

Boulier chinois et algorithmes de calcul

Caroline Poisard

► **To cite this version:**

| Caroline Poisard. Boulier chinois et algorithmes de calcul. Plot, 2009, 29, pp.22-25. halshs-00725820

HAL Id: halshs-00725820

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00725820>

Submitted on 19 Nov 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Boulier chinois et algorithmes de calcul

Caroline Poisard
IUFM de Bretagne – Université de Bretagne Occidentale
Laboratoire du Créad
caroline.poisard@bretagne.iufm.fr

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot 27*, 22-25. Téléchargeable avec une fiche d'exercices sur <http://www.apmep.asso.fr/Sommaire-du-numero-27-3eme-trim>

Notre intention est ici de présenter le boulier chinois (ou suan-pan) pour une étude en classe de mathématiques. Nous analysons en particulier le lien entre les techniques de calcul sur le boulier chinois et les algorithmes envisageables en papier-crayon. Le boulier est répandu en Chine depuis le 12^{ème} siècle, et probablement présent depuis les premiers siècles après J.-C. L'étude que nous proposons ici est *occidentalisée*, c'est-à-dire dans l'objectif d'un apprentissage sur la numération et les algorithmes, et non pour un apprentissage précoce et automatique des techniques.



Un boulier chinois indiquant zéro

Pour la lecture de ce document, nous recommandons d'avoir un boulier à portée de main. Pour la classe, il sera nécessaire d'avoir au moins un boulier pour deux élèves, ainsi qu'un rétroprojecteur sur lequel on pose le boulier ou bien des aimants à placer au tableau sur un cadre de boulier dessiné. On pourra aussi utiliser un boulier virtuel¹.

Nous allons maintenant développer la lecture et l'inscription des nombres sur le

boulier puis l'addition, la soustraction et la multiplication.

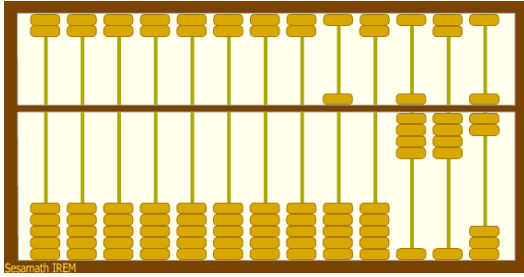
Inscrire et lire un nombre

Dans un dossier publié en ligne², nous présentons l'étude du boulier chinois en classe à partir de la question directement posée aux élèves : *Comment fonctionne le boulier chinois ?* Ici, nous allons répondre à cette question. La photo ci-contre du boulier indique zéro, pour inscrire un nombre on déplace les boules. Sur une même tige, on dispose de 7 boules : deux *quinaires* (dans la partie supérieure qui valent chacune cinq) et cinq *unaires* (dans la partie inférieure qui valent chacune un). Pour inscrire un nombre, on claque les boules vers la barre centrale du boulier. Chaque tige du boulier correspond à une position de la numération : la tige de droite représente les unités, la deuxième tige en partant de la droite les dizaines, la troisième les centaines, etc. Par exemple, le boulier ci-dessous indique 50 947. Dans les unités, on a activé une quinaire et deux unaires, dans les dizaines : quatre unaires, dans les centaines : une quinaire et quatre unaires, dans les unités de mille : aucune boule n'est activée et dans les dizaines de mille : une quinaire est activée.

¹ Par exemple, le boulier virtuel du site Sésamath-IREM, dont sont issues les copies d'écran de cet article.

http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/exo1.html
Voir la Rubrique *Coup de cœur* de Plot n 27

² Poisard, C. (2006). Dossier : *La fabrication et l'étude d'instruments à calculer*. Site Internet CultureMath, Rubrique Matériaux pour la classe. <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>



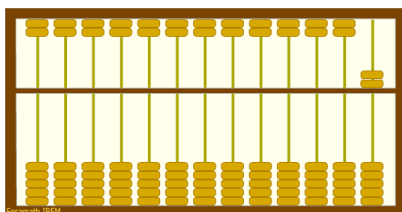
5 0 9 4 7

On peut faire le lien entre l'écriture polynomiale des nombres et celle sur le boulier :

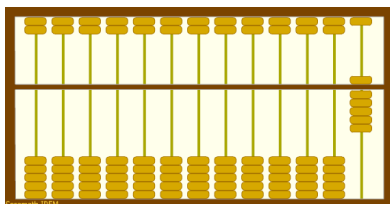
$$\begin{aligned}
 &50\,947 \\
 &= 5 \times 10^4 + 0 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0 \\
 &= 5 \times 10^4 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10 + 7
 \end{aligned}$$

Examinons maintenant deux questions qui viennent spontanément à l'étude en classe : *Est-ce que les nombres ont alors une écriture unique ? Quel est le plus grand nombre que l'on peut inscrire sur le boulier ?*

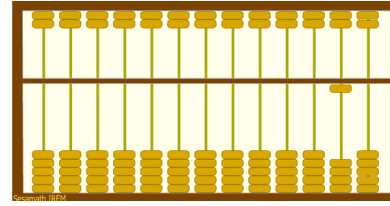
Tout d'abord, sur le boulier chinois, les nombres ne possèdent pas une unicité d'écriture. Par exemple, 5 peut s'écrire comme une quinaire ou cinq unaires. L'inscription d'une quinaire est plus *économique* dans le sens où elle déplace moins de boules, elle est aussi plus rapide à la lecture, c'est celle qui sera retenue pour l'inscription. Prenons un autre exemple. Combien existe-t-il de manières pour inscrire 10 sur le boulier chinois ? Trois manières : comme 10 dizaines, en activant soit deux quinaires, soit une quinaire et cinq unaires, soit comme une dizaine et zéro unité (on active alors une unaire dans les dizaines).



10



10



10

On propose la convention d'écriture de 10 comme une dizaine, et on utilise les échanges (et donc les deux autres écritures possibles) pour effectuer des calculs. Pour qu'il y ait unicité d'écriture, il faudrait que chaque tige ne possède qu'une quinaire et quatre unaires. En effet, ceci permet d'inscrire de 0 à 9 dans chaque position, le minimum nécessaire en base 10. C'est le cas du boulier japonais (ou soroban) qui possède donc cinq boules par tiges : une quinaire et quatre unaires ! Notre choix s'est porté vers le boulier chinois parce que justement cette non-unicité d'écriture permet de mettre en évidence la notion d'échange entre les rangs en numération de position. On peut dire que l'on *manipule les retenues à la main* sur le boulier chinois.

Maintenant, étudions la deuxième question : *Quel est le plus grand nombre inscriptible ?* C'est-à-dire, si toutes les boules sont activées, quel est le nombre inscrit sur le boulier ? Cette question est intéressante parce qu'elle nécessite de prendre de la distance avec le boulier pour y répondre, d'utiliser un codage. Prenons le cas d'un boulier à 13 tiges. Si dans chaque tige toutes les boules sont activées, on lit 15 dans chaque position et le nombre inscrit est alors :

$$\begin{aligned}
 &15 + 150 + 1\,500 + \dots + 15 \times 10^{12} \\
 &= 15 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12}) \\
 &= 15 \times 1\,111\,111\,111\,111 \\
 &= 16\,666\,666\,666\,665
 \end{aligned}$$

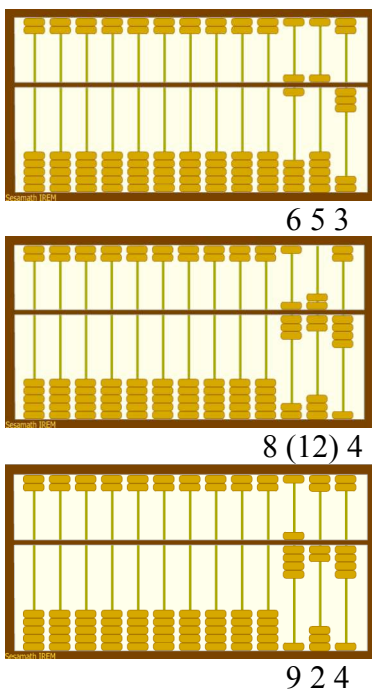
Ce nombre se lit : 16 trillions 666 milliards 666 millions 666 mille 665.

Concernant l'inscription et la lecture des nombres sur le boulier chinois, nous proposons une fiche d'exercices pour la

classe téléchargeable sur le site internet de la revue Plot³.

L'addition

Étudions l'addition avec retenue (653+271). La retenue est dans le rang des dizaines. Sur le boulier, on inscrit 653 puis par-dessus, on inscrit 271. On ne peut pas alors lire le résultat qui comporte 12 boules activées dans les dizaines (soit 120), il est donc nécessaire d'échanger 10 dizaines contre une centaine pour lire le résultat : 924. Cet échange se réalise *à la main*.



Il nous faut maintenant faire le lien avec l'écriture papier-crayon de ce calcul, comparons l'algorithme en colonnes et les techniques sur boulier.

L'algorithme en colonnes s'écrit :

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 3 \\ + 2 \ 7 \ 1 \\ \hline 9 \ 2 \ 4 \end{array}$$

Avec le boulier, on peut l'écrire en représentant les 12 dizaines :

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 3 \\ + 2 \ 7 \ 1 \\ \hline 8 \ 12 \ 4 \\ \hline 9 \ 2 \ 4 \end{array}$$

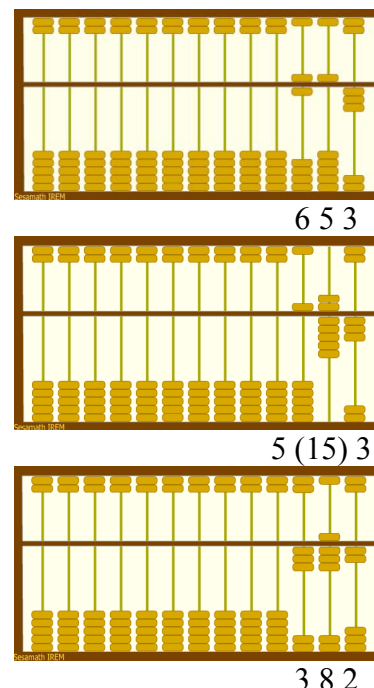
On peut aussi effectuer le calcul directement des 5 dizaines et 7 dizaines : 50+70=120, c'est-à-dire :

$$\begin{array}{r} 6 \ 5 \ 3 \\ + 2 \ 7 \ 1 \\ \hline 4 \\ + 1 \ 2 \ 0 \\ + 8 \ 0 \ 0 \\ \hline 9 \ 2 \ 4 \end{array}$$

Dans certains cas, comme pour (653+281) par exemple, il est nécessaire d'effectuer des échanges avant la fin du calcul.

La soustraction

Étudions la soustraction avec retenues (653-271). Avec le boulier, la soustraction n'est pas immédiate dans le rang des dizaines, pour effectuer ce calcul, il faut emprunter une centaine à 653 que l'on écrira comme 10 dizaines. Sur le boulier, on désactive une unaire des centaines et on active une quinaire et 5 unaires dans les dizaines. On peut maintenant enlever 271 et lire le résultat : 382.



Comparons maintenant les techniques papier-crayon et boulier pour la soustraction. C'est la méthode par emprunts, très répandue dans le monde, en particulier anglo-saxon que l'on utilise sur le boulier. Cette méthode ne nécessite que

³ <http://www.apmep.asso.fr/spip.php?rubrique13>

des connaissances sur la numération de position. La méthode par ajouts parallèles, la plus répandue en France, est plus délicate à comprendre, elle nécessite de connaître la numération de position et aussi des propriétés opératoires. De plus, elle fait intervenir deux retenues que l'on écrit avec la même notation : 1, une retenue signifiant +10 et l'autre +1, ce qui est source de confusion.

La méthode par ajouts parallèles :

$$\begin{array}{r} 6 \text{ } 15 \text{ } 3 \\ - 2 \text{ } 7 \text{ } 1 \\ \hline 3 \text{ } 8 \text{ } 2 \end{array}$$

On a $653 - 271 = (653+100) - (271+100)$ et 100 s'écrit comme 10 dizaines (1ère ligne) puis une centaine (2ème ligne).

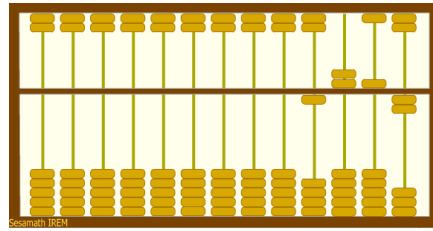
La méthode par emprunts :

$$\begin{array}{r} 5 \\ \cancel{6} \text{ } 15 \text{ } 3 \\ - 2 \text{ } 7 \text{ } 1 \\ \hline 3 \text{ } 8 \text{ } 2 \end{array}$$

On a $653 - 271 = (653-100+100) - 271$. On casse les 6 centaines (1ère ligne), il ne reste que 5 centaines et on ajoute 10 dizaines aux dizaines, ce qui donne 15 dizaines.

La multiplication

Sur le boulier chinois, pour effectuer des multiplications, il faut connaître les tables de multiplication ! Étudions la multiplication (57×36). Sur le boulier chinois, on va effectuer la multiplication décomposée, c'est-à-dire écrire chaque résultat multiplicatif sur une ligne en écrivant par-dessus à chaque fois, ce qui permet d'effectuer les additions au fur et à mesure. On effectue donc l'addition ($42 + 300 + 210 + 1500$). Tout d'abord, ($42 + 300 + 210 = 552$), on effectue l'échange "5 unaires contre une quinaire dans le rang des dizaines et des centaines" (c'est-à-dire qu'on désactive les unaires et qu'on active les quinaires). On peut alors ajouter 1500. Le boulier affiche alors :



1 (10) 5 2

Pour lire le résultat, il faut faire un échange de "10 centaines en 1 millier", c'est-à-dire désactiver les deux quinaires des centaines et activer une unaire dans les unités de mille. On lit alors le résultat : 2052.

La décomposition consiste donc à écrire :

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 36 \\ \hline 42 \quad 6 \times 7 \\ + 300 \quad 6 \times 50 \\ + 210 \quad 30 \times 7 \\ + \overset{1}{1}500 \quad 30 \times 50 \\ \hline 2052 \end{array}$$

On utilise la décomposition : $57 \times 36 = 6 \times 7 + 6 \times 50 + 30 \times 7 + 30 \times 50$.

Alors que la méthode traditionnelle est :

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 36 \\ \hline 342 \quad 6 \times 7 \\ + \overset{1}{1}710 \quad 30 \times 7 \\ \hline 2052 \end{array}$$

On utilise la décomposition : $57 \times 36 = 6 \times 57 + 30 \times 57$.

Prolongements et conclusion

On a vu que le boulier chinois est intéressant pour travailler sur la numération décimale, sur les grands nombres, et les algorithmes de calcul. Il l'est aussi pour travailler avec les nombres décimaux. En effet, il suffit de se donner une autre convention d'écriture des nombres, par exemple les unités seront inscrites sur la quatrième tige en partant de la droite, ce qui laisse la possibilité d'inscrire et d'effectuer des opérations avec des nombres à trois chiffres après la virgule.

Concernant la division sur le boulier, on peut utiliser l'algorithme traditionnel de la

division, on effectue alors les soustractions au fur et à mesure sur le boulier. Par exemple, pour $(2\ 052 \div 57)$.

$$\begin{array}{r|rr}
 2\ 0\ 5\ 2 & 5\ 7 \\
 - 1\ 7\ 1 & \hline
 \hline
 3\ 4\ 2 & \\
 - 3\ 4\ 2 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

On inscrit 2 052 sur la partie droite du boulier et on effectue la soustraction suivante : $2\ 052 - 1\ 710$. Pour travailler la multiplication et la division en classe, il est intéressant d'étudier un autre instrument de calcul : les bâtons de Néper⁴. Les multiplications sont alors ramenées à des additions et pour la division, on peut alors s'aider d'un répertoire multiplicatif. Comme pour le boulier, ce qui nous paraît important pour une étude mathématique en classe, c'est d'explicitier les différents algorithmes utilisés : ceux papier-crayon et ceux mis en évidence sur l'instrument à calculer. En effet, l'utilisation d'instruments matériels est motivante pour les élèves, mais il faut dépasser la simple manipulation pour donner du sens aux concepts mathématiques en jeu. En particulier, les phases de synthèse en classe sont primordiales et nécessitent d'utiliser un vocabulaire précis (unaires, quinaires, unités, dizaines, etc.) et du matériel spécifique (matériel aimanté à placer au tableau, ou un retro-projecteur ou un vidéo-projecteur)

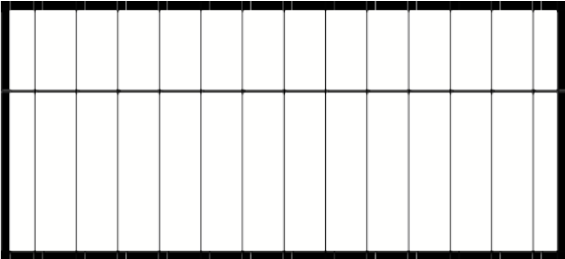
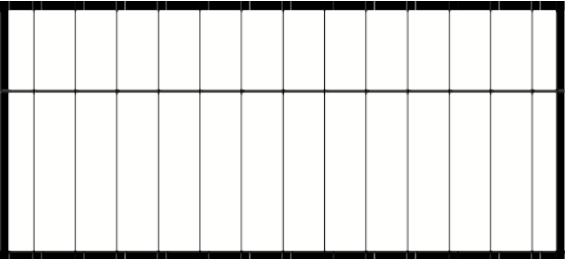
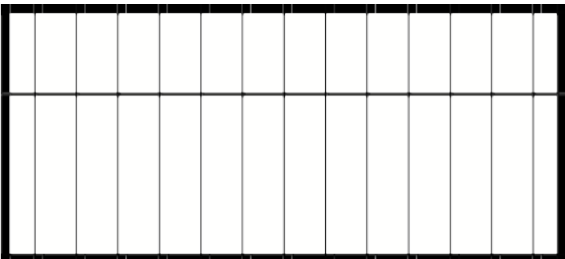
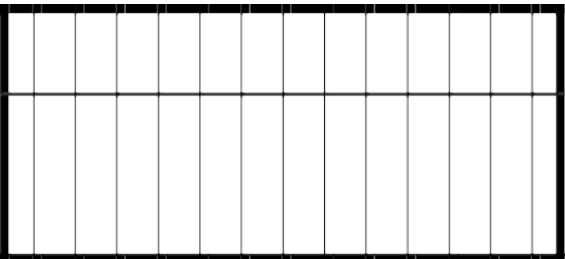
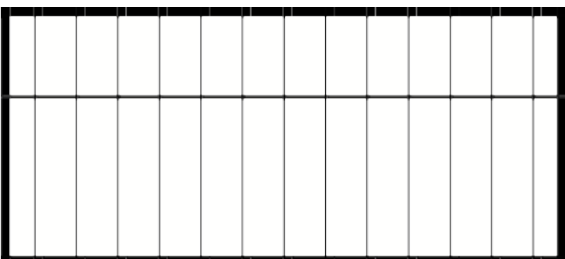
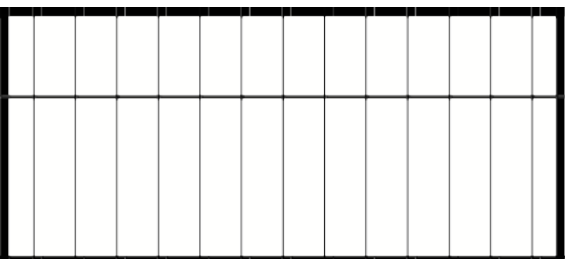
⁴ Poisard, C. (2006). Dossier : *La fabrication et l'étude d'instruments à calculer*. Site Internet CultureMath, Rubrique Matériaux pour la classe. <http://www.dma.ens.fr/culturemath/>

Fiche d'exercices

Lire et inscrire des nombres sur le boulier chinois

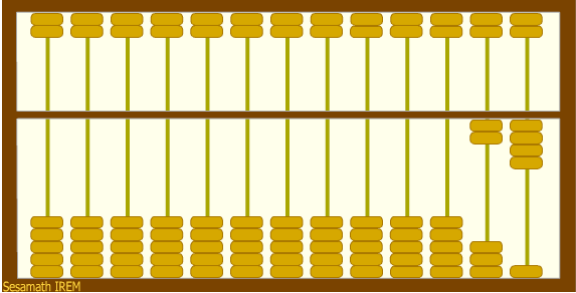
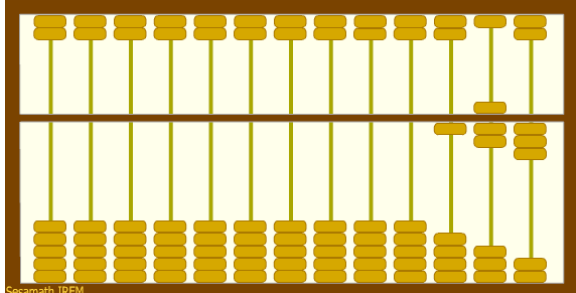
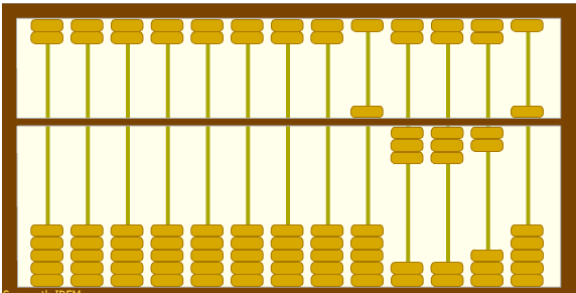
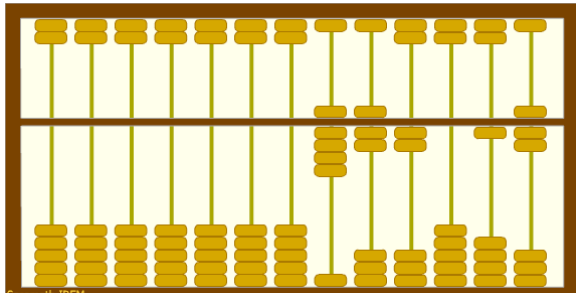
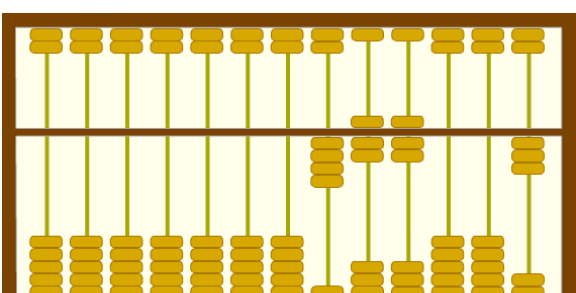
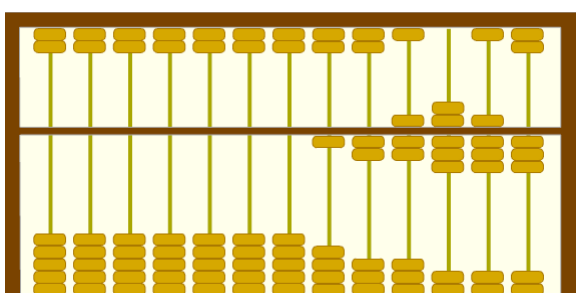
1. Inscrire des nombres

Dessiner sur chaque boulier chinois le nombre écrit en dessous. Ne dessiner que les boules activées.

<p>Boulier n°1</p>  <p>231</p>	<p>Boulier n°2</p>  <p>167</p>
<p>Boulier n°3</p>  <p>63 542</p>	<p>Boulier n°4</p>  <p>60 653</p>
<p>Boulier n°5</p>  <p>999 754</p>	<p>Boulier n°6</p>  <p>8 200 177</p>

2. Lire des nombres

Écrire sous chaque boulier chinois⁵ le nombre inscrit sur celui-ci.

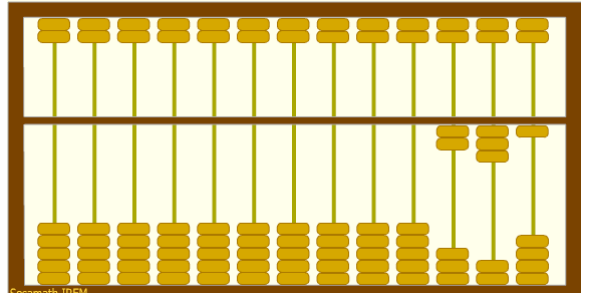
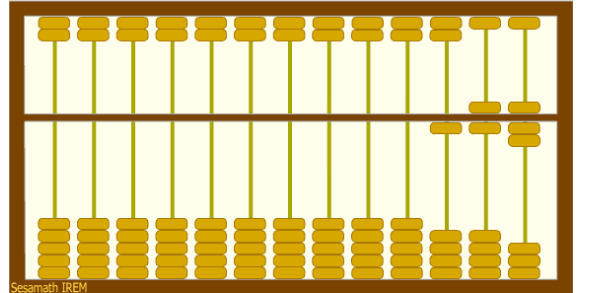
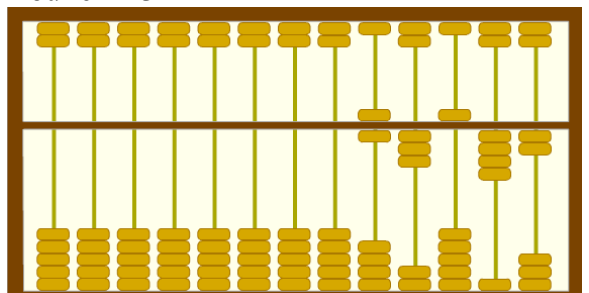
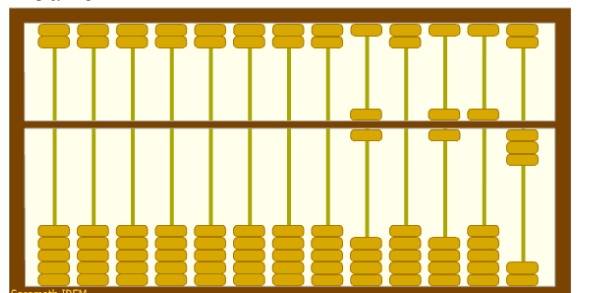
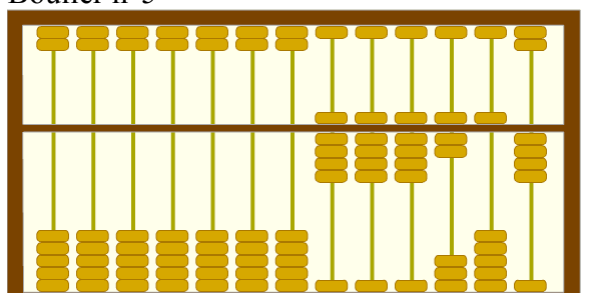
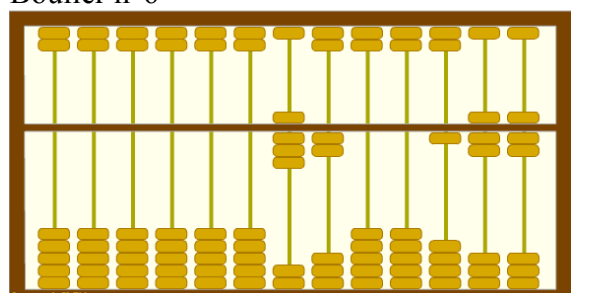
<p>Boulier n°1</p>  <p>Sesamath IREM</p>	<p>Boulier n°2</p>  <p>Sesamath IREM</p>
<p>Boulier n°3</p>  <p>Sesamath IREM</p>	<p>Boulier n°4</p>  <p>Sesamath IREM</p>
<p>Boulier n°5</p>  <p>Sesamath IREM</p>	<p>Boulier n°6</p>  <p>Sesamath IREM</p>

⁵ Les bouliers sont des copies d'écran du site Sésamath IREM : http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf

Réponses

1. Inscrire des nombres

Nous proposons ci-dessous des inscriptions des nombres les plus *économiques* possibles, c'est-à-dire avec le moins de boules déplacées. Par exemple, pour inscrire 5 dans un rang donné, on déplacera une quinaire plutôt que cinq unaires.

<p>Boulier n°1</p>  <p>2 3 1</p>	<p>Boulier n°2</p>  <p>1 6 7</p>
<p>Boulier n°3</p>  <p>6 3 5 4 2</p>	<p>Boulier n°4</p>  <p>6 0 6 5 3</p>
<p>Boulier n°5</p>  <p>9 9 9 7 5 4</p>	<p>Boulier n°6</p>  <p>8 2 0 0 1 7 7</p>

2. Lire des nombres

24, 173, 53 325, 972 017, 477 003, 128 383