儒学经典中的数学知识初探——以贾公彦对《周礼•考工记》㮚氏为量的注疏为例[1]

朱一文
（中山大学，哲学系暨逻辑与认知研究所，广州 510275）

作者简介：朱一文，1981 年生，上海人，中山大学哲学系暨逻辑与认知研究所讲师，研究方向为数学史。

摘要 通过分析唐代学者贾公彦对《周礼•考工记》"㮚氏为量"的注疏，揭示出其数学知识与《九章算术》为代表的传统数学不尽相同。其不同之处体现在贾氏算法的结构、对数和图形的认识、推理的方式和对于算筹的运用等方面。由于这些特色在贾氏其他注疏，以及初唐诸儒编订的《五经正义》中亦有体现，说明其具有一般性。此外，与贾公彦一同注释儒学经典的王真儒，稍后也与李淳风等一同注释了十部算经，这一事实揭示了儒学与数学关系的复杂性。对于儒学经典中的数学知识，有必要进一步深入系统研究。

关键词 贾公彦 周礼 儒学 数学 李淳风

0 引言

学术界对中国数学史的研究，长期以数学著作为核心史料[2]，取得了丰硕的成——认识、复原古代数学，揭示影响其发展的各种因素。[3][1]然而，笔者近年来发现儒学经典中蕴含着丰富的数学知识，它们与以往认识的古代数学不尽相同；而且由于研究侧重点的原因，无论是中国数学史学者，还是中国经学史学者，对于这部分史料都鲜有涉及，因此十分值得研究。

本文以唐代学者贾公彦对《周礼•考工记》"㮚氏为量"的注疏为研究案例。过往学术界对贾氏的研究多从儒学的角度。[4][2]对《周礼•考工记》的讨论也多依据经文，而较少论及其注疏。[5][3]近年来，程艳梅的硕士论文讨论过贾氏在语言学方面的贡献，[4]尚未见到学界对其数学知识的研究。本文先解读、

[1] 2011 年底，笔者赴法国国家科研中心从事博士后研究，研究课题是唐代数学。在法国期间，广泛考察了古代数学著作之外的文献，发现儒学经典中有独特的数学知识。2013 年底，入职中山大学以来，继续做这方面的研究。这篇文章受到欧洲学术委员会（European Research Council）的第七项目架构（European

[2] 这里所讲的数学史料，唐代以前指《算经十书》；宋元时期，则有贾宪、秦九韶、李冶、杨辉、朱世杰等人的著作；明清时代则是当时的各种数学著作；汉简《算数书》、秦简《数》相继被发现之后，则成为秦及先秦数学的核心文献。

[3] 如郭书春主编的《中国科学技术史•数学卷》就是这类的最新成果。

[4] 如马宗霍的《中国经学史》。

[5] 如张道一注释的《考工记》。

分析“㮚氏为量”中数学知识之特色，因其具有一般性[6]，进而再与以《九章筭术》为代表的传统数学对比。以期引发学界同仁们对此议题的兴趣。

1 贾公彦生平

贾公彦是初唐的经学家，生卒年不详，《旧唐书》有非常简略的小传。根据相关零散的史料，可以得到他大致的学术活动。他早年（642 年[7]之前）为国子助教，在孔颖达（574－648 年）[8]主持的《五经[9]正义》[10]下，参与注疏《礼记正义》。（［5］，1433 页）永徽（650-655 年）中，官至太学博士。（［6］，4950 页）永徽二年（651 年）［10，11］，长孙无忌（？－659 年）[11]主持对《五经正义》的进一步修订，至四年完成（653 年）（［6］，71 页）。[12]贾氏参与了对《尚书正义》的刊定。[13]（［9］，1428 页）除了参与《五经正义》的注解、刊定之外，他还独立注疏了《周礼》、《仪礼》、《礼记》、《孝经》和《论语》。（［6］，1972、1974、1981、1982 页；［9］，1433，1442，1444 页）这些著作中仅有《周礼注疏》和《仪礼注疏》流传至今。两书开头贾氏的官名都是太学博士，由此可知撰写的年代在 650 到 655 之间。这也意味着，它们完成于贾氏参与《五经正义》项目的同时。

2 贾公彦对“㮚氏为量”的注疏

本文研究的核心文献是贾氏《周礼•考工记》“㮚氏为量”注疏的主体部分。为了便于阅读和分析，把这段文献十段，开头分别以英语字母 a 到 j 标识。根据期刊格式，文字由繁体转为简体。《周礼•考工记》“㮚氏为量”［12］[14]：

a）量之以为鬴。深尺，内方尺而圜其外。其实一鬴。

b）以其容为之名也。四升曰豆，四豆曰区，四区曰鬴，鬴六斗四升也。鬴十则锺。方尺，积千寸。于今粟米法，少二升八十一分升之二十二。其数必容鬴。此言大方耳。圜其外者，为之唇。

c）［疏］注“以其”至“之唇”。[15]释曰：言“量之以为鬴”者，谓量金汁入模，以为六斗四升之鬴。云“深尺，内方尺”者，此据模之形状。云“圜其外”者，谓向下方尺者，鬴之

6 这一点主要体现在两方面：一是“㮚氏为量”中贾公彦的算法特色在贾氏注疏中的也有体现；二是在唐代其他学者对于儒家经典的注疏中（如孔颖达等注疏《五经正义》），也存有类似特色的算法。参见［5］。

7 唐代官方《五经正义》项目分为两个阶段。第一个阶段是在太宗时期，由孔颖达主持。项目开始的时间，现在还不清楚，但可以确定是在颜师古贞观七年（633 年）考订五经之后。（［6］）孔颖达在五部经典的序中都提到贞观十六年（642 年），完成了对五经的注疏。因此《五经正义》第一阶段完成于 642 年。也有学者论证，孔颖达主持时期，还可以分为两个阶段。（［7］）

8 据《旧唐书》孔颖达传，其逝世于贞观二十二年（648 年）。（［2］，2603 页）同时，据于志宁碑文知孔氏活了 75 岁。由此推论他生于 574 年。（参见［8］）

9 初唐的五经指《周易》、《尚书》、《毛诗》、《礼记》、《春秋》五部儒家经典。

10 《五经正义》原名《五经义赞》，后由太宗的诏令改为《五经正义》。（［9］）

11 根据新旧唐书，长孙无忌因谋反的罪名逝于显庆四年（659 年）。（［6］，2456 页；［8］，4022 页）

12 孔颖达《五经正义》完成之后，学者们对于注疏仍然有许多争论和讨论。因此高宗时期重新启动了对《五经正义》再注疏。当时孔颖达已经去世，改由长孙无忌主持。其结果基本就是传本《五经正义》。这一阶段在 651-653 年。

13 据贾公彦的官职推知他参与《尚书正义》是在五经正义的第二阶段，即长孙无忌主持的阶段。

14 《十三经》版本繁多，本文以阮元校刻之《十三经》为底本，并参考孙诒让《周礼正义》（［12］），和北大出版的《十三经》繁体标点本（［13］）。

15 笔者起初遗漏了此句。经匿名审稿人建议补上。此句旨在标识注疏的范围。

形。向上谓之外。绕口圆之，又厚之以为唇。云“其实一鬴”，受六斗四升也。

d）云“以其容为之名也”者，此量器受六斗四升曰釜，因名此器为鬴。故云以其容为之名也。云“四升曰豆”已下至“则锺”，《左氏传》昭三年，齐晏子辞。连引豆、区、釜、锺者，以其四者皆量器之名也。

e） 云“方尺，积千寸”者，云方尺者，上下及旁径为方尺。纵横皆十破，一寸一截。一截得方寸之方百，十截则得千寸也。又云“于今粟米法”者，算术有算粟为米之法，故云粟米法也。

f）算法：方一尺，深尺六寸二分，容一石。如前以纵横十截破之。一方有十六寸二分，容一升。百六十二寸，容一斗。千六百二十寸，容一石。

g）今计六斗四升为釜。以百六十二寸受一斗。六斗各百，为六百。六斗各六十，六六三十六，又用三百六十。六斗又各二寸，二六十二，又用十二寸。总用九百七十二寸，为六斗。

h）于千寸之内，仍有二十八寸在。于六斗四升曰鬴，又少四升未计入。今二十八寸，取十六寸二分为一升，添前为六斗一升，余有十一寸八分。

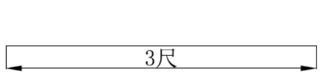
i）又取一升分为八十一分，以十六寸二分，一寸当五分。十寸当五十分。又有六寸，五六三十，又当三十分。添前为八十分。是十六寸当八十也。仍有十分寸之二，当一分。都并十六寸二分，当八十一分。

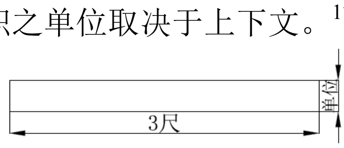
j）如是，十一寸八分于八十一分，当五十九。更得八十一分升之二十二分，始得一升。添前为六斗二升。复得二升，乃满六斗四升为鬴也。

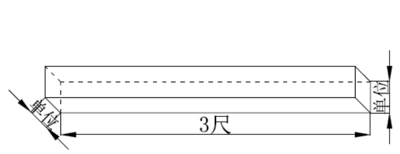
这段文献由三部分组成：《周礼•考工记》经文，即 a 段；汉代大儒郑玄对经文的注释，即 b 段；贾公彦进一步的注疏，即从 c 到 j 段。

a 段对于鬴的形制言说简略。[16] 在 b 段中，郑玄对 a 段进行了注释。他先引用《春秋左传》中对鬴的记载“四升曰豆，四豆曰区，四区曰鬴”，得到鬴的容积是六斗四升，即 1 鬴=4 区＝16 豆＝64 升＝6 斗 4 升（1 斗＝10 升）。然后，郑玄又根据鬴的形制是一个边长为 1 尺的正方体，得到体积为 1000 寸（即“方尺，积千寸”）。

需要注意的是：郑玄的这里对于体积的表达方式，是中国古代常用的方式，即用长度表示体积，意指一个长方体，其一面为单位面积，则其长度就代表其体积。其意义与现代对于体积的表达有差别，不可混淆。王荣彬、李继闵对此有精彩的论述。[16] 这种方式同样也能表示面积。杨涤非、邹大海近年来发现军事活动中有另一种体积和容积的计量方式。[17] 后面可以看到，贾公彦注疏是基于下图 1、2、3 的表达方式：即长度可表面积和体积，表面积、体积时的单位长度和单位面积之单位取决于上下文。[17]







16 历来学者对鬴的形制有诸多争论。20 世纪王莽铜斛被发现以后，基本上学术界认同鬴的形制与王莽铜斛一致，即圆柱形，而方是用来描述外接圆的大小。参见［15］。此问题尚未解决，此处不展开讨论。

17 王荣彬、李继闵认为“假定图形化成广度为一个长度单位的长方形，用此长方形的长度数即表示面积的大小”。他们的看法实际上是说，如果是三尺表示面积，其单位宽度为一尺（感谢匿名审稿人指出这一点）。而经本文贾公彦注疏（f 段）可见，贾氏的单位宽度并非一定为一尺，也有可能是一寸，取决于文本语境。

三尺表示长度　　　　　　　　三尺表示面积　　　　　　　　三尺表示体积

图 1，2，3：古代用长度表达长度、面积和体积

这样郑玄同时得到了鬴的容积和体积。在《九章筭术》中有粟米法，可以计算容积和体积之间的换算。[18]郑玄把 1000 寸的体积换算成容积后，与 6 斗 4 升比较，其量值少 2 升 22/81 升。因此郑玄认为所谓的鬴，是一个比一尺之方更大的方（即“此言大方耳”）；而所谓的“圆其外”，则指的是这个方的唇。

本文的重点在于讨论贾公彦的注疏。其核心在于通过计算得到 2 升 22/81 升这个数量。c 段是贾公彦针对 a 段的注疏。贾公彦基本同意郑玄对于鬴之形制的看法。d 段是贾公彦针对郑玄所引《春秋左传》的注疏。此处贾氏区分了“釜”和“鬴”。即“釜”是容积单位的名称，而“鬴”是量器的名称。郑玄认为“以其容为之名也”，因此并未做此区分。

e 段，贾氏注解郑玄的“方尺，积千寸”。他认为“云方尺者，上下及旁径为方尺”，就是说“郑玄所说的方尺，是一个正方体上下和旁边边长的长度都是一尺的正方体。”为了计算这个正方体的体积，贾公彦把它纵横都截为十段，即“纵横皆十破，一寸一截”。然后，截一次得到一百个“方寸之方”，即一百个边长为一寸的正方体，它们的体积之和是一百寸；截十次就得到一千寸，是为“方尺”之体积。如下图：

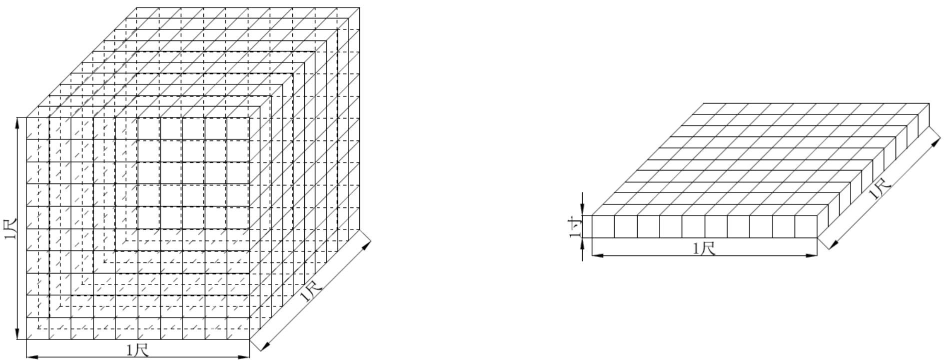


图 4，5：贾公彦注疏郑玄“方尺，积千寸”

这种通过切割正方体的方式获得正方体体积的方式是非常独特的，后面我们会做进一步分析讨论。e 段中贾氏之粟米法与郑玄注相同；所谓“筭术”，实指《九章筭术》。

f 段也是“筭法”的开始，它把容积和体积相联系，是接下来比较 1000 寸和 6 斗 4 升的关键准备工作。贾公彦先给出“方一尺，深尺六寸二分，容一石”。这就是说一个长方体，它的底面是边长为 1 尺的正方形，深 1 尺 6 寸 2 分，这样它的容积就是 1 石。然后“如前以纵横十截破之”，就是用和前面破正方体的方法一样把这个长方体纵横都截为十段。见图 6。

18 《九章筭术》卷二粟米，讲的是各种谷物交换时候的比率。关于特定谷物容积和体积之间的换算关系，实际上在《九章筭术》卷五商功委粟术中被指出，即“其米一斛积一尺六寸五分寸之一”。（［18]，5: 18a ; [19]，191 ；［20］，451）至于为何这一关系会成为容积、体积换算的标准，Karine Chemla 和马彪有精彩的论述。（［21］）

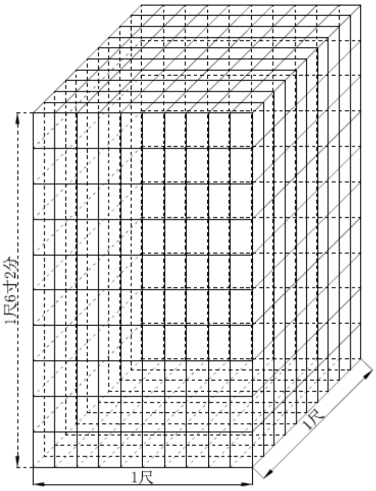


图 6：贾公彦“如前以纵横十截破之”

通过这种方法，贾公彦得到三个基础的关系。“一方有十六寸二分，容一升”，就是说一个长方体，底面是边长 1 寸的正方形，深 16 寸 2 分，容积 1 升。显然，这个小长方体是之前的大长方体的 1/100，因此容积也是它的 1/100，1 石的 1/100 正是 1 升。“百二十六寸，容一斗”，是说一个长方体，底面是边长为 1 寸的正方形，深 162 寸，它的容积就是 1 斗。显然，把之前的关系十倍，就得到这个关系。“千六百二十寸，容一石”，是说一个长方体，底面是边长为 1 寸的正方形，深 1620 寸，它的容积就是 1 石。这个一石的几何含义已经与一开始的长方体不同。这三组关系可以用下面的式子表示，左边用长度表示体积，其底面都是边长为 1 寸的正方形：

16 寸 2 分~1 升……(1)

162 寸~1 斗……(2)

1620 寸~1 石……(3)

有了这三组关系，贾公彦就可以开始比较 1000 寸和 6 斗 4 升了。从 g 段到 i 段，是他经过计算得到 2 升 22/81 升的过程。g 段贾公彦先从 6 斗 4 升出发，计算 6 斗相当于多少寸。为此，贾公彦引用关系（2），即“以百六十二寸受一斗”。贾公彦的思路是：因为 1 斗相当于 162 寸，6 斗则相当于 6 个 162 寸。进一步，相当于 6 个 100 寸加上 6 个 60 寸加上 6 个 2 寸。即“六斗各百，为六百”，相当于 $6\times100=600$。“六斗各六十，六六三十六，又用三百六十”，相当于 $6\times60=360$。“六斗又各二寸，二六十二，又用十二寸”，相当于 6×2 寸=12 寸。“总用九百七十二寸，为六斗”，是说把三个结果相加，得到 972 寸，即 6 斗相当的体积量。

贾公彦的做法相当于把 6×162 寸，分解成 6×100、6×60 和 6×2 寸三部分，求得结果后再相加。这样实际上是：把一个个位数乘以多位数的乘法分解成多个个位数乘以个位数的乘法。[19] 如此，贾氏可以直接利用九九乘法表，即“六六三十六”、“二六十二”等。同时，其做法 6×100，而不是 6×100 寸；是 6×60，而不是 6×60 寸；只有 6×2 寸。说明他是直接取把汉子数字“百六十二寸”分解为“百”、“六十”和“二寸”，进而计算。此处显示贾

[19] 匿名审稿人指出这种做法与唐宋元乘除捷算法的方向一致，这是正确的。笔者这里的分析旨在强调，贾氏的做法是这样一种简化乘除的方向以文字计算的结果，不同于基于算筹的唐宋元乘除捷算法。

氏的计算是直接从文本开始，而不用算筹。

h 段开始，贾公彦做比较。他已经得到 6 斗（容积）相当于 972 寸（体积）。因其目的在于比较 6 斗 4 升（容积）和 1000 寸（体积）。故其需要比较 4 升和 28 寸（即 1000 寸−972 寸＝28 寸）。即贾氏所云"于千寸之内，仍有二十八寸在。于六斗四升曰鬴，又少四升未计入"。

h 段后半段，贾公彦径取关系式（1）式，即 16 寸 2 分相当于 1 升。则 28 寸剩余 11 寸 8 分（即 28 寸−16 寸 2 分＝11 寸 8 分）。而 4 升除去 1 升尚余 3 升。结合前面得到的 6 斗相当于 972 寸，贾公彦现在得到 6 斗 1 升相当于 972 寸+16 寸 2 分。即是"今二十八寸，取十六寸二分为一升，添前为六斗一升，余有十一寸八分"。

于是现在的问题是比较 11 寸 8 分和 3 升。根据关系式（1），11 寸 8 分已经不满 1 升。为了计算 11 寸 8 分相当于多少升，i 段是贾公彦做的准备工作。"又取一升分为八十一分"，他另取一升分为 81 份[20]。贾公彦这里取 81 这个数字的原因是：所须注解之郑玄注给出了 2 升 22/81 升，其分母是 81，因此取 1 升分为 81 分。[21] 根据（1）式，1 升相当的体积是 16 寸 2 分，也分为 81 份，即是 0.2 寸（16 寸 2 份÷81＝0.2 寸）。0.2 寸相当于 1 份或者每 1 寸相当于 5 份（即 81 份÷16.2 寸＝5 份 / 寸）。亦即"以十六寸二分，一寸当五分"。

接着贾氏以计算确认这一关系。16 寸 2 分等于 10 寸加 6 寸加 2 分（即 2/10 寸）——因为 1 寸当 5 份，故而 10 寸当 50 份，即"十寸当五十分"；6 寸当 30 份，即"又有六寸，五六三十，又当三十分"；加起来得到 16 寸当 80 份，即"添前为八十分，是十六寸当八十也"；2/10 寸当 1 份，即"仍有十分寸之二，当一分"，加起来得到 16 寸 2 分，当 81 份，即"都并十六寸二分，当八十一分"。

这里的计算和 g 段的计算一样。相当于需要计算 16 寸 2 分×5 份，贾氏把它分解为 10 寸×5 份、6 寸×5 份和 2/10 寸×5 份，然后再把结果相加。区别之处在于单位，之前的计算中，贾公彦把"一百六十二寸"分为"一百"、"六十"和"二寸"；这里的计算，贾公彦没有把"十六寸二分"分为"十"、"六寸"和"十分之二寸"。笔者认为原因是：单位的用法跟乘法计算的数学关系和出发点有关。之前的计算，贾公彦从 162 寸（体积）相当于 1 斗（容积）开始，欲得 6 斗当多少，因此把 162 寸分为三部分；此处贾氏从 1 寸（体积）相当于 5 份（容积）开始，欲得 16 寸 2 分当多少，便不宜分解 16 寸 2 分。[22]

做完这个关键的准备工作，在 j 段中，贾公彦直接得到 11 寸 8 分相当于 59 份，即"如是，十一寸八分于八十一分，当五十九"。贾氏这里没有给出具体的计算过程，"如是"两字说明用的是和 i 段的方法，不难推测出其算法：11 寸 8 分分为 10 寸、1 寸和 8 / 10 寸，因为 1 寸相当于 5 份，10 寸相当于 50 份，1 寸相当于 5 份，8/10 寸相当于 4 份，加起来正好得到 59 份。

因为 1 升分为 81 份，于是得到 11 寸 8 分相当于 59 份，即 11 寸 8 分相当

---

20 贾公彦用的术语是"分"，为了 11 寸 8 分的分做区分，因此我称之为"份"。实际上，贾公彦这里分的意思是 parts，展现了他的分数概念，因此称为"份"是基本恰当的。

21 这是贾公彦注解分数的常用做法，我另有文章做细致的分析。

22 从现代数学的角度看，贾公彦的做法相当于分解被乘数时，被乘数依据汉子数字分解为诸部分（如 g 段）；分解乘数时，则乘数各部分须明确单位（如 i 段）。但因为贾公彦时代，中国人没有明确的"被乘数 multiplicand"和"乘数 multiplier"的概念，因此说"单位的用法跟乘法计算的数学关系和出发点有关"。

于 59/81 升。59/81 升需要和 3 升比较。差 22/81 升可以满一升，另一边得到 6 斗 2 升，即“更得八十分升之二十二分，始得一升”；再得到 2 升，才满 6 斗 4 升为鬴的容积。即“添前为六斗二升。复得二升，乃满六斗四升为鬴也”。这说明 1000 寸和 6 斗 4 升差 2 升 22/81 升，即贾氏完成了对于郑玄注的注解。表 1 清楚地说明贾公彦注疏的过程。

表 1: 贾公彦“㮚氏为量”中的计算过程

步骤	任务	方法	文献
1	注疏“方尺，积千寸”	切割正方体（1 尺×1 尺×1 尺）	e 段
2	比较 1000 寸和 6 斗 4 升，注疏“二升八十一分升之二十二”	“算法”的开始	f 段
3	得到三组以单位面积寸为基础的体积、容积关系式（1）、（2）、（3）	切割长方体（1 尺×1 尺×1 尺 6 寸 2 分），推理计算	
4	计算 6 斗相当于多少寸 6 斗相当于 972 寸	利用关系式（2），推理计算	g 段
5	比较 28 寸和 4 升		h 段
6	28 寸＝16 寸 2 分＋11 寸 8 分 28 寸相当于 1 升加 11 寸 8 分 6 斗 1 升相当于 972 寸加 16 寸 2 分	利用关系式（1），推理计算	
7	计算 11 寸 8 分相当于多少升	利用郑玄注数据 2 升 22 / 81 升，推理计算	i 段
8	取 1 升分为 81 份，得到 1 寸等于 5 份		
9	11 寸 8 分相当于 59/81 升		j 段
10	6 斗 1 升 59/81 升相当于 1000 寸（972 寸加 16 寸 2 分加 11 寸 8 分）		
11	再加 22/81 升，得到 6 斗 2 升		
12	再加 2 升，得到 6 斗 4 升		
13	因此 1000 寸和 6 斗 4 升差 2 升 22/81 升，即郑玄所云		

3 贾公彦数学知识之特色

本节将进一步深入分析其数学知识之特色，并将之与以《九章筭术》为代表的传统数学做对比。

3.1 注疏和算法的结构

首先可以注意到贾公彦算法的结构是很特殊的，不同于《九章筭术》的“术”。贾公彦的注疏是针对《周礼•考工记》经文和郑玄注的。唐人注解经典遵循“疏不破注”的规范，由于贾公彦的算法是注疏的一部分，因此也必须遵循这一规范。下面具体说明贾公彦疏与郑玄注的一一对应性。

在“㮚氏为量”这个例子中，是郑玄提到了 2 升 22/81 升，因此贾氏算法是针对郑玄注的。在 b 段中，郑玄注由三方面构成：其一，利用《春秋左传》，说明鬴的容积是 6 斗 4 升；其二，“方尺，积千寸”，说明鬴的体积等于 1000 寸；其三，利用粟米法，比较两者的差距，得到 2 升 22 / 81 升。

对于一，贾公彦进一步引用《春秋左传》加以说明，并区分“釜”和“鬴”。对于二，贾公彦利用切割正方体的办法，说明了“方尺”的体积确实等于 1000 寸。对于三，就是贾公彦的算法，之前已经分析过它详细的情况。由此可见，贾公彦注疏的篇章布局采取一一对应郑玄注的严格形式。

接来下进一步分析贾公彦对于“六斗四升”、“一千寸”和“二升八十一

分升之二十二”三个郑玄提出数量的处理。郑玄说“于粟米法，少……”，说明这里采用比较的方法，而其后贾公彦确实采用了比较的方法。在算法中，先处理“六斗”，再处理“四升”，这就是说他是把六斗和四升分开处理的。同时，他是通过先得到“八十分升之二十二”，再得到“二升”，最后得到“二升八十一分升之二十二”的。这就是说，他是分开处理二升和八十一分升之二十二的。最后，对于“八十分升之二十二”，贾公彦是先把一升分为八十一份，再通过计算得到的。

可见，对于郑玄提出的三个数量，贾氏的疏解也是很严格的。贾公彦遵循了郑玄比较的方法，分开处理六斗和四升；通过算法，逐步得到二升和八十一分升之二十二。故而可以说，贾公彦注疏和算法的结构，是基于郑玄注的。

3.2 对数的认识

贾公彦分开处理六斗和四升，同是分开处理二升和八十一分升之二十二。在 j 段中，他确认了八十一分升之二十二，就是“八十一分升之二十二分”。从贾氏的其他注疏中可见，这种做法是有一般性的。即是说，把六斗四升理解成两部分的和：六斗加上四升。把二升八十一分升之二十二（分）理解成三部分：二升，二十二份和把一升分为八十一份这样一个操作。

贾氏算法的结构与他对于数的认识是一致的。他的做法是把一个数依据单位和语句分为多个部分，进而计算。

这种对数的认识和算法与以《九章筭术》为代表的传统数学是不同的。对于 6 斗 4 升这样的数，是先化为统一单位，进而计算（不会理解成两部分）。[23]对于分数，传统是筹算的做法，计算结果若有余数，则自然成一个分数；若计算开始有分数，则用通分之法。[22]而不会把 2 升 22/81 升理解成三部分。

3.3 对图形的认识

贾公彦两次切割的几何体（图 4、5、6）。在第二例中，他说“如前”，说明两次切割的方法是一样的。[24]第一次的切割的目的是证明，“方尺，积千寸”。他通过切割的方法把一个边长为 1 尺的正方体，分成 1000 个边长为 1 寸的小正方体。由于每个小正方体的体积是 1 寸，截一次可以得到图 5 里扁平的六面体，它由 100 个小正方体组成，体积是 100 寸，截十次就得到 1000 寸，所以边长为 1 尺的长方体，体积是 1000 寸。这里，贾公彦是利用切割的方法证明了“方尺，积千寸”的结果。

《九章筭术》卷一，李淳风等注释“方田”：“按：一亩田，广十五步，纵而疏之，令为十五行，即每行广一步而纵十六步。又横而截之，令为十六行，即每行广一步而纵十五步。此即纵疏横截之步，各自为方。凡有二百四十步，为一亩之地，步数正同。以此言之，即广纵相乘得积步[25]，验矣。”（［17］，1:2a；［19］，10 页；［20］，155）这里，李淳风把一亩 15 步×16 步的田用两种方法切割，分别证明了方田的算法，即“验矣”。这种做法和贾公彦的做法是类似的，但两者目的不同。

在第二次切割中，贾公彦通过切割长方体，得到三组关键体积、容积的关系，是后面算法的基础。这种做法以几何为基础，进而得到所需之数据，是传统数学文献中鲜见的。[26]

---

23 如化为 64 升，然后用算筹摆出 64，进而计算。

24 实际上，这种切割方法在贾氏其他注疏中也有体现。

25 “积步”宋本作“积”，根据［19］、［20］校为“积步”。

26 数学文献中的数据基本通过筹算得到，图形只是作为辅助的解释。更多贾公彦类似算法的例子，请参见［5］。

3.4 推理的方式

贾公彦计算的一大特点是推理的方式自然、易懂。[27] g 段和 i 段之计算是把一个个位数、多位数的乘法，分解成多个个位数之间的乘法，从而可以利用九九表进行计算。i 段和 j 段为了计算 22/81 升，又把一升分为八十一份。此外，两次切割几何体的做法，第一次是利用“边长为 1 寸的长方体体积是 1 寸”的自然定义，进行切割；第二次，是利用“所求的关系是以单位面积寸为基础”这个前提，进行切割。总之，读者只要追随其注疏，便自然可以理解其算法之理。这与中国古代数学“寓里于算”[28]的特点是一不一样的。[29]

4 结语

由上述对“㮚氏为量”的分析，见其蕴含之数学知识与传统算经是不尽相同的。同时，在贾公彦其他注疏中，也体现出了类似的特色。而且，在初唐群儒编定的《五经正义》中也存有类似特色的数学知识。因而，这一特色具有一般性。

两类文献[30]中数学知识之间的关系是怎样呢？贾公彦的算法中提到了粟米法，在《周礼注疏》、《仪礼注疏》中，他也多次提到《九章筭术》。这说明贾公彦是知道经典数学著作的。但是，除了注疏的时候引用到术名以外，他没有在任何其他地方提到《九章筭术》的数学术语，也没有在算法中用到任何传统的“术”。贾氏的算法不同于《九章筭术》的“术”。

值得注意的是，贾公彦对于算筹的运用不同与传统数学。《孙子筭经》给出了筹算乘除法的方法。在 g 段和 i 段中贾公彦的乘法计算是依赖推理、汉字数字表达和九九表，不需要算筹。在 i 段和 j 段，对分数的处理亦仅用到推理、汉字和九九表。这暗示了贾公彦可能不用算筹。另一方面，即便贾氏使用算筹，他的算法对算筹用量的需求也很低[31]［24］——符合由算筹、算袋而得出的简单推论。[32] 总之，贾公彦很少或者根本不用算筹。

651-653 年间，贾公彦参与刊定《尚书正义》，其时已经是太学博士。此外，两个年轻人李玄植和王真儒也参与了《五经正义》的刊定，他们当时都是四门助教，而后来都成为唐代重要的儒家学者。（［9］，1428 页）长孙无忌《进五经正义表》中亦提到了贾公彦、李玄植、王真儒都是参与者。［27］具体而言，李玄植是贾公彦的学生，跟他学习三礼（即《周礼》、《礼记》、《仪礼》），高宗时深受器重。（［6］，4950 页）在 7 世纪 60 年代，王真儒成为司经大夫。（［6］，4792 页）在贾氏注疏儒经的同时，初唐另一位重要学者，李淳风也在主持注释《筭经十书》（完成于显庆元年，即 656 年（［6］，2719 页））。有趣的是，王真儒也是参与者。（［6］，2719 页）当时他的官位已经是太学助教。根据《旧唐书》职官制，四门助教是“从八品上阶”，太学助教是“从七品上阶”（［6］，1798、1800 页），比四门助教高一品。因

27 此点承蒙林力娜（Karine Chemla）教授告知。

28 “寓理于算”是李继闵先生提出的关于中国古代数学的特点。（［23］）

29 另一方面，也进一步暗示了贾公彦算法并不存在文本之外的筹算过程，读者依据文本便可自然理解其算法过程。

30 指本文讨论之儒学经典和以往研究集中的算学经典。

31 关于算筹用量和算法的关系，参见论文［24］。

32 从颜师古对《汉书》的注，得知唐代规定官员必须佩戴算袋（［25］）；而通过对贾公彦算法的分析可以感到，算袋里得算筹也许只具有象征意义。对于算筹、算袋制度的研究，李俨先生有详尽得讨论。（［26］）

此可以推测王真儒参与注解算经稍晚于他参与注解儒家经典。这些事实说明了初唐数学文化的多样性和复杂性。

在儒学经典中存在着与传统算经不尽相同的数学知识，两者的异同和互动长期存在和发展。在宋、明、清代学者对儒家经典的注疏中，同样可以看到两者的分野和关联。另一方面，郑玄是汉代大儒，他也提到数学；刘徽是中国古代最重要的数学家之一，他的《九章筭术注序》引用到了《周礼》；刘焯是隋朝重要的儒学家，他独立注解了《五经》，而同时他他也在历算上有重要的贡献“二次内差法”。孔颖达曾问学于刘焯，而李淳风对刘焯的皇极历又极为推崇[28]。这说明了儒学与数学的复杂关系。代钦曾研究过儒家思想和中国传统数学的关系，他以分析数学文献为主，而很少用到儒家经典。[29]本文的初步研究说明：儒学经典中的数学知识值得进一步深入研究。

致谢 本文的构思、写作、修改中得到林力娜（Karine Chemla）、徐泽林、韩琦、郑诚、汪小虎等学界朋友的帮助，匿名审稿人详细审阅了稿件，提出了修改意见，Julia Legh-Smith、Daniel Morgan 修改了英文摘要，陈晓帮助绘图，谨此一并表示感谢！

参考文献

1 郭书春主编. 中国科学技术史•数学卷[M]. 北京：科学出版社，2010.
2 马宗霍. 中国经学史[M]. 上海：上海书店，1984. 据商务印书馆 1937 年版本复印.
3 张道一. 考工记注释[M]. 西安：陕西人民美术出版社，2004.
4 程艳美. 贾公彦语言学研究[J]. 济南：山东师范大学硕士论文，2004.
5 Zhu Yiwen. Different cultures of computation in seventh century China from the viewpoint of square root extraction[J]. *Historia Mathematica*. forthcoming.
6 ［后晋］刘昫等撰. 旧唐书[A]. 北京：中华书局，1975. 2594.
7 白长虹.《毛诗正义》撰者及编撰时间考论[J]. 南京社会科学，2004, 6: 79-84.
8 ［清］王昶. 金石萃编[A]. 卷四十七，清嘉庆十年刻同治钱宝传等补修本.
9 ［宋］欧阳修等撰. 新唐书[A]. 北京：中华书局，1975. 5644.
10 ［宋］王溥. 唐会要[A]. 北京：中华书局，1955. 1405.
11 ［宋］王钦若.册府元龟[A]. 北京：中华书局，1960. 7303.
12［清］阮元校刻. 十三经注疏[A]. 北京：中华书局，1980. 916-917.
13［清］孙诒让撰，王文锦、陈玉霞点校. 周礼正义[M]. 北京：中华书局，1987.
14 李学勤主编. 十三经注疏• 周礼注疏[A]. 北京：北京大学出本社，2000. 繁体版.
15 关增建. 祖冲之对计量科学的贡献[J]. 自然辩证法通讯，2004, 26(1): 71-72.
16 王荣彬、李继闵. 中国古代面积、体积度量制度考[J]. 汉学研究（台北），1995, 13(2): 159-167.
17 杨涤非、邹大海. 关于中国古代体积与容积计量方式的新发现[J]. 自然科学史研究，2014，35(3): 269-280.
18 九章筭经[A]. 宋刻算经六种[A]. 北京：文物出版社，1980. 据上海图书馆藏宋嘉定六年本影印.
19 郭书春汇校. 汇校《九章筭术》（增补版）[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，2004.

20 Karine Chemla 林力娜 and Guo Shuchun 郭书春. *Les Neuf Chapitres*[M]. Paris: Dunod, 2004.
21 Karine Chemla 林力娜, Ma Biao 马彪，How the earliest known mathematical writings highlight the state’s management of grains in early imperial China?[J]. *Archive for History of Exact Sciences*, 2015, 69(1):1-53.
22 朱一文. 再论《九章算术》通分术[J]. 自然科学史研究，2009, 28(3): 290-301.
23 李继闵. 试论中国传统数学的特点[A]. 吴文俊主编. 中国数学史论文集（二）[M]，济南：山东教育出版社，1986. 9-18.
24 朱一文. 数：筭与术—以九数之方程为例[J]. 汉学研究（台北），2010, 28(4): 73-105.
25［汉］班固撰.［唐］颜师古注. 汉书[A]. 北京：中华书局，1964. 3992.
26 李俨. 筹算制度考[A]. 李俨著. 中算史论丛第四集[M]，北京：科学出版社，1955. 1-8.
27［唐］长孙无忌. 进五经正义表[A].［清］董浩等编. 全唐文[A]. 北京：中华书局，1983. 1375.
28 陈美东. 中国科学技术史•天文学卷[M]. 北京：科学出版社，2003. 355.
29 代钦. 儒家思想和中国传统数学[M]. 北京：商务印书馆，2003.

A Preliminary Research on the Mathematical Knowledge in the Confucian Classics: The Case of Jia Gongyan’s commentary on *Rites of Zhou*

Zhu Yiwen
(*Department of Philosophy* & *Institute of Logic and Cognition*, *Sun Yat-sen University*, *Guangzhou*510275, *China*)

Abstract By analysing an excerpt of Jia Gongyan’s commentary on the *Rites of Zhou*, this paper uncovers different mathematical knowledge as compared with that previous known from Chinese mathematical sources, for example the *Nine Chapters on Mathematical Procedures*. The differences cover several aspects: structure of procedure, cognition of numbers and figures, mode of reasoning, and the use of counting rods. On the other hand, similar mathematical knowledge to that of Jia Gongyan exists in other Confucian canons. Moreover, a scholar, Wang Zhenru, commented on Confucian canons with Jia Gongyan, and later commented on mathematical books with Li Chunfeng. This paper emphasizes the necessity for further study of the mathematical knowledge in Confucian canons, and the relationship between Confucianism and mathematics.

Key words Confucianism, mathematics, Jia Gongyan, *Rites of Zhou*, Li Chunfeng