después de eso, el oponente tiene un número infinito de opciones posibles para su rango de repetición: esto está representado por el número infinito de sucesores inmediatos en la raíz de la forma extensiva. Lo mismo vale para el rango de repetición del proponente y para cada vez que un jugador va a elegir una constante individual.

La Figura 2 representa parcialmente la forma extensiva de la estrategia del proponente en este juego. Se trata de un fragmento del árbol de la Figura 1 en la que cada nodo etiquetado con una jugada de **O** tiene a lo sumo un sucesor. No mantenemos más que un registro de todas las opciones posibles para **P**: cada vez que el proponente tiene una opción en el juego, la estrategia selecciona exactamente una de las jugadas posibles. Las otras ramificaciones se mantienen puesto que una estrategia mantiene vigentes todas las opciones posibles para el oponente. En nuestro ejemplo, la estrategia prescribe la elección del mismo rango de repetición que el oponente. Por supuesto que hay un número infinito de otras posibles estrategias para **P**.

CAPITULO 3.

OBJETOS LÚDICOS Y LA RAÍCES DIALÓGICAS DE LA IDENTIDAD

Desarrollos recientes en lógica dialógica ponen de relieve los vínculos conceptuales entre los enfoques lúdicos y la concepción del significado de la TCT. De hecho, desde el punto de vista dialógico, aquellas acciones que constituyen el significado de las constantes lógicas, como las elecciones, son un elemento crucial de su semántica (local). Más generalmente, si el significado es concebido como constituido durante la interacción, todas las acciones involucradas en la constitución del significado de una expresión debe ser expuestas explícitamente en el lenguaje objeto. Las raíces de esta perspectiva se basan en la concepción Wittgensteniana sobre la *inevitabilidad del lenguaje*. De acuerdo con esta perspectiva de Wittgenstein el rol de los juegos de lenguaje es mostrar una tal característica internalista del significado, y el cuadro dialógico propone implentar esta perspectiva en la lógica.

En 1988 Ranta comenzó a explorar la forma de relacionar la TCT con la semántica lúdica. La idea de Ranta es definir una proposición como el conjunto de sus estrategias ganadoras. En principio, la idea es simple y atractiva, dado que para establecer la correspondencia con TCT, lo que queda por hacer es relacionar estrategia ganadora con demostración.[40]
Sin embargo desde el punto de vista inherente a la perspectiva lúdica, reducir el significado a un conjunto de estrategias ganadoras es insatisfactorio. El cuadro dialógico, como explicado en los

40 En realidad Ranta se basó en la GTS de Hintikka, pero las modificaciones de la GTS que tuvo que introducir para obtener una lógica constructiva, convirtieron a GTS en una versión muy próxima a la lógica dialógica.

parágrafos precedentes, distingue entre diferentes niveles de significado y principalmente el nivel de partida del nivel de estrategia ganadora. Una estrategia ganadora, se compone de partidas (*plays* o *games*) pero, las reglas que determinan el desarrollo de una partida, no son reducibles a la función que describe una estrategia ganadora. En otras palabras, es la partida la que provee la base más elemental del significado como interacción y la que determina el concepto dialógico de proposición:

> *Fully spelled out it means that for an entity to be a proposition there must exist a dialogue game associated with this entity, i.e., the proposition A, such that an individual play of the game where A occupies the initial position, i.e., a dialogue D(A) about A, reaches a final position with either win or loss after a finite number of moves according to definite rules*: *the dialogue game is defined as a finitary open two-person zero-sum game. Thus, propositions will in general be dialogue-definite, and only in special cases be either proof-definite or refutation-definite or even both which implies their being value-definite. Within this game-theoretic framework* […] *truth of A is defined as existence of a winning strategy for A in a dialogue game about A; falsehood of A respectively as existence of a winning strategy against A.* (Lorenz [2001], p. 258).

Dada esta distinción entre nivel de partida y nivel de estrategia, y dado que a la vez queremos implementar la idea de la TCT de asociar una proposición con los elementos que la justifican, parece natural distinguir *objetos lúdicos*, tales como $p : \varphi$, que se asocian a una proposición en el nivel de partida (una expresión que puede ser la tesis de una partida), de los *objetos estratégicos* (son estos últimos los que corresponden a los elementos de prueba de la TCT), que se asocian a una proposición en el nivel estratégico. Desde esta perspectiva el trabajo de Ranta constituye el final y no el principio del proyecto de un cuadro dialógica para la TCT.

A fin de desarrollar un tal proyecto, en publicaciones recientes[41] enriquecimos las expresiones que forman parte de un juego dialógico con expresiones de la forma "$p : \varphi$" (en dónde a la

---

[41] Clerbout/Rahman (2015), Rahman/Clerbout (2013, 2014, 2015).

izquierda de los dos puntos se encuentra un objeto lúdico y a la derecha una proposición) cuyo significado provendrá de reglas locales y estructurales específicas, que describirán los modos de composición y análisis de los objetos lúdicos expresados. Informalemente hablando podemos pensar el objeto lúdico como aquello sobre lo que se base una afirmación dada: Si el jugador **X** afirma la proposición, digamos, φ, una tal afirmación presupone que, hay algo, aquello que llamamos el objeto lúdico *p*, en lo que se basa una tal afirmación (aún si la afirmación es tentativa), y que le permite a **X** a aceptar poner tal afirmación en juego faz a un adversario que la desafía. Es el objeto lúdico que hace que el contenido de una afirmación prefigure un diálogo generado por ella.

En el contexto del significado de las constantes lógicas las reglas de la dialógica estándar nos proveen la información relevante para describir los objetos lúdicos correspondientes.

Antes de comenzar con en enriquecer el lenguaje del cuadro dialógico estándar con objetos lúdicos, discutamos primero cómo implementar en la dialógica la noción de formación de proposiciones característica de la TCT.

3.1 La Formación de proposiciones

Antes de comenzar con en enriquecer el lenguaje del cuadro dialógico estándar con bjetos lúdicos, discutamos primero cómo implementar en la dialógica la noción de formación de proposiciones.

En la lógica habitual en general y también en la dialógica estándar, la reglas que rigen las constantes lógicas, presuponen reglas de buena formación. Tales reglas son habitualmente parte del metalenguaje de un sistema lógico determinado. Inspirados por la TCT queremos introducir aquí reglas en el lenguaje objeto que permitan verifican si una expresión determinada está bien formada, y más particularmente si una expresión determinada es o no una proposición. Tales reglas son reglas locales que completan el significado local de las unidades mínimas del lenguaje lógico del sistema.

Una particularidad del lenguaje del cuadro dialógico es que contiene preguntas, que ahora también contendrá preguntas que requieren por la buena formación de una expresión. La idea que una pregunta presupone un tipo específico. Es así que la pregunta, por ejemplo $?_{F\vee 1}$ presupone $?_F$: *formation-request*, y presupone también que en la expresión en cuestión ocurre la conectiva $\vee$ .Sin, embargo para no hacer la notación demasiado densa, no vamos a escribir estas presuposiciones.

Nótese que no se puede requerir la buena formación de expresión: $\perp$: *prop*. Ésto implementa en la dialógica el hecho de que en TCT *falsum* es una proposición por definición.

Veamos ahora las reglas de formación:

Tabla 3.1 Reglas de formación

Afirmación	**Ataque** [en el caso que haya varios ataques posibles, es el atacante el que elije]	**Defensa**
X ! Γ: *set*	**Y** $?_{\text{can}}\ \Gamma$ O **Y** $?_{\text{gen}}\ \Gamma$ o **Y** $?_{\text{eq}}\ \Gamma$	**X** ! $a_1 : \Gamma$, **X** ! $a_2 : \Gamma$, … (**X** provee los elementos canóni-cos de Γ) **X** ! $a_i : \Gamma \Rightarrow a_j : \Gamma$ (**X** prove un método de generación para Γ) (**X** prove la regla de igualdad de Γ[42])
X ! $\varphi\vee\psi$: *prop*	**Y** $?_{\text{F}\vee 1}$ O **Y** $?_{\text{F}\vee 2}$	**X** ! φ : *prop* **X** ! ψ : *prop*
	Y $?_{\text{F}\wedge 1}$	**X** ! φ : *prop*

[42] Presentamos das reglas de igualdad para conjuntos más abajo.

X ! $\varphi \wedge \psi$: *prop*	o **Y** $?_{F\wedge 2}$	**X** ! ψ : *prop*
X ! $\varphi \to \psi$: *prop*	**Y** $?_{F\to 1}$ o **Y** $?_{F\to 2}$	**X** ! φ : *prop* **X** ! ψ : *prop*
X ! $(\forall x : A)$ $\varphi(x)$: *prop*	**Y** $?_{F\forall 1}$ o **Y** $?_{F\forall 2}$	**X** ! A : *set* **X** ! $\varphi(x)$: *prop* $(x : A)$
X ! $(\exists x : A)$ $\varphi(x)$: *prop*	**Y** $?_{F\exists 1}$ o **Y** $?_{F\exists 2}$	**X** ! A : *set* **X** ! $\varphi(x)$: *prop* $(x : A)$

La regla siguiente no es en sí una regla de formación mas una regla de substitución. Sin embargo la substitución de las variables por individuos específicos pone de manifiesto el conjunto del que provienen los objetos lúdicos que constituyen una expresión (hipotética) dada.

Substitución en el seno de una afirmación (subst-af)

Dada una afirmación π de **X** en la que ocurren variables definidas en un conjunto *A*, el atacante **Y** puede requerir de **X** que substituya las variables con una instanciación elegida por él mismo (i.e., **Y** elije).

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
X ! $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i : A_i)$	**Y** ! $a_1 : A_1, \ldots, a_n : A_n$	**X** ! $\pi(a_1 \ldots a_n)$

Obsérvese que la presente regla incluye casos como los siguientes:

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
X ! $b(x) : B(x)$ $(x : A)$	**Y** ! $a : A$	**X** ! $b(a) : B(a)$
X ! $B(x)$: *type* $(x : A)$ ("type" refiere a *prop* o *set*)	**Y** ! $a : A$	**X** ! $B(a)$: *type*

Un caso particular de subst-af es cuando el atacante no instancia las variables pero simplemente afirma que las variables son en efecto elementos del conjunto (esto es muy útil en el caso de juegos de formación como los de los ejemplos que presentamos más abajo).

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**
X ! $\pi(x_1, \ldots, x_n)$ $(x_i : A_i)$	**Y** ! $x_i : A_1, \ldots, x_n : A_n$	**X** ! $\pi(x_1, \ldots, x_n)$

Como ya hemos mencionado anteriormente, en el cuadro dialógico las reglas de formación permiten desplegar las presuposiciones sintácticas y semánticas de las expresiones que constituyen una afirmación. Es decir, que antes que comience una partida respecto a una tesis determinada, el oponente puede examinar la buena formación de tal tesis. Supongamos que la regla de formación de la tesis lleva al proponente a afirmar que, digamos, $\varphi[x]$, es del tipo *prop*, a condición que x pertenezca al conjunto A. En tal caso, el oponente concederá que A : *set* después que el proponente explique la constitución del conjunto A.

Ejemplo: A modo de ilustración mostraremos como desarrollar una partida con la tesis $(\forall x : A)(B(x)\rightarrow C(x))$: *prop*, y las concesiones del oponente A : *set*, $B(x)$: *prop* $(x : A)$ and $C(x)$: *prop* $(x : A)$ – i.e., la partida comienza con las concesiones de buena formación).[43] En realidad, recién detallamos las reglas precisas de cómo desarrollar una partida con afirmaciones incluyendo objetos lúdicos en la próxima sección, pero para comprender el ejemplo, es suficiente conocer las reglas para la dialógica estándar del capítulo anterior, dado que no hacemos uso aquí de los cambios a las reglas estructurales que introduciremos ulteriormente.

	O			**P**	
I	! A : *set*				
II	! $B(x)$: *prop* $(x : A)$				
III	! $C(x)$: *prop* $(x : A)$				

[43] The example stems from Ranta (1994, p.31).

				! $(\forall x : A)\ B(x) \rightarrow C(x)$: *prop*	0
1	$n := 2$			$m := 2$	2
3	$?_{F\forall 1}$	(0)		! A : *set*	4

Comentario:
- I to III: **O** concede como premisas que t *A* es un conjunto y que *B*(*x*) y *C*(*x*) son proposiciones bajo la hipótesis que *x* es un elemento de *A*,
- Jugada 0: **P** afirma que la proposición universal de la tesis es una proposición (dadas las premisas I-III)
- Jugadas 1 and 2: los jugadores elijen el rango de repetición[44]
- Jugada 3: **O** desafía la tesis preguntando por la izquierda del universal
- Jugada 4: **P** responde afirmando que *A* es un conjunto, y esto no puede ponerse en duda dado que es la primera premisa concedida.

Es obvio que **O** puede continuar la partida preguntando por la formación de la implicación material resultante:

	O			**P**	
I	! A : *set*				
II	! $B(x)$: *prop* $(x : A)$				
III	! $C(x)$: *prop* $(x : A)$				
				! $(\forall x : A)\ B(x) \rightarrow C(x)$: *prop*	0
1	$n := 2$			$m := 1$	2
3	$?_{F\forall 1}$	(0)		! A : *set*	4
5	$?_{F\forall 2}$			! $B(x) \rightarrow C(x)$: *prop* $(x : A)$	6
7	! $x : A$			! $B(x) \rightarrow C(x)$: *prop*	8
9	$?_{F\rightarrow 1}$			! $B(x)$: *prop*	12
11			II	! $x : A$	10
13	$?_{F\rightarrow 2}$			! $C(x)$: *prop*	16
15	! $C(x)$: *prop*		II	! $x : A$	14

- Las jugadas siguientes debieran estar ya claras: Con su jugad 7 **O** concede la hipótesis bajo la cual **P** afirmó que la implicación es una

[44] Véase su definición el capítulo 2 (para más detalles véase Clerbout [2014a,b,c]).

proposición. Por tanto a **P** le queda ahora mostrar que la implicación es una proposición. Para ello debe afirmar que la componente izquierda es una proposición y lo mismo vale para la derecha. De hecho el proponente lo que hace es forzar al oponente a afirmar él mismo que $B(x)$: *prop* y $C(x)$: *prop*. El camino seguido por **P** es simple: dado que en la movida 7 **O** afirmó $x : A$ y en las premisas II y III afirmó que B(x) y $C(x)$ son proposiciones a condición que $x : A$. **P** solo tiene que afirmar él mismo nuevamente $x : A$ (apelando la afirmación de **O** en 7) y atacar cada una de las premisas forzando así que **O** afirme $B(x)$: *prop* y $C(x)$: *prop*. Después solo le queda a **P** de aplicar la jugada de espejo y copiar esas mismas afirmaciones.

Veamos ahora como desarrollar diálogos con objeto lúdicos.

3.2 Objetos lúdicos y significación local

Como anunciado en la introducción del presente capítulo, enriqueceremos ahora las expresiones que forman parte de un juego dialógico con expresiones de la forma "$p : \varphi$" , en dónde a la izquierda de los dos puntos se encuentra un objeto lúdico y a la derecha una proposición, cuyo significado provendrá de reglas locales y estructurales específicas, que describirán los modos de composición y análisis de los objetos lúdicos expresados. En realidad, en el contexto de la constantes lógicas las reglas de la dialógica estándar nos proveen la información relevante (ver tabla 3.3).

En realidad, no solo introduciremos objectos lúdicos sino ciertos operadores que llamamos *instrucciones*. Puede ocurrir que al comenzar un juego no hayamos aún identificado el objeto lúdico (o los compuestos de un objeto lúdico complejo) correspondiente a la proposición en juego. A veces, incluso como veremos en el ejemplo del burro en la sección siguiente, es útil no haber identificado de entrada los compuestos del objeto lúdico principal. Es por ello que la reglas locales para por ejemplo la conjunción $p : \varphi\wedge\psi$, no incluyen de forma explícita los compuestos p_1 y p_2, pero las expresiones

$L^{\wedge}(p)$ y $R^{\wedge}(p)$,

que llamamos *instrucciones*, que se leen respectivamente como

- *Toma el compuesto izquierdo del objeto lúdico p para la conjunción*, y
- *Toma el compuesto derecho del objeto lúdico p para la conjunción*

Los índices recuerdan que los compuestos provienen de objetos lúdicos específicos para la constante lógica en cuestión. Es así que mientras que $L^{\wedge}(p)$ corresponde al compuesto izquierdo de un objeto lúdico para una conjunción, $L^{\vee}(q)$ corresponde al compuesto izquierdo de un objeto lúdico para una disyunción.

Es el momento de detallar como atacar y como defender aserciones en los que ocurren objetos lúdicos?

Tabla 3.2 Reglas locales con objetos lúdicos

Afirmación	Ataque	Defensa
X ! φ (aún no se has especi ficado objeto lúdico alguno para φ)	**Y** ? objeto-lúdico	**X** ! $p : \varphi$
	Y $?_{prop}$	**X** ! $\varphi \vee \psi : prop$
X ! $p : \varphi \vee \psi$	**Y** $?[\varphi / \psi]$	**X !** $L^{\vee}(p) : \varphi$ O

		X ! $R^{\vee}(p) : \psi$ [el defensor elige]
X ! $p : \varphi \wedge \psi$	**Y** $?_{prop}$	**X** ! $\varphi \wedge \psi : prop$
	Y $?_{L}$ o **Y** $?_{R}$ [el atacante elige]	**X** ! $L^{\wedge}(p) : \varphi$ respectively **X ! ** $R^{\wedge}(p) : \psi$
X ! $p : \varphi \rightarrow \psi$	**Y** $?_{prop}$	**X !** $\varphi \rightarrow \psi : prop$
	Y ! $L^{\rightarrow}(p) : \varphi$	**X** ! $R^{\rightarrow}(p) : \psi$
**X ! ** $p : \neg\varphi$	**Y** $?_{prop}$	**X** ! $\neg\varphi : prop$
	Y ! $L^{\perp}(p) : \varphi$	**X !** $R^{\perp}(p) : \perp$
X ! $p : (\exists x : A)\varphi$	**Y** $?_{prop}$	**X** ! $(\exists \mathrm{x} : A)\varphi$: *prop*
	Y $?_{L}$ o **Y** $?_{R}$ [el atacante elige]	**X** ! $L^{\exists}(p) : A$ Respectively **X** ! $R^{\exists}(p) : \varphi(L(p))$
X ! $p : \{\mathrm{x} : A \mid \varphi\}$	**Y** $?_{L}$ o **Y** $?_{R}$ [el atacante elige]	**X** ! $L^{\{\ldots\}}(p) : A$ Respectively **X** ! $R^{\{\ldots\}}(p) : \varphi(L(p))$
X ! $p : (\forall x : A)\varphi$	**Y** $?_{prop}$	**X** ! $(\forall x : A)\varphi$: *prop*
	Y ! $L^{\forall}(p) : A$	**X** ! $R^{\forall}(p) : \varphi(L(p))$

COMENTARIOS:

1 Los ataques Y $?_{prop}$: En las reglas locales hemos agregado el ataque **Y** $?_{prop}$ que está ligado a la reglas de formación discutidas en la sección anterior. En la práctica, por razones de simplicidad, suponemos que las preguntas sobre la buena formación se examinan antes de lanzar el ataque principal a la tesis. Sin embargo, desde el punto puramente dinámico y procedural no hay ninguna razón de proceder de esta manera. Podríamos, en principio, concebir una partida de tal manera que preguntas de formación puedan aparecer durante el desarrollo del juego. Sin embargo, hemos elegido no hacer uso de esta opción pues eso haría el desarrollo del juego bastante engorroso y difícil de seguir.
2 Cuantificadores: Desde el punto de vista dialógico la significación de un cuantificador resulta de la concatenación de dos jugadas distintas: (i) la elección de una instanciación adecuada para substituir la variable ligada, y (ii) la substitución de la variable en la expresión predicativa en la que ocurre tal variable. Sin embargo, las reglas de la dialógica estándar, siguiendo a Frege, presuponen un dominio universal único sobre el que se definen todas las variables del lenguaje formal en cuestión. Por ello es que las reglas dialógicas estándar hacen explicíta la jugada de elección pero no el conjunto en el cual la elección tiene lugar. Eso tiene el efecto que la elección que se lleva a cabo al defender un cuantificador existencial, no se anota explícitamente como una jugada separada. El cuadro de la TCT, que hace explícito el conjunto sobre el que están definidas las variables permite hacer explícita la jugada de elección y de este modo permite también poner de relieve la concepción dialógica de los cuantificadores. Más aún, un tal lenguaje explícito hace percibir los lazos conceptuales entre la implicación material y el universal y entre la conjunción y el existencial. En efecto, mientras que los ataques de la implicación y al universal prescriben que es el atacante el

que debe proveer el objeto lúdico correspondiente a la jugada de ataque, en los ataques a la conjunción y al existencial es el defensor el que provee los objetos lúdicos prescriptos por las reglas locales. De hecho, de la misma manera que la implicación material puede verse como un caso especial de un universal en el cuál el objeto lúdico asociado con el antecedente no ocurre en la proposición del consecuente, así también puede verse la conjunción como un caso especial del existencial en el que el objeto lúdico del primer compuesto de la proposición no ocurre en la proposición del segundo compuesto de la conjunción.[45]

3 El operador de separación: Las reglas anteriores son adaptaciones de las reglas prescriptas por la lógica dialógica estándar, sin embargo la expresión $p : \{x : A \mid \varphi\}$ que describe el conjunto de todos aquellos elementos de A que satisfacen φ, es una novedad en el cuadro dilógico. La lectura TCT de esa expresión, que permite introducir un subconjunto por *separación*, [46] no es otra que la de un existencial y por ende las reglas de ataque y defensa que fijan su significado son las mismas que las de ese cuantificador.

---

[45] En realidad podríamos seguir el método de la TCT presentado en el capítulo dos por medio del cual la conjunción y el existencial se definen como casos particulares del operador Σ, mientras que el universal y la implicación se definen a partir de Π.

[46] Martin-Löf [1984, p. 53] observa que en el cuadro de TCT esta expresión juega el rol de una versión constructiva del axioma de comprensión

> *Let A be a set and B(x) a propositiion for $x \in A$. We want to define the set of all $a \in A$ such that B(a) holds (which is usually written $\{x \in A : B(x)\}$). To have an element $a \in A$ such that B(a) holds means to have an element $a \in A$ together with a proof of B(a), namely an element $b \in B(a)$. So the elements of the set of all elements of A satisfying B(x) are pairs (a,b) with $b \in B(a)$, i.e., elements of* $(\Sigma x \in A)B(x)$. *Then the Σ-rules play the role of the comprehension axiom (or the separation principle in ZF).*

3.3 El desarrollo de una partida

El uso de instrucciones requiere una regla que llamamos *resolución de instrucciones*, que establece cómo atacar una instrucción y como defenderla mediante la elección de un objeto lúdico, y una segunda regla llamada *substitución de instrucciones*, que asegura que una vez que una instrucción determinada ha sido resuelta por medio de la elección del objeto lúdico, digamos, *b*, entonces toda vez que la *misma instrucción* vuelva ocurrir, la misma instrucción será siempre reemplazada por el mismo objeto lúdico *b*.

SR4.1 (Resolution of instructions). Whenever a player afirmaciones a move in which instructions $I_1,\ldots, I_n$ occur – and these have **never** been substituted by play-objects before – the other player can ask him to replace these instructions (or some of them) by suitable **new** play-objects.
If the instruction (or list of instructions) occurs at the right of the colon and the afirmación is the tail of a universally quantified sentence (so that these instructions also occur at the left of the colon in the afirmación of the head of the implication), then it is the challenger who can choose the play-object. In these cases the player who challenges the instruction is also the challenger of the universal quantifier and/or of the implication.

Otherwise it is the defender of the instructions who chooses the suitable play-object. That is:

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X $\pi(I_1, \ldots, I_n)$	**Y** $I_1, \ldots, I_m/?$ $(m \leq n)$	**X** $\pi(b_1, \ldots, b_m)$ - b_i are new

		- if the instruction occurring at the right of the colon is the tail of either a universal (such that $I_1,\ldots, I_n$ also occur at the left of the colon in the right of the afirmación of the head), then ***b*₁,…,*b*ₘ are chosen by the challenger** - Otherwise **the defender chooses**

Remarks.

- Here we assume that the instructions at stake have not been solved before: the point is that if exactly the same instruction, say I(p), has been resolved once, the second occurrence of it, is a case of being coherent with the choice made when replacing the first occurrence of I(p), and this is handled by the next rule, called substitution.
- The requirement of **new** is linked with the rules on equality to be described below.
- In the case of embedded instructions $I_1(\ldots(I_k)\ldots)$, the resolutions are thought of as being carried out from I_k to I_1: first resolve I_k with some play-object b_k, then $I_{k-1}(b_k)$ with b_{k-1} etc. until $I_1(b_2)$..

SR4.2 (Substitution of instructions). During the play, when the play-object b has been chosen by any of the two players in order to substitute an instruction I(p) occurring in the posit π_i and player **X** makes any other posit, say π_j, in which I(p) occurs, then player **Y**, can ask to substitute I(p) with b in π_j

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X $\pi_j(I(p))$	**Y** ? $I(p)/b$	**X** $\pi_j(b)$

where $\mathrm{I}(p)/b$ has been already carried out in $\pi_i(\mathrm{I}(p))$		

The idea is that the resolution of an instruction yields a certain play-object for some substitution term, and therefore the same play-object can be assumed to result from any other occurrence of the same substitution term: the resolution of instructions (SR4.1) is part of the commitments of a player, and the SR4.2 is about taking the fulfillment of such commitments to be consistent.

Remark: This rule involves choices of play-objects where one of the players can ask the other to repeat that choice. The rule does not involve the case when player **X** chooses – when **Y** requires him to resolve the same instruction that he (**Y**) has already resolved before – to copy-cat the same play-object chosen by **Y** before. In other words SR4.2 allows player **X** to force **Y** to be consistent with his choices, but there is also the case that **X** might choose to repeat the choices of the other. This is ruled by SR5.3 below.

SR4.3 (Resolution and substitution of functions).
Functions: Since, functions have the form of universal quantification, the rule for the resolution of functions such as a $f(a)$,, where $a : A$ and $f(a) : B$, where $a : A$, is exactly the rule for the resolution and substitution of instructions involving universal quantifiers. In the dialogical frame functions are conceived as rules of correspondence as emerging from interaction. Indeed, given the function $f(x)$,, where $x : A$ and $f(x) : B$, the challenger will choose one element of A, say a, and then the defender is committed to the assertion $f(a) : B$. Moreover, the defender is committed to substitute $f(a)$ with a suitable element of B. In other words, for any element of A chosen by the challenger, the defender must bring up a suitable element of B.
Thus, the resolution and substitution of functions are special cases of the rules SR4.1 and SR4.2.

En un cuadro dialógico enriquecido con objetos lúdicos una aplicación de la jugada de espejo pone der relieve que lo que copiamos cuando llevamos a cabo una jugada de espejo, no sólo es la proposición sino el objeto lúdico que le da contenido. Para ponerlo en la terminología de Brandom el uso de la jugada de espejo indica que se ha copiado también la razón que sustenta la proposición afirmada. Otra manera de ver la jugada del espejo es que provee la expresión dinámica de la reflexividad. Esto no lleva a la próxima sección y a uno de los sujetos principales de nuestro libro .

3.3.1 La genealogía dialógica de la identidad y la regla formal

As already mentioned one of the most salient features of dialogical logic is the so-called, *formal rule*, that establishes:

- The Proponent can play an elementary sentence only if the Opponent has played it previously.

The formal rule is one of the characteristic features of the dialogical approach: other game-based approaches do not have it. With this rule the dialogical framework comes with an internal account for elementary sentences: an account in terms of interaction only, without depending on metalogical meaning explanations for the non-logical vocabulary. More prominently, this means that the dialogical account does not rely – contrary to Hintikka's GTS games – on the model-theoretical approach to meaning for elementary propositions.

The rule has a clear Platonist and Aristotelian origin and sets the terms for what it means to deploy a *formal argument*: for instance in Plato’s *Gorgias*, 472b-c we find a clear formulation of it that amounts to the following:

- there is no better grounding of an assertion within an argument that indicating that it has been already conceded by the opponent or it follows from these concessions. [47]

What we would like to stress here are the following two points:

1) formality is understood as a kind of interaction.
2) formal reasoning should not be understood here as devoid of content. En otras palabras, la regla formal no es *formal* en el sentido sintáctico.

Both points are important in order to understand the criticism often raised against formal reasoning in general and logic in particular. It is only quite late in the history of philosophy that formal reasoning is being reduced to syntactic manipulation – presumably the first explicit occurrence of the syntactic view of logic is Leibniz's "pensée aveugle" (though Leibniz's notion was not a reductive one). Plato's and Aristotle's notion of formal reasoning is – to make use of Hegel's words[48], neither "static" nor "empty of meaning": the point is that one of the players (namely, the one who is trying to show that to deny an assertion posited by himself involves a contradiction) is allowed to point out that the justification of the assertion under discussion has already been conceded by the antagonist, and that he can simply overtake it. The idea underlying this form of interaction is that the meaning and justification of an

---

[47] Recent work by Zoe McConaughey, Michel Crubellier and Shahid Rahman (2015) claim that this rule is central to the interpretation of dialectic as the core of Aristotle's logic. Neither Ian Lukasiewicz's famous reconstruction of Aristotle's syllogistic nor the Natural-Deduction approach of Kurt Ebbinghaus and John Corcoran has this rule, but it is Marion and Rückert who have linked it to the *dictum de omni et nullo* in their 2015 paper, "Aristotle on Universal Quantification: A Study form the Perspective of Game Semantics". This Formal rule is at the heart of the dialectical interpretation of traditional quantificuation because it guarantees that nothing comes from outside the dialog: if the Proponent wins, it is because the Opponent conceded it.

[48] Hegel (1999), 1813, Teil 2, Buch II; II.258, pp. 29-30.

assertion is the result of what has been brought forward during that (argumentative) interaction.

Actually, even some former interpretations of standard dialogical logic understood the formal rule as described as a purely syntactic move. This is mainly due to the fact that the standard version of the framework does not have the means to express meaning at the object-language level in terms of asking and giving reasons for elementary sentences. As a consequence, the standard formulation simply relies on a syntactic understanding of the formal rule which amounts to entitle **P** to copy-cat the elementary sentences brought forward by **O** ignoring its content. The dialogical approach to CTT provides an answer to express the contentual aspects of the formal rule. Indeed, since a posit in such a frame is constituted by both the propositional and the ontological grounds for it (the play-object), the copy-cat applies to both levels: while the proponent copies an elementary sentence he is also overtaking the ontological grounds for it.

By now is should be clear what it is the interactive root of the so trivial-looking expression $A = A$ that expresses that the proposition A is equivalent to itself. It is by no means an *empty-tautology*: this expression, when posited in a dialogue, is to be understood as expressing at the object-language level the use of the formal-rule as applied to the elementary sentence A. Hence, $A = A$, expresses from the dialogical point of view the fact that if the antagonist posits A, the defender can do the same, and on the same grounds that provide the meaning and justification of A. This is the dialogical solution to Hegel's challenge. Now this only explains a quite simple form of equality, but it does not implement them yet as explicit rules.

3.3.1.1 De la Igualdad definicional a la regla formal

In order to implement the required rules let us now deploy the process by the means of which definitional equality is made explicit from the idea animating the copy-cat move:

Assume that the Proponent brings forward the thesis that if the Opponent concedes the conjunction, say $A \wedge B$, he (the Proponent) will be able to successfully defend the assertion $B \wedge A$, that is, that **P** has a winning strategy for the commutative transformation of the conjunction. Let me present very informally the dialogical development of this thesis:

1. **O** ! $p : A \wedge B$ (concession)
2. **P** ! $q : B \wedge A$
3. **O** $?_{L}$ (the Opponent launches his challenge asking for the left component)
4. **P** ! $L^{\wedge}(q) : B$
5. **O** $L^{\wedge}(q)$ / ? (**O** asks **P** to carry out the instruction by picking out one play-object)
6. Since we are focusing on a winning strategy we will assume that **P** makes the smartest move, and this is certainly to launch a counter-attack: the idea is to force **O** to choose a play-object first and then copy-cat it, before he goes on to answer the challenge of move 5:
   P $?_{R}$
7. **O** ! $R^{\wedge}(p) : B$
8. **P** $R^{\wedge}(q)$ / ? (**P** asks **O** to carry out the instruction by picking out one play-object for the right side of the conjunction)
9. **O** ! $b : B$ (**O** carries out the instruction by choosing the play-object b)
10. Now the Proponent has the information he needed, and copies the Opponents choice to answer **O**'s challenge stated at move 5:
    P ! $b : B$

(It should be clear that a similar end will happen if **O** starts by challenging the right component of the conjunction-posit)

Now, let us discuss what happened:

- From the strategical point of view the Proponent is in fact considering that the play-object that the right part of *p* as definitionally equal to the left part of *q*. If we were to make explicit this move, the following definitional equality will come out:

  $R^{\wedge}(p) = L^{\wedge}(q) : B \wedge A$

  So that, whatever play-object **O** might choose for the right part of the conjunction, **P** will copy-cat it when he solves the instruction $L^{\wedge}(q)$.

- Frome the more fundamental level of the plays, one can put it in the following way: If **P** solves the instruction $L^{\wedge}(q)$, with the play-object, say *b* and **O** solves $R^{\wedge}(p)$, with *c*, then **P** is actually bringing forward that *b* and *c* are equal elements in *B*. More precisely, me might have a variant of what Marion/Rückert (???) call the *Socratic rule*, such that given an elementary assertion O might ask **P** about the identity of the play-object occurring in that assertion, and then **P** will introduce a suitable definitional equality. The strategic point of view is only a generalization of the procedure that takes place at the play-level. Thus, our informal presentation will take the following form (we start with move 10 since the precedent moves remain unchanged)

  9. **O** ! *b* : *B* (**O** carries out the instruction by choosing the play-object *b*)

10. :**P** ! $c : B$
11. **O** ! ? $= c$
12. **P** ! $b = c : B$

The influence of the definitional equality on the propositional level is exemplified at its best in the case of quantifiers. Take for instance, the thesis that there is a **P**-winning strategy for $p : (\exists x : A)B(x)$ if the Opponent concedes $q : (\forall x : A)Bx$. The play-level that leads to the constitution of a winning strategy is based on the fact that **P** can choose for the resolution of the instruction for the first component of the existential a play-object, say a, that is definitionally equal to the one that solves the instruction of the first component of the universal, say b. The explicit formulation of this process amounts to **P** making use of the equality $a = b : A$. Now, since the resolution of $L^{\forall}(q)$ will spread to $\mathrm{B}(L^{\forall}(q))$, we will have as a result that $B(a)$ and $B(b)$ are equal propositions, i.e. $B(a) = B(b) : prop$. In other words, in our example **P** must be able to bring forward both, the equality $a = b : A$ and the equality $B(a) = B(b) : prop$. At the strategic level, this should be the case for whatever b will **O** chose. We achieve such a generality by expressing the required equalities making use of instructions. In our case this yields $L^{\exists}(p) = L^{\forall}(q) : B$ and $B(L^{\forall}(q)) = B(L^{\exists}(p)) : prop$.

From this point of view, definitional equality is a kind of *indirect* copy-cat: **P** does not, (in general) copy directly a play-object but he chooses a play-object that is defined to be equal to the one posited by **O**. At this point of the discussion the reader will wonder why does **P** choose a different play object for the start? What we are trying to do is to make all the process as explicit as possible, and so we will only allow **P** to use copy-cat in order to choose the same play object used by **O** to resolve an instruction only if the instruction resolved by **O** is **exactly** the same than the one to resolved by **P**. In the case that the instructions are exactly the same, the resulting definitional equality is reflexivity: from a dialogical point of view, reflexivity makes explicit the result of using copy-cat in a very strict manner. In fact, reflexivity is also implicit in the use

of substitution of instructions. Indeed, once an instruction has been resolved, according to the substitution rule for instructions (recall the rule SR4.2 above), the challenger might require the other player to stick to his choices and carry on with the replacement procedure in a consistent manner.
The upshot of these considerations is that interactively speaking we have two cases of reflexivity:

1. the kind of reflexivity that results by one player's use of copy-cat in relation to the moves of the **other player's choices**, and
2. the kind of reflexivity that results from **his own choices**.

This suggests furthermore, that the usual copy-cat move of the standard formal rule encodes two different cases, namely: reflexive cases and non-reflexive cases of definitional equality. While the latter result from *indirect* uses of copy-cat, the former from *direct* ones

In order to keep matters as simple as possible in such a rich frame, we will not formulate the rule by the means of which the first kind of reflexivity arises (the kind of that comes out by self-consistency). Hence we will only deal with indirect uses of copy-cat and those direct ones that involve copying the choices of **O**. In other words we will only deal with those definitional equalities introduced by **P**. Certainly, both players might posit expressions containing definitional equalities. However, what we are discussing now is how the definitional equalities are introduced before they have been explicitly expressed in a given posit. Once they have been introduced, the usual rules of reflexivity, transitivity, symmetry and substitution hold – as we will discuss in section IV.3 on explicit expressions of equality.

This considerations lead us to the a reformulation of the Socratic rule that can be condensed in a fairly simple table, however, before presenting such a table let us present the rule informally:

SR5.1 Socratic rule for expressions involving play-objects:

SR5.1.1

- After an instruction occurring at the left of the colon has been replaced by a play object and this yields and elementary posit[49], **O** may challenge the chosen play object asking for the definitional equality that grounds **P**'s choice.

SR5.1.2

- After an instruction occurring at the right of the colon has been replaced by a play object and this yields and elementary posit, **O** may challenge the chosen play object asking for the definitional equality that grounds **P**'s choice. The challenge consists in two steps, namely:
- **SR5.1.2a: O** asks for the definitional equality that grounds the choice
- **SR5.1.2b: O** asks for the definitional equality that grounds the resulting proposition coming out from the choice made in the former step.

SR5.2 Formal restriction on the non-reflexive introduction of definitional equalities:

SR5.2.1

- **P** can answer to the challenge on a described by the rules SR5.1.1 and SR5.1.2a by positing of the non-reflexive definitional equality $a = b : A$ (for given play-objects a and b, and a given elementary expression A), only if he (the Opponent) posited
  (i) $a = b : A$ before, or
  (ii) $b : A$ beforehand such that b replaces an instruction of different form (e.g. . $R^{\vee}(p)$ and $L^{\wedge}(q)$) that the one replaced by a, or
  (iii) b (in **O** ! $b : A$) is not the result of any application (in that play) of either a resolution or a substitution rule upon an instruction at all.

- No further attack described by SR5 on either a occurring in **P** ! $\pi(a)$ or **P** ! $a = b : A$ is allowed once the latter results from applying the rule 5.2.1 on **P** ! $a : A$.

[49] An elementary posit is constituted by a play object and an elementary expression of the type set or prop.

SR5.2.2

- **P** can answer to the challenge on $\varphi(a)$ described by the rule SR5.1.2b by positing the definitional equality $\varphi(a) = \varphi(b)$: *prop* (for given play-objects a and b, and the elementary expressions $\varphi(a)$, $\varphi(b)$), only if he (the Opponent) posited

  (i) $\varphi(a) = \varphi(b)$: *prop* before, or

  (ii) $\varphi(b)$: *prop* beforehand such that that b replaces an instruction of different form (e.g. . $R^{\vee}(p)$ and $L^{\wedge}(q)$) that the one replaced by a, or

  (iii) b (in **O** ! $\varphi(b)$: *prop*) is not the result of any application (in that play) of either a resolution or a substitution rule upon an instruction at all.

- No further attack described by SR5 on either $\varphi(a)$ occurring in **P** ! $\pi(\varphi(a))$ or on **P** ! $\varphi(a) = \varphi(b)$: *prop* is allowed once the latter results from applying the rule 5.2.2 to **P** ! $\varphi(a)$.

SR5.3 Formal restriction on the reflexive introduction of definitional equalities:

SR5.3.1

- **P** can answer to the challenge on a described by the rules SR5.1.1 and SR5.1.2a by positing the reflexive definitional equality $a = a : A$ (for the play-object a and the elementary expression A), only if he (the Opponent) posited

  (i) $a = a : A$ before, or

  (ii) $a : A$ such that a replaces exactly the same instruction as the one that lead to P's move $a : A$, or

  (iii) a (in O ! $a : A$) is not the result of any application (in that play) of either a resolution or a substitution rule upon an instruction at all.

- No further attack described by SR5 on either a occurring in **P** ! $\pi(a)$ or on **P** ! $a = a : A$ is allowed once the latter results from applying the rule 5.3.1 to $a : A$.

SR5.3.2

- **P** can answer to the challenge on $\varphi(a)$ described by the rule SR5.1.2b by positing the definitional equality $\varphi(a) = \varphi(a)$: *prop* (for given play-objects a and b, and the elementary expressions $\varphi(a)$, $\varphi(b)$), only if he (the Opponent) posited

  (i) $\varphi(a) = \varphi(a)$: *prop* before, or

(ii) $\varphi(a)$: *prop* beforehand such that *a* replaced exactly the same instruction as the one that lead to **P**'s move $\varphi(a)$: *A* , or
(iii) *a* (in O ! *a* : *A*) is not the result of any application (in that play) of either a resolution or a substitution rule upon an instruction at all.

- No further attack described by SR5 on either $\varphi(a)$ occurring in **P** ! $\pi(\varphi(a))$ or on **P** ! $\varphi(a) = \varphi(a)$: *prop* is allowed once the latter results from applying the rule 5.3.2 to **P** ! $\varphi(a)$.

For the sake of simplification we might want to substitute SR5.3 with the following rule that is close to the formal rule of standard dialogical logic

SR5.3bis Formal rule for play-objects:
The Proponent can posit *a* : *A* (for the play-object *a* of the type *A*) only if the Opponent posited *a* : *A* himself beforehand such that *a* is the substitution-instance of an instruction of exactly the form (e.g. . $R^{\vee}(p)$ and $R^{\vee}(p)$), or, though **O** posited *a* : *A* before, *a* is not the result of any substitution carried out of by himself (the Opponent). In such cases the challenge described by Socr-def does not apply.

SR5.4 Socratic rule for functions
In the case that play-objects stand for functions, the definitional equality rules SR51-3 apply with the sole modification that the expression at stake in challenge ruled by SR5.1.2b and the answers ruled by SR5. 2 involve the types *set* instead of the type *prop*.

Let us now compact all this in two tables, one for the non reflexive and one for the reflexive cases. Since we will use the same rule for function and instructions, we make use of the conventions:

- The notation "ɠ", stands for either an instruction or a function
- the expressions between brackets above a move express the conditions that makes that move possible
- the notation "**Y** ! ɠ / *a* : *A*" stands for the condition: "**Y** replaced ɠ with *a* in *A*"

- the notation "**Y** ~~!ɠ / *b* : *A*~~ *and* **Y** ! *b* : *A*", stands for the condition: "**Y** posited *b* : *A* before but this posit (from **Y**) did not result from replacing any instruction(function) in *A*".
- the expression type in "φ : *type*" stands for *set* or *prop*.

Table for SR5.I: Socratic rule I

Posit	**Challenge**	**Defence**
(**O** ? ɠ$_i$ /?) … **P** ! $a : A$	**O** ? = a	(**O !** $a = b : A$ or **O !** ɠ$_j$/$b : A$ (where ɠ$_i$ ≠ ɠ$_j$) or **O** ~~!ɠ / *b* : *A*~~ *and* **O** ! $b : A$) … **P** ! $a = b : A$
(P! $p : \varphi$(ɠ$_i$), **O** ? ɠ$_i$ /?) … **P** ! $p : \varphi(a)$	**O** $?_1 = a$ **O** $?_2 = \varphi(a)$	**same as above** (**O !** $\varphi(a) = \varphi(b)$: *type* or **O !** φ(ɠ$_j$/b) : *type* (where ɠ$_i$ ≠ ɠ$_j$) or ~~**O !** φ(ɠ / *b*) : *type*~~ *and* **O !** $\varphi(b)$: *prop\set* … **P** ! $\varphi(a) = \varphi(b)$: *type*
		no further attack by **O** on either the initial posit or on the expression challenged of the initial posit or on the resulting equality (of the kind described by SR5.I) is allowed

Table for SR5.II: Socratic rule II

Posit	**Challenge**	**Defence**
		(**O !** $a = a : A$ or

(**O** ? ɠ$_i$ /?) … **P** ! *a* : *A*	**O** ? = *a*	**O !** ɠ$_j$/*a* : *A* (where ɠ$_i$ =ɠ$_j$) or **O** ~~!ɠ / *a* : *A*~~ *and* **O** ! *a* : *A*) … **P** ! *a* = *a* : *A*
(P! *p* : *φ*(ɠ$_i$), **O** ? ɠ$_i$ /?) … **P** ! *p* : *φ*(*a*)	**O** ?$_1$ = *a* **O** ?$_2$ = *φ*(*a*)	**same as above** **(O !** *φ*(*a*) = *φ*(*a*) : *type* or **O !** *φ*(ɠ$_j$/*a*) : *type* (where ɠ$_i$ =ɠ$_j$) or ~~**O !** *φ*(ɠ / *a*) : *type*~~ *and* **O !** *φ*(*a*) : *type* … **P** ! *φ*(*a*) = *φ*(*b*) :*type*
		no further attack by **O** on either the initial posit or on the expression challenged of the initial posit or on the resulting equality (of the kind described by SR5.II) is allowed

3.3.1.2 La transmisión de la igualdad definicional

The declination of the Posit-substitution

In our frame we deal with three forms of substitution, two of them involve the replacemente of instructions by suitable play-objects (resolutions rule and substitution rule for instructions) and posit-substitution (see III.3.1). The latter deals with the case where the

,

The following example displays the most important play that constitutes the core of the winning strategy for the axiom of choice[50]: Moreover we will not develop all the possible challenges (and answers) but only the ones crucial for establishing the correspondence between the winning strategy and the natural deduction demonstration of it.

O			P		
	H1: $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$ H2: $B(x) : set\ (x : A)$			$p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	0
1	m:= 1			n:= 2	2
3	$L^{\rightarrow}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$	0		$R^{\rightarrow}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x,f(x))$	6
5	$v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$		3	$L^{\rightarrow}(p)$ /?	4
7	$R^{\rightarrow}(p)$ /?	6		$(g, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	8
9	$?_R$	8		$R^{\exists}(g, r) : (\forall x : A)\ C(x, L^{\exists}(g, r)(x)$	10
11	$L^{\exists}(g, r)$ /?	10		$R^{\exists}(g, r) : (\forall x : A)\ C(x, g(x))$	12
13	$R^{\exists}(g, r)$ /?	12		$r : (\forall x : A)\ C(x, g(x))$	14
15	$L^{\forall}(r) : A$	14		$R^{\forall}(r) : C(x, g(a))$	32
17	$a : A$		15	$L^{\forall}(r)$: /?	16
23	$R^{\forall}(v) : (\exists y : B(b))\ C(b, y)$		5	$L^{\forall}(v) : A$	18
19	$L^{\forall}(g)$ /?	18		$b : A$	20
21	$? = b$	20		$b = a : A$	22
25	$(t_1, t_2) : (\exists y : B(b))\ C(b ,y)$		23	$R^{\forall}(v)$ /?	24
27	$L^{\exists}((t_1, t_2) : B(b)$		25	$?_L$	26
29	$t_1 : B(b)$		27	$L^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	28
31	$R^{\exists}(t_1, t_2) : C(b, t_1)$		29	$R_?$	30
33	$t_2 : C(b, t_1)$		31	$R^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	32
35	$R^{\forall}(r)$ /?	34		$t_2 : C(a, g(a))$	36

[50] For the whole display of the core see appendix I.

37	$g(a)$ /?	36		$t_2 : C(a, c)$	38
39	$?_1 = c$	38		$c = t_1 : B(b)$	40
41	$?_2 = B(b)$	40		$C(a, c) = C(b, t_1) : set$	44
43	$C(b, t_1) : set$		H1 $?_{subst}$	$b : A, t_1 : B(b)$.	42

Description:

Move 3: After setting the thesis and establishing the repetition ranks **O** launches an attack on material implication.

Move 4: **P** launches a counterattack and asks for the play-object that corresponds to $L^{\rightarrow}(p)$.

Moves 5, 6: **O** responds to the challenge of 4. **P** posits the right component of the material implication.

Moves 7, 8: **O** asks for the play-object that corresponds to $R^{\rightarrow}(p)$. **P** responds to the challenge by choosing the pair (g, r) where g is the play-object chosen to substitute the variable f and r the play-object for the right component of the existential.

Move 9: **O** has here the choice to ask for the left or the right component of the existential. The present play describes the development of the play triggered by the right choice.

Moves 10-36: the Proponent substitutes the variable f by the instruction correspondent to the left-hand component of the existential, i.e., $L^{\exists}(g, r)$. By this **P** accounts for the dependence of the right-hand part on the left-hand component. The point is that the local meaning of the existential requires this dependence of the right component to the left component even if in this play the Opponent, due to the restriction on rank 1, can ask only for the right-hand part. On move 22 P introduces thee definitional equality $b = a : A$, that makes explicit the choice of b is based on a copy-cat move of O's move 17. Notice that since the identithy of b has been already established by move 22, **O** cannot challenge this play-object anymore.

The conceptually interesting moves start with 37, where the Opponent asks **P** to substitute the function. As already pointed out, in order to respond to 37 the Opponent's move 33 is not enough. Indeed the Proponent needs also to introduce the definitonal equality $C(a, c) = C(b, t_1) : set$ – given that $a = b : A$ *and* $c = t_1 : B(b)$) **P** forces **O** to concede the conditions for such an equality (43), on the basis of the substitutions b / x and t_1 / y on H1.

From the strategical point of view 7, 17, 22 and 29 constitute, when generalized over whatever play objects O chooses the Π–equalitiy of CTT. In fact, we could make the bridge between the play and strategical levels smoother by including a rule that allows **P** to require **O** to introduce the definitional equality between the chosen play-object and the resolved instruction? However this is a strategical perspective that requires looking not only at the history that links the different moves but also at all the possible outcomes. On our view this is part of the process by the means of which validity of the thesis is established.

THE END OF THE CORRECTED PART on THE 2 october

Under this perspective definitional equality is understood as the explicit expression of a specific form of interaction. The written form of definitional equality constitutes a further step that records this explicitation process and might, later on be used independently of the dialogical context that originated it. However, if we follow the dialogical approach, we can always trace back the precise interaction at its origin.

One more general way to see the dialogical perspective on definitional equality is that it is rooted in those entitlements and commitment that result from moves were play-objects are brought forward. Ausint copy cat, I eintitle some ones else : right are intreacion between players, commitment with oneself. from the opoenent side it entitles me to use the equalities I f I want ,

Strategies, equality and instructions: In some sense, the Proponent's victory does not really depend on the particular play-object chosen by **O** at move 17, insofar as whichever play-object **O**

chooses when computing $R^{\wedge}(r)$, **P** can use it to posit a definitional equality in his move 18. This point leads us to the strategical level, beyond the particular dialogue we have considered. Now, although the Proponent's victory does not depend on the particular choice of play-object by the Opponent, it *is* related to **O** making such a choice. Because of the formal restriction, it is only by relying on the Opponent's choice that **P** can posit a definitional equality, applying what we have called the copy-cat strategy.

The Proponent's strategy thus does not rely on one particular definitional equality. The idea behind **P**'s ability to win is in fact that he sets the right part of r to be definitionally equal to the left part of q. That is to say, the idea underlying his ability to win can actually be thought of as a definitional equality between instructions: in this case, the equality $L^{\wedge}(q)=R^{\wedge}(r) : B$. Such expressions do not occur as such in the course of the game: they are rather abstractions, to the strategical level, of definitional equalities (between play-objects) of actual plays.

To be exhaustive, the equality between $L^{\wedge}(q)$ and $R^{\wedge}(r)$ is not the *whole* story behind the existence of a winning strategy for the Proponent in the example above. Indeed we must consider the cases triggered by **O** asking for the right part of q instead of its left part at move 7. But the reader can easily check that the Proponent can achieve victory in a similar way, considering this time a strategical definitional equality between $R^{\wedge}(q)$ and $L^{\wedge}(r)$. Summing up, the existence of a winning strategy for the Proponent in this game rests on the abstract (or strategical) equalities $R^{\wedge}(q)=L^{\wedge}(r) : A$ and $L^{\wedge}(q)=R^{\wedge}(r) : B$.

The point of using instructions for such abstractions is also that it keeps track of the different *processes* which led to the two play-objects that **P** posits to be definitionally equals. If one forgets these processes, there is a risk to over-generalize the idea on which the existence of a winning **P**-strategy is based. To illustrate our point with our example: neither $R^{\wedge}(q)=L^{\wedge}(r) : A$ nor $L^{\wedge}(q)=R^{\wedge}(r) : B$, or even these two expressions together, allows to conclude that $q=r$. Equality does not transfer from the "parts" to the "whole".

This is perhaps even clearer in cases where different logical constants are involved, such as in our next example.

The influence of the definitional equality on the level of propositions is exemplified at its best in the case of quantifiers. Let us suppose that the set A is not empty: this is expressed by the initial concession by the Opponent ! $x : A$. Under this hypothesis, we consider the thesis ! $p : (\forall x : A)Bx \rightarrow (\exists x : A)Bx$.

	O			**P**	
H	! $x : A$				
				! $p : (\forall x : A)Bx \rightarrow (\exists x : A)Bx$	0
1	$n{:=}2$			$m{:=}2$	2
3	! $L^{\exists}(p) : (\forall x : A)Bx$	(0)		! $R^{\exists}(p) : (\exists x : A)Bx$	16
5	! $p_1 : (\forall x : A)Bx$		(3)	$L^{\exists}(p)$ / ?	4
13	! $R^{\forall}(p_1) : Ba$		(5)	! $L^{\forall}(p_1) : A$	6
7	$L^{\forall}(p_1)$/ ?	(6)		! $a : A$	10
9	! $a : A$		(H)	x/ ?	8
11	$?_{a=?}$	(10)		! $a{=}a : A$	12
15	! $b : Ba$		(13)	$R^{\forall}(p_1)$ / ?	14
17	$R^{\exists}(p)$/ ?	(16)		! $p_2 : (\exists x : A)Bx$	18
19	$?_L$	(18)		! $L^{\exists}(p_2) : A$	20
21	$L^{\exists}(p_2)$/ ?	(20)		! $a : A$	22
23	$?_{a=?}$	(22)		! $a{=}a : A$	24
25	$?_R$	(18)		! $R^{\exists}(p_2) : Ba$	26
27	$R^{\exists}(p_2)$/ ?	(26)		! $b : Ba$	28
29	$?_{b=?}$	(28)		! $b{=}b : Ba$	30

Explanations: The moves we want to focus on are moves 12, 24, 26 and 30. But let us start with a general explanation of the dialogue before that.

- The Opponent challenges the thesis according to the rule for material implication. In response, the Proponent launches a counter-attack in a sequence which goes until move 16, at which **P** posits the tail of the thesis.
- Notice how, during this sequence, the Proponent relies on the initial concession H in his attack against the head of the thesis. For his challenge he must chooses a play-object for *A*. In order to be able to answer the Opponent's counter-attack (here in move 11), **P** challenges the initial concession, making **O** choose a play-object for *A* herself. In this way **P** can posit the definitional equality at move 12 in accordance with the formal restriction.
- After the Proponent's move 16, the Opponent's starts a sequence of challenges of her own against the tail of the thesis, until the end of the dialogue.
- The Proponent's victory relies first on him choosing the same play-object *a* when computing $L^{\exists}(p_2)$ at move 22, which is expressed at the strategical level by the equality $L^{\forall}(p_1)=L^{\exists}(p_2)$: A. It also relies on him choosing the same play-object to compute $R^{\exists}(p_2)$ as the one chosen by **O** at move 15 to compute $R^{\forall}(p_1)$.

But there is more to the Proponent's victory than this. We also need to pay attention to a second effect of the equality $L^{\forall}(p_1)=L^{\exists}(p_2) : A$. Namely, that it yields another equality: between $B(L^{\forall}(p_1))$ and $B(L^{\exists}(p_2))$ — the first being instantiated as *Ba* by **O** at move 15 and the second one being instantiated also as *Ba* by **P** at move 28. It is this equality at the level of proposition that allows the Proponent to posit the last definitional equality in move 30.

The next rules involve what is known in CTT as *definitional equality*. These rules introduce a different kind of provisional clause, namely a clause in which the defender is the player committed to the expression within the clause and thus he, rather than the challenger, will eventually afirmación it. In standard CTT there is no need for such a distinction since there are no players. However, in dialogical games the distinction can and must be made depending on who afirmaciones the proviso. Accordingly we use of the notation <...> to signal that it is the player making the afirmación who is committed to the expression in the proviso clause and (...) when it is the opponent.

We have already considered the latter case in this section. Let π be a afirmación and <...> a proviso which the utterer is committed to. The general form of the rule for provisos is the following:

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X! π < …>	**Y** ? $_{[\pi]}$ **Or** **Y ?** $_{[<\ldots>]}$ where ?[π] and ![π] stand respectively for the relevant challenge or defence against π, and similarly for ?[<>], ![<>]	**X** ! [π] **X** ![<…>]

In the initial afirmación, ***X*** commits himself to both π and the proviso. Hence ***Y*** is entitled to question either one, and he is the one to choose which to ask for. The rule states that the challenger can question either part of the initial afirmación, and that in each case he does so depending on the form of the expression. An illustration is helpful here. Assume the initial afirmación is $p : (\forall x : A)B(x)<c : C>$ which reads ``given $c : C$ we have $B(x)$ for all $x : A$;

and the player making the afirmación commits himself to the proviso". Then the rule is applied as described in the next table.

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! $p :(\forall x : A)\ Bx <c : C>$	**Y** ? $L^{\forall}(p) : A$ **Or** **Y ?** $_{[c\ :\ C]}$ where ?[π] and ![π] stand respectively for the relevant challenge or defence against π, and similarly for ?[<>], ![<>]	**X** ! $R^{\forall}(p) : B(L(p))$ X sic (n)

In this case, π involves universal quantification and the proviso is the elementary afirmación *c* : *C*. Thus, the first possible challenge for ***Y*** consists in applying the particle rule for universal quantification, whereas the second possible challenge is done by applying the rule for elementary afirmaciones. The possible defences by ***X*** are then in turn determined by these rules.

A typical case in which provisos of the form <...> occur is functional substitution. Assume some function *f* has been introduced, for example with *f*(*x*) : *B* (*x* : *A*). When a player uses *f*(*a*) in a afirmación, for some *a* : *A*, the antagonist is entitled to ask him what the output substitution-term of *f* is, given the substitution-term *a* as input. Now *f*(*a*) can be used either at the left or at the right of the colon. Accordingly we have two rules:

(Function-substitution)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! $f(a) : \varphi$	**Y** $f(a)?_{<=>}$	**X** ! $f(a)/ki : \varphi < f(a) = ki : B >$
X ! $\alpha : \varphi[f(a)]$	**Y** $f(a)/?<=>$	**X** ! $\alpha : \varphi[f(a)/ki] <\varphi[f(a)] = \varphi[f(a)/ki] : \mathit{set} >$

The subscript `<=>' in the challenges indicates that the substitution is related to some equality, and the defender endorses an equality in the proviso of the defence. The second rule - where α can be a play-object or an instruction - is applied in the dialogical take on the Axiom of Choice. See the ``second play" in section II.

Important remark: These two rules express a double commitment for the defender who is committed to the proviso in the defence. One might therefore argue that the rules could also be formulated as involving two challenges (and two defences). There are however two problems with such an approach. For illustration purposes, let us consider such a formulation of the second rule involving two steps:

Afirmación	Challenge	Defence
X ! α : φ[f (a)]	**Y !** L(f (a))/?	**X** ! p : φ[f (a)/ki]
	Y ! R(f (a))/?	**X !** φ[f (a)] =φ [f (a)/ki] : *set*

The first problem is that the second challenge works as if the proviso $\varphi[f(a)]=\varphi[f(a)/k_i]$: *set* was implicit in the initial afirmación and had to be made explicit. However this is a slightly misguided approach since the proviso does not concern the initial afirmación: the proviso must be established only after ***X*** has chosen k_i for the substitution. The second problem is related to the first: in such a formulation the challenger is the one who can choose between asking ***X*** to perform the substitution and asking him to afirmación the proviso. It thus allows the challenger to perform just the second challenge without asking for the substitution, which brings us back to the first problem. Moreover, introducing a choice for one of the players results, when the rule can be applied, in multiplying the number of alternative plays (in particular when the repetition rank of the challenger is 1). For all these reasons, such an alternative formulation is less satisfactory than the one we gave above.

Functional substitution is closely related to the Π-Equality rule, which we now introduce together with Σ and ∨-Equality.

(Π-Equality) We use the CTT notation Π which covers the cases of universal quantification and material implication.

Afirmación	Challenge	Defence
X ! p : (Πx : A)φ **Y** ! L^{Π} (p)/a : A **X** ! R^{Π} (p) : φ(a/x)	**Y** $?_{\Pi\text{-Eq}}$	**X** ! p(a) = R^{Π}(p) : φ(a/x)

(Σ-Equality) The rule is similar for existential quantification, subset separation, and conjunction. Thus we use the notation from CTT which uses the Σ operator. In the following rule I^{Σ} can be either L^{Σ} or R^{Σ}, and *i* can be either 1 or 2. Moreover, it is 1 when *I* is *L* and 2 when *I* is *R*.

Afirmación	Challenge	Defence
X ! p : (Σ x : φ_1)φ_2 Y I^{Σ} (p)/? X ! p_i/I^{Σ} (p) : φ_i	**Y**? $_{\Sigma\text{-Eq}}$	**X !** I^{Σ}(p) = p_i : φ_i

Notice that these rules have several preconditions: there is no lone initial afirmación triggering the application of the rule. From a dialogical perspective, these rules intend to allow the challenger to take advantage from information from the history of the current play – including resolutions of instructions – to make ***X*** afirmación some equality. For an application, see the second play in section II where the Π-Equality rules play a prominent role.

These rules strongly suggest a close connection between the CTT equality rules for logical constants and the dialogical instructions through what we will call in the next section their *resolution*.

In fact, equality rules can be seen as making explicit the use of the formal rule in relation to the task of carrying out instructions. Hence, under this perspective, identities express explicitly some specific forms of interaction. Let us briefly discuss this point:

> Assume that the Proponent brings forward the thesis that if the Opponent concedes the conjunction, say *A*∧*B*, he (the Proponent) will be able to successfully defend the assertion *B*∧*A*, that is, that **P** has a winning strategy for the commutative transformation of the conjunction. Let us present informally the dialogical development of this thesis:

1. **O** ! $p : A \wedge B$ (concession)
2. **P** ! $q : B \wedge A$
3. **O** $?_L$ (the Opponent launches his challenge asking for the left component)
4. **P** ! $L^{\wedge}(q) : B$
5. **O** $L^{\wedge}(q)$ / ? (**O** asks **P** to carry out the instruction by picking out one play-object)
6. Since we are focusing on a winning strategy, we will assume that **P** makes the smartest move, and this is certainly to launch a counter-attack: the idea is to force **O** to choose a play-object first and then copy-cat it, before he goes on to answer the challenge of move 5:
   P $?_R$
7. **O** ! $R^{\wedge}(p) : B$
8. **P** $R^{\wedge}(p)$ / ? (**P** asks **O** to carry out the instruction by picking out one play-object for the right side of the conjunction)
9. **O** ! $b : B$ (**O** carries out the instruction by choosing the play-object b)
10. Now the Proponent has the information he needed, and copies the Opponents choice to answer **O**'s challenge stated at move 5:

P ! $b : B$

(It should be clear that a similar end will happen if **O** starts by challenging the right component of the conjunction-afirmación)

Now, let us try to make explicit what happened. The point is that the Proponent is in fact considering the right part of p as definitionally equal to the left part of q. If we were to make explicit this move, the following definitional equality will come out:

$$R^{\wedge}(p) = L^{\wedge}(q) : B$$

The influence of the definitional equality of play-objects on the equality of propositions is exemplified at its best in the case of quantifiers. Take for instance, the thesis that there is a **P**-winning strategy for $p : (\exists x : A)Bx$ if the Opponent concedes $q : (\forall x : A)Bx$. The core of the winning strategy is based on the fact that the Proponent can choose for the resolution of the instruction for the first component of the existential the same play-object that resolves the instruction of the first component of the universal afirmacióned by **O**. The explicit formulation of this process amounts to the Proponent making use of the equality $L^{\exists}(p)$ =

$L^{\forall}(q)$. Now, since the resolution of $L^{\forall}(q)$ will spread to $B(L^{\forall}(q))$, we will have as a result that $B(L^{\forall}(q))$ and $B(L^{\exists}(p))$ are equal propositions.[51]

The task ahead is to formulate rules that implement this explicitation-process as part of the development of a play. In the meanwhile let us display all the rules that determine explicit identity-expressions:

(Reflexivity within *set*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! A : *set*	**Y** $?_{set}$- refl	**X !** A = A : *set*

(Symmetry within *set*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**

51 One non negligible result of the interactive roots of definitional equality is that it provides a new insight into the dialogical take on the CTT approach to the notion of *harmony* as developed in Rahman/Redmond (2015). Indeed, since the CTT approach to harmony, as mentioned above, is based on coordinating the elimination and introduction rule by means of definitional equality, and the latter, according to our analysis, corresponds to the strategic use of the formal rule, it follows that CTT- harmony is based on the strategic use of copy-cat interaction. Moreover, since, as argued in Rahman/Redmond (2015), harmony in general can be achieved by the more fundamental notion of player-independence, the present analysis stresses the contribution of the dialogical theory of meaning that allows distinguishing the strategic use of definitional equality from a more basic notion of harmony. Perhaps we should speak of two different notions of harmony, one of them strategic (based on copy-cat plus definitional equality) and one semantic one (based on player-independence).

X ! A $\doteq$ B : *set*	**Y** $?_B$- symm	**X !** B = A : *set*

(Transitivity within *set*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! A $\doteq$ B : *set* **X** ! B = C : *set*	**Y** $?_A$- trans	**X !** A = C : *set*

(Reflexivity within *A*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! $\dot{\text{a}}$: **A**	**Y** ? a refl	**X** ! a = a: A

(Symmetry within *A*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! a $\doteq$ b : A	**Y**-$?_b$- symm	**X** ! b = a : A

(Transitivity within *A*)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! a $\doteq$ b : A **X** ! b = c: A	**Y**-$?_a$- trans	**X** ! a = c : A

(*Set*-equality / Extensionality)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**

X ! A = B : *set*	**Y**-?$_{ext}$- a : A Y-?$_{ext-}$ a = b : A	**X**-- a : B **X** ! a = b : B

(*Set*-substitution)

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X ! B(x) : *set* (x : A)	**Y** ! x = a : A	**X** ! B(x/a) : *set*
X ! B(x) : *set* (x : A)	**Y** ! a = c : A	**X** ! B(a)=B(c) : *set*
X ! b(x) : B(x) (x : A)	**Y** ! a : A	**X** ! b(a) : B(a)
X ! b(x) : B(x) (x : A)	**Y** ! a = c : A	**X** ! b(a)=b(c) : B(a)

In these last rules, we have considered the simpler case where there is only one assumption in the proviso or context. The rules can obviously be generalized for provisos featuring multiple assumptions.

This ends the presentation of the dialogical notion of play-object and of the rules which give an abstract description of the local proceeding of dialogical games. Next we consider the global conditions taking part in the development of dialogical plays.

3.3 El desarrollo de una partida

We will deal in this section with the other kind of dialogical rules called structural rules. These rules govern the way plays globally proceed and are therefore an important aspect of dialogical semantics. We will work with the following structural rules:

SR0 (Starting rule). Any dialogue starts with the Opponent afirmacióning initial concessions, if any, and the Proponent afirmacióning the thesis. After that the players each choose a afirmaciónive integer called repetition ranks.

SR1i (Intuitionisitic Development rule). Players move alternately. After the repetition ranks have been chosen, each move is a challenge or a defence in reaction to a previous move and in accordance with the particle rules. The repetition rank of a player bounds the number of challenges he can play in reaction to a same move. Players can answer only against the *last non-answered* challenge by the adversary.[52]

SR2 (``Priority to formation" rule). ***O*** starts by challenging the thesis with the request `$?_{prop}$'. The game then proceeds by applying the formation rules first so as to check that the thesis is indeed a proposition. After that the Opponent is free to use the other local rules insofar as the other structural rules allow it.

SR3 (Modified Formal rule). ***O***'s elementary sentences cannot be challenged. However, ***O*** can challenge a ***P***-elementary move provided she did not herself play it before.

Since we have particle rules for elementary sentences involving the defence "*sic*(*n*)" we have no need for a formal rule which entitles a player to copy-cat some moves of the adversary.[53] We must however also ensure that the strictly internal aspect related to the idea of Geltung in the dialogical approach to meaning is not lost, and that the asymmetry between the player ***P*** who brings forward the thesis and his adversary ***O*** is accounted for. This is why the standard formal rule is replaced by this modified version.

---

[52] This last clause is known as the *Last Duty First* condition, and is the clause making dialogical games suitable for Intuitionistic Logic, hence the name of this rule.

[53] But let us insist once more on the important point we raised in section 2.3: contrary to standard dialogical games, copy-cat does not apply only to elementary sentences but to afirmaciones in which such sentences are associated with play-objects.

SR4.1 (Resolution of instructions).

Whenever a player afirmaciones a move in which instructions $I_1,\ldots, I_n$ occur, the other player can ask him to replace these instructions (or some of them) by suitable play-objects.

If the instruction (or list of instructions) occurs at the right of the colon and the afirmación is the tail of an universally quantified sentence or of an implication (so that these instructions occur at the left of the colon in the afirmación of the head of the implication), then it is the challenger who can choose the play-object. In these cases the player who challenges the instruction is also the challenger of the universal quantifier and/or of the implication.

Otherwise it is the defender of the instructions who chooses the suitable play-object. That is:

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X $\pi(I_1, \ldots, I_n)$	**Y** $I_1, \ldots, I_m/?$ $(m\leq n)$	**X** $\pi(b_1, \ldots, b_m)$ - if the instruction occurring at the right of the colon is the tail of either a universal or an implication (such that $I_1,\ldots, I_n$ also occur at the left of the colon in the afirmación of the head), then **$b_1,\ldots,b_m$ are chosen by the challenger** - Otherwise **the defender chooses**

Important remark. In the case of embedded instructions $I_1(\ldots(I_k)\ldots)$, the substitutions are thought of as being carried out from I_k to I_1: first substitute I_k with some play-object b_k, then $I_{k-1}(b_k)$ with b_{k-1} etc. until $I_1(b_2)$. If such a progressive substitution has already been carried out once, a player can then replace $I_1(\ldots(I_k)\ldots)$ directly.

SR4.2 (Substitution of instructions). During the play, when the play-object b has been chosen by any of the two players for an instruction I, and player $\mathbf{X}$ makes any afirmación $\pi(I)$, then the other player can ask to substitute I with b in this afirmación.

Afirmación	**Challenge**	**Defence**
X π(I) (where I/b has been previously established)	**Y** ? I/b	**X** π(b)

The idea is that the resolution of an instruction yields a certain play-object for some substitution term, and therefore the same play-object can be assumed to result from any other occurrence of the same substitution term: the resolution of instructions (SR4.1) is part of the commitments of a player, and the SR4.2 is about taking the fulfillment of such commitments to be consistent.

SR4.3 (Resolution and substitution of functions).

Functions: Since, functions have the form of universal quantification, the rule for the resolution of functions such as a $f(a)$,, where $a : A$ and $f(a) : B$, where $a : A$, is exactly the rule for the resolution and substitution of of instructions involving universal quantifiers. In the dialogical frame functions are conceived as rules of correspondence as emerging from interaction. Indeed, given the function $f(x)$,, where $x : A$ and $f(x) : B$, the challenger will choose one element of A, say a, and then the defender is committed to the assertion $f(a) : B$. Moreover, the defender is committed to substitute $f(a)$ with a suitable element of B. In other words, for any element of A chosen by the challenger, the defender must bring up a suitable element of B.

Thus, the resolution and substitution of functions are special cases of the rules SR4.1 and SR4.2.

- **Remark on substitution with equalities**; In CTT there are also substitution rules involving equalities that establish how to obtain equal propositions and equal sets. As we will discuss below these kind of substitutions follow in our frame from the explicit expression of the consistent use a substitution term for an instruction or a function.

SR5 (Winning rule for plays). For any *p*, a player who afirmaciones ``*p* : ⊥" looses the current play. Otherwise the player who makes the last move in a dialogue wins it.

In comparison to the rules of standard dialogical games, some additions in the rules we just gave have been made, namely SR2 and SR4.1-2. Also, the formal rule (here SR3) and the winning rule are a bit different. Since we made explicit the use of ⊥ in our games, we need to add a rule for it: the point is that afirmacióning *falsum* leads to immediate loss. We could say that it amounts to a withdrawal.[54] Hence the formulation of the winning rule for plays above.

We need the rules SR4.1 and SR4.2 because of some features of CTT's explicit language. In CTT it is possible to account for questions of dependency, scope, etc. directly at the language level. In this way various puzzles, such as anaphora, get a convincing and successful treatment. The typical example, considered below, is the so-called donkey sentence ``Every man who owns a donkey beats it". The two rules account for the way play-objects can be ascribed to what we have called instructions. See the dialogue in section III.2 for an application.

The rule SR2 is consistent with the common CTT practice to start demonstrations by checking or establishing the formation of propositions before proving their truth. Notice that this step also covers the formation of sets – membership, generation of elements, etc. – occurring in hypothetical afirmaciones and in quantifiers. In the current study, however, we can overlook this rule since we have restricted this work to the valid fragment of CTT: we can take it for granted that expressions are well formed. We will therefore only consider cases for which it is not necessary to carry out the formation steps since even if they were carried out, the players would always be able to justify that their expressions are well

54 See Keiff (2007).

formed. We will, for this, always take examples guaranteeing, by the hypotheses introduced as initial concessions by the Opponent at the beginning of the play, that the expressions used are well formed.

What is more, it seems like we could liberalise the rule SR2. But because of the number of rules we have introduced, verifying this carefully is a delicate task that we will not carry out in this study. Let us for now simply mention that it seems sensible enough in dialogues to combine more freely the process linked to the formation rules with the development of a play. It does in fact seem perfectly consistent with actual practices questioning the status of expressions introduced in the course of the game. Suppose for example that player ***P*** has afirmacióned `$p : \varphi \vee \psi$'. As soon as he has afirmacióned that the disjunction is a proposition – i.e., as soon as he has afirmacióned `$\varphi \vee \psi : prop$' – the other player knows how to challenge the disjunction and should be free to either keep on exploring the formation of the expression or to challenge the first afirmación. The point is that in a way it makes more sense to check whether φ is a proposition or not once (or if) ***X*** afirmaciones it to defend the disjunction. Doing so in a `monological' framework such as CTT would probably bring various confusions, but the dialogical approach to meaning should quite naturally allow this additional dynamic aspect. Nonetheless, in order to generalise the equivalence result we have investigated here beyond the valid fragment of CTT (the reason why we have introduced rule SR2), it seems sensible in our view to clearly distinguish in a fashion close to CTT the steps linked to the formation from the other aspects of meaning.

The definitions of plays, games and strategies are the same as those given in section I.1. Let us now recall them. A play for φ is a sequence of moves in which φ is the thesis afirmacióned by the Proponent and which complies with the game rules. The dialogical game for φ is the *set* of all possible plays for φ and its extensive form is nothing but its tree representation. Thus, every path in this tree which starts with the root is the linear representation of a play in the dialogical game at stake.

We say that a play for φ is terminal when there is no further move allowed for the player whose turn it is to play. A strategy for player ***X*** in a given dialogical game is a function which assigns a legal ***X***-move to each non terminal play where it is ***X***'s turn to move. When the strategy is a winning strategy for ***X*,** the application of the function turns those plays into terminal plays won by ***X*.** It is common practice to consider in an equivalent way an ***X***-strategy **s** as the *set* of terminal plays resulting when ***X*** plays according to **s**. The extensive form of **s** is then the tree representation of that *set*. For more explanations on these notions, see Clerbout[2014c]. The equivalence result between dialogical games and CTT is established by procedures of translation between extensive forms of winning strategies.

We have explained that the view of propositions as sets of winning strategies overlooks the level of plays and that an account more faithful to the dialogical approach to meaning is that of propositions as sets of play-objects. But play-objects are not the dialogical counterparts of CTT proof-objects, and thus are not enough to establish the connection between the dialogical and the CTT approach.

The local rules of our games – that is, the formation rules together with the particle rules – exhibit some resemblances to the CTT rules, especially if we read the dialogical rules backwards. But in spite of the resemblances, play-objects are in fact very different from CTT proof-objects. The case where the difference is obvious is implication – and thus universal quantification, which is similar. In the CTT approach, a proof-object for an implication is a lambda-abstract, and a proof-object of the tail of the implication is obtained by applying the function to the proof-object of the head. But in our account with play-objects, nothing requires that the play-object for the right-hand part is obtained by the application of some function.

From this simple observation it is clear that the connection between our games and CTT is not to be found at the level of plays.

In fact it is well known that the connection between dialogues and proofs is to be found at the level of strategies (see, for example, (Rahman, Clerbout and Keiff 2009) for a discussion in relation to natural deduction). Even without the question of the relation to CTT, the task of describing and explaining the level of strategies is required, since it is a proper and important level of meaning analysis in the dialogical framework. This work has been developed in a recent volume (Clerbout/Rahman 2015), where a precise algorithm has been described that leads from winning strategies to CTT-demonstrations and back.

Summing up, we have play-objects which carry the interactive aspects of meaning-explanations. A proposition is the *set* of all possible play-objects for it, and a strategy in a game about this proposition is some subset of play-objects for it.

3.4 Los ejemplos del axioma de elección y del burro apaleado

3.4.1 Igualdad definicional y la lectura dialógica del axioma de elección

It has been said , and rightly so, that the principle of set theory known as the Axiom of Choice (AC) "is probably the most interesting and in spite of its late appearance, the most discussed axiom of mathematics, second only to Euclid's Axiom of Parallels which was introduced more than two thousand years ago" (Fraenkel/Bar-Hillel and Levy [1973]).

According to Ernst Zermelo's formulation of 1904 AC amounts to the claim that, given any family $\mathcal{A}$ of non-empty sets, it is possible to select a single element from each member of $\mathcal{A}$. The selection process is carried out by a function **f** with domain in $\mathcal{M}$, such that for any nonempty set $\mathcal{M}$ in $\mathcal{A}$, then $\mathbf{f}(\mathcal{M})$ is an element of $\mathcal{M}$. The axiom has been resisted from its very beginnings and triggered heated foundational discussions concerning among others, mathematical existence and the notion of mathematical object in general and of function in particular. However, with the time, the foundational and philosophical reticence faded away and was replaced by a kind of praxis-driven view by the means of which AC is accepted as a kind of postulate (rather than as an axiom the truth of which is manifest) necessary for the practice and development of mathematics.

Recently the foundational discussions around AC experienced an unexpected revival when Per Martin Löf, showed (around 1980) that in constructive logic (that does not presuppose the excluded middle) the axiom of choice is logically valid (however in its intensional version) and that this logical truth naturally (almost trivially) follows from the constructive meaning of the quantifiers involved – it is this "evidence" that makes it an axiom rather than a postulate. The extensional version can also be proved but then, either third excluded or unicity of the function must be assumed. Martin-Löf's proof, for which he was awarded with the prestigious Kolmogorov price, showed that at the root of the old discussions an old conceptual problem was at stake, namely the tension between intension and extension.

An even more recent development studies the game theoretical interpretation of AC brought forward by Jaakko Hintikka by 1996[55], though he did not consider Martin-Löf's proof – presumably so because Hintikka is not favorable to constructivist approaches. Clerbout and Rahman showed that the CTT-understanding of AC, that stresses the type dependence involved by the function that constitutes the proof-object of the antecedent, can be seen as the result of an "outside-inside" approach to meaning.[56] It is this approach to meaning, so we claim, that provides a natural

[55] See for example Hintikka (1996, 2001).
[56] For a thorough discussion on the issue see Jovanovich (2014, 2015).

dialogical interpretation to AC, where the (intensional) function involved – understood as rules of correspondence produced by the players' interaction - constitutes a play object for the (first-order) universal quantifier that occurs in the antecedent of the formal expression of this axiom. Different to Hintikka's own game-theoretical approach the dialogical take on AC does not require a not axiomatisable language such as the one underlying Independent Friendly Logic (IF-logic). As pointed out by Jovanovic (2014) the dialogical approach to CTT supports Hintikka's claims that a game theoretical justifies Zermelo's axiom of choice in a first-order way perfectly acceptable for the constructivists, however, no underlying IF-semantics is required. Moreover, Hintikka's own formulation of AC, when spelled out, yields the CTT-formulation of Martin-Löf, that is constructivist after all. Summing up, though Hintikka is right in stressing the perspicuity of the game theoretical interpretation of AC he is wrong in relation to the theory of meaning required for this interpretation. One of the main reasons behind Hintikka's criticism of the constructivist approach is that he assumes that the rejection of the classical understanding of the AC by the constructivists has its roots in the rejection of a function that is not a recursive one. However, as thoroughly discussed by Thierry Coquand (2014), already Arend Heyting (1960) pointed out that recursive functions cannot (without circularity) be used to define constructivity and finally Erret Bishop (1967) showed that recursive functions are not at all needed to develop constructive mathematics. The very point of the rejection by the constructivists of the classical take on AC is their (the classical) assumption that the function at stake is an extensional one. For short, the CTT-proof of AC is based on the intensional take on functions and this is what the dialogical interpretation displays. We will conclude with some reflections on the conceptual link between the constructivist notion of function as rule of correspondence and dialogical interaction and that might restate some of Hintikka's remarks albeit in a different frame.

IIMartin-Löf on the axiom of choice

It is well known that this axiom was first introduced by Zermelo in 1904 in order to prove Cantor's theorem that every set can be rendered to be well ordered. Zermelo gave two formulations of this axiom one in 1904 and a second one in 1908. It is the second formulation that is relevant for our discussion, since it is related to both, Martin-Löfs and the game theoretical formalization:

> *A set S that can be decomposed into a set of disjoint parts A, B, C, ... each of the containing at least one element, possesses at least one subset S_1 having exactly one element with each of the parts A, B, C, ... considered.* (Zermelo, 1908)

The Axiom attracted immediately much attention and both of its formulations were criticized by constructivists such as René-Louis Baire, Émile Borel, Henri-Léon Lebesgue and Luitzen Egbert Jan Brower. The first objections were related to the non-predicative character of the axiom, where a certain choice function was supposed to exist without showing constructively that it does. However, the axiom found its way into the ZFC set theory and was finally accepted by the majority of mathematicians because of its usefulness in different branches of mathematics.

Martin-Löf produced a proof of the axiom in a constructivist setting bringing together two seemingly incompatible perspectives on this axiom, namely

> Bishop's surprising observation from 1967: *A choice function exists in constructive mathematics, because a choice is implied by the very meaning of existence.*
> The proof by Diaconescu (in 1975) and by Goodman and Myhle (in 1978) that the Axiom of Choice implies Excluded Middle.

In his paper of 2006 Martin-Löf shows that there are indeed some versions of the axiom of choice that are perfectly acceptable for a constructivist, namely one where the choice function is defined *intensionally.* In order to see this the axiom must be formulated within the frame of a CTT-setting. Indeed such a setting allows comparing the extensional and the intensional formulation of the axiom. It is in fact the extensional version that implies Excluded Middle, whereas the intensional version is compatible with Bishop's remark:

> […] *this is not visible within an extensional framework, like Zermelo-Fraenkel set theory, where all functions are by definition extensional.*" (Martin-Löf, 2006, p.349)

In CTT the truth of the axiom actually follows rather naturally from the meaning of the quantifiers:

Take the proposition (∀x: A) P(x) where P(x) is of the type proposition provided x is an element of the set A. If the proposition is true, then there is a proof for it. Such a proof is in fact a function that for every element x of A renders a proof of B(x). This is how Bishop's remark should be understood: the truth of a universal amounts to the existence of a proof, and this proof is a function. Thus, the truth of a universal, amount in the constructivist account, to the existence of a function. From this the proof of the axiom of choice can be developed quite straightforwardly. If we recall that in the CTT-setting

> the existence of a function from A to B amounts to the existence of proof-object for the universal every A is B, and that
>
> the proof of the proposition Bx, existentially quantified over the set A amounts to a pair such that the first element of the pair is an element of A and the second element of the pair is a proof of Bx;

a full-fledged formulation of the axiom of choice – where we make explicit the set over which the existential quantifiers are defined - follows:

$$(\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x,y) \rightarrow (\exists\ f : (\forall x : A)\ Bx)\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$$

The proof of Martin-Löf (1980, p. 50-51) is the following

The usual argument in intuitionistic mathematics, based on the intuitionistic interpretation of the logical constants, is roughly as follows: to prove $(\forall x)(\exists y)C(x,y) \rightarrow (\exists f)(\forall x)C(x,f(x))$, assume that we have a proof of the antecedent. This means we have a method which, applied to an arbitrary x, yields a proof of $(\exists y)C(x,y)$. Let f be the method which, to an arbitrarily given x, assigns the first component of this pair. Then C(x,f(x)) holds for an arbitrary x, and hence, so does the consequent. The same idea can be put into symbols getting a formal proof in intuitionistic type theory. Let A : set, B(x): set (x: A), C(x,y): set (x: A, y: B(x)), and assume z: $(\Pi x: A)(\Sigma y: B(x))C(x,y)$. If x is an arbitrary element of A, i.e. x: A, then by Π- elimination we obtain

$$Ap(z,x): (\Sigma y: B(x))C(x,y)$$

We now apply left projection to obtain

$$p(Ap(z,x)): B(x)$$

and right projection to obtain

$$q(Ap(z,x)): C(x,p(Ap(z,x))).$$

By λ-abstraction on x (or Π- introduction), discharging x: A, we have

$$(\lambda x)\ p(Ap(z,x)): (\Pi x: A)B(x)$$

and by Π- equality

$$Ap((\lambda x)\ p(Ap(z,x), x) = p(Ap(z,x)): Bx.$$

By substitution [making use of *C(x,y): set (x: A, y: B(x)),*] *we get*

$$C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x) = C(x, p(Ap(z,x)))$$

[that is, $C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x) = C(x, p(Ap(z,x))): set$]

and hence by equality of sets

$$q(Ap(z,x)): C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x)$$

where $((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x))$ *is independent of x. By abstraction on x*

$$((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x)): (\Pi x: A)C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x)$$

We now use the rule of pairing (that is Σ- introduction) to get

$$(\lambda x)\ p(Ap(z,x)), (\lambda x)\ q(Ap(z,x)): (\Sigma f: (\Pi x: A)B(x))(\Pi x: A)C(x, Ap(f,x))$$

(note that in the last step, the new variable f is introduced and substituted for $((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x))$ *in the right member). Finally by abstraction on z, we obtain*

$$(\lambda z)((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x)), ((\lambda x)\ q\ (Ap(z,x)): (\Pi x: A)(\Sigma y: B(x))C(x,y) \rightarrow (\Sigma f: (\Pi x: A)B(x))(\Pi x: A)C(x, Ap(f,x)).$$

(For the formal demonstration spelled out as a natural-deduction-tree see appendix III)

Curiously, as pointed out by Jovanovic (2014) if we spell out Hintikka’s own formulation of AC by making explicit at the object language level the domain and codomain of the function involved Martin-Löf’s formulation of AC comes out. Moreover, Hintikka’s remark that the validity of AC results from the fact that a winning strategy for the antecedent amounts to the existence of a suitable function seems to sum up the idea behind the proof displayed above. It is curious since Martin-Löf’s proof is developed within a constructivist setting that Hintikka rejects. Moreover, Martin-Löf (2006) shows that what is wrong with the axiom -from the constructivist point of view - is its extensional formulation – that Hintikka seems to assume. That is:

$(\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x,y) \rightarrow (\exists\ f : (\forall x : A)\ Bx)\ (Ext(f)\ \&\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$

Where $(Ext(f) = ((\forall i,j : A)\ (i =_A j \rightarrow f(i) = f(j))$

Thus, from the constructivist point of view, what is really wrong with the classical formulation of the axiom of choice is the assumption that from the truth that all of the A are B we can obtain a function that satisfies extensionality. In fact, as shown by Martin-Löf (2006), the classical version holds, even constructively, if we assume that there is only one such choice function in the set at stake!:

$(\forall x : A)\ (\exists! y : Bx)\ C(x,y) \rightarrow (\exists\ f : (\forall x : A)\ Bx)\ (Ext(f)\ \&\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$

Let us retain that

- If we take $(\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x,y) \rightarrow (\exists\ f : (\forall x : A)\ Bx)\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$ to be the formalization of the axiom of choice, then that axiom is not only unproblematic for constructivists but it is also a theorem. But this formalization is a full-fledged formulation of the version Hintikka's adopts.[57] Certainly, the point is that the CTT-formulation stresses explicitly that the choice function at stake has been defined by means of intensional equality but Hintikka seems to assume extensionality. In fact it is the CTT-explicit language that allows a fine-grained distinction between the, on the surface, equivalent formulations. This is due to the expressive power of CTT that allows to express at the object language level

[57] Indeed, Martin-Löf's formalization follows from making explicit in Hintikka's formulation $\forall x \exists y\ C(x,y) \rightarrow \exists f \forall x\ C(x,f(x))$ the range of its quantifiers, that is: $\forall x$ quantifies over, say the set A, $\exists y$ quantifies over, say the set Bx, and $\exists f$, over the set $(\forall x : A)\ Bx$.

properties that in other settings are left implicit in the metalanguage. This leads us to the second point

- According to the constructivist approach functions are identified as proof-objects for propositions and are given in *object-language,* as the objects of a certain type. Understood in that way, functions belong to the lowest-level of entities and there is no jumping to higher order. Once more, the truth of a first order-universal sentence, amounts to the existence of a function that is defined by means of the elements of the set over which the universal quantifies and the first-order expression Bx. The existence of such a function is the CTT-way to express at the object language level, that a given universal sentence is true.

Thus, Hintikka is right in defending that we need only first-order language, but this does not really support his attachment to the classical understanding of it. But what about his claim of the importance of a game theoretical interpretation? This takes us to the next chapter.

IIIThe dialogical proof of AC[58]

The dialogical approach to logic is not a specific logical system but rather a rule-based semantic framework in which different logics can be developed, combined and compared. An important point is that the rules that fix meaning are of more than one kind. This feature of its underlying semantics quite often motivated the dialogical framework to be understood as a *pragmatist* semantics.[59] More precisely, in a dialogue two parties

58 The proof stems from Clerbout/Rahman (2014).

59 The main original papers are collected in Lorenzen/Lorenz (1978). For an historical overview see Lorenz (2001). Other papers have been collected more recently in Lorenz (2008, 2010a,b). A detailed account of recent developments since Rahman (1993), can be found in Rahman/Keiff (2005),

argue about a thesis respecting certain fixed rules. The player that states the thesis is called Proponent (**P**), his rival, who contests the thesis is called Opponent (**O**). In its original form, dialogues were designed in such a way that each of the plays end after a finite number of moves with one player winning, while the other loses. Actions or moves in a dialogue are often understood as speech-acts involving *declarative utterances or posits and interrogative utterances or requests*. The point is that the rules of the dialogue do not operate on expressions or sentences isolated from the act of uttering them. The rules are divided into particle rules or rules for logical constants (*Partikelregeln*) and structural rules (*Rahmenregeln*). The structural rules determine the general course of a dialogue game, whereas the particle rules regulate those moves (or utterances) that are requests and those moves that are answers (to the requests).[60]

Crucial for the dialogical approach are the following points:[61]

- The distinction between *local* (rules for logical constants) and *global* meaning (included in the structural rules that determine how to play)
- The player independence of local meaning

Keiff (2009) and Rahman (2012). For the underlying metalogic see Clerbout (2013a,b). For textbook presentations: Kamlah/Lorenzen (1972, 1984), Lorenzen/Schwemmer (1975), Redmond/Fontaine (2011) and Rückert (2011a). For the key role of dialogic in regaining the link between dialectics and logic, see Rahman/Keff (2010). Keiff (2004a,b, 2007) and Rahman (2009) study Modal Dialogical Logic. Fiutek et al. (2010) study the dialogical approach to belief revision. Clerbout/Gorisse/Rahman (2011) studied Jain Logic in the dialogical framework. Popek (2012) develops a dialogical reconstruction of medieval *obligationes*. Rahman/Tulenheimo (2009) study the links between GTS and Dialogical Logic. For other books see Redmond (2010) – on fiction and dialogic – Fontaine (2013) – on intentionality, fiction and dialogues – and Magnier (2013) – dynamic epistemic logic and legal reasoning in a dialogical framework.

60 For a brief presentation of standard dialogical logic see appendix I.

61 Cf. Rahman (2012).

The distinction between the play level (local winning or winning of a play) and the strategic level (existence of a winning strategy).

A notion of validity that amounts to winning strategy *independently of any model* instead of winning strategy for *every* model.

The distinction between non formal and formal plays – the latter notion concerns plays that are played independently of knowing the meaning of the elementary sentences involved in the main thesis.

Recent developments in dialogical logic show that the CTT approach to meaning is very natural to game theoretical approaches where (standard) metalogical features are explicitly displayed at the object language-level.[62] Thus, in some way, this vindicates, albeit in quite of a different manner, Hintikka's plea for the fruitfulness of game-theoretical semantics in the context of epistemic approaches to logic, semantics and the foundations of mathematics. In fact, from the dialogical point of view, those actions that constitute the meaning of logical constants, such as choices, are a crucial element of its full-fledged (local) semantics. Indeed, if meaning is conceived as being constituted during interaction, then all of the actions involved in the constitution of the meaning of an expression should be rendered explicit. They should all be part of the object language. The roots of this perspective are based on Wittgenstein's *Un-Hintergehbarkeit der Sprache* – one of the tenets of Wittgenstein that Hintikka explicitly rejects, a rejection that he shares with the supporters of model-theorical approaches to meaning. Acccording to this perspective of Wittgenstein language-games are purported to accomplish the task of displaying this "internalist feature of meaning". Furthermore, one of the main insights of Kuno Lorenz' (1970, pp. 74-79) interpretation of the relation between the so-called *first* and *second* Wittgenstein is based on a thorough criticism of the metalogical approach to meaning. Similar criticism has been raised by G. Sundholm (1997,

62 Cf. Rahman/Clerbout (2013, 2014), Clerbout/Rahman (2014).

2001) who points out that the standard model-theoretic approaches to meaning turn semantics into a meta-mathematical formal object where syntax is linked to semantics by the assignation of truth values to uninterpreted strings of signs (formulae). Language does not any more *express content* but it is rather conceived as a system of signs that speaks *about* the world - provided a suitable metalogical link between signs and world has been fixed. Moreover, Sundholm (2013) shows that the cases of quantifiers dependences that motivate Hintikka's IF-logic can be rendered in the frame of CTT. What we add to Sundholm's remark is that even the game theoretical interpretation of these dependences can be given a CTT formulation, provided this is developed within a dialogical framework.

In fact, in his 1988 paper, Ranta linked for the first time game-theoretical approaches with CTT. Ranta took Hintikka's Game Theoretical Semantics as a case study. Ranta's idea was that in the context of game-based approaches, a proposition is a set of winning strategies for the player positing the proposition.[63] Now in game-based approaches, the notion of truth is to be found at the level of such winning strategies. This idea of Ranta's should therefore enable us to apply safely and directly methods taken from constructive type theory to cases of game-based approaches.
But from the perspective of game theoretical approaches, reducing a game to a set of winning strategies is quite unsatisfactory, all the more when it comes to a theory of meaning. This is particularly clear in the dialogical approach in which different levels of meaning are carefully distinguished. There is thus the level of strategies which is a level of meaning analysis, but there is also a level prior to it which is usually called the level of plays. The role of the latter level for developing an analysis is, according to the dialogical approach, crucial, as pointed out by Kuno Lorenz in his (2001) paper:

63 That player can be called Player 1, Myself or Proponent.

> [...] *for an entity* [*A*] *to be a proposition there must exist a dialogue game associated with this entity* […] *such that an individual play where A occupies the initial position* […] *reaches a final position with either win or loss after a finite number of moves* [...]

For this reason we would rather have propositions interpreted as sets of what we shall call *play-objects*, reading an expression

$$p : \varphi$$

as "p is a play-object for φ".

Thus, Ranta's work on proof objects and strategies constitutes the end not the start of the dialogical project.

We can present here thoroughly neither standard dialogical logic nor the CTT-version of it. However, the essential features for the understanding of the paper can be found in two appendices that we attach to our article. Now, before developing exhaustively the winning strategy for the intensional axiom of choice let us formulate the idea behind the dialogical approach by emulating Martin-Löf's (1984, p. 50)[64] own presentation of the informal constructive demonstration of it.

From the dialogical point of view the point is that **P** can copy-cat **O**'s choice for y in the antecedent for his defence of $f(x)$ in the consequent since both are equal objects of type $B(x)$, for any $x : A$.

---

64 See too Bell (2009, p. 203-204) who makes use of the notation of Tait (1994) that is very close to that of the instructions of the dialogical frame, provided they occur in the core of strategy – that is, when they occur in those expressions that constitute a winning strategy. Indeed, Tait's functions π and π' corresponds to our left and right instuctions – though we differentiate instructions for each logical constant adding an exponential to identify them. However, we do no have explicitly the function σ of Tait, though the result of the substitution of an instruction with a pair of embedded instructions – what we call it's resolution - will yield the pair of its components.

Thus, a winnings strategy for the implication follows simply from the meaning of the antecedent. This meaning is defined by the dependences generated by the interaction of choices involving the embedding of an existential quantifier in a universal one:

- Let us assume that the Opponent launches an attack on the implication and accordingly posits its antecedent - – the play object for the antecedent being $L^{\rightarrow}(p)$. Let us further assume that with her challenge **O** resolves the instruction $L^{\rightarrow}(p)$, by choosing *v*.

- Then for any $x : A$ chosen by **P**, there must be a play object for the right component of *v* $(R^{\forall}(v)$, occurring in the antecedent.

- However, the play object $R^{\forall}(v)$ (the right component of *v*) is a play object for an existential and is thus composed by two play objects such that the first one $(L^{\exists}(R^{\forall}(v))$, for any $x : A$ is of type $B(x)$. and its right component, is, for any $x : A$, of type $C(x, L^{\exists}(R^{\forall}(v))$.

- Now, let **P** choose precisely the same play object *v* for his defence of the existential in the consequent – the play object for the consequent being $R^{\rightarrow}(p)$. Accordingly, the left play object for the existential in the consequent, is, for any $a : A$, of type $B(x)$. Thus, the left component of the play object for the existential in the consequent is of the same type as the left component of the existential in the antecedent. Moreover, since **P** copies (while defending the existential) the choice of **O** (while resolving $R^{\rightarrow}(p)$) – namely *v* - we are entitled to say that, the left component of the play object for the existential in the consequent is exactly the same in $B(x)$ as the left component of the existential occurring in the antecedent – i.e. $y = v(x) : B(x)$.

- Now, since in the antecedent *y* in *C(x,y)* is of type *B(x)*, for any *x : A*, and since, as already mentioned, *y* is equal to *v(x)* in *B(x)*, then it follows that *C(x,y)* in the antecedent is, for any *x : A*, intensionally equal to *C(x, v(x))* in the type *set.* More generally, and independently of **O**'s particular choice for the play object for the antecedent, and independently of **O**'s particular choice of *x*, *C(x, y)* and *C(x, f(x))* are two equal sets (for any *x : A* and for *y : B(x)*)

From the two last steps it follows that **P** can copy cat the play object for the antecedent into the play object for the consequent, so that provides a winning strategies and the play objects in question are those relevant for the demonstration: one can then say that they are proof objects.

We will only deploy the plays that have been extracted of the extensive tree of all the plays. These plays constitute the so-called core of the strategy (that is, of the dialogical proof)[65], and they are triggered by the Opponent options at move 9 when challenging the existential posited by the Proponent at move 8. Since O's repetition rank is 1, she cannot perform both challenges within one and the same play, hence the distinction between the following two plays. The first play corresponds in the demonstration to the introduction of the universal in the consequent, under the assumption of the antecedent. The second play develops all the points of the informal demonstration described above:

First play: Opponent's 9th move asks for the left play object for the existential quantification on *f*

O			**P**		
	H1: *C(x, y) : set (x : A, y : B(x))* H2: *B(x) : set*			*p* : $(\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	0

65 For the process of their extraction and for the proof that these plays render the corresponding CTT demonstration see Clerbout/Rahman (2014).

	(x : A)				
1	m:= 1			n:= 2	2
3	$L^{\rightarrow}(p)$: $(\forall x : A) (\exists y : B(x)) C(x,y)$	0		$R^{\rightarrow}(p)$: $(\exists f : (\forall x : A) B(x)) (\forall x : A) C(x, f(x))$	6
5	v : $(\forall x : A) (\exists y : B(x)) C(x,y)$		3	$L^{\rightarrow}(p)$ /?	4
7	$R^{\rightarrow}(p)$ /?	6		(v, r) : $(\exists f : (\forall x : A) B(x)) (\forall x : A) C(x, f(x))$	8
9	$L_{?}$	8		$L^{\exists}(v, r)$: $(\forall x : A) B(x)$	10
11	$L^{\exists}(v, r)$ /?	10		v : $(\forall x : A) B(x)$	12
13	$L^{\forall}(v)$: A	12		$R^{\forall}(v)$: $B(w)$	26
15	w : A		13	$L^{\forall}(v)$: /?	14
19	$R^{\forall}(v)$: $(\exists y : B(w)) C(w, y)$		5	$L^{\forall}(v)$: A	16
17	$L^{\forall}(v)$ /?	16		w : A	18
21	(t_1, t_2) : $(\exists y : B(w)) C(w, y)$		19	$R^{\forall}(v)$ /?	20
23	$L^{\exists}((t_1, t_2)$: $B(w)$		21	$L_{?}$	22
25	t_1 : $B(w)$		23	$L^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	24
27	$R^{\forall}(v)$ /?	26		t_1 : $B(w)$	28

Description:

Move 3: After setting the thesis and establishing the repetition ranks **O** launches an attack on material implication.

Move 4: P launches a counterattack and asks for the play object that corresponds to $L^{\rightarrow}(p)$.

Moves 5, 6: O responds to the challenge of 4 . **P** posits the right component of the material implication.

Moves 7, 8: O ' asks for the play object that corresponds to $R^{\rightarrow}(p)$. **P** responds to the challenge by choosing the pair (v, r) where v is the play object chosen to substitute the variable f and r the play object for the right component of the existential.

Move 9: O has here the choice to ask for the left or the right component of the existential. The present play describes the development of the play triggered by the left choice.

Moves 10-26: follow from a straightforward application of the dialogical rules. Move 26 is an answer to move 13, since **P** decided to have enough information to apply the characterstic –copy-cat method imposed by the formal rule.

Move 27-28: **O** asks for the play object that corresponds to the instruction posited by **P** at move 26 and **P** answers and **win**s by applying copy-cat to **O**'s move 25. Notice that 28 this is not a case of function substitution: it is simply the resolution of an instruction.

Second play: Opponent's 9th move asks for the right play object for the existential quantification on *f*

	O			P	
	H1: $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$ H2: $B(x) : set\ (x : A)$			$p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	0
1	m:= 1			n:= 2	2
3	$L^{\rightarrow}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$	0		$R^{\rightarrow}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x,f(x))$	6
5	$v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$		3	$L^{\rightarrow}(p)\ /?$	4
7	$R^{\rightarrow}(p)\ /?$	6		$(v, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	8
9	$R_?$	8		$R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x, L^{\exists}(v, r)(x))$	10
11	$L^{\exists}(v, r)\ /?$	10		$R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$	12
13	$R^{\exists}(v, r)\ /?$	12		$r : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$	14
15	$L^{\forall}(r) : A$	14		$R^{\forall}(r) : C(x, v(w))$	32
17	$w : A$		15	$L^{\forall}(r) : /?$	16
21	$R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))\ C(w,y)$		5	$L^{\forall}(v) : A$	18
19	$L^{\forall}(v)\ /?$	18		$w : A$	20

23	*$(t_1, t_2) : (\exists y : B(x)) C(x ,y)$*		21	$R^{\forall}(v)$ /?	22
25	$L^{\exists}((t_1, t_2): B(w)$		23	$L_?$	24
27	$t_1 : B(w)$		25	$L^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	26
29	$R^{\exists}(t_1, t_2): C(w, t_1)$		23	$R_?$	28
31	$t_2 : C(w, t_1)$		29	$R^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	30
33	$R^{\forall}(r)$ /?	32		$t_2 : C(w, v(w))$	34
35	$v(w)$ /?	34		$t_2 : C(w, t_1)$ $< C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set >$	42
41	$C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set$		H1?$_{subst}$	$v(w) = t_1 : B(w)$	36
37	$v(w) = t_1 : B(w)$?	36		*sic (39)*	40
39	$v(w) = t_1 : B(w)$		5, 18, 21, 25	? $\forall$-*eq.*	38

Description:

Move 9: Until move 9 this play is the same as the previous. In the present play, in move 9 the Opponent chooses to ask for the right-hand side of the existential posited by **P** at 8.

Moves 10-34: the Proponent substitutes the variable *f* by the instruction correspondent to to the left-hand component of the existential, i.e., $L^{\exists}(v, r)$. By this **P** accounts for the dependence of the right-hand part on the left-hand component. The point is that the local meaning of the existential requires this dependence of the right component to the left component even if in this play the Opponent, due to the restriction on rank 1, she can ask only for the right-hand part

The conceptually interesting moves start with 35, where the opponent asks **P** to substitute the function. As already pointed out, in order to respond to 35 the opponent's move 31 is not enough. Indeed the proponent needs also to posit $C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set$. **P** forces **O** to concede this equality (41), on the basis of the substitutions w / x and t_1 / y on H1 (we implemented the substitution directly in the answer of **O**) given the $\forall$-equality $v(w) = t_1$ in $B(w)$ *(36),* and given that this $\forall$- equality yields the required set equality. Moreover, **P**'s posit of the $\forall$-equality (36) is established and defended by moves 38-40.

We can now compose both plays and build up a winning strategy for AC:

H1: $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$
H2: $B(x) : set\ (x : A)$
0. **P** $p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$
1 **O** n : = 1
2. **P** m : = 1
3 **O** $L^{\rightarrow}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$[? 0]
4 **P** $L^{\rightarrow}(p)\ /?$ [? 3]
5 **O** $v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$ [4]
6 **P** $R^{\rightarrow}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x,f(x))$ [3]
7 **O** $R^{\rightarrow}(p)\ /?$ [? 6]
8 **P** $(v, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$ [7]

9 **O** $L_?$ [? 8]
10 **P** $L^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ B(x)$[9]
$L^{\exists}(v, r)(x)$ [9]
11 **O** $L^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 10]
12 **P** $v : (\forall x : A)\ B(x)$ [11]
$: A)\ C(x, v(x))$ [11]
13 **O** $L^{\forall}(v) : A$ [? 12]
14 **P** $L^{\forall}(v) : /?$ [? 13]
13]
15 **O** $w : A$ [14]
16 **P** $L^{\forall}(v) : A$ [? 5]
17 **O** $L^{\forall}(v)\ /?$ [? 16]
18 **P** $w : A$ [17]
19 **O** $R^{\forall}(v) : (\exists y : B(x))\ C(w, y)$ [16]
20 **P** $R^{\forall}(v)\ /?$[? 19]
21 **O** $(t_1, t_2) : (\exists y : B(w))\ C(w, y)$ [20]
$C(w,y)$ [18]

9 **O** $R_?$ [? 8]
10 **P** $R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x,$

11 **O** $L^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 10]
12 **P** $R^{\exists}(v, r) : (\forall x$

13 **O** $R^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 12]
14 **P** $r : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$ [

15 **O** $L^{\forall}(r) : A$ [? 14]
16 **P** $L^{\forall}(r) : /?$ [? 15]
17 **O** $w : A$ [16]
18 **P** $L^{\forall}(v) : A$ [? 5]
19 **O** $L^{\forall}(v)\ /?$ [? 18]
20 **P** $w : A$ [19]
21 **O** $R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))$

22 **P** $L_?$ [? 21]
23 **O** $L^{\exists}((t_1, t_2)\ B(w)$ [22]
$C(w ,y)$ [22]
24 **P** $L^{\exists}(t_1, t_2)$ /? [? 23]
25 **O** $t_1 : B(w)$ [24]
26 **P** $R^{\forall}(v) : B(w)$ [13]
27 **O** $R^{\forall}(v)$ /? [? 26]
28 **P** $t_1 : B(w)$[27]

22 **P** $R^{\forall}(v)$ /? [? 21]
23 **O** $(t_1, t_2) : (\exists y : B(x))$
24 **P** $L_?$ [? 23]
25 **O** $L^{\exists}((t_1, t_2) : B(w)$[24]
26 **P** $L^{\exists}(t_1, t_2)$ /? [? 25]
27 **O** $t_1 : B(w)$ [26]
28 **P** $R_?$ [? 23]
29 **O** $R^{\exists}(t_1, t_2): C(w, t_1)$ [28]
30 **P** $R^{\exists}(t_1, t_2)$ /? [? 29]
31 **O** $t_2 : C(w, t_1)$ [30]
32 **P** $R^{\forall}(r) : C(w, v(w))$ [15]
33 **O** $R^{\forall}(r)$ /? [? 32]
34 **P** $t_2 : C(w, v(w))$ [33]
35 **O** $v(w)$ /? [? 34]
36 **P** $v(w) = t_1 : B(w)$ [? H1]
37 **O** $v(w) = t_1$? [? 36]
38 **P** ? $\forall$-eq [? , 5, 18, 21, 25]
39 **O** $v(w) = t_1 : B(w)$ [38]
40 **P** *sic* [39]
41 **O** $C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set$ [36]
42 **P** $t_2 : C(w, t_1) < C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set >$ [35]

Notation: In order to identify the dialogical source of each move we make use of [? n] to indicate the attacked line and [m] to indicate the challenge of player X that triggered the posited defence of Y

IV Conclusions: Functions as rules of correspondence and functions as interactions

As mentioned in the introduction Coquand (2014) pointed out that recursive functions not only cannot provide a non-circular definition of constructivity, they also are not needed for doing constructive mathematics. What we need is to understand functions as rules of correspondence. Rules of correspondence only make sense if we know how the correspondences are to be carried out and so this supports that the rule-conception of function is the one that leads to the epistemic perspective characteristics of constructivism. Now, let us come once more to what we take to be the positive insights of Hintikka's proposal. Hintikka proposes the idea that the game theoretical interpretation of AC makes its truth evident because of the interplay between the outside-insider reading that is carried out by the interaction of the players. Moreover, Hintikka (2001) seems to think that the rejection of the classical formulation comes from the fact that the constructivists require a notion *of knowing which* or *who, a knowledge of objects*:

> *The crucial notion, in other words, is not knowing that but knowing what (which, who, where, . .).* in brief *knowing + an indirect question, that is, knowledge of objects* (…).. Hintikka (2001), p. 10.
>
> *Now we can also begin to see the relationship between intuitionism and constructivism. The basic difference in fact allows a simple formulation. An intuitionist of the classical variety wants to restrict his or her attention to known mathematical objects. A constructivist wants to restrict his or her attention to effective or otherwise constructible objects. But is this a distinction with difference? More obviously has to be said here. The two coincide if and only if it is a necessary and sufficient condition for a mathematical object like a function to be knowable that it be constructible. Is this perhaps the case?* Hintikka (2001), p. 15.

Hintikka seems here to realize that to define what a constructive function is might be a difficult issue. Further on in that paper he proposes to replace the notion of constructivity by the notion of an effective winning strategy. And with it he means *human playable*. Certainly he seems to fall in the circularity mentioned by Coquand - what does the existential mean in *there exists an effective strategy*? – but we do think that some interesting ideas can be extracted. It looks indeed very tempting to understand rules of correspondence as those that are carried out by players during an interaction. From the dialogical (and more generally from the game theoretical) point of view a function is the result of a player choosing an object of the domain and the defender choosing the suitable match. This can be seen as carrying out a rule of correspondence. However, the problem is that more has to be said to make an intensional function out of these interactions – also extensionality is brought forward by interaction after all. The next task to study in the dialogical framework is to show how to prove extensionality assuming third excluded but no unicity. This study should help to pinpoint the notion of function that results from players' interaction.

Let us finish with two general philosophical issues on the notion of *human-playable games* and the *outside-inside* approach to meaning. The precise links between them are still to be worked out.

(1) From the constructivist point of view, in order to understand a play, and a winning strategy (i.e. a game-theoretical proof) constituted by the relevant plays, it is not enough to know the rules of the game, not even enough to believe that there is a winning strategy behind the moves: what we need is to be able to describe the moves in such a way that it makes understandable their contribution to the winning strategy. A proof beyond our capacities to describe it does not produce knowledge at all. This is what Hintikka's use of Wittgenstein's notion of *human-playable games* amounts to. Moreover, this come very close to some remarks of Poincaré when comparing chess and mathematics:

> *Si vous assistez à un partie d'échecs, il ne vous suffira pas, pour comprendre la partie, de savoir les règles de la marche des pièces. Cela vous permettrait seulement de reconnaître que chaque coup a été joué conformément à ces règles et cet avantage aurait vraiment bien peu de prix. C'est pourtant ce que ferait le lecteur d'un livre de Mathématiques, s'il n'était que logicien. Comprendre la partie, c'est toute autre chose ; c'est savoir pourquoi le joueur avance telle pièce plutôt que telle autre qu'il aurait pu faire mouvoir sans violer les règles du jeu. C'est apercevoir la raison intime qui fait de fait de cette série de coups successifs une sorte de tout organisé. A*

plus forte raison, cette faculté est-elle nécessaire au joueur lui-même, c'est-à-dire à l'inventeur. Poincaré (1905, pp-30-31).[66]

Based in this and other texts Gerhard Heinzmann (1986, 1986, 1995, 1992, 2013) and Michel Detlefsen (1992) develop the idea that Poincaré, while criticizing the purely formal approach to proof in mathematics of those he called the *logicisists*, is aiming at an epistemological approach to proof in mathematics that deserves to call him a pre-intuitionist. From this perspective the criticism of Poincaré to the logical (purely formal) understanding of proof is that their notion of proof is lacking its epistemological role of producing conceptual insight. This takes to the next general philosophical point:

> (2) One further deep remark by Heinzmann and Detlefsen is that Poincaré's epistemological understanding of the role of proof in mathematics is very close to Kant's conception of the role of inference as building the conceptual architectonic of a science. Mathematics, as every science, constitutes a whole structure of concepts, an Architectonic, in Poincarés words "*une sorte de tout organisé"*; and the role of inference is to extend this structure or build new links within it. It is important to notice that this kind of holism might lead us to another important insight of Kant's: it is the judgement that provides the fundamental unit of knowledge, and so the meaning of each substantial

---

66 *If you are present at a game of chess, it will not suffice, for the understanding of the game, to know the rules for moving the pieces. That will only enable you to recognize that each move has been made in conformity with these rules, and this knowledge will truly have very little value. Yet this is what the reader of a book on mathematics would do if he were a logician only. To understand the game is wholly another matter; it is to know why the player moves this piece rather than that other which he could have moved without breaking the rules of the game. It is to perceive the inward reason which makes of this series of successive moves a sort of organized whole. This faculty is still more necessary for the player himself, that is, for the inventor.* Poincaré (2014, pp. 23-24).

expression is derivative from its role in a judgement and not the other way round. As pointed out by Robert Brandom (2000, p. 13)[67] this top-down approach to meaning, that contests the compositional standard model-theoretic semantics, led Gottlob Frege to the formulation of his notorious *contextuality principle* and led Wittgenstein to privilege for his theory of *meaning as use*, those linguistic expressions, namely sentences, that make a move in the language-game. This is, so we claim, the very point and origin of the *outside-inside* approach to meaning provided by the game-theoretical approach. Moreover and more precisely, the dialogical frame shares with the Kantian conception the understanding of the outside-inside approach to meaning as the result of deploying an interplay of entitlements and commitments. To make use again of Brandom 's formulation:

> *Kant takes the judgement to be the minimal unit of experience (and so of awareness in his discursive sense) because it is the first element in the traditional logical hierarchy that one can take* ***responsibility*** *for.* Brandom (2000, p. 13)

Though Hintikka blurs the game-theoretical contribution of the outside-inside approach to meaning by adopting a model theoretical semantics for atomic propositions, his overall ideas on the foundations of mathematics do provide us with an insight that, so we claim, can be deployed by the dialogical perspective. The philosophical task ahead is to study further the links between the outside-inside strategy with the concept of human-playable in the context of the notion of constructivity. We are looking forward to accomplish the task.

[67] In fact this is the main idea that animates the whole project of Brandom's *pragmatist rationalism*.

3.4.2 Interdependencia, instrucciones y el burro apaleado

Discutamos ahora la formulación dialógica del famoso ejemplo del burro apaleado.

Todo hombre que es dueño de un burro lo apalea
(*Every man who owns a donkey beats it*).

Peter Geach [1962, pp. 155-156] introdujo este ejemplo basándose en ciertas discusiones medievales, como una objeción a la propuesta de Richard Montague de la formalización del lenguaje natural.

El problema con este tipo de ejemplos es que el lenguaje estándar de la lógica de primer orden no parece tener los medios para capturar la referencia retroactiva del pronombre "lo". En efecto, es obvio que la siguiente formalización ingenua no funciona

$$\forall x(hombre(x) \wedge \exists y(\ burro(y) \wedge dueño(x, y)) \rightarrow apalea(x, \mathbf{y¿?}))$$

La formalización no funciona pues la segunda ocurrencia de *y* queda libre. Pero extender el alcance del existencial tampoco soluciona el problema:

$$\forall x \exists y(hombre(x) \wedge (\ burro(y) \wedge dueño(x, y) \rightarrow apalea(x, y))$$

Deténgamos un poco en este intento de solución pues pone en evidencia que el problema es la interdependencia de los cuantificadores. Hintikka parece haber sido el primero en proponer esta forma del ver el problema y dar una solución basada en una lectura lúdica en dónde las dependencias de los cuantificadores se traducen en dependencias de jugadas de elección.[68] Siguiendo esta

[68]Para un estudio exhaustivo de la solución lúdica en el cuadro de GTS véase Hintikka/Kulas [1985]. Para un abordaje más reciente véase Hintikka [1997, p. 530].

línea de razonamiento supongamos el siguiente desarrollo (informal) de una partida en la se hace uso de este intento de formalización:

> Hay un hombre, digamos *Pedro*, que es propietario de un burro *b* y un pato *d* (excluyamos también los casos transgénicos: patos no son burros).
> Supongamos también que *Pedro* no apalea ni a *b* ni a *d*.
> Sea la tesis del proponente:
> $\forall x \exists y(hombre(x) \wedge(burro(y) \wedge dueño(x, y) \rightarrow apalea(x, y))$,
> bajo las condiciones mencionadas
>
> Dado que el oponente intenta construir un contraejemplo, y dado que ambos saben que hay al menos un hombre, *Pedro*, que es dueño de un burro, el burro *b*, pero que no lo apalea, y dado que es el oponente quien elige cuando se ataca un universal, el oponente requiere que el proponente considere el caso de *Pedro*. El proponente acepta el caso de *Pedro*, y luego de substituir la variable *x* por *Pedro*, le resta afirmar el existencial resultante:
>
> $\exists y(hombre(Pedro) \wedge(burro(y) \wedge dueño(Pedro, y) \rightarrow apalea(Pedro, y))$
>
> Ahora el oponente pide que el oponente elija uno de los animales de los que *Pedro* es dueño (recuérdese que en el caso del existencial es el defensor quien elige). El astuto proponente no elije en este caso el burro *b* sino el pato *d*. Esta elección produce la siguiente implicación material:
> $(hombre(Pedro) \wedge(burro(d) \wedge dueño(Pedro, d)) \rightarrow (apalea(Pedro, d))$
>
> La única manera que tiene el oponente de atacar la implicación material es conceder el antecedente. Pero el proponente, contratacará inmediatamente, indicando que, de acuerdo a las premisas de la tesis, *d* es un pato y no un burro, y ganará la partida. En realidad, en este caso el proponente tendrá incluso una estrategia ganadora.

En otras palabras, la formalización no es correcta, pues el proponente ganará aún en el caso que haya un burro *b* propiedad de un hombre y éste hombre no apalea a su cuadrúpedo *b*. La razón por la que el proponente gana es que la dependencia entre el cuantificador universal y el existencial, cuando es concebida en un cuadro de interacción dialógica, le permite al proponente elegir de una forma de contra-restar el contraejemplo propuesto por el oponente (en el que se supone que los hombres en cuestión son dueños de más de un animal).

El intento de evitar la elección del proponente reemplazando el cuantificador existencial por un universal, boqueando así la interdependencia entre los cuantificadores, tampoco provee la solución adecuada. En efecto, la formulación

$$\forall x \forall y(\textit{hombre}(x) \wedge (\textit{burro}(y) \wedge \textit{dueño}(x, y) \rightarrow \textit{apalea}(x, y)),$$

es también compatible con el caso en el que todos los hombres dueños de un burro apalean a todos los burros, incluyo aquellos que no son de su propiedad. El error de este intento de solución proviene de otorgar fuerza universal al indefinido *un* de la expresión *un burro*. Es cierto que en el lenguaje natural, a veces el indefinido tiene fuerza universal, pero en el caso que estamos discutiendo no parece que éste sea uno de esos usos.

En realidad, hay un segundo aspecto de la moraleja del segundo intento de formalización: el ejemplo del burro apaleado no solamente nos confronta con el fenómeno de la interdependencia de cuantificadores pero también nos recuerda que en el lenguaje natural la cuantificación restringida es la regla más que la excepción: estamos hablando de burros y no de patos!

Nuestra propia formulación, que combina la interpretación dialógica de la interdependencia entre cuantificadores con la restricción característica de los cuantificadores en TCT, sigue el célebre análisis de Sundholm [1986, pp. 502-503] que es una referencia clásica en la aplicación de la TCT al lenguaje natural. En realidad solo reemplazamos los selectores (más precisamente las proyecciones p y q) usados por Sundholm por instrucciones. De acuerdo a ese análisis comenzamos formalizando *hombre dueño de un burro*:

$$z : (\exists x : \textit{hombre})\ (\exists y : \textit{burro})\ \textit{dueño}(x, y)$$

Dado que el existencial ($\exists y$: *burro*) *dueño*(x, y) es un elemento del conjunto z, es más conveniente usar la notación de separación de conjuntos, en lugar de una formalización que hace uso del cuantificador existencial:

$$z : \{\, x : hombre \mid (\exists y : burro)\ dueño(x, y) \,\}$$

El compuesto izquierdo de z está constituido por (todos aquellos) hombres (que son dueños de un burro). El compuesto derecho de z son aquellos burros (apaleados) que son propiedad de los hombres de la parte determinados por el compuesto izquierdo de z. La idea del análisis subyacente es que hay que establecer la correspondencia adecuada entre hombre y burro apaleado para todo elemento que seleccionemos del conjunto *hombre*. Si ponemos todo este junto resulta la siguiente formalización:

$$(\forall z : \{\, x : hombre \mid (\exists y : burro)\ dueño(x, y) \,\}$$
$$apalea(L^{\{\ldots\}}(z), L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(z)))$$

que es simplemente una versión en notación dialógica de la formulación original de Sundholm [1986, p. 502]:

$$(\forall z : \{x : \mathrm{MAN} \mid (\exists y : \mathrm{DONKEY})\mathrm{OWN}[x ,y]\})$$
$$\mathrm{BEAT}\ [p(z), \mathrm{p}(q(z))]$$

Desarrollemos ahora una partida, cuyo único interés es poner de manifiesto como la versión dialógica interpreta la interdependencia entre variables como determinando una interdependencia entre elecciones (restringidas por el dominio sobre el cual las variables han sido definidas).[69] Dado este objetivo, ignoraremos el rol que tiene la igualdad definicional en hacer explícito los usos de la jugada de espejo. Es más, si bien consideramos que **P** y **O** elijen el

[69] Para un estudio más exahustivo de la anáfora desde el punto de vista dialógico y sus comparaciones con el análisis de Hintikka, véase Jovanovic [2015], y Rahman/Jovanovic/Clerbout [2016].

mismo rango de repetición, no detallamos la partida para cada doble repetición posible de un ataque.
Supondremos también, que las expresiones que intervienen en la tesis están todas bien formadas y desarrollamos el juego a partir de las siguientes concesiones del oponente

1. *H* : set (léase: *H* es del tipo *set*, i.e., *H* es el conjunto de hombres).
2. *B* : set (léase: *B* es del tipo *set*, i.e., *B* es el conjunto de burros).
3. $D(x, y)$: *set* ($x : H, y : B$) (léase: la relación de dueño $D(x, y)$ es del tipo *set*, bajo la hipótesis que *x* sea un elemento de *H* y la hipótesis que *y* sea un elemento de *B*).
4. $A(x, y)$: *set* ($x : H, y : B$) (léase: la relación de apalear $A(x, y)$ es del tipo *set*, bajo la hipótesis que *x* sea un elemento de *H* y bajo la hipótesis que *y* sea un elemento de *B*)
5. $p : (\forall z : \{ x : H \mid (\exists y : B)\ Dxy \} A(L^{\{\ldots\}}(z), L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(z)))$ (léase: *Todo hombre que es dueño de un burro lo apalea*. La notación $A(L^{\{\ldots\}}(z), L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(z)))$ expresa que cada uno de los elementos del compuesto izquierdo del universal – i.e. los hombres dueños de un burro), apalean a los elementos del conjunto que forma el compuesto izquierdo de la derecha del subconjunto $\{ x : H \mid (\exists y : B)\ Dxy \}$ – i.e. a sus propios burros)).
6. $m : H$ (léase: *m* es uno de los elementos de *H*).
7. $b : B$ ((léase: *b* es uno de los elementos de *B*).
8. $p' : D(m, b)$ (léase, el hombre *m* es dueño del burro *b*).

La tesis es trivial: **P** afirma que si **O** concede 1-8, él (**P**) se compromete a defender $A(m, b)$ (léase, el hombre *m* apalea al burro *b*). Como ya dijimos, el objetivo de este ejemplo es mostrar en el contexto del ejemplo de Geach cómo se despliega la combinación del análisis dialógico enriquecido mediante el lenguaje TCT.

	O			P	

I	$! H : \text{set}$				
II	$! B : \text{set}$				
III	$! D(x, y) : set\ (x : H, y : B)$				
IV	$! A(\text{x}, \text{y}) : set\ (x : H, y : B)$				
V	$! p : (\forall \text{z} : \{x : H \mid (\exists y : B)\ D(x, y)\})A(L^{\{\ldots\}}(z), L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z})))$				
VI	$! m : H$				
VII	$! b : B$				
VIII	$! p' : D(m, b)$				
				$! A(m, b)$	0
1	n			$m = n$	2
3	?*play-object*	(0)		$! q : A(m ,b)$	30
25	$! R^{\forall}(p) : A(L^{\{\ldots\}}(\text{z}), L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z})))$		(V)	$! L^{\forall}(p) : \{x : H \mid (\exists y : B)D(x, y)\}$	4
5	$L^{\forall}(p)/?$	(4)		$! z : \{x : H \mid (\exists y: B)D(x, y)\}$	6
7	$?_{\text{L}}$	(6)		$! \text{L}^{\{\ldots\}}(\text{z}) : \text{H}$	8
9	$L^{\{\ldots\}}(\text{z})/?$	(8)		$! \text{m} : \text{H}$	10
11	$?_{\text{R}}$	(6)		$! R^{\{\ldots\}}(\text{z}) : (\exists y : B)\ D(m, y)$	12
13	$R^{\{\ldots\}}(\text{z})/?$	(12)		$! (L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z})), R^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z}))) : (\exists y : B)\ D(m, y)$	14
15	$L^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z}))/?, R^{\exists}(R^{\{\ldots\}}(\text{z}))/?$	(14)		$! (b, p') : (\exists y : B)\ D(m, y)$	16
17	$?_{\text{L}}$	(16)		$! L^{\exists}(b, p') : B$	18

19	$L^{\exists}(R^{\{\dots\}}(z))/?$	(18)		$!\ b : B$	20
21	$?_R$	(16)		$!\ R^{\exists}(b, p') : D(m, b)$	22
23	$R^{\exists}(R^{\{\dots\}}(z))/?$	(22)		$!\ p' : D(m, b)$	24
27	$!\ R^{\forall}(p) : A(m, b)$		(25)	$L^{\{\dots\}}(z)/m, L^{\exists}(R^{\{\dots\}}(z))/b$	26
29	$!\ q : A(m ,b)$		(27)	$R^{\forall}(p)/?$	28

P gana

Descripción:
Jugadas I - VIII: Estas jugadas despliegan las concesiones iniciales de la partida incluyendo la afirmación que constituye la motivación principal de la presente sección.
Jugadas 0- 3: **P** afirma la tesis en 0. En las jugadas 1-2 los jugadores elijen el rango de repetición 2 y uno respectivamente. Cuando afirmó la tesis **P** no especificó objeto lúdico alguno en favor de su tesis. **O** comienza su ataque a la tesis preguntado por tal objeto lúdico (movida 3).
Jugada 4: **P** decide en su jugada 4, con razón, que es más prudente contraatacar la hipótesis V, antes de escoger un objeto lúdico.
Jugada 5 - 24: La partida prosigue sin complicaciones, por la simple aplicación de las reglas locales y estructurales. Todas la jugadas están regidas por la idea de que **O** intentará, por medio de contraataques, evitar hasta el último momento de responder al ataque de **P** (a fin de hacer todo lo posible para no darle una jugada que él pueda copiar por medio de la jugada de espejo). Nótese que **O** no puede poner en cuestión las expresiones elementales de las jugadas 10, 20 y 24, dado que **O** ya las afirmó antes con las concesiones VI – VIII (es la regla formal modificada que le impide hacer esto).
Jugada 25: A esta altura de la partida ya no le queda a **O** más que atacar (como ya mencionamos anteriormente

ignoramos una nueva repetición del ataque, eso solo producirá variantes alfabéticas) y por tanto defiende la parte derecha del universal.

Jugadas 26 - 27: Dado que las instrucciones $L^{\{\dots\}}(z)$ *and* $L^{\exists}(R^{\{\dots\}}(z))$ ya han sido substituidas durante las jugadas 9-10 y 23-24, **P** puede ahora pedir que **O** aplique esas substituciones en la afirmación que resulta de la jugada 25 (recordemos que es la reglas SR4.2 que le permite a **P** pedir esa substitución). **O** responde llevando a cabo en la jugada 27 las substituciones requeridas.

Jugadas 28 - 30: **P** pregunta ahora por el objeto lúdico correspondiente a $R^{\forall}(z)$. La respuesta de **O** le permite a **P** de llevar con su jugada 30 una jugada de espejo. Nótese que es ésta el último de los ataques no aún contestados, por tanto la movida 30, que asegura la victoria de **P**, es totalmente conforme a la regla estructural intuicionista. La victoria está asegurada pues la jugada 30 es en efecto una jugada de espejo, que copia la movida 29 de **O**

El ejemplo ilustra un caso de aplicación en lingüística de la formulación dialógica de la TCT. En los próximos capítulos demostraremos que nuestra formulación refleja lealmente el sistema TCT para la lógica constructiva. Mientras que cumplimos con esta tarea estudiaremos también otro caso notable de aplicación: el caso de la demostración del axioma de elección.

CAPITULO 4.

DE LA ESTRATEGIA GANADORA A LA DEMOSTRACIÓN TCT

We now move to the demonstration of the left-to-right direction of the equivalence result. Let us assume that there is a winning P-strategy in the dialogical game for φ.
We will take the extensive form (section 2.1) of this strategy and present a procedure to extract from it what has been called in Rahman et al. [2009] its *core*.We will show after that how such a core can be transformed into a CTT demonstration of φ.

4.1 El núcleo de una estrategia ganadora

The first step towards our goal is to ignore almost every possible choice of repetition rank for the Opponent. This can be done safely. Indeed,

Assume there is a winning P-strategy in the dialogical game for φ. Let $\mathcal{D}_1(\varphi)$ denote the sub-game where the Opponent chooses her repetition rank to be 1. Then there is a winning P-strategy $s_\star$ in $\mathcal{D}_1(\varphi)$.[50]

Let us call $S_\star$ the extensive form of $s_\star$.

Chapter 3
From dialogical strategies to CTT demonstrations

3.1 Towards the core

3.1.1 Getting rid of infinite ramifications

CAPITULO 5.

EL AXIOMA DE ELECCIÓN DESDE EL PUNTO DE VISTA DIALÓGICO

En el presente capítulo discutiremos la demostración de Martin-Löf del axioma de elección, que le valió el premio *Kolmogorov*, para ilustrar nuestro método de transformación de estrategias dialógicas en demostraciones TCT. Obviamente el interés epistemológico de este ejemplo sobrepasa ampliamente el de servir de ilustración de nuestro algoritmo. Es por ello que comenzaremos con unas consideraciones de orden general que proveen algunos puntos salientes del contexto filosófico relacionados con la demostración del axioma.[70]

5.1 La demostración de Martin-Löf del axioma de elección

Como es bien sabido, Zermelo introdujo el axioma de elección (AC) en 1904 a fin de demostrar el teorema de Cantor sobre buena ordenación. Zermelo propuso dos formulaciones una en 1904 y otra en 1908. Es la segunda formulación que es la más relevante para nuestra discusión:

> *A set S that can be decomposed into a set of disjoint parts A, B, C, ... each of the containing at least one element, possesses at least one subset S_1 having exactly one element with each of the parts A, B, C, ... considered.* (Zermelo, 1908)

El axioma atrajo la atención inmediata de la comunidad científica del momento y ambas formulaciones fueran duramente criticadas por la mayoría de los matemáticos y en particular por los simpatizantes del constructivisismo como René-Louis Baire, Émile Borel, Henri-Léon Lebesgue y por Luitzen Egbert Jan Brower, el

---

[70] Para una discución más exahustiva sobre las consecuencias filosóficas en el contexto de una perspectiva lúdica ver Rahman/Jovanovic/Clerbout [2015].

líder del intuicionismo matemático. En realidad, con su segunda formulación Zermelo intentó presentar una formulación más aceptable del AC. Este intento no prosperó – al menos no al principio. Las primeras objeciones se centraron en su carácter no predicativo del axioma que suponía la existencia de una función sin proveer una prueba constructiva de su existencia. Sin embargo, como tan frecuente en la historia de la ciencias, el AC terminó por ser aceptado. No por razones conceptuales, sino por su rol central en diversas ramas de las matemáticas; Sin él, habría que abandonar resultados muy caros al edificio matemático.

Sorprendentemente Martin-Löf produjo una prueba constructiva del AC que tuvo el efecto de relacionar dos perspectivas aparentemente incompatibles sobre el axioma. A saber:

- La observación de Erret A. Bishop en 1967 que, desde el punto de vista de las matemáticas constructivas, la función acertada por AC existe, dado que una elección se sigue del significado mismo de existencia matemática.

- Las pruebas de Diaconescu (en 1975) y de Goodman/Myhle (enn 1978) de que AC implica el tercero excluido.

El resultado de Diaconescu parece a primera vista contradecir la observación de Bishop, dado que si el AC implica el tercero excluído tal axioma debería ser inaceptable para un constructivista. Sin embargo Martin-Löf discute en su papel de 2006 por qué es que el AC es aceptable para un constructivista. (la demostración misma es mucho anterior, se encuentra ya, por ejemplo en Martin-Löf [1980]). El argumento de Martin-Lôf es doble:

- en primer lugar es la versión intensional del AC que es demostrable desde el punto de vista constructivista, y

- en segundo lugar, hacía falta un lenguaje como el TCT que hiciese posible formular ambas versiones del AC, la intensional y la extensional.[71]

En otras palabras, mientras que la versión intensional es la que corresponde con la observación de Bishop, la version extensional es la que implica el tercero excluído.

En efecto, la verdad del axioma se sigue casi inmediatamente de la versión intensional y de la noción constructiva de quantificador. :

Sea la siguiente formulación intensional del AC

- $(\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x, y) \rightarrow\ (\exists f : (\forall x : A)\ Bx)\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$

Entonces, si el antecedente es verdadero, hay un elemento de prueba para ella. Tal elemento de prueba es un función que transforma todo elemento de *A* en una prueba *B*(*x*). Es así como hay que entenderse la observación de Bishop: la prueba del antecedente implica en efecto la existencia de una función. La prueba de Martin-Löf [1980], p. 50-51) es la siguiente:

> *The usual argument in intuitionistic mathematics, based on the intuitionistic interpretation of the logical constants, is roughly as follows*: *to prove* $(\forall x)(\exists y)C(x,y) \rightarrow (\exists f)(\forall x)C(x,f(x))$*, assume that we have a proof of the antecedent. This means we have a method which, applied to an arbitrary x, yields a proof of* $(\exists y)C(x,y)$*. Let f be the method which, to an arbitrarily given x, assigns the first component of this pair. Then C(x,f(x)) holds for an arbitrary x, and hence, so does the consequent. The same idea can be put into symbols getting a formal proof in intuitionistic type theory. Let A* : *set, B(x)*: *set (x* : *A), C(x,y)*: *set (x*: *A, y* : *B(x)), and assume z*: $(\Pi x : A)(\Sigma y : B(x))C(x,y)$*. If x is an arbitrary element of A, i.e. x*: *A, then by Π- elimination we obtain*

[71] En las palabras de Martin-Löf:
[…] *this is not visible within an extensional framework, like Zermelo-Fraenkel set theory, where all functions are by definition extensional.*" (Martin-Löf [2006], p.349).

$Ap(z,x) : (\Sigma y: B(x))C(x,y)$

We now apply left projection to obtain

$p(Ap(z,x)): B(x)$

and right projection to obtain

$q(Ap(z,x)) : C(x,p(Ap(z,x))).$

By λ-abstraction on x (or Π- introduction), discharging x : A, we have

$(\lambda x)\ p(Ap(z,x)) : (\Pi x: A)B(x)$

and by Π- equality

$Ap((\lambda x)\ p(Ap(z,x), x) = p(Ap(z,x)): Bx.$

By substitution [making use of *C(x,y)*: *set (x*: *A, y* : *B(x)),*] *we get*

$C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x) = C(x, p(Ap(z,x)))$

[that is, $C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x) = C(x, p(Ap(z,x))) : set$]

and hence by equality of sets

$q(Ap(z,x)) : C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x)$

where ((λx) p (Ap(z,x)) is independent of x. By abstraction on x

$((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x)) : (\Pi x : A)C(x, Ap((\lambda x)\ p\ (Ap(z,x), x)$

We now use the rule of pairing (that is Σ- introduction) to get

$(\lambda x)\ p(Ap(z,x)),\ (\lambda x)\ q(Ap(z,x)): (\Sigma f: (\Pi x: A)B(x))(\ \Pi x: A)C(x, Ap(f,x))$

(note that in the last step, the new variable f is introduced and substituted for ((λx) p (Ap(z,x)) in the right member). Finally by abstraction on z, we obtain

(λz)((λx) p (Ap(z,x)), ((λx) q (Ap(z,x)) : (Πx: A)(Σy: B(x))C(x,y)→ (Σf: (Πx: A)B(x))(Πx: A)C(x, Ap(f,x)).

Si desplegamos la prueba como una demostración en deducción natural obtenemos el siguiente árbol.

$(x : A)\ (y : B(x)) \qquad (x : A)$

$C(x, y) : set \qquad B(x) : set \quad A : set \quad z : (\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x, y)^{(1)} \qquad x : A^{(3)}$

-- $\forall E$

$Ap(z, x) : (\exists y : B(x))\ C(x, y)$

----------------------------- $\exists E$

$p(Ap(z, x)) : B(x)$

----------------------------- $\forall I(3)$

$(\lambda x)p(Ap(z, x)) : (\forall x : A)\ Bx \qquad (x : A)$

-- ΠEq $\quad (x : A)\ (y : B(x))$

$Ap(\lambda x)p(Ap(z, x)) = p(Ap(z, x)) : B(x \qquad C(x, y) : set$

-- $Subst$

$C(x, p(Ap(z, x))) = C(x, Ap(\lambda x)p(Ap(z, x)), x)) : set$ **[DER.]**

-- $Set\text{-}Eq$

$q(Ap(z, x) : C(x, Ap(\lambda x)p(Ap(z, x)), x))$

-- $\forall I(3)$

[IZQ.] $(\lambda x)q(Ap(z, x): (\forall x : A)\ C(x, Ap(\lambda x)p(Ap(z, x)), x))$

-- $\exists I$

$((\lambda x)p(Ap(z, x)), (\lambda x)q(Ap(z, x))) : (\exists f : (\forall x : A)\ Bx)\ (\forall x : A)\ C(x, Ap(f, x))$

--- $\rightarrow I(1)$

$(\lambda z)\ ((\lambda x)p(Ap(z, x)), (\lambda x)q(Ap(z, x))) : (\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ Bx)\ (\forall x : A)\ C(x, Ap(f, x))$

ADDENDA:

Por razones de espacio no pudimos presentar todas las ramas del árbol simultáneamente, por ello es presentamos ahora la rama izquierda y la derecha separadamente:

Rama izquierda:

$(x : A)\ (y : B(x)) \qquad (x : A)$

$C(x, y) : set \qquad B(x) : set \quad A : set \quad z : (\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x, y)^{(1)} \qquad x : A^{(2)}$

-- $\forall E$

$Ap(z, x) : (\exists y : B(x))\ C(x, y)$

------------------------------------ $\exists E$

$p(Ap(z, x)) : B(x)$)

----------------------------- $\forall I(2)$

$(\lambda x)p(Ap(z, x)) : (\forall x : A)\ Bx$

Rama derecha:

$$
\begin{array}{l}
\dfrac{\begin{array}{ccccc} \dfrac{(x : A)\ (y : B(x))}{C(x, y) : set} & \dfrac{(x : A)}{B(x) : set} & A : set & z : (\forall x : A)\ (\exists y : Bx)\ C(x, y)^{(1)} & x : A^{(3)} \end{array}}{\dfrac{Ap(z, x) : (\exists y : B(x))\ C(x, y)}{q(Ap(z, x) : C(x, p(Ap(z, x)))} \exists E} \forall E
\end{array}
$$

5.2 Estrategias dialógicas para el axioma de elección

Hintikka's [1996] fue el primero en proponer una lectura lúdica del AC – basada en sus propia teoría semántica de juegos GTS. En realidad Hintikka afirma que la lectura GTS provee una interpretación del AC totalmente aceptable para los constructivistas, y la razón de su rechazo puede expresarse mediante su lógica de la independencia IF (*Independence Friendly Logic*). Jovanovic [2014 y 2015] y Rahman/Jovanovic/Clerbout [2015] observaron que el resultado de Martin-Löf conduce a las siguientes consideraciones:

1) La versión preferida del AC de Hintikka's (una vez que la función relevante es formulada explícitamente) es en efecto aceptable desde el punto de vista constructivista. Más aún, tal versión no involucra una lógica de orden superior y, su interpretación lúdica ofrece un cuadro dinámico para comprender la interdependencia entre cuantificadores. .
2) Sin embargo, tal formulación es intensional. Es la versión extensional la que constituye la interpretación clásica del axioma de Zermelo. Obviamente, si uno parte de la interpretación constructiva de los cuantificadores, no se puede esperar extraer del antecedente del AC la extensionalidad de la función involucrada.
3) Más generalmente, la interpretación lúdica de las relaciones de interdependencia entre cuantificadores puede ser capturada mediante un cuadro dialógico para TCT sin tener que recurrir a un lenguaje formal como el de la IF que no es

ni axiomatizable ni parece tener una teoría de la inferencia adecuada: lógica es inferencia después de todo.

Veamos ahora como desarrollar la interpretación dialógica del AC.

5.2.1 Dos partidas con el AC como tesis

Antes de desarrollar estrategia ganadora para el AC comenzamos con una presentación informal – de manera análoga a la presentación informal de Martin-Löf presentada en la sección anterior – y que pone de relieve la interpretación del AC en términos de interacción.

From the dialogical point of view the point is that **P** can copy-cat **O**'s choice for y in the antecedent for his defence of $f(x)$ in the consequent since both are equal objects of type $B(x)$, for any $x : A$. Thus, a winning strategy for the implication follows simply from the meaning of the antecedent. This meaning is defined by the dependences generated by the interaction of choices involving the embedding of an existential quantifier in a universal one:

- Let us assume that the Opponent launches an attack on the implication and accordingly posits its antecedent – the play object for the antecedent being $L^{\rightarrow}(p)$. Let us further assume that with her challenge **O** resolves the instruction $L^{\rightarrow}(p)$, by choosing v.
- Then for any $x : A$ chosen by **P**, there must be a play-object for the right component of v ($R^{\forall}(v)$, occurring in the antecedent.
- However, the play-object $R^{\forall}(v)$ (the right component of v) is a play-object for an existential and is thus composed by two play-objects such that the first one ($L^{\exists}(R^{\forall}(v))$, for any $x : A$ is of type $B(x)$. and its right component, is, for any $x : A$, of type $C(x, L^{\exists}(R^{\forall}(v))$.
- Now, let **P** choose precisely the same play-object v for his defence of the existential in the consequent – the play-object for the consequent being $R^{\rightarrow}(p)$. Accordingly, the left play-object for the existential in the consequent is, for any $a : A$, of type $B(x)$. Thus, the left component of the play-object for the existential in the consequent is of the same type as the left component of the existential in the antecedent. Moreover, since **P** copies (while defending the existential) the choice of **O** (while

resolving $R^{\rightarrow}(p)$) – namely v - we are entitled to say that the left component of the play-object for the existential in the consequent is exactly the same in $B(x)$ as the left component of the existential occurring in the antecedent – i.e. $y = v(x) : B(x)$.

- Now, since in the antecedent y in $C(x,y)$ is of type $B(x)$, for any $x : A$, and since, as already mentioned, y is equal to $v(x)$ in $B(x)$, then it follows that $C(x,y)$ in the antecedent is, for any $x : A$, intensionally equal to $C(x, v(x))$ in the type *set*. More generally, and independently of **O**'s particular choice for the play-object for the antecedent, and independently of **O**'s particular choice of x, $C(x, y)$ and $C(x, f(x))$ are two equal sets (for any $x : A$ and for $y : B(x)$).

From the two last steps it follows that **P** can copy-cat the play-object for the antecedent into the play-object for the consequent. This is the idea underlying a winning strategy for the Proponent for the Axiom of Choice. Also, these play-objects for antecedent and consequent are the ones relevant for the demonstration: one can then say that they are proof-objects. We will only deploy the plays that have been extracted of the extensive tree of all the plays. These plays constitute the so-called core of the strategy (that is, of the dialogical proof),72 and they are triggered by the Opponent's options at move 9 when challenging the existential posited by the Proponent at move 8. Since **O**'s repetition rank is 1, she cannot perform both challenges within one and the same play, hence the distinction between the following two plays. The first play corresponds in the demonstration to the introduction of the universal in the consequent, under the assumption of the antecedent. The second play develops all the points of the informal demonstration described above:

First play: Opponent's 9th move asks for the left play-object for the existential quantification on *f*

	O			**P**	
	H1: $C(x, y)$: *set* ($x : A$,			$p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f :$	0

72 For the process of their extraction and for the proof that these plays render the corresponding CTT demonstration see Clerbout/Rahman (2015).

	$y : B(x))$ H2: $B(x) : set\ (x : A)$			$(\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	
1	m:= 1			n:= 2	2
3	$L^{\to}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y)$	0		$R^{\to}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	6
5	$v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y)$		3	$L^{\to}(p)$ /?	4
7	$R^{\to}(p)$ /?	6		$(v, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	8
9	$?_L$	8		$L^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ B(x)$	10
11	$L^{\exists}(v, r)$ /?	10		$v : (\forall x : A)\ B(x)$	12
13	$L^{\forall}(v) : A$	12		$R^{\forall}(v) : B(w)$	26
15	$w : A$		13	$L^{\forall}(v)$: /?	14
19	$R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))\ C(w, y)$		5	$L^{\forall}(v) : A$	16
17	$L^{\forall}(v)$ /?	16		$w : A$	18
21	$(t_1, t_2) : (\exists y : B(w))\ C(w, y)$		19	$R^{\forall}(v)$ /?	20
23	$L^{\exists}((t_1, t_2) : B(w)$		21	$?_L$	22
25	$t_1 : B(w)$		23	$L^{\exists}(t_1, t_2)$ /?	24
27	$R^{\forall}(v)$ /?	26		$t_1 : B(w)$	28

Description:

Move 3: After setting the thesis and establishing the repetition ranks **O** launches an attack on material implication.

Move 4: **P** launches a counterattack and asks for the play-object that corresponds to $L^{\to}(p)$.

Moves 5, 6: **O** responds to the challenge of 4. **P** posits the right component of the material implication.

Moves 7, 8: **O** asks for the play-object that corresponds to $R^{\to}(p)$. **P** responds to the challenge by choosing the pair (v, r) where v is the play-object chosen to substitute the variable f and r the play-object for the right component of the existential.

Move 9: **O** has here the choice to ask for the left or the right component of the existential. The present play describes the development of the play triggered by the left choice.

Moves 10-26: follow from a straightforward application of the dialogical rules. Move 26 is an answer to move 13, which **P** makes after he gathered the information the application of the copy-cat method (enclosed in the formal rule) requires.

Move 27-28: **O** asks for the play-object that corresponds to the instruction posited by **P** at move 26 and **P** answers and **win**s by applying copy-cat to **O**'s move 25. Notice that 28 this is not a case of function substitution: it is simply the resolution of an instruction.

Second play: Opponent's 9th move asks for the right play-object for the existential quantification on *f*

O			**P**		
	H1: $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$ H2: $B(x) : set\ (x : A)$			$p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \to (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	0
1	m:= 1			n:= 2	2
3	$L^{\to}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$	0		$R^{\to}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x,f(x))$	6
5	$v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$		3	$L^{\to}(p)\ /?$	4
7	$R^{\to}(p)\ /?$	6		$(v, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$	8
9	$?_R$	8		$R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x, L^{\exists}(v, r)(x)$	10
11	$L^{\exists}(v, r)\ /?$	10		$R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$	12
13	$R^{\exists}(v, r)\ /?$	12		$r : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$	14
15	$L^{\forall}(r) : A$	14		$R^{\forall}(r) : C(x, v(w))$	32
17	$w : A$		15	$L^{\forall}(r) : /?$	16
21	$R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))\ C(w,y)$		5	$L^{\forall}(v) : A$	18
19	$L^{\forall}(v)\ /?$	18		$w : A$	20
23	$(t_1, t_2) : (\exists y : B(w))\ C(x ,y)$		21	$R^{\forall}(v)\ /?$	22
25	$L^{\exists}((t_1, t_2): B(w)$		23	$?_L$	24
27	$t_1 : B(w)$		25	$L^{\exists}(t_1, t_2)\ /?$	26
29	$R^{\exists}(t_1, t_2): C(w, t_1)$		23	$R_?$	28
31	$t_2 : C(w, t_1)$		29	$R^{\exists}(t_1, t_2)\ /?$	30
33	$R^{\forall}(r)\ /?$	32		$t_2 : C(w, v(w))$	34
35	$v(w)\ /?$	34		$t_2 : C(w, t_1)$ $< C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set >$	42
41	$C(w, t_{1)} = C(w, t_1 / v(w)) : set$		H1 $?_{subst}$	$v(w) = t_1 : B(w)$	36
37	$v(w) = t_1 : B(w)\ ?$	36		*sic* (39)	40
39	$v(w) = t_1 : B(w)$		5, 18, 21, 25	$?_{\Pi\text{-eq}}.$	38

Description:

Move 9: Until move 9 this play is the same as the previous one. In the present play, in move 9 the Opponent chooses to ask for the right-hand side of the existential posited by **P** at 8.

Moves 10-34: the Proponent substitutes the variable f by the instruction correspondent to the left-hand component of the existential, i.e., $L^{\exists}(v, r)$. By this **P** accounts for the dependence of the right-hand part on the left-hand component. The point is that the local meaning of the existential requires this dependence of the right component to the left component even if in this play the Opponent, due to the restriction on rank 1, can ask only for the right-hand part.

The conceptually interesting moves start with 35, where the Opponent asks **P** to substitute the function. As already pointed out, in order to respond to 35 the Opponent's move 31 is not enough. Indeed the Proponent needs also to posit $C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w))$ *: set.* **P** forces **O** to concede this equality (41), on the basis of the substitutions w / x and t_1 / y on H1 (we implemented the substitution directly in the answer of **O**) given the *Π-equality* $v(w) = t_1$ in $B(w)$ (36), and given that this *Π-equality* yields the required set equality. Moreover, **P**'s posit of the *Π-equality* (36) is established and defended by moves 38-40.

5.2.2 El núcleo de la estrategia ganadora para el AC

The core of the winning strategy in the dialogical game for the Axiom of Choice consists of the two plays we have just described, written in a linear way and with a ramification when the Opponent can choose between asking for the left and asking for the left at her move 9.

This results in the tree-like structure given on next page. In order to identify the dialogical source of each move we make use of *[? n]* to indicate the attacked line and and *[m]* to indicate the challenge of player **X** that triggered the posited defence of **Y**

O H1*: $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$*

O H2: *$B(x) : set\ (x : A)$*

0\. **P** *$p : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x,y) \rightarrow (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$*

1 **O** n : = 1

2\. **P** m : = 1

3 **O** $L^{\rightarrow}(p) : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$ [? 0]

4 **P** $L^{\rightarrow}(p)\ /?$ [? 3]

5 **O** $v : (\forall x : A)\ (\exists y : B(x))\ C(x, y)$ [4]

6 **P** $R^{\rightarrow}(p) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x,f(x))$ [3]

7 **O** $R^{\rightarrow}(p)\ /?$ [? 6]

8 **P** $(v, r) : (\exists f : (\forall x : A)\ B(x))\ (\forall x : A)\ C(x, f(x))$ [7]

9 **O** $?_L$ [? 8]

10 **P** $L^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ B(x)$[9]

$r)(x)$ [9]

11 **O** $L^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 10]

12 **P** $v : (\forall x : A)\ B(x)$ [11]

$v(x))$ [11]

13 **O** $L^{\forall}(v) : A$ [? 12]

14 **P** $L^{\forall}(v) : /?$ [? 13]

15 **O** $w : A$ [14]

16 **P** $L^{\forall}(v) : A$ [? 5]

17 **O** $L^{\forall}(v)\ /?$ [? 16]

18 **P** $w : A$ [17]

19 **O** $R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))\ C(w, y)$ [16]

20 **P** $R^{\forall}(v)\ /?$[? 19]

21 **O** $(t_1, t_2) : (\exists y : B(w))\ C(w, y)$ [20]

22 **P** $L_?$ [? 21]

23 **O** $L^{\exists}((t_1, t_2)\ B(w)$ [22]

22]

24 **P** $L^{\exists}(t_1, t_2)\ /?$ [? 23]

25 **O** $t_1 : B(w)$ [24]

26 **P** $R^{\forall}(v) : B(w)$ [13]

27 **O** $R^{\forall}(v)\ /?$ [? 26]

28 **P** $t_1 : B(w)$[27]

9 **O** $?_R$ [? 8]

10 **P** $R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x, L^{\exists}(v,$

11 **O** $L^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 10]

12 **P** $R^{\exists}(v, r) : (\forall x : A)\ C(x,$

13 **O** $R^{\exists}(v, r)\ /?$ [? 12]

14 **P** $r : (\forall x : A)\ C(x, v(x))$ [13]

15 **O** $L^{\forall}(r) : A$ [? 14]

16 **P** $L^{\forall}(r) : /?$ [? 15]

17 **O** $w : A$ [16]

18 **P** $L^{\forall}(v) : A$ [? 5]

19 **O** $L^{\forall}(v)\ /?$ [? 18]

20 **P** $w: A$ [19]

21 **O** $R^{\forall}(v) : (\exists y : B(w))\ C(w,y)$ [18]

22 **P** $R^{\forall}(v)\ /?$ [? 21]

23 **O** $(t_1, t_2) : (\exists y : B(w))\ C(w\ ,y)$ [

24 **P** $?_L$ [? 23]

25 **O** $L^{\exists}((t_1, t_2) : B(w)$[24]

26 **P** $L^{\exists}(t_1, t_2)\ /?$ [? 25]

27 **O** $t_1 : B(w)$ [26]

28 **P** $?_R$ [? 23]

29 **O** $R^{\exists}(t_1, t_2): C(w, t_1)$ [28]

30 **P** $R^{\exists}(t_1, t_2)\ /?$ [? 29]

31 **O** $t_2 : C(w, t_1)$ [30]
32 **P** $R^{\forall}(r) : C(w, v(w))$ [15]
33 **O** $R^{\forall}(r)$ /? [? 32]
34 **P** $t_2 : C(w, v(w))$ [33]
35 **O** $v(w)$ /? [? 34]
36 **P** $v(w) = t_1 : B(w)$ [? H1]
37 **O** $v(w) = t_1$? [? 36]
38 **P** $?_{\Pi\text{-}eq}$ [? , 5, 18, 21, 25]
39 **O** $v(w) = t_1 : B(w)$ [38]
40 **P** *sic* [39]
41 **O** $C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set$ [36]
42 **P** $t_2 : C(w, t_1) < C(w, t_1) = C(w, t_1 / v(w)) : set >$ [35]

According to Hintikka, the following formulation of the Axiom of Choice,

$$\forall x \exists y\, C(x,y) \rightarrow \exists f \forall x\, C(x,f(x))$$

(where it is left implicit that $\forall x$ quantifies over, say the set A, $\exists y$ quantifies over, say the set B, and $\exists f$, over the set $(\forall x : A)\, Bx$)

is perfectly acceptable for the constructivists. Let us recall, that the GTS reading of its truth amounts to the existence of winning strategy for Eloise in a game G ($\forall x \exists y\, C(x,y)$). The latter amounts to finding a "witness individual" y dependent upon x, such that $C(x,y)$ is true – notice how close this formulation is to Martin-Löfs "informal" description of the proof of the axiom. In other words, the existence of a winning strategy for that game provides *a proof that the proposition S(x,y) is true in the model* (Hintikka, 1996a, ch 2). Hintikka claims that it is the GTS reading that makes the Axiom of Choice acceptable for the constructivists:

> *Moreover, the rules of semantical games should likewise be acceptable to a constructivist. In order to verify an existential sentence $\exists xS[x]$ I have to find an individual b such that I can (win in the game played with) S[b]. What could be a more constructivistic requirement than that? Likewise, in the verification game $G(S_1 \vee S_2)$ connected with a disjunction $(S_1 \vee S_2)$, the verifier must choose S_1 or S_2 such that the*

game connected with it (i.e., $G(S_1)$ or $G(S_2)$) can be won by the verifier. Again, there does not seem to be anything here to alienate a constructivist. (Hintikka, 1996a, p. 212)

As mentioned above Hintikka is right, this is acceptable for the constructivists, but the reason is the underlying intensionality of the choice function and this assumes an underlying intuitionistic and not a classical logic as Hintikka was aiming at. An alternative option is to formulate the constructivist version of Axiom of Choice in an IF-setting. In such a setting the rejection of the constructivists is rendered as the rejection of the de re occurrence of the choice function in the consequent. The price to pay is known: the resulting formal system is not axiomatizable. This is a too high price, given that its truth can be made evident with the means of CTT.73 Moreover, the IF-reconstruction of the version of the Axiom of Choice rejected by the constructivist is not equivalent to the third-excluded. Hence, the IF-reconstruction is really changing the subject at stake.

Hintikka's intention was to offer a realist foundation of mathematics on a first-order level in a way that all classical mathematics can be comprised and that it can still be acceptable for a constructivist. As pointed out by Göran Sundhom (2013a), under constructivist reading IF logic is granted to be a first-order logic, but in that case not all of the classical mathematics can be saved. However, as we think we have shown in this section, a game-theoretical interpretation that meets the epistemic requirements of the constructivists is possible, but this produces a dialogical version with an antirealist approach to meaning rather than a GTS interpretation with an underlying model of formal semantics. In fact, the point of Hintikka, is still a valuable one, the winning strategy of a universal quantifier is a function, such that, if there is an existential embedded in the universal expression; the verifier will make his choices (for the existential) dependent upon the ones of the falsifier. This is what the constructive reading is about.

73 Cf. Jovanovic (2014).

Moreover, Hintikka's point can be carried out precisely in a language that allows those *dependent proof-objects* (i.e. functions) to be expressed at the object language level of first-order logic: the functions are in fact nothing more than the truth-makers (proof-objects/winning-strategies) of the corresponding first-order expressions.

5.3 De la estrategia ganadora a la demostración del AC

Authors

Nicolas Clerbout

Shahid Rahman is full professor for logic and epistemology at the University of Lille since 2001. He gathered a Masters in Philosophy, Mathematics and Philology (Erlangen-Nürnberg), a PhD in philosophy (on game-theoretical foundations for constructive logic and category theory), cognitive psychology and philology, and an Habilitation in Philosophy (both at Univ. Saarland –Germany) Awarded by the French ministry of education with the level of *Professeur de la classe exceptionnelle in Philosophy.* Director of the research MESHS-project ADA, that unifies 19-research laboratories in the Humanities and Social Sciences of Nord-Pas de Calais (France). Co-founder of the research network LACTO (Langage, Argumentation et Cognition dans les Traditions Orales), that federates more than 10 African Universities. He edits two book series in Springer (LEUS and LAR) and three more in College Publications. His main researches concern philosophy and history of logic and epistemology with special emphasis on game-theoretical approaches. He is editor of the Springer-Book-Collections *Logic, Epistemology and the Unity of Sciences* (LEUS) and *Logic, Argumentation and Reasoning. Perspectives from the Humanities and the Social Sciences* (LAR); and of the College Publications collections *Cahiers de Logique et Epistémologie*, *Cuadernos de Lógica*, *Epistemología y Lenguaje*, Dialogues. .

https://univ-lille3.academia.edu/ShahidRahman

Bibliographie

Aho T. & Pietarinen A.V. [2006]: *Truth and Games. Essays in Honour of Gabriel Sandu*, Acta Philosophica Fennica, Helsinki.

Barth E. M. & Krabbe E. C. W. [1982]: *From Axiom to Dialogue. A Philosophical Study of Logic and Argumentation*, de Gruyter, Berlin.

Bencivenga E. [1983]: "Free Logics". In D. M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. III, D. Reidel, Dordrecht. pp. 373-426.

Blackburn P. [2000]: "Representation, Reasoning, and Relational Structures: a Hybrid Logic Manifesto" *Logic Journal of the IGPL* , 8(3), 339-625.

Blackburn P. [2001]: "Modal logic as dialogical logic", in S. Rahman & H. Rückert (2001b), pp. 57-93.

Blass A. [1992]: "A Game Semantics for Linear Logic" in *Annals of Pure and Applied Logic*, **56**, pp. 183-220.

Blass A. [1998]: "Some Semantical Aspects of Linear Logic", *J. Interest Group in Pure and Applied Logic*, **5,** pp. 115-126.

Felscher W. [1985]: "Dialogues as a foundation for intuitionistic logic". In *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 3., D.Gabbay and F. Guenthner (eds.), Kluwer, Dordrecht.

Geach, P. [1962]: *Reference and Generality*: *An Examination of Some Medieval and Modern Theories*., Cornell University Press, Ithaca/New York.

Girard J.Y. [1999]: "On the meaning of logical rules I: syntax vs. semantics", *Computational Logic*, in Berger and Schwichtenberg (eds.), Springer, Heidelberg, pp. 215-272.

Haas G. [1980]: "Hypothesendialoge, konstrucktiver Sequenzenkalkül une die Rechtfertigung von Dialograhmenregeln", in *Theorie des wissenschaftlichen Argumentierens*, Suhrkamp Verlag, Frankfurt.

J. Hintikka (1962). *Knowledge and Belief*. Ithaca: Cornell University Press.

J. Hintikka (1973). *Logic, Language-Games and Information*: *Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford: Clarendon Press.

J. Hintikka (1996a). *The Principles of Mathematics Revisited*. Cambridge: Cambridge University Press.

J. Hintikka (1996b). *Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator*: *An Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy,* Dordrecht: Kluwer.

J. Hintikka (1997). *Defining Truth, the Whole Truth and Nothing but the Truth*. Helsinki: University of Helsinki - Reports from the Department of Philosophy, no. 2.

J. Hintikka (1999). *Inquiry as Inquiry*: *A Logic of Scientific Discovery*. Dordrecht: Springer.

J. Hintikka and J. Kulas (1985). *Anaphora and Definite Descriptions, Two Applications of Game- Theoretical Semantics.* Dordrecht/Boston/Lancaster: D. Reidel.

J. Hintikka and G. Sandu (1989). "Informational Independence as a Semantical Phenomenon". In J. E. Fenstad, I. T. Frolov, and R. Hilpinen (eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, Amsterdam: Elsevier, vol.8, pp. 571–589.

J. Hintikka and G. Sandu (1997). "Game-theoretical semantics". In J. van Benthem and A. ter Meulen, (eds.), *Handbook of Logic and Language*, Amsterdam: Elsevier, pp. 361–410.

J. Hintikka, I. Halonen and A. Mutanen (1999). "Interrogative Logic as a General Theory of Reasoning". In Hintikka (1999), pp. 47–90.

Keiff L. [2004]: "Heuristique formelle et logiques modales non normales" in *Philosophia Scientiae* , vol. **8-2**, pp. 39-59, Paris, Kimé.
Keiff L. [2006]: „Dialogocal Logic“, text en ligne: *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
Lorenz K. [1961]: *Arithmetik und Logik als Spiele*, Diss, Kiel.
Lorenz K. [2001]: "Basin Objectives of Dialogue Logic in Historical Perspective", in S. Rahman & H. Rückert [2001b], pp. 255-263.
Lorenzen P. [1955]: *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
Lorenzen P. [1958]: “Logik und Agon”, *Arti del XII Congresso Internationale de Filosofia*, Venezia. pp. 187–194. (Reprinted in Lorenzen and Lorenz [1978].)
Lorenzen P. and Lorenz K. [1978]: *Dialogische Logik*. WBG, Darmstadt.
Perelman C. & Olbrechts-Tyteca L. [1958]: *La Nouvelle Rhétorique*, PUF, Paris.
Prakken H. [2005]: "Coherence and flexibility in dialogue games for argumentation". *Journal of Logic and Computation*, **15**, pp. 1009-1040.
Read S. [1994]:*Thinking about logic. Oxford*, Oxford University Press.
Rahman S. [1993]: *Ueber Dialogue Protologische Kategorien und andere Seltenheiten*, Peter Lang, Frankfurt, pp. 88-107.
Rahman S. [2001]: “On Frege’s Nightmare. A Combination of Intuitionistic, Free and Paraconsistent Logics”. In H. Wansing (ed.), *Essays on Non-Classical Logic*, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Hong Kong, pp. 61-85.
Rahman S. [2002]: " *Non-normal Dialogics for a wonderful world and more* " to appear in *Philosophical Insights into Logic and Mathematics*, G. Heinzmann (ed.), LEUS, Springer, Dordrecht.
Rahman S. & van Bendegem J.P. [2002]: “The dialogical dynamics of adaptive paraconsistency”. In A. Carnielli, M. Coniglio, I. M. Loffredo D’Ottaviano (eds.), Paraconsistency, the dialogical way to the inconsistent, Marcel Dekker, New York. pp. 295-sq.
Rahman S. & Carnielli W. A. [2000]: “The Dialogical Approach to Paraconsistency”. *Synthese*, **125**, No. 1-2. pp. 201-232.
Rahman S., Damien L. & Gorisse M.H. [2004]: " La dialogique temporelle ou Patrick Blackburn par lui même".
Rahman S. & Keiff L. [2004]: "On how to be a dialogician". In D. Vanderveken (Ed.) *Logic, Thought and Action*, Springer, Dordrecht, pp. 359-408.
Rahman S. [2004]: *Dialogique Standard*: *Notions fondamentales*,
texte en ligne: http://stl.recherche.univ-lille3.fr/sitespersonnels/
rahman/rahmancourscadre4.html
Rahman S. & Rückert H. [2001a]: "Dialogical Connexive Logic" in S. Rahman & H. Rückert [2001b], pp. 105-139.
Rahman S. & Rückert H. [2001b]: "New Perspectives in Dialogical Logic", special issue of *Synthese*, **127**.
Rahman S. & Tulenheimo T. [2006]: “From Games to Dialogues and Back: Towards a General Frame for Validity”, O. Majer/A. Pietarinen/T. Tulenheimo (ed.), *Games*: *Unifying Logic, Language and Philosophy*, Part III, LEUS, Springer, Dordrecht.
Restall G. [2000]: *An Introduction to Substructural Logics* , Routledge, Oxford.
Restall G. [2002]: "Carnap's Tolerance, Meaning and Logical Pluralism", Journal of Philosophy, **99**, 426–443.
Saarinen E. [1978]: "Dialogue Semantics versus Game-Theoretical Semantics". In *Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association* (PSA), Vol. 2: *Symposia and Invited Papers*. The University of Chicago Press, 41-59.
Stegmueller W. [1964]: "Remarks on the completeness of logical systems relative to the validity of concepts of P. Lorenzen and K. Lorenz". *Notre Dame Journal of Formal Logic*, **5**, pp. 81-112.
Toulmin S. [1958]: *The Uses of Argument*. Cambridge University Press, Cambridge.
Wittgenstein L., [1953]: *Philosophical Investigations*, Oxford, Blackwell Publishing.
Woods J. , Irvine A. & Walton D. [2000]: *Argument*: *Critical Thinking Logic and The Fallacies*, Prentice-Hall, Toronto.

Bibliography de Shahid

Carnap, R. “Modalities and Quantification”. *Journal of Symbolic Logic*, vol. 11, 1946, 33-64.
Copeland, J. B. “Meredith, Prior and the History of Possible World Semantics”. *Synthes*e, vol. 150/3, June 2006, 373-397.

Kanger, S. “The Morning Star Paradox”. *Theoria*, vol. 23, 1957a, 1-11.
Kanger, S. *Provability in Logic*. Almqvist and Wiksell: Stockholm, 1957b.
Blackburn **P**. "Modal logic as dialogical logic". In S. Rahman and H. Rückert [2001], 2001, 57-93.
Blackburn **P**., de Rijke M., and Venema Y, *Modal Logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
Creswell M. J. "Intensional logics and truth". *Journal of Philosophical Logic*, vol. 1, 2-15, 1972.
Church, A. 1940. A formulation of a simple theory of types. *Journal of Symbolic Logic*, 5.
Fitting M. *Proof Methods for Modal and Intuitionistic Logic*, D. Reidel, Dordrecht, 1983.
Fitting M. and Mendelsohn R. L. *First-Order Modal Logic*, Dordrecht, Kluwer; 1998.
Frege Ueber Sinn und Bedeutun, in g
Girle R. "Epistemic logic; language and concepts". *Logique et Analyse*, vol. 63-64, 359-373, 1973.
Girle R. *Modal Logics and Philosophy*, Montreal, McGill-Queen's University Press, 2000.
Grattan-Guinness, I. "Are other logics possible? MacColl's logic and some English reactions, 1905-1912". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, 1-16.
Hintikka J. “Impossible Possible Worlds Vindicated”. *Journal of Symbolic Logic*, 4, 1975, pp. 475-484; modified and reedited in Hintikka J. and M.B., *The Logic of Epistemology and the Epistemology of Logic*, Dordrecht, Kluwer, 63-72, 1989.
Husserl; Logical investigation
Husserl, E., 1929, Formal and Transcendental Logic, M. Nijhoff, The Hague (1978).
Kripke S., "Semantical Analysis of Modal Logic II; non-normal modal propositional calculi." In J. W. Addison et alia (eds), *The Theory of Models*, Amsterdam, N. Holland, 202-220, 1965.
Lorenzen **P**. “Logik und Agon”. *Arti del XII Congresso Internationale de Filosofia*, Venezia. 187–194, 1958. (Reprinted in Lorenzen and Lorenz, 1–8 1978.)
Lorenzen **P**. and Lorenz K. *Dialogische Logi*k. WBG, Darmstadt, 1978.
McCall S., *Aristotle's Modal Syllogisms*. Amsterdam: North-Holland, 1963.
McCall S., "MacColl". In: **P**. Edwards (Ed.): *The Encyclopedia of Philosophy*, London: Macmillan, Vol. 4, 545-546, 1967
MacColl H. *Symbolic Logic and its applications*, London, 1906.
Plato, Parmenides
Priest G. "What is a Non-Normal World? *Logique et Analyse*, vol. 139-140, 291-302, 1992.
Priest G. "Editor's introduction". Special issue on "Impossible Worlds" of the *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 3/1, 481-487, 1998.
Priest G. *An Introduction to Non-Classical Logic*. Cambridge, Cambridge University Press, 2001.
Rahman; S."Hugh MacColl – eine bibliographische Erschliessung seiner Hauptwerke und Notizen zu ihrer Rezeptionsgeschichte". *History and Philosophy of Logic*, vol. 18, 165-183, 1997.
Rahman; S. "Ways of understanding Hugh MacColl's concept of symbolic existence". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, 35-58.
Rahman; S. "Hugh MacColl and George Boole on Hypotheticals". In J. Gasser (ed.), *A Boole Anthology*, Dordrecht, Synthese-Library Kluwer, 287-310, 2000.
Rahman S. and Keiff L. "On how to be a dialogician", to appear in D. Vandervecken (ed.), *Logic and Action*, Dordrecht, Kluwer, 2003.
Rahman S. and Rückert H. (eds.) “New Perspectives in Dialogical Logic”. Special issue of *Synthèse*, 127, 2001.
Rahman S. and Rückert H. “Dialogische Modallogik (für T, B, S4, und S5)”. *Logique et Analyse*, vol. 167-168. 243-282, 2001a.
Rantala V. “Urn Models: a new kind of non-standard model for first-order logic.” *Journal of Philosophical Logic*, 4, 455-474, 1975.
Read S. "Hugh MacColl and the algebra of implication". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, vol. 3, 1, 1998, 59-84.
Read S. *Thinking About Logic*. Oxford, Oxford University Press, 1994.
Restall G. "Simplified Semantics for Relevant Logics (and Some of their Rivals)", *Journal of Philosophical Logic*, vol. 22, 481-511, 1993.

Routley R, Pluwood V., Meyer R. K. and Brady R. *Relevant Logics and their Rivals,* Atascadero, Ridgeview, 1982.
Wittgenstein, Tractatus
Wolenski I. "MacColl on Modalities ". *Nordic Journal of Philosophical Logic,* vol. 3, 1, 1998, 133-140.

La Genalogía Dialógica de la Igualdad
Identidad como Interacción y la noción de Igualdad en la Teoría Constructiva de Tipos

Shahid Rahman♣ **Nicolás Clerbout y Juan Redmond**♦

Université de Lille, UMR 8163: STL, MESHS-Lille-ADA : LACTO[74]

EN AZUL LO QUE YO TOME DE TONK EN ROJO LO QUE AGREGE EN ESPANIOL en verde las reglas nuevas en la que cambié lo que empezamos con nico
en violeta modificaciones importantes, tal vez tengan algunas de ellas que ser implementadas en la versión corta del articulo

I. Introduction

The question about the nature of the notion of identity is an old and venerable one and, in the western tradition the history of its written sources takes us from Parmenides' famous poem and its challenge by Heraclitus, to the discussions of Plato and Aristotle, up to the puzzles of Frege and Wittgenstein,[75] and the introduction of the notation " = " for it by Robert Recorde in 1557:

> *And to avoide the tediouse repetition of these woordes* : *is equalle to* : *I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus* : =, *bicause noe 2 thynges, can be moare equalle.*[76]

From the very start different pairs of concepts were linked to identity and puzzled the finest minds, such as numerical (or extensional) identity – qualitative identity (or intensional), ontological principle – logical principle, real-definition – nominal definition and on top of these pairs the relation between sign and object. The following puzzling lines of Plato's *Parmenides* contain already the core of many of the discussions that took place long after him:

> *If the one exists, the one cannot be many, can it? No, of course not* […].*Then in both cases the one would be many, not one." "True." "Yet it must be not many, but one." "Yes."* (Plato, *Parmenides*, 137c-d)

Hegel takes the tension between the one and many mentioned by Plato as constitutive of the notion of identity. Moreover, Hegel defends the idea that the concept of identity, conceived as the fundamental law of thought, if it should express more than a tautology, must be understood as a principle that comprehends both the idea of identical (that expresses reflexive cases of the principle) and the idea of different (that expresses non-reflexive cases). Hegel points out that expressions such as $A = A$ have a "static" character empty of meaning – presumably in contrast to expressions such as $A = B$:

> *In its positive formulation* [as the **first law of thought**] , *A = A, this proposition is at first no more than the expression of empty tautology. It is rightly said, therefore, that this law of thought is without content and that it leads nowhere. It is thus to an empty identity that they cling, those who take it to be something true, insisting that identity is not difference but that the two are different. They do not see that in saying, "Identity is different*

♣ Université de Lille, UMR: 8163 STL, ADA-MESH (NpdC).

♦ Instituto de Filosofía, Universidad de Valparaíso. Los resultados presentados en este artículo fueron obtenidos en el marco del proyecto Fondecyt Regular N° 1141260.

74 The present paper is part of an ongoing project in the context of the research-program *Argumentation, Decision, Action* (ADA) and the project *Logique, Argumentation et Cognition dans les Traditions Orales* (LACTO) both supported by the *Maison Européenne des Sciences de l' Homme et de la Société* - USR 318 and by the laboratory UMR 8163: STL.

75 Quite often Plato's dialogue Theaetetus (185a) is mentioned as one of the earliest explicit uses of the principle.

76 Recorde (1577). There are no page numbers in this work, but the quoted passage stands under the heading "The rule of equation, commonly called Algebers Rule" which occurs about three quarters into the work. The quote has been overtaken from Granström (2011), p. 33.

> *from difference," they have thereby already said that identity is something different. And since this must also be conceded as the nature of identity, the implication is that to be different belongs to identity not externally, but within it, in its nature. – But, further, inasmuch as these same individuals hold firm to their unmoved identity, of which the opposite is difference, they do not see that they have thereby reduced it to a one-sided determinateness which, as such, has no truth. They are conceding that the principle of identity only expresses a one-sided determinateness, that it only contains formal truth, truth abstract and incomplete. – Immediately implied in this correct judgment, however, is that the truth is complete only in the unity of identity and difference, and, consequently, that it only consists in this unity* . (Hegel (2010), 1813, Book 2, Vol. 2, II.258, 2nd remark, p. 358).[77]

What Hegel is going after, is that the clue for grasping a conceptually non-empty notion of identity lies in the understanding the links of the reflexive with the non-reflexive form and vice-versa.

The history of studies involving this interplay, before and after Hegel, is complex and rich. Let me briefly mention in the next section the well-known "linguistic" approach to the issue that followed from the work of Gottlob Frege and Ludwig Wittgenstein, that had a decisive impact in the logical approach to identity.

I.1 Intensional and extensional equality at the propositional level:

One of the most influential studies of the relation between sign and object as involving the (dyadic) equality-predicate expressed at the propositional level was the one formulated in 1892 by Gottlob Frege in his celebrated paper *Über Sinn und Bedeutung*. The paper starts by asking the question: Is identity a relation? If it is a relation, is it a relation between objects, or between signs of objects. To take the notorious example of planet Venus, *the morning star = the morning star* is a statement very different in cognitive value from *the morning star = the evening star*. The former is analytically true, while the second records an astronomical discovery. If we were to regard identity as a relation between what the sign stands for it would seem that if $a = b$ is true, then $a = a$ would not differ form $a = b$. *A relation would thereby be expressed of a thing to itself, and indeed one in which each thing stands to itself but to no other thing*. (Frege, *Über Sinn und Bedetung,* pp. 40-42). On the other hand if every sentence of the form $a = b$ really signified a relationship between symbols, it would not express any knowledge about the extra-linguistic world. The equality *morning star = the evening star* would record a lexical fact rather than an astronomical fact, Frege's solution to this dilemma is the famous difference between the way of presentation of an object, called its *sense* (*Sinn*) and the *reference* (*Bedeutung*) of that object. In the equality *the morning star = the evening star* the reference of the two expressions at each side of the relation is the same, namely the planet Venus, but the sense of each is different. This distinction allows Frege the following move: a statement of identity can be informative only if the difference between signs corresponds to a difference in the mode of presentation of the object designated (Frege, *Über Sinn und Bedeutung,* p. 65): that is why, according to Frege, $a = a$ is not informative but $a = b$ is.

---

77 *Der Satz der Identität* [**als das erste Denkgesetz**] *in seinem positiven Ausdrucke A=A, ist zunächst nichts weiter, als der Ausdruck der leeren Tautologie. Es ist* daher *richtig bemerkt worden, daß dieses Denkgesetz ohne Inhalt sey und nicht weiter führe. So ist die leere Identität, an welcher diejenigen festhangen bleiben, welche sie als solche für etwas Wahres nehmen und immer vorzubringen pflegen, die Identität sey nicht die Verschiedenheit, sondern die Identität und die Verschiedenheit seyen verschieden. Sie sehen nicht, daß sie schon hierin selbst sagen, daß die Identität ein Verschiedenes ist; denn sie sagen, die Identität sey verschieden von der Verschiedenheit; indem dieß zugleich als die Natur der Identität zugegeben werden muß, so liegt darin, daß die Identität nicht äußerlich, sondern an ihr selbst, in ihrer Natur dieß sey, verschieden zu seyn. - Ferner aber indem sie an dieser unbewegten Identität festhalten, welche ihren Gegensatz an der Verschiedenheit hat, so sehen sie nicht, daß sie hiermit dieselbe zu einer einseitigen Bestimmtheit machen, die als solche keine Wahrheit hat. Es wird zugegeben, daß der Satz der Identität nur eine einseitige Bestimmtheit ausdrücke, daß er nur die formelle eine abstrakte, unvollständige Wahrheit enthalte. - In diesem richtigen Urtheil liegt aber unmittelbar, daß die Wahrheit nur in der Einheit der Identität mit der Verschiedenheit vollständig ist, und somit nur in dieser Einheit bestehe.* (Hegel (1999), 1813, Teil 2, Buch II; II.258, pp. 29-30).

In the *Tractatus Logico-Philosophicus* Ludwig Wittgenstein, who could be seen as addressing Hegel's remark quoted above, adds another twist to Frege's analysis:

> 5.53 Identity of object I express by identity of sign; and not by using a sign for identity. Difference of objects I express difference of signs
> 5.5301 Obviously, identity is not a relation between objects …
> 5.5303 By the way, to say of two things that they are identical is nonsense, and to say of one thing that it is identical with itself is to say nothing at all
> (Wittgenstein; *Tractatus Logico-Philosophicus*)

Wittgenstein's proposal is certainly too extreme: a language that provides a different sign to every different object will make any expression of equality false and thus the use of equations, such as arithmetical ones, will be impossible.

Unsurprisingly, Wittgenstein's proposal was not followed, particularly not by either logicians or mathematicians. In fact, in standard first-order logic, it is usual to introduce an equality-predicate for building propositions that express numerical equality. Moreover, numerical equality is seen as a special case of qualitative equality. Indeed, qualitative identities or equivalences are relations which are reflexive, symmetric and transitive and structure the domain in a domain into disjoint subsets whose members are regarded as indiscernible with respect to that relation. *Identity* or numerical identity is the smallest equivalence relation, so that each one of the equivalence classes is a singleton, i.e., each contains one element

However, the story does not end here. In our view, the challenge is about explaining the link between the ontological and the propositional levels of equality in such a way that it does not reduce to a "static" and "empty" perspective on the basic identity fact. Before we start our journey towards a dynamic perspective on identity, let me mention a recent development in the study of identity namely, *Constructive Type Theory*, that provides the basis of our own approach.

I.2 The ontological and the propositional levels revisited:

Per Martin-Löfs *Constructive Type Theory* (CTT) allows a deep insight of the interplay between the propositional and the ontological level. In fact, within CTT judgement rather proposition is the crucial notion. The point is that CTT endorses the Kantian view that judgement is the minimal unit of knowledge and other sub-sentential expressions gather their meaning by their epistemic role in such a context. According to this view an assertion (the linguistic expression of a judgement) is constituted by a proposition, of which it is asserted that it is true, say, the proposition "*that Lille is in France*" and the proof-object (or in another language, the *truth-maker*) that makes the proposition true (for instance the geographical fact that makes true *that Lille is in France*). The CTT notation yields the following expression of this assertion

b : *Lille is in France*
(*Lille is in France* is the proposition made true by the fact *b*)

Because of the isomorphism of Curry-Howard (where propositions can be seen as types and as sets), this could also be seen as expressing that the proposition-type *Lille is in France*, is instantiated by the (geographical) fact *b*.

Now let us have the assertion that expresses that $a = b$ are elements of the same type. For example, *a* is the same kind of human as *b*:

$a = b$: *Human-Being*

It is crucial to see that, within the frame of CTT, the equality at the left of the colon is not a proposition: the assertion establishes that *a* and *b* express qualitatively equal objects in relation to the type *Human-Being*. It is very different to the assertion for example that *it is true that there is at least one human being such that it is equal to a and to b*

$$c : (\exists x : \textit{Human-Being})\ x = a \wedge x = b$$

Indeed at the right of the colon, we have a proposition that is made true by the proof-object *c*, whereas the equality at the left of the colon is not bearer of truth (or falsity) but it is what instantiates the type *Human being*. In other words, when an equality is placed at the left of the colon such as in *a* = *b* : *Human-Being* it involves the ontological level (it expresses an equivalence relation within a type). In contrast, the equality at the right involves the propositional level: it is a dyadic predicate. This follows from a general and crucial distinction: in a judgement we would like to distinguish what makes a proposition true from the proposition judged to be true. Accordingly, identity-expressions can be found at both sides of a judgement.

Let us now study the issue in the context of a whole structure of judgements. In fact, as pointed out by Robert Brandom (1994, 2000), if judgements provide indeed the minimal unit of meaning, the entire scope of the conceptual meaning involved is rendered by the role of a judgement in a structure deployed by games of giving and asking for reasons. The deployment of such games is what Brandom calls an inferential process and is what leads him to bring forward his own pragmatist inferentialism.

I.3 Identity expressions and their dialogical roots

Given the context above, the task is to describe those moves in the context of games of giving and asking for reasons that ground both the ontological and the propositional expressions of identity mentioned above. Only then, so we claim, can we understand within a structure of concepts the written form as rendering explicit those acts of judgement that involve identity.[78]

In fact, the main claim of the present paper is that both the ontological and the propositional level of identity can be seen as rooted in a specific form of dialogical interaction ruled by what in the literature on game-theoretical approaches to meaning has been called the *formal rule* or *copy-cat* move or (more recently) *Socratic rule*. The leading idea is that explicit forms of intensional identity expressed in a judgement are, at the strategic level, the result of choices of the Proponent, who copies the choices of his adversary in order to introduce a real definition. On this view, identity expressions stand for a special kind of argumentative interaction. The usual propositional identity predicate of first order logic is introduced, systematically seen, at a later stage and it results from the identity established at the ontological level. In fact, if the ontological and the propositional level are kept tight together an intensional propositional equality-predicate results. The introduction of an extensional propositional predicate is based on a weak link between the ontological and the propositional levels: in fact, the extensional predicate displays the loosest relation between both levels.
To put it bluntly: whereas Constructive Type Theory contributes to elucidate the crucial difference between the ontological and the propositional level, the dialogical frame adds that the ontological level is rooted on argumentative interaction. According to this view, expressions of identity make explicit the argumentative interaction that grounds the ontological and the propositional levels. These points structure already the following main sections of our paper: we will start with a

[78] Let me point out that Brandom's approach only has one way to render explicit an act of judgement, namely, the propositional level. In our context this is a serious limitation of Brandom's approach since it fails to distinguish between those written forms that render explicit the ontological from those concerning the propositional level.

discussion of the CTT take on identity and then we present the contribution that, according to our view, the dialogical analysis provides.

II Ontological and Propositional Equality Expressions within Constructive Type Theory

II.1 Algunos postulados relevantes de la Teoría Constructiva de Tipos

En la teoría constructiva de tipos de Per Martin-Löf's (1984; CTT de ahora en adelante) las constantes lógicas son interpretadas a través de la correspondencia Curry-Howard entre proposiciones y conjuntos. Una proposición se interpreta como un conjunto cuyos elementos representan las pruebas de la proposición. También es posible visualizar un conjunto como la descripción de un problema y sus elementos como las soluciones al problema de una manera similar a la explicación de Kolmogorov del cálculo proposicional intuicionista. Además, en CTT los conjuntos se entienden también como tipos, de modo tal que las proposiciones pueden ser vistas como datos o tipos de prueba.

La idea filosófica general está enlazada con lo que ha sido llamado el enfoque de interpretación total (*fully interpreted approach*)[79], donde se presta especial atención a:

> [...] *evitar mantener contenido y forma aparte. En vez de esto tendremos al mismo tiempo ciertas formas de juicio e inferencia que son utilizadas en pruebas matemáticas y las explican semánticamente. Por lo tanto, hacemos explícito lo que se suele tomar por sentado implícitamente.* (Martin-Löf 1984, 3)

En relación con la tarea de explicitación, se trata de poner en el nivel del lenguaje objeto características que determinan el significado y que se formulan usualmente en el nivel meta. De acuerdo con el punto de vista lógico de la CTT, las premisas y la conclusión de una inferencia lógica no son proposiciones sino juicios:

> Una regla de inferencia se justifica explicando la conclusión bajo el supuesto de que las premisas son conocidas. Por lo tanto, antes de que una regla de inferencia pueda ser justificada, debe explicarse qué es lo que hay que saber para tener el derecho de hacer un juicio sobre cualquiera de las diversas formas en que las premisas y la conclusión pueden tener. (Martin-Löf 1984, 4)

Otros dos principios básicos de la CTT son los siguientes:

3. Ninguna entidad sin tipo
4. Ningún tipo sin identidad

En consecuencia, podemos tomar la afirmación de que un individuo es un elemento del conjunto *A* como la afirmación de que dicho individuo instancia o ejemplifica el tipo *A*. Un conjunto se define en CTT especificando sus elementos canónicos, y aquellos, los no-canónicos, de los que se puede mostrar, usando algún método prescrito de transformación, que son iguales (en este conjunto) a uno canónico; esto último es lo que prescribe el segundo principio básico y que, en otras palabras; consiste en la introducción de una relación de equivalencia en un conjunto. Así, si *A* es un tipo y

[79] Ver Sundholm (1983a, 1997, 2001, 2013).

tenemos un objeto *b* que satisface las condiciones correspondientes entonces *b* es un objeto de tipo *A*, que se escribe formalmente $b : A$.[80] En consecuencia,

$b : A$

puede ser leída como:

b es una prueba de la proposición *A*	*A* es verdadera
b es un elemento del conjunto *A*	*A* tiene un elemento
b satisface con las expectativas de *A*	*A* es satisfecha
b es una solución al problema *A*	*A* tiene una solución

Es esencial distinguir entre el *elemento de prueba b* (*proof-object*), el tipo *A* y el juicio $b : A$, que establece, en este ejemplo, que *b* es un elemento de prueba para la proposición *A* (si *A* es del tipo proposición). En lógica estándar, que hay una prueba para una proposición dada se expresa en el nivel de metalenguaje. El hecho de que haya algo (un elemento) *b* que fundamenta la proposición de que *Primus le debe 100 monedas a Secundus* (lo que supondría la afirmación correspondiente) se da en el análisis habitual a nivel metalenguaje. En CTT, el fundamento de una afirmación se formula en el nivel de lenguaje objeto por medio de la afirmación de que hay un elemento-prueba de la proposición correspondiente.

Debido a limitaciones de espacio no vamos a ser capaces de dar una descripción detallada y precisa de la CTT aquí. En la próxima sección nos limitaremos a transmitir los puntos relevantes para los objetivos del presente trabajo. Para más información sobre esta perspectiva, ver Martin-Löf [1984], Ranta (1988, 1994), Nordström et al. (1990), Primiero (2008) y Granström (2011).

II.2 Aserciones e igualdad

Siempre que en CTT se introduce una nueva expresión se lo hace por medio de lo que se llama una *explicación semántica*. En el caso de la introducción de un nuevo tipo, la explicación semántica consiste en (1) describir sus objetos canónicos, (2) proporcionar un algoritmo para reconocer si un objeto no canónico es o no de ese tipo y (3) dar las condiciones que permitan establecer la identidad (o no) de dos objetos respecto a ese tipo. El punto 3 se entiende como la tarea de definir una relación de equivalencia apropiada. De este modo, aserciones de la forma $a = b : A$, afirman que los dos objetos *a* y *b* satisfacen la relación de equivalencia definida para el tipo *A*. La aserción $a = b : A$ es también llamada una *aserción de igualdad definicional*, dado que por mediante de ella se introducen definiciones explícitas – por ejemplo de funciones. Una tal igualdad se trasmite entonces por reflexividad, simetría y transitividad, y por substitución de iguales definicionales. (Ranta 1994, 52). Más aún, real definitions as pointed out by Frege while criticizing Hilbert, might provide the truth of a proposition based on those definitions, but they are *not* bearers of truth. For short, definitional equality is *not* a predicate. The written form $a = b$ is ambiguous unless we use the full assertion expression: at the left of the colon it expresses definitional equality and the right of it expresses a predicate.

When the type is a proposition constituted by logical constants such as conjunction, disjunction and so on, the inferential role of the equalities at the left of the colon is to harmonize the process of

80 Martin-Löf usa el signo "∈" con el fin de indicar que algo, por ejemplo *a*, es de tipo *B*; incluso sugiere que se puede entender como la cópula "es". Nordström, Petersson y Smith (1990) también hacen uso de esta notación, mientras que otros autores, como Ranta (1994), utilizan el doble punto ":". Granström (2011) distingue el doble punto del épsilon, donde el primero se aplica a los elementos no canónicos y el segundo a los canónicos. Nosotros vamos a utilizar el doble punto.

synthesis and analysis of an assertion involving the logical constant at stake. Let us briefly discuss this point in the following section – for a thorough discussion see Rahman/Redmond (2015b).

II.2.1 Elementos de prueba, igualdad y su rol inferencial

En su histórico artículo de 1935 sobre deducción natural, Gerhard Gentzen señaló:

> *Las introducciones representan, por así decirlo; las "definiciones" de los símbolos referidos, y las eliminaciones no son más, en el análisis final, que la consecuencia de estas definiciones*.[81] (Gentzen 1969, 80)

La idea detrás de la observación de Gentzen es que una regla de introducción de la deducción natural exhibe el fundamento para la afirmación de una proposición que contiene la constante lógica en cuestión, y que el resultado de la utilización de la regla de eliminación correspondiente muestra exactamente esos componentes de la proposición que la regla de introducción especificó como suficientes para su afirmación. Dummett llama *armonía* a tal coordinación. En breve y haciendo uso de la formulación de Stephen Read (2008, 291, nota 5), una regla de eliminación es armónica si esta regla no hace más que explicar las consecuencias del significado conferido por la regla de introducción. Si comenzamos con las reglas de introducción, una manera de ver la contribución del concepto de es que mientras las reglas de introducción muestran cómo *sintetizar,* a partir de ciertas premisas, una expresión que contiene una constante lógica dada, la regla de eliminación muestra cómo analizar la expresión en juego mostrando exactamente aquellos componentes que son requeridos por las reglas de introducción para afirmar esta expresión. Si comenzamos con las reglas de introducción, una manera de ver la contribución del concepto de armonía, es que mientras las reglas de introducción muestran cómo *sintetizar,* a partir de ciertas premisas, una expresión que contiene una constante lógica dada, la regla de eliminación muestra cómo *analizar* la expresión en juego mostrando exactamente aquellos componentes que son requeridos por las reglas de introducción para afirmar esta expresión.

El lenguaje explícito de la CTT permite expresar la condición de armonía por medio de igualdades definicionales. Tomemos como ejemplo el caso de la conjunción. La proposición $A \wedge B$ (o el conjunto AxB) se explica, estableciendo que un elemento canónico de $A \wedge B$ es un par de elementos de prueba (a, b) donde $a : A$ y $b : B$ – es decir, donde a es un elemento de prueba de A y b de B:

$$\frac{a : A \quad b : B}{(a, b) : A \wedge B}\wedge\text{-introducción}$$

Con el fin de definir $\wedge$-eliminaciones vamos a hacer uso de cierto tipo de operadores llamados *selectores*, a partir del cual se pueden definir nuevas funciones que extraen aquellos componentes que constituyen un elemento de prueba complejo c (como por ejemplo $c = (a, b)$). En el caso de la conjunción los selectores son las funciones de proyección ρ y q que tienen como valor el lado izquierdo y derecho del par de elementos de prueba respectivamente. Por lo tanto, si c es un elemento de prueba para la conjunción, entonces $p(c)$ nos da el componente izquierdo de c y $q(c)$ su componente derecho.

$c : A \wedge B$ $c : A \wedge B$

----------- $\wedge$-p-eliminación   ------------- $\wedge$-q-eliminación

[81] *The introductions represent, as it were; the 'definitions' of the symbols concerned, and the eliminations are no more, in the final analysis; than the consequence of these definitions*.

$p(c) : A$ $\qquad\qquad$ $q(c) : B$

Si sabemos que $c= (a, b)$, entonces $p(c)$ restaura el componente izquierdo de c (obtenido por la regla de introducción) esto es: $p(c) = p((a, b)) = a$, tal que $a : A$, análogamente $q(c)$ restaura el componente derecho:

$$\frac{a : A \quad b : B}{p((a, b)) = a : A}\ \wedge\text{-}izq\text{-}\beta\text{-igualdad} \qquad \frac{a : A \quad b : B}{q((a, b)) = b : B}\ \wedge\text{-}der\text{-}\beta\text{- igualdad}$$

Aquí tenemos ejemplos claros de cómo usar la noción de igualdad definicional mencionada anteriormente: las funciones de proyección p y q se definen explícitamente por medio de una regla de inferencia de modo que, dados los elementos de prueba a y b, la proyección q de (a, b) es definicionalmente idéntica a b, respecto a la relación de equivalencia que define el tipo B, y análogamente se introduce la proyección p.

También se puede introducir una regla dual, llamada η, y que puede ser definida de la siguiente manera:

$$\frac{c : A\wedge B}{(p(c), q(c)) = c : A\wedge B}\ \wedge\text{-}\eta\text{-igualdad}$$

En nuestro contexto estas reglas pueden ser vistas como aquello que asegura que las reglas son armoniosas. Es decir, si la conjunción ha sido compuesta por (a, b) entonces ambas reglas de eliminación proveen un análisis del elemento de prueba c del que resultan los componentes a y b.

Dado que una de las tesis principales de nuestro artículo se basa en la idea de que la regla formal de la dialógica es en realidad la forma dinámica de la noción de igualdad definicional proveniente de la teoría de tipos, es conveniente presentar en forma sistemática, aunque sea brevemente tal concepción y su relación con la igualdad proposicional.

II.2.2 Igualdad definicional y proposicional

II.2.2.1 La igualdad definicional

La igualdad definicional cumple con las condiciones básicas de la igualdad:

Reflexividad	Simetría	Transitividad
$\dfrac{a : A}{a = a : A}$	$\dfrac{a = b : A}{b = a : A}$	$\dfrac{a = b : A \qquad b = c : A}{a = c : A}$

En el contexto de juicios hipotéticos la igualdad definicional entre dos elementos de prueba, por ejemplo a y c, en, digamos, el conjunto A, permite obtener la igualdad entre las funciones $b(a)$ y $b(c)$, que se infiere de la substitución de la variable en la función $b(x)$ de A a $B(x)$ por a y c respectivamente:[82]

[82] Presentamos aquí las reglas de substitución para igualdades entre los elementos de un conjunto, sin embargo se pueden definir de forma análoga la igualdades entre elementos del tipo *set* – es decir las igualdades entre conjuntos (véase Nordström/Petersson/Smith [1990], p. 38).

$$\frac{a = c : A \qquad b(x) : B(x)\ (x : A)}{b(a) = b(c) : B(a)}$$

Los juicios hipotéticos también permiten de expresar igualdades hipotéticas que también se rigen por una regla de substitución adecuada:

$$\frac{a : A \qquad c(x) = b(x) : B(x)\ (x : A)}{b(a) = c(a) : B(a)}$$

Las reglas de substitución para igualdades en el contexto de juicios hipotéticos requieren también una noción general de substitución de variables expresada por la siguiente regla (SHG):

$$\frac{a : A \qquad b(x) : B(x)\ (x : A)}{b(a) : B(a)}$$ [83]

Veamos ahora como en el cuadro de la TCT se relacionan las nociones de igualdad definicional e igualdad proposicional

II.2.2.2 Igualdad proposicional: Los predicados de igualdad intensional y extensional

Necesitamos ahora la introducción de un predicado de igualdad que permita expresar la igualdad como una proposición por medio de reglas que muestren como pasar de la igualdad definicional a la igualdad proposicional. En realidad se pueden definir dos predicados de igualdad, uno intensional y otro extensional. El elemento de prueba correspondiente al predicado de identidad extensional no depende del nivel ontológico.

- **El predicado de igualdad intensional**

El predicado de igualdad proposicional intensional, definido sobre un conjunto, digamos *A*, se expresa usualmente con la notación *Id*(*A*, *a*, *b*). A veces se utiliza la notación $a =_A b$, sin embargo nosotros usaremos la primera pues manifiesta explícitamente que *Id* es una relación.

Formación

$$\frac{A : set \quad a : A \quad b : A}{Id(A, a, b) : set}$$

Haremos ahora uso de los selectores *r*(*x*), *symm*(*x*), *trans*(*x*, *y*) and *subst*(*x*, *y*) que constituyen los elementos de prueba de la reflexividad, la simetría y la transitividad respectivamente:[84]

[83] En realidad esta regla no es suficiente pues no incluye el caso de substituciones simultáneas que son necesarias por ejemplo en casos como $C(x, y) : set\ (x : A, y : B(x))$. Hay varias soluciones a este respecto, la más práctica desde el punto de vista procedural (tan caro a la perspectiva dialógica), es permitir substituciones parciales en un contexto. Volviendo a nuestro ejemplo, si es el caso que $a : A$, *llevamos a cabo una primera aplicación de la substitución para obtener* $C(a, y) : set\ (y : B(a))$, y luego una segunda vez para obtener $b : B(a)\ C(a, b) : set$ (véase Nordström/Petersson/Smith [1990], p. 39).

[84] En realidad la transitividad y la simetría pueden derivarse de la reflexividad y la regla de eliminación (véase Nordström/Petersson/Smith [1990], pp. 57-70).

Reflexivity

$a : A$
$\overline{\hspace{3cm}}$
$r(a): Id(A, a, a)$

Symmetry

$d : Id(A, a, b)$
$\overline{\hspace{4cm}}$
$symm(d) : Id(A, b, a)$

Transitivity

$$\frac{d : Id(A, a, b) \quad e : Id(A, b, c)}{trans(d, e) : Id(A, a, c)}$$

Las dos próximas reglas también pueden ser derivadas. La primera de ellas implementa la idea de que la identidad ontológica determina la proposicional, la segunda es la formulación de la famoso regla de substitución de Leibniz en la terminología de la TCT:

$$\frac{a = b : A}{r(a): Id(A, a, b)}$$[85]

$$\frac{B(x) : prop\ (x : A)a : A \qquad b : A \qquad c : Id(A, a, b) \qquad d : B(a)}{subst(c, d) : B(b)}$$

Esta formulación de la ley de Leibniz no hace uso del languaje de segundo orden, frecuentes en la literatura sobre el tema.

- **El predicado de igualdad extensional**

La regla de formación del predicado de igualdad extensional entre a y b definida en el conjunto A ($Eq(A, a, b)$) es análoga a la del predicado de identidad intensional

Formación

$$\frac{A : set \quad a : A \qquad b : A}{Eq(A, a, b) : set}$$

El elemento de prueba eq que verifica $Eq(A, a, b)$), no depende de a ni de b. La verificación de $Eq(A, a, b)$ solo necesita de la identidad de algún objeto de prueba arbitrario. Sea eq entonces por ejemplo $s = s$.

$$\frac{a = b : A}{eq : Eq(A, a, b)}$$

La regla representa la forma más debil de relacionar inferencialmente la igualdad ontológica con la proposicional. En efecto el elemento de prueba eq no contiene, ni depende de ninguno de los

[85] Nótese que los elementos de prueba para $Id(A, a, b)$ y para $Id(A, a, a)$ son el mismo, a saber: $r(a)$. El hecho es que en realidad son dos conjuntos iguales en *set*. En efecto:

$$\frac{A = A : \text{set} \quad a = a : A \quad a = b : A}{Id(A, a, a) = Id(A, a, b) : set}$$

elementos de prueba sobre los que se basa la aserción de la premisa. Estas falta de lazos entre los elementos de prueba de la premisa y la conclusión se hace aún más evidente en la siguiente regla de eliminación no inductiva:

$c : Eq(A, a, b)$

$a = b : A$

En esta regla de eliminación el elemento de prueba c de la premisa no contiene nada que pueda conducir a la igualdad $a = b$ de la conclusión. Es más, dado que la igualdad expresada por $Eq(A, a, b)$ es identidad numérica, todo elemento de prueba c de $Eq(A, a, b)$ es igual a *eq*:[86]

$c : Eq(A, a, b)$

$c = eq : Eq(A, a, b)$

III El cuadro Dialogico

III.1 Algunas nociones básicas de Lógica Dialógica

La Lógica dialógica fue iniciada a finales de la década de 1950[87] por Paul Lorenzen y luego desarrollada por Kuno Lorenz.[88] Inspirado por la noción de Wittgenstein de significado como uso, la idea básica del enfoque dialógico de la lógica es que el significado de las constantes lógicas está dado por las normas o reglas para su uso y estas reglas se entienden como formas específicas de estructuración de la interacción argumentativa. Esta característica argumentativa subyacente a la dialógica, a menudo lleva a clasificarla como una teoría pragmática del significado.

Más precisamente: las reglas que fijan el significado pueden ser de más de un tipo, y ellas determinan la reconstrucción de una práctica argumentativa y/o lingüística que una cierta forma de juegos de lenguaje llamado diálogos proporciona. Como se mencionó anteriormente, el enfoque dialógico de la lógica no es una lógica, sino un marco de significado pragmático en donde diferentes lógicas pueden desarrollarse, combinarse o compararse. Sin embargo, aquí vamos a restringirnos a las versiones dialógicas de la lógica clásica y la intuicionista (véase el apéndice I).

---

[86] Véase Nordström /Petersson/Smith [1990], p. 61.

[87] De hecho, la lógica dialógica desarrollada por Paul Lorenzen y Kuno Lorenz, fue el resultado de una solución a algunos de los problemas que se suscitan en la Lógica Operativa de Lorenzen (1955) - para una discusión sobre las ideas y las deficiencias de la Lógica Operativa, ver Schröder-Heister (2008).

[88] Los principales trabajos originales se recogen en Lorenzen / Lorenz (1978). Para una visión histórica ver Lorenz (2001). Otros trabajos se han recogido más recientemente en Lorenz (2008, 2010a, b). Una relación detallada de los acontecimientos recientes desde Rahman (1993), se puede encontrar en Rahman / Keiff (2005), Keiff (2009) y Rahman (2012). Para la metalógica subyacente ver Clerbout (2013, 2014a, b). Para las presentaciones de libros de texto: Lorenzen / Schwemmer (1975), Redmond / Fontaine (2011) y Rückert (2011). Para el papel clave de la dialógica en la recuperación de la relación entre la dialéctica y la lógica, véase Rahman / Keiff (2010). Los artículos de Keiff (2004a, b, 2007) y de Rahman (2009), contienen un estudio de lógica dialógica modal. Fiutek et al. (2010) estudian el enfoque dialógico de revisión de creencias. Clerbout / Gorisse / Rahman (2011) estudian la lógica de los Jainas en el marco dialógico. Popek (2012) desarrolla una reconstrucción dialógica de las *obligationes* medievales. Rahman / Tulenheimo (2009) estudian los vínculos entre el GTS y la lógica dialógica. Otros libros son Redmond (2010) – que discute el tema de la ficción en el contexto dialógico - Fontaine (2013) – que enlaza intencionalidad, ficción y diálogos - y Magnier (2013), que desarrolla, en un marco dialógico, aplicaciones de la lógica epistémica dinámica para el razonamiento jurídico. Rahman y sus colaboradores comenzaron recientemente a estudiar el enfoque dialógico de la CTT - ver Clerbout / Rahman (2015), Rahman / Clerbout (2014, 2015), Rahman / Clerbout / Jovanovic (2014), Rahman / Jovanovic / Clerbout (2015), Rahman / Redmond (2014a,b).

En un diálogo dos partes discuten sobre una tesis respetando ciertas reglas fijas. El jugador que afirma la tesis se llama Proponente (P), su rival, que pone en tela de juicio la tesis, se llama Oponente (O). En su forma original, los diálogos fueron diseñados de tal manera que cada una de las partidas termina después de un número finito de movimientos con solo un jugador ganador, mientras que el otro pierde. Acciones o movimientos en un diálogo, a menudo son entendidos como elocuciones o como actos de habla. En otras palabras, la idea es que las reglas del diálogo no se aplican a expresiones aisladas del acto de elocución en que fueron proferidas (en el contexto del desarrollo de un juego dialógico). Las reglas se dividen en reglas de partículas o reglas para las constantes lógicas (*Partikelregeln*) y reglas estructurales (*Rahmenregeln*). Las reglas estructurales determinan el curso general de un juego dialógico (también llamado *diálogo*), mientras que las reglas de partículas regulan aquellos movimientos que constituyen *peticiones* o *requerimientos* (a los movimientos del rival) y aquellos que son *respuestas* (a esas peticiones). Crucial para el enfoque dialógico son los puntos siguientes:

1. La distinción entre significado local (reglas para las constantes lógicas) y significado global (incluido en las reglas estructurales)
2. Reglas para jugadores anónimos para el significado local
3. La distinción entre el nivel de partida (triunfo local o triunfo de una partida) y el nivel estratégico (existencia de una estrategia ganadora).
4. Una noción de validez que equivale a estrategia ganadora para P.
5. La noción de triunfo en una partida formal, en lugar de estrategia ganadora en un modelo.

III.2 Lógica dialógica estándar y significado

III.2.1 Significado local de las constantes lógicas

En lógica dialógica, las reglas de partículas establecen la *semántica local*: lo que está en juego es solo la *petición* y la *respuesta* correspondiente a la afirmación de una constante lógica determinada, y no se tiene en cuenta el contexto en el que ocurre dicha constante lógica. La terminología estándar hace uso de los términos *desafío* o *ataque* y *defensa*. Sin embargo, es importante observar que en el nivel local (el nivel de las reglas de partículas) ataques y defensas se definen independientemente de su rol estratégico.

La tabla siguiente presenta las reglas de partículas para la conjunción y la disyunción donde **X** e **Y** son cualquiera de los dos jugadores **O** y **P** (para las restantes reglas ver el Apéndice)[89]

$\vee, \wedge$	**Ataque**	**Defensa**
X– $A\vee B$	**Y**– $?_{\vee}$	**X**– *A* o X–*B* (X elige)
X– $A\wedge B$	**Y**– $?_{\wedge L}$ o **Y**–$?_{\wedge R}$ (**Y** elige)	**X**– *A* respectivamente **X**– *B*

[89] Para una presentación detallada ver Clerbout (2014a, b). Véase también la entrada "lógica dialógica" en la Stanford Encyclopedia of Philosophy y Redmond / Fontaine (2011).

- **Nota**: Las reglas de partículas son reglas para jugadores anónimos en el sentido de que el defensor puede ser tanto **P** como **O** (por eso también se las llama *reglas simétricas*). Por eso están formuladas con la ayuda de variables que pueden ser substituidas (uniformemente) por **P** u **O**. No sería razonable basar un enfoque lúdico-teórico del significado de las constantes lógicas en un sistema de reglas que determine que una constante tal tiene un significado diferente cuando es jugada por un jugador diferente. Esto haría de cualquier interacción un sinsentido.

Significado Global:

Como se mencionó anteriormente, el sentido global se define por medio de reglas estructurales que determinan el desarrollo general de las partidas, especificando quién empieza, cuáles son los movimientos permitidos y en qué orden, cuándo finaliza una partida y quién gana y cuándo (véase el Apéndice I). Las reglas estructurales incluyen lo siguiente:

> *(SR 2) (Regla formal)*: P no puede afirmar una proposición elemental a menos que O lo haga primero. Las proposiciones elementales no pueden ser atacadas.

Esta regla es una de las características más sobresalientes de la lógica dialógica. Como se discute en Marion / Rückert (2015), se remonta a la reconstrucción de Aristóteles de la dialéctica platónica: la idea principal es que, cuando una proposición elemental es desafiada (atacada), entonces –desde el punto de vista puramente argumentativo– la única respuesta posible es apelar a las concesiones del oponente (es decir, sin hacer uso de una autoridad más allá de los movimientos presentados durante la interacción argumentativa). De hecho, uno podría ver la regla formal como la implementación de un tipo *de jugadas espejo*: mis razones para afirmar tal proposición son exactamente las mismas que las suyas cuando concedió Ud. la misma proposición.[90]
Ahora bien, si los fundamentos últimos de una tesis dialógica son proposiciones elementales y si esto se lleva a cabo mediante el uso de la regla formal, entonces los diálogos son en este sentido necesariamente asimétricos. De hecho, si ambos contendientes estuvieran restringidos por la regla formal ninguna proposición elemental podría ser afirmada. Por lo tanto, implementamos la regla formal mediante el diseño de un jugador, llamado el Proponente, cuyas afirmaciones de proposiciones elementales están restringidas por esta regla. Es el triunfo del proponente el que proporciona la noción dialógica de validez. Más precisamente, en el enfoque dialógico, validez se define a través de la noción de *estrategia ganadora*, donde *estrategia ganadora* para X significa que para cualquier elección de movimientos de Y, X tiene al menos un movimiento posible a su disposición, tal que él (X) gana:

> Validez (definición): Una proposición es válida en un determinado sistema dialógico si y solo si **P** tiene una estrategia ganadora formal para esta proposición.

Parar una definición formal de validez y estrategia ver apéndice I

III.3 Diálogos con objetos lúdicos

Tabla: Semántica local con objetos lúdicos

Afirmación	**Ataque**	**Defensa**

[90] Cf. Clerbout / Keiff / Rahman (2009) y Rahman / Keiff (2010).

X ! $p : \varphi\vee\psi$	**Y** ?[φ/ψ]	**X** ! $L^{\vee}(p) : \varphi$ O **X** ! $R^{\vee}(p) : \psi$ [el defensor elige]
X ! $p : \varphi\wedge\psi$	**Y** $?_L$ o **Y** $?_R$ [el atacante elige]	**X** ! $L^{\wedge}(p) : \varphi$ respectively **X** ! $R^{\wedge}(p) : \psi$
X ! $p : \varphi\rightarrow\psi$	**Y** ! $L^{\rightarrow}(p) : \varphi$	**X** ! $R^{\rightarrow}(p) : \psi$
X ! $p : \neg\varphi$	**Y** ! $L^{\perp}(p) : \varphi$	**X** ! $R^{\perp}(p) : \perp$
X ! $p : (\exists x : A)\varphi$	**Y** $?_{prop}$	**X** ! $(\exists x : A)\varphi : prop$
	Y $?_L$ o **Y** $?_R$ [el atacante elige]	**X** ! $L^{\exists}(p) : A$ Respectivamente **X** ! $R^{\exists}(p) : \varphi(L(p))$
X ! $p : (\forall x : A)\varphi$	**Y** ! $L^{\forall}(p) : A$	**X** ! $R^{\forall}(p) : \varphi(L(p))$

IV La expresion dialógica de la igualdad

IV.2 Igualdad como predicado desde el punto de vista dialógico

The case of predicative (equality as a predicate) is a bit more complex, however, in essence it is based on an analogous use of the formal rule.

Let us start by considering the dialogical use of the known substitution of the equality-predicate of first order logic (often called *Leibniz's identity rule*):

> Assume that the Opponent made use of the equality-predicate in order to establish the equality between two terms, say t_1 and t_2. Assume too that the Opponent has posited Pt_1. If the Proponent is committed to posit, say, Pt_2, he can simply do it by taking that the predicative equality between both terms allows him to posit the elementary proposition Pt_2 (given the posit Pt_1 of his antagonist). It is a kind of indirect copy-cat: the Proponent does not copy exactly the same term, but he posits an elementary expression that is equivalent to one of the Opponent modulo-the equality of the terms involved. This can be implemented by rule that is close to those of defintional equality: Once P has posited Pt_2, and O asks him about it P can, as answer, repeat **O**'s move that establishes the equality between t_1 and t_2.

Certainly this analysis presupposes that the equality predicate has already been introduced. Let us now go a little deeper into the matter.

> Assume now that the Opponent has posited the definitional equality of both terms, then, he can be forced to make it explicit now at the propositional level. The Opponent will then introduce a suitable equality-predicate in such a way that the definitional equality will provide the play-object of the propositional identity predicate. Once this step has been achieved, the Proponent launch the process described above. In fact this provides an intensional predicate.

The dialogical process that yields the extensional predicate is simpler:

> Once the Opponent introduced the definitional equality between both of the terms, the Proponent is allowed to introduce a predicative version, though its play-object can be an arbitrary one.

One non negligible result of the interactive roots of definitional equality is that it provides a new insight into the dialogical take on the CTT approach to the notion of *harmon*y as developed in Rahman/Redmond (2015b). Indeed, since the CTT approach to harmony, as mentioned above, is based on coordinating the elimination and introduction rule by means of definitional equality, and the latter, according to our analysis, corresponds to the strategic use of the formal rule, it follows that CTT- harmony is based on the strategic use of copy-cat interaction. Moreover, since as argued in Rahman/Redmond (2015b), harmony in general can be achieved by the more fundamental notion of player-independence, the present analysis allows to push forward the contribution of the dialogical theory of meaning, that allows to distinguish the strategic use of definitional equality for the establishment of harmony from a more basic notion of harmony.[91]

IV Conclusion : Making CTT-Equality Explicit

If our analysis is correct, making CTT-equality explicit amounts in a dialogical frame to make explicit those moves that involve strategic uses of the formal rule. In fact, I think that the underlying process can be implemented in the dialogical system directly in the following way:

> Assume that the Proponent carries out some instruction, for instance, by substituting $L^{\wedge}(q)$ with b of type B and this leads to a win of **P**, given some substitution instance of , say, $R^{\wedge}(p)$, carried out by O. Moreover, assume that P can win whatever the substitution instance of $R^{\wedge}(p)$ chosen by **O** is. Then we can generalize and definitional equality to $R^{\wedge}(p) = L^{\wedge}(q)$: B , where the instructions stand here for proof-objects.

We will leave for a different paper (in the making) the details of how to embed this explicitation process into the dialogical approach to CTT itself – including the development of a proof that the resulting system is equivalent to the one deployed in Clerbout/Rahman (2015).

However, let us finish by coming back to our main tenet: from a dialogical perspective, equality is the result of the intertwining of direct and indirect copy-cats moves. The conception of equality expressed by CTT is in our frame the result of a more basic level of interaction taking part at the level were plays build the meaning of the basic expressions of language.

Brandom, y la genereacion de una regla a partir de una accion
genealógica: hablar de husserlk pues el busca la esencia, diferente de derrida reazding of Husserl, es en efecto hacer explicito
Fichtte es el origen de la Grundlagen en Wissenschaftslehre.
Diferente the Foucault pues en el genealogía tiene algo que no puede racionalizarse, essta mas cerca de arqueológica si cambiamos impliciot por inconciente; pero , en Brandom pueden darse razones; es mas dar razones es lo que lo hace pasa

---

[91] Perhaps we should speak of two different notions of harmony, one of them strategic (based on copy-cat plus definitional equality) and one semantic one (based on player-independence).

Acknowledgments: Many thanks to Prof. Charles Zacharie Bowao (Univ. Marien Ngouabi de Brazzaville , Congo), Prof. Christian Berner (Lille3), Prof. Nicolas Clerbout (Univ. Valparaíso, Chile), Prof. Michel Crubellier (Lille3), MC. Marcel Nguimbi ((Univ. Marien Ngouabi de Brazzaville, Congo), Adjoua Bernadette Dango (Lille3/ Alassane Ouattara de Bouaké, Côte d'Ivoire) and Zoé Mcconaughey (Lille3), for rich interchanges and suggestions on the main claims of the present paper.

Apéndice: Una Presentación Técnica Condensada de Lógica dialógica estándar[92]

Sea L un lenguaje de primer orden construido en base a conectivas proposicionales, cuantificadores, un conjunto numerable de variables individuales, un conjunto numerable de constantes individuales y un conjunto numerable de símbolos de predicado (cada uno con una aridad fija).

Extendemos el lenguaje L con dos etiquetas **O** y **P** que corresponden a los participantes del diálogo, y el signo de interrogación "?". Cuando la identidad del jugador no importa, utilizamos variables X o Y (con X≠Y). Un movimiento es una expresión de la forma X-*e*, donde *e* es o bien una proposición *A* de L o una de las expresiones siguientes: $?_{\wedge i \text{ (i=L o i=R)}}$, $?_{\vee}$, $?_{[A(a/x)]}$, $?_{[A(a1/x),...,A(an/x)]}$.

Hay dos tipos distintos de reglas llamadas reglas de partículas (que proveen el significado local) y reglas estructurales (que proveen el significado global). Comenzamos con las reglas de partículas.

Movimiento previo	**X**-$A \wedge B$	**X**-$A \vee B$	**X**-$A \rightarrow B$	**X**-$\neg A$
Ataque	**Y**-$?_{\wedge L}$ o **Y**-$?_{\wedge 2}$	**Y**-$?_{\vee}$	**Y**-A	**Y**-A
Defensa	**X**-A resp. **X**-B	**X**-A o **X**-B	**X**-B	– –

Movimiento previo	**X**-$\forall x A$	**X**-$\exists x A$
Ataque	**Y**-$?_{[A(a/x)]}$	**Y**-$?_{[A(a1/x),...,A(an/x)]}$
Defensa	**X**-$A(a/x)$	**X**-$A(a_i/x)$ con $1 \leq i \leq n$

En esta tabla, una expresión de tipo a_i es una constante individual y $A(a_i/x)$ expresa la proposición obtenida mediante la sustitución de cada ocurrencia de x en A por a_i. Cuando un movimiento consiste en una pregunta de la forma '$?_{[A1, ..., An]}$' o de la forma '$?_{\vee}$', el otro jugador elige una proposición entre A_1, ..., A_n y la juega. Así, podemos –en términos de qué jugador tiene una opción– distinguir entre la conjunción y disyunción, por una parte, y la cuantificación universal y la existencial, por otra parte. En los casos de la conjunción y la cuantificación universal, el retador (o atacante) elige, mediante un ataque de la forma '$?_{\wedge i}$' (para la conjunción) o de la forma '$?_{[A(a/x)]}$' (para el universal) la proposición por la cual preguntar. Por el contrario, en los casos de disyunción y cuantificación existencial, el defensor es el único que puede elegir entre varias proposiciones. Obsérvese que no hay defensa en el caso de la regla de partículas para la negación.

[92] La siguiente presentación de *lógica dialógica estándar* ha sido resumida de Clerbout (2013, 2014) y ligeramente adaptada a la notación utilizada en el presente artículo.

Las reglas de partículas proporcionan una descripción abstracta de cómo se procede en el diálogo a nivel local: especifican el modo en el que una proposición puede atacarse y defenderse de acuerdo con su constante lógica principal. Decimos que tales reglas gobiernan el nivel local del significado. En rigor, las expresiones que aparecen en la tabla más arriba no son movimientos reales porque tienen proposiciones esquemáticas y los jugadores no están especificados. Además, estas reglas son indiferentes al rol de la proposición en las diversas variedades de diálogos en los que pueda intervenir: por ejemplo, las reglas locales de las constantes lógicas no varían si los diálogos son clásicos o intuicionistas. Por este motivo decimos que la descripción dada por las reglas de partículas es en cierto modo abstracta. Las expresiones "ataque" y "defensa" son convenientes para prescribir ciertas interacciones entre movimientos. Tales interacciones pueden ser definidas con precisión de la forma siguiente. Sea Σ una secuencia de movimientos. La función p_Σ asigna una posición para cada movimiento en Σ, comenzando con 0. La función F_Σ asigna un par [m, Z] para ciertos movimientos N en Σ, donde m denota una posición menor que p_Σ(N) y Z es o bien $\mathbb{A}$ (un ataque) o bien $\mathbb{D}$ (una defensa). Es decir, la función F_Σ permite seguir la "historia" de las interacciones ataque-defensa que originaron un movimiento dado. Un diálogo (o partida) es una secuencia legal de movimientos, es decir, una secuencia de movimientos que observa las reglas del juego. La segunda clase de reglas que hemos mencionado, las reglas estructurales, dan las condiciones exactas en las que una oración dada genera un juego dialógico. Un juego dialógico para A, escrito D(A), es el conjunto de todas las partidas con A como la tesis (ver la regla de inicio más abajo). Las reglas estructurales son los siguientes:

SR0 (Regla de inicio) Sea A una proposición compleja[93] de L. Para cada $\pi \in \mathsf{D}(A)$ tenemos:

- p_π(**P**-A)=0,
- p_π(**O**-n:=i)=1,
- p_π(**P**-m:=j)=2

En otras palabras, cualquier partida π en D(A) comienza con **P**-A. Llamamos A a la tesis de la partida y del juego dialógico correspondiente. Después de eso, el Oponente y el Proponente eligen sucesivamente un número entero positivo llamado *rango de repetición*. El papel de este entero es asegurar que cada partida termine después de un número finito de movimientos, de una manera especificada por la siguiente regla estructural.

SR1 (Regla clásica)

- Sea $\pi \in \mathsf{D}(A)$. Para cada M en π donde $p_\pi(M)>2$ tenemos $F_\pi(M)=[m', Z]$ donde $m'<p_\pi(M)$ y $Z \in \{\mathbb{A},\mathbb{D}\}$
- Sea r el rango de repetición del jugador **X** y $\pi \in \mathsf{D}(A)$ tal que

  - el último miembro de π es un movimiento de **Y**,

    - M_0 es un movimiento de **Y** de posición m_0 en π,

    - $M_1,\ldots,M_n$ son los movimientos de **X** en π tal que $F_\pi(M_1)=\ldots=F_\pi(M_n)=[m_0,Z]$.

[93] Si la tesis es una proposición elemental, hay que implementar una pequeña modificación de la regla formal SR2, como detallamos más abajo.

Considérese la secuencia[94] $\pi' = \pi * N$ donde N es un movimiento de **X** tal que $F_{\pi'}(N)=[m_0, Z]$. Tenemos $\pi' \in D(A)$ solo si $n < r$.

La primera parte de la regla establece que cada movimiento, después de la elección de los rangos de repetición, es o bien un ataque o una defensa. La segunda parte se asegura la finitud de las partidas mediante el establecimiento de un rango de repetición del jugador como el número máximo de veces que puede desafiar o defenderse de un movimiento determinado de otro jugador.

SR2 (Regla formal) Sea B una proposición elemental, N el movimiento **P-** B y M el movimiento **O-** B. Una secuencia π de movimientos es una partida solo si se cumple: si $N \in \pi$ entonces $M \in \pi$ y $p_\pi(M) < p_\pi(N)$.

Es decir, si el Proponente afirmó una proposición elemental, entonces **O** la afirmó ya antes. En el caso de juegos en los que se permite que la tesis sea una proposición elemental, hay que reformular la regla formal de la siguiente manera:

SR2* (Regla formal modificada): O puede atacar una proposición atómica si y solo si él mismo no la afirmó aun. Solo el oponente puede atacar proposiciones atómicas. El proponente se defiende de un ataque a una proposición atómica, mostrando que en el ulterior desarrollo del juego el oponente será forzado a conceder la proposición atómica atacada, digamos en el movimiento *n*. En cuanto O jugó n, entonces P, se defiende del ataque, respondiendo sic (n) (léase: acabas de conceder en *n* la proposición atómica buscada)

Decimos que una partida es terminal cuando no puede ampliarse en sucesivos movimientos legales. Decimos que es X-terminal cuando el último movimiento en la partida es un movimiento del jugador X.

SR3 (Regla de ganancia) El jugador **X** gana la partida π solo si es terminal **X**.

Considérese por ejemplo las siguiente secuencia de movimientos: **P-** $Qa \rightarrow Qa$, **O-**n:=1, **P-**m:=12, **O-**Qa, **P-**Qa, que pueden ser escritas del siguiente modo:

	O			P	
				$Qa \rightarrow Qa$	0
1	n:=1			m:=12	2
3	Qa	(0)		Qa	4

Los números de las columnas externas son las posiciones de los movimientos en la partida. Cuando un movimiento es un ataque, la posición del movimiento desafiado se indica en las columnas internas, como ocurre con movimiento 3 en este ejemplo. Nótese que este tipo de tablas llevan la información facilitada por las funciones p y F, además de representar la partida en sí.

[94] Usamos $\pi * N$ para denotar la secuencia obtenida agregando el movimiento N al juego π.

Sin embargo, cuando queremos considerar varias partidas juntas –por ejemplo, en la construcción de una estrategia– dichas tablas no proporcionan el medio de representación más adecuado. De hecho, cuando queremos representar la construcción de una estrategia usamos lo que se conoce como la *forma extensiva*. La forma extensiva del diálogo D(*A*) es simplemente la representación del árbol del mismo, también a menudo llamado *árbol-lúdico*. Más precisamente, la forma extensiva E*A* de D(*A*) es el árbol (T, l, S) tal que:

i) Cada nodo t en T está etiquetado con el movimiento que ocurre en D(*A*).
ii) $l : T \rightarrow$ N
iii) $S \subseteq T^2$ donde:
- Hay un único t_0 (la raíz) en T tal que $l(t_0)=0$, y t_0 es etiquetado con la tesis del juego.
- Para cada $t \neq t_0$ hay un único t' tal que $t'St$.
- Para cada t y t' en T, si tSt' entonces $l(t') = l(t)+1$.
- Dada la partida π en D(*A*) tal que $p_\pi(M')=p_\pi(M)+1$ y t, t' respectivamente etiquetadas con M y M', entonces tSt'.

Una *estrategia* para un jugador **X** en D(*A*) es una función que asigna un movimiento M a cada partida no terminal π con un movimiento **Y** como último miembro tal que, si extendemos π con M obtenemos una partida. Una estrategia de **X** es *ganadora* si jugando de acuerdo con ella nos lleva a una victoria de **X** sin importar cómo juegue **Y**.

La forma extensiva de una estrategia σ de X en D(*A*) es el fragmento de árbol $E_{A,\sigma}=(T_\sigma, l_\sigma, S_\sigma)$ de E_A tal que:

i) la raíz de $E_{A,\sigma}$ es la raíz de E_A.

ii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con un movimiento **X**, tenemos que $tS_\sigma t'$ sea cual fuere tSt'.

iii) Dado el nodo t en E_A etiquetado con un movimiento **Y** y con al menos un t' tal que tSt', entonces hay una única $\sigma(t)$ en T_σ donde $tS_\sigma\sigma(t)$ y $\sigma(t)$ es etiquetada con el movimiento de **X** prescrito por σ.

He aquí algunos ejemplos de resultados metalógicos obtenidos en la literatura reciente y que corresponden al nivel de las estrategias.[95]

- Estrategias de ganancia para **P** y hojas. Sea w una estrategia ganadora para **P** en D (*A*). Entonces, cada hoja en $E_{A,w}$ está etiquetada con una proposición elemental de **P**.

- Determinación. Hay una estrategia ganadora para **X** en D (*A*) si y solo si no hay una estrategia para **Y** en D (*A*).

- Corrección y Completitud para tablas semánticas (también llamadas árboles semánticos). Considérese una tabla semántica de primer orden y una estrategia dialógica de primer orden. Hay una tabla cerrada para *A* si y solo si existe una estrategia ganadora para **P** en D (*A*).

- Dado que las tablas semánticas (para lógica de primer orden) son correctas y completas respecto a una semántica modelo-teorética; se sigue que la existencia de una estrategia ganadora para **P** coincide con la validez. Es decir: Hay una estrategia ganadora para **P** en D(*A*) si y solo si *A* es válida.

[95] Estos resultados están probados, junto con otros, en Clerbout (2013).

EJEMPLOS DE FORMAS EXTENSIVAS

Las formas extensivas de juegos dialógicos y de estrategias son árboles generados infinitamente (árboles con un número infinito de ramas). Así, no es posible representarlos en su totalidad. Pero una ilustración sigue siendo útil, por lo que añadimos las siguientes figuras 1 y 2 a continuación:

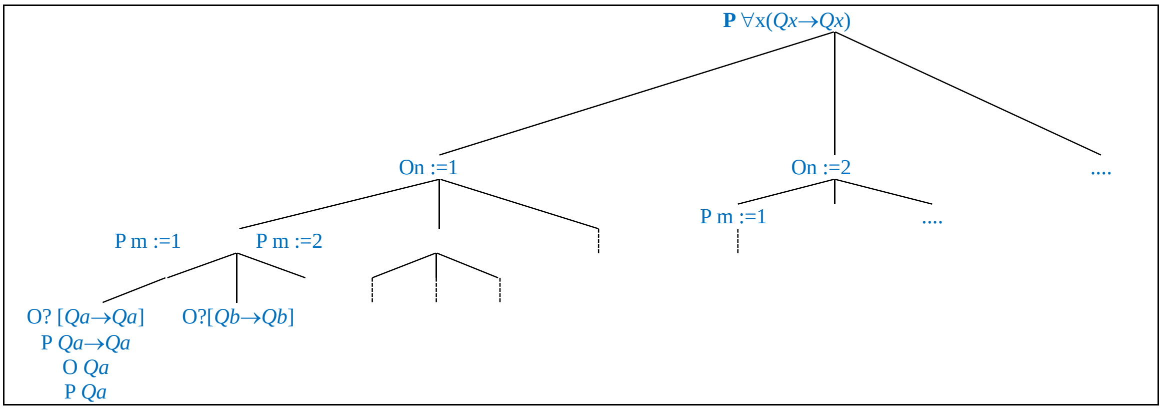

Figura 1

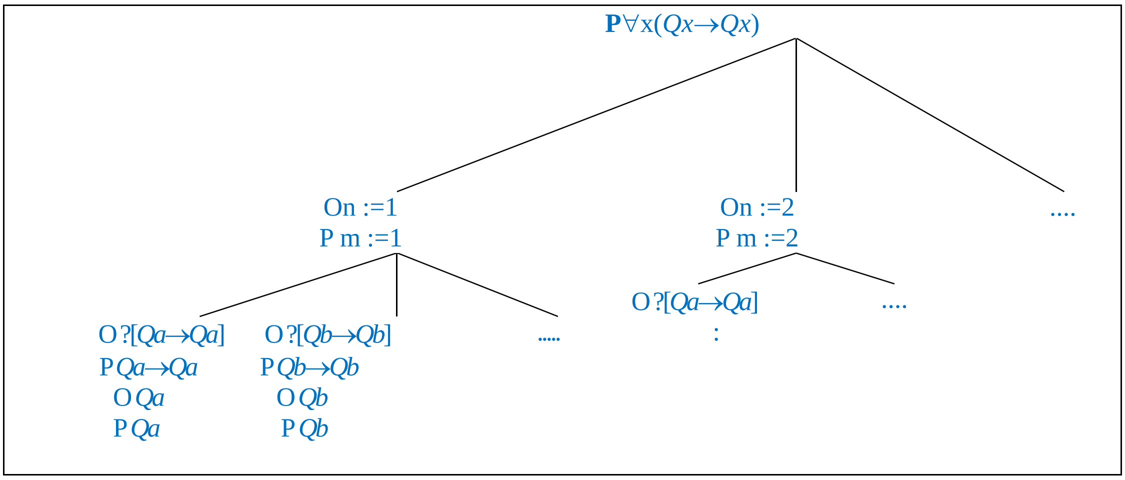

Figura 2

--La Figura 1 representa parcialmente la forma extensiva del juego dialógico para la proposición ∀x(Q (x)→Q (x)). Cada partida en este diálogo se representa como una rama en la forma extensiva: hemos dado un ejemplo en el que la rama de la izquierda representa una de las partidas más simples y más cortas en el juego dialógico. La raíz de la forma extensiva se etiqueta con la tesis. Después de eso, el oponente tiene un número infinito de opciones posibles para su rango de repetición: esto está representado por el número infinito de sucesores inmediatos en la raíz de la forma extensiva. Lo mismo vale para el rango de repetición del Proponente, y por cada vez que un jugador va a elegir una constante individual.

--La Figura 2 representa parcialmente la forma extensiva de la estrategia del Proponente en este juego. Se trata de un fragmento del árbol de la Figura 1 en la que cada nodo etiquetado con un-movimiento de **O** tiene a lo sumo un sucesor. No mantenemos más que un registro de todas las opciones posibles para **P**: cada vez que el Proponente tiene una opción en el juego, la estrategia selecciona exactamente uno de los movimientos posibles. Pero como todas las formas posibles para que el Oponente juegue deben ser tomadas en cuenta por una estrategia, las otras ramificaciones se mantienen. En nuestro ejemplo, la estrategia prescribe la elección del mismo rango de repetición que el Oponente. Por supuesto que hay un número infinito de otras estrategias disponibles para **P**.

Literature

N. Clerbout (2014a). “First-order dialogical games and tableaux”. *Journal of Philosophical Logic*, pp. 1–17. doi: 10.1007/s10992-013-9289-z. URL http://dx.doi.org/10.1007/s10992-013-9289-z,

N. Clerbout (2014b). *Etude sur quelques semantiques dialogiques*: *Concepts fondamentaux et éléments de metathéorie.* London : College Publications.

N. Clerbout (2014c). “Finiteness of Plays and the Dialogical Problem of Decidability”. *IfCoLog Journal of Logics and their Applications*, 1(1), pp. 115–130.

N. Clerbout, M.H. Gorisse, and S. Rahman (2011). “Context-sensitivity in Jain philosophy: A dialogical study of Siddharsiganis *Commentary on the Handbook of Logic*”. *Journal of Philosophical Logic*, 40(5), pp. 633–662.

N. Clerbout and S. Rahman (2013). "On Dialogues, Predication and Elementary Sentences". *Revista de Humanidades de Valparaiso*, N° 2.

N. Clerbout and S. Rahman (2015). *Linking Game-Theoretical Approaches with Constructive Type Theory*: *Dialogical Strategies as CTT-Demonstrations*. Dordrecht: Springer.

A. B. Dango (2014). “Des dialogues aux tableaux dans le contexte de révision de croyances : De l’oralité à l’écriture”. In C. Z. Bowao and S. Rahman (2014), pp. 169-186.

A. B. Dango (2015). *Approche dialogique de la révision des croyances dans le contexte de la théorie constructive des types*. Lille: PHD-Thesis.

Dummett, M. (1973). *Frege*: *Philosophy of Language*. London: Duckworth.

Dummett, M. (1991). *The Logical Basis of Metaphysics*. London: Duckworth.

Dummett, M. (1993). Language and truth. In *The Seas of Language*, M. Dummet. Oxford: Clarendon Press.

W. Felscher (1985). “Dialogues as a foundation for intuitionistic logic”. In D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Dordrecht: Kluwer, vol. 3, pp. 341–372

W. Felscher (1994). “Review of Jean E. Rubin 'Mathematical logic: applications and theory'”. *The Journal of Symbolic Logic*, 59, pp. 670-671.

V. Fiutek, H. Rückert, and S. Rahman (2010). “A dialogical semantics for Bonannos system of belief revision”. In P. Bour and alii (eds.), *Constructions*, London: College Publications, pp. 315–334.

M. Fontaine (2013). *Argumentation et engagement ontologique. Être, c’est être choisi*. London: College Publications.

J. Granström (2011). *Treatise on Intuitionistic Type Theory*. Dordrecht: Springer

G? W. Hegel, *The Science of Logic*, *Cambridge*: *Cambridge CUP. 2010*

G. W. F. Hegel (1999). *Wissenschaft der Logik.* Hamburg: Felix Meiner Verlag.

G. W. F. Hegel (2010). *The Science of Logic.* Cambridge: Cambridge CUP.

J. Hintikka (1973). *Logic, Language-Games and Information*: *Kantian Themes in the Philosophy of Logic*. Oxford: Clarendon Press.

R. Jovanovic. (2013) “Hintikkas Take on the Axiom of Choice and the Constructivist Challenge”. *Revista de Humanidades de Valparaiso*, N° 2, 135-152.

W. Kamlah and P. Lorenzen (1972). *Logische Propädeutik*: Stuttgart/Weimar: Metzler, 2nd edition.

W. Kamlah and P. Lorenzen (1984). *Logical Propaedeutic*, Lanham Md.: University Press of America, English translation of Kamlah/Lorenzen (1972) by H. Robinson.

L. Keiff (2007). *Le Pluralisme Dialogique*: *Approches dynamiques de largumentation formelle*. Lille: PhD - thesis - Lille 3.

L. Keiff (2009). "Dialogical Logic". In Edward N. Zalta (ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*, URL http://plato.stanford.edu/entries/logic-dialogical/.

K. Lorenz (1970). *Elemente der Sprachkritik.Eine Alternative zum Dogmatismus und Skeptizismus in der Analytischen Philosophie*. Frankfurt: Suhrkamp.

K. Lorenz (2001). "Basic objectives of dialogue logic in historical perspective". In S. Rahman and H. Rückert (eds.), *New Perspectives in Dialogical Logic*, special volume *Synthese* 127 (1-2), pp. 255–263.

K. Lorenz (2010a). *Logic, Language and Method*: *On Polarities in Human Experience*. Berlin/New York: De Gruyter.

K. Lorenz (2010b). *Philosophische Variationen*: *Gesammelte Aufstze unter Einschluss gemeinsam mit J¨urgen Mittelstraß geschriebener Arbeiten zu Platon und Leibniz*. Berlin and New York: De Gruyter.

P. Lorenzen (1995). *Einführung in die operative Logik und Mathematik*, Berlin: Springer.

P. Lorenzen and K. Lorenz (1978). *Dialogische Logik*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

P. Lorenzen and O. Schwemmer (1975) *Konstruktive Logik, Ethik und Wissenschaftstheorie*. Mannheim: Bibliographisches Institut, second edition.

S. Magnier (2013). *Approche dialogique de la dynamique épistémique et de la condition juridique*. London: College Publications.

M. Marion and H. Rückert (2015). "Aristotle on Universal Quantification: A Study form the Perspective of Game Semantics". Forthcoming.

P. Martin-Löf (1984). *Intuitionistic Type Theory. Notes by Giovanni Sambin of a series of lectures given in Padua, June 1980*. Naples: Bibliopolis.

P. Martin- Löf (2006). "100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?". *The Computer Journal*, 49/3, pp. 345–350.

A. Popek (2012). "Logical dialogues from Middle Ages". In C. Barés Gómez, S. Magnier and F. J. Salguero (eds.), *Logic of Knowledge. Theory and Applications*, London: College Publications, pp. 223–244.

D. Prawitz (1979). "Proofs and the meaning and completeness of the logical constants". In J. Hintikka, I. Niiniluoto and E.Saarinen (eds.), *Essays on Mathematical and Philosophical Logic*, Dordrecht: Reidel, pp. 25–40.

D. Prawitz (2012). "Truth and Proof in Intuitionism". In P. Dybjer, S. Lindström, E. Palmgren and G. Sundholm (eds.), *Epistemology versus Ontology*: *Essays on the Philosophy and Foundations of Mathematics in Honour of Per Martin-Löf*, Dordrecht: Springer, pp. 45-68.

G. Primiero (2008). "Constructive modalities for information", Talk given at the *Young Researchers Days in Logic, Philosophy and History of Science*, Brussels, 1-2 September 2008.

G. Primiero (2012). "A contextual type theory with judgmental modalities for reasoning from open assumptions". *Logique et Analyse*, 220, pp. 579–600.

S. Rahman (1993). *Über Dialogue, Protologische Kategorien und andere Seltenheiten*. Frankfurt/Paris/N. York: P. Lang.

S. Rahman (2012). "Negation in the Logic of first degree entailment and *tonk*: A dialogical study". In S. Rahman, G. Primiero, and M. Marion (eds.), *The RealismAntirealism Debate in the Age of Alternative Logics*, Dordrecht: Springer, pp. 213–250.

S. Rahman (2014). "From Dialogue To Dialogue: Conversations and the Dialogical Approach to Meaning". In C. Bowao et S. Rahman. ***De l'orature à l'écriture***, London-King's College: College Publications, pp. 70-106.

S. Rahman (2015) “On Hypothetical Judgements and Leibniz’s Notion of Conditional Right”. In A. Armgardt, P. Canivez, and S. Chassagnard-Pinet (eds.), *Legal reasoning and Logic. Past & Present interactions*. Dordrecht: Springer, in print.

S. Rahman and N. Clerbout (2013). “Constructive Type Theory and the Dialogical Approach to Meaning”. *The Baltic International Yearbook of Cognition, Logic and Communication*:*Games, Game Theory and Game Semantics*, November 2013 Volume 8:, pp. 1-72. Also online in: www.thebalticyearbook.org.

S. Rahman and N. Clerbout (2014). "Constructive Type Theory and the Dialogical Turn". In J. Mittelstrass / C. von Bülow (eds.), *Dialogische Logik***,** Münster: *Mentis*, pp. 91-148.

S. Rahman and N. Clerbout (2015). “Constructive Type Theory and the Dialogical Turn – A new Approach to Erlangen Constructivism”. In J. Mittelstrass and C. von Bülow (ed.), *Dialogische Logik*, Münster: Mentis, pp. 127-184.

S. Rahman, N. Clerbout, and Z. McConaughey (2014) “On play-objects in dialogical games. Towards a Dialogical approach to Constructive Type Theory”. In P. Allo/V. v. Kerkhove (ed.), *Modestly radical or radically modes . Festschrift for Jean-Paul van Bendegem*, London: College Publications, pp. 127-154

S. Rahman and L. Keiff (2005). “On how to be a dialogician”. In D. Vanderveken (ed.), *Logic, Thought, and Action*, Dordrecht: Kluwer, pp. 359–408.

Rahman, S. / Jovanovic, R. / Clerbout, N. 2015. “The Dialogical Take on Martin-Löf’s Proof of the Axiom of Choice”. *South American Journal of Logic*, pp. 179-208.

S. Rahman and L. Keiff (2010). “La Dialectique entre logique et rhetorique”. *Revue de Métaphysique et de Morale*, 66(2), pp. 149–178.

S. Rahman and J. Redmond (2015a). “A Dialogical Frame for Fictions as Hypothetical Objects”. *Unisinos*, 2015, in print.

S. Rahman and J. Redmond (2015b). “Armonía Dialógica: *tonk* Teoría Constructive de Tipos y Reglas para Jugadores Anónimos”, Constructive Type Theory and Player-Independent Rules”. *Theoria*, 2015, in print.

S. Rahman and T. Tulenheimo (2009). “From Games to Dialogues and Back: Towards a General Frame for Validity”. In O. Majer. A. Pietarinen and T. Tulenheimo (eds.), *Games*: *Unifying Logic, Language and Philosophy*, Dordrecht: Springer, pp. 153–208.

A. Ranta (1988). “Propositions as games as types”. *Synthese*, 76, pp. 377–395.

A. Ranta (1991). “Constructing possible worlds”. *Theoria*, 57(1-2), pp. 77–99.

A. Ranta (1994). *Type-Theoretical Grammar*. Oxford: Clarendon Press.

S. Read (2008). “Harmony and modality”. In: C. Dégremont. L. Keiff. H. Rückert (eds.), *Dialogues, Logics and Other Strange Things*: *Essays in Honour of Shahid Rahman*, London: College Publications, pp. 285–303.

S. Read (2010). “General Elimination Harmony and the Meaning of the Logical Constants”. *Journal of Philosophical Logic*, 39 (5), pp. 557–576.

R. Recorde (1577). *The Whetstone of Witte*. London : John Kingston.

J. Redmond (2010) *Logique dynamique de la fiction*: *Pour une approche dialogique*. London: College Publications.

J. Redmond and M. Fontaine (2011). *How to Play Dialogues*: *An Introduction to Dialogical Logic*. London: College Publications.

H. Rückert (2011a). *Dialogues as a Dynamic Framework for Logic*. London: College Publications.

H. Rückert (2011b). “The Conception of Validity in Dialogical Logic”.Talk at the workshop *Proofs and Dialogues*, Tübingen.

G. Sandu (1991). *Studies in Game-Theoretical Logics and Semantics*. Ph.D. thesis, Helsinki: University of Helsinki.

P. Schröder-Heister (2008). “Lorenzen’s operative justification of intuitionistic logic”. In M. Bourdeau, M. van Atten and P. Boldini (eds.), *One Hundred Years of Intuitionism (1907–2007)*, Basel: Birkhäuser, pp. 214–240.

G. Sundholm (1986). “Proof-theory and meaning”. In D. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, volume 3, Dordrecht: Reidel, , pp. 471–506.

G. Sundholm (1997) “Implicit epistemic aspects of constructive logic”. *Journal of Logic, Language, and Information* 6:2, pp. 191-212.

G. Sundholm (1998). “Inference versus Consequence”. In T. Childers (ed.), *The Logica Yearbook 1997*, Prague: Filosofia, pp. 26–36.

G. Sundholm (2001). “A Plea for Logical Atavism”. In Majer, O. (ed.), *The Logica Yearbook 2000*, Prague: Filosofia, pp. 151-162.

G. Sundholm (2009). “A Century of Judgment and Inference: 1837–1936”. In L. Haaparanta (ed.), *The Development of Modern Logic*, Oxford: Oxford University Press, pp. 263–317.

G. Sundholm (2013a). " Independence Friendly Language is First Order after all?". *Logique et Analyse*, in print.

G. Sundholm (2013b). " Inference and Consequence in an Interpeted Language”. Talk at the Workshop PROOF THEORY AND PHILOSOPHY, Groningen, December 3-5, 2013.

L. Wittgenstein (1998). *Tractatus-Logico-Philosophicus*. New York: Dover Publications.