



**HAL**  
open science

## Les modèles de graphes théoriques

Serge Lhomme

► **To cite this version:**

| Serge Lhomme. Les modèles de graphes théoriques. 2012. halshs-00773006

**HAL Id: halshs-00773006**

**<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00773006>**

Preprint submitted on 11 Jan 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Les modèles de graphes théoriques

Serge Lhomme  
École des Ingénieurs de la Ville de Paris  
serge.lhomme@eivp-paris.fr

Décembre 2012

groupe f.m.r.



## Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques. En cela, les graphes qu'elle manipule sont des abstractions. C'est pourquoi parler de modèles de graphes théoriques relève presque du pléonasm. Néanmoins, comme la théorie des graphes a fait ses preuves dans le domaine opérationnel pour résoudre des problématiques de la vie courante (en matière d'optimisation notamment), elle a pu parfois être réduite à ces aspects éminemment opérationnels qui ont fait son succès. Dès lors, les aspects purement théoriques ont longtemps été laissés aux seuls mathématiciens, les autres disciplines appliquant la théorie des graphes à des questionnements plus concrets.

Quoi qu'il en soit, il est difficile de séparer le développement croissant de la théorie des graphes dans les sciences sociales, comme dans certains domaines de la physique et de la biologie, de l'apparition de modèles de graphes théoriques (*small-world* et *scale-free*). Ces modèles théoriques semblent notamment permettre de dépasser des divisions disciplinaires existantes, chaque discipline utilisant souvent pour un même indicateur une terminologie qui lui est propre. Ainsi, s'il n'y a pas *a priori* de rapport entre un géographe qui étudie essentiellement des graphes planaires et un sociologue qui étudie des graphes non planaires, ces graphes peuvent être *small-world* ou *scale-free* [3].

Si cette synthèse se focalise sur les graphes théoriques, elle ne vise pas pour autant à en faire une revue exhaustive qui ne serait d'ailleurs pas d'une très grande utilité, puisqu'il existe un nombre trop important de modèles de graphes théoriques. L'objectif est plutôt de réfléchir sur cette notion de modèles de graphes théoriques, sur son évolution et sur sa pertinence.

# 1 Les familles de graphes : les premiers modèles de graphes théoriques ?

## 1.1 Les graphes eulériens

La théorie des graphes est née d'une problématique pratique un peu particulière : le problème des sept ponts de Königsberg. Le problème peut s'exprimer sous la forme suivante : est-il possible de parcourir un graphe en partant d'un sommet quelconque et en empruntant une fois (ni plus, ni moins) chaque arête pour revenir au sommet de départ ? Un tel graphe peut être comparé à un dessin que on trace sans lever le crayon. Un graphe de ce type est appelé eulérien en l'honneur de Leonhard Euler qui démontra dans le cas des ponts de Königsberg que cela était impossible. Le problème du « postier chinois », qui consiste à trouver un plus court chemin dans un graphe connexe non orienté passant au moins une fois par chaque arête du graphe et revient à son point de départ, revient donc à identifier le cycle eulérien le plus court dans un graphe.

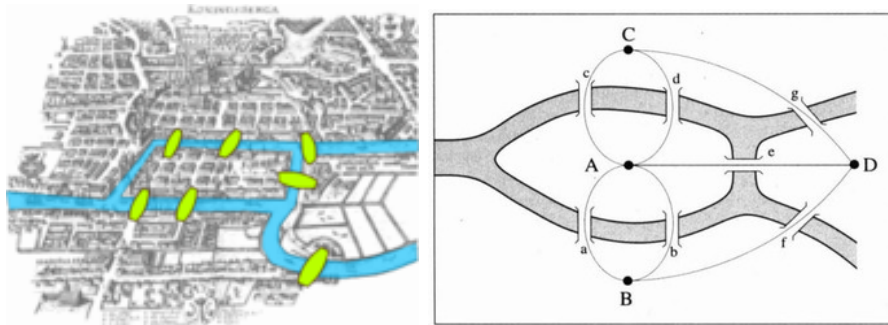


FIGURE 1 – Le problème des sept ponts de Königsberg et son graphe associé

Désormais, il est très simple de déterminer si un graphe est eulérien grâce au théorème d'Euler : un graphe connexe  $G$  admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair [4]. D'autre part, un graphe connexe  $G$  admet une chaîne eulérienne distincte d'un cycle si et seulement si le nombre de sommets de  $G$  de degré impair est égal à 2. Dans ce cas, si A et B sont les deux sommets de  $G$  de degré impair, alors le graphe  $G$  admet une chaîne eulérienne d'extrémités A et B. Ainsi, il n'y a aucune ambiguïté pour déterminer si un graphe est eulérien.

## 1.2 Les graphes hamiltoniens

Dans une même continuité, un graphe hamiltonien est un graphe possédant au moins un cycle passant par tous les sommets une et une seule fois. Le problème du « voyageur de commerce » s'apparente à la recherche d'un cycle hamiltonien en y ajoutant une contrainte : la minimalisation de son

ponds dans un graphe complet dont les arêtes sont pondérées. Néanmoins, si cette problématique semble très proche de celle des graphes eulériens, sa résolution est beaucoup plus problématique. En effet, il n'est pas possible de déterminer si un graphe est hamiltonien tant que le cycle n'a pas été trouvé ou au contraire tant que toutes les solutions n'aient été testées et invalidées. Ce problème est algorithmiquement difficile. Ainsi, dès que le graphe étudié est relativement grand, tous les algorithmes connus pour résoudre ce problème ont un temps d'exécution très long.

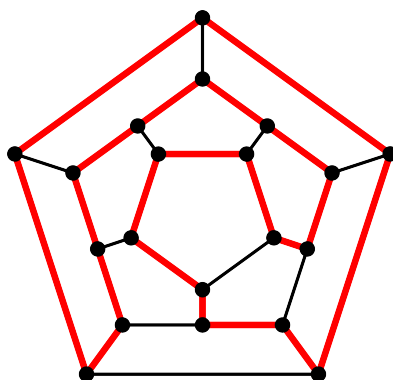


FIGURE 2 – Un graphe hamiltonien avec en rouge son cycle hamiltonien

Quoi qu'il en soit, à l'instar des graphes eulériens, la définition est claire et ne laisse pas de place à une quelconque ambiguïté. Une fois formalisée sous forme de graphe, la nature du problème, bien que pratique, est de nature mathématique, même si les moyens pour résoudre cette problématique sont souvent informatiques. C'est cette définition purement mathématique qui caractérise les familles de graphes (hamiltoniens, eulériens, connexes...) et qui les distingue, comme va le montrer cette synthèse, des modèles de graphes théoriques dont les propriétés sont beaucoup plus lâches et ne font donc pas partie intégrante de la théorie des graphes.

## 2 Les modèles de graphes théoriques « classiques »

### 2.1 Les graphes aléatoires

Dans son acceptation large, un graphe aléatoire est un graphe qui est généré par un processus aléatoire. Les graphes aléatoires ont été introduits par Paul Erdős et Alfréd Rényi en 1959 [5] afin de prouver certains résultats sur les graphes. Plusieurs modèles de graphes théoriques existent. Le choix du modèle doit être fait avec soin car les propriétés des graphes peuvent être très différentes selon le modèle choisi [7].

Un graphe aléatoire de taille  $n$  est un graphe à  $n$  sommets dont on a choisi aléatoirement les arêtes. Le modèle d'Erdős-Rényi consiste à considérer que

l'existence de chaque arc est indépendante de celle des autres et que chaque arc a une probabilité  $p$  d'exister [7]. Dans ce cas, la distribution des degrés des sommets du graphe suit une loi de Poisson (une loi binomiale). Ces graphes sont généralement notés  $G(n, p)$  où  $n$  est le nombre de sommets et  $p$  la probabilité que les arêtes soient présentes. Néanmoins, peu de graphes dans la nature suivent cette distribution [6]. De plus, le modèle Erdős-Rényi crée des graphes presque sûrement connexes alors qu'ils sont censés être aléatoires [7].

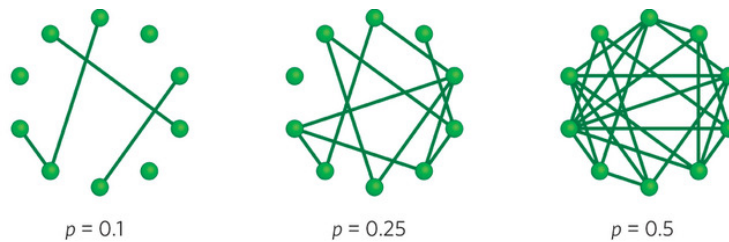


FIGURE 3 – Trois graphes aléatoires de 10 sommets pour trois valeurs de probabilité

C'est pourquoi il existe un modèle à distribution des degrés fixée [6]. Il s'agit de se donner une loi de probabilité pour les degrés et de considérer que les graphes sont par ailleurs aléatoires. Il est ainsi possible d'obtenir aléatoirement des résultats montrant que les degrés des graphes suivent des lois de puissance (*scale-free*). Néanmoins, il faut généralement entendre par « graphe aléatoire » un graphe qui suit une loi binomiale de distribution des degrés (le modèle d'Erdős-Rényi).

Ce modèle de graphe théorique repose donc sur un modèle de construction qui se caractérise par une loi statistique. En cela, il constitue le premier modèle de graphes théoriques. C'est *a posteriori* qu'il s'est trouvé intéressant de vérifier si de tels graphes se trouvaient effectivement dans la nature, puisque les graphes aléatoires s'opposaient aux graphes réguliers peu présents dans la nature (un graphe est dit régulier quand tous les sommets ont le même nombre de voisins, c'est à dire le même degré).

## 2.2 Les graphes *small-world*

Issu des travaux de Watts et Strogatz, le modèle de graphes « petit-monde » (*small world network*) connaît un succès rapide, principalement dû à son lien direct avec les travaux de Stanley Milgram concernant les fameux « six degrés de séparation » [8]. Ces graphes sont caractérisés par deux propriétés : la distance moyenne entre deux nœuds est proportionnelle au logarithme du nombre de nœuds ; un grand nombre de structures sont proches de cliques. Un graphe petit monde possède alors un *clustering coefficient* supérieur (en fait très supérieur) et un diamètre inférieur à un graphe aléatoire

de même ordre et de même taille.

La figure ci-dessous résume le type théorique de graphe proposé et sa méthode de construction. Le graphe de départ est  $k$ -régulier (tous les sommets ont le même degré  $k$ ) et chaque sommet est lié à ses voisins proches. De façon aléatoire, un lien est supprimé et un lien ajouté au graphe de départ. Progressivement, le graphe  $k$ -régulier est transformé en graphe aléatoire par suppression - ajout de liens. Entre ces deux extrêmes, le graphe produit présente les propriétés *small-world*.

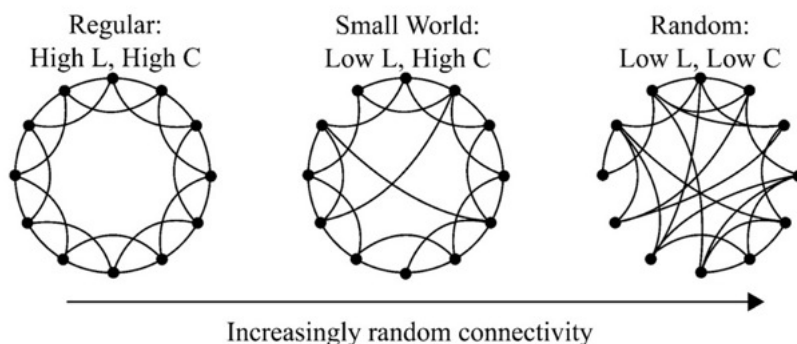


FIGURE 4 – Le modèle du *small-world network* où  $C$  est le *clustering coefficient* et  $L$  l'éloignement moyen du graphe

Pour reprendre, les conclusions d'une synthèse précédente, si les mesures utilisées sont connues, l'intérêt principal de cette approche est de proposer un type théorique de graphe, ce dont se souciaient peu les sociologues [3]. L'inconvénient est que tous les graphes ou presque issus de données empiriques, et notamment les graphes non planaires, correspondent à la définition du *small-world network* [3]. Ainsi, ce graphe, bien que d'essence théorique, se retrouve alors empiriquement dans la nature contrairement aux graphes aléatoires ou réguliers. Le succès de ce modèle tient donc en quelque sorte dans son universalité. Quoi qu'il en soit, les propriétés de ces graphes sont peu précises, ce qui peut aussi expliquer en partie son « universalité ».

### 2.3 Les graphes *scale-free*

Barabási et Albert introduisent en 1999 les graphes invariant d'échelle [2]. Ils découvrent en effet que les graphes qu'ils étudient ne présentent pas une distribution gaussienne des degrés mais au contraire une distribution de type loi de puissance [2]. Le réseau est alors dit invariant d'échelle (*scale-free*) si, dans l'équation  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , où  $P(k)$  désigne la probabilité que le sommet  $k$  interagisse avec les autres sommets et  $k$  le degré,  $\gamma$  est supérieur à 2 [3].

Ce modèle de graphes théoriques est intéressant, car contrairement aux deux autres modèles présentés précédemment, il ne repose pas sur une construction *a priori*, mais sur une analyse empirique de graphes existants. Il n'est donc pas étonnant que de nombreux graphes soient *scale-free*. Cependant, il se trouve que ce modèle est associé à une loi de puissance, cette dernière étant à l'origine d'une littérature importante sur l'attachement préférentiel se rattachant ainsi à une vision du monde assez hiérarchique et/ou inégalitaire. C'est sans doute à ce titre qu'il est possible de caractériser les réseaux *scale-free* comme correspondant à un modèle de graphes théoriques. Enfin, à l'instar des deux autres modèles théoriques présentés précédemment, la définition d'un réseau *scale-free*, bien que peu ambiguë, n'est en fait pas très précise, puisque la détermination de  $\gamma$  est soumise au calcul d'une régression pouvant être discutée.

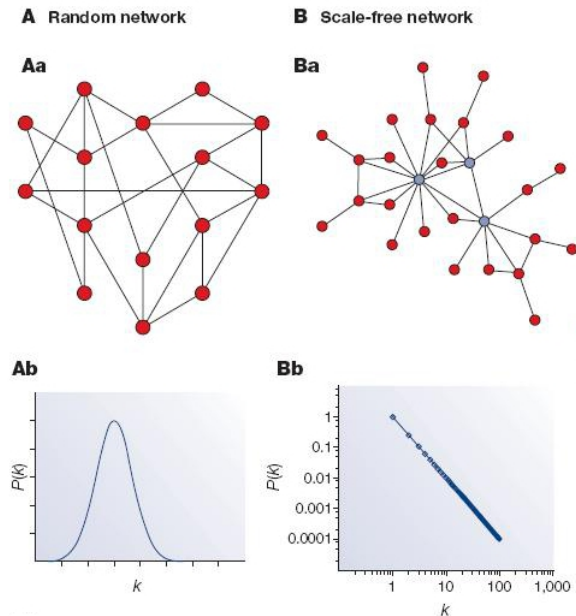


FIGURE 5 – Un réseau *scale-free* (Ba) suit une distribution en loi de puissance des degrés (Bb) et non une loi binomiale (Ab) comme les graphes aléatoires (Aa)

### 3 Des modèles de graphes théoriques issus des modèles de graphes théoriques « classiques »

#### 3.1 Les *apollonian networks*

Les *apollonian networks* permettent d'introduire un niveau supplémentaire d'abstraction en matière de modèles de graphes théoriques. En effet,

il est possible de définir des modèles de graphes théoriques issus de la composition de différents modèles de graphes théoriques. Ainsi, comme il n'y a pas d'opposition entre les graphes *small-world* et *scale-free*, il est possible de créer un modèle de graphes qui soit à la fois *small-world* et *scale-free*. C'est précisément le cas des *apollonian networks* [1].

De plus, les *apollonian networks* sont des graphes planaires. Ainsi, les *apollonian networks* sont définis à partir de modèles de graphes théoriques et d'une propriété définissant une famille de graphe. La frontière entre les modèles de graphes théoriques et les familles de graphes issues de la théorie des graphes se révèle donc poreuse.

Un *apollonian network* est assez simple à construire. Il suffit de prendre un triangle de base, puis de placer un sommet à l'intérieur de ce triangle et de relier ce dernier avec les sommets qui partagent la même face. Ce procédé peut être répété indéfiniment. On obtient alors un ensemble de triangles emboîtés les uns dans les autres. Cette construction aboutit donc à une triangulation de l'espace [1]. Les *apollonian networks* sont nommés en l'honneur d'Apollonios de Perge, qui a posé le problème suivant : comment construire un cercle tangent à trois autres cercles ? En effet, la modélisation de ce problème sous forme de graphes donne un *apollonian network*.

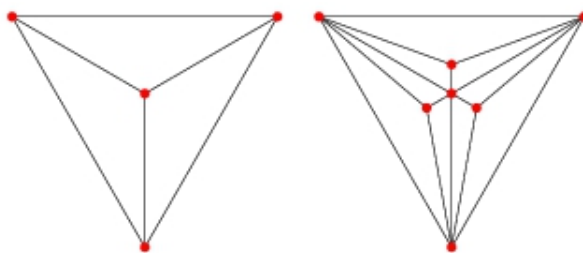


FIGURE 6 – Exemple de construction d'un *apollonian network*

Enfin, les *apollonian networks* peuvent présenter des caractéristiques surprenantes. Ainsi, le plus petit graphe planaire maximal (graphe planaire auquel il est impossible de rajouter un arc sans que celui-ci devienne non-planaire) non-hamiltonien est un *apollonian network*.

## Conclusion

Si formellement il existe une différence assez nette entre les modèles de graphes théoriques et les familles de graphes, il semble que le succès des modèles de graphes théoriques tende à faire oublier leur principale spécificité. Ainsi, déterminer si un graphe est issu d'un modèle de graphes théoriques requiert une certaine subjectivité. En effet, l'aspect statistique autorise une interprétation (seuil à partir duquel une régression est jugée satisfaisante, le *clustering coefficient* d'un graphe est beaucoup plus grand que celui d'un



graphe aléatoire...). D'essence physique plutôt que mathématique, les modèles de graphes théoriques tiennent aujourd'hui une place comparable, voire supérieure, aux familles de graphes (issues de la théorie des graphes) dans les sciences sociales.

## Références

- [1] J. S. JR. ANDRADE, H. J. HERRMANN, R. F. S. ANDRADE et L. R. da SILVA : Apollonian Networks : Simultaneously Scale-Free, Small World, Euclidean, Space Filling, and with Matching Graphs. *Physical Review Letter*, 94, 2005.
- [2] A.L. BARABÁSI et R. ALBERT : Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [3] L. BEAUGUITTE et C. DUCRUET : Scale-free, small-world networks et géographie. *Groupe fmr*, 2011. <http://halshs.archives-ouvertes.fr/FMR/fr/>.
- [4] C. BERGE : Graphes. 1973.
- [5] P. ERDOS et A. RENYI : On Random Graphs. *Publicationes Mathematicae*, (6):290–297, 1959.
- [6] M.E.J. NEWMAN, S.H. STROGATZ et D.J. WATTS : Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications. *Physical Review E*, 64(2):26118, 2001.
- [7] V. PICARD : Les graphes aléatoires. <http://perso.ens-lyon.fr/eric.thierry/Graphes2010/vincent-picard.pdf>.
- [8] D.J. WATTS et S. STROGATZ : Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.