Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège : atomisation et réduction

Teresa Assude, Sylvie Coppé, André Pressiat

TENDANCES DE L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE ELEMENTAIRE AU COLLEGE : ATOMISATION ET REDUCTION

Teresa Assude[*], Sylvie Coppé[**], André Pressiat[***]

TRENDS OF ELEMENTARY ALGEBRA TEACHING IN FRENCH SCHOOL: ATOMIZATION AND REDUCTION

Abstract – In this paper, the official curriculum of the teaching of Mathematics in France will be studied through the evolution of the different ways of teaching algebra in secondary schools (students from 11 to 15 years old). To that end, our study will focus on three objects and three viewpoints. The first one deals with the function ('raisons d'être') of algebraic expressions in the early phase of literal calculus teaching. The second one is related to the role of distributive law as a technologic and theoretical tool, and the last one concerns the status of inequations as a modelling tool. Finally the comparison between these three studies' results will allow us to highlight the dominant trends in the evolution of algebra teaching in secondary schools.

Key words: teaching of algebra, official curriculum, algebraic expressions, distributivity, inequations.

TENDENCIAS DE LA EVOLUCIÓN DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA ELEMENTAL EN EL « COLLÈGE » : ATOMIZACIÓN Y REDUCCIÓN

Resumen – En este artículo, estudiamos el curriculum oficial de las matemáticas en Francia a través de la evolución de la enseñanza del álgebra en el "Collège" (alumnos de 11 a 15 anos). Para eso, nos interesamos por tres objetos de saber y tres puntos de vista. El primero es el de las "razones de ser" de las expresiones algébricas a los principios de la enseñanza del cálculo literal. El segundo es el de la propriedad distributiva como herramienta tecnológico-teórica y el tercero es el de la inecuación como instrumento de

[*] ADEF, Aix-Marseille Université, t.assude@aix-mrs.iufm.fr

[**] IUFM de Lyon, Université Lyon 1, UMR ICAR (Université Lyon 2, CNRS, ENS Lyon), sylvie.coppe@univ-lyon2.fr

[***] IUFM d'Orléans, Université d'Orléans, LDAR (Université Paris 7), andre.pressiat@wanadoo.fr

modelización. Finalmente, la comparación de los resultados de estos tres estudios nos permite sacar algunas tendencias de la evolución de la enseñanza del álgebra en el "Collège".

Palabras-claves: Enseñanza del álgebra; curriculum oficial; expresiones algébricas; propriedad distributiva ; inecuación

RESUME

Dans cet article, le curriculum officiel des mathématiques en France est étudié à travers l'évolution de l'enseignement de l'algèbre au Collège. Pour cela, nous nous intéressons à trois objets et trois points de vue. Le premier est celui des raisons d'être des expressions algébriques aux débuts de l'enseignement du calcul littéral. Le deuxième est celui de la distributivité en tant qu'outil technologico-théorique et le troisième est celui des inéquations en tant qu'outil de modélisation. Finalement, la comparaison des résultats de ces trois études nous permet de dégager quelques tendances de l'évolution de l'enseignement de l'algèbre au Collège.

Mots-clés : enseignement de l'algèbre ; curriculum officiel ; expressions algébriques ; distributivité ; inéquations

Un certain nombre de travaux en didactique, notamment ceux de Chevallard (1989, 1995) ont montré qu'il y avait une péjoration culturelle de l'algèbre et que ce domaine de savoir devenait évanescent, notamment dans l'enseignement des mathématiques au Collège[1] en France dans les années 80 et 90. Cette « évanescence » ne signifiait pas que l'algèbre élémentaire ait disparu du curriculum mais que la dialectique arithmétique/algébrique qui fondait l'enseignement de l'algèbre élémentaire classique se trouvait affaissée et que le numérique prenait une place de plus en plus importante. A la suite de ces analyses, l'introduction de la notion de modélisation[2] (Chevallard 1989) a été l'une des propositions curriculaires faites par ce chercheur pour dynamiser l'enseignement des mathématiques. Ces travaux sont déjà anciens mais les analyses faites alors sont-elles encore d'actualité ? Dans cet article, nous voulons nous placer dans la continuité de ces travaux en précisant ce que signifie cette algèbre enseignée évanescente, et étudier l'évolution du curriculum officiel en France relativement au domaine algébrique au Collège à travers trois objets de savoir : les expressions algébriques, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et les inéquations. Pour cela, nous présentons d'abord notre cadre d'étude et ensuite nous donnons quelques résultats qui devraient nous permettre d'identifier des tendances de l'enseignement actuel de l'algèbre élémentaire.

CADRE DE L'ETUDE

Notre problème de départ est de comprendre et d'analyser l'état et l'évolution du curriculum officiel d'algèbre élémentaire au Collège que nous considérons comme la science du calcul sur les relations entre des objets (nombres, polynômes,…). Etant donnée l'étendue possible de ce domaine, nous avons choisi de nous intéresser seulement à trois objets pour les raisons suivantes. L'objet « expression algébrique » apparaît aux débuts du calcul littéral, et à travers sa vie dans le curriculum, il permet d'identifier certaines raisons d'être du domaine algébrique, à la lumière des dialectiques ancien/nouveau et arithmétique/algébrique : nous focaliserons plus particulièrement notre attention sur une nouvelle définition d'une

---

[1] Elèves de 11 à 15 ans

[2] Dans notre travail, nous prenons le terme modélisation au sens large qui lui est donné dans les travaux de Chevallard qui prend comme référence les notions de système et de modèle, et prend en compte la réversibilité du processus de modélisation.

expression algébrique, utilisant l'idée de « programme de calcul ». Le deuxième objet « distributivité de la multiplication par rapport à l'addition » nous permet d'analyser le rôle technologique/théorique de l'algèbre. Le troisième « inéquations » est un objet qui rend possible l'étude du rôle d'outil et des applications de l'algèbre. Par cette variété de fonctions et par l'analyse comparative de la vie de ces trois objets, nous comptons pouvoir dégager quelques tendances de l'évolution du domaine.

Nous partons du curriculum officiel, celui qui s'explicite par les textes officiels, et nous allons nous intéresser à ce que l'institution scolaire indique comme étant les savoirs à enseigner. Nous n'aborderons ici ni le curriculum réel, celui qui peut être observé dans les classes, ni le rapport des acteurs (professeurs et élèves) à ces objets.

Notre corpus d'analyse est constitué à partir des textes officiels, des épreuves des brevets du collège, de manuels (papier et en ligne) et de certaines ressources en ligne. Trois programmes seront analysés : ceux qui datent de 1995[3], ceux de 2004 et les programmes actuels[4] de 2008 qui intègrent le socle commun de connaissances et de compétences. Nous précisons que nous avons choisi huit collections de manuels dont l'une en ligne et que le problème de leur représentativité en termes d'utilisation en classe n'est pas pertinent pour notre étude. Comme nous nous intéressons au curriculum officiel (et non réel), il s'agit pour nous de considérer les manuels comme étant de possibles interprétations des textes officiels, et non comme représentatifs des pratiques en classe.

Nous utiliserons les outils de l'approche anthropologique du didactique (Chevallard 1999), notamment la notion de praxéologie constituée par le quadruplet (types de tâches, techniques, technologies, théories), et l'approche écologique comme moyen de questionnement de notre corpus à travers le repérage de certaines conditions et contraintes ainsi que de leurs effets. Faute d'espace, nous ne montrerons pas les analyses faites dans le détail mais seulement les résultats de celles-ci.

---

[3] Nous indiquerons seulement la date où ces programmes ont été publiés pour la première fois ce qui correspond à la classe de 6^{e}, sans toujours indiquer les dates de publication pour les autres classes de Collège.

[4] Ces derniers constituent une réécriture plus concise des précédents de 2007, accompagnée de modifications qui seront précisées au cours de l'étude.

EVOLUTIONS CURRICULAIRES

Si nous analysons les mots des programmes actuels de mathématiques du Collège, nous pouvons observer que le terme « algèbre » est absent alors que « algébrique » apparaît une douzaine de fois, cet adjectif étant associé aux mots : « expression », « langage », « écriture », « somme », « résolution » et « calcul ». Le mot « modélisation » apparaît seulement deux fois, dont une dans le préambule. En revanche, le nombre d'occurrences du mot « problème » est d'environ une centaine. Ce nombre indique l'importance des problèmes dans le discours officiel sur l'enseignement des mathématiques. Dans le préambule du programme actuel de mathématiques, la résolution de problèmes apparaît comme le but et le moyen de l'activité mathématique :

> À travers la résolution de problèmes, la modélisation de quelques situations et l'apprentissage progressif de la démonstration, les élèves prennent conscience petit à petit de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat en expérimentant sur des exemples, bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence en fonction du problème étudié, communiquer une recherche, mettre en forme une solution. (p.9)

Nous pouvons dire (et nous pourrions présenter d'autres citations) que la notion de problème apparaît associée à une forte exigence concernant une « véritable activité mathématique » selon les termes des textes officiels. Cette injonction est-elle accompagnée des moyens praxéologiques du travail mathématique ? Comment cela se traduit-il dans le domaine algébrique surtout si la tendance (dont l'absence de mots est un indice) est celle d'une algèbre enseignée évanescente ? N'y a-t-il pas une contradiction entre cette exigence et la réduction des moyens de travail algébrique ? Nous allons aborder ces questions à propos de nos trois objets.

Avant de présenter ces analyses, rappelons que, actuellement pour l'ensemble du Collège, les programmes sont découpés en quatre secteurs :

1. Organisation et gestion de données. Fonctions
2. Nombres et calculs
3. Géométrie
4. Grandeurs et mesures.

En 1995, il n'y en avait que trois et dans un ordre différent (Travaux géométriques, Travaux numériques, Gestion de données – fonctions). Ce découpage a une influence sur les environnements des objets.

1. Évolution de l'enseignement à propos des expressions algébriques

Sans être véritablement nouvelles, les expressions algébriques bénéficient dans les programmes récents de 5^e (2005 et 2008) d'une mise en valeur très nette, qui leur vaut d'apparaître comme titre de paragraphe « 1.2-Expressions littérales » dans les « Connaissances » du secteur 1. Deux grands types de tâches les concernant apparaissent dans les « Capacités » : « Utiliser, et produire une expression », le deuxième n'étant pas exigible dans le socle. De plus, le document « ressources » associé[5] propose au professeur de les faire apparaître comme la symbolisation de « programmes de calcul », reprenant ainsi les travaux de Chevallard (2002, 2007), qui explicitent ce qu' « exprime » une expression algébrique :

> La notion de « programme de calcul » se construit dès l'école primaire et dans les premières classes du collège … [Elle] est un objet de la pratique mathématique, et reste à ce stade un objet non mathématisé. […] On ne saurait guère se poser de problèmes à propos des programmes de calcul, énoncer des théorèmes les concernant, etc. Or c'est précisément tout cela que la mathématisation algébrique de la notion de programme de calcul va permettre de faire. (Chevallard, 2007, pp.167–168)

La locution « programme de calcul » n'est pas une nouveauté dans le paysage de l'enseignement de l'algèbre, mais l'interprétation que Chevallard en fait est nettement plus large. Elle ne se réduit pas à la considération d'énoncés du type « Choisis un nombre, multiplie-le par 5 et ajoute 4 au résultat obtenu », depuis longtemps présents. Elle est étroitement liée à la notion de « problème arithmétique scolaire », c'est-à-dire à des problèmes qui peuvent être résolus grâce à une chaîne d'opérations arithmétiques (+, –, ×, ÷) exécutables à partir des données du problème, données qui sont habituellement des quantités connues de grandeurs devenues familières à l'école. Chevallard nomme « programme de calcul arithmétique » un tel processus de résolution, une chaîne structurée et hiérarchisée d'opérations arithmétiques permettant de résoudre tous les problèmes d'un même type. Selon lui, une expression algébrique est la formulation symbolique d'un tel programme de calcul, qui constitue ce qu'elle « exprime ». Sa définition d'une expression algébrique reprend l'idée-force de chaîne d'opérations qui sont à effectuer, idée qui apparaît dans certains ouvrages classiques d'algèbre élémentaire, comme le manuel de Lebossé et Hémery (1939) dont voici quelques extraits :

---

[5] Document Ressources « Du numérique au littéral » : voir bibliographie.

> 62. **Définition** : *Une expression algébrique est un ensemble de nombres donnés, ou représentés par des lettres, sur lesquels sont indiquées des opérations à effectuer.* […]
> 63. **Valeurs numériques d'une expression algébrique**
> La valeur numérique d'une expression algébrique, pour un ensemble de valeurs attribuées aux lettres qui y figurent, s'obtient en remplaçant chaque lettre par sa valeur et en effectuant les opérations indiquées. (Op. cité, p. 44)

Le lien avec la notion de formule est explicité dans d'autres manuels de la même époque :

> Chaque fois qu'on a une formule, le second membre est une expression algébrique et, pour calculer la valeur de la quantité fournie par cette formule, on calcule la valeur numérique de l'expression pour certaines valeurs des lettres. (Bourlet et Desbrosses 1932, p.69)

L'emploi par Chevallard du couple (programme de calcul, expression algébrique) permet, du point de vue syntaxique, de redonner une certaine jeunesse à ces définitions classiques, tout en les enrichissant d'un point de vue sémantique. Les pratiques mathématiques anciennes sont ainsi reliées à l'objet algébrique nouveau : une écriture en une seule ligne de la chaîne de calculs commune à tous les problèmes d'un même type, permettant d'obtenir ainsi une formule pour le résultat.
La considération de ce couple permet par ailleurs de faire d'une manière plus claire que dans le manuel ancien la distinction entre l'équivalence de programmes de calcul et sa traduction symbolique sous la forme d'identité d'expressions algébriques :

> Lorsque deux expressions ont même valeur numérique quelles que soient les valeurs attribuées aux lettres, *elles sont équivalentes*.
> $(a + b)x$ et $ax + bx$ sont deux expressions équivalentes.
> 64. **Calcul algébrique** – Le calcul algébrique a pour but la transformation des expressions algébriques en expressions équivalentes.
> *Simplifier* ou *réduire une expression*, c'est l'écrire sous une forme équivalente plus simple, et par conséquent plus facile à calculer numériquement. (Lebossé & Hémery 1939, p.45)

Dans ce manuel, les expressions ne sont pas distinguées des programmes qu'elles expriment et la notion d'identité est absente.

Se pose alors la question suivante : si on prend en compte cette définition rénovée des expressions algébriques, qu'est-ce qui pourrait changer, a changé ou est en train de changer dans les débuts de l'enseignement de l'algèbre au collège ?

1.1. Les changements potentiels dans l'organisation mathématique

Dans un premier temps, nous allons montrer certains changements potentiels permis par cette définition rénovée des expressions algébriques en termes de types de tâches, pour ensuite les comparer à ceux présents dans les manuels actuels (voir *1.2.*). Les principaux types de tâches auxquels cette introduction pourrait conduire sont les suivants :

T_1 : Passer de la formulation « rhétorique » d'un programme de calcul à sa formulation symbolique sous forme d'expression algébrique.

T_2 : Evaluer une expression algébrique lorsqu'on donne aux variables des valeurs numériques.

T_3 : Etant donné deux programmes de calcul P et Q, reconnaître s'ils sont ou non équivalents sur un même domaine numérique.

T_4 : Etant donné un programme de calcul P, déterminer un programme de calcul Q équivalent à P, mais plus simple (plus adapté, plus idoine).

T_5 : Trouver les valeurs pour lesquelles un programme de calcul « renvoie » une valeur donnée.

T_6 : Trouver les valeurs pour lesquelles deux programmes de calcul « renvoient » les mêmes valeurs.

T_7 : Trouver les valeurs pour lesquelles un programme de calcul « renvoie » une valeur plus petite (respectivement. plus grande) qu'un deuxième programme de calcul.

Outre ces types de tâches, la définition rénovée des expressions algébriques permet d' « exprimer » des propriétés des nombres entiers. Il est utile de définir la notion de nombre d'une forme $P(n)$ donnée, $P(n)$ désignant l'expression d'un programme de calcul portant sur la variable n : un nombre p est de cette forme s'il existe un entier n tel que $p = P(n)$. Ainsi, les entiers impairs sont les nombres de la forme $2n + 1$. On peut alors modéliser algébriquement de nombreuses propriétés : être multiple de 7, être deux nombres consécutifs…

Nous ne faisons pas ici, faute de place, une étude des changements potentiels en termes de techniques. En anticipant sur le paragraphe 2, du point de vue technologique, la justification de celles relatives à T_3 et T_4 peuvent dans certains cas (comme $3x + 5x$) se passer de la distributivité en utilisant le fait que la multiplication par un entier est une addition itérée. Mais des cas plus complexes du type $ax + bx$ dans lesquels a et b sont décimaux ou fractionnaires, ou encore de la forme $a(x \pm b)$ ou $a(a'x \pm b)$ en nécessitent l'emploi à ce niveau de l'enseignement en tant qu'identité algébrique, et motivent donc la présence de cet énoncé (la distributivité) au niveau technologique de l'organisation mathématique. Une autre motivation possible de la distributivité vient de l'étude de T_5 : le programme relatif à l'expression $0{,}6x + 5{,}2x$ n'est pas inversible alors que le programme $5{,}8x$ l'est. Se pose donc la question de l'équivalence des deux programmes qu'elles expriment, et plus généralement de ceux correspondant à $ax + bx$ et $(a + b)\,x$.

Les questions autour du couple (programme de calcul, expression algébrique) permettent d'engendrer des parcours d'étude et de recherche (Chevallard 2009). T_1 et T_2 motivent leur introduction en jouant sur la dialectique ancien/nouveau ; l'introduction des lettres dans Combier, Guillaume et Pressiat (1996) s'inscrit dans cette perspective : les activités proposées, connues sous le nom de « carrés bordés[6] » et de « rectangles accolés », sont des moments de première rencontre avec T_1 en laissant aux élèves le choix d'écrire une formule ou seulement une expression, mais en les incitant à utiliser une lettre, sans cependant leur imposer son choix. T_3 et T_4 constituent le cœur du calcul littéral en mettant en avant la notion d'identité algébrique, alors que T_5, T_6 et T_7 ouvrent vers le calcul sur les égalités de programmes de calcul, c'est-à-dire sur le calcul équationnel. Ainsi, ce couple devrait permettre de mieux structurer une large part des contenus à enseigner, en mettant en évidence la fonctionnalité de chacun d'eux. Des réalisations allant dans ce sens ont été faites en Espagne (Bosch 2008 ; Ruiz-Monzon, Bosch & Gascon 2010). Qu'en est-il dans les manuels scolaires français ? Plus précisément, à propos des expressions littérales, les tâches motivant leur introduction sont-elles suffisamment diversifiées ou se limitent-elles à des exemples présentés par ostension ? La définition d'une expression permet-elle de comprendre ce qu'elle « exprime » ? L'équivalence de programmes et la notion d'identité d'expressions sont-elles clairement apparentes ? Les programmes au sens étendu de Chevallard sont-ils utilisés dans la construction de l'organisation mathématique ou dans celle de l'organisation didactique ? Sinon, quel usage des programmes de calculs est-il fait dans les manuels ?

*1.2. Étude des manuels de 5^e^*

Nous allons comparer les changements potentiels avec ceux observés dans l'étude de quelques manuels pour montrer des interprétations possibles des programmes. La comparaison des éditions 2006 et 2010 des manuels de 5^e^ de la collection *Transmath* est éclairante. Alors que, dans l'édition 2006, les expressions font une apparition discrète et non motivée dès le chapitre 1, intitulé « Enchaînement d'opérations », dans l'édition 2010, le chapitre 4 intitulé « Expressions littérales » leur est entièrement consacré. La production d'expressions littérales, non exigible dans le socle commun, fait l'objet d'une activité dirigée et d'un exercice en travail de groupe (n° 39) reprenant des éléments de la situation des « carrés bordés ». La définition d'une expression littérale est essentiellement formelle et ne permet pas de comprendre ce qu'elle exprime (« expression contenant une ou plusieurs lettres, ces lettres désignant des nombres »). La différence avec la définition donnée plus haut dans les manuels classiques anciens est grande : aucune allusion

---

[6] Cette activité est évoquée dans le document *Du numérique au littéral*, p. 1.

à un « programme de calcul » n'y est faite. La notion d'identité n'est pas présentée dans le cours ; elle se manifeste comme une information écrite en marge d'un exercice (n° 41), où les auteurs donnent la distributivité comme exemple d'identité. Des programmes de calculs du type « Choisis un nombre ; multiplie-le par … ; ajoute … au résultat obtenu » n'apparaissent que dans la rubrique « Exercices » (n° 60 et 61). Un type de tâches nouveau se présente (n° 61) lorsqu'il s'agit de retrouver parmi une liste d'expressions celle qui correspond à un programme donné.

Une autre collection de manuels (*Hatier*) avait anticipé l'évolution des programmes en consacrant un chapitre entier au calcul littéral dès les programmes de 1997. Les expressions littérales sont utilisées d'une part pour exprimer des longueurs « en fonction de x », et d'autre part pour exprimer des programmes de calcul décrits à l'aide d'un nombre x et d'une suite d'opérations décrites dans la langue naturelle. L'expression « programme de calcul » n'est pas utilisée dans la partie « Connaissances », mais un exemple de programme au sens ancien du terme le sera dans le chapitre « Initiation au raisonnement déductif ». Même dans les dernières éditions, les auteurs continuent à définir formellement ce qu'est une « expression en fonction de x », sans définir ce qu'est une expression littérale. En revanche, la notion d'identité (appelée égalité) y est définie (expressions donnant le même résultat, quelle que soit la valeur attribuée à la lettre).

La collection *Myriade* (Bordas 2010) propose une adaptation de la situation des « carrés bordés ». La définition d'une expression est la même que dans les manuels de la collection *Transmath*, et il en est de même dans les manuels des autres collections (*Phare* et *Prisme*).

En conclusion, les expressions algébriques sont bien présentes dans les manuels. La motivation de leur introduction est variable, allant d'une production véritable en situation à la simple ostension, ce dernier choix risquant d'être renforcé par le statut assigné à la production d'expressions dans le socle commun. En revanche, la formulation de ce qu'elles expriment est laissée dans l'ombre, les programmes de calcul correspondants n'étant pas suffisamment mis en relation avec les types de problèmes (souvent trop simples) dont ils constituent le processus de résolution. La notion d'identité est peu valorisée, souvent implicite, les moyens d'obtenir une identité masquant la fin qu'elle constitue : l'équivalence des programmes de calcul que ses membres expriment. Les programmes de calcul conservent la fonction didactique de support d'exercices, sans apparaître comme un objet paramathématique contribuant à la construction de l'organisation mathématique. Nous faisons ainsi l'hypothèse que, dans le curriculum officiel, l'introduction des programmes de calcul ouvre des potentialités qui restent inexplorées.

2. La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition

La propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition est introduite en classe de 5^e. Comme nous l'avons vu, elle constitue un élément technologique important qui va permettre de justifier les techniques portant sur les types de tâches T_3 à T_7 qui peuvent être initiées en classe de 5^e et poursuivies dans les autres classes avec des calculs plus complexes. Dans cette partie, nous nous posons les questions suivantes : quels sont les types de tâches associés à des techniques qui sont justifiées par cet élément technologique ? Ont-ils évolué ? Le rôle technologique est-il mis en évidence ?

2. 1. Etude des programmes et de leur évolution

Une première différence réside dans le découpage même des programmes qui a des influences sur les niches et habitats des notions étudiées ainsi que sur leurs liens.

Depuis 1995, la propriété de distributivité apparaît dans le programme de 5^e (dans le secteur « Nombres et calcul » en 2005 et « Calcul numérique » en 1995) sous deux formes correspondant à l'addition et à la soustraction ; elle est désignée par le terme « égalité » et donnée sans quantificateur :

> Sur des exemples numériques/littéraux, utiliser les égalités $k\,(a + b) = ka + kb$ et $k\,(a - b) = ka - kb$ dans les deux sens. L'intégration des lettres dans ce type d'égalité est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique et graphique.

Dans les programmes de 1985, les deux formes de la distributivité étaient présentes en classe de 5^e mais avec le commentaire suivant :

> Enoncer sous leur formulation littérale et utiliser uniquement sur les exemples numériques, les égalités : $k\,(a + b) = ka + kb$ et $k\,(a - b) = ka - kb$

Dans le cadre numérique, les deux égalités sont nécessaires. La propriété apparaît alors comme un élément technologique pour le type de tâches « calculer mentalement le produit de deux nombres », par exemple, 101×24 ou 99×32 où une technique consiste à décomposer 101 en $100 + 1$ ou bien 99 en $100 - 1$. Cette technique n'est d'ailleurs pas nouvelle, elle est utilisée depuis l'école primaire. En revanche, si l'on travaille dans un cadre algébrique avec des nombres relatifs, l'égalité avec l'addition est la seule nécessaire. Or, actuellement en 5^e, seules l'addition et la soustraction des relatifs sont au programme, la multiplication étant repoussée à la classe de 4^e. Cela signifie donc que les expressions littérales qui sont proposées en classe de 5^e ne portent en fait que sur des nombres positifs. Il y a donc ici une rupture de chaîne trophique[7] dont on peut faire l'hypothèse qu'elle peut provoquer des difficultés chez les élèves : la première étant d'inciter les élèves à penser que x est toujours positif ; la seconde étant d'engendrer des erreurs dans les procédures de contrôle sur les signes (notamment quand k est négatif et b positif). Le programme de 1985, en se limitant clairement au numérique, levait cette ambiguïté.

Dans la partie précédente, nous avons identifié les types de tâches qui sont en lien avec l'utilisation de cette propriété. Ceux propres au calcul littéral, qui en constituent une application directe, (développer et factoriser des expressions littérales pour T_3 et T_4) seront donc assez peu variés à cause des relatifs, mais aussi parce que la double distributivité est au programme de 4^e avec les développements, les identités remarquables et que les factorisations plus complexes sont au programme de 3^e. On peut faire l'hypothèse que ces types de tâches ne seront pas ceux qui vont donner une forte raison d'être à la distributivité.

On trouve ensuite, mais dans le secteur 1 des programmes, des types de tâches dans lesquelles les expressions littérales, produites comme outils de résolution de problème, sont manipulées[8], ce qui est désigné par « Utiliser/produire des expressions littérales ». Puis on fait référence à l'utilisation des formules dans le dernier secteur. Enfin, dans l'introduction du programme de 2007, on précise un nouveau type de tâches : démontrer des propriétés algébriques.

> Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

Il y a donc bien une volonté des auteurs des programmes d'introduire de nouveaux types de tâches algébriques pour la classe de 5^e. Cependant, ces types de tâches étant placés dans différents secteurs du programme et séparés de leur élément technologique, nous faisons l'hypothèse que l'enseignement réalisé fasse de même, en construisant des organisations mathématiques parcellaires.

De plus, ce phénomène risque d'être accentué par le découpage entre les différents niveaux de classe (par exemple en séparant aussi explicitement développement et factorisation). Ainsi, nous pensons qu'il y a un risque d'avoir un enseignement de l'algèbre élémentaire assez découpé, un émiettement des notions, des types de tâches

---

[7] Chevallard emploie ce terme pour désigner comment un praxéologie « se nourrit d'une autre » (image empruntée à l'écologie).

[8] Ce point a été vu dans la partie précédente.

isolées, un rabattement sur des types de tâches portant sur les techniques de calcul sans autre finalité et une non-visibilité des éléments technologiques. Cela peut donc empêcher les élèves de voir les potentialités de l'outil algébrique.

*2.2. Etude des manuels de 5^e^*

Nous avons étudié cinq manuels correspondant au programme de 1995, trois édités en 1997 (*Math5*, *Magnard* et *Transmath*) et deux en 2001 (*Triangle* et *Cinq sur Cinq*) et huit manuels de la classe de 5^e^ sortis en 2006 (*Diabolo*, *Phare, Prisme, Transmath, Maths5, Triangle, Babylone* et *Sesamath*). Nous avons analysé la forme et la place de la distributivité en tant qu'élément technologique ainsi que les exercices d'application en fonction des types de tâches pour repérer des constantes ou des différences dans les organisations mathématiques proposées.

En 1995, à l'exception de *Triangle* qui propose un chapitre « Initiation au calcul littéral », et de *Cinq sur Cinq*, un chapitre « Equations », les manuels introduisent la propriété de distributivité dans le premier chapitre sur les nombres et les opérations, avec les deux formulations, l'ensemble de référence étant les décimaux positifs. À cette occasion, trois d'entre eux définissent « développement » et « factorisation ». Les types de tâches consistent d'une part à calculer mentalement en utilisant la distributivité et d'autre part, à développer ou factoriser des expressions numériques/littérales du type $k\,(a \pm b)$ ou $ax + bx$. Dans des problèmes numériques simples, on demande explicitement de faire deux calculs pour utiliser la distributivité. On note donc une assez grande uniformité dans les types de tâches étudiés.

Les huit manuels de 2006 diffèrent quant à eux par leur structure en chapitres. Trois proposent seulement un chapitre portant sur le calcul littéral. Trois introduisent la distributivité dans le premier chapitre sur le numérique puis ont un chapitre soit sur le calcul littéral soit sur les équations. Enfin, deux ne proposent pas de chapitre spécifique : dans *Magnard* tout est fait dans le premier chapitre sur les nombres (comme dans les manuels de la période précédente) et dans *Diabolo*, le calcul littéral est introduit dans chaque chapitre.

L'ordre proposé par rapport aux relatifs est lui aussi varié : trois manuels introduisent les relatifs puis le calcul littéral alors que trois autres procèdent dans l'ordre inverse. Or, l'introduction de la propriété de distributivité avant les relatifs suppose des conditions restrictives sur $a - b$ qui ne sont jamais précisées. Enfin, une étude rapide de manuels de 4^e^ montre que les liens entre distributivité et multiplication des relatifs ne sont pas clairement établis : d'une part, rien ne témoigne du fait que la définition de la multiplication des négatifs est choisie de façon à ce qu'elle soit (demeure) distributive par rapport à l'addition et, d'autre part, on ne trouve dans le cours aucune reprise de la propriété de distributivité sous une seule formulation algébrique.

Il y a effectivement une plus grande variété dans les types de tâches, mais ce sont surtout des tâches isolées : par exemple on fait « écrire une expression littérale » à partir du langage naturel ou du registre géométrique, mais sans finalité, les expressions produites n'étant pas utilisées. Ainsi, dans Triangle, on trouve 39 tâches sur 118 du type « produire une expression littérale » mais seulement 3 sur 118 avec pour finalité de remplacer x par un nombre dans cette expression et 11 sur 118 de résoudre une équation obtenue à partir d'elle.

« Développer/factoriser/réduire des expressions littérales simples » ne constituent plus l'essentiel des types de tâches (entre 13% et 27%). Dans les exercices, les manuels distinguent, dans les consignes des exercices, les termes « factoriser » et « réduire » par la forme des expressions. Ainsi passer de l'écriture de $ax \pm bx$ à $(a \pm b)\, x$ (a et b étant des nombres donnés) est associé à « Réduire », ce terme étant défini dans le cours par *« réduire une expression algébrique, revient à l'écrire avec le moins de termes possibles »*. Aucune technique et encore moins de technologie n'étayent cette définition, on se contente de montrer la forme finale, sans critères permettant le contrôle (que signifie « le moins de termes possibles » ?).

Les types de tâches les plus représentés sont différents d'un manuel à l'autre : par exemple, dans *Transmath* (26 sur 69) et Prisme (30 sur 87) ce sont ceux concernant la mise en équation et la résolution alors que dans Triangle et Babylone (31 sur 95) ce sont ceux associés à la production des expressions littérales. On peut donc penser que les élèves de 5^{e} reçoivent un enseignement pouvant s'avérer très différent d'une classe à l'autre.

Les types de tâches de preuve ou de généralisation sont rares (entre 2% et 13% des exercices), les programmes de calcul au sens défini au paragraphe 1 sont peu présents ou absents.

Le traitement de l'égalité de deux expressions littérales pose problème puisqu'il n'est pas toujours indiqué si les deux expressions sont égales pour tout x ou pour des valeurs particulières : le problème de la quantification des énoncés est donc laissé à la charge de l'élève. Le type de tâche « Tester par un nombre » est, là encore, employé sans finalité : on remplace des valeurs dans une expression juste pour faire le calcul et pas comme un moyen de vérification. Cela explique certainement que les élèves ne l'utilisent pas spontanément comme l'a montré El Mouhayar (2007).

La propriété de distributivité est institutionnalisée avec différentes désignations : règle, propriété, égalité vraie, identité ou bien seulement citée et entourée par un cadre avec une importante utilisation d'ostensifs : flèches, couleurs pour distinguer somme et produit. C'était également le cas dans les manuels de la période précédente. L'ensemble de référence des nombres sur lequel porte la propriété n'est pas toujours indiqué : par exemple, « *a, b* et *k* représentent 3 nombres ». Enfin, la distributivité n'est pas toujours première, elle peut être précédée par le type de tâches « développer ou factoriser une expression littérale donnée ». Ces deux types de tâches sont séparés, la distributivité pouvant être spécifiée selon chacun. Ceci contribue, selon nous, à accentuer l'atomisation des tâches.

Une grande insistance est portée sur la forme des expressions. Ainsi, on explicite les techniques par l'idée de « transformation d'écriture » plutôt que par l'application de la propriété (comme on l'a vu pour réduire). Par exemple, « Pour développer une expression, on transforme un produit en une somme » ou bien « Développer une expression, c'est l'écrire comme une somme algébrique ».

Il en résulte que la propriété de distributivité perd sa prépondérance technologique pour justifier et valider les calculs. Il y a donc un risque que les élèves ne l'utilisent pas et se rabattent sur des techniques portant sur les transformations d'écritures exclusivement basées sur des ostensifs, avec des critères de vérification peu opérationnels portant sur la forme.

3. Enseignement des inéquations et ambivalence institutionnelle

L'évolution de l'enseignement des inéquations au Collège pendant le XX^e siècle a été marquée par trois contextes curriculaires[9] concernant le domaine de l'algèbre élémentaire (Assude 2002) : équationnel ; structurel et fonctionnel ; empirique et de modélisation.

Dans le dernier contexte analysé (à partir de 1985), l'algèbre n'est plus ni l'algèbre classique, celle de l'étude des équations, ni l'algèbre moderne, celle de l'étude des structures. Dans cet environnement, les inéquations sont presque des équations, et elles apparaissent comme un outil de modélisation de situations de la vie courante ou d'autres disciplines. Dans le programme de 3^e de 1998, nous pouvons identifier deux types de tâches : « Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques » ; « Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une inéquation » et un sous-type

[9] Le contexte curriculaire indique l'ensemble des objets et des rapports aux objets qui ont une existence importante dans l'environnement de l'objet étudié.

du premier « Représenter ses solutions sur une droite graduée ». C'est essentiellement la technique algébrique qui est mise en avant. La conclusion de l'article (Assude 2002) est qu'il y a une sorte de paradoxe entre la réduction des moyens praxéologiques du travail de l'élève et le discours institutionnel qui prône l'enrichissement de l'activité de l'élève, et que cette contradiction pourrait être à l'origine d'une évolution curriculaire. Il nous semble, dix ans après, qu'il est temps de s'interroger : quelle est l'évolution curriculaire concernant l'objet « inéquation » ces dix dernières années ? Dans cette partie, nous prenons un point de vue diachronique et nous nous intéressons aux possibles effets d'une contrainte institutionnelle qui est celle de l'introduction du socle des connaissances et compétences.

3.1. Petits changements ?

Actuellement, l'objet « inéquation » vit dans la classe de troisième, comme dans les programmes de 1998. Il est associé aux équations et aux problèmes du premier degré dans le secteur « Nombres et calculs ». Les deux types et le sous-type de tâches du programme de 1998 sont encore présents dans les programmes actuels.

Dans un premier temps, au niveau des types de tâches, nous pouvons dire qu'il n'y pas d'évolution curriculaire relative à cet objet : dans l'un et l'autre programmes, les inéquations sont présentées comme des outils pour résoudre des problèmes. Or les commentaires associés nous apportent des informations différentes. Ainsi, en 1998 :

> Les problèmes sont issus des différentes parties du programme. Comme en classe de quatrième, on dégagera à chaque fois les différentes étapes du travail : mise en équation, résolution de l'équation et interprétation du résultat.

Et en 2008 :

> La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs,…).

Dans un cas, nous avons une référence aux champs de problèmes et au processus de modélisation avec ses différentes étapes (notamment avec l'explicitation de l'interprétation des résultats), dans l'autre cas nous avons une référence au socle. Certes, le commentaire de 1998 apparaît en 2008 en classe de quatrième à propos des équations mais il n'est pas repris en classe de troisième. Nous faisons l'hypothèse que ce petit changement de référence est un indice d'une évolution qui s'ébauche liée à la contrainte actuelle du socle commun de connaissances et de compétences et à la contrainte des références de légitimation du savoir à enseigner. Précisons ce point.

Le contexte de modélisation, identifié à partir des documents d'accompagnement et des discours noosphériens, avait comme référence le travail de modélisation dans la sphère savante des mathématiques et des scientifiques. Or les discours actuels semblent plutôt mettre l'accent sur les contraintes internes à l'institution scolaire et à la mise en place du socle commun. Dans les « Recommandations pour le socle commun[10] » le Haut Conseil à l'Éducation indique :

> Pour ce qui est des mathématiques, le Haut Conseil recommande de donner une importance accrue à la résolution de problèmes à partir de situations ouvertes et proches de la réalité (p.7)

Ces recommandations sont prises en compte dans le préambule des programmes du Collège, dans la partie consacrée au socle :

> Au niveau des exigibles du socle commun, toute technicité est exclue, puisque – dans l'esprit général du socle – on se limite à des problèmes simples, proches de la vie courante, utilisant des nombres en écriture fractionnaire. (p.10)

Vu que la notion d'équation ne fait pas partie du socle, il y a une réduction importante du type de tâches relatives aux inéquations en ce qui concerne les exigibles du socle. Cette dualité du curriculum officiel (programmes et socle) n'a pas pour le moment de conséquences sur le programme lui-même mais la distance entre les deux peut-elle être très grande ? En outre, en diminuant la référence au travail de modélisation et en mettant l'accent sur l'empirisme dans le cadre du socle, il y a peut-être un choix curriculaire différent au niveau des attentes de la société relativement aux savoirs et aux rapports à ces savoirs. Voyons si ce premier indice au niveau du type de tâches et de son environnement curriculaire se confirme ou non au niveau des techniques enseignées pour accomplir ces types de tâches.

3.2. Techniques et ambivalence institutionnelle

Pour analyser l'évolution des techniques pendant les dix dernières années, nous avons analysé des manuels (en papier, en ligne) et les énoncés des épreuves de mathématiques du brevet des Collèges. Il a été indiqué que, dans le programme de 1998, la technique algébrique était la technique prédominante même si la technique graphique se trouvait aussi dans les manuels et dans les corrections des épreuves de brevet. Dans le programme actuel, aucune technique n'est indiquée, on peut en déduire que la technique algébrique est encore celle le plus souvent convoquée pour accomplir les deux types de tâches

[10] Publié le 26 mars 2006

« Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques » et « Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une inéquation ». Par exemple, dans le manuel *Transmath* 3^{e} (Carlod *et alii* 2008, p.73), la technique algébrique est présentée avec un discours technologique consistant en l'énoncé de règles justificatives des différentes étapes de la résolution. En outre, pour accomplir le second type de tâche, des étapes sont indiquées qui mettent l'accent sur le choix de l'inconnue, la mise en inéquation, la résolution de l'inéquation et le retour au problème (exemple op. cité, p. 75). Ainsi, nous pouvons dire qu'il y a une continuité entre le précédent et l'actuel programme.

Dans le corpus de données des épreuves de brevet constitué de 57 sujets au total (entre 1999 et 2010), seulement 4 sujets concernent les années 2007-2010. Parmi eux, seul celui de 2010 porte sur l'objet inéquation dans la troisième partie du problème dont voici l'énoncé :

> **Coût du dallage** – Pour l'ensemble de ses chantiers, l'entreprise se fournit auprès de deux grossistes. Les tarifs proposés pour des paquets de 10 dalles sont :
> Grossiste A : 48 € le paquet, livraison gratuite.
> Grossiste B : 42 € le paquet, livraison 45 € quel que soit le nombre de paquets.
> 1) Quel est le prix pour une commande de 9 paquets :
> a) avec le grossiste A ? b) avec le grossiste B ?
> 2) Exprimer en fonction du nombre *n* de paquets :
> a) le prix en euros d'une commande de *n* paquets avec le grossiste A;
> b) le prix en euros d'une commande de *n* paquets avec le grossiste B.
> 3) a) Représenter graphiquement chacun de ces deux prix en fonction de *n* dans le repère donné sur la feuille annexe 2.
> b) Quel est, selon le nombre de paquets achetés, le tarif le plus avantageux ?

Dans la correction, la technique mise en œuvre n'est pas la technique algébrique mais une technique graphique. Or il y a une ambivalence concernant les techniques et plus généralement les attentes institutionnelles. Si on étudie la correction proposée, à aucun moment, on ne demande d'écrire une inéquation, et dans ce cas, peut-on parler de technique graphique pour résoudre une inéquation ? Il y a effectivement une technique graphique pour représenter deux fonctions, mais la technique utilisée pour donner une réponse à la question 3.b n'est pas une technique graphique mais une technique de lecture perceptive, comme on peut le voir dans ce corrigé :

> b. de 0 à 7 paquets, il faut choisir le tarif A, et à partir de 8 paquets, il faut choisir le tarif B.

L'ambivalence institutionnelle concernant les techniques à mettre en œuvre pour accomplir certains types de tâches particularise une ambivalence plus générale liée à la contrainte du socle commun. Dans le préambule du programme du Collège, il est indiqué explicitement (pp.9-10) :

> (…) dans le domaine du calcul littéral, les exigences du socle ne portent que sur les expressions du premier degré à une lettre et ne comportent pas les techniques de résolution algébrique ou graphique de l'équation du premier degré à une inconnue.

Le sujet de brevet de 2010 est un exemple de cette évolution curriculaire d'évanouissement des techniques algébriques et graphiques sous contrainte du socle. L'objet inéquation peut venir à disparaître du curriculum au Collège même s'il y a encore actuellement dans ce sujet de brevet un problème de la vie pratique modélisable par une inéquation. Cela risque aussi d'être le cas des équations, ainsi que le formule le programme (p.36) :

> La notion d'équation ne fait pas partie du socle commun. Néanmoins, les élèves peuvent être amenés à résoudre des problèmes du premier degré (méthode arithmétique, méthode par essais successifs,…).

La distinction entre l'ensemble de connaissances du programme et celui du socle (celui-ci étant un sous-ensemble du premier) est une nouvelle contrainte dans le curriculum, et notamment dans le domaine algébrique. Nous n'avons pas de recul pour pouvoir analyser les effets de cette contrainte mais la tendance mise en avant dans l'exemple des inéquations paraît être celle d'une réduction encore accrue des moyens du travail algébrique de l'élève par la réduction des techniques disponibles et efficaces dans des champs de problèmes plus larges. Ce phénomène n'est pas nouveau mais par contre l'ambivalence institutionnelle est nouvelle, ce qui peut poser un problème professionnel dans les années qui viennent. L'évolution curriculaire à laquelle on pouvait s'attendre il y a quelques années autour de la notion de modélisation par rapport aux inéquations et par rapport au domaine algébrique n'a pas eu lieu. Par contre, la contradiction est encore plus forte entre le discours institutionnel autour des exigences conceptuelles et les moyens praxéologiques mis à disposition des élèves, notamment ceux exigibles par le socle commun.

CONCLUSION

Nous avons étudié l'évolution de la place et des fonctions de trois objets relevant du domaine algébrique dans les programmes depuis 1995. Cette étude nous a permis de montrer que l'institution scolaire, par le biais des programmes, multiplie les injonctions sur le travail algébrique qui peut être fait au collège : insistance sur la résolution de problèmes en indiquant des types de tâches plus diversifiées, incitation à choisir des problèmes de la vie courante au lieu de problèmes de modélisation. Mais dans le même temps, elle met à l'écart certains objets par le biais du socle commun de connaissance. Il n'est pas sûr qu'actuellement on puisse assurer une cohérence dans le cadre de ces différents choix. Ainsi, le phénomène de réduction des moyens de travail mathématique qui caractérise l'état actuel de l'enseignement des inéquations au collège, n'est pas nouveau ; en revanche, ce qui l'est c'est la disparition de la référence à la modélisation, qui renvoie elle-même à l'activité du mathématicien et du scientifique, au profit d'une référence scolaire et sociale à travers le socle commun (même si la première référence existe notamment dans le document d'accompagnement). Les types de tâches plus diversifiées pourraient permettre de donner du sens au travail algébrique mais si les notions ne relèvent pas du socle, on peut penser qu'elles ne seront pas complètement investies. Tout ceci est peut être dû au fait qu'actuellement il n'y a pas un secteur algébrique institutionnellement reconnu et qu'il y a une atomisation des types de tâches dans plusieurs secteurs. En outre, l'effet intégrateur qu'on pouvait attendre de l'introduction du couple (programme de calcul, expression algébrique) demeure une potentialité largement inexplorée.

Parallèlement, l'étude des manuels montre une évolution constante dans la réduction des éléments technologiques qui risquent d'aboutir à l'utilisation de techniques non mathématiques.

De façon plus générale, l'étude de cette évolution montre que les éléments théoriques permettant de justifier les calculs et donner des moyens de contrôle aux élèves sont peu souvent explicites ou remplacés par des ostensifs peu efficaces. Si une grande insistance est relevée en géométrie sur l'utilisation des théorèmes et de la justification de leurs conditions d'application, et si nous savons qu'en algèbre la situation est différente (Arsac 2009), il ne faut cependant pas que élèves puissent penser qu'il n'y a pas de théorèmes ou de propriétés en algèbre. Nous pensons donc qu'il est important de redonner une place explicite aux éléments théoriques en algèbre par la mise en œuvre régulière des types de tâches de justification qui permettent aussi de redonner des finalités à l'enseignement de l'algèbre.

REFERENCES

ARSAC G. (2009) La démonstration : une logique en situation ? In Coulange L., Hache C. (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2009* (pp.243–266). Paris : ARDM & IREM.

ASSUDE T. (2002) Un phénomène d'évolution curriculaire : le cas de l'objet « inéquation » au Collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 22(2/3) 209–236.

BOSCH M. (2008) Introduction à l'algèbre: Programmes de calcul et « Jeux mathémagiques », dans le document en ligne sur site de l'INRP http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/documents/cdamperes/colloque_ampere_lyon_2008.pdf

BOURLET C. & DEBROSSES Z. (1932) *Algèbre* 1re,2e,3e Années, Enseignement Primaire Supérieur, Librairie Hachette, Paris.

CHEVALLARD Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x* 19 43–72.

CHEVALLARD Y (1995) Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petit x* 42 33–57.

CHEVALLARD Y. (1999) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(3) 221–266.

CHEVALLARD Y. (2002) Séminaire PLC2, année universitaire 2001-2002.

CHEVALLARD Y. (2007) Séminaire PLC2, année universitaire 2006-2007 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Seminaire_2006-2007.pdf

CHEVALLARD Y. (2009), La notion de PER : problèmes et avancées, http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

COMBIER G., GUILLAUME J.-C., PRESSIAT A. (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège.* Paris : INRP.

DOCUMENT RESSOURCES "DU NUMERIQUE AU LITTERAL" (2008) site du Ministère : http://media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

EL MOUHAYAR R. (2007) *Etude en France et au Liban des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15 ans) dans le cas de l'algèbre*. Thèse de doctorat, Université Lumière Lyon 2.

LEBOSSE C., HEMERY C. (1939) *Algèbre, arithmétique et géométrie,* Classe de quatrième, deuxième année des E.P .S. Paris : Fernand Nathan.

RUIZ-MONZON N., BOSCH M., GASCON J. (2010) La algebrización de los programas de cálculo arithmético y la introducción del álgebra en Secondaria. In Bronner A., Larguier M., Artaud M., Bosch M., Chevallard Y., Monzon N., Bosch M., Cirade G., Ladage C. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de savoir et d'action*, *Actes TAD2* (pp. 655–676). Montpellier : IUFM.

LES MANUELS

BOCLE C., JACOB N., SITBON J., XOUAL I. (2006) Math 5 Collection PRISME, Editions Belin.
BOULLIS M., MEYER I., MONKA Y., PERCOT S., ROY D. (2010) Mathématiques 5e collection Myriade, Editions Bordas.
BOULLIS M., DUPE C., GIRMENS Y., PELLEQUER S. (2006) Maths 5 Collection BABYLONE, Editions Bordas.
BOURDAIS M., BOULANGER F. (2001) Math 5 Collection CINQ sur CINQ, Editions Hachette.
BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2009) Mathématiques 6 Collection PHARE, Editions Hachette.
BRAULT R., DARO I., FERRERO C., PERBOS-RAIMBOURG C., TELMON C. (2006) Mathématiques 5 Collection PHARE, Editions Hachette.
CARLOD V., FUNDAKOWSKI M., MAZE M., PLANTIVEAU A., PUIGREDO F., Sérès P. (2008) Transmath 3e, Editions Nathan.
CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (1997) Mathématiques 5e Collection TRIANGLE, Editions Hatier.
CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2001) Mathématiques 5e Collection TRIANGLE, Editions Hatier.
CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2006) Mathématiques 5e Collection TRIANGLE, Editions Hatier.
CHAPIRON G., MANTE M., MULET-MARQUIS R., PEROTIN C. (2010) Mathématiques 5e Collection TRIANGLE, Editions Hatier.
CORRIEU L., BATIER C., LABROUSSE M., LEBRAUD J. (1997) Mathématiques 5 Edition Delagrave.
ESCALIER E., FILLIOT B., GERMONI M., HELLER MC., PUPIN –WIRTH C., VERRIER C. (1997) Math 5, Editions Bordas.
LANATA F., LE HIR-JOMIER G., LEMETAIS B., VINCENT D., BENHEDANE H. (2006) Maths 5 Editions Magnard.
MALAVAL J., COURBON D., MAZE M., PLANCHAT C., PUIGREDO F., SERES P. (2010) 5e Collection TRANSMATH, Editions Nathan.
MALAVAL J., COURBON D., MAZE M., PLANCHAT C., PUIGREDO F., SERES P. (2006) 5è Collection TRANSMATH, Editions Nathan.
MALAVAL J., JARDONNET M., MOREAU R. (1997) Maths 5 Collection TRANSMATH, Editions Nathan.
SWIDEREK M., ALEXANDER M., BONNEFILLE E., CHARMARTY O., FREYCENET P., ROUSSEAU P. (2006) Maths 5 Collection DIABOLO, Editions Hachette.
Sesamath (en ligne) : http://manuel.sesamath.net/