Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques.

Claude Comiti, Denise Grenier, Claire Margolinas

Comiti, C., Grenier, D., & Margolinas, C. (1995). Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier & A. Tiberghien (Eds.), *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 92-113). Grenoble La Pensée Sauvage.

DIFFERENTS NIVEAUX DE CONNAISSANCES EN JEU LORS D'INTERACTIONS EN SITUATION DE CLASSE ET MODELISATION DE PHENOMENES DIDACTIQUES LIES A CES INTERACTIONS

C.Comiti, DidaTech, Université Joseph Fourier et IUFM de Grenoble
D.Grenier, DidaTech, LSD2, Université Joseph Fourier de Grenoble
C.Margolinas, IUFM de Clermont-Ferrand

A - PRESENTATION DE LA RECHERCHE

I. INTRODUCTION

I.1. Remarques préliminaires

La recherche ici présentée s'inscrit dans la suite d'un travail de plusieurs années (1989-1991) conduit à l'Université Joseph Fourier[1] en réponse à un Appel d'Offres de la Direction des Enseignements Supérieurs sur les représentations des enseignants de mathématiques en ce qui concerne leur discipline, leur métier, leurs élèves et la façon dont ces derniers effectuent leurs apprentissages (Bonneville et al., 1991). Afin de compléter ces travaux, centrés sur l'étude de "discours" d'enseignants de classe de 3ème de collège et de lycée, l'étude des "pratiques" en situation de classe était indispensable. Or une telle étude ne nous paraissait déontologiquement envisageable que par l'ouverture de l'équipe initiale à des enseignants volontaires en poste dans les établissements[2]. La collaboration avec l'IUFM qui souhaitait impulser des collaborations praticiens/chercheurs a permis la réalisation de ce projet.

L'observation de classes "ordinaires" permet la mise en évidence de phénomènes liés aux prises de décisions de l'enseignant dans l'action. Au delà des choix programmés à l'avance sur la conduite d'une séquence, qui peuvent être réactualisés d'une séance à l'autre, la situation d'enseignement est porteuse d'événements contingents qui peuvent être liés ou non au savoir en jeu et créent l'obligation, pour le professeur, de prendre des micro-décisions immédiates. Pour cela, celui-ci doit interpréter l'activité des élèves de manière quasi instantanée, sans avoir toujours les moyens de savoir sur quoi ils travaillent effectivement.

[1] par J.F. Bonneville, C. Comiti, D. Grenier et G. Lapierre

[2] I. Edouard, M. Guillaud, S. Ceconni et M. Verjus

Notre travail sera ici de trouver des moyens de description et d'interprétation de certaines décisions “ordinaires” en classe.

I.2. Evolution de notre problématique

Au début de notre travail, nous nous sommes intéressées à l'écart existant entre le projet du professeur - analysé en terme de macro-décisions- et le déroulement effectif de la situation de classe - analysé en terme de *micro-décisions*.

Comme nous l'écrivions alors : “Lorsqu'on confronte les séances réalisées en classe au scénario de départ et aux intentions exprimées par le professeur -avant le démarrage de la séquence sur l'introduction et l'étude de la racine carrée-, on constate l'apparition, en situation de classe, d'*événements imprévus* par le professeur qui entraînent chez ce dernier des prises de décisions immédiates, que nous appelons micro-décisions” Une première analyse des séances observées, faite dans un double cadre issu de la didactique (essentiellement la théorie des situations) et de la psychologie sociale (prise de décision), nous a permis de mettre en évidence certaines régularités et de proposer une première typologie des différents types d'événements (Comiti et Grenier, 1993). C'est alors qu'il nous est apparu clairement en quoi notre cadre d'analyse n'était pas satisfaisant : les résultats obtenus restaient contextualisés et ne nous permettaient pas d'interpréter la signification de certains des événements survenant en situation de classe.

L'observation de classes "ordinaires" et les moyens d'analyser les protocoles qui en résultent est une problématique relativement récente dans la recherche en didactique des mathématiques en France. Guy Brousseau (1986 et 1989), quand il a caractérisé la structuration du milieu en emboîtement de situations successives (qu'on a parfois désigné par le terme d'oignon), avait indiqué l'utilité de ce modèle pour analyser des problèmes "ordinaires". Mais il a fallu l'intérêt croissant de la communauté des didacticiens pour l'analyse -et non plus seulement pour la construction- de situations pour que ce modèle soit utilisé pleinement (Rouchier 1991, Brousseau et Centeno 1991, Orus 1992, notamment) et même transformé (Mercier 1993, Margolinas et Steinbring 1993, Margolinas 1993a).

Ces nouveaux outils pour l'analyse d'observations de classes "ordinaires" (dont on peut voir un fonctionnement également dans Eberhard 1993 et Margolinas 1993b) nous ont intéressées et c'est pourquoi nous avons intégré dans notre cadre théorique la modélisation en terme de milieu et conduit l'analyse du protocole en collaboration avec Claire Margolinas.

I.3. Objet des travaux exposés

Notre objectif est double :

• participer à la modélisation des interactions didactiques par la caractérisation de phénomènes didactiques particuliers, qui permettent de donner un sens à certaines perturbations ou certains dysfonctionnements de situations didactiques.

• montrer l'intérêt du fonctionnement de l'outil didactique "structuration d'une situation en différents niveaux" encore peu utilisé dans la communauté. Ceci justifie l'importance que nous donnerons à la description de l'utilisation de cet outil pour l'étude d'une situation particulière.

II. CADRE THÉORIQUE

II.1. Connaissances et savoirs

Comme la plupart des didacticiens, nous considérons comme un point acquis que :

- l'apprentissage est un processus dynamique dans lequel l'apprenant est acteur
- les connaissances se construisent par interaction du sujet apprenant et de son environnement, plus exactement, par un processus d'adaptation de ce sujet à cet environnement (importance des mécanismes: déséquilibres/rééquilibrations).

L'environnement auquel on s'intéresse tout particulièrement en didactique des mathématiques est le milieu présent dans la classe (en partie organisé intentionnellement par le professeur). L'apprentissage est alors décrit en terme d'actions de l'élève sur ce milieu et de rétroactions de ce milieu sur l'élève, actions et rétroactions se déroulant sous un système de contraintes particulier. Un état de connaissance est caractérisé par un état d'équilibre du système Elève/Milieu, sous des contraintes précises. La construction à laquelle se réfère un apprentissage est alors la constuction d'un nouvel équilibre à la suite d'une perturbation du milieu ou des contraintes exercées sur ce système.

Jusqu'à ces dernières années, on considérait implicitement dans la communauté des didacticiens des mathématiques, que l'on pouvait différencier "connaissance" et "savoir" comme suit:

Une "connaissance" est un moyen, pas forcément explicitable, qui peut être utilisé pour obtenir, dans une situation, un résultat conforme à une attente.

Un "savoir" est le produit culturel d'une institution qui analyse et organise les connaissances afin de faciliter leur communication, leur usage ultérieur et la production de nouveaux savoirs.

Il en découle que, dans toute situation d'apprentissage, il faut avoir des connaissances pour apprendre un savoir nouveau. Le professeur attend que ce qu'il dit "évoque" des choses chez l'élève sans pour autant pouvoir "convoquer" les connaissances de l'élève. Le passage (chez l'élève) de la connaissance au savoir exige un changement de regard sur la situation : l'élève doit apprendre à partir du moment où le professeur, par l'institutionnalisation, désigne le savoir à retenir, c'est ce qu'A.Rouchier (1991) désigne par la conversion connaissance/savoir.

Dans la suite de l'article, nous nous contenterons de cette première approche de la différence entre connaissance et savoir, mais nous tenterons de caractériser divers niveaux de connaissances. Parmi ceux-ci, il est possible que certains puissent être considérés comme des savoirs, mais ce n'est pas l'objet de notre réflexion et cette question restera ouverte .

II.2. Le concept de milieu

Notre étude s'appuie sur la théorie des situations (Brousseau 1986) qui permet de construire et d'analyser des situations dans lesquelles on puisse attester de l'évolution des connaissances de l'élève. C'est cette théorie qui nous permettra de lire et d'interpréter une situation locale et de donner un sens à ce que font les partenaires (maître et élèves) dans cette situation. L'enseignant n'y est pas réduit à être un organisateur neutre des activités d'apprentissage des élèves. Il fait partie du système didactique. Il en constitue un sous-système, tout comme les élèves et le savoir enseigné.

Dans cette théorie, qui propose une modélisation des interactions entre les divers systèmes en jeu, le milieu est un outil de modélisation qui permet de décrire, d'expliquer et de prédire aussi bien l'action que la rétroaction. Pour G. Brousseau (1989), le milieu apparait comme le système antagoniste du système enseigné: "Pour représenter convenablement le fonctionnement non didactique des connaissances, nous devons adopter le plus souvent des situations dans lesquelles les états du jeu sont déterminées alternativement par le joueur et par un SYSTÈME antagoniste qui modifie les états du jeu de façon non contrôlée par le joueur. Ce système est pour l'observateur, une modélisation de l'environnement et de ses réponses pertinentes pour l'apprentissage en cours. Il n'est qu'une partie de la situation. […] C'est ce système antagoniste que nous avons proposé d'appeler *milieu.* Il joue donc un rôle central dans l'apprentissage, comme cause des adaptations et dans l'enseignement, comme référence et objet épistémologique." (RDM 9.3, p. 320).

Pour Y.Chevallard (1992), le milieu est un ensemble d'objets provisoirement stabilisés pour l'individu, ce milieu ayant des rapports de proximité avec les objets avec lesquels le sujet a des rapports de familiarité. Pour lui, le milieu est donc l'ensemble des objets présents dans une situation auxquels le rapport institutionnel est stable, à l'instant donné. Pour qu'un savoir puisse fonctionner, il faut qu'il y ait une organisation d'objets caractéristiques de ce savoir, c'est le milieu. Une situation a-didactique est un rapport entre l'élève et un milieu pour un savoir (le rapport d'un individu à un objet est toujours médié par ce milieu). "Au cours de l'évolution temporelle de l'institution des sous-systèmes du système général, des objets institutionnels vont se stabiliser durablement, en ce sens que les rapports institutionnels à ces objets vont, sur une période assez longue, cesser d'évoluer, se révéler "robustes"… et se naturaliser en devenant transparents aux acteurs de l'institution... De tels sous-systèmes d'objets vont assumer, pour les acteurs de l'institution, une fonction de milieu, celui-ci apparaissant doué d'une objectivité échappant au contrôle et à l'intentionnalité de l'institution."

La modélisation en terme de milieu d'une situation didactique est donc indispensable lorsque l'on s'intéresse au jeu du professeur et aux interactions présentes dans cette situation.

En s'appuyant sur la structuration du milieu proposée par Guy Brousseau, Claire Margolinas a produit un modèle alternatif qui élargit le modèle initial, mais surtout en systématise le schéma (voir en annexe I le "squelette" de ce modèle). En utilisant les notations issues de ce modèle (ce que nous ferons dans la suite du texte), on voit que la notion de milieu conçue par Guy Brousseau est plus large que celle d'Yves Chevallard. En effet, le rapport institutionnel n'est stable que par rapport au milieu de l'action, M-1, ainsi qu'aux milieux M-3 et M-2 qu'il englobe. Mais la perspective de l'étude du rôle du maître rend nécessaire l'introduction du milieu d'apprentissage M0, présent dans la situation didactique S0, et dont certains des éléments sont des connaissances en cours d'apprentissage. C'est en effet ce milieu qui est le plus "visible" du point de vue du maître (on peut dire que les couches de l'oignon sont "translucides"). Cette même perspective rend d'autre part nécessaire l'introduction des situations S1, S2, S3, au delà de la situation didactique S0, pour rendre compte du milieu avec lequel interagit le maître, interaction n ese limitant pas à l'interaction en classe.

III. QUESTIONNEMENT ET MÉTHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

III.1. Les questions de la recherche

Dans leur projet d'enseignement, les enseignants définissent leur pratique à venir compte tenu des représentations qu'ils ont de leur discipline, des mathématiques à enseigner, des phénomènes de transmission des connaissances, et des modes d'apprentissage de leurs élèves. Le passage à la pratique fait apparaître des écarts entre leur projet et sa réalisation en situation de classe. La situation de classe crée, de par sa réalisation même, des *événements* (questions, réponses, débats, etc...) qui sont constitutifs de la construction des connaissances chez les élèves. L'étude de ces événements est indispensable, non pour les "réduire" afin de faire coller la situation de classe réelle à une situation de classe "théorique", mais plutôt pour analyser ce qu'ils révèlent sur les interactions didactiques et ce qu'ils apportent pour l'apprentissage.

Nous distinguerons, pour notre étude :

- les *événements ,* qui sont du domaine de la réalité mais que l'on ne peut observer objectivement, puisque la présence même d'un observateur va perturber cette dernière ;

- les *observés* [3] ou objets créés par l'observation de cette réalité sur lesquels on recueille des données avec les outils d'observation ;
- les *phénomènes didactiques,* ou interprétation par le chercheur des données recueillies en tenant compte des contraintes pesant sur le système d'enseignement, des choix effectués, de la signification des savoirs en jeu, pour l'élève, pour le professeur, etc.

Le but de notre travail est de contribuer à la modélisation du jeu du professeur dans la classe et des interactions didactiques en caractérisant des *phénomènes didactiques*, cette modélisation devant donner du sens aux événements survenant en situation de classe identifiés par le chercheur comme importants pour l'apprentissage, ainsi qu'aux choix faits par le professeur pour gérer ces événements.

III.2. La méthodologie

Elle comporte

- l'élaboration d'un contrat passé avec les enseignants concernés ;
- la mise en place d'un dispositif de recueil de données permettant une prise d'information "mixte", i.e une analyse "de" classe, au sens de Y.Chevallard (1992) (en opposition à une observation "en" classe)
- la constitution de protocoles ;
- la modélisation de la situation en liaison avec notre cadre théorique .

Le contrat avec le professeur a un double but.

Il s'agit d'inscrire la relation chercheur/enseignant et la relation observateur/observé dans le champ de la recherche, et non dans celui du contrôle. Il nous parait indispensable, sur un plan déontologique, non seulement pour que l'observation de leurs "pratiques" soit acceptée par les enseignants, mais aussi pour pouvoir confronter leurs analyses à celles des chercheurs, que ces enseignants soient membres de l'équipe de recherche. Ceci signifie qu'ils acceptent la problématique de la recherche et connaissent les attentes de l'observation, qu'ils participent à l'élaboration des protocoles et contribuent à l'analyse des données.

Sur un autre plan, celui de la gestion de la classe, il s'agit de préciser les conditions de l'expérimentation : la conception et la gestion des séances d'enseignement est sous leur

[3] Dans la littérature didactique, le substantif "observable" est parfois utilisé pour parler de ce que l'on a observé, qui constitue le matériau d'élaboration des protocoles. Mais le mot d'observable introduit une connotation de potentialité qui ne correspond pas à cette signification. C'est pourquoi nous utilisons ici le substantif: "observé" pour désigner ce qui a été effectivement observé, et que nous réserverons le substantif "observable" pour désigner un évènement dont l'analyse a priori permet de prévoir l'observation possible.

entière responsabilité (aucune intervention des chercheurs, ni lors de la conception, ni lors de l'observation des séances).

Les données recueillies sont de plusieurs types :
- les données "internes" provenant d'observations en classe (prise de notes accompagnant l'enregistrement audio des séances en classe (professeur et élèves);
- les données "externes" comprenant : le scénario écrit avant le début de l'enseignement par chacun des enseignants et plusieurs entretiens.

Le scénario est indispensable pour confronter les observés à ce qui était prévu par l'enseignant.

Les entretiens entre chercheur et enseignant préalables à la séquence permettent d'une part, de repérer les grandes lignes des représentations du professeur sur le savoir en jeu, l'apprentissage, le fonctionnement de ses élèves, le contrat habituel dans la classe, d'autre part, de recueillir des informations sur son projet d'enseignement à partir de demandes (explicitation du scénario sur les activités prévues, les méthodes d'enseignement envisagées, les objectifs visés, les choix effectués).

L'entretien postérieur à la séquence d'enseignement est destiné à recueillir ce que dit le professeur sur ce qui s'est passé pendant les cours ainsi que son analyse des événements qu'il a repérés.

Enfin, une table ronde après la fin du déroulement de la séquence permet de confronter les démarches des différents enseignants.

Le protocole est le document qui restitue la chronique du discours de la classe, il intègre certraines notes recueillies par l'observateur sur ce qu'il juge important de relever. Ce travail de recomposition est sous-tendu par des choix méthodologiques et par la problématique de la recherche. Dans notre cas, il s'est fait à partir des transcriptions des bandes audio et à partir des données recueillies sur le vif par les observateurs. Les protocoles obtenus sont ensuite découpés en "épisodes" dont nous faisons l'hypothèse qu'ils sont significatifs. Nous nous attachons pour cela à la mise en évidence :
- d'événements, à condition qu'ils participent à une production mathématique et donc qu'ils mettent en jeu des connaissances mathématiques au sens large,
- de l'origine de ces événements,
- de la gestion de l'événement par le professeur.

Les analyses de la situation se distinguent en analyse "préalable" et analyse "a priori".

L'analyse préalable de la situation (qui précède l'observation et qui détermine des événements attendus ou observables) est réalisée sur la base du scénario.

Comme c'est toujours le cas, cette analyse préalable peut se révéler plus ou moins efficace, et de nouvelles analyses a priori du scénario peuvent être faites au cours du temps (nous avons par exemple introduit la structuration du milieu, ce qui n'était pas le cas au préalable).

Mais, comme c'est assez naturellement le cas dans l'observation de classes ordinaires, il est nécessaire, sur la base du protocole, de "reconstruire" la situation (qui n'est décrite nulle part). La situation ainsi décrite peut faire l'objet d'une analyse a priori (comme n'importe quelle situation explicite), mais sa détermination fait partie de l'analyse a posteriori. La difficulté d'établissement de la (ou les) situation(s) effective(s) conduit à de nombreux aller et retour entre la détermination d'observables sur la base des analyses a priori et la confrontation des observés à ces observables. Dans notre cas, la mauvaise adéquation entre observés et observables nous a conduit à repérer des situations (vécues notamment par les élèves) dont nous n'anticipions nullement l'existence (voir chapitre B). L'analyse a posteriori (et notamment l'interprétation des événements du protocole) peut alors prendre place.

C'est l'analyse a priori qui permet alors d'identifier, parmi les observés :

- ceux qui relèvent de l’ordre du nécessaire du point de vue du projet didactique (ils correspondent à des observables prévus par l'analyse a priori);
- ceux qui paraissent de l’ordre de la contingence (ils sont survenus en situation de classe mais auraient pu aussi bien ne pas survenir).

Pour permettre l'identification de nouvelles situations et une amélioration de l'analyse a priori, il est nécessaire de ne pas s'intéresser seulement à ce qui était prévu, mais de s'interroger sur ce qui ne l'était pas. Certains événements étaient prévisibles, et réclament simplement une retouche de l'analyse a priori, d'autres étaient improbables, et permettent parfois de révéler des situations cachées à une première interprétation.

III.3 Le terrain de l’étude

Le travail présenté concerne l'étude des pratiques d'enseignement de la racine carrée en classe de troisième.

Nous avons choisi cette notion d'une part, parce que des connaissances sur les apprentissages des élèves à propos de cette notion sont disponibles, connaissances issues de la thèse de T. Assude (1992) et de travaux -que nous avons dirigés- de S. Rousset-Bert (1990) et d'A. Bronner (1991).

La racine carrée, introduite en classe de quatrième, par la touche √ de la calculette, est enseignée comme objet mathématique en classe de troisième. Cet enseignement est l'occasion de "l'observation de nouveaux nombres", les irrationnels. Les travaux de T. Assude montrent que, au cours des changements successifs de programme, la transposition didactique de cette notion a subi un arrêt, ce qui l'isole des autres notions mathématiques au programme. Il faut de plus noter que la construction des nombres réels n'est plus un objectif d'enseignement dans le programme du collège.

Nous avons observé trois séquences complètes (10 à 12 séances de 55 minutes chacune) dans les classes de trois professeurs de collège qui se sont avérés adopter des modes d'introduction de la racine carrée différents. Nous analyserons ci-dessous les premières séances d'un de ces enseignants qui a choisi une entrée de type arithmétique (chapitre B).

B - ANALYSE D'UNE OBSERVATION: INTRODUCTION ARITHMETIQUE DE LA RACINE CARRÉE

I. PROJET DU PROFESSEUR ET DIFFÉRENTS NIVEAUX DE CONNAISSANCES EN JEU

Nous nous proposons de modéliser (à l'aide du modèle de structuration du milieu présenté en annexe 1) les connaissances de l'enseignant qui sont simultanément présentes chez lui lors de l'élaboration et de la conduite de sa séquence en classe. Nous appellerons, dans la suite du texte, Ci les connaissances de l'enseignant en position Pi, ou bien celles de l'élève en position Ei.

I.1. Modélisation des connaissances du professeur

• Au niveau noosphérien (S3)

Le professeur P3 a des savoirs, des convictions, des représentations sur la racine carrée, dont on trouve des traces dans les interviews, dans les tables rondes et en situation didactique. Ce sont ces connaissances C3 qui sous-tendent son projet d'enseignement et qui déterminent les connaissances en jeu dans les différents niveaux de la situation. Le milieu M3 sur lequel ces connaissances fonctionnent est constitué de ses prévisions concernant la suite des séances de la séquence (scénario).

Connaissances sur la notion mathématique

L'intérêt de la racine carrée réside pour lui essentiellement dans l'introduction de "nouveaux nombres", qui viennent s'ajouter à ceux que les élèves connaissent déjà (rationnels essentiellement).

Traces de C3 dans les interviews du professeur :
-tout au long du collège, j'attache de l'importance à "l'arrivée progressive des réels"
- quand elle est irrationnelle […] c'est un nombre difficile à palper […] ça nous permet d'aller plus loin, d'introduire de nouveaux nombres, d'arriver aux réels, quoi.
-je ne veux pas rester au niveau calculatoire, j'essaye de leur montrer que $\sqrt{a}$, c'est un nombre et pas une opération…

- ce que je souhaite essentiel qu'ils retiennent ? justement, le fait que ce soit de nouveaux nombres, qu'ils ne soient plus tentés, toujours, de prendre les valeurs approchées, qu'ils utilisent le symbole en disant que ça, c'est une solution à un calcul.

Connaissances sur l'apprentissage

Le professeur affirme des positions constructivistes sur l'apprentissage et la nécessité de favoriser le travail personnel des élèves (seuls ou à plusieurs). Il pratique, chaque fois que possible, le débat dans sa classe, renvoyant à l'ensemble des élèves les affirmations ou interrogations de certains d'entre eux, sans prendre lui-même position.

• Au niveau constructeur (S2)

Le professeur P2 construit la suite de la séquence, l'organisation du chapitre autrement dit, P2 élabore son scénario. Il s'agit ici de décrire les choix généraux qu'il effectue et les raisons de ces choix. Les connaissances C2 sont relatives à la situation d'enseignement/apprentissage qu'il veut construire sur la racine carrée, connaissances qu'il hiérarchise (les indispensables et les autres). Le milieu M2 sur lequel fonctionnent les connaissances C2 est constitué des situations passées et présentes d'enseignement de la racine carrée, d'articles lus sur la question …

Certaines des connaissances C2 sont exprimées lors des interviews : il veut

- partir des carrés, "de ce qu'ils connaissent déjà" :

"j'ai fait le choix d'introduire la racine carrée à partir d'exemples simples, c'est-à-dire. à partir de nombres qui sont des carrés, parce que je me suis aperçue que cette notation, elle est difficile […] ils se mélangent un peu les crayons. Donc, je voulais que cette notation , racine carrée, dans un premier temps, ne leur pose pas de problème, donc j'ai fait le choix de partir des carrés, de ce qu'ils connaissent déjà"

- bien faire comprendre que la racine carrée de a, c'est le seul nombre positif dont le carré est égal à a

- mettre sur l'accent sur le fait que les racines carrées introduisent de "nouveaux nombres"

"Après les entiers, les décimaux, les fractions, il existe de nouveaux nombres comme √1, √3, √0,5, √3/2, … certains ont une écriture entière (exemples), une écriture décimale (exemples), une écriture fractionnaire (exemples) . D'autres n'ont qu'une écriture avec des radicaux : on les appelle "IRRATIONNELS" et on ne peut en donner qu'une valeur approchée (exemples)".(extrait du scénario)

• Au niveau projeteur (S1)

P1 est dans une position où il pilote, où il prend des décisions (donner ou pas telle définition…) où il pose déjà les jalons du processus d'institutionnalisation. Les connaissances C1 de P1 sont ses connaissances globales sur les connaissances et les difficultés habituelles des élèves à propos des carrés et de la racine carrée. Le milieu M1 sur lequel fonctionnent les connaissances C1 comprend tout ce qui est formulé explicitement dans la situation didactique S0, que ce soit :

- les raisons données par E0 de ses réponses
- les connaissances institutionnalisées par P0.

Son projet est de faire acquérir par les élèves des connaissances dont il estime qu'elles seront indispensables pour inférer les définition, condition d'existence et propriétés de la racine carrée d'un nombre et en particulier celles du type :

- un nombre négatif n'a pas de racine,
- la fonction carrée n'est pas bijective sur R (seulement sur R+),
- pour que a soit le carré d'un entier, il faut qu'il appartienne à la table des carrés parfaits.

• Au niveau de la situation didactique (S0)

Les connaissances C0 de P0 sont des interprétations et/ou des représentations des difficultés des élèves et de leur causes, qui vont lui servir dans l'action pour ses prises de décisions immédiates (microdécisions en situation de classe). Le milieu sur lequel elles fonctionnent est le milieu d'apprentissage, M0, constitué des réponses brutes données par les élèves.

• **Au niveau de la situation a-didactique (S-1)**

Les connaissances C-1 du professeur sont celles qui lui permettent de distinguer dans le travail de l'élève les erreurs ou les difficultés qui relèvent du savoir à enseigner (ici la racine carrée), et qui sont donc des *objets sensibles*. La position P-1 ne correspond pas en effet à un silence du professeur, mais à une suspension de la conclusion en ce qui concerne la situation proposée. Ces connaissances C-1 sont en relation avec l'analyse implicite qu'il fait de la situation didactique S0 qu'il pense avoir mis en place.

Il nous est encore difficile de déterminer ces connaissances, mais ce sont elles qui conditionnent l'intervention ou la non intervention de l'enseignant, dans une phase où il ne prend pas un rôle actif (au contraire d'une phase d'évaluation ou d'institutionnalisation).

Parmi les réponses ou interventions des élèves, certaines sont immédiatement relevées par le professeur, entraînant par là même des évolutions du déroulement prévu; d'autres ne le sont pas, comme si elles n'étaient pas entendues.

I.2. Modélisation en terme de résonance d'intervention (ou de non -intervention) d'élèves sur le projet du professeur

Nous allons montrer le phénomène de résonance d'interventions sur plusieurs exemples d'analyses d'épisodes du protocole présenté intégralement en annexe 2.

• **Résonances fortes**

Episode 1 (interventions 24-75) : Dans l'intervention 30, Michaël, va au tableau et écrit $-(1)^2 = -1$. Cette affirmation exacte est inattendue pour le professeur dans les connaissances C1 duquel figure le fait que les élèves connaissent la règle des signes.

Plusieurs indices nous permettent d'affirmer ici une résonance forte:
- le temps consacré au traitement de l'intervention de Michaël (interventions 24 à 62) allonge de beaucoup le temps que l'enseignant a prévu dans le scénario pour le traitement de la première question,
- l'enseignant ne comprend pas[4] ce que veut dire Michaël (interventions 24 à 29) et n'arrive pas à écrire sous sa dictée. Il l'envoie écrire lui-même au tableau, ce qui est contraire à la coutume de la classe,
- à la fin de l'épisode (interventions 65 à 75) l'enseignant accepte pour conclure de s'appuyer sur des arguments qui avaient déjà été donnés au départ (interventions 18 à 23).

Episode 2 (interventions 80 à 113) : Dans cet épisode, les élèves doivent résoudre la question: “deux nombres différents peuvent-ils avoir le même carré?”. -4 et 4 sont proposés, mais certains élèves soutiennent qu'ils sont *opposés* et non pas *différents*.

Ici, les interventions des élèves dénotent qu'une connaissance dont le professeur a impérativement besoin pour son projet -nombres opposés- et qu'il supposait acquise (S1), ne sont pas appropriées par tous : il décide alors, en fonction d'une analyse instantanée du niveau de difficulté des notions en jeu, d'ouvrir une parenthèse de rappel sur le sujet (la gestion de l'événement se fait par renvoi à la classe et gestion par le professeur de la discussion. Les élèves se convainquent mutuellement et le professeur n'a plus qu'à conclure).

Episode 3 (interventions 145 à 177) : Dans cet épisode, le point discuté est l'égalité $9^{10} = (9^5)^2$. Certains élèves soutiennent que c'est faux et que c'est $9^{10} = (3^5)^2$ qui est exacte.

On assiste ici à une résonance de même nature que dans l'épisode2, au sujet du carré d'une puissance. La décision de l'enseignant est alors de repousser la question à une séance ultérieure (les élèves devant réfléchir entre temps à leur réponse).

• **Une résonance faible, une résonance nulle et une résonance insuffisante**

Episode 4 (interventions 38 à 42) : Dans cet épisode, Olivier commente l'écriture introduite par Michaël et dit : (38) Le carré c'est un mais on a rajouté un signe devant..., une soustraction devant.

Ici le professeur entend bien (puisqu'il répète la phrase de l'élève) mais continue comme si l'erreur commise n'avait pas d'importance. Il rectifie “sans bruit” cette erreur qu'il n'interprète pas comme significative par rapport à son projet. Il s'agit d'une *résonance faible*.

Episode 5 (interventions 125 à 127) : Dans cet épisode, l'enseignant accepte la réponse 5/2 de Marlène. Cette réponse est fausse puisque la question demandait: "les nombres suivants (dont 25/4) sont il des carrés d'entier?" 25/4 est ici accepté comme carré

[4] Un modèle permettant de prendre en compte cette difficulté de communication sera développé dans le paragraphe II.3.

d'entier sans que cette réponse résonne chez le professeur ; il ne "l'entend" pas, il y a ici une *résonance nulle.* On peut par ailleurs noter que dans l'intervention 127, l'enseignant indique une autre erreur (qu'il a vu en passant dans les rangs) : l'oubli de la parenthèse dans l'écriture de $(5/2)^2$. Il est possible que la résonance de cette erreur se soit surimposée.

Nous interprétons ceci en disant que le professeur ne traite pas de la même façon les interventions des élèves selon l'effet de résonance de celles-ci sur son projet, résonance directement liée à ses connaissances C0, C1 et C2. C'est ce que nous appelons phénomène de *résonance d'une intervention d'élève* sur le projet du professeur.

Episode 6 (interventions 219 à 234) : Il peut arriver également que les connaissances du professeur ne permettent pas que cette résonance soit suffisante. Dans l'épisode 6, certains élèves n'acceptent pas d'écrire "-5 a pour carré 25"; ils veulent moins cinq entre parenthèses. L'enseignant repère bien l'effet perturbant de l'intervention sans en déterminer immédiatement l'importance par rapport à son projet[5]: il négocie donc "à la baisse" (puisque "ça vous rassure") et écrit "(-5) a pour carré 25", tout en commentant que "tant qu'il n'y a pas de calcul avec moins 5, c'est pareil". C'est du point de vue d'une autre analyse de la situation que nous parlons ici de *résonance insuffisante.*

Remarquons que ce phénomène de résonance d'une intervention peut également se transformer en résonance d'une non-intervention lorsque des interventions attendues par le professeur (connaissances C1 et C0) ne se produisent pas. Par exemple, dans une autre séance, lorsque les élèves donnent correctement 5 comme racine carrée de 16+9, le fait que personne ne propose 4+3=7 perturbe si fortement le projet du professeur, qu'il va ouvrir une parenthèse dont les élèves ne voient pas l'enjeu, sur le fait que, de même que $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{(a+b)}$.

II. MODELISATION EN TERME DE DEDOUBLEMENT DE SITUATION

Il s'agit d'analyser la situation créée par les trois questions[6] du professur en utilisant les situations S-3, S-2, S-1 et S0 de la structuration du milieu.

(Intervention 2 à 4 du professeur)
Première question: Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un.
Deuxième question : Deux nombres différents..., alors, commencez déjà à réfléchir à la première question, et notez déjà quelque chose sur votre cahier, peuvent-ils avoir le même carré? Réfléchir à la question sans déjà y répondre mais y réfléchir.

[5]Nous verrons dans le paragraphe II.3 en quoi cet épisode est important et significatif vis-à-vis de ce projet.

[6] Une analyse détaillée du protocole, que nous ne présentons pas ici, montrerait que d'autres questions, qui ne sont pas posées d'emblée, provoquent des "sous-situations" par rapport à la situation principale.

Troisième question : les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Les nombres que je vais donner, est-ce que se sont des carrés de nombres entiers? Et il faudra justifier. Voilà, je note tout au tableau, (*P écrit :* 40, 9, - 16, 0, 25/4, 1, 400, 10^5, 121, 0,04, 9^{10}) . Vous répondez.

II.1. Première analyse a priori de la séquence

Cette analyse a priori est la première que nous ayons produite. Les situations (niveaux négatifs) ainsi décrites (par le chercheur) sont celles dont nous faisons l'hypothèse qu'elles correspondent à l'image que s'en fait l'enseignant, dans sa construction de S0. Nous verrons dans le paragraphe suivant que ce n'est pas la seule analyse qu'il est possible de faire.

• La situation objective (S-3)

La situation objective est une situation non finalisée, dans laquelle le milieu matériel (M-3) comporte les objets disponibles pour E-3 qui permettent une entrée dans le problème.

On trouve dans M-3 les nombres précédemment connus par les élèves et les règles d'opérations sur ces nombres. C-3 doit comporter notamment les propriétés usuelles de la multiplication (règle des signes) et la définition d'un carré comme produit d'un nombre par lui-même.

Les "productions" (qui peuvent être virtuelles) de E-3 peuvent être modélisées par des couples de nombres connus associant un nombre et son carré (a, a^2).

• La situation d'action (S-2)

La situation S-3 décrite précédemment forme le milieu objectif M-2 pour cette situation, on y trouve donc l'ensemble des couples de nombres connus et leurs carrés. Elle est caractérisée par la nécessité de trouver des réponses aux questions posées.

On trouve dans S-2 les connaissances C-2 qui permettent d’adopter une stratégie de base. Ici les connaissances déjà envisagées en C-3 sont suffisantes.

Les productions de E-2 peuvent être représentées par des couples de nombres dans lequel le deuxième terme (carré) est un nombre donné dans les questions. Par exemple (+4, 16), (-4,16), etc. Cette exploration systématique de l'ensemble des couples est la stratégie de base.

• La situation d'apprentissage (S-1)

La situation S-2 forme le milieu d'action M-1, on y trouve donc la restriction de l'ensemble des couples à des couples pertinents pour donner les réponses. Les connaissances C-1 sont en cours d'élaboration ou d'apprentissage (leur non-maîtrise produira des erreurs mais n'empêchera pas de travailler): "un carré est toujours positif", "deux nombres opposés ont même carré".

E-1 formule les réponses aux questions et leur raisons. Il ne peut pas conclure dans cette situation car le milieu M-1 ne permet pas de phase de validation.

P-1 observe (sans conclure) le déroulement de S-1 et n'intervient pas sur les connaissances de niveau C-1.

• **La situation didactique (S0)**

La situation S-1 forme le milieu d'apprentissage M0, on y trouve notamment les réponses des élèves aux questions posées. La situation S0 comprend une phase de conclusion, qui peut être de validation (gestion par E0) soit d'évaluation (gestion par P0), elle comprend également une phase d'institutionnalisation pilotée par P0 et partagée par E0.

Les connaissances C-1 changent de statut par le jeu du contrat didactique; elle font l'objet d'une institutionnalisation ou d'un rejet voire d'un désintérêt, ce qui renseigne sur leur statut didactique. Ces connaissances vont servir à conclure sur les réponses données.

II.2. Deuxième analyse a priori

Cette première analyse ne permet pas de prendre en compte certains événements qui ont pourtant eu une résonance importante (intervention de Michaël, notamment).

Elle présente d'autre part le défaut de placer en position -3 (dans les connaissances stabilisées) des connaissances relativement sophistiquées pour des élèves de quatrième. En effet, la formulation (a,a^2) masque la difficulté de la recherche du carré lorsque a est un nombre négatif, ou rationnel, ou décimal, etc. Or, nombre d'élèves ont encore des difficultés sur ce point. Mais les élèves n'éprouvent pourtant pas de difficulté apparente à entrer dans le problème et à y produire des réponses, c'est donc qu'ils ont un moyen d'interpréter le problème et d'y mettre en oeuvre une stratégie de base.

Ces remarques nous ont conduit à l'élaboration d'une modélisation alternative (S') à celle que nous avons proposée ci dessus.

• **La situation objective (S'-3)**

Dans la situation S, on avait considéré dans M-3 les nombres précédemment connus par les élèves et les règles d'opérations sur ces nombres. Le milieu matériel obtenu est complexe. Nous allons proposer un milieu matériel M'-3 beaucoup plus élémentaire, constitué des nombres entiers et de certains "signes": parenthèses, signe moins, barre de fraction, virgule décimale, exposant, etc.

Les connaissances C-3 sont alors les règles d'écriture appliquées sur ces nombres (par exemple, on écrit pas 2,2,34).

Les "productions" (qui peuvent être virtuelles) de E-3 sont les signes bien formés par manipulation ou groupement de signes, du type : a, -a, a/b, ab, a^2, $-a^2$, $-(a)^2$, $(-a)^2$.

• La situation d'action (S'-2)

La situation S'-3 décrite précédemment forme le milieu objectif M'-2 on y trouve donc l'ensemble des écritures bien formées.

On trouve dans S'-2 les connaissances C'-2 qui sont nécessaires pour adopter une stratégie de base. Ici les règles d'écriture associées à l'exposant 2.

Les productions de E'-2 peuvent être représentées par des couples de nombres dans lequel le premier est bien formé et le deuxième correspond à une réécriture utilisant l'exposant 2. On trouve donc une espèce de combinatoire primitive à partir des signes disponibles, des couples recherchés : (a, a^2), $(a, -(a)^2)$, $(a, (-a)^2)$, $(a/b, a^2/b)$, $(a/b, a/b^2)$, $(a/b, a^2/b^2)$, etc.

• La situation d'apprentissage (S'-1)

La situation S'-2 forme le milieu d'action M'-1. On y trouve donc la restriction de l'ensemble des couples à des couples pertinents pour donner les réponses. Les connaissances C'-1 sont en cours d'élaboration ou d'apprentissage (leur non-maîtrise produira des erreurs mais n'empêchera pas de travailler), elles correspondent aux propriétés mathématiques des écritures obtenues par l'application de l'exposant 2. On y trouve : "un carré désigne une écriture a^2 (si a est positif) ou $(a)^2$", "un carré est toujours positif", ainsi que les règles de "distribution" de l'exposant 2. Pour devenir stable, ces connaissances devront être explicitées et institutionnalisées dans la situation didactique.

• La situation didactique (S'0)

Les élèves ayant répondu aux questions et donné des raisons de leur réponses, la situation S'0 paraît la même que précédemment, mais la signification des réponses et des raisons, qui prend sa source dans les situations S'i (i<0) sont très différentes de celle qu'elles ont dans S0.

II.3. Analyses a posteriori

Analyse de l'épisode 1 (interventions 24 à 75)

Nous avons choisi d'illustrer nos analyses a priori par l'analyse d'un épisode déjà mis en valeur en terme de résonance forte. Il s'agit de l'épisode relatif à l'intervention de Michaël. Cet épisode prend place à propos du traitement de la première question: Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un?

Du point de vue de la première analyse a priori (situation S), l'exploration systématique des couples (a, a^2) où $a^2=-1$ conduit, dans la situation a-didactique, à une hypothèse d'absence de nombre a satisfaisant à la condition. Dans S0, il s'agit de trouver une raison mathématiquement acceptable à l'absence de nombre dont le carré est moins un. La preuve à la portée des élèves est ici une preuve par exhaustion : il y a trois cas possibles, zéro, dont le carré n'est pas -1, un nombre positif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1, un nombre négatif, dont le carré est positif et donc n'est pas -1. On trouve un raccourci de cette preuve dans une intervention finale (intervention 69) de l'enseignant.

Dans notre deuxième analyse a priori (situation S'), la situation a-didactique permet de produire au moins un couple solution dans lequel on a bien comme premier terme -1 et comme deuxième terme un exposant 2, par exemple la solution de Michaël (-1, $-(1)^2$). Dans la situation didactique, il suffira alors d'exhiber ce couple pour conclure.

L'enseignant ne comprend pas ce que veut dire Michaël, l'explication de celui-ci se rapporte à *l'écriture* de l'expression à laquelle il pense (ce sont bien des écritures et non pas des nombres qui sont en jeu dans S'). Cette écriture n'a aucune interprétation dans S où $-(1)^2$ n'est jamais *le carré* d'un nombre. L'enseignant se trouve dans l'impossibilité d'interpréter ce qui fait l'enjeu de cette erreur, bien qu'il prenne la décision instantanée d'y consacrer plusieurs interactions avec la classe. A aucun moment, il n'envisage une autre lecture de la situation, ce qui aurait pu lui permettre de produire une explication qui porte sur la différence entre écriture "exposant 2" et "carré". Ce type d'information est fondamentalement éloigné des propriétés que l'enseignant pense pouvoir institutionnaliser; elle pose d'autre part des problèmes d'idoinéïté avec le savoir savant sur le domaine numérique (dans lequel la question de l'écriture est secondaire).

Reprise rapide d'autres épisodes identifiés du point de vue de leur résonance

Certains épisodes nous paraissent analysables grâce à la distinction entre S et S'.

Dans l'épisode 5, Olivier confond (ou identifie) le signe moins comme signe de soustraction. Du point de vue de l'écriture (dans S'), c'est la même chose, il n'y a que du point de vue de la signification en terme de nombres et l'opération sur ces nombres (dans S) qu'il y a une différence.

Dans l'épisode 6, l'enseignant accepte la réponse 5/2 donnée par Marlène. Du point de vue de S', 5/2 s'écrit bien avec des nombres entiers et un autre signe (le signe de fraction); il n'est pas choquant de l'inclure dans les entiers (pas plus que 9^{10}, par exemple).

Dans l'épisode 7, les élèves protestent devant la phrase à recopier dans leur cahier de cours: "-5 a pour carré 25" et obtiennent de l'enseignant l'écriture de "(-5) a pour carré 25". Dans le deuxième cas, le rajout de l'exposant 2 donne bien l'écriture $(-5)^2$ attendue, alors que dans l'écriture -5, si l'on rajoute l'exposant 2, on obtient -5^2. On remarque d'ailleurs que Michaël produit sa réponse à partir d'une idée de ce type -1 --> -(1) --> $-(1)^2$. On retrouve donc ici les deux interprétations possibles: “x a pour carré y” peut signifier “y est obtenu en multipliant x par lui-même” (situation S) ou bien “y est obtenu en ajoutant l’exposant 2 à x” (situation S’).

C. CONCLUSION

Le phénomène didactique “résonance d’une intervention”

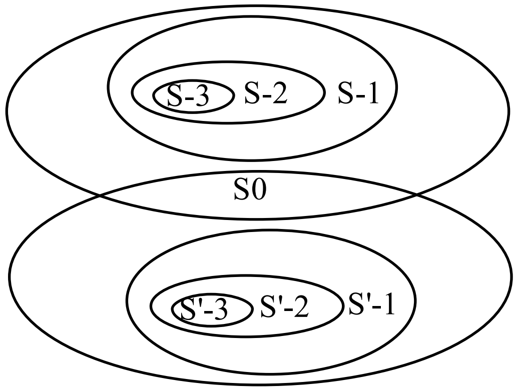
La modélisation en terme de “résonance d’une intervention”, est caractérisée par la relation existant entre l’intervention (ou la non-intervention) d'élèves et les connaissances Ci de l’enseignant sur la situation; elle permet d'interpréter certains des décalages que nous avons observés entre le projet initial de l’enseignant et sa réalisation effective.

En outre, elle permet d’expliquer les raisons pour lesquelles dans une classe, le professeur ne traite que certaines des erreurs des élèves. L’intérêt de cette modélisation est à nos yeux :

- de montrer que ce n’est pas par hasard que certaines interventions d’élèves, qui révèlent certaines erreurs ou confusions de ces derniers, ne sont pas relevées, mais bien en fonction des relations entre les connaissances dont elles dénotent la non appropriation et celles que le professeur a le projet de leur faire acquérir,
- de montrer que le traitement d’une erreur par le professeur dépend plus du rôle de l’erreur dans son projet d'enseignement que de l’élève qui la commet,
- de prédire qu’une erreur non prise en compte par le professeur dans une situation donnée le sera sans doute dans un autre contexte dans lequel elle créera un phénomène de résonance.

Une modélisation en terme de "dédoublement de la situation"

Nous caractériserons le second phénomène didactique identifié en terme de *"dédoublement de la situation"* pour rappeler que la situation supposée par le professeur n'est pas celle dans laquelle évolue un nombre non négligeable d'élèves.



Les analyses effectuées ci-dessus en utilisant les différents niveaux de structuration du milieu

- permettent d'interpréter les interactions élève/situation et de donner sens à ce que fait l'élève, en mettant en évidence les objets mathématiques sur lesquels il travaille effectivement ;
- révèlent un dysfonctionnement du contrat didactique (il y a double incompréhension, par l'élève de ce que le professeur attend de lui, par le professeur, de ce que l'élève produit) et permet d'expliquer ce dysfonctionnement par la "distance" entre les situations S et S';
- montrent que le type de gestion adopté dans l'urgence par le professeur -à savoir s'appuyer sur le "bon" élève, celui qui fonctionne dans le "bon" milieu- est en fait le seul possible, même s'il ne règle pas le problème d'apprentissage des élèves, pour pouvoir revenir à son projet initial.

Perpectives

Notre étude permet de confirmer que le travail qui se fait effectivement dans la classe est souvent centré sur d'autres savoirs que ceux que l'enseignant veut transmettre. Il met en évidence que des objets qui sont supposés connus des élèves et donc considérés comme déjà appropriés, vont en fait, au lieu d'appartenir au "milieu objectif" pour la situation proposée, être enjeu d'apprentissage.

Le paradoxe suivant est sous-jacent à ce phénomène : dans une séance donnée, le professeur a besoin de supposer que certains apprentissages sont réalisés, alors qu'ils sont seulement en cours (les apprentissages se font à long terme) et que la séance en question va (forcément) les faire évoluer. C'est donc souvent autre chose que ce qui était prévu ou prévisible qui se passe dans une situation didactique.

De plus, les résultats qui font l'objet de cette présentation nous paraissent de deux ordres.

D'une part, ils montrent l'intérêt du fonctionnement d'un outil d'analyse du système didactique (structuration d'une situation en différents niveaux).

D'autre part, ils participent à la modélisation des interactions didactiques en situation de classe par la mise en évidence de deux phénomènes didactiques particuliers :

- le phénomène "résonance d'une intervention d'élève" qui caractérise l'effet de perturbation d'une intervention (ou d'une non-intervention) d'élève sur le projet du professeur ;
- le phénomène "dédoublement de la situation" qui caractérise un dysfonctionnement particulier de la situation a-didactique par un décalage entre le milieu avec lequel l'élève interagit et le milieu nécessaire à l'apprentissage visé par le professeur à travers la situation.

Dans la modélisation proposée, nous avons pu mettre en évidence le rôle des divers types de connaissances en jeu, chez le professeur et chez les élèves, ainsi que l'importance de la représentation qu'a le professeur des relations entre les connaissances anciennes et celles qui font l'objet de l'apprentissage.

Eléments de bibliographie

ASSUDE T., 1991, Un phénomène d'arrêt de la Transposition didactique : le cas de la racine carrée, Thèse d'Université Joseph Fourier, Grenoble.

BONNEVILLE J.F., COMITI C., GRENIER D., LAPIERRE G., 1991, Représentations d'enseignants de mathématiques, *in Cahier du Séminaire de didactique des mathématiques*, LSD2, Université Grenoble I

BRONNER, 1991, Connaissances d'élèves maliens à propos de la racine carrée, *Petit x* n°28, pp.19-55, ed.IREM de Grenoble.

BROUSSEAU G., 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol 7.2, pp. 33-115

BROUSSEAU G., 1989, Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol 9.3, pp. 309-336

BROUSSEAU Guy, 1986, La relation didactique: le milieu, *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques,* ed IREM de Paris 7.

CENTENO Julia et BROUSSEAU Guy, 1991, Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 11 n°2-3, pp.167-210, ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. , 1992, *L'observation didactique,* intervention à l'université d'automne de Fréjus des formateurs IUFM Sud-Est

CHEVALLARD Y., 1991, *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*, 2° édition, La Pensée Sauvage, Grenoble, 240p

CHEVALLARD Y., 1992, Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique, *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* Vol 12.1, pp. 73-112

CLARK, C.M. and YINGER, 1987, Teacher planing in CALDERHEAD J.(Ed) *Exploring teacher thinking* London, Cassell Press, pp.84-103

COMITI C. 1993, Focusing on specific factors occuring in classroom situation that lead the teacher to change his practice and make him modify his original plans, oral communication in *Proceedings of the 17th International Conference of PME*, Tsukuba.

COMITI C., GRENIER D., 1994a, L'observation, outil de recherche dans un travail de modélisation de l'enseignant acteur du système didactique, in Actes de la *VII° Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Ed. ARDM

COMITI C., GRENIER D., 1994b, Modelling un-foreseen events in the classroom situation, Research report in *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, Lisbonne.

COMITI C., GRENIER D., 1995, Two examples of “split situation” in the mathematics classroom, *For the Learning of Mathematics*, Vol 15(2)

EBERHARD Madeleine, 1993, L'institutionnalisation comme processus : mise à l'essai d'outils d'analyse, in Actes de la *VII° Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*, Ed. ARDM (à paraître).

ERNEST P., 1989, The Knowledge, Beliefs and Attitudes to the Mathematics Teacher : a model, *Journal of Education for Teaching*, Vol 15, n°1, pp.13-33

GRENIER D., 1993, Question of methodology for a study of the teacher in the didactic system, *The Journal of Mathematical Behavior,* R.B.Davis (Ed.)

MARGOLINAS Claire, 1993a, La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (à paraître).

MARGOLINAS Claire, 1993b, Jeux de l'élève et du professeur dans une situation complexe, *Séminaire DidaTech, LSDD, IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble* (à paraître).

MARGOLINAS Claire, STEINBRING Heinz, 1993, Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu, in ARTIGUE Michèle et coll. eds, 1993, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

MERCIER Alain, 1993, Comment l'analyse du fonctionnement didactique pour l'élève exige-t-elle l'hypothèse d'un milieu? Comment analyser ce milieu? *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (à paraître).

ORUS-BAGUENA Pilar, 1992, *Le raisonnement des élèves dans la relation didactique: effet d'une initiation à l'analyse classificatoire dans la scolarité obligatoire,* Thèse de l'Université de Bordeaux 1, diffusion IREM de Bordeaux.

ROBERT A. et ROBINET J., 1989, Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement, *Cahier de DIDIREM n°1*, Ed. IREM Paris7

ROMBERG T., 1988, Can Teachers be Professeuressionals ?, in Grouws D.A., Cooney T., Jones D; (eds) *Perspectives on research on effective mathematics teaching*, NCTM, Lawrence Erlbaum,

ROUCHIER, A. , 1991, Le maître dans le système didactique, *Actes de la VIème école d'été de didactique des mathématiques,*

ROUSSET-BERT, 1990, Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certianes de leur représentations, petit x, n°25, ed IREM de Grenoble.

SCHOENFELD A.H., 1988, When good teaching leads to bad results : the disaster of well taught mathematics courses, *Educational psychologist* Vol 23-2

THOMPSON A.G., 1992, Teachers' Believes and Conceptions : A Synthesis of the Research, in Grouws D.A. (Ed) *Hanbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, New York, Macmillan,

TOCHON, F., 1989, A quoi pensent les enseignants quand ils planifient leurs cours ?, *Revue Française de Pédagogie*, n°86

TOCHON, F., 1992, A quoi pensent les chercheurs quand ils pensent aux enseignants ? Les cadres conceptuels de la recherche sur la connaissance pratique des enseignants, *Revue Française de Pédagogie*, n°99, pp.89-113.

ANNEXE 1

Extrait de MARGOLINAS Claire, STEINBRING Heinz, 1993, Double analyse d'un épisode: cercle épistémologique et structuration du milieu, in ARTIGUE Michèle et coll. eds, 1993, *Vingt ans de didactique des mathématiques en France,* ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, page 252.

Nous partons de la *situation didactique.* C'est à ce niveau zéro que nous situons l'origine du schéma, et c'est en référence aux systèmes présents à ce niveau que nous caractériserons les systèmes présents dans les autres niveaux.

Dans la situation didactique S0 les systèmes présents sont le professeur (P0), l'élève (E0) et le milieu (M0). Les lettres P, E et M caractérisent dans notre schéma la place des systèmes présents dans la situation didactique, ce qui permet de rendre compte de la structuration du milieu.

Comme dans le schéma de Brousseau, on a toujours Mn+1=Sn, le niveau n est donc toujours englobé dans le niveau n+1 (structure "d'oignon"), on a également toujours Sn={Mn, En, Pn}.

Avec ces notations, on obtient le tableau suivant :

M-3: M-matériel	E-3: E-objectif		S-3: situation objective
M-2: M-objectif	E-2: E-cognitif		S-2: situation d'action
M-1: M-d'action	E-1: E-apprenant	P-1: P-observateur	S-1: situation d'apprentissage
M0: M-d'apprentissage	**E0: Elève**	**P0: Professeur**	**S0: situation didactique**
M1: M-didactique	E1: E-réflexif	P1: P-projeteur	S1: situation de projet
M2: M-de projet		P2: P-constructeur	S2: situation de construction
M3: M-de construction		P3: P-noosphérien	S3: situation noosphérienne

ANNEXE 2 : LE PROTOCOLE COMPLET

Etabli par Claude Comiti et Denise Grenier dans une classe de troisième Première leçon d'introduction à la racine carrée (1992-93)

1 P : Bien, on va commencer! Voilà, maintenant que les instruments sont installés, les appareils sont installés, on fonctionne comme d'habitude. D'accord? Ca y est Mohamed, on y est, là?

2 P : Vous prenez votre cahier de brouillon. Je vais vous poser trois questions, que je note au tableau, vous ne copiez pas les questions, et vous essayez de répondre, personnellement, et ensuite on échange là dessus.

3 P : Première question: Peut-on trouver des nombres dont le carré est moins un. Deuxième question : Deux nombres différents..., alors, commencez déjà à réfléchir à la première question, et notez déjà quelque chose sur votre cahier, peuvent-ils avoir le même carré? Réfléchir à la question sans déjà y répondre mais y réfléchir.

4 P : Troisième question : les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Les nombres que je vais donner, est-ce que se sont des carrés de nombres entiers? Et il faudra justifier. Voilà, je note tout au tableau, (*P écrit :* 40, 9, - 16, 0, 25/4, 1, 400, 10^5, 121, 0,04, 9^{10}) . Vous répondez.

Si ça vous dérange de répondre dans l'ordre, vous me mettez le numéro de la question, et vous commencez à réfléchir sur votre cahier. Il est évident que tout ça se fait sans la calculatrice, vous la rangez. Je ne l'ai pas précisé, excusez moi, mais vous pouvez la ranger pour aujourd'hui *(rires).*

5 P : Evidement si vous répondez juste oui ou non, je vous demanderai une justification. Est-ce qu'il y en a qui ont terminé?

6 E : Non!

7 P : Allez, encore une minute, et on échange sur ce que vous avez trouvé. Il y en a qui n'ont rien marqué encore! C'est difficile?

8 EE : Oui! Non! C'est simple!

9 P : C'est très simple! Qui a terminé, là? *(un doigt se lève, celui de Boudjedal)*

10 P : Tu as fini, Sébastien?

11 S : Non.

12 P : Bien, allez, on commence à corriger ce que vous avez fait *(après environ 5 minutes de travail)*. Peut-on trouver des nombres dont le carré est "moins un"? Marlène qu'est-ce-que tu as répondu à cette question?

13 M : Non.

14 P : Non? Qui a répondu non comme Marlène? Qui répond oui? *Des doigts se lèvent à chaque fois, mais un bon tiers des élèves n'ont levé le doigt pour aucune des réponses.*

15 P : Donc, ça se partage, mais il y en a à peu près un autre tiers qui ne répond rien du tout! Qui ne peut pas répondre à cette question? Qui ne se prononce pas? Et bien alors, Marlène , toi tu réponds non, est-ce-que tu peux expliquer pourquoi?

16 M : …

17 P : Tu ne peux pas expliquer. Tu as l'impression que c'est non, mais tu ne sais pas. Stéphanie?

18 S : Non, parce que le carré d'un nombre est toujours positif.

19 P : Non, parce que le carré d'un nombre est toujours positif.

20 E : Oui, c'est juste!

21 P : Tu lèves le doigt! D'autres explications, Olivier?

22 O : Le carré d'un nombre négatif, c'est un nombre positif.

23 P : Le carré d'un nombre négatif est un nombre positif. Les élèves qui ont répondu oui, comment est-ce qu'ils s'expliquent? Il y en a qui ont répondu oui, tout à l'heure? Seraient ils déjà convaincus par Stéphanie?

24 Michael : Et bien non! si on prend le carré négatif…

25 P : Michael. Si tu prends le carré...., qu'est ce que tu veux dire, le carré négatif, le carré d'un nombre négatif.....? Est ce qu'il peut finir son explication? On écoute Michael.

26 M. on prend un, on met moins…

27 P : On prend un, alors comment je l'écris, je met moins un....*P écrit* $(-1)^2$ alors ça, ça fait quoi? Ça fait un.

28 M : non

29 P : Alors, viens nous l'écrire

30 *Michael va au tableau et écrit* : $-(1)^2 = -1$

31 P : Alors, c'est à dire que je l'écris comment? J'écris moins, entre parenthèses un au carré?

32 M : Oui!

33 P : Va à ta place. Oui, alors, donc moins un au carré, c'est pareil que ce que tu as écris en-dessous? tu as mis une parenthèse et alors ça, tu en dis quoi?

34 M : Ça fait moins un!

35 P : Ça fait moins un. Donc tu réponds oui à la première question. Qui est d'accord avec Michael?

36 E : Je ne suis pas d'accord!

37 P : Ah! Alors. Donc, on a l'argument de Stéphanie, on a l'argument de Michael et qu'est-ce qu'on en conclut, là? Olivier?

38 O : Le carré c'est un mais on a rajouté un signe devant..., une soustraction devant.

39 P : On a rajouté un signe devant. Oui, et alors?

40 E : Ce n'est plus un nombre. On compte que la valeur absolue;

41 P : Ce n'est plus un nombre, c'est à dire, Olivier? On ne compte que la valeur absolue. C'est à dire qu'on ne s'intéresse qu'à un...
42 O : *(inaudible)*
43 Agnès : On a bien le carré de moins un
44 P : Oui. Ça c'est bien le carré de moins un, qui est bien le carré de moins un? Ce qu'on a écrit là? *montre $(-1)^2$ et ajoute = 1. Un observateur entends des élèves dire "Non!"*
45 P : Agnès!
46 A : Moins un entre parenthèses au carré, c'est bien le carré de moins un.
47 P : Moins un entre parenthèse au carré. Alors ça, on est tous d'accord, que moins un entre parenthèses au carré ça fait bien moins un. On est tous d'accord avec ça? *montre $(-1)^2 = 1$.* Est-ce qu'il y en a qui ne sont pas d'accord avec ça? Oui, c'est bon, tout le monde est d'accord avec ça. Bon, alors maintenant on essaie de voir le rapport avec la question posée. Qu'est ce que tu penses? Mohamed?
48 M : Ça n'a rien à voir.
49 P : Ça n'a rien à voir. Pourquoi?
50 M: Parce que là, moins un est entre parenthèses
51 P : Oui, c'est à dire qu'on prend quoi là?
52 E1 : La valeur absolue.
53 P : Qu'est ce qu'on prend, là?
54 E2: Un nombre devant une soustraction.
55 P : On prend la soustraction, c'est vraiment la soustraction ici, là?
56 E3 : Non, c'est un signe négatif.
57 P : Alors, si on prend un signe négatif? Ça veut dire qu'on prend quoi?
58 P : L'opposé! et on prend l'opposé de quoi?
59 E : De un
60 P : On a pris l'opposé du carré de un. Vous me suivez? Le carré de un c'est un au carré, ici on a pris l'opposé du carré de un. Vous êtes d'accord? Est-ce que c'est ce qu'on nous demande ici?
61 E : Non!
62 P : Si on veut le carré d'un nombre, ce nombre, au besoin vous mettez une parenthèse, c'est vrai que si on ajoute le moins devant c'est qu'on prend l'opposé de ce nombre. Est ce que tu es d'accord, Michaël? Donc, ce que tu as écrit ici est vrai *montre $-(1)^2 = -1$* mais ça ne répond pas à ma question 1. Est ce que tout le monde est d'accord?
63 E : Oui
64 E : Non!
65 P : Oui, alors, Lise, la réponse à la question un, c'est quoi?
66 L : Et bien c'est non.
67 P : C'est non, et pourquoi?
68 L : Le carré d'un nombre négatif est toujours positif.
69 P : Le carré d'un nombre négatif est toujours positif. Et le carré d'un nombre positif, alors?
70 L : Positif.
71 P : Il est toujours positif. D'où ça vient que le carré d'un nombre négatif soit toujours positif? Qui me l'explique ça? Adil!
72 A : C'est la propriété avec la multiplication des.... avec des nombres relatifs.
73 P : Oui, vas y, explicite.
74 A: Si on multiple deux nombres négatifs, le produit sera toujours positif.
J'entends un élève près de moi dire "Pourquoi ?"
75 P : Si on multiplie deux nombres négatifs on obtient toujours un nombre positif. Donc le carré d'un nombre, le carré de tout nombre, est positif. On l'écrira tout à l'heure dans le cahier de cours. Tout le monde en est sûr de ça? Bien.
76 P : Deuxième question : Deux nombres différents peuvent-ils avoir le même carré?
77 P : Je voudrais savoir qui a répondu non à cette question? Levez le doigt! *(10 doigts)* Bien, oh là! Six, sept, une dizaine d'élèves. Qui répond oui à cette question? Vous êtes quand même vingt-sept dans la classe, donc là, si j'en compte encore une dizaine, il y en a sept qui ne se prononce pas, et qui dorment consciencieusement. Bien, qui veut justifier du non? Boudjedal?
78 B : J'ai pris un exemple.
79 P : Oui.
80 B : Si je prens moins quatre, son carré est égal à seize....
81 P : Moins quatre, son carré est égal à seize, oui...
82 B : Et quatre, son carré est égal à seize aussi.
83 E : C'est oui, hein!
84 P : Et quatre, son carré est égal à seize, aussi. Alors, c'est quoi ça?
85 E : C'est oui!
86 P : Ah bon, d'accord, j'avais demandé quelqu'un qui m'explique le non. Qui me justifie le non? Est ce que B. a été suffisamment convaincant? Qui est-ce qui pense oui, maintenant? Tout le monde est d'accord! Bien, alors, comment sont ces deux nombres, B.?
87 B : Ils sont différents
88 Sébastien : Ils ne sont pas différents, ils sont opposés!
89 P : Ah, deux nombres opposés, sont-ils différents? C'est vrai que ça c'est une bonne question.

90 E : Oui.

91 P : Sébastien.

92 S : Oui, mais c'est particulier.

93 P : Oui, mais c'est particulier. Vas-y, explique.

94 S : Eh bien ils sont opposés.

95 P : Ils sont opposés

96 P : Bien alors, est-ce qu'on pourrait peut-être dire ce que veut dire différent, peut-être. Parce que là, on n'y est peut-être pas encore. Différent, Mohamed, ça veut dire quoi?

97 M : Il n'a pas la même valeur.

98 P : Il n'a pas la même valeur, oui.

99 E : Et pas le même signe.

100 P : Et pas le même signe?

101 E : Non!

102 P : Comment est-ce qu'on pourrait dire autrement qu'ils sont différents? Comment est-ce que j'aurais pu dire? Deux nombres..., qu'est ce que vous connaissez bien comme vocabulaire qu'on pourrait utiliser?

103 E : Unique. Sont chacun unique.

104 P : Un nombre unique. Sont ch....

105 E : Inégal.

106 P : Oui, ils ne sont pas égaux. Deux nombres qui ne sont pas égaux, d'accord? Bon, alors, si on prend eux nombres opposés est-ce qu'ils sont égaux, les nombres opposés?

107 E : Non.

108 P : Non, toujours, d'ailleurs? Est-ce que chaque fois qu'on prend deux nombres opposés, chaque fois ils sont inégaux?

109 E : Si.

110 P : Si. Est-ce qu'il y a peut-être des cas particuliers?

111 E : Zéro.

112 P : Zéro, d'accord. C'est bien. Donc, deux nombres différents ça voulait dire deux nombres qui ne sont pas égaux, peuvent-ils avoir le même carré, oui, on l'a vu dans le cas, où les nombres sont opposés. D'accord.

113 P : Les nombres suivants sont-ils des carrés de nombres entiers? Alors on va commencer, chacun, vous me le donnez. *Montre 40.*

114 P : Non, tu n'as pas trouvé que c'était le carré d'un nombre entier. Tout le monde est d'accord? Si vous n'êtes pas d'accord vous levez le doigt. Alors, je barre au fur et à mesure? Bien. *Montre 9.*

115 L: Oui.

116 P : Mais tu me justifies.

117 L : Egale trois au carré.

118 P: Egale trois au carré. S i vous n'êtes âs d'accord vous levez le doigt.

119 E : Ou moins trois au carré!

120 P : Ou moins trois au carré. Parce que vous avez fait la question précédente. Bien. *Montre 16.*

121 P : Non, moins seize, parce que c'est un nombre négatif. Très bien, vous êtes d'accord?

122 E : Oui.

123 P : *Montre 0*. Michaël?

124 M : Oui, c'est le carré de zéro.

125 P : C'est le carré de zéro, c'est bien. Ensuite, Marlène? *Montre 25/4.*

126 M : C'est le carré de cinq demi.

127 P : De cinq demi, comment je l'écris? Marlène, comment je l'écris? Cinq demi entre parenthèses au carré. Qui est-ce qui a pensé à mettre la parenthèse? *écrit (5/2)2* Parce que dans les rangs, en passant, j'ai vu qu'il y en avait certains qui avaient oublié. *Montre 1.*

128 P : Stéphanie? C'est le carré de un. Ensuite? *Montre 400.*

129 P : Laurent? Tu n'as pas trouvé. Jonathan? Tu n'as pas trouvé non plus? Olivier?

130 O : Vingt au carré.

131 P : Vint au carré, tout le monde est d'accord?

132 P : Oui, bien, ensuite, (10^5) Sébastien? Tu n'as pas trouvé. Ensuite..., ça veut dire que tu répondrais plutôt non? Boudjedal? Ludovic? Qui a trouvé, là? Stéphanie, qu'est-ce que tu réponds? Tu réponds non.

133 S : Non, je n'ai rien dit, je n'ai pas trouvé.

134 P : Tu n'as pas trouvé. D'accord. Qui est-ce qui peut se prononcer ou pour oui ou pour non? Lise?

135 L : Non, parce qu'il y a cinq zéro....

136 P : Alors ça fait combien ce nombre là?

137 E : Cent mille.

138 P : Cent mille. Cent au carré, ça fait combien?

139 E : Dix mille.

140 P : Dix mille, voilà, il y a un nombre pair de zéros. Bien. … Zéro virgule zéro quatre, Vanessa!

141 V : Zéro virgule deux.

142 P : Zéro virgule deux?

143 V : C'est pas un nombre entier.

144 P : D'accord, *P barre 0,04* bien, ensuite, on en était à neuf exposant dix, Mohamed, vas-y.

145 M : c'est un nombre pair.

146 P: Est ce que c'est un nombre pair? Neuf exposant dix est ce que c'est un nombre pair?

147 M : c'est un exposant pair.

148 P : Un exposant est pair, donc pour toi ça prouve que c’est le carré d’un nombre..., vas-y, explique nous, parce que je ne sais pas si tout le monde est convaincu. Tu n’as pas trouvé? Sébastien, tu veux lever le doigt? Boudjedal?
149 B. Et bien si je fais neuf exposant cinq au carré, et bien, ça fait....
150 P : Alors, neuf exposant cinq, oui,
151 B : Au carré.
152 P : Le tout au carré... *écrit* $(9^5)^2$
153 B : Ça fait, neuf exposant dix!
154 P : est ce que ça c’est égal à neuf exposant dix?
155 E : Non!
156 P : Non, qui est ce qui pense qu’il y a égalité, là?
157 *écrit* $9^{10} = (9^5)^2$
158 E : Si, si quand on fait par exemple, neuf exposant cinq fois neuf exposant cinq.
159 P : Alors, écoutez donc ce qu’il vous explique. Neuf exposant cinq fois neuf exposant cinq....
160 J : Egale neuf exposant cinq plus neuf exposant cinq.
161 P : Qui est d’accord avec ce que dit B.? Une personne d’accord. Qui n’est pas d’accord? Jonathan, pourquoi tu n’estpas d’accord? Oui, tu dis que c’est quand il y a une addition? Vas-y donne moi un exemple, qu’est-ce qui n’est pas juste là dedans, pourquoi, Jonathan?
162 J : Et bien, la multiplication.
163 P : Ici là le fait qu’il ait mis un multiplier, toi tu préférerais mettre un plus. Tu mettrais, neuf exposant cinq plus neuf exposant cinq, ça se serait égal à neuf exposant cinq, le tout au carré?
164 E : Non, non!
165 P : Est-ce qu’il peut finir son explication! Vas y! Non, tu ne veux plus mettre ça? Bon. Ensuite, Agnès.
166 A : Je ne suis pas d’accord avec neuf exposant cinq au carré
167 P : Ça tu n’es pas d’accord! Pourquoi est ce que tu n’es pas d’accord avec cette écriture, s’il te plaît? Olivier?
168 O : Parce que là on fait le carré de neuf exposant cinq….
169 P : Oui, on fait le carré de neuf exposant cinq, et B. nous dit, ça fait neuf exposant dix.
170 E : Non, ça fait quatre vingt un exposant vingt cinq
171 P : Qui pense que B. a raison? Qui pense qu’il n’a pas raison? Bon, pour une fois, ça se répartit bien. Jean -Frédéric qu’est ce que tu en penses? Chut! on s’écoute! Sébastien, ferme ton livre, ce n’est pas le moment! Oui!
172 J-F : Trois exposant cinq, ça serait égal à neuf exposant dix.
173 P : Alors attends, j’écris, trois exposant cinq...
174 E : Au carré!
175 P : Trois exposant cinq, le tout au carré, c’est ça qui doit faire neuf exposant dix? Bien, alors, ce qu’on va faire, c’est que ça on va le garder en suspens jusqu’à demain. … on va essayer de savoir, pour demain, je l’ai marqué dans un coin du tableau, si jamais j’oublie, on essaye d’ici demain, de justifier ou de contredire si neuf exposant dix ça fait bien ça, d’accord? On se le garde pour demain? Bien. Alors, on met un point d’interrogation ici .
176 *P écrit au tableau* $9^{10} = (9^5)^2$ *?*
177 $9^{10} = (3^5)^2$ *?*
178 P: Vous prenez votre cahier de cours. Sébastien tu ne réponds pas à la question. Si c’est facile, tant mieux, ça veut dire que pour toi la réponse est claire, mais je ne crois pas qu’elle soit aussi claire pour tout le monde. Donc je veux que tout le monde ait le temps de réfléchir ce soir. Bien, ça veut dire que la question n’est pas si facile que ça. Sébastien, je veux que chacun ait le temps d’y réfléchir calmement, pour que chacun puisse expliquer l’une ou l’autre solution.
179 P : Bien, alors, on prend une nouvelle page dans le cahier. Je ne sais pas, je ne donnerai pas la réponse, c’est vous qui me la donnerez demain. Bien, mettez un titre. A votre avis, quel sera le titre?
180 E : Racine carré!
181 Stéphanie : Ca s'écrit comment ?
182 E : ça s'écrit pas !
183 M : C'est mignon !

A partir d'ici, Pécrit au tableau ce que les élèves doivent copier sur leur cahier tout en commentant. On note ci-dessous en gras ce que P écrit au tableau, parmi tout ce qui est enregistré)

184 P : Bon, **RACINE CARRÉE**. Donc aujourd’hui, on va vraiment introduire cette notion de racine carrée.
185 P : Grand un: **I- Notion de racine carrée** et d’abord, on va écrire, petit a: **a- Rappel sur les carrés**. A l’occasion de l’exercice précédent, nous avons eu l’occasion de rappeler deux propriétés sur les carrés. Essayez de vous les redonner dans votre tête, ces deux propriétés, ce qu’on a eu l’occasion de dire à propos des exercices. Vous levez le doigt quand vous les avez trouvés. Stéphanie, qu’est-ce qu’on a dit, à propos des carrés?
186 S : Le carré d’un nombre est toujours positif.
187 P : Le carré d’un nombre est toujours positif, oui, et puis? Abdil ? On a dit autre chose.
188 A : Le carré d'un négatif est toujours positif
189 P : Le carré d’un nombre négatif, oui, mais je pense que là, c’est une partie de ce qu’a dit Stéphanie. Autre chose. Ce sont des nombre opposés, oui Stéphanie, vas y.
190 S : Le carré d’un nombre négatif est l’opposé du nombre positif.

191 P : Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du nombre positif. Vous êtes d'accord? Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du nombre positif ?

192 E : Du carré du nombre positif.

193 P : Est l'opposé du carré du nombre positif. Répète, parce qu'apparemment, ça les a endormis. Vas y. Stéphanie.

194 S : Le carré d'un nombre négatif, est l'opposé du carré du nombre positif.

195 P.: Qui est d'accord avec cette phrase? Quatre personnes. Les autres sont profondément endormis.

196 E : C'est bon.

197 P : C'est bon, qui nous donne un exemple de ce que vient de dire Stéphanie? Sébastien.

198 S : Le carré de moins cinq c'est vingt cinq et le carré de cinq c'est vingt cinq.

199 P : Le carré de moins cinq c'est vingt cinq et le carré de cinq c'est vingt cinq aussi, donc, le carré du nombre positif est l'opposé du carré du nombre négatif.

200 E : Non, non!!!!!

201 P : Ah, bon! Alors, est ce que vous êtes toujours d'accord avec ce que disait Stéphanie?

202 E : Elle a mal dit.

203 P : Elle a mal dit. Bon, et bien alors reprenez, c'est l'occasion, c'est bien ce que j'attends, moi ce que j'attends c'est la reformulation. Vincent.

204 V : Le carré d'un nombre négatif est égal au carré de l'opposé de ce même nombre.

205 P : Est égal à l'opposé de ce même nombre. Qui est d'accord?

206 E : Au carré!

207 P : Est-ce que quelqu'un pourrait nous trouver une formulation un petit peu plus facile? Le carré du nombre négatif est égal au carré de l'opposé de ce nombre. Est-ce qu'on peut trouver autre chose? Raphaël, on ne t'a pas entendu encore aujourd'hui, qu'est-ce que tu proposes? Rien du tout! Rien, tu as suivi ce qu'on faisait quand même? Alors, Vincent, comment formuler autrement?

208 V : Les carrés de deux nombres opposés sont égaux.

209 P : Voilà, il fallait tout simplement dire ça, quand on prend deux nombres opposés les carrés sont les mêmes. Est-ce que tu es d'accord Stéphanie, c'était ce que tu voulais dire? Ce que tu avais dit n'est pas juste, hein. Tu as reconnu pourquoi c'était faux? Bien.

210 P : Alors on met un exemple qui était celui là, par exemple. Pour que vous l'ayez bien en tête. Moins cinq au carré, égale vingt cinq,

211 *P écrit au tableau* $\mathbf{(-5)^2 = 25}$ $\mathbf{5^2 = 25}$

212 P : est ce que la parenthèse est importante ici, ou bien....?

213 E : Oui, oui!

214 P : Est ce qu'on pourrait l'enlever?

215 E : Non, pas là!

216 P : Chut! Mohamed!. Laissez le parler. Pourquoi c'est important? Olivier?

217 O : Là, c'est moins cinq qui est au carré.

218 P : C'est moins cinq qui est au carré, très bien! D'accord. Autrement, si on enlève la parenthèse? Ce serait seulement cinq qui serait au carré. Est-ce que tout le monde est d'accord, là. Bien moins cinq au carré égal vingt cinq, cinq au carré égal vingt cinq, vous mettez les deux propriétés en couleur, en dessous. **Un carré est toujours positif**, et, deuxième propriété, c'est: **Deux nombres opposés ont le même carré.** Ça y est? Non, pour l'instant, vous.... Donc, moins cinq a pour carré vingt cinq et cinq a pour carré vingt cinq.

219 *P écrit au tableau* **-5 a pour carré 25** **5 a pour carré 25.**

220 E : Non! C'est faux! *(plusieurs élèves : le carré de moins 5 c'est moins vingt cinq!)*

221 P : Ah! Vous n'êtes pas d'accord! Oui?

222 E : Si vous mettez moins cinq sans parenthèses, ça va faire moins vingt cinq.

223 P : Pour l'instant, je n'ai rien mis, vous voulez que je mette une parenthèse, là.

224 E : Oui!

225 P : Elle ajoute une parenthèse à la ligne du haut, ce qui donne

226 *P écrit au tableau* **(-5) a pour carré 25** **5 a pour carré 25**

227 P : Ça vous rassure?

228 E : Oui!

229 P : Et avant c'était faux?

230 E : Non! Si!

231 P : Alors au lieu de dire..., c'est pas celui qui crie plus fort, non, oui, vous vous exprimez! Lise?

232 L : C'est pas faux, parce que, là, on ne sait pas, c'est pas *(inaudible)*, c'est le nombre.

233 P : On s'intéresse à moins cinq. Moins cinq, pour l'instant, il n'y a pas de calcul avec moins cinq, donc, qu'il y ait une parenthèse ou qu'il n'y ait pas de parenthèses, je considère moins cinq. Donc, que je l'écrive comme ça, ou que je l'écrive sans parenthèse, vous êtes d'accord?

E : Oui!

234 P : Par contre si je mets un carré, comme je veux considérer le carré de moins cinq je suis obligée de mettre une parenthèse. Est ce que vous êtes d'accord avec ce qui est au tableau? Oui? Bien! Alors, donc, on dit, moins cinq a pour carré vingt cinq et cinq a pour carré vingt cinq aussi.

235 P : La racine carré donc, on va le considérer dans l'autre sens, mais si on y réfléchit, on va avoir, deux racines carrées . La racine carrée, si on regarde ici au tableau, donc on va s'intéresser seulement à la racine carrée positive. Olivier tu es encore avec nous, là? C'est à dire qu'ici, si on dit cinq a pour carré vingt cinq, on dira que vingt cinq a pour racine carrée cinq.

Bon, alors, ce n'est peut-être pas très astucieux d'avoir mis dans ce sens là, c'est plus facile de dire: vingt cinq est le carré de cinq et donc cinq est la racine carrée de vingt cinq. Quand vous serez au lycée, vous vous intéresserez aux deux racines carrées, celle qui est positive et celle qui est négative. Mais c'est vrai que nous, on va s'intéresser à celle qui est positive, et on va lui donner un symbole, à celle qui est positive, elle va se noter $\boxed{\sqrt{25}}$, voilà, ça ce symbole, ça se lit, radical. Hein, vous pouvez dire, radical de vingt cinq, ou on dit racine carrée de vingt cinq. C'est le nom...D'accord? Un petit peu comme quand on parle des diviseurs et des multiples, quinze est multiple de trois, et trois est diviseur de quinze. Il faut voir, dans un sens et dans un autre. Donc ici, vingt cinq est le carré de cinq, donc cinq est la racine carrée de vingt cinq. Vous avez compris? Qui donne un exemple? Un autre. Allez, tu utilises ce vocabulaire, là. Allez qui se lance, là?

236 E : Quatre vingt un est le carré de 9 et neuf est la racine carrée de quatre vingt un.

237 P : Est la racine carrée de quatre vingt un. Oui, Vanessa, tu nous en donnes un autre? Oh, mais il y en a plein, j'espère, non? Mohamed!

238 M : Quatrante neuf est le carré de sept, sept est la racine carrée de quarante neuf.

239 P : Oui, Sébastien.

240 S : Dix puissance cinq est le carré de puissance deux, non!

241 P : On va en rester à des choses simples, de façon à ne pas avoir...., on reste dans le numérique pourl'instant, pour apprendre à les.... Vas y, Agnès.

242 A : trente six est le carré de six, six est la racine carrée de trente six

243 P : D'accord. Alors vous voyez qu'il y a quelque chose là, où il faut faire attention, c'est que dans le mot, racine carrée, il y a ce mot, carré, voyez, pourtant, on voit le carré, alors, c'est vrai que souvent les élèves ils arrivent à mélanger le carré et la racine carrée, à cause de ce mot carré, qui apparaît à l'intérieur. Donc, il faut bien que vous fassiez la différence. Alors, cette racine carrée, donc qui est un nombre positif, on a dit qu'on s'intéresse aux nombres positifs, on le nomme, racine carrée, donc on va noter, racine carrée de vingt cinq égal cinq. $\sqrt{25}=5$ Pourquoi? Pourquoi est-ce que racine carrée de vingt cinq est cinq?

244 E : Parce que cinq au carré est égal à vingt cinq!

245 P : Parce que cinq au carré est égal à vingt cinq. D'accord? Oui, vous pouvez le marquer en dessous.
$\sqrt{25}=5$ car $5^2 = 25$

246 P : Alors, vous prenez votre cahier de brouillon, vous gardez votre cahier de cours. Pour l'instant on n'a donné que des racines de nombres qui sont entiers. Est-ce que, par rapport à ce que j'ai dit, on pourrait le donner, par exemple, pour un nombre décimal?

247 E : Non! Oui!!!

248 P : Qui nous donne un exemple avec un nombre décimal ? Stéphanie, alors vas y tu nous dis la même chose qu'on a dit tout à l'heure, tu passes au carré, ensuite tu passes à la racine.

249 S : Le carré de zéro virgule zéro quatre est zéro virgule deux.

250 P : Le carré de zéro virgule zéro quatre est zéro deux? Oui,...

251 E : Et zéro deux au carré égale zéro virgule zéro quatre.

252 P : C'est plutôt, le carré de zéro deux.... *écrit* $(0,2)^2 = 0,04$

253 P : Mohamed, vous n'avez pas l'air d'avoir trop réagi, hein, sous prétexte que c'était Stéphanie qui répondait, alors, oui, vas y est-ce que ça c'est bon là? Qui est d'accord avec ce qui est au tableau? *(10 doigts)* Alors, maintenant, qui est la racine de qui? Stéphanie, vas y.

254 S : La racine de zéro virgule zéro quatre est zéro virgule deux.

255 E : on s'embrouille, madame!

256 P : Est zéro virgule deux, vous êtes d'accord avec ce qu'elle a dit? La racine de zéro virgule zéro quatre c'est zéro virgule deux? Qui est d'accord avec ça? Qui ne sait pas?

257 E : Mais si!

258 P : Ce n'est pas si évident que ça, hein!

259 E : Le plus grand nombre est la racine carrée du...

260 P : Alors ça va avec les plus grands nombres? On reconnait qui est la racine avec le plus grand nombre.

261 E : Oui! Non!!!!

262 P : Alors qui veut dire? Donc, le carré de zéro virgule deux est zéro virgule zéro quatre? On est tous d'accord?

263 E : Oui!

264 P : Comment est ce qu'on pourrait écrire en symbole mathématique ça?

265 E : Zéro virgule deux au carré...

266 P : Zéro virgule deux au carré est égal à zéro virgule zéro quatre. Tout le monde est d'accord, là? Oui, alors, maintenant, avec la racine carrée. Racine carrée de zéro virgule zéro quatre est zéro virgule deux. Qui est d'accord avec ça? Tout le monde en est sûr?

267 E : Oui!

268 P : Alors, je l'écrirai la racine carrée de zéro virgule zéro quatre est égal à zéro virgule deux. *écrit*
$\sqrt{0,04} = 0,2$ On est d'accord? Oui?

269 P : Avec zéro virgule un! Tiens! Faites moi chacun sur votre brouillon avec zéro virgule un. Oui, vous prenez le carré et puis après, vous marquez quelle est la racine. Sur votre brouillon! Alors, si on veut l'utiliser avec une phrase comme on a donné, soit vous le mettez avec le symbole mathématique, apparemment ça vous trouble moins.

270 E : Madame, pour moi ce n'est pas clair, il faudrait écrire alors …

271 P : C'est pas clair, pour lequel?

272 E : La racine carrée de 0,2 ; sinon on mettrait racine carrée de cinq est égal à vingt cinq!

273 P : Racine carrée de cinq est égal à vingt cinq?

274 E : Non!

275 P : Toi, tu dis, si on écrit ça, alors il faudrait écrire ça? Qu'est ce que tu penses, dans ta tête?

276 E : Parce que le carré de...

277 P : Est-ce que c'est parce qu'il y a un nombre qui est plus petit que l'autre? Pourquoi est-ce que racine carrée de zéro virgule quatre c'est zéro deux? Agnès? Parce que zéro deux au carré ça redonne zéro virgule zéro quatre. Donc, ça te va là? Oui, alors, allez-y vite pour zéro un.

278 P : Donc zéro virgule un au carré ça fait combien? Zéro virgule zéro un. Bien, alors maintenant qui me dit qui est la racine de qui? Il y a des élèves que je n'ai pas du tout, du tout entendu! Raphaël? J'avais dit que c'était sans la calculatrice, pour l'instant. La calculatrice, sera indispensable demain. Bien, alors, qui me dit? C'est toujours les mêmes qui lèvent le doigt! Sébastien?

279 S : La racine carrée de zéro virgule zéro un est égale à zéro virgule un.

280 P : Qui est d'accord avec ça? Oui, tiens, alors,répète et les autres écoutent. (*rien n'est écrit au tableau)*

281 S : La racine carrée de zéro virgule zéro un est égal à zéro virgule un.

282 P : La racine carrée de zéro virgule zéro un est zéro virgule un. Qui est d'accord? Qui n'est pas d'accord? Mohamed? Alors, maintenant que je te donne la parole..., tu lui coupes la parole au besoin, mais... Qui donne un autre exemple? Avec des fractions, tiens! Alors, A., on écoute bien l'exemple, là.

283 A : La racine carrée de quarante neuf sur vingt cinq est égal à sept sur cinq.

284 P : Bien, qui me donne d'autres exemples, là? Vous êtes d'accord avec ce qu'il a dit?

285 E : Oui!

286 P : Bien, allez, un nombre décimal ou.... Olivier?

287 O : La racine carré de trente six sur vingt cinq est égal six sur cinq.

288 P : La racine carré de trente six sur vingt cinq est égal à six sur cinq. Oui, je vous donne un nombre, vous me dites si vous pouvez trouver la racine carrée ou pas. D'accord? Bien, quarante?

289 E : Non!

290 P : Vous levez le doigt! Quatre mille?

291 E : Non!

292 P : Qui répond oui, à la racine de quatre mille? Est ce qu'on peut trouver la racine de, vous réfléchissez après, on demande, hein, est ce qu'on peut trouver la racine carrée de zéro virgule zéro trente six?

293 E : Oui! Zéro cent quatre vingt neuf sept cent mille....

294 P : Qui répond oui ? Qui répond non? Qui ne répond pas ?

295 P : Qui veut expliquer? Jean -Stéphane?

296 J.S : Je ne sais pas, par exemple, à zéro trente six, il faudrait que ce soit zéro virgule zéro zéro trente six...

297 P : Toi, tu prendrai zéro virgule zéro zéro trente six, et à ce moment là, tu dirais...

298 J.S : Ce serait, zéro virgule six.

299 P : Alors comment tu l'écrirais? Comment je l'écris, avec le symbole qu'on a tout juste appris, et qu' on notera demain dans le cahier de cours?

300 J.S : Racine carrée de zéro virgule zéro zéro...trente six, est égal à zéro virgule six

301 *P écrit* . $\mathbf{\sqrt{0,0036} = 0,6}$

302 E : Zéro virgule zéro six!

303 *P corrige au tableau :* **0,06**

304 P : Qui est d'accord avec ce qui est au tableau? Qui n'est pas d'accord avec ce qui est au tableau? Ah, tu n'es plus d'accord avec ce que tu as dit?

305 J.S : Non, mais......

306 P : Ici, est-ce qu'on peut trouver la racine carrée de zéro virgule zéro trente six… **racine de 0,036**… Lise?

307 L : Non, parce qu'il y a trois chiffres après la virgule, et il faut.....

308 P : On ne peut pas trouver de nombre..., on ne peut pas trouver de nombre dont le carré est égal à zéro virgule....

309 E : zéro trente six.

310 P : Zéro trente six. Par contre, zéro virgule zéro six a pour carré zéro virgule zéro zéro trente six. Alors, dernière question, est ce que le nombre ici et celui là (*montrant 0,06 et 0,0036*), est ce qu'il y en a un qui est forcément plus grand que l'autre ou pas? Est ce que dans le cas où on donne un nombre, la racine d'un nombre, il y en a un qui est plus grand que l'autre, par exemple?

311 Es : Oui, oui! Non,non!

312 P : Est ce que ça, ça peut être un moyen de vérifier, par exemple....

313 Sébastien : ça dépend..., Si, parce que...

314 P : Oui, Sébastien?

315 S : Quand c'est inférieur à un, la racine carrée est plus grande que le carré, et quand c'est supérieur à un, c'est le carré qui est plus grand que la racine carrée.

316 P : Vous êtes d'accord avec ce qu'il a dit?

317 E : Oui.

318 P : En tout cas, ce qui fait la limite, c'est le un. Vous allez prendre votre cahier de texte, pour demain. Pour demain, inventer une dizaine d'exemples pour lesquels il y ait des nombres entiers, des nombres décimaux, des nombres fractionnaires. Plus exercices 1 et 3 p. 34. Notez qu'il faudra apporter la calculatrice. [FIN SEANCE 1]