

Numérisation de la suite des nombres et faits numériques.

François Conne

▶ **To cite this version:**

François Conne. Numérisation de la suite des nombres et faits numériques. : Des dénombrements à la division euclidienne - Activités numériques élémentaires à l'école primaire - ÉPISODE 3 (suite). Math-Ecole, 1988, 133, pp.20-23. halshs-01048712

HAL Id: halshs-01048712
https://shs.hal.science/halshs-01048712

Submitted on 11 Feb 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numérisation de la suite des nombres et faits numériques

par François Conne, Genève
Quatrième épisode

3. Qu'entendre par l'expression: faits numériques?

3.1. Pourquoi cette expression?

a. A cause d'une connotation réaliste, objective. Mais pas pour autant empiriste. Les «faits numériques» ne sont pas dans le milieu, mais, à partir d'un certain moment dans l'élaboration de la connaissance, **ils font réalité.** Dit autrement. Si les symboles sont susceptibles d'être réalité – du moment où par l'entremise des représentations ils acquièrent une signification, s'associent à des signifiés – on comprendra qu'on puisse parler d'exploration, par le sujet, de l'univers symbolique. Mais rappelons que ce qui nous intéresse ici, ce sont des symboles numérisés; l'expression d'**univers numérique** paraît donc bien convenir.

b. Avant de parler mathématique plus précisément, une parenthèse concernant le sujet. Situons-le dans cette affaire. Le sujet explore donc cet univers, il y décèle des relations, des propriétés, des règles, ..., des faits numériques. Je ne considérerais pas pour autant tout ce qui tombe sous l'attention du sujet comme un fait numérique. Je ne retiendrai que ceux qui ont une stabilité suffisante (pour le sujet) et sont susceptibles d'être attendus (de l'ordre du prévisible) ou d'être utilisables. Ceci écarte de la catégorie des erreurs ou des relations fausses. Mais à l'avantage de ne pas toutes les écarter, on doit considérer certaines fausses inférences, certaines relations qui ne sont que redondances à d'autres faits plus occultes, comme des *faits numériques* (subjectifs).

Mais refermons la parenthèse. Car à moins de faire une esquive du genre *sujet épistémique* contre *sujet réel,* on ne peut pas non plus s'en tenir seulement à cette attribution des faits numériques au sujet.

c. J'en reviens donc aux mathématiques et aux systèmes symboliques. Et c'est le moment de se demander qu'est-ce qui fait un *fait numérique,* c' est-à-dire de se rappeler l'aspect producteur des systèmes formels. Ici, il est possible d'aborder cette question sur un exemple simple.

3.2. **Exemple:** J'ai évoqué comment la relation de successeur venait à être isolée du contexte de la suite numérique. C'est un fait numérique. L'exemple que je vais prendre est analogue mais se situe à un autre niveau de réalité. Prenons la régularité qui veut que les sommes suivantes *se terminent* toujours par 9.

2+7=9 12+7=19 2+17=19 12+17=29 ... 4642+5837=????9.

J'aurais pu écrire à peu près la même chose ainsi: «un nombre se terminant par *deux* additionné à un nombre se terminant par *sept* donne un nombre se terminant par *neuf.*» Cette phrase n'est cependant pas tout à fait identique. D'abord elle n'indique qu'évasivement le cadre où on se place, et laisse planer par exemple l'ambiguïté de savoir si on parle d'un nombre tel qu'écrit ou tel que prononcé. Heureusement ici peu importe, la même relation est vraie pour nos deux systèmes de numération (Ouf!). Ah mais c'est dire que ma reformulation est plus générale que ce que j'ai écrit ci-dessus? Oui, et non. Rien n'empêche pour mon lecteur de prononcer, ou de ne pas prononcer les signes qu'il voit sur le papier... Enfin la formulation *française* garde un caractère de généralité qui n'est que suggérée par la suite d'égalité, et possède en plus une connotation de règle.

Demandons-nous maintenant ceci: **cette relation numérique à quoi l'attribuer?**

Première approche: Exprimons les quantités en jeu dans un autre symbolisme, par exemple celui-ci: un nombre sera représenté par autant de traits verticaux: 2→ // 7 → /////// et gardons les signes + et =:

2 + 7 || + ||||||| = |||||||||
12 + 7 |||||||||||| + ||||||| = ||||||||||||||||||
2 + 17 || + |||||||||||||||| = ||||||||||||||||||

Donc même en utilisant les signes + et = pour bien distinguer les signes numériques en présence, on n'arrive pas à maintenir la relation, le fait s'estompe. Ceci tient à la numération qui procède à une décomposition des nombres en partie. ce qui n'a pas cours dans une représentation par une collection. Ah mais c'est bien sûr! En termes de collections, cela ne veut rien dire de parler *d'un nombre se terminant par deux (sept ou neuf).* Bien. Et cela tient-il à la position ou à la base de numération? Cela ne tient pas à la base. Si la base est inférieure alors ce *fait* va se ramener à un *fait correspondant,* (car (a+b) ≡ (a)+(b) modulo n). Si la base est supérieure, on retrouve la même figure. Par exemple en base douze:

$\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{9}$, $\boxed{1}\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{1}\boxed{9}$, etc.

Mais alors, ce sont d'autres *collections* qui sont ainsi liées.

$\boxed{1}\boxed{2} + \boxed{7} = \boxed{1}\boxed{9}$ en base douze donne en collections de barres:
|||||||||||| + ||||||| = |||||||||||||||||| (14 + 7 = 21 puis 2 + 19 = 21, 26 + 7 = 33, etc.). On retrouve donc la relation (le fait) considéré ne concerne pas le niveau des collections d'objets. Je dirai que le fait numérique considéré se situe à un certain niveau symbolique (en deçà duquel il n'existe pas).

Deuxième approche: Regardons alors au-delà du niveau de l'écriture des nombres en base dix. On aura par exemple l'égalité générale suivante: (n+2) + (m+7) = [(n+m) + 9)]. Donc on retrouve 2, 7, 9. Mais ceci pourra tout aussi bien conserver nos nombres que *n'importe quoi:*
18 + 15 = 33 c'est bien aussi (16 + 2) = (8 + 7) = (24 + 9), de même que 33 = (14 + 19) = (12 + 2) + (12 + 7) = (24 + 9) où j'ai pris n = m. Bref, en passant au niveau d'une écriture algébrique (des lettres et des coefficients), j'ai considérablement élargi le champ de validité de mon *fait numérique* jusqu'à ce que ne subsiste que de simples (et anodines) égalités additives. Que reste-t-il donc de mon fait? Que l'expression combinée de l'associativité et de la commutativité de l'addition.

$$(n+2) + (m+7) = n+2+m+7 = n+m+2+7 = (n+m) + (2+7) = (n+m) + 9.$$

J'avais pourtant autre chose dans ma relation. Ah oui, une fois encore que signifie, au vu d'une notation algébrique, *un nombre qui se termine par deux?* Ah oui, il y avait dans mon fait un ingrédient de plus, la décomposition de la numération est en dizaines et unités (ou puissances de dix successives). C'est donc par l'expression algébrique: 10 n+2 qu'on arrive à isoler le chiffre qui va terminer l'écriture du nombre (n est un nombre, pas forcément un chiffre).

(10 n+2) + (10 m+7) = 10 (n+m) +9. Voilà une meilleure expression. Et que met-elle donc en jeu? La distributivité de la multiplication sur l'addition. Tiens une nouvelle propriété fondamentale qui s'adjoint à l'associativité et la commutativité.

Troisième approche: Bref, le fait numérique considéré tient donc aux propriétés structurelles de l'addition et de la multiplication. Elle repose aussi sur un fait numérique élémentaire – du niveau des collections et des noms de nombres celui-là – à savoir que 2 + 7 fait 9.

Mais une question, est-ce la seule somme qu'il fallait savoir faire? Oui puisque toutes les autres sommes des chiffres présents dans les nombres considérés s'avèrent superflues pour notre relation. Oui mais pour cela faut-il encore le savoir? C'est-à-dire connaître le fait numérique considéré, ou alors pouvoir le prévoir à partir de ce que l'on connaît du système de numérations de positions en base dix. Ainsi, si on veut que l'élève porte attention à ce fait, on lui demandera d'effectuer des sommes: 2+7, 12+7, 22+7, 432+17, etc. et on lui fera faire *des sommes superflues* pour qu'il se rende compte des régularités *au-delà* de ce qui varie de cas en cas. Nous pouvons donc répondre: 2+7=9, la seule somme qu'il est nécessaire de savoir, mais peut-être pas la seule somme qu'il est utile de savoir! Et nous voilà plongés en pleine didactique.

Récapitulation:

Mais revenons-en au fait. Ainsi donc notre relation est un fait numérique attribuable à la numération de position en base dix écrite (mais aussi en l'occurence à la numération parlée), **«c'est elle qui, exploitant les propriétés structurelles numériques, produit le fait, ceci se manifeste par toutes les relations (faits) que cette propriété renvoie** (toutes les sommes autres que 2+7=9, toutes les sommes autres que celle des chiffres des unités), **ou, si vous le voulez, rend impertinentes.** Nous retrouvons ici une fameuse phrase de Guy Brousseau: «La compréhension se manifeste par un rejet (de la part du sujet) de ses modèles antérieurs». On peut exprimer ceci de multiples autres façons, dire par exemple que le fait numérique est une relation codifiée; dire que le système symbolique (la numération) en est le creuset; etc. Je retiens pour ma part une idée à laquelle je tiens, le fait numérique est une teinte conférée par un outil formel et conventionnel (donc particulier) aux propriétés structurelles générales du nombre (générales mais *amorphes*).

3.3. Conclusions

Je ne dirai donc qu'un fait:

a. **se manifeste** à un certain niveau de symbolisme (marque d'un niveau de réalité);
b. **s'explique** à un niveau supérieur par la mise en œuvre des propriétés structurelles numériques dans le système symbolique considéré;
c. **repose** aux niveaux inférieurs sur des faits numériques plus élémentaires disponibles (et que l'on peut considérer vus ainsi d'en haut comme ponctuels).

Il convient alors pour l'enseignement d'avoir le souci de la constitution des faits numériques avant de s'engager à les expliquer on a en retracer les fondements élémentaires. Au lieu de chercher tant à affiner les procédures d'évaluation des élèves la pédagogie (aidée de la didactique des mathématiques) devrait sérieusement s'atteler à la question suivante: **comment s'assurer que l'enseignement se place au niveau approprié?**