Les martingales sur les marchés financiers. Une convention stochastique ?

Christian Walter

Les martingales sur les marchés financiers. Une convention stochastique ?

Christian WALTER

Janvier 2006

Mots-clés français
Modélisation financière, noyau de l'évaluation, martingales, équilibre général, juste prix.
Mots-clés anglais
Financial modelling, market pricing kernel, stochastic discount factor, martingale models, risk neutral probability, general equilibrium, fair value.

Résumé

La pensée financière au XX[e] siècle a désenclavé les domaines initialement disjoints de la finance de marché, de la finance d'entreprise, et de la théorie de l'équilibre général en économie, pour aboutir à une intégration de ces trois mondes intellectuels par la notion de noyau de l'évaluation par le marché. On propose ici : a) d'une part, de faire apparaître que c'est deux à deux que ces trois domaines se sont rencontrés au cours de la seconde moitié du vingtième siècle ; b) d'autre part, de voir l'unification conceptuelle des années quatre-vingt comme l'effet de la compréhension profonde de la puissance de la forme martingale pour la modélisation financière. Finalement, on propose de considérer la Q – martingale comme une convention au sens de Keynes, et la martingalisation systématique des marchés comme l'équivalent pour la finance du vingtième siècle de la moyennisation systématique des variables dans la statistique du dix-neuvième siècle : une action collective normative pour les pratiques professionnelles.

Trois histoires de longue durée, trois aventures intellectuelles de la pensée financière et économique traversent le XX^{e} siècle. Elles ont coexisté séparément dans les travaux universitaires pendant près de soixante ans et se sont ignorées mutuellement jusqu'à leur articulation formelle, dans les années quatre-vingt, une fois apparue dans la finance mathématique la possibilité de reconstruire certains des objets de la théorie financière au moyen de la mathématisation de l'arbitrage[1]. Ces trois domaines sont : a) la modélisation des variations boursières par des processus aléatoires, c'est-à-dire une recherche de type descriptive (sans explication causale) pour caractériser par une formule mathématique adéquate la forme des trajectoires de cours observées sur les marchés réels; b) l'évaluation des actifs financiers et des entreprises, c'est-à-dire la recherche d'une théorie capable de fournir un cadre conceptuel rigoureux permettant de donner un prix supposé juste à tout objet réel pouvant être négocié; c) la modélisation de l'équilibre en économie, qui inclut les développements de la théorie économique de l'équilibre général, initialement décrit dans un cadre statique, puis ensuite généralisé dans un cadre dynamique intertemporel.

Le premier de ces courants de pensée trouve son origine mathématique en 1900 avec la thèse de doctorat de Louis Bachelier, et se poursuit dans la première moitié du vingtième siècle avec les travaux de Alfred Cowles, Holbrook Working, Maurice Kendall, M.F. Osborne, Sydney Alexander et Paul Cootner pour parvenir à structurer, avec Paul A. Samuelson en 1965, ce qui a été appelé à devenir le modèle standard des fluctuations boursières : l'exponentielle de mouvements browniens[2]. Le second domaine a ignoré les travaux relatifs aux processus aléatoires et aux tests statistiques, et a développé depuis 1930, avec Irving Fisher et John B. Williams, des analyses de la valeur des sociétés qui aboutissent à un autre modèle standard de l'évaluation financière : la méthode des flux futurs de revenu actualisés (*discounted cash flow*) dont la version de Gordon et Shapiro, en 1956, puis le manuel de Gordon, en 1962, sont la base de tous les analystes financiers[3]. Enfin, le troisième courant de recherche est celui de la théorie de l'équilibre général qui, depuis les travaux de Léon Walras et Vilfredo Pareto, formalise toujours davantage les caractéristiques de l'équilibre des marchés. Ce courant a abouti aux synthèses de Kenneth Arrow, Gérard Debreu et Radner en 1954 et 1972[4].

Trois domaines, donc, et trois théories en constante gestation : la théorie de la dynamique boursière (finance des marchés), la théorie de l'évaluation financière (finance des entreprises), la théorie de l'équilibre économique (cadre conceptuel général). Ces

---

[1] Les éléments discutés ici ont été présentés oralement le 8 décembre 2005, lors de la soutenance de la thèse de doctorat en sciences économiques de Pauline HYME, *Efficience des marchés financiers et théorie économique : une approche historique*, Université de Paris VIII-Vincennes Saint Denis. Ils ont été rédigés en vue de leur publication sur la suggestion d'Éric Brian. Ces réflexions doivent beaucoup aux discussions que j'ai eues avec de nombreux collègues depuis plusieurs années, et plus particulièrement avec Monique Jeanblanc alors que j'exerçais comme professeur associé en finance au département de mathématiques de l'université d'Évry, de 1999 à 2002.

[2] Il s'agit seulement des principales références, parmi de nombreuses autres : COWLES, 1933, WORKING, 1934, KENDALL, 1953, OSBORNE, 1959, ALEXANDER, 1961, COOTNER, 1962, SAMUELSON, 1965a.

[3] FISHER, 1930, WILLIAMS, 1938, GORDON et SHAPIRO, 1956, GORDON, 1962.

[4] Outre les références classiques, WALRAS, 1874, et PARETO, 1896, les textes principaux sont ici ARROW, 1953, ARROW et DEBREU, 1954, RADNER, 1972.

trois axes de réflexion se sont développés parallèlement en suivant chacun une dynamique intellectuelle, mathématique, et institutionnelle propre : les types de modélisations, les outils mathématiques mobilisés, les cadres institutionnels à l'intérieur desquels s'effectuaient et se finançaient les recherches, et les populations universitaire et professionnelle concernées furent pendant longtemps différents et irréductibles les uns aux autres.

Ces mondes se sont ignorés d'autant plus volontiers que leurs objectifs professionnels étaient différents voire contradictoires. Ainsi par exemple, les évaluateurs de sociétés et les analystes financiers, disposant d'un outillage mathématique rudimentaire, étaient violemment opposés à l'intrusion des processus aléatoires dans les méthodes d'évaluation. Les statisticiens et probabilistes qui travaillaient sur les équations de la dynamique boursière ne cherchaient pas à intégrer la notion de valeur des entreprises, ni d'ailleurs celle d'allocation optimale des ressources au sens de la macroéconomie. Quant aux économistes universitaires, ils restaient éloignés des développements de la théorie financière, ceci alors même que ces développements commençaient à mordre sur le champ de l'économie.

Le désenclavement de ces trois mondes dans les années 1980 fut donc une mutation importante. Il s'agit dans cet article d'observer que c'est deux à deux que les trois domaines se sont rencontrés au cours de la seconde moitié du XX^e^ siècle, comme par binômes théoriques : la jonction entre l'évaluation financière et les martingales a été due à Paul A. Samuelson entre 1965 et 1973; la jonction entre les martingales et les modèles économiques d'équilibre fut le fait de Stephen LeRoy en 1973 et de Robert Lucas en 1978; la jonction entre la théorie de l'arbitrage et l'évaluation financière est provenue de Stephen Ross, Michael Harrison, Daniel Kreps et Stanley Pliska entre 1976 et 1981[5]. Ces trois rencontres, partielles, relèvent à nos yeux d'un même « noyau de l'évaluation » dont rend compte l'écriture en termes de martingale (voir l'encadré p. 11). Nous proposons de rendre raison de cette notion de noyau en termes de convention keynésienne. On mesure mieux dès lors le caractère sous-déterminé de la théorie mathématique de la finance par rapport au fonctionnement réel des marchés de capitaux.

Trois identifications partielles

1) Martingale avec taux d'actualisation constant exogène

La première des jonctions intellectuelles, unifiant d'une part les méthodes de l'évaluation financière des sociétés au moyen des valeurs actuelles de flux actualisés de Fisher et Williams, et d'autre part les descriptions probabilistes des variations boursières par des martingales, est effectuée par Samuelson dans ses articles de 1965 et 1973. Cherchant à réconcilier deux opinions apparemment contradictoires, celles des analystes pour lesquels l'art de l'évaluation financière permet de trouver de bons titres à acheter, et celles des statisticiens pour qui les marchés évoluent apparemment au hasard, Samuelson fait apparaître que, non seulement ces deux représentations ne sont pas contradictoires

---

[5] Ici également, il ne s'agit que des principaux textes : SAMUELSON, 1965b, 1973, LEROY, 1973, ROSS, 1976, LUCAS, 1978, HARRISON et KREPS, 1979, HARRISON et PLISKA, 1981.

mais que, au contraire, plus les investisseurs évalueront correctement une société en utilisant le modèle de flux actualisés, et plus les variations boursières seront décorrélées.

L'assertion radicale de l'article de 1973 est la suivante : « les investisseurs qui s'informent (sur les conditions économiques réelles de l'entreprise) ont pour effet, par leurs achats et ventes de titres, de blanchir le spectre des variations boursières[6] ». Un spectre blanc (c'est-à-dire conforme à une distribution purement aléatoire) est le signe de variations décorrélées. Dès lors plus la bourse ressemblera à la roue de la roulette d'un casino, et plus cela signifiera que les investisseurs sont compétents et responsables. Le juste prix d'une société, bien prévu, est donc celui qui rend le marché imprévisible. Tel est l'apparent paradoxe de l'idée d'efficacité informationnelle d'un marché, qui ne sera pleinement résolu qu'en 1980 par Sanford Grossman et Joseph Stiglitz.

Plus précisément, en faisant l'hypothèse que les investisseurs évaluent la société par la méthode des flux actualisés au moyen d'un taux d'actualisation (*discount rate*) constant quelconque x, et celle que le rendement (*yield*) noté y des actions de cette société (rapport dividende/cours) soit stationnaire, puis en notant S_t le cours de l'action en date t, Samuelson montra que l'on pouvait retrouver une martingale sur le cours de l'action actualisé au taux $x - y$:

$$(1 + x - y)^{-(t+1)}\, \mathrm{E}_t\,(S_{t+1}) = (1 + x - y)^{-t}\, S_t$$

En effet, en notant S^*_t ce cours en date t actualisé, *i.e.* $S^*_t = (1 + x - y)^{-t} S_t$, on pouvait simplifier l'écriture précédente ainsi :

$$\mathrm{E}_t\,(S^*_{t+1}) = S^*_t$$

soit, en langage courant : « la meilleure prévision du cours futur actualisé S^*_{t+1} connaissant toutes les valeurs passées de ce cours actualisé, est le cours actualisé S^*_t lui-même ».

Le taux d'actualisation x utilisé par les investisseurs pouvait par exemple être choisi à partir d'un modèle d'équilibre comme le CAPM[7] de William Sharpe et John Lintner de 1964-1965 : c'était donc une donnée exogène. De plus, il fallait qu'il fût constant, alors que l'on peut imaginer qu'il fluctue selon les horizons d'investissement considérés. Il fallait également que le rendement y de l'action fût stationnaire. Cette première forme de martingale sur les marchés financiers était donc assez simpliste[8]. En particulier, l'équation précédente ne disait rien sur l'équilibre entre la rentabilité et le risque du marché.

2) Martingale avec taux d'actualisation aléatoire endogène

L'un des objectifs principaux de la modélisation financière est en effet de pouvoir quantifier le risque pris sur un marché, afin d'en fixer le prix de l'échange et de créer des produits financiers qui permettent d'acheter et de vendre ce risque, décomposé en unités

[6] SAMUELSON, 1973, p. 369.
[7] *Capital Asset Pricing Model* : voir SHARPE, 1964; LINTNER, 1965.
[8] SHILLER, 1981, ainsi que LEROY et PORTER, 1981, marquent le point de départ du rejet empirique de ce modèle.

élémentaires. Dans le modèle de martingale de Samuelson, la notion de risque n'était pas explicitement prise en considération. Pour inclure une dimension de risque dans le prix d'un actif financier, il est nécessaire de construire un modèle d'équilibre, dans lequel on fait l'hypothèse que les individus n'acceptent de prendre des risques que moyennant une rémunération complémentaire qui dépend de leur attitude (prudence ou non) devant cette prise de risque. On peut alors formaliser la relation entre la rentabilité attendue et le niveau du risque.

En 1973, à partir d'un raisonnement d'équilibre économique, LeRoy montre que l'on peut retrouver cette propriété de martingale avec un taux endogène, mais dans des conditions assez restrictives. En 1978, à partir d'un raisonnement plus général, Lucas lève ces restrictions et obtient, par la condition du premier ordre d'un programme classique d'optimisation sur la consommation (annulation du gradient d'un lagrangien), l'équation fondamentale d'évaluation qui relie le cours de bourse S et le dividende D :

$$S_t = \mathrm{E}_t \left[\alpha_{t+1} \left(S_{t+1} + D_{t+1} \right) \right]$$

Dans cette équation, le coefficient d'actualisation aléatoire (*stochastic discount factor*) α_{t+1} est égal au rapport des utilités marginales de la consommation agrégée en t et t+1 : c'est le noyau de l'évaluation par le marché (*market pricing kernel*). Cette équation signifie que le prix de tout actif est donné par un modèle d'équilibre général. L'équation de Lucas établit donc la jonction entre l'évaluation financière d'une société et un modèle d'équilibre général en économie avec investisseur représentatif.

L'équivalence entre l'équation de Lucas et le cadre intellectuel du modèle d'équilibre général d'Arrow et Debreu du point de vue statique (nombre fini d'états du monde possibles) est obtenue en remplaçant l'espérance mathématique par son développement sur les différents états. On récrit l'équation de Lucas en développant l'espérance mathématique

$$S_t = \Sigma_\omega \ \alpha_{t+1}(\omega) \left[S_{t+1}(\omega) + D_{t+1}(\omega) \right] P(\omega)$$

où $P(\omega)$ est la probabilité de l'état ω.

Or dans le modèle statique d'Arrow et Debreu, le prix de tout actif peut s'écrire comme une unique combinaison linéaire des titres élémentaires (*primitive assets*) d'Arrow et Debreu :

$$S_t = \Sigma_\omega \left[S_{t+1}(\omega) + D_{t+1}(\omega) \right] e^\omega$$

où e^ω est le titre élémentaire correspondant à l'état ω. D'où l'écriture du noyau en actifs d'Arrow et Debreu.

Le rapprochement de ces deux expressions fait apparaître l'équivalence entre le noyau de l'évaluation et les titres élémentaires : la valeur du noyau de l'évaluation dans un état du monde ω est égal au prix du titre élémentaire quantifiant cet état, ajusté par la probabilité de l'état correspondant[9] ; soit, si e^{ω} est le titre élémentaire correspondant à l'état ω, et $P(\omega)$ est la probabilité de cet état, $\alpha(\omega) = e^{\omega} / P(\omega)$.

Le passage en temps continu de cette modélisation d'équilibre sera effectué en 1985 par Darrel Duffie et Huang[10]. Pourtant la véritable percée intellectuelle de la finance mathématique ne sera opérée qu'à la charnière des années 1980, avec la réinterprétation du noyau et des prix d'Arrow-Debreu au moyen des opérateurs du calcul stochastique.

3) Martingale avec taux sans prime de risque et probabilité modifiée

L'intuition fondamentale qu'ont eue, entre 1976 et 1981, Stephen Ross, puis Michael Harrison, Daniel Kreps et Stanley Pliska, a consisté à réinterpréter les prix des états du monde d'Arrow et Debreu comme des valeurs d'une probabilité particulière lorsque le marché était arbitré. Le passage de la probabilité réelle (que l'on note P) à la probabilité modifiée (que l'on note en général Q) s'effectua au moyen de la technologie du calcul intégral et différentiel stochastique, par l'opérateur de Radon-Nikodyn (ou opérateur de changement de probabilité noté L et défini en temps discret par $L = Q/P$). D'un point de vue intuitif, le monde dual de la probabilité notée Q peut être compris comme un univers psychologique dans lequel les individus seraient indifférents à la chance de gain comme au risque de perte : cette neutralité psychologique vis-à-vis des aléas explique à la fois la terminologie de langue anglaise (*risk neutral probability*), et l'actualisation à un taux d'intérêt qui, de ce fait, n'inclut pas de prime de risque.

Par la transformation de l'ensemble des équations d'évaluation écrites précédemment dans le monde réel en nouvelles équations écrites dans le monde dual de Q, Harrison, Kreps et Pliska ont posé les fondements de l'évaluation moderne des actifs financiers : le juste prix de tout actif financier n'est rien d'autre que l'espérance mathématique de sa valeur future calculée avec la probabilité Q, et actualisée à un taux d'intérêt sans prime de risque, comme par exemple le marché monétaire. Du point de vue de la dynamique boursière, toutes les martingales écrites avec la probabilité P et un taux d'actualisation incluant une prime de risque, se transforment en martingales avec la probabilité Q et un taux d'actualisation sans prime de risque : en résumé, on passe de P-martingales à une Q-martingale au moyen de l'opérateur L, et la possibilité même de ce passage est la trace mathématique de l'existence d'un marché arbitré à l'équilibre, c'est-à-dire dans lequel il n'y a plus aucun arbitrage à effectuer (*absence of opportunity of arbitrage*). La nouvelle relation sur les prix actualisés devient

$$\mathrm{E}^{Q}_{t}\,(S^{*}_{t+1}) = S^{*}_{t}$$

qui est une martingale avec cette probabilité Q.

---

[9] On insiste sur le caractère extrêmement intuitif et heuristique de cet aperçu. Pour des développements mathématiques rigoureux, on pourra consulter les manuels de COCHRANE, 2001 ; FÖLLMER et SHIED, 2002, et, en langue française, DANA et JEANBLANC, 1998 ; QUITTARD-PINON, 2003. Le cours de GUESNERIE, 2005, offre également une synthèse générale de ces sujets.

[10] DUFFIE et HUANG, 1985.

La synthèse par le noyau de l'évaluation

Arrivé à ce point, il apparaît recevable de constater la possibilité d'un bouclage avec le noyau d'évaluation de Lucas. En effet, on l'a vu, le noyau est une autre expression des prix des titres élémentaires d'Arrow et Debreu. Ainsi, l'opérateur L peut être identifié au noyau de l'évaluation (au taux monétaire r près), et cette identification ($\alpha = L\ (1+r)^{-1}$) permet d'établir un lien entre évaluation, équilibre général dans le monde réel, et expression de cet équilibre dans le monde dual.

L'identification financière concrète du noyau de l'évaluation sera le fait de Long en 1990[11] : le noyau sera interprété sur un marché réel comme le facteur d'actualisation au taux de rentabilité d'un portefeuille qui maximiserait pour tout investisseur la croissance de son patrimoine financier (encore appelé portefeuille *Log-optimal*). En notant R^H la rentabilité de ce portefeuille *Log-optimal*, les différentes formes du noyau sont reliées entre elles par les égalités

$$\alpha = L\ (1+r)^{-1} = (1+R^H)^{-1} = e^{\omega} / P(\omega)$$

qui unifient l'ensemble des formes possibles des martingales modélisant les dynamiques boursières. Avec le portefeuille *Log-optimal*, l'équation d'évaluation de tout actif cotant le cours S en date t s'écrit

$$S_t = \mathrm{E}_t \left[\mathrm{S}_{t+1}\ (1 + R^H{}_{t+1})^{-1} \right]$$

soit, en notant à nouveau $S^*{}_t$ le cours en date t actualisé à ce taux R_H, c'est-à-dire $S^*{}_t = S_t\ (1 + R_H)^{-t}$

$$\mathrm{E}_t\ (S^*{}_{t+1}) = S^*{}_t$$

C'est à nouveau l'expression d'une martingale, mais avec comme taux d'actualisation effectif, le taux de rentabilité R^H du portefeuille *Log-optimal*.

Si maintenant on écrit les relations précédentes avec les rentabilités des actifs et non plus leurs cours de bourse, et en notant R cette rentabilité, on fait apparaître la forme génératrice de tous les tests d'efficacité informationnelle des marchés

$$1 = \mathrm{E}_t \left[\ \alpha_{t+1}\ (1 + R_{t+1})\ \right]$$

car la contrainte (valeur 1) associant le noyau α et la rentabilité globale R, induite par leur association sous l'espérance mathématique, permet de définir les manières de tester, tant les niveaux de rentabilité que ceux de volatilité des cours sur les marchés financiers (inégalité dite de Hansen et Jagannathan)[12].

Ainsi, fondamentalement, la représentation d'un équilibre de marché par le noyau de l'évaluation conduit donc nécessairement à une modélisation de la dynamique boursière par une martingale, ce qui correspond indifféremment à une évaluation juste

---

[11] LONG, 1990.
[12] HANSEN et JAGANNATHAN, 1991.

d'une société (au sens de la valeur de Fisher-Williams) ou à une optimalité au sens de l'allocation des ressources et des risques (au sens de Walras-Pareto). Dès lors, la notion de noyau de l'évaluation, qui représente l'aboutissement des développements de la théorie de l'équilibre général passés dans la finance professionnelle, peut être comprise comme l'objet intellectuel qui a permis à la pensée financière de s'unifier dans les années quatre-vingt, pour parvenir à une compréhension d'ensemble de phénomènes économico-financiers pertinents. Le tableau ci-dessous résume cette trajectoire d'unification de la pensée financière.

Comparaison de la théorie financière
et mouvement vers une jonction noyau-martingale-arbitrage

Auteurs des travaux initiaux qui lancent le courant de pensée	Année de la publication	Taux d'actualisation utilisé pour l'obtention de la martingale	Probabilité utilisée dans la martingale
Samuelson	1965-1973	Taux constant exogène	réelle : P
LeRoy, Lucas	1973-1978	Taux aléatoire endogène	réelle : P
Ross, Harrison, Kreps, Pliska	1976-1981	Taux sans prime de risque	duale : Q

Une convention stochastique ?

La synthèse intellectuelle des années 1980 représente un moment très particulier dans l'histoire de la finance au vingtième siècle, qui a résulté d'une conjonction exceptionnelle de talents déployés à la fois dans les domaines de la finance mathématique, dans les pratiques professionnelles américaines des banques de marché, ainsi que dans les développements de la théorie des probabilités sur les processus aléatoires. La forme mathématique qu'a prise cette jonction conceptuelle fut une équation d'Euler qui exprime à la fois l'équilibre d'un marché, son optimalité au sens de Pareto, l'évaluation juste de tous les actifs cotés, et la propriété de martingale de la dynamique boursière associée. Tout ceci, par quelque manière qu'on l'aborde, entre dans le cadre de la théorie des martingales, en sorte que l'on peut considérer que la percée conceptuelle des années 1980 a été la compréhension profonde de la puissance de la forme martingale pour l'explication générale des phénomènes financiers et leur unification. De la même façon que, au dix-neuvième siècle, la statistique était passée de la recherche de moyennes à une moyennisation systématique des variables, l'on peut dire que la finance du XX^e^ siècle est passée de la recherche de martingales sur les marchés à une « martingalisation » systématique des variations boursières – la martingale remplissant ainsi pour la finance du XX^e^ siècle le rôle de la moyenne pour la statistique du XIX^e^ siècle.

Cette réalisation conceptuelle a induit un développement des marchés de capitaux et une financiarisation du monde réel. Ainsi par exemple, à partir de 1989, toutes les mesures de performance existantes des portefeuilles gérés par des professionnels, sédimentées dans les progiciels industriels produisant des comptes-rendus de gestion, ont été comprises comme des développements particuliers des contenus formels du noyau[13]. L'appréciation de la valeur ajoutée de la gestion de l'épargne mondiale repose ainsi sur la transposition opérationnelle de ce concept compact dans les conseils d'administration des organismes de retraite ou des fonds d'investissement.

Or l'utilisation du noyau à l'intérieur d'une martingale appropriée conduit à considérer que l'espérance de toute surperformance de toute gestion active contre un indice de marché convenablement choisi est comme nulle. La gestion active est ainsi transformée en jeu équitable par l'usage massif de martingales. En effet, en utilisant le portefeuille *Log-optimal* à la manière d'un numéraire (*benchmark*) sur les marchés de capitaux, et en écrivant l'équation d'évaluation du noyau avec des rentabilités de portefeuilles gérés, on vérifie aisément que l'on obtient une forme extrêmement simple mais aussi extrêmement contraignante sur la rentabilité espérée R de toute gestion professionnelle :

$$0 = \mathrm{E}_t \left[R^*_{t+1} \right]$$

L'équation exprime que l'espérance de la rentabilité excédentaire déflatée par celle du portefeuille *Log-optimal* est nulle. D'où le développement démesuré de la gestion indicielle, alors même que d'une part les investisseurs finaux cherchent de moins en moins des performances relatives par rapport à un indice, et davantage des performances absolues par rapport au marché monétaire, et que d'autre part les gestions non classiques (*hedge funds*, multigestion, choix de titres ou choix de gérants) se développent à l'encontre du paradigme de l'indexation.

Un autre secteur où la même logique est à l'oeuvre est celui de l'évaluation des actifs financiers dans le référentiel des normes comptables internationales IFRS. La doctrine américaine de l'évaluation généralisée par le marché pour l'obtention de la juste valeur (*full fair market value*) trouve aussi son origine et son fondement dans l'idée que l'absence d'arbitrage dans un marché complet permet de donner un juste prix à tout actif. Les innombrables difficultés techniques rencontrées par les professionnels des banques ou des compagnies d'assurance dans l'application pratique de la norme IAS39 (*International Accounting Standards*) n'ont, jusqu'à présent, toujours pas découragé les promoteurs de ces normes et de ces méthodes.

L'affirmation de la polyvalence de ces normes peut laisser les spécialistes perplexes : en effet, une conceptualisation des marchés comme complets, arbitrés et optimaux au sens de Pareto – hypothèse sur laquelle est fondée la validité de l'évaluation par noyau ou par martingale dans le cas de l'évaluation des actifs financiers – ne s'accorde pas avec des analyses théoriques et empiriques développées depuis une dizaine d'années, comme par exemple celles des défaillances de coordination sur les équilibres à anticipations rationnelles, ou celles des discontinuités de trajectoires pour les processus de Lévy[14].

---

[13] L'article qui ouvre cette voie d'analyse de performance est celui de GRINDBLATT et TITMAN, 1989. Une première synthèse de cette méthodologie a été proposée par CHEN et KNEZ, 1996.

[14] GUESNERIE, 2005, et MANDELBROT, 2005, présentent une synthèse accessible de ces problèmes.

D'autres exemples tirés de la finance réelle pourraient encore venir à l'esprit. De sorte qu'aujourd'hui, rien ne semble pouvoir résister à l'apparente universalité du concept de noyau de l'évaluation[15] – disons plutôt sa stupéfiante pénétration dans la finance professionnelle par le biais des martingales. Tout se passe comme si l'expérience collective des finances au vingtième siècle était passée par un triple mouvement (empirique, théorique, et institutionnel) d'ajustement à une forme mathématique particulière dont les hypothèses sont finalement relativement simples, voire trop simples pour le monde financier réel. Il y a là comme une action collective normative pour les pratiques professionnelles, et qui semble s'inscrire dans la longue durée comme un processus séculaire.

Il est donc pertinent de se demander si ce mouvement ne constituerait pas un axe structurant l'évolution historique de la théorie de la finance tout au long du vingtième siècle, caractérisé par un cheminement de la réflexion financière vers le noyau de l'évaluation par le marché dont la trace probabiliste est une martingale avec la probabilité Q. Si bien qu'on peut alors concevoir que cette conception unifiante du fonctionnement des marchés financiers issue de la théorie néo-classique ne relèverait finalement que de l'idée keynésienne de convention, cela pour autant que le concept mathématique de Q–martingale fût lui-même considéré comme une convention. Le terme, tel que John Maynard Keynes l'a employé dans sa *Théorie générale*, appellerait dès lors un qualificatif qui devrait souligner la nature probabiliste de l'approche des phénomènes en question et l'importance de sa formalisation probabiliste. De là l'expression « convention stochastique » :

> « Dans la pratique, nous sommes tacitement convenus, en règle générale, d'avoir recours à une méthode qui repose à vrai dire sur une pure *convention*. Cette convention consiste essentiellement […] dans l'hypothèse que l'état actuel des affaires continuera indéfiniment à moins qu'on ait des raisons définies d'attendre un changement. […] Dans la pratique, nous supposons, en vertu d'une véritable convention, que l'évaluation actuelle du marché, de quelque façon qu'elle ait été formée, est la seule correcte, eu égard à la connaissance actuelle des faits qui influeront sur le rendement de l'investissement, et que ladite évaluation variera seulement dans la mesure où cette connaissance sera modifiée. […] La méthode conventionnelle de calcul indiquée ci-dessus est compatible avec un haut degré de continuité et de stabilité dans les affaires, *tant que l'on peut compter sur le maintien de la convention* »[16].

La convention keynésienne installe donc la condition de possibilité de l'échange économique construit dans l'expérience des agents, expérience solidifiée dans les institutions et dans les calculs. En l'occurrence les calculs relèvent ici de la stochastique. La focalisation des transactions financières sur cette norme historique collective (les martingales) n'apparaîtra alors que comme un épisode de l'histoire des finances et de leurs calculs.

[15] Il faut mentionner le grand nombre d'anomalies observées depuis dans la mise à l'épreuve de la théorie du noyau sur les marchés boursiers réels. Voir pour le point de départ des travaux sur les anomalies les articles de MEHRA et PRESCOTT, 1985, WEIL, 1989.

[16] KEYNES, 1969, pp. 167-168.

Annexe : la théorie des martingales dans la modélisation financière

L'approfondissement de la réflexion sur la possibilité d'appliquer la théorie des martingales à la modélisation financière a favorisé l'unification conceptuelle des trois mondes. La théorie des martingales, adéquatement subsumée dans le concept d'efficacité informationnelle des marchés par Paul A. Samuelson, retrouvée comme expression déduite d'un équilibre général par Stephen LeRoy et Robert Lucas, puis adéquatement insérée au coeur même de la théorie mathématique de l'arbitrage par Michael Harrison, Daniel Kreps et Stanley Pliska, permit la confluence des travaux de recherche sur ces trois domaines respectifs.

L'idée de martingale, au sens des mathématiques, est simple à comprendre. Elle exprime une notion de jeu équitable (*fair game*), un jeu de hasard dans lequel aucun des joueurs ne doit être avantagé par rapport à l'autre. Cette notion de jeu équitable se représente de la manière suivante : si X_t est le gain cumulé acquis au cours du jeu à une date quelconque t, personne ne sera avantagé ni désavantagé si, à cette date, la valeur espérée du gain suivant X_{t+1} ne peut être déduite des résultats précédents. Autrement dit, le jeu sera équitable si l'espérance du gain supplémentaire, étant connus les gains antérieurs, est nulle. On note :

$$\mathrm{E}\,(X_{t+1} - X_t \mid X_t, X_{t-1}, X_{t-2} \dots) = 0$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\mathrm{E}\,(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, X_{t-2} \dots) = X_t$$

Ces formules peuvent être paraphrasées ainsi : « la meilleure prévision de X_{t+1} connaissant toutes les valeurs passées, X_{t-1}, X_{t-2} ... etc., est X_t ». Personne n'est avantagé quant à la connaissance du futur en $t+1$ connaissant le passé de X_t.

Selon une écriture plus implicite, $\mathrm{E}(X_{t+1} \mid X_t, X_{t-1}, \dots)$ est noté $\mathrm{E}_t\,(X_{t+1})$. L'indice t placé après le symbole de l'espérance mathématique (E) résume la suite de valeurs précédentes de X_t. La propriété caractéristique de martingale d'un processus aléatoire X_t est alors :[17]

$$\mathrm{E}_t\,(X_{t+1}) = X_t$$

Si X est un cours de bourse (le gain correspond à la capitalisation de la valeur de l'entreprise), alors cela veut dire que la meilleure prévision du cours futur est le cours actuellement coté sur le marché. Cette représentation de la bourse par une martingale est à l'origine de la notion de marché efficace au sens informationnel : si toute l'information nécessaire à l'évaluation de la société cotée est passée dans le cours, alors on ne pourra espérer obtenir de gain supplémentaire en achetant l'action[18]. Les variations boursières présenteront donc la propriété statistique d'apparaître comme des tirages aléatoires sans mémoire, et on dira alors que la bourse évolue *au hasard*.

[17] Il s'agit évidemment d'une présentation intuitive. Pour un traitement mathématique rigoureux appliqué à la finance, on pourra voir par exemple le manuel de KARATZAS et SHREVE, 1998.

[18] Voir FAMA, 1965, 1970, 1976, pour les premières définitions ; GROSSMAN et STIGLITZ, 1980, pour les apories qu'elles contiennent. WALTER, 1996 présente une histoire de ce concept.

Références bibliographiques

ALEXANDER (Sydney), 1961, « Price Movements in Speculative Markets : Trends or Random Walks », *Industrial Management Review*, vol. 2, pp 7-26.

ARROW (Kenneth), 1953, « Le rôle des valeurs boursières pour la répartition la meilleure des risques », *Econométrie*, Colloque CNRS (Paris, 1952), vol. 40, pp 41-47.

ARROW (Kenneth), DEBREU (Gérard), 1954, « Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy », *Econometrica*, vol. 22, pp 265-290.

CHEN (Zhiwu), KNEZ (Peter), 1996, « Portfolio Measurement: Theory and Applications », *Review of Financial Studies*, vol. 9, pp 511-555.

COCHRANE (John H.), 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.

COOTNER (Paul), 1962, « Stock Prices: Random vs Systematic Changes », *Industial Management Review*, vol. 3, pp. 24-45.

COWLES (Alfred), 1933, « Can Stock Market Forecasters Forecasts », *Econometrica*, vol. 1, pp. 309-324.

DANA (Rose-Anne), JEANBLANC (Monique), 1998, *Marchés financiers en temps continu*, Economica.

DUFFIE (Darrell), HUANG (C.F.), 1985, « Implementing Arrow – Debreu Equilibria by Continuous Trading of Few Long-Lived Securities », *Econometrica*, vol. 53, pp 1337-1356.

FAMA (Eugene), 1965, « The Behavior of Stock Market Prices », *Journal of Business*, vol. 38, pp 34-105.

FAMA (Eugene), 1970, « Efficient Capital Markets: a Review of Theory and Empirical Work », *The Journal of Finance*, vol. 25, pp 383-417 et discussion pp 418-423.

FAMA (Eugene), 1976, « Reply », *The Journal of Finance*, vol. 31, pp 143-145.

FISHER (Irving), 1930, *The Theory of Interest*, New York, MacMillian.

FÖLLMER (Hans), SCHIED (A.), 2002, *Stochastic Finance in Discrete Time*, Gruyter, New York.

GORDON (M), 1962, *The Investment, Financing and Valuation of the Corporation*, Irwin, Homewood.

GORDON (M), SHAPIRO (E), 1956, « Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Return », *Management Science*, octobre, pp. 102-110.

GRINDBLATT (Mark), TITMAN (Sheridan), 1989, « Portfolio Performance Evaluation: Old Issues and New Insights », *Review of Financial Studies*, vol. 2, pp 393-422.

GROSSMAN (Sanford) STIGLITZ (Joseph), 1980, « On the impossibility of informationnally efficient markets », *American Economic Review*, vol. 70, pp 393-408.

GUESNERIE (Roger), 2005, cours *Les marchés financiers*, Collège de France.

HANSEN (Lars), JAGANNATHAN (Ravi), 1991, « Implications of Security Market Data for Models of Dynamic Economics », *Journal of Political Economy*, vol. 99, pp 225-262.

HARRISON (Michael), KREPS (Daniel), 1979, « Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets », *Journal of Economic Theory*, vol. 20, pp 381-408.

HARRISON (Michael), PLISKA (Stanley), 1981, « Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading », *Stochastic Processes and Applications*, vol. 11, pp 215-260.

KARATZAS (Ioannis), SHREVE (S.), 1998, *Methods of Mathematical Finance*, Springer, Berlin.

KENDALL (Maurice), 1953, « The Analysis of Economic Time Series - Part I : Prices », *Journal of Royal Statistical Society*, série A, vol. 116, pp. 11-25, et discussion pp 25-34.

KEYNES (John Maynard), 1969, *Théorie générale de l'emploi, de l'intérêt et de la monnaie*, trad. fr. Payot.

LEROY (Stephen), 1973, « Risk Aversion and the Martingale Property of Stock Prices », *International Economic Review*, vol. 14, pp 436-446.

LEROY (Stephen), Porter (Richard) 1981, « The Present Value Relation: Tests based on Variance Bounds », *Econometrica*, vol. 49, pp 555-557.

LINTNER (John), 1965, « The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets », *Review of Economics and Statistics*, vol. 47, pp 13-37.

LONG (John B.), 1990, « The numeraire portfolio », *Journal of Financial Economics*, vol. 26, pp 29-70.

LUCAS (Robert), 1978, « Asset Prices in an Exchange Economy », *Econometrica*, vol. 46, pp 1429-1445.

MANDELBROT (Benoît), 2005, *Une approche fractale des marchés. Risquer, perdre et gagner*, Odile Jacob.

MEHRA (Rajnish), PRESCOTT (Edward), 1985, « The Equity Premium: A Puzzle », *Journal of Monetary Economics*, vol. 15, pp 145-161.

OSBORNE (M. F.), 1959, « Brownian Motion in the Stock Market », *Operations Research*, vol. 7, pp 145-173.

PARETO (Vilfredo), 1896, *Cours d'économie politique*, Lausanne.

QUITTARD-PINON (François), 2003, *Marchés de capitaux et théorie financière*, Economica.

RADNER (R), 1972, « Existence of Equilibrium of Plans, Prices and Expectations in a Sequence of Markets », *Econometrica*, vol. 40, pp 289-303.

ROSS (Stephen), 1976, « The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing », *Journal of Economic Theory*, vol. 13, pp 341-360.

SAMUELSON (Paul A.), 1965a, « A Rational Theory of Warrant Pricing», *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 13-39.

SAMUELSON (Paul A.), 1965b, « Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly », *Industrial Management Review*, vol. 6, pp. 41-49.

SAMUELSON (Paul A.), 1973, « Proof that Properly Discounted Present Value of Assets Vibrate Randomly », *Bell Journal of Economics*, vol. 4, pp 369-374.

SHARPE (William), 1964, « Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk », *Journal of Finance*, vol. 19, pp 425-442.

SHILLER (Robert), 1981, « Do Stock Price Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends? », *American Economic Review*, vol. 71, pp. 421-436.

WALRAS (Léon), 1874, *Eléments d'économie politique pure*, Lausanne.

WALTER (Christian), 1996, « Une histoire du concept d'efficience sur les marchés financiers », *Annales. Histoire Sciences Sociales*, vol. 51, n°4, pp 873-905.

WEIL (Philippe), 1989, « The Equity Premium Puzzle and the Risk-Free Rate Puzzle », *Journal of Economic Theory*, vol. 24, pp 401-421.

WILLIAMS (John B.), 1938, *The Theory of Investment Value*, Harvard University Press.

WORKING (Holbrook), 1934, « A Random-Difference Series for Use in the Analysis of Time Series », *Journal of the American Statistical Association*, vol. 29, pp 11-24.