

Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?

Sylvie Coppé, Brigitte Grugeon

► **To cite this version:**

Sylvie Coppé, Brigitte Grugeon. Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?. Colloque de la CORFEM, Jun 2009, France. 2010. <halshs-00959612>

HAL Id: halshs-00959612

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00959612>

Submitted on 14 Mar 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le calcul littéral au collège. Quelle articulation entre sens et technique ?

Sylvie Coppé, IUFM de Lyon, Université Lyon 1

Brigitte Grugeon-Allys, IUFM d'Amiens, Université Jules Verne de Picardie

Introduction

Dans ce texte, nous interrogeons les choix d'organisation de l'enseignement du calcul littéral au collège. En particulier, nous étudions une question cruciale, celle de l'articulation entre sens et technique dans la mise en œuvre d'un calcul intelligent. Notre enjeu est d'étudier des pistes pour, d'une part, promouvoir un calcul intelligent au service de la résolution de problèmes et, d'autre part, favoriser la résolution de problèmes dans laquelle le calcul algébrique est mobilisé au service d'un but comme la modélisation, la généralisation ou la preuve. Nous cherchons aussi à préciser ce qui se joue dans la transition collège-lycée en ce qui concerne cet enseignement. Des termes des programmes lors de cette transition ne sont d'ailleurs pas neutres : le terme « calcul littéral » est transformé en « calcul algébrique ».

De nombreux travaux de recherche en didactique de l'algèbre ont été menés depuis 1980 tant en France que dans le monde anglo-saxon. Le chapitre 16 de C. Kieran du Handbook 2007 « Learning and teaching algebra at the middle school through college levels » revisite ces derniers travaux de recherche. Ils éclairent des pratiques d'enseignement et des difficultés rencontrées par des élèves tant au niveau national qu'international. Nous mettons ici en évidence des difficultés à partir de quatre exercices donnés dans le cadre d'évaluation ou d'examen.

Nous nous appuyons d'abord sur deux exercices de l'évaluation internationale TIMSS 2003 pour le 8e grade proposée dans quarante huit pays dans le monde, dont les USA et la France.

The three figures below are divided into small congruent triangles.

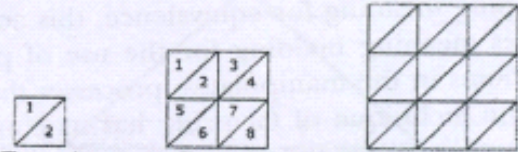


Figure 1 Figure 2 Figure 3

A. Complete the table below. First, fill in how many small triangles make up Figure 3. Then, find the number of small triangles that would be needed for the 4th figure if the sequence of figures is extended.

Figure	Number of Small Triangles
1	2
2	8
3	
4	

B. The sequence of figures is extended to the 7th figure. How many small triangles would be needed for Figure 7?

Answer: _____

C. The sequence of figures is extended to the 50th figure. Explain a way to find the number of small triangles in the 50th figure that does not involve drawing it and counting the number of triangles.

Figure 1 : Exercice de l'évaluation internationale TIMSS 2003 pour le 8e grade

L'objectif de cet exercice est de déterminer le processus de calcul pour dénombrer le nombre de triangles de la figure n puis d'exprimer le nombre de triangles en fonction de n . Seuls 24% des élèves ont calculé le nombre de triangles à la cinquantième étape. Ils ont éprouvé des difficultés à exprimer de façon générale le nombre de triangles à la n ème étape. Mais les résultats sont meilleurs aux USA qui développent des exercices sur les « patterns » que dans d'autres pays.

Nous retrouvons des difficultés analogues concernant la résolution de l'exercice suivant :

*Sam wanted to find three consecutive even numbers that add up to 84.
He wrote the equation $k + (k+2) + (k+4) = 84$.
What does the letter k represent ?*

*A. The least of the three even numbers
B. The middle even number
C. The greatest of the three even numbers
D. The average of the three even numbers*

Figure 2 : Exercice de l'évaluation internationale TIMSS 2003 pour le 8e grade

Seuls 24,7 % des élèves de ce niveau scolaire ont réussi cet exercice et trouvé ce que représente k .

Deux exercices d'évaluation en France éclairent les rapports institutionnels à l'algèbre attendus en fin de scolarité obligatoire. Cet exercice a été proposé, lors de l'évaluation nationale de seconde en 2001 :

On travaille sur les nombres entiers positifs, et l'on considère le programme de calcul présenté ci-dessous

Choisir un nombre entier positif

Multiplier par 2

Ajouter 1

Elever au carré

Soustraire 1

Multiplier par 3

Résultat du programme de calcul

*I) 1. Compléter les deux schémas
2. Vérifier que le résultat du programme de calcul peut s'exprimer en fonction du nombre choisi n par $12n^2 + 12n$*

II) 1. (...)

*2. a) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de 4
b) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de n
c) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de $12n$ et de $(n+1)$*

Figure 3 : Exercice de l'évaluation nationale de seconde 2001 en France

L'objectif de cet exercice d'évaluation est double : déterminer une expression générale du programme de calcul en mobilisant une lettre comme nombre généralisé puis prouver les trois propriétés numériques énoncées en mobilisant la factorisation au service de la démonstration. Ici, le travail de preuve conduit aussi les élèves à articuler les conceptions procédurale et structurale des expressions algébriques dans l'activité de transformation. Il doit conduire aussi les élèves à produire des expressions factorisées équivalentes à $12n^2 + 12n$ adaptées pour démontrer les propriétés de divisibilité par 4, n ou $12n$. Ici, c'est la capacité des élèves à mobiliser les dimensions sémantique et syntaxique des expressions au service du travail algébrique technique qui est évaluée. Moins de 10% des élèves ont réalisé cet exercice de généralisation et de preuve, produit une expression résultat du programme de calcul puis transformé l'expression de façon adaptée selon les trois propriétés numériques à démontrer.

En 2007, un énoncé proche de celui-ci a été donné à l'épreuve du brevet des collèges avant le changement de programme de mathématiques de la classe de troisième de collège :

On donne un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 à ce produit.
- Écrire le résultat.

1. Écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2 , on obtient 0.
2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
3.
 - a. Faire deux autres essais en choisissant à chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).
 - b. En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul? Justifier la réponse.
4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ?

Figure 4 : Problème de l'épreuve de mathématiques du brevet des collèges 2007

Comme dans les cas précédents, un nombre très faible d'élèves a utilisé l'outil algébrique pour produire une expression générale et prouvé la conjecture : « Pour tout nombre, le résultat du programme de calcul est le carré de la somme du nombre initial et de 2 ». Plusieurs raisons peuvent expliquer ces difficultés. D'abord, la preuve de la conjecture formulée suite aux questions 1, 2 et 3a) engage les élèves dans un calcul intelligent qui s'appuie sur l'interprétation des expressions algébriques et leur transformation (développement puis factorisation comme carré d'une somme) au service d'une écriture adaptée en fonction du but visé, ces transformations successives conservant l'équivalence des expressions. C'est aussi la capacité des élèves à mobiliser les dimensions sémantique et syntaxique des expressions au service d'un travail algébrique technique qui est évaluée. De plus, la résolution du problème amène les élèves à mobiliser les lettres avec plusieurs statuts : nombre généralisé, nombre indéterminé puis inconnue.

Ces exemples permettent plusieurs constats de départ :

- Les élèves éprouvent des difficultés à mettre en œuvre un calcul littéral (respectivement algébrique) fonctionnel au collège (respectivement au lycée).
- Les élèves ont du mal à mobiliser une lettre pour résoudre un problème si on ne la leur donne pas.
- Les approches visant la généralisation ou la modélisation sont encore peu mises en avant dans l'enseignement actuel de l'algèbre.
- L'algèbre est encore enseignée en privilégiant la dimension *objet* plutôt que la dimension *outil*.

Dans un premier paragraphe, nous questionnons les rapports entre sens et technique à partir d'une synthèse des résultats de recherche en didactique de l'algèbre. Préalablement, nous précisons quatre sources de signification de la pensée algébrique et caractérisons différents aspects de l'activité algébrique dans les deux dimensions *outil* et *objet*¹. L'enjeu est de dégager des éléments d'analyse pour étudier les rapports entre sens et technique en algèbre développés dans les programmes mais aussi dans les manuels. Nous voulons promouvoir un calcul intelligent au service de la résolution de problèmes et une résolution de problèmes dans lesquels on puisse mobiliser des techniques au service du but visé.

Pour ceci, nous abordons les questions suivantes en ce qui concerne l'apprentissage et l'enseignement de l'algèbre et indiquons des outils conceptuels au service de l'analyse des usages.

¹ Au sens de R. Douady (Douady 1986)

- Y a-t-il identification des différents statuts des lettres, des objets de l'algèbre en lien avec les classes de problèmes conduisant à leur donner du sens et à faciliter la flexibilité de leur usage dans la résolution de problèmes ?
- Y a-t-il prise en compte de l'évolution des niveaux de conceptualisation des objets de l'algèbre (processus / objet) ?
- Y a-t-il identification de la place du contrôle de l'équivalence des expressions dans l'activité transformationnelle articulant les dimensions sémantique et syntaxique du calcul ou principalement application technique de règles appuyée sur la syntaxe ?
- Y a-t-il articulation entre différents registres de représentation des objets de l'algèbre ?
- T a-t-il caractérisation des organisations mathématiques et étude de leur complétude (types de tâches, équilibre tâche-technique (savoir-faire), technologie-théorie (savoir) ?
- Y a-t-il prise en compte des niveaux de mise en fonctionnement des connaissances ?

Dans un deuxième paragraphe, nous exploitons ces outils conceptuels pour étudier l'évolution des programmes concernant l'enseignement du calcul littéral de collège, c'est-à-dire l'évolution du rapport institutionnel à l'algèbre et des rapports institués entre sens et technique puis comparons les caractéristiques dominantes des rapports à l'algèbre dans des manuels. Nous concluons en proposant quelques pistes pour la formation des PLC2 à l'enseignement du calcul littéral au collège.

I. Des outils conceptuels pour analyser les rapports entre sens et technique en algèbre

Comment éclairer les difficultés des élèves dans l'apprentissage de l'algèbre élémentaire à partir des recherches en didactique ? Que retenir des principaux travaux de didactique de l'algèbre pour travailler la question abordée ?

A. Aspects de l'activité algébrique à prendre en compte

1. Une double rupture épistémologique entre arithmétique et algèbre

Nous nous appuyons d'abord sur les travaux de Vergnaud (1986, 1987) et Kieran (1992). Vergnaud évoque une double rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre aussi bien dans l'analyse en termes d'*outil* au sens de Douady (1986) : opposition des caractéristiques de la résolution arithmétique par rapport à la résolution algébrique (détour formel)², que dans l'analyse en termes d'*objet* : opposition des modes d'appréhension des écritures algébriques et numériques (statut du signe d'égalité, statut des lettres), des modes de contrôle dans la transformation des écritures. Kieran développe cette rupture entre arithmétique et algèbre en termes de *fausses continuités* et *discontinuités*. Les *fausses continuités* résident dans l'utilisation des mêmes symboles et signes (signe d'égalité et d'opérations) mais avec des statuts différents selon le contexte : annonce d'un résultat ou relation d'équivalence. Les *discontinuités* sont à relier à l'utilisation de nouveaux objets (expressions littérales, formules, équations, inéquations, systèmes d'équations, fonctions), à la représentation formelle des problèmes par des équations et à l'utilisation de procédures formelles nouvelles pour les résoudre.

2. Qu'est-ce que l'algèbre élémentaire ?

Comment caractériser l'activité algébrique ? Jusque dans les années 80, l'algèbre a été considérée comme une arithmétique généralisée à travers la résolution de problèmes conduisant à leur mise en équation. Ce point de vue a été remis en question par Chevallard

²• La démarche de résolution arithmétique consiste à rechercher puis à calculer les inconnues intermédiaires dans un ordre convenable par des stratégies souvent attachées au contexte

• La démarche de résolution algébrique consiste à représenter formellement le problème (relations entre les inconnues et données) puis à utiliser des procédures de traitement formel pour trouver la solution. Dans ce cas, il faut accepter, à certains moments, un contrôle formel et non un contrôle par le sens et garder la confiance que la solution trouvée est interprétable et juste. La mise en équation d'un problème nécessite les opérations inverses de celles utilisées en arithmétique.

(1985, 1989) et Gascon (1994). Chevallard voit d'abord en l'algèbre un outil d'étude essentiel pour rendre l'accès possible aux propriétés des nombres. Le langage algébrique permet de mémoriser la genèse des expressions numériques et de faire apparaître l'information monstrative pertinente d'une expression pour prouver des propriétés mathématiques. Par exemple, « on prouve à l'aide des expressions $4p$ et $(p+1)^2 - (p-1)^2$ que la somme de deux nombres consécutifs impairs est d'une part, un multiple de 4 *via* $(2p+1) + (2p-1) = 4p$ et d'autre part une différence de deux carrés $(p+1)^2 - (p-1)^2 = 4p$ » (Chevallard 1989). Le langage algébrique s'oppose au langage arithmétique qui tend à l'achèvement des calculs. L'outil algébrique permet de formuler des problèmes dans leur généralité puis de les résoudre de façon systématique. Au delà de l'étude de domaines intra-mathématiques tels les systèmes de nombres, l'algèbre est aussi un outil adapté pour l'étude mathématique des problèmes extra-mathématiques, *via* la modélisation mathématique (Gascon 1994). Le champ conceptuel de l'algèbre est plus vaste que celui des problèmes « arithmétiques » et la résolution des problèmes de ce champ met en jeu des emplois variés de l'outil algébrique : modéliser des relations générales entre variables d'un système dans des contextes variés (géométrie, grandeurs), mettre en équation des problèmes, produire des expressions générales et prouver des propriétés numériques ou géométriques (Grugeon 1997). Chevallard (1989) met ainsi en évidence des éléments essentiels à ses yeux de l'activité algébrique : l'activité de symbolisation (utilisation des lettres pour désigner des quantités inconnues mais aussi pour désigner des paramètres, variables du système étudié dont les valeurs sont supposées connues afin d'étudier des solutions générales) et l'usage réglé de systèmes de signes à travers une pluralité coordonnée de registres sémiotiques.

3. Trois sources de signification de l'algèbre

Au-delà des travaux de recherche français, de nombreux travaux se sont développés dans les pays anglo-saxons (Kieran 1992). Kieran (2007) fait une relecture de ces travaux de recherche avec des approches d'ordre épistémologique et didactique et en fait une synthèse nouvelle. Elle y étudie d'abord l'origine de la signification de l'activité algébrique. D'où vient la signification algébrique ? Jusqu'où travailler les principales sources de signification ? Kieran (2007) revisite en particulier la rupture épistémologique entre l'arithmétique et l'algèbre en distinguant quatre sources de signification de l'algèbre.

a) *Des sources de signification internes aux mathématiques*

Elle distingue plusieurs origines :

- l'interprétation de la structure algébrique, de la sémantique des symboles, des expressions, des objets de l'algèbre (Booth 1989, Drouhard 1992, Sfard et Linchevski 1994, Cerulli et mariotti 2001). Le sens de la signification vient de la capacité à « voir » des idées abstraites cachées derrière les symboles et les écritures symboliques (Sfard et Linchevski 1994)
- l'articulation entre différentes représentations mathématiques de l'objet : graphique, tableau de valeurs, représentations symboliques, représentation en langage français, dans différents cadres mathématiques (numérique, algébrique, géométrique, des grandeurs, graphique) ;
- la sémantique liée aux divers emplois de l'algèbre pour résoudre les problèmes du domaine algébrique : problèmes de généralisation et de preuve (Lee 1997), problèmes de modélisation, problèmes de mise en équation (Chevallard 1989) et au contexte de résolution – intra ou extra mathématique. Les différents emplois de l'algèbre permettent l'émergence des nouveaux objets de l'algèbre (expressions algébriques, formules, équations et systèmes d'équations, identités). Ils peuvent engager les élèves à donner du sens aux différents statuts des lettres (nombres généralisés, variables, inconnues, indéterminées, paramètres) en relation avec ces emplois de l'outil algébrique mais aussi avec l'évolution du raisonnement algébrique (expression de méthodes générales pour résoudre des classes de problèmes) (Bell 1996).

b) *Des sources de signification externes aux mathématiques*

D'autres sources de signification sont dérivées de ce qui externe aux mathématiques et liées au contexte du problème. Radford défend l'idée que la signification algébrique est liée à des

éléments d'ordre culturel (Radford 2000). Ces processus de signification sont produits au cours de l'activité, à partir du langage (métaphores), d'artefacts, de gestes utilisés, lors d'interactions entre élèves ou entre le professeur et des élèves. Par exemple, la communauté des enseignants de mathématique peut se demander l'impact du discours utilisé, au cours de séance de calcul algébrique, du type « il faut ajouter les exposants ; on passe d'un membre dans l'autre, .. », sur la construction et le développement de la rationalité mathématique des élèves.

4. Un nouveau modèle pour conceptualiser l'activité algébrique

A partir d'une analyse des travaux de didactique de l'algèbre, Grugeon (Grugeon 1995, 1997) a caractérisé différents aspects de la compétence algébrique, référence pour structurer une analyse multidimensionnelle des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre en fin de scolarité obligatoire. Les différents aspects de la compétence algébrique sont définis comme suit :

Les connaissances algébriques sont structurées selon deux principales dimensions non indépendantes et partiellement hiérarchisées, les dimensions *outil* et *objet* :

- sur le plan *outil*, la compétence algébrique s'évalue à travers la capacité à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire un problème, à les interpréter puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à sa résolution. Différents contextes, différents domaines d'emploi mettent en jeu la dimension *outil* de l'algèbre aussi bien dans des tâches de résolution que de preuve, l'« arithmétique traditionnelle » n'en étant qu'un parmi d'autres. Un intérêt tout particulier est porté aux capacités à utiliser l'algèbre comme outil pour prouver des conjectures numériques.

- sur le plan *objet*, il est nécessaire de prendre en compte le double aspect syntaxique et sémantique des expressions algébriques pour les manipuler formellement en redonnant sa juste place à la dimension technique du traitement algébrique. La signification d'une expression algébrique réside à la fois dans sa syntaxe, sa dénotation, son interprétation en liaison avec les cadres mathématiques en jeu et ses sens. La compétence algébrique s'évalue à travers des capacités techniques d'ordre syntaxique et des capacités interprétatives mettant en jeu dénotation, interprétation et sens des expressions. Elle peut aussi s'évaluer en termes de capacité à manipuler des ostensifs activés par l'évocation de non-ostensifs.

A ce niveau scolaire, nous devons prendre en compte deux autres éléments pour évaluer la compétence algébrique :

- L'entrée dans l'algèbre suppose une rupture épistémologique avec l'arithmétique.
- L'efficacité algébrique requiert une capacité à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau procédural et structural et à développer une nécessaire fonction d'adaptabilité dans l'interprétation des expressions pour en faire des usages variés.

C. Kieran propose un nouveau modèle, le modèle GTG, (Kieran 2007) pour conceptualiser l'activité algébrique. Elle distingue trois types d'activité algébrique : l'activité générative, l'activité transformationnelle et l'activité globale au niveau méta.

L'activité *générationnelle* concerne la formation des objets de l'algèbre, dans le cadre de la dialectique *outil / objet*, par exemple, des expressions, des formules, des équations :

- les expressions générales, exprimées à partir de nombres généralisés, qui caractérisent des patrons géométriques ou des séquences numériques,
- les expressions générales qui gouvernent les propriétés sur les entiers, exprimées à partir de nombres généralisés,
- les formules qui modélisent des relations entre variables dans des contextes variés (géométrie, grandeurs),
- les équations à une ou plusieurs inconnues qui représentent des problèmes.

L'essentiel de la signification portant sur les objets de l'algèbre intervient au cours de l'activité générative en algèbre, lors de la résolution de problèmes mettant en jeu différents emplois de l'outil algébrique. La signification que les élèves vont accorder à la notion de variable et à la flexibilité entre les différents statuts des lettres (variable et inconnue), va dépendre de leur

capacité à articuler le cadre des équations et des fonctions. Pour Radford, l'activité générative permet de développer le rôle de l'algèbre comme outil pour exprimer des relations générales et comme habitude de pensée.

L'activité *transformationnelle* réfère à l'usage des règles de transformation dans des activités de développement, de factorisation, de résolution d'équations et d'inéquations, etc. La question cruciale en jeu dans ce type d'activité concerne la capacité à interpréter les changements de représentation symbolique des expressions (respectivement des équations) lors de l'application de règles de transformation, ces expressions (respectivement des équations), les transformations ayant lieu à dénotation fixe et les expressions restant équivalentes au cours de l'activité transformationnelle. Ce type d'activité ne met pas seulement en jeu un travail technique basé sur les processus de manipulation ou l'usage de règles syntaxiques mais il est étroitement imbriqué à un travail conceptuel et théorique (Lagrange 2002) appuyé sur la dimension sémantique des expressions (dénotation, sens des expressions (Drouhard 1992) et flexibilité dans l'interprétation des expressions à la fois au niveau procédural et structural (Sfard 1991).

L'activité *globale au niveau méta* concerne la mobilisation et l'usage de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes, intra ou extra mathématiques, de modélisation, de généralisation et de preuve, de démonstration dans des cadres variés. Cette activité permet de travailler et de poursuivre la construction du sens des objets de l'algèbre et des différents statuts des lettres et les démarches de pensée, de développer des capacités d'adaptation dans l'interprétation des objets de l'algèbre et l'usage des techniques en lien avec un calcul intelligent et contrôlé. Pour ceci, les problèmes proposés doivent motiver la démarche algébrique et être suffisamment ouverts de façon à permettre une réflexion globale d'ordre méta.

Ces trois types d'activité recouvrent globalement les différents aspects de la compétence algébrique définie par Grugeon (Grugeon 1997), activité générative et globale au niveau méta plutôt du côté *outil*, activité transformationnelle plutôt du côté *objet* et éclairent les rapports entre sens et technique.

Nous exploitons les travaux de didactique afin de lister des pistes d'enseignement ayant pour objectifs de développer conjointement et de façon articulée les trois types d'activité algébrique et ainsi favoriser l'articulation entre sens et technique en début d'apprentissage des nouveaux concepts.

5. Varier les stratégies d'introduction de l'algèbre (Bednarz, Kieran et Lee, 1996)

Bednarz, Kieran et Lee ont étiqueté quatre principales perspectives d'introduction de l'algèbre pour donner du sens aux nouveaux objets de l'algèbre en lien avec leur genèse puis la mise en place d'un système réglé de signes : l'approche par la *généralisation / récurrence*, l'approche par la résolution de problèmes / *mise en équation*, l'approche par la *modélisation* et l'approche *technologique / fonctionnelle* (via des logiciels).

5.1 Approche par la généralisation / récurrence

Cette approche vise à engager les élèves dans une activité pré-algébrique à travers la reconnaissance d'un « *pattern* » *géométrique* vers des activités algébriques. Un des objectifs de cette approche est de faire émerger les lettres comme nombres généralisés et d'engager les élèves dans l'utilisation du symbolisme pour produire des expressions générales afin de généraliser des propriétés en montrant l'insuffisance du cadre numérique. Cette activité générative permet d'articuler différentes représentations entre des registres sémiotiques variés (registres des figures géométriques, des écritures numériques, des écritures algébriques) et de dégager un système réglé de signes. Elle permet aussi d'articuler l'interprétation des expressions aux niveaux procédural et structural (Sfard 91), cet aspect étant important en ce qui concerne la conceptualisation des nouveaux objets de l'algèbre. Dans cette approche, les

quatre sources de signification présentées plus haut sont mises en jeu. En voici une illustration à partir de la situation du « carré bordé ».

Carré bordé – INRP 96

n désigne le nombre de carreaux sur le côté du carré et N le nombre de carreaux grisés sur le côté du carré.

Tâche : Calculer le nombre N

Solutions :

$N = 4(n+2) - 4$

$N = 2(n+2) + 2n$

$N = 4(n+1) ; N = 4n + 4$

$N = (n+2) + 2(n+1) + n$

$N = (n+2) + n \times 2 + (n+2)$

$N = (n+2)^2 - n^2$

Document d'accompagnement « du numérique au littéral » –
Mathématiques – Collège - 5 avril 2006

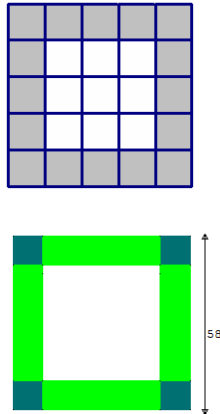


Figure 5 : Expressions équivalentes exprimant le nombre de carreaux grisés sur la bordure

C'est un problème de généralisation. Au-delà d'une démarche numérique, incontournable pour dégager des modes de calcul de N , mais qui s'avère insuffisante pour exprimer de façon générale le nombre N de carreaux grisés sur le côté du carré en fonction de n , l'activité de symbolisation pour produire l'expression générale s'appuie sur la coordination de plusieurs registres de représentations sémiotiques : programmes de calcul exprimé en français, représentations figurées (un exemple en vert) du calcul du nombre de carreaux grisés, écritures numériques et littérales. Deux programmes de calcul différents conduisent à calculer le nombre N de carreaux grisés : des expressions de structures différentes – par exemple $4n + 4$ et $4(n+1)$ - ont la même valeur. La coordination entre ces quatre registres permet de donner du sens aux lettres, aux expressions littérales, d'associer à plusieurs expressions une seule dénotation *via* les procédés de calcul et leurs représentations, d'illustrer un système de règles de formation et de transformation d'expressions littérales. Cette situation permet d'éclairer le jeu subtil entre les dimensions syntaxique et sémantique du calcul algébrique, les aspects procédural et structural d'une expression et de donner du sens à l'équivalence d'expressions. Mais, cette situation ne peut vivre que si le professeur organise un milieu adapté avec un appui sur des formulations, des gestes et des artefacts pour favoriser l'accès au sens des expressions.

5.2 Approche par la résolution de problèmes / mise en équation

Cette approche vise à engager les élèves à utiliser le symbolisme algébrique pour traduire des relations entre variables en situation de résolution de problèmes, à mobiliser la structure des expressions algébriques et les règles de traitement sur celles-ci et le signe d'égalité comme une relation d'équivalence. Les élèves sont amenés ainsi à faire émerger le raisonnement algébrique en opposition avec le raisonnement arithmétique. La démarche algébrique nécessite une remise en question des stratégies de résolution antérieures, en particulier la démarche arithmétique et la signification du signe « = » comme annonce de résultat. Un des enjeux pour le professeur est de sélectionner des problèmes dont la résolution montre les limites des démarches arithmétiques et mette en évidence une nécessaire rupture avec les démarches arithmétiques : problèmes déconnectés (Bednarz 200 ?) ou problèmes se ramenant à des équations du type

$ax+b = cx+d$ (). La résolution de ces problèmes permet aussi de travailler l'articulation entre différentes représentations d'une équation dans des registres sémiotiques congruents ou non.

Le problème « Alice et Bertrand » est représentatif d'un problème permettant d'amener les élèves à prendre conscience des limites de démarches arithmétiques.

Énoncé : Alice et Bertrand

Deux élèves, Alice et Bertrand, ont chacun une calculatrice. Ils affichent un même nombre sur leur calculatrice.

Alice multiplie le nombre affiché par 3 puis ajoute 4 au résultat obtenu.

Bertrand multiplie le nombre affiché par 2 puis ajoute 7 au résultat obtenu.

Quand ils ont terminé, ils s'aperçoivent que leurs calculatrices affichent le même résultat.

Quel nombre ont-ils affiché au départ ?

Contrairement au problème « je pense un nombre, je le multiplie par 3. Au résultat obtenu, je soustraies 12 et j'obtiens alors 7. Quel est le nombre pensé ? » la résolution du problème « Alice et Bertrand » ne peut utiliser un raisonnement arithmétique utilisant la réversibilité de l'action qui conduit au résultat. L'usage d'un raisonnement qui va du connu vers l'inconnu s'avère inopérant et les élèves ainsi sont conduits à désigner le nombre cherché et à recourir à l'usage d'une lettre, ayant les statuts de variable puis d'inconnue. Il est nécessaire de confronter les élèves à ces difficultés qui révèlent les limites des procédures dont ils disposent. Proposer des problèmes dont la résolution se ramène à résoudre une équation où l'inconnue apparaît dans les deux membres du type $ax+b = cx+d$ permet aux élèves de mettre en œuvre des procédures numériques par essais et ajustements. Puis en jouant sur les valeurs des nombres a , b , c et d conduisant à une solution rationnelle, le professeur peut engager les élèves à percevoir le coût d'une telle procédure, la nécessité et l'intérêt d'une mise en équation (BO 2006).

5.3. Approche technologique / fonctionnelle

L'approche technologique / fonctionnelle permet à l'enseignant de s'appuyer sur les possibilités des technologies logicielles et en particulier du tableur pour accompagner les élèves à gérer la transition arithmétique / algèbre, et ceci à trois niveaux : le passage du numérique et du verbal à l'écriture symbolique, le passage du spécifique au général et du connu à l'inconnu.

Au-delà de l'introduction des concepts, l'étude des travaux de recherche met en évidence qu'un enjeu essentiel de l'enseignement est de questionner le travail de manipulation. Dans les recherches des années 90, le focus était mis sur les processus de manipulation et la remise en question des règles de syntaxe fausses. Or, de nouveaux travaux (Cerulli et Mariotti 01, Cerulli 04) privilégiant l'étude des fondements théoriques du travail de manipulation des élèves articulent davantage les questions de signification des écritures algébriques en lien avec le travail de la technique. La question centrale du contrôle du calcul est mise en relation avec l'équivalence des expressions et la mobilisation d'une connaissance fondamentale : plusieurs expressions différentes représentent la même expression. Nous allons développer les points à prendre en compte.

6. Le symbolisme algébrique

6.1 Interprétation des expressions et évolution des modes de contrôle

Au début de l'apprentissage du calcul littéral, les élèves ne sont pas immédiatement convaincus de la puissance que leur confère le calcul symbolique, parce qu'ils ne dominent ni les formes d'écriture, ni le calcul. En effet, les modes de contrôle du calcul littéral sont aussi profondément modifiés par rapport au calcul numérique.

- Le calcul arithmétique est piloté par le sens du contexte et les calculs y sont effectués en référence au contexte, toute expression numérique étant évaluée.

- Au contraire, le calcul littéral ne fait plus référence au sens externe alors que le pilotage du calcul fait référence au sens interne des expressions et tire sa puissance de l'information monstrative contenue dans l'écriture des expressions

Prenons par exemple l'expression $x^2-2x+1 + (2x-2)(x+3)$ à factoriser. Pour organiser et contrôler les calculs, ici la factorisation de cette expression, il s'agit de comprendre les règles syntaxiques qui organisent la formation et la transformation des expressions algébriques, de l'interpréter en liaison avec sa structure (somme de deux termes) et non pas avec une lecture de gauche à droite, de choisir l'écriture adaptée (son *sens*) en fonction du but visé (ici remplacer x^2-2x+1 par $(x-1)^2$ et $2x-2$ par $2(x-1)$), de réaliser les transformations, et en particulier la factorisation par un facteur commun, en conservant la *dénotation* de l'expression, c'est-à-dire sa valeur.

Les transformations s'appuient à la fois sur l'aspect syntaxique et sémantique des expressions, c'est-à-dire leur dénotation et leur sens, (Bedeutung et Sinn pour Frege en 1900). À une expression sont associées plusieurs écritures de sens distincts sur lesquels on va s'appuyer pour choisir et organiser la stratégie du calcul. Ces concepts, qui associent à un nombre plusieurs écritures, ne peuvent s'appuyer que sur une expérience numérique développée au cycle 3 *via* le calcul réfléchi.

Le pilotage est lié à la reconnaissance de formes, par exemple, forme factorisée, forme développée, forme canonique. A une expression est associée un répertoire de formes qui prolonge le répertoire nécessaire à un calcul raisonné et indispensable à l'intelligence du calcul. Ce travail est indispensable pour renforcer les rapports entre raisonnement et calcul, préalable à un calcul intelligent qui prolonge le calcul réfléchi en s'appuyant sur ses propres modes de contrôle. C'est l'un des enjeux fondamentaux pour l'enseignement du calcul algébrique dans la scolarité obligatoire qui s'oppose à la vision du calcul algébrique comme calcul aveugle.

En voici un exemple en fin de l'enseignement secondaire : il s'agit de chercher « l'information monstrative » pertinente pour faire le choix d'une forme adaptée de

l'expression $\frac{x^3 + x^? - 2x}{x^? - 5x + 6}$ en fonction du but visé :

- Calcul de limite au voisinage de l'infini : $\frac{x^3(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^?})}{x^?(1 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^?})}$
- calcul de limite lorsque x tend vers 2^- ou 2^+ : $\frac{x^3 + x^? - 2x}{x - 2}$
- recherche d'une asymptote au voisinage de l'infini : $x + 6 + \frac{22x - 36}{x^? - 5x + 6}$
- calcul d'une primitive : $x + 6 + \frac{-8}{x - 2} + \frac{30}{x - 3}$

6.2. Deux conceptions des expressions algébriques

Deux aspects s'opposent pour interpréter une expression algébrique. D'abord, l'aspect procédural réfère à un processus de calcul pour substituer une valeur numérique à la variable. Par exemple, l'expression x^2+2x+3 signifie « prendre le carré d'un nombre, lui ajouter le double de ce nombre et lui ajouter 3 ». D'autre part, l'aspect structural réfère à un objet, objet

sur lequel on réalise des opérations. Par exemple, l'expression x^2+2x+3 correspond à un trinôme du second degré, ici, la somme du carré d'un nombre x , de son double et de 3, objets que l'on peut additionner, multiplier, factoriser, dériver, etc. Dans ce cas, il est indispensable de travailler à partir de la structure de l'expression. Or l'opération qui organise la structure, ici l'addition, est la dernière à effectuer dans l'ordre des priorités opératoires.

Cet aspect est à la base de la reconnaissance d'une expression et des transformations, et donc d'un calcul intelligent. Pour A. Sfard, les élèves construisent d'abord une conception procédurale puis structurale d'un objet mathématique. Cet élément est pris en compte dans les projets dès la cinquième. Cet aspect est longuement développé dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral »³.

6.3 La dimension sémiotique du travail algébrique

Au-delà du travail sur les écritures algébriques, l'enseignement a aussi pour enjeu d'amener les élèves à développer en parallèle d'autres représentations des expressions algébriques (schémas de calcul, programmes de calcul, figures géométriques d'une grandeur donnée). Il s'agit de la dimension sémiotique du travail algébrique (Duval, 1996) qui peut intervenir lors du contrôle de la formation, de la transformation des écritures dans le registre des écritures algébriques et la mise en relation des écritures algébriques avec des représentations dans d'autres registres sémiotiques (langage naturel, représentations graphiques, etc.).

La traduction algébrique d'énoncés en français, registre sémiotique non congruent au registre des écritures algébriques, nécessite souvent une reformulation pour faire apparaître les relations entre les nombres. Cette non prise en compte conduit à des erreurs fréquentes qui relèvent d'une traduction mot à mot sans reformulation. Par exemple, dans ce cas, l'énoncé « *il y a six fois plus d'étudiants que de professeurs. Utiliser E pour le nombre d'étudiants et P pour le nombre de professeurs* » a pour traduction incorrecte $6E = P$.

L'enseignement de l'algèbre au collège a subi plusieurs modifications depuis la réforme des mathématiques modernes en 1970. La part des techniques de calcul a diminué, ce qui peut expliquer, pour les professeurs de lycée, les difficultés des élèves en calcul algébrique à l'entrée en lycée. Peut-on alors penser que les élèves sont plus outillés pour mobiliser l'outil algébrique pour résoudre des problèmes (mise en équation, modélisation, preuve) ? Il semble que cela ne soit pas encore le cas en seconde, vu la difficulté des élèves à mobiliser eux-mêmes une variable lorsque la résolution le nécessite.

En perspective des résultats des divers travaux de recherche, nous avons précisé dans le paragraphe I la question d'articulation entre sens et technique dans le développement de la pensée algébrique. Nous analysons maintenant comment les programmes et les manuels la prennent en compte.

II. Etude des programmes de collège 2008

Ces programmes, qui viennent d'être réécrits et entrent en application en 2009 pour la classe de 6^{ème}, ne se distinguent pas fortement de ceux de 2007, ni même de ceux de 2005 qui correspondent aux manuels étudiés (les manuels de la classe de 5^{ème} sortiront en 2010). Rappelons tout d'abord que pour l'ensemble du collège, ils sont découpés en quatre rubriques dont aucune n'est dénommée « Algèbre » ni par un terme voisin. Les quatre rubriques sont les suivantes :

1. Organisation et gestion de données. Fonctions
2. Nombres et calculs

³ http://eduscol.education.fr/D0015/du_numerique_au_litteral.pdf

3. Géométrie
4. Grandeurs et mesures.

Un premier travail d'analyse consiste donc à déterminer où les notions algébriques peuvent trouver leur place. Si l'on exclut la rubrique « Géométrie » on peut penser que ce que nous pouvons déclarer relever du domaine algébrique se trouve dans les trois autres parties : dans la première par le biais des fonctions et de la notion de variable, dans la seconde, par le calcul algébrique et dans la dernière par l'intermédiaire des formules. C'est effectivement ce que l'on va trouver.

De plus, dans l'introduction du collège, on peut noter que la place de la démonstration en algèbre est affirmée, ce qui est un élément nouveau par rapport aux programmes précédents : « *Si pour cet objectif le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.* »

En classe de 6^{ème}, on trouve une indication explicite concernant les formules dans la partie « Grandeurs et mesures » : « *Connaître et utiliser la formule donnant la longueur d'un cercle* », « *formule de l'aire du disque* » ainsi qu'une injonction à introduire des écritures littérales « *Le travail sur les périmètres permet aussi une initiation aux écritures littérales* ». Ceci montre que les auteurs des programmes envisagent bien l'entrée dans l'algèbre au début du collège voire font des liens avec l'école primaire puisque les formules y ont déjà été rencontrées.

En classe de 5^{ème}, on retrouve l'idée d'introduction des expressions littérales dans la première rubrique « *Utiliser/produire une expression littérale* » et dans la dernière « *De nombreux thèmes du programme (grandeurs et mesures) conduisent à utiliser des expressions littérales (formules)* ». Le propos est donc plus précis qu'en classe de 6^{ème} puisqu'au delà de l'injonction, il y a une indication d'un type de tâches à réaliser sans que la finalité soit vraiment précisée (on ne sait pas pourquoi on produit une expression littérale, ni dans quels cas on pourrait l'utiliser).

Dans la rubrique 2, (Calcul numérique), on introduit la notion de programme de calcul mais sur du numérique. On peut certainement voir, là encore, une passerelle vers une activité algébrique.

En revanche, la propriété de la distributivité de la multiplication sur l'addition est donnée avec ses deux formulations (addition et soustraction), ce qui montre, selon nous, que la rupture entre arithmétique et algèbre n'est pas complètement assumée : « *Sur des exemples numériques/ littéraux, utiliser les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$ dans les deux sens. L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique et graphique.* »

Enfin, on commence l'initiation à la notion d'équation (paragraphe 2.4) et à l'introduction de la lettre comme inconnue en précisant que l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu doit être faite dans des situations où le problème ne peut être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. « *Une attention particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique. Les programmes du collège prévoient une initiation progressive à la résolution d'équations, de manière à éviter la mise en œuvre d'algorithmes dépourvus de véritable sens. La classe de cinquième correspond à une étape importante avec le travail sur des égalités vues comme des assertions dont la vérité est à examiner.* »

Le programme insiste sur le test d'une expression littérale par des valeurs numériques. « *Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques.* »

En classe de 4^{ème}, tout ceci est repris et précisé. On indique qu'il faut « *savoir choisir l'écriture appropriée d'une ... expression littérale suivant la situation* ». Pour le Calcul littéral, on met en avant les types de tâches de développement (des expressions du type $(a+b)(c+d)$), de résolution d'équations et de preuve de propriétés (en particulier en arithmétique) : « *Utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général* », ce qui renforce l'idée de preuve en algèbre citée dans l'introduction du programme.

En classe de 3^{ème}, tout ce travail est poursuivi et enrichi par l'introduction des fonctions. Les problèmes vont donc évoluer par l'introduction de ce nouvel objet et on peut penser que cela doit permettre, encore une fois, de donner des finalités (sens de l'introduction d'une lettre) à un travail qui a pu rester au niveau technique.

Enfin, dans le document d'accompagnement intitulé « Du numérique au littéral », des précisions sont données et on trouve des indications sur :

- les différents usages de la lettre et les différents statuts du signe égal,
- le travail sur les formules comme première rencontre avec les expressions algébriques,
- la rupture arithmétique /algèbre,
- les aspects procédural et structural,
- le calcul littéral et la démonstration.

Conclusion de l'étude des programmes

L'étude des programmes et du document d'accompagnement nous montre que les auteurs ont pris en compte les difficultés d'introduction de l'algèbre notamment en termes de rupture et continuité (ceci est bien explicité dans le document d'accompagnement), comme le soulignait Vergnaud, 1988 :

« L'algèbre constitue pour les élèves une rupture épistémologique importante d'avec l'arithmétique. Cette rupture mérite une analyse détaillée, car beaucoup d'élèves n'entrent pas facilement dans le jeu des manipulations symboliques ».

Ces programmes prennent davantage en compte la puissance de l'outil algébrique pour résoudre différents types de problèmes et permettent de travailler sur le choix d'une écriture adaptée par rapport au problème à résoudre (vers l'aspect structural).

Le statut de la propriété de distributivité n'est pas très clair d'une part, par sa formulation (égalité sans quantificateur) et d'autre part, parce qu'il n'y a pas de distinction entre numérique et littéral.

Enfin, les contrôles de l'équivalence des expressions sont encore peu encouragés.

Cependant, il nous semble que le découpage important (voire trop important) des thèmes, des notions et des types de tâches algébriques à la fois dans la rédaction même du programme (dans les différentes parties) et dans le temps (séparation entre les types de tâches de développement et de factorisation même si la formule de la distributivité permet de tout faire), risque de provoquer un enseignement de l'algèbre élémentaire assez découpé, un émiettement des notions ou un rabattement sur des types de tâches techniques et donc, peut empêcher les élèves de voir la puissance de l'outil algébrique.

Nous allons maintenant poursuivre par l'étude de quelques manuels de 5^{ème} et 4^{ème} pour voir comment les programmes sont interprétés.

II. Etude des manuels de 5^{ème}

Nous avons choisi d'étudier plus particulièrement les manuels de la classe de 5^{ème} car c'est à ce moment là que l'articulation entre sens et technique est particulièrement importante puisqu'il faut donner du sens à l'introduction de la lettre mais aussi donner des techniques de calcul pour pouvoir les utiliser dans les résolutions de problèmes.

Nous avons étudié sept manuels de la classe de 5^{ème} sortis en 2006 (Collection DIABOLO, PHARE, PRISME, TRANSMATH, MAGNARD, TRIANGLE, BABYLONE). L'analyse porte sur les organisations mathématiques prévues : titre des chapitres, nombre, ordre dans la progression. Pour chaque chapitre, nous avons déterminé les types de tâches proposés, les techniques associées et les éléments théoriques. Nous avons recherché les notions institutionnalisées.

Comme pour l'étude des programmes, nous avons tout d'abord cherché les chapitres concernant l'algèbre. De ce point de vue, les manuels sont assez différents tout d'abord par le nombre de chapitres : deux proposent un chapitre « Initiation au calcul littéral et équations » (Triangle et Prisme) deux ne proposent pas de chapitre spécifique (Diabolo et Magnard). Ces derniers ont alors un paragraphe concernant le calcul littéral dans les d'autres chapitres sur les nombres. Dans ce cas là, la partie calcul littéral se trouve à la suite de ce qui est fait en numérique.

Les trois autres ont un seul chapitre intitulé soit « Calcul littéral » (Phare), soit « Expressions littérales » (Babylone), soit « Equations » (Transmath).

L'ordre proposé par rapport aux relatifs est lui aussi variable : trois manuels introduisent les relatifs puis le calcul littéral alors que deux autres procèdent dans l'ordre inverse. Enfin, les deux manuels qui n'ont pas de chapitre spécifique introduisent la propriété de distributivité dans le premier chapitre, donc avant les relatifs. Or, si l'on introduit la propriété de distributivité avant les relatifs, celle-ci suppose des conditions restrictives sur la différence $a - b$, ce qui n'est jamais précisé.

Tout ceci peut sembler surprenant car il nous semble que l'entrée dans l'algèbre se fait aussi par les relatifs (souligné par Vergnaud, 1989).

"Par "introduction à l'algèbre", on peut entendre plusieurs choses distinctes :

- *mise en équation de problèmes arithmétiques simples et résolution par l'algèbre ;*
- *règles élémentaires de traitement et de transformation des équations ;*
- *première explicitation des concepts de fonction et de variable ;*
- *mise en évidence de certaines propriétés structurales des ensembles de nombres, notamment l'ensemble des relatifs et de l'ensemble des rationnels ;*
- *etc...*

Il est raisonnable de penser que c'est un savant équilibre de ces différentes composantes conceptuelles et des situations qui leur donnent du sens qui peut permettre aux élèves de comprendre en profondeur la fonction, la structure et le fonctionnement du raisonnement algébrique. Mais quel équilibre ?"

Même si les organisations mathématiques sont différentes, on trouve une certaine uniformité des types de tâches (regroupées ou non dans un ou plusieurs chapitres) :

- Écrire (produire) une expression littérale : il s'agit de « traductions » langage naturel/symbolique ou du registre géométrique vers des écritures symboliques. Ces types de tâches permettent aussi d'introduire l'expression « en fonction de ».
- Remplacer un nombre dans une expression littérale, tester des égalités.
- Simplifier des écritures littérales (en supprimant notamment les signes x).
- Développer, factoriser, réduire des expressions littérales simples.

En revanche, on ne trouve pas ou peu de types de tâches de preuve ou de généralisation même si le programme le préconise. Ce résultat a été souligné par Aloulou & Pinto, 2007 qui ont montré que la part des exercices portant sur « démontrer, montrer, prouver, expliquer, justifier, vérifier » ou des exercices ouverts dans lesquels on ne donne pas la variable ou l'inconnue est variable d'un manuel à l'autre mais reste faible dans l'ensemble des classes de collège (de 3,4% à 14% des exercices proposés).

En ce qui concerne la tâche « Tester par un nombre », elle est souvent employée sans finalité, c'est-à-dire que l'on remplace des valeurs dans une expression juste pour faire le calcul. Or il semblerait important de l'utiliser comme vérification, ce qui n'est pas fait car ce type de tâches n'est souvent pas proposé en même temps que des équations. D'ailleurs El Mouhayar, 2006 a montré que cette procédure n'était pas utilisée comme moyen de vérification par les élèves quand celle-ci était à leur charge.

De plus, il nous semble que le traitement de l'égalité de deux expressions littérales pose problème puisqu'il n'est pas toujours indiqué si les deux expressions sont égales pour tout x ou pour des valeurs particulières. Le problème de la quantification des énoncés est laissé à la charge de l'élève.

Comme nous l'avons vu, seuls trois manuels proposent un chapitre (ou une partie) sur les équations. Cela veut dire que certains élèves peuvent arriver en 4^{ème} sans avoir résolu d'équations. Nous faisons l'hypothèse que, comme le programme ne précise pas les techniques de résolution d'équations, certains auteurs de manuels laissent cette notion pour la classe de 4^{ème}. Or, la résolution d'équation est une occasion importante de montrer la nécessité d'introduction de la lettre, de produire des expressions littérales.

En classe de 4^{ème}, pour les problèmes conduisant à une équation, on constate qu'ils nécessitent rarement le recours à l'introduction d'une lettre et qu'ils peuvent être résolus de façon arithmétique. L'inconnue est systématiquement introduite par « appelle x ... ». Trop souvent l'expression algébrique est une simple traduction de l'énoncé notamment en gardant le même ordre des données. Enfin les solutions des équations sont souvent des valeurs entières, peu élevées, ce qui ne permet pas de disqualifier les procédures par essais.

Voici un exemple (Collection Béal 4^{ème}) d'une activité d'introduction caractéristique des critères énoncés ci-dessus. Pour la question 1, les masses de chocolat sont données dans l'ordre de l'écriture demandée (masse de chocolat blanc et au lait en fonction de celle du chocolat noir). Puis l'inconnue et l'équation sont données en question 2 et enfin la solution est 12, nombre entier peu élevé.

Activité de découverte

On a volé la recette !

Le chef pâtissier s'est fait voler la recette de son fameux gâteau aux trois chocolats (blanc, noir et au lait). Il veut préparer un gâteau de 1 470 g et il se souvient qu'il a besoin de 750 g de crème fraîche pour cette masse. En revanche, il a oublié les masses de chacun des chocolats. Tout ce dont il se rappelle, c'est que :

- la masse de chocolat blanc est le double de celle du noir ;
- la masse de chocolat au lait est le triple de celle du noir.

1. Appelons x la masse de chocolat noir. Exprimer en fonction de x la masse du chocolat blanc, puis celle du chocolat au lait.

2. On suppose qu'il n'y a dans le gâteau que du chocolat et de la crème fraîche.

En déduire que : $6x + 750 = 1470$.

3. Calculer x et retrouver la masse de chacun des chocolats.



1 Équation à une inconnue

Exercices 22 à 35, p. 75-76

A. Résoudre une équation

Voici la méthode que Mo propose à Amélie pour résoudre l'équation $8x - 4 = 3x + 7$.

« Tu commences par regrouper les termes en « x » dans le membre de gauche de l'égalité et les autres termes dans le membre de droite, puis tu détermènes x . »

► En appliquant cette méthode, résoudre l'équation précédente. Pour cela, recopier et compléter les lignes suivantes :

$$8x - 4 = 3x + 7$$

$$8x - 4 - \dots = 3x + 7 - 3x \quad \leftarrow \text{Je soustrais } \dots \text{ à chaque membre de l'égalité.}$$

$$\dots - 4 + \dots = 7 + \dots \quad \leftarrow \text{J'ajoute } \dots \text{ à chaque membre de l'égalité.}$$

$$5x = \dots$$

$$5x : \dots = \dots : \dots \quad \leftarrow \text{Je divise les deux membres par } \dots$$

$$x = \dots$$

La seule solution possible de l'équation est le nombre

► Vérifier que le nombre trouvé est bien solution de l'équation initiale $8x - 4 = 3x + 7$ et conclure.

Figure 6 : Chapitre Equations et inéquations- Manuel 4e - Collection Bréal

Les savoirs institutionnalisés en 5^{ème} sont les règles d'écriture et la distributivité. Pour cette dernière, on peut noter différents types de formulations : règle, propriété, égalité vraie, identité. Quelquefois la formule est citée et juste entourée par un cadre pour montrer son importance. Enfin l'utilisation d'ostensifs est forte : flèches, couleurs, distinction entre somme et produit. On explicite ce qu'il faut faire par l'idée de « transformation d'écriture » plutôt que par l'application d'une propriété. Ainsi, on indique « Pour développer une expression, on transforme un produit en une somme » ou bien « Développer une expression, c'est l'écrire comme une somme algébrique ».

L'ensemble de référence des nombres sur lequel porte la propriété (nombres entiers/décimaux, positifs/négatifs) n'est pas toujours indiqué. Par exemple, on trouve « a, b et k représentent 3 nombres ». Il nous semble donc que cette propriété n'est pas suffisamment mise en évidence comme un outil théorique permettant de justifier et de valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des procédures de transformation d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs et dont les critères de vérification sont peu mathématiques, les expressions « transformer ou « écrire comme » ne permettant pas de contrôle mathématique.

Cette analyse est à mettre en relation avec l'utilisation du terme « Réduire » souvent défini dans le cours et employé dans les consignes des exercices. Dans le cours, « Réduire » est très souvent défini par « réduire une expression algébrique, revient à l'écrire avec le moins de termes possibles » ou bien comme dans l'exemple suivant où on introduit le terme

« simplifier ». on peut voir également la place de la propriété de distributivité (encadré en rappel).

Réduire une expression littérale

Définition D2 Réduire une expression littérale
 Réduire une expression littérale, c'est réduire le nombre d'opérations dans cette expression en utilisant la distributivité de la multiplication et en simplifiant.

Exemples
 $A = 4x + 5x$

Rappel
 Pour tous les nombres relatifs k , a et b :
 $k \times a + k \times b = k \times (a + b)$
 $k \times a - k \times b = k \times (a - b)$
 k est le facteur commun.

Figure 7 : Réduire une expression algébrique

D'autres objets paramathématiques sont également introduits et définis comme : expression littérale, égalité, équations, expressions égales, en fonction de, développer, factoriser.

Par exemple pour « Egalité », on trouve des définitions qui ne sont pas toujours équivalentes. Certaines portent seulement sur la forme « Une écriture avec le symbole = s'appelle une égalité ». D'autres prennent en compte la validité de l'écriture comme les deux suivantes :

« Une égalité est une affirmation où figure le signe = et qui ne peut être que vraie ou fausse. »

« Une égalité est constituée de deux membres séparés par un signe =. Les deux membres d'une égalité doivent avoir la même valeur. »

Là encore on voit le défaut de quantification évoqué plus haut.

Dans la partie exercices, EL Mouhayar, 2006, a montré que, dans les types de tâches de calcul littéral, les termes des consignes varient en fonction de la forme de l'expression :

- supprimer les parenthèses » ou « réduire » pour des expressions de type $(a \pm b) - (c \pm d)$
- « développer » pour des expressions de type $(a \pm b)(c \pm d)$.
- « Réduire » ou « Simplifier » pour des expressions $\sum a_n x^n + \sum b_n x^n$

Enfin « Calculer » apparaît rarement.

Conclusion sur l'analyse de manuels

Si les organisations mathématiques sont différentes, et donc les entrées dans l'algèbre aussi, nous avons montré que les types de tâches sont assez semblables et composés d'exercices aux questions découpées, sans finalité qui ne permettent pas de problématiser l'emploi de la lettre. On trouve peu de problèmes de généralisation ou de preuve et presque jamais en activité d'introduction. On peut dire que l'aspect procédural est très développé. Ainsi la question du sens de l'algèbre élémentaire n'est pas encore assez mise en avant.

Certaines tâches, comme « produire une formule » ou « Tester une égalité » qui devraient être un outil pour résoudre des problèmes ou vérifier, se révèlent être des tâches à part entière sans autre finalité.

Nous avons également montré que les éléments théoriques permettant de justifier les calculs et donner des moyens de contrôle aux élèves étaient souvent peu explicites ou remplacés par des ostensifs. Or nous avons vu que certains ostensifs ou expressions ne permettent pas aux élèves de contrôler leurs procédures. Si une grande insistance est relevée en géométrie sur l'utilisation des théorèmes et de la justification de leurs conditions d'application (voir aussi Arzac, 2007), nous voyons qu'en algèbre la situation est différente. Les élèves risquent de penser qu'il n'y a pas de théorèmes ou de propriétés en algèbre. Nous pensons donc qu'il est important que les professeurs redonnent une place explicite aux éléments théoriques en algèbre.

Les énoncés ne sont pas quantifiés, et on ne perçoit pas toujours le statut des différentes égalités. Ceci nous semble un point important qui peut se révéler être un obstacle pour la suite.

III. Perspectives : des pistes pour la formation

Bibliographie

Mathematics Teaching and Learning, Douglas A. Grouws (ed), pp. 390-419, New York Macmillan.

Aloulen, M et Pinto, S. (2008). La démonstration en algèbre : ruptures et continuités dans la transition entre le collège et le lycée. Mémoire de master professionnel, Université Lyon1.

Arsac, G. *Un cadre mathématique pour l'étude de la démonstration. Journal of proof*, 2007.

Chevallard, Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. Petit x n° 5: IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Petit x n° 19: IREM de Grenoble.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Petit x n° 30: IREM de Grenoble.

El Mouhayar, R. (2007). *Etude en France et au Liban des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15 ans) dans le cas de l'algèbre. Thèse de l'Université Lumière Lyon 2.*

Sfard A (1991) : On the dual nature of mathematics conceptions : Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 22, pp. 1-36.

Vergnaud G. (1986) : Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre in *Actes du premier colloque franco-allemand de didactique*, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud G., Cortès A., Favre-Artigue P. (1987) : Introduction de l'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques in *Actes du colloque de Sèvres : Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, pp. 259-288, Editions La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique. Textes réunis par C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. N. Bednarz et C. Garnier Edits. CIRADE.

Les manuels

Collection DIABOLO, Editions Hachette

Collection PHARE, Editions Hachette

Collection PRISME, Editions Belin

Collection TRANSMATH, Editions Nathan

Collection MAGNARD, Editions Magnard

Collection TRIANGLE, Editions Hatier

Collection BABYLONE, Editions Bordas