

**Comment lire une expression fonctionnelle? Ecriture  
fonctionnelle, formation de noms et invention  
conceptuelle chez Frege.**

Sébastien Gandon

► **To cite this version:**

Sébastien Gandon. Comment lire une expression fonctionnelle? Ecriture fonctionnelle, formation de noms et invention conceptuelle chez Frege.. *Revue d'Auvergne*, 2007, 2 (585), pp.63-72. halshs-00366724

**HAL Id: halshs-00366724**

**<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00366724>**

Submitted on 9 Mar 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comment lire une expression fonctionnelle ?

*Formation de noms et invention conceptuelle chez Frege.*

Sébastien Gandon  
Phier-UBP

## Logicisme et écriture des mathématiques

Les logicistes (Frege et Russell) ont eu une attitude pour le moins ambiguë vis-à-vis des faits d'écriture. Aucune autre école de pensée n'a été aussi loin dans la séparation des questions de contenu et des questions de forme à l'intérieur des mathématiques. En effet, Frege comme Russell prétendaient tous deux, d'une part, que tous les concepts mathématiques étaient exprimables dans une seule langue logique, et d'autre part, que tous les théorèmes mathématiques étaient prouvables à l'intérieur de leur système. Cette réécriture logique, si elle modifiait la forme des concepts et des théorèmes classiques, n'affectait absolument pas, aux yeux des deux philosophes, le contenu des notions et des propositions. En forçant les textes et en s'autorisant un anachronisme, on pourrait dire que l'ensemble des théories mathématiques n'étaient, pour eux, au fond, qu'un développement de la théorie des ensembles. Le projet logiciste présupposait la possibilité de distinguer ce qui relève du contenu d'un concept ou d'un théorème, et ce qui relève de sa forme ou de son écriture (de sa « typographie »). Les logicistes visaient à une reconstruction de la substance des mathématiques – non à une élaboration de leur mode de présentation.

Mais cette première attitude, très cavalière vis-à-vis des faits de notation et de traduction, ne représente qu'une face de la question. Pour convaincre du bien fondé de leur programme, Frege comme Russell devaient montrer que le système permettait la définition de tous les concepts mathématiques fondamentaux et la démonstration des principaux théorèmes. Ils devaient notamment se donner les moyens de reconnaître, et d'exclure, toute référence dans une démonstration à un contenu extra-systématique. Pour ce faire, les logicistes explicitèrent l'ensemble des règles de formation, règles

de définition, et règles de dérivation, de façon à donner aux lecteurs les moyens de vérifier par eux-mêmes qu'aucun élément étranger ne se glissait en contrebande dans les démonstrations. Frege est l'auteur qui a peut-être été le plus loin dans cette direction, puisque même Russell confesse ne pas comprendre, parfois, la différence qu'il fait entre la prémisse et la conclusion d'une preuve des *Grundgesetze*.

Si donc, pour les logicistes, la production du savoir mathématique ne devait rien à l'invention de nouvelles écritures, il est en même temps vrai que la réussite du logicisme dépendait de la maîtrise du jeu des symboles à l'intérieur d'un système unique de notation. Pour le dire autrement, Frege comme Russell, en voulant dégager la substance mathématique de tous les artifices notationnels, furent naturellement conduits à accorder une attention extrême à l'usage des symbolismes. Ironiquement, cette exigence et ce souci méthodologique contribuèrent à souligner à quel point la modification d'une forme scripturale est fondamentale dans la conduite d'une preuve – et ce, contrairement à la doctrine « officielle » selon laquelle les modifications typographiques étaient accidentelles et ne relevaient que de la prise en compte des contraintes éditoriales. Un des intérêts de la position logiciste provient selon nous précisément de ce paradoxe : manifester, dans une forme d'écriture, le caractère complètement contingent et non essentiel dans le raisonnement mathématique des formes d'écriture.

Je concentrerai mon analyse sur Frege. L'idée développée dans le premier de ses écrits logiques, la *Begriffsschrift*, est de généraliser la notation fonctionnelle, employée en analyse, afin de réorganiser la logique aristotélécienne traditionnelle, et de développer sur cette base une théorie purement logique des mathématiques. Dans la première partie de son opuscule, Frege expose les éléments fondamentaux de son nouveau langage (il montre notamment, dans la conclusion, comment exprimer le « carré » logique aristotélécien). Il énumère, dans la seconde partie, les différentes lois logiques fondamentales, et montre comment, à partir du *Modus Ponens*, les dérivations des autres propositions peuvent être conduites. Enfin, dans la dernière partie, il expose une théorie pure des séries. Le choix de l'objet (les séries) a ici une grande importance : Frege cherche à montrer que, contrairement à ce que soutenait Kant, une intuition synthétique a priori du temps n'est pas contenue dans la notion de série. Ce qui m'intéressera plus particulièrement, c'est l'usage que Frege fait, tout au long du texte, de la notation fonctionnelle, et (mais les deux choses sont, comme on le verra, intimement liées) des règles de substitution. Pour expliquer ce que j'ai en tête, je vais faire un détour et prendre un exemple qui n'a, au premier abord, que peu de rapport Frege : celui, en analyse, de l'intégration par partie.

### Un point de départ : l'intégration par partie

La règle de l'intégration par partie s'énonce ainsi : soient  $u$ ,  $v$  deux fonctions (réelles) définies sur un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbf{R}$  et pourvues de dérivées continues, on a :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ou, sous forme condensée :

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du .$$

Par exemple  $\int \ln x dx$  donne lorsqu'on l'intègre par partie :

$$x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C.$$

Pour obtenir ce résultat, on a posé  $u(x) = \ln x$ ,  $v(x) = x$ .

Trouver la dérivée d'une fonction déterminée est généralement beaucoup plus facile que trouver une de ses primitives. Pourquoi une telle différence ? Dans le premier cas, nous savons quelle règle de dérivation employée *en considérant la façon dont la fonction est constituée*. Par exemple, pour dériver  $x \cdot \ln x$ , il suffit d'appliquer la règle du produit, et les formules pour la dérivation du logarithme (ce qui donne au final  $1 + \ln x$ ). Pour être appliquée, la règle d'intégration par partie nous oblige, elle, à *réorganiser la structure de l'expression considérée*. Cette réorganisation s'opère, dans l'exemple pris, en posant  $u(x) = \ln x$ ,  $v(x) = x$ . Il n'est pas évident de voir immédiatement dans le logarithme un produit de deux fonctions, de  $\ln x$  d'une part, et de la fonction constante qui à tout  $x$  associe la valeur 1, de l'autre. Alors que l'application des règles de dérivation épouse la structure donnée de l'expression, l'emploi des règles d'intégration nous oblige à recomposer la fonction, de façon à la faire entrer dans la configuration imposée. C'est ce travail préparatoire, où l'on redessine les contours de l'expression, qui rend la recherche de primitive plus difficile que la recherche de dérivée.

Ce contraste entre les deux principales opérations du calcul différentiel nous conduit directement vers ce que Frege considère comme le cœur de la notation fonctionnelle. Il pourrait sembler que l'écriture fonctionnelle est

compositionnelle, c'est-à-dire que l'identité d'une fonction est déterminée par l'ensemble des fonctions qu'elle contient et par leur mode de combinaison. C'est, en un sens, le cas. Mais se contenter de cela nous fait rater ce qui constitue la spécificité de ce symbolisme : la possibilité de décomposer de multiples manières une même expression. La fonction simple  $\ln x$  peut être conçue comme un produit de fonctions ( $1 \times \ln x$ ) ; elle peut être également considérée comme un rapport de deux fonctions ( $\ln x / 1$ ) ; elle peut être traitée comme l'application de la fonction logarithme à une autre, ou au contraire comme l'application de la fonction identité à la fonction  $\ln x$  ; et ainsi de suite... Alors que la fonction est elle-même très simple, les possibilités de notation alternative sont très nombreuses. Autrement dit, en analyse, on n'a pas de fonction ultimement simple sur lequel on fonde l'ensemble de l'édifice ; ces fonctions élémentaires peuvent être elles-mêmes dotées, à volonté, d'une architecture extrêmement complexe.

Certaines décompositions pourraient paraître relever d'un goût pervers pour la complexité : décomposer  $\ln x$  en trois fonctions  $a(x) = x$ ,  $b(x) = \ln x$ ,  $c(x) = 1$ , selon le schéma  $a(b(x)/c(x))$  semble inutilement lourd. Il n'est cependant pas possible de préjuger de nos besoins ; de même que pour appliquer l'intégration par partie, il est nécessaire de considérer  $\ln x$  comme un produit, de même la résolution de certains problèmes pourrait nécessiter une telle décomposition. La puissance de l'écriture fonctionnelle se manifeste précisément dans sa souplesse, qui permet d'insérer la même formule dans des schémas déductifs extrêmement différents. La décomposition fonction/argument ne peut être séparée de la conduite d'une preuve ou de la résolution d'un problème. On n'a pas d'un côté la notation  $\ln x$ , et de l'autre la position de  $u(x) = \ln x$ ,  $v(x) = x$  ; écrire  $\ln x$ , c'est immédiatement rendre possible les multiples réécritures équivalentes de  $\ln x$ .

### **Le rôle des tableaux de substitution dans la *Begriffsschrift***

Revenons à Frege. Le philosophe voit parfaitement, dans la *Begriffsschrift*, le lien entre écriture fonctionnelle et possibilité de réorganisation de la proposition. Il introduit la notion de fonction au §9 de la première partie précisément en liaison avec la possibilité de décomposer de différentes manières une même *Satz*. Frege se montre également parfaitement conscient du fait que cette réorganisation est fondamentale dans la conduite des preuves. La possibilité d'analyser la même proposition différemment, explique-t-il, importe lorsque l'on déduit d'une proposition singulière une proposition générale. Que dans la proposition « Caton tua Caton », on extraie le prédicat « tuer Caton », ou le prédicat « être tué par

Caton », ou le prédicat « se suicider », ou la relation « tuer », est indifférent, aussi longtemps que l'on n'insère pas la proposition dans une preuve dont la conclusion est générale. Si l'on demande « quelqu'un s'est-il suicider ? », alors l'on ne pourra répondre à la question que si l'on remarque que le sujet et le complément d'objet sont les mêmes, c'est-à-dire que si l'on considère la proposition « Caton tua Caton » comme une instance de relation dont les deux places d'argument sont occupés par la même variable. On retrouve exactement ici la même situation que précédemment : le schéma d'intégration par partie est simplement remplacé par la règle qui permet, à partir de  $\forall x f(x)$ , d'affirmer que  $f(a)$  – où plutôt, par la règle qui, de  $f(a)$ , permet de déduire  $\exists x f(x)$ <sup>1</sup>. Le choix de la fonction  $f(x)$  n'est ni unique ni imposée par la proposition considérée.

Pour préciser à quoi correspond, dans la déduction, la fonction  $f(x)$ , Frege ajoute, à côté de ses dérivations, un tableau qui explicite quelles sont les substitutions effectuées. Ainsi, à côté de la démonstration que  $\forall x(g(x) \Rightarrow h(x)) \Rightarrow (g(a) \Rightarrow h(a))$ , Frege écrit :

$$\begin{array}{c|c} \forall x f(x) \Rightarrow f(c) & \\ \hline f(x) & g(x) \Rightarrow h(x) \\ c & a \end{array}$$

Ce symbole se lit ainsi : dans la preuve, la loi  $\forall x f(x) \Rightarrow f(c)$  est appliquée de façon à ce que à  $f(x)$  corresponde  $g(x) \Rightarrow h(x)$ , et au nom  $c$  corresponde le nom  $a$ <sup>2</sup>. Le tableau précise donc les substitutions réalisées, et ceci alors même qu'aucune règle générale de substitution n'est énoncée par Frege. On aurait cependant tort de voir dans ce dispositif une anticipation encore imparfaite de nos modernes règles de substitution pour le calcul du premier ou du second ordre. Selon Frege en effet, de telles règles sont superflues, car utiliser la notation fonctionnelle, c'est déjà indiquer quel type de substitution est envisagé et quel type de substitution est possible. Comme l'a très bien vu M. Dummett<sup>3</sup>, l'écriture en fonction et argument est toujours, chez Frege, la préparation d'une déduction – la réécriture d'une expression sous une autre forme n'étant que l'indication d'une autre possibilité de substitution et partant, d'une nouvelle démonstration. Le tableau qui accompagne les

<sup>1</sup> Car la première règle correspond plutôt au schéma de dérivation, dans la mesure où la fonction à instancier apparaît explicitement dans la proposition générale.

<sup>2</sup> Voir *Begriffsschrift*, §20.

<sup>3</sup> Voir sur ce point, M. Dummett, *Frege: Philosophy of Language* (London, Duckworth, 1971), chap. 2.

démonstrations de la *Begriffsschrift* ne nous donne pas une information supplémentaire, dont le lecteur serait dépourvu ; il explicite seulement ce qui est contenu dans les prémisses, à savoir *la façon dont*, pour les besoins de la preuve, *les propositions doivent être décomposées*. Le dispositif imaginé par Frege n'est qu'une indication prosodique ; il est en cela comparable aux annotations qu'inscrit, dans la marge des portées, le compositeur pour faciliter à l'interprète la lecture de tel ou tel passage de son morceau.

### Une comparaison avec la pratique contemporaine

Dans les *Grundgesetze* (l'ouvrage postérieur, dans lequel Frege effectue la démonstration des théorèmes arithmétiques à partir des prémisses logiques), ce type de tableau disparaît au profit d'un texte d'accompagnement en allemand dans lequel le philosophe-mathématicien précise comment les règles sont appliquées sur les prémisses. Cette modification s'accompagne de la formulation de règles de définition, explicitant quelles sont les limites de la réorganisation de la structure d'une proposition<sup>4</sup>. Mais la même idée travaille toujours, nous semble-t-il, la pensée fregéenne : il s'agit encore pour l'auteur de lier le fonctionnement de l'écriture fonctionnelle aux multiples réorganisations qu'elle rend possible. Il est notamment important de distinguer cette approche de celle aujourd'hui standard.

Prenons la présentation rigoureuse et simple, donnée par F. Rivenc, dans *Introduction à la Logique*<sup>5</sup>. Les règles de substitution ne sont pas ici considérées (comme c'est parfois le cas) comme des règles d'inférence mais directement « incorporées » dans la description métalinguistique des axiomes. Contentons-nous d'examiner le premier schéma distingué par l'auteur : «  $\forall x \varphi \Rightarrow (\varphi)x/t$ , si  $t$  (un terme quelconque) est librement substituable à  $x$  dans  $\varphi$  ». «  $\forall x \varphi \Rightarrow (\varphi)x/t$  » n'est pas une formule du langage-objet ; c'est une forme permettant d'engendrer un nombre infini d'axiomes, en substituant, selon des règles précises et stipulées dans le métalangage, à  $x$  un terme  $t$ . En quoi l'usage du métalangage (de la langue vernaculaire le plus souvent) se distingue-t-il ici de l'usage de l'allemand dans les *Grundgesetze* ? En quoi le statut de la règle de substitution employée ici n'est pas de même nature que le statut des règles de définition chez Frege ?

Ces deux questions sont difficiles, et demanderaient un commentaire serré de l'ouvrage de Frege. Il n'est pas question d'entrer ici dans ce genre

<sup>4</sup> *Grundgesetze*, §§29-33.

<sup>5</sup> F. Rivenc, *Introduction à la Logique* (Paris, Payot, 1989), p. 201-202.

de discussion. Nous ferons simplement ici une remarque qui manifeste l'écart entre l'approche aujourd'hui standard et celle de Frege.

Les divers problèmes de capture de variable, évités par la notion de « libre substituabilité », ne sont pas conçus, dans les *Grundgesetze*, comme des questions syntaxiques, mais directement comme des difficultés touchant à la notion de fonction. Ainsi, imaginons que l'on propose de substituer  $y$  à la variable  $x$  dans la formule suivante : (\*)  $\forall x \exists y Rxy \Rightarrow \exists y Rxy$  – nous dirions aujourd'hui que  $x$  n'est pas librement substituable à  $y$  parce que  $x$  est dans la portée d'un quantificateur  $\exists y$  qui « capture »  $y$  alors qu'il ne capturerait pas  $x$ . Frege raisonne d'une toute autre manière ; (\*) est une fonction de  $x$  ; or, la substitution de  $y$  à  $x$  modifie l'identité de (\*) parce qu'elle transforme (\*) en une proposition – donc,  $y$  n'est pas substituable à  $x$  en (\*). Plus précisément, si je ne peux pas remplacer  $x$  par  $y$ , ce n'est pas parce qu'une règle de syntaxe me l'interdit, mais parce que lorsque je crois effectuer cette substitution, ce n'est en réalité pas  $x$ , le signe de la place d'argument, que je substitue. Pour Frege, l'identité du signe est déterminée par la façon dont il s'insère dans la totalité de l'expression ; le symbole ici, ce n'est donc pas la seule marque «  $x$  », mais la marque «  $x$  » et le fait que cette marque ne soit pas capturée par un quantificateur «  $\exists y$  ». Quand je substitue  $y$  à «  $x$  », je modifie le rapport entre le quantificateur et «  $x$  », et détruis en conséquence une partie de ce qui, selon Frege, constitue l'identité du signe de variable lui-même. L'écriture fonctionnelle elle-même montre que la substitution de  $x$  par  $y$  dans (\*) est impossible. Pour Frege, l'articulation des signes est d'emblée fonctionnelle. Vue dans cette perspective, l'approche contemporaine paraît très curieuse : la construction d'une pure syntaxe consiste à détruire le rapport immédiatement fonctionnel qu'ont entre eux les symboles, pour, dans un second temps seulement, le reconstruire à partir de règles gouvernant les relations de concaténation entre marques physiques. Frege (comme le mathématicien ordinaire) ne se crève pas les yeux avant de lire et de manipuler les symboles : l'articulation en fonction et argument est première, et précède toute autre relation syntaxique.

Résumons. Il nous semble, même si une telle thèse nécessiterait une discussion bien plus serrée, que les *Grundgesetze* ne modifient pas vraiment la donne de la *Begriffsschrift* : si Frege, ici comme là, ne définit pas de règles de substitution, c'est parce que l'écriture idéographique, fonctionnelle, contient en elle la souplesse requise pour permettre une insertion optimale des expressions dans les schémas de preuve. Le lecteur de l'idéographie sait, sans avoir besoin de se référer à un ensemble de règles établies par ailleurs, quelles substitutions sont permises, lesquelles sont impossibles... et ceci, tout simplement parce qu'il sait lire. Décomposer une expression en une fonction et un argument, ce n'est en effet rien d'autre que se préparer à



substituer à cette fonction ou à cet argument une autre fonction ou un autre argument.

### Écriture et formation des concepts

Nous l'avons dit, le but de Frege, en édifiant son système, est de montrer que tout recours à une intuition est superflue en mathématique. Contrairement à ce que croyait Kant, il est possible de prouver l'ensemble des théorèmes de l'arithmétique élémentaire sans se référer à l'intuition pure du temps. Les lois logiques et le *Modus Ponens* contiennent tout ce qui est nécessaire à la dérivation des mathématiques. Mais en quel sens de « contenir » la logique contient-elle les mathématiques ?

Revenons à l'exemple de la dérivation par partie. Une fois armée de la règle, rien ne nous manque pour intégrer  $\int \ln x dx$ . Mais en même temps, il est tout à fait possible de connaître la règle d'intégration par partie sans être capable de l'appliquer au cas considéré. Et la remarque n'est pas seulement psychologique : quelque chose manque bien à celui qui connaît la règle  $\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du$ , et lit  $\int \ln x dx$  – quelque chose qui est contenu et que révèle, chez Frege, le tableau de substitution :

$$\begin{array}{l|l} u(x) & \ln x \\ v(x) & x \end{array}$$

Seul ce dernier symbole nous permet d'appliquer la règle à la formule considérée, en réorganisant le contenu de la formule, et en formant au besoin de nouvelles fonctions.

Le tableau de substitution a un statut ambigu : il n'est pas l'expression d'une nouvelle règle, mais est malgré tout indispensable à qui veut indiquer comment les règles logiques sont appliquées. Cette position intermédiaire peut être reliée à l'analyse du problème classique de la fécondité des preuves. Dans un passage très célèbre de la conclusion des *Fondements de l'Arithmétique*, Frege explique :

Kant a visiblement sous-estimé la valeur des jugements analytiques. [...] Kant semble penser qu'un concept est déterminé par une simple conjonction de caractères, or c'est la manière la moins féconde de construire des concepts. [...] Nous ne verrons pas [dans les définitions effectivement fécondes] une suite de caractères coordonnés mais une combinaison plus intime, je voudrais dire plus organique des

déterminations. Une image géométrique fera bien voir la différence. Si on se représente les concepts [...] par différents domaines d'un plan, au concept défini par la conjonction de ses caractères correspondra le domaine commun à tous les domaines représentatifs des caractères. Il sera délimité par des arcs de leurs frontières. Dans une définition de ce type, il s'agira donc – pour parler en image – d'employer les lignes préexistantes de manière inédite, afin de délimiter un domaine. Mais on ne fait rien apparaître d'essentiellement neuf. Tandis que les déterminations de concepts fécondes tracent des limites qui n'étaient pas encore données. On ne peut pas savoir d'avance ce qu'on pourra déduire ; on ne se contente plus de retirer de la boîte ce qu'on y avait placé. De telles déductions accroissent notre connaissance et il faudrait, si on veut être fidèle à Kant, *les tenir pour synthétiques*. On peut cependant les démontrer d'une manière purement logique : elles sont donc analytiques. Elles sont bien, en fait, contenues dans les définitions, mais elles le sont *comme une plante l'est dans la graine, non pas comme une poutre l'est dans la maison* (nous soulignons)<sup>6</sup>.

Relisons ce texte en le rapportant à ce que nous avons dit sur l'intégration par parties. Rien ne manque à celui qui connaît la règle pour obtenir la formule explicite de l'intégrale  $\int \ln x dx$ . Mais malgré tout, le schéma n'apprend pas à lui seul comment, dans un cas particulier donné, il doit s'appliquer – d'où l'importance du tableau. Tout n'est donc pas donné dans les prémisses (dans la fonction dont on cherche la primitive et la règle d'intégration) ; c'est seulement en voyant le tableau que le lecteur comprend la solution qui lui est présentée, et qu'il peut passer des prémisses à la conclusion. C'est pourquoi Frege peut affirmer que, dans une certaine mesure, si l'on voulait être fidèle à Kant, il faudrait tenir la déduction pour synthétique. Sur quoi fonder l'application du canevas de l'intégration par partie (par exemple), si ce n'est sur une « intuition » de la bonne décomposition de l'intégrale – « intuition » que l'étudiant de mathématiques a tant de peine à acquérir ? Le tableau fregéen serait précisément ce qui donne à cette « intuition » son expression<sup>7</sup>.

Quel est donc, pour Frege, le statut exact de l'information véhiculée par le table de substitution ?

La question est complexe, et Frege est partagé entre deux attitudes :

1) D'un côté, il est exagéré de comparer l'apport de telle table à l'apport de l'intuition pure a priori chez Kant. Les fonctions dégagées à gauche de la barre verticale ne sont que l'actualisation de ce qui est déjà potentiellement

<sup>6</sup> *Fondements de l'Arithmétique*, trad. Imbert (Paris, Seuil, 1969), p. 211-212.

<sup>7</sup> Sur ce point, voir Boolos, "Reading the *Begriffsschrift*", in *Logic, Logic, Logic* (Cambridge, HUP, 1998).

contenu dans les prémisses ; le tableau ne formule pas une nouvelle proposition, mais manifeste comment une loi générale peut être appliquée dans un cas particulier. Le tableau de substitution n'est pas une proposition du métalangage qui nous informe comment doit être décomposée une pure concaténation de signes simples ; les fonctions « créées », apparaissant à gauche du tableau, sont déjà implicitement présentes, « comme la plante l'est dans la graine », dans la notation fonctionnelle originelle.

2) Mais en même temps, la fonction des tables est fondamentale. En effet, comment manifester la façon dont une loi logique doit être appliquée dans une démonstration sans introduire des signes unifiant, dans le tableau, ce qui n'apparaissait pas de façon visible comme *un* composant de la formule de départ ? Comment dire que l'on substitue, dans la démonstration, telle ou telle expression à tel ou tel symbole, sans nommer ce qui est substitué, et donc sans introduire une marque dont l'unité matérielle indique qu'elle est *ce qui* est substituée ? La graine contient en puissance la plante, affirme Frege ; mais ce que la graine ne contient pas, c'est le dessin visible de la plante développée. S'il y a, dans les prémisses, tout ce qui est nécessaire pour parvenir à la conclusion, il n'y a pas en eux l'indication de la façon dont il convient de les organiser pour le voir. C'est en écrivant  $\ln x$  comme  $\ln x \cdot 1$ , puis en concevant 1 comme une fonction de  $x$ , que l'on peut parvenir, dans l'exemple élémentaire mentionné, à appliquer la règle d'intégration par partie.

### Les faits de prosodie

La question générale que pose l'analyse et la pratique fregéenne concerne la nature et l'expression de ce que l'on pourrait nommer les « *faits de prosodie* ». Si la notation fonctionnelle est, pour Frege, à ce point fondamentale, c'est précisément parce qu'elle permet une décomposition et recomposition du même contenu selon différents canevas. Les diverses structurations de la même totalité symbolique sont exprimées par les diverses organisations fonctionnelles. Autrement dit, on ne peut pas exprimer qu'une proposition doit être lue de telle façon, sans introduire de nouveaux signes, qui manifestent comment l'expression doit être articulée. Indiquer que « *Caton tua Caton* » est à voir comme une proposition dont le sujet est « *Caton* » et le prédicat est « *tuer Caton* » passe nécessairement, lorsque aucune perspective métalinguistique n'est admise, par l'introduction d'une fonction « *x tua Caton* » – introduction qui équivaut aux divers procédés graphiques que l'on peut employer pour indiquer que les deux derniers mots de « *Caton tua Caton* » doivent être pris ensemble (« *Caton (tua Caton)* », « *Caton tua Caton* », « *Caton TUA CATON* », ...). Un

symbole fonctionnel exprime, chez Frege, en plus de son contenu, *la façon dont il doit être lu*.

On l'a vu en commençant, Frege (comme Russell) se montre assez condescendant vis-à-vis des faits de notation : les questions typographiques sont officiellement du ressort de l'imprimeur, non pas du philosophe-linguiste. L'examen du fonctionnement de l'idéographie dissipe cette première impression. Parce que Frege n'adopte pas la perspective métalinguistique de Carnap (les substitutions ne sont pas gouvernées par des règles métalinguistiques), les introductions de nouveaux signes, dans la mesure où ils font ressortir une articulation inédite de la proposition, sont essentiels au développement des preuves. *Les variations « notationnelles », officiellement secondaires, jouent en réalité un rôle fondamental dans l'idéographie.*

Il y a donc bien une ambiguïté chez Frege vis-à-vis des faits d'écriture. Mais cette ambiguïté est à la fois très riche conceptuellement (le développement du système fregéen s'ajuste de façon cohérente à l'analyse fregéenne du concept de fonction) et très éclairante sur la façon dont raisonne le « *working mathematician* » (la difficulté des problèmes d'analyse provient, entre autres, de la difficulté qu'il y a à dégager l'articulation fonctionnelle adéquate).

---

## Références

- Boolos G., *Reading the Begriffsschrift*, in *Logic, Logic, Logic*, Cambridge, HUP, 1998.
- Dummett M., *Frege : Philosophy of Language*, London, Duckworth, 1971.
- Frege G., *Les fondements de l'arithmétique*, Paris, Le Seuil, (1884), 1969.
- *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Le Seuil, 1971.
  - *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Hildesheim, Georg Olms, (1879), 1964 – trad. fr. *Écrit sur le concept*, Paris, Vrin, 2000.
  - *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet*, Hildesheim, Georg Olms, (1893-1903), 1964.
- Gandon S., *Logique et langage – études sur le premier Wittgenstein*, Paris, Vrin, 2002.
- Rivenc F., *Introduction à la Logique*, Paris, Payot, 1989.
- Russell B., *Principia Mathematica*, Cambridge, CUP, 1927.
- *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Paris, Payot, (1919), 1991.