

# Algèbre, géométrie et loi d'intensité: l'enjeu de A Treatrise on Universal Algebra.

Sébastien Gandon

► **To cite this version:**

Sébastien Gandon. Algèbre, géométrie et loi d'intensité: l'enjeu de A Treatrise on Universal Algebra.. Chromatikon I, Annuaire de la philosophie en procès - Yearbook of Philosophy in Process, Presse Universitaire de Louvain, pp.12, 2005. halshs-00326492

**HAL Id: halshs-00326492**

**<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00326492>**

Submitted on 3 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ALGÈBRE, GÉOMÉTRIE ET LOI D'INTENSITÉ : L'ENJEU DE A TREATISE ON UNIVERSAL ALGEBRA.

Sébastien Gandon  
(PHIER, Université B. Pascal, Clermont-Ferrand)

*UA* a de quoi dérouter le lecteur de Whitehead. Par sa technicité d'abord. Certes, tous les ouvrages du philosophe sont, à des degrés divers, parsemés de références à des théories et des concepts scientifiques très élaborés ; mais l'exposition mathématique y est généralement subordonnée à une finalité métaphysique. Ce n'est pas le cas de la première œuvre de Whitehead : *UA* est explicitement conçu comme un livre de mathématiques, écrit pour des mathématiciens. Mais là n'est pas, cependant, la seule raison de sa difficulté. La tradition scientifique dans laquelle s'inscrit Whitehead en 1898 (celle du calcul géométrique, florissante au XIX<sup>ème</sup> siècle en Angleterre) ayant aujourd'hui disparu, même un mathématicien aurait actuellement du mal à rétablir l'objet de ce livre. Les autres écrits purement scientifiques du philosophe, ces *Traités* sur la géométrie de 1906 et de 1907 par exemple, ne présentent pas une telle singularité parce qu'ils s'inscrivent dans un courant encore vivant<sup>1</sup>.

Nous aimerions ici replacer l'ouvrage de Whitehead dans le contexte mathématique qui est le sien. Cette tâche n'a pas seulement un intérêt historique ; elle est le préalable à la détermination du projet scientifique de l'auteur, et donc des principes philosophiques et métaphysiques qui l'animent<sup>2</sup>. Un tel travail de contextualisation oblige cependant à une lecture des parties proprement mathématiques du *Traité*. L'introduction générale de l'œuvre (*UA*, I) ne permet en effet pas, elle seule, de dégager véritablement l'intention de l'auteur. C'est au contraire, comme nous le montrerons en conclusion, à partir des développements mathématiques que prennent sens les thèses présentées dans le premier livre.

Selon nous, la clé de *UA* se trouve au chapitre 4 du livre III, intitulé *Intensity*. Whitehead y élabore une synthèse entre l'approche à la Cayley-Klein des géométries non-euclidiennes (dans laquelle différentes notions de distance sont définies projectivement) et l'approche algébrique héritée de Grassmann. Cette synthèse lui permet de soutenir que les algèbres grassmanniennes sont véritablement universelles en ce qu'elles constituent (comme la géométrie projective dont elles ne sont que l'expression calculatoire) la matrice de toutes les géométries (euclidiennes et non-euclidiennes) classiques<sup>3</sup>.

Dans le livre III de *UA*, Whitehead expose le concept fondamental de multiplicité positionnelle, qui correspond *grosso-modo* à ce que nous nommons aujourd'hui espace vectoriel. Les vecteurs, Whitehead les nomme des extraordinaires ; les scalaires, Whitehead les nomme intensités. Il définit ensuite la notion de dimension, de base, etc... de manière aujourd'hui usuelle. L'interprétation géométrique qu'il donne des multiplicités positionnelles pourrait par contre paraître singulière. Au lieu de concevoir une multiplicité d'ordre  $n$  comme la représentation d'un

---

<sup>1</sup> *APG* et *ADG* sont utilisés par Coxeter dans ses manuels classiques [Coxeter 1947 ; 1949].

<sup>2</sup> Nous renvoyons à [Grattan-Guinness 2002] pour une description et une analyse plus ample (de 1898 à l'après-guerre) de l'interaction, chez Whitehead, entre préoccupations philosophiques et mathématiques.

<sup>3</sup> Le contenu de *UA* ne saurait bien évidemment se réduire à cette seule synthèse. Pour une description plus détaillée et très claire, voir [Riche 2004].

espace affine à  $n$  dimensions, il la considère comme la représentation d'un espace projectif de  $n-1$  dimensions. Autrement dit, Whitehead considère directement ce que l'on appelle le projectif de l'espace vectoriel, en identifiant les extraordinaires qui ne diffèrent que par l'intensité. Cette ligne de raisonnement, si elle nous peut nous surprendre (les vecteurs sont des points ; les scalaires ne correspondent pas à des longueurs) est à l'époque tout à fait classique<sup>4</sup>. La démarche de Whitehead équivaut à introduire un système de coordonnées homogènes dans un espace projectif : le rapport des coefficients (non les coefficients eux-mêmes) déterminent l'identité de l'extraordinaire résultant.

Là où Whitehead fait preuve d'originalité, c'est, au chapitre 4 du livre III, dans son traitement de « la loi d'intensité ». Habituellement, c'est-à-dire chez Grassmann<sup>5</sup> mais aussi Peano<sup>6</sup>, on pose que, si  $c$  est l'extraordinaire tel que, par exemple,  $ac = a_1e_1 + a_2e_2$ , alors :

- 1)  $c$  est le point situé à une distance  $d_1$  de  $e_1$  et  $d_2$  de  $e_2$ , distances inversement proportionnelles aux coefficients  $a_1$  et  $a_2$  des deux points – entre les deux points si les coefficients sont de même signe, à l'extérieur du segment  $(e_1, e_2)$  si les signes diffèrent.
- 2) L'intensité  $a$  de  $c$  est déterminée comme la somme des intensités – dit autrement, la loi d'intensité est linéaire : l'intensité du point résultant est simplement la somme des coefficients.

Cette double convention revient, si les coefficients sont positifs, à identifier  $c$  au centre de masse du système formé par les points  $e_1$ , de masse  $a_1$ , et  $e_2$ , de masse  $a_2$ .

Une telle stipulation distingue un cas particulier : le cas où  $a_1$  et  $a_2$  ont même valeur et signe opposé (le cas « symétrique » du cas où  $c$  est le milieu du segment). Dans cette situation, non seulement l'intensité du point est nulle, mais surtout le point  $c$  n'est pas à distance finie sur la droite, car aucun point extérieur à l'intervalle  $[e_1, e_2]$  n'est à égale distance à la fois de  $e_1$  et de  $e_2$ . Grassmann exploite cette situation pour introduire le point à l'infini. L'extraordinaire  $e_1 - e_2$  est le point à l'infini ou le déplacement associé à la droite  $e_1e_2$  pris à une certaine intensité<sup>7</sup>. La loi d'intensité est ainsi liée chez Grassmann (et chez Peano) à la façon de faire le partage entre deux types d'éléments : les extraordinaires « finis » et les extraordinaires « à l'infini ».

Revenons à Whitehead. La stipulation précédente présuppose la métrique euclidienne, puisque le rapport des intensités correspond au rapport des distances. Or rien dans le concept pur de multiplicité positionnelle n'oblige, selon Whitehead, à une telle présupposition. Grassmann et Peano ont vu cela, mais aucun des deux n'a su poser la question de la détermination de la loi de l'intensité dans le cas général – indépendamment de l'application de l'algèbre au cas euclidien<sup>8</sup>. La façon de déterminer la position du point résultant et son intensité n'est, chez eux, jamais considérée pour elle-même, et toujours explicitement liée à des raisonnements de nature géométrique. C'est ce que Whitehead reproche à Grassmann dans la *Note historique* qui conclut *UA*, III, 4 :

<sup>4</sup> Voir sur ce point le lumineux §232 de [Grassmann 1862] ; Cf. également [Peano 1895-96].

<sup>5</sup> [Grassmann 1862] §222.

<sup>6</sup> [Peano 1888], II, §12.

<sup>7</sup> Peano note dans son [1895-96] que l'articulation entre points, déplacements et éléments linéaires (produits de deux points) est l'origine de la fécondité de l'algèbre de Grassmann et de sa supériorité par rapport à tous les autres calculs. Seul Grassmann a vu, selon Peano, que les déplacements n'étaient pas des éléments linéaires mais des points.

<sup>8</sup> Grassmann considère en 1862 le problème comme relevant de l'application de l'algèbre à la géométrie (cf. §222). Peano affirme, lui, d'emblée (Cf. son [1888] chap. 1 §§3-8) qu'il veut un *calcolo geometrico*, c'est-à-dire qu'il se restreint à l'application des algèbres grassmaniennes à la géométrie euclidienne et à la statique. Sur le rapport entre calcul grassmanien et statique, voir [Klein 1925], chap. 1 (p. 29-37 surtout).

Grassmann ne traite pas de la question générale de la comparaison des intensités. Dans [Grassmann 1844], partie II, chap. 1, §§ 94-100, il introduit de fait une équation définissante linéaire sans considérer les autres possibilités. Dans [Grassmann 1862] aucune discussion générale du sujet n'est développée ; mais dans le chapitre V, « Applications à la géométrie », une équation définissante linéaire pour les points et une équation définissante quadratique pour les vecteurs sont de fait utilisées – hypothèses évidentes et nécessaires en géométrie euclidienne. Il convient d'ajouter que l'idée générale d'équation définissante, différente pour différentes multiplicités, et l'idée de *locus* d'intensité zéro n'apparaît dans aucune de ces œuvres<sup>9</sup>.

Whitehead, pour mettre fin à cette intrusion de l'euclidien dans le calcul, va chercher à déterminer, dans le cas général, l'intensité de l'extraordinaire résultant en fonction de celle des termes de l'addition. Il introduit ainsi une fonction  $f$ , nommée loi d'intensité, homogène relativement aux coefficients et de premier degré. Dans le cas général,  $f$ , loin d'être linéaire, est une somme de racines de fonctions rationnelles. Citons le §85 intitulé « Définir l'équation d'intensité »<sup>10</sup> :

(i) Soit une région complète de  $n-1$  dimensions définie par les unités  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Alors par hypothèse l'intensité des éléments représentés par  $\alpha_i e_i$  est  $\alpha_i$ , puisque l'intensité de  $e_i$  est par définition l'unité. Mais aucun principe n'a encore été posé permettant de déterminer l'intensité d'un élément dérivé  $a$ , où

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

(ii) Soit  $\alpha$  l'intensité ; nous posons que  $\alpha$  est une fonction de

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$$

Ainsi nous pouvons écrire

$$\alpha = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

Or l'intensité de  $\mu a$  est  $\mu \alpha$  ; donc nous avons la condition

$$f(\mu \alpha_1, \mu \alpha_2, \dots, \mu \alpha_n) = \mu f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

$f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  doit en conséquence être une fonction homogène du premier degré.

[...]

(iv) Soit  $\phi_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  une fonction homogène rationnelle et entière de degré  $\lambda$ , et soit  $\phi_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  une fonction homogène rationnelle et entière de degré  $\mu$ . Alors la forme algébrique la plus générale de  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est :

$$\sum \left\{ \frac{\phi_\lambda}{\phi_\mu} \right\}^{\frac{1}{\lambda-\mu}}.$$

Au lieu, comme chez Grassmann et Peano, d'être réduite à une forme linéaire  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum \alpha_i$ , la loi d'intensité est déterminée ici comme une fonction de premier

degré, somme de racines de fonctions rationnelles  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum \left\{ \frac{\phi_\lambda}{\phi_\mu} \right\}^{\frac{1}{\lambda-\mu}}$ . Whitehead

restreint, il est vrai, immédiatement la généralité de son traitement :

(vii) Dans le reste du livre, nous admettons, si rien de contraire n'est précisé, que l'équation définissante<sup>11</sup> est de la forme :

$$\{\phi_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)\}^{1/\mu} = 1$$

où  $\phi_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  est une fonction homogène rationnelle et entière de degré  $\mu$  de la forme

$$\alpha_1^\mu + \alpha_2^\mu + \dots + \alpha_n^\mu + \sum \rho \alpha_1^{\sigma_1} \alpha_2^{\sigma_2} \dots \alpha_n^{\sigma_n}$$

$\rho$  étant un coefficient arbitraire et

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n = \mu.$$

Reste que malgré cette restriction, la fonction  $f$ , racine  $\mu^{\text{ème}}$  d'une fonction homogène et entière de degré  $\mu$ , est bien plus générale que la forme linéaire (qui correspond au seul cas  $\mu = 1$ ).

<sup>9</sup> UA, p. 168.

<sup>10</sup> Ibid., p. 162-163.

<sup>11</sup> L'équation définissante est, pour Whitehead, l'équation  $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1$ .

Whitehead s'intéresse ensuite au *locus* des points d'intensité 0<sup>12</sup>, c'est-à-dire au lieu défini par l'équation  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$ . Pourquoi ? Parce que, comme nous l'avons déjà remarqué, dans la théorie de Grassmann, l'annulation de l'intensité signifie que l'extraordinaire résultant est un élément à l'infini de la multiplicité positionnelle. Certes, l'interprétation grassmanienne est intrinsèquement liée à l'application du calcul à une géométrie particulière, la géométrie euclidienne. Mais Whitehead considère que l'idée de distinguer les points du *locus* 0 des autres éléments ne relève pas en elle-même de l'application du calcul, mais bien de la théorie pure. Plus précisément, la généralisation préalable de la loi d'intensité permet de faire varier le type de surface correspondant à ces « points à l'infini », et de retrouver par ce biais le cheminement emprunté par Klein dans ses célèbres articles des *Mathematischen Annalen*<sup>13</sup>.

Expliquons brièvement la démarche du mathématicien allemand. Klein a montré en 1871 que la définition élaborée par Cayley de la distance euclidienne<sup>14</sup> se généralise aux cas hyperbolique et elliptique. Klein identifie le groupe des déplacements des trois géométries classiques avec le groupe des transformations homographiques (projectives) qui laissent une surface (dans le cas tridimensionnel) particulière invariante, nommée Absolu. Chaque géométrie est donc, à l'intérieur de l'espace projectif complexe<sup>15</sup>, spécifiée par le type de figure considérée comme Absolu<sup>16</sup> : lorsque la surface fondamentale est une quadrique imaginaire à coefficients réels, le groupe de transformation correspond à celui des déplacements elliptiques ; lorsque l'invariant est une quadrique close, alors le groupe sélectionné, appliqué à l'intérieur de la quadrique, est le groupe des déplacements hyperboliques ; enfin, lorsque l'Absolu dégénère en une section conique (le cercle imaginaire à l'infini), alors le groupe de transformation est le groupe euclidien. Dit autrement, les relations métriques entre des points d'une configuration quelconque sont considérées comme des relations mettant en jeu la figure donnée et une quadrique fondamentale, l'Absolu, au sein de l'espace projectif. Ce dispositif permet, selon Klein, de manifester la véritable nature (*inneres Wesen*) des trois géométries métriques classiques.

Les *locii* d'intensité 0 de Whitehead correspondent aux Absolus de Klein et de Cayley. L'équation  $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0$  définit en effet une surface de dimension  $n-2$  sur une multiplicité positionnelle de dimension  $n$  (d'ordre  $n+1$ ). Whitehead affirme, dès le §87, que, parmi toutes ces hypersurfaces, « il y a deux cas spéciaux de grande importance, le cas où le *locus* d'intensité 0 est un plan, le cas où le *locus* est une quadrique ».

Le premier correspond à la situation envisagée par Grassmann : par un choix des vecteurs de la base, l'équation du *locus* peut être mise sous la forme  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0$ . La loi d'intensité prend alors la forme qu'elle avait dans le calcul barycentrique de Möbius, et l'Absolu associé est celui de la géométrie affine : le lieu des points à l'infini est, dans l'espace tridimensionnel, le plan déterminé par le cercle imaginaire à l'infini.

Le second cas est celui où la loi d'intensité  $f(\xi_1, \dots, \xi_n)$  est la racine d'une forme quadratique  $\alpha_{11}\xi_1^2 + 2\alpha_{12}\xi_1\xi_2 + 2\alpha_{13}\xi_1\xi_3 + \dots + \alpha_{22}\xi_2^2 + \alpha_{23}\xi_2\xi_3 + \dots + \alpha_{nn}\xi_n^2$  - forme que Whitehead abrège en suivant les notations de Cayley en  $(\alpha)(x)^2$  (avec  $x = \xi_1e_1 + \dots + \xi_n e_n$ ). La loi d'intensité

<sup>12</sup> UA, p. 164-165.

<sup>13</sup> [Klein 1871 ; 1872]

<sup>14</sup> [Cayley 1859] définit la distance dans le plan comme le produit d'une constante avec le logarithme du bi-rapport des deux points avec les points d'intersection de la droite qu'ils déterminent et d'une conique. Concernant le rapport de Cayley à Klein, voir [Toretti 1978].

<sup>15</sup> Klein travaille dans l'espace complexe. La restriction à l'espace réel oblige à introduire, à la place d'objets invariants, des transformations absolues (des involutions ou des polarités elliptiques, qui n'ont aucun point invariant dans l'espace réel). Voir par exemple [Pasch 1882].

<sup>16</sup> Je simplifie ici et laisse de côté ici tout ce qui relève (et qui est pourtant fondamental) de la mesure des angles.

est donc alors de type :  $f(x) = \{(\alpha)(x)^2\}^{1/2}$ , et le *locus* d'intensité 0 est la quadrique dont l'équation est  $(\alpha)(x)^2 = 0$ . Renvoyant à l'étude menée dans le chapitre 3, livre III, Whitehead distingue immédiatement deux situations : celle où le *locus* est une quadrique close ; celle où le *locus* est une quadrique imaginaire à coefficients réels. On retrouve ici exactement les deux Absolus de la géométrie hyperbolique et elliptique distingués par Klein dans ses articles des *Mathematischen Annalen*.

Whitehead n'introduit cependant pas explicitement, dans le chapitre 4 de *UA* III, de métrique sur les multiplicités positionnelles. A ce stade, il se contente seulement de distinguer les éléments d'intensité réels et imaginaires<sup>17</sup>. Dans les cas où le *locus* d'intensité 0 est un plan ou une quadrique imaginaire à coefficients réels, tous les points sont d'intensités réelles. Mais dans le cas « hyperbolique », la division en deux de la *manifold* par la quadrique conduit à diviser les éléments en deux groupes : si l'intérieur du *locus* est d'intensité réelle, l'extérieur est d'intensité imaginaire (ou vice-versa).

Il faut attendre le chapitre 1 du livre VI, intitulé « *Theory of Distance* », pour que Whitehead relie explicitement métriques non euclidiennes et loi d'intensité. Après avoir repris la définition projective de la métrique<sup>18</sup>, le philosophe écrit au §210 (« *Loi d'intensité dans les géométries elliptiques et hyperboliques* ») :

Si l'on fait l'hypothèse que, lorsque  $x_1$  et  $x_2$  ont la même intensité,  $x_1 + x_2$  divise à part égale la distance entre  $x_1$  et  $x_2$ , la loi d'intensité (Cf. livre III chap. 4) est déterminée<sup>19</sup>.

Dans le livre III, Whitehead ne s'intéressait qu'à la loi fixant l'intensité du vecteur  $c$  à partir de celle des termes de l'addition sans se préoccuper de savoir comment fixer la position de  $c$ . De la double convention posée par Grassmann (explicitée plus haut), le philosophe ne retenait dans le livre III que la seconde clause (celle de la détermination de l'intensité). Dans le livre VI, la démarche de Whitehead est différente. Il ne part plus des *positional manifolds* grassmanniennes mais adopte dès le début la perspective de Klein. Et dans ce nouveau cadre, il affirme que la stipulation selon laquelle « lorsque  $x_1$  et  $x_2$  ont la même intensité,  $x_1 + x_2$  divise à part égale la distance entre  $x_1$  et  $x_2$  » suffit pour dériver les différentes lois d'intensités dégagées dans *UA* III, 4, et pour déterminer la position de toutes les sommes vectorielles.

Whitehead chemine donc dans les deux sens : il part, dans le livre III, des multiplicités positionnelles, et montre comment, en généralisant la loi d'intensité, il est possible d'engendrer les Absolus des trois géométries classiques. Il définit à la manière de Klein, dans le livre VI, une distance sur les multiplicités positionnelles, et montre alors que la loi d'intensité sur la multiplicité s'en déduit (à condition de poser l'hypothèse supplémentaire qu'il énonce). La loi d'intensité, et sa généralisation, est bien le chaînon permettant de lier les algèbres grassmanniennes et la théorie projective des géométries métriques classiques. Citons la fin de la *Note historique* qui clôt *UA* VI, 1 :

La première application d'une algèbre d'« extraordinaire » à la géométrie non-euclidienne a été élaborée pour l'espace elliptique par Clifford dans *Sketch of Biquaternions* [...] ; cette algèbre sera examinée dans le volume II de ce livre. La première application du calcul de l'extension de Grassmann à la géométrie non euclidienne a été présentée indépendamment par Homersham Cox [...] pour les espaces elliptiques et hyperboliques, et par Buchheim pour l'espace elliptique [...].

L'idée de commencer une géométrie métrique « pure » par une série de définitions se référant à une multiplicité positionnelle est obscurément présente dans le *Sixth Memoir on Quantics* de Cayley ; elle est explicitement élaborée par Homersham Cox et par Sir R. S. Ball [...]. Sir R. S. Ball se restreint lui-même aux trois dimensions, et utilise l'idée grassmannienne de l'addition de points, mais n'emploie aucune des

<sup>17</sup> *UA*, p. 166 sq.

<sup>18</sup> Cf. l'introduction axiomatique de la notion de distance (*UA*, p. 349 sq.) qui fait écho à [Klein 1871] §2.

<sup>19</sup> *Ibid.*, p. 364.

formules grassmanniennes de multiplication. Mais l'idée générale d'une pure science de l'extension, fondée sur de pures définitions conventionnelles, qui inclurait comme un cas spécial la géométrie de l'expérience ordinaire, est clairement énoncée dans [Grassmann 1848] ; et elle a été minutieusement élaborée, dans une perspective qui n'est pas celle de la multiplicité positionnelle, par Veronese<sup>20</sup>.

Whitehead se dépeint comme le vrai héritier de Grassmann : il est celui qui, dans un contexte géométrique complètement renouvelé, montre que l'*Ausdehnungslehre* est bien, comme leur auteur l'avait pressenti, la pure science de l'extension. Cette fidélité à l'esprit du projet s'accompagne néanmoins d'une modification importante de sa lettre : la loi d'intensité n'est plus, comme l'avait cru Grassmann, une fonction linéaire des coefficients, mais la racine  $n^{\text{ème}}$  d'une forme homogène rationnelle et entière de degré  $n$ .

Nous voudrions conclure cette analyse par trois remarques plus générales :

1- Le projet whiteheadien de ne plus restreindre, comme Peano et Grassmann l'avaient fait avant lui, le calcul grassmannien au cadre euclidien est lié à la nouvelle fonction que joue l'espace projectif au sein des mathématiques. J. Richards a montré<sup>21</sup> que l'émergence de la géométrie de position donne au « pan-géométrisme » traditionnel des mathématiciens anglais une nouvelle vigueur : dans l'approche Cayley-Klein, les divers espaces métriques apparaissent comme des cas spéciaux d'une unique multiplicité-mère. La géométrie projective restaure ainsi l'unité de la géométrie (« *Descriptive Geometry is all Geometry* » écrit Cayley), et permet de conserver la place centrale que la discipline occupait dans les sciences mathématiques anglaises. Si Whitehead peut écrire, à la fin de son premier livre introductif, qu'un « Traité sur l'Algèbre Universelle est également, dans une certaine mesure, un traité sur certaines idées généralisées de l'espace »<sup>22</sup>, c'est précisément parce que la définition projective des espaces métriques classiques permet, une fois le lien entre algèbre grassmannienne et géométrie projective tissé, de ne plus opposer calcul et multiplicité. Il y a, de ce point de vue, une très étroite parenté entre la démarche de Whitehead et celle de celui qui est encore son élève, Russell. Le but de [Russell 1897] est en effet d'établir que la géométrie projective est la description la plus générale de « la forme de l'externalité », c'est-à-dire la description la plus générale des conditions nécessaires de toute expérience possible<sup>23</sup>. Pour Russell, l'espace projectif, non l'espace euclidien comme chez Kant, est la véritable forme du synthétique *a priori* ; pour Whitehead, l'espace projectif, non l'espace euclidien comme chez Grassmann, est le véritable champ d'application des algèbres universelles.

2- La seconde remarque concerne les relations entre calcul et multiplicité. L'objet du livre I de *UA* est d'articuler les deux notions. Le concept de *calculus* est défini au chapitre 1 comme un système de signes munis de règles de dérivation et d'un symbole d'équivalence<sup>24</sup>. Le concept de *manifold* est défini au chapitre 2 comme un ensemble de choses possédant une propriété commune selon diverses modalités<sup>25</sup>. Whitehead soutient que tout *calculus* est un moyen d'analyser les relations entre les divers éléments de la *manifold* d'une propriété, et qu'il est possible de faire correspondre une *manifold* à tout *calculus*, quel qu'il soit (et vice-versa). Le caractère conventionnel des règles algébriques, fortement affirmé au début de *UA*<sup>26</sup>, n'a pas, en particulier, selon Whitehead, à être limité par des considérations extrinsèques se rapportant au

<sup>20</sup> *UA*, p. 370.

<sup>21</sup> [Richards 1988].

<sup>22</sup> *UA*, p. 32. Voir également sa préface : « Nous espérons, dans cette œuvre, présenter les algèbres à la fois comme des systèmes de symbolisme et également comme des dispositifs permettant l'examen des possibilités de penser et de raisonner liées à l'idée générale et abstraite d'espace. »

<sup>23</sup> [Russell 1897], p. 197.

<sup>24</sup> *UA*, p. 3-12.

<sup>25</sup> *Ibid.* p. 13-17.

<sup>26</sup> Voir notamment *UA*, p. 9-12.

type de *manifold* que l'on examine. Et cette articulation libre de l'algèbre et des multiplicités découle directement de la critique que Whitehead adresse à Grassmann. Seule l'intrusion abusive et non maîtrisée du géométrique dans le calcul explique la restriction, dans l'*Ausdehnungslehre*, de la loi d'intensité à une fonction linéaire, et la restriction corrélatrice du champ d'application des algèbres additives. C'est seulement en libérant le calcul de toute autorité extérieure, en manifestant son caractère pleinement conventionnel, que l'on peut dériver les interprétations non-euclidiennes développées dans la seconde moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle – et garantir ainsi l'universalité des algèbres considérées. Whitehead joue, dans *UA*, Grassmann contre lui-même : afin de développer « une science pure de l'extension », il généralise la loi d'intensité et rompt définitivement les attaches qui lestaient les calculs des restrictions que charriaient les *manifold* euclidiennes. Loin de pouvoir être compris indépendamment du reste de l'œuvre, la nouvelle articulation entre *calculus* et *manifold* (qui est le propos du livre I de *UA*) ne trouve son sens que rapporté aux développements ultérieurs, et en particulier aux critiques que Whitehead adresse à Grassmann en III, 4.

3- Troisième et dernière remarque. Whitehead manifeste, dès 1898, une forte tendance à fondre en une seule totalité la mécanique, la géométrie et l'algèbre. La loi d'intensité a en effet, depuis Möbius, une signification immédiatement physique : les intensités sont les masses appliquées aux points, et l'extraordinaire résultant est le barycentre du système<sup>27</sup>. En généralisant la loi d'intensité de façon à englober dans un seul formalisme le cas des géométries classiques non-euclidiennes, Whitehead solidarise, comme l'avait fait avant lui, mais différemment, Clifford<sup>28</sup>, considérations statiques et géométriques. La forme de la loi d'intensité, c'est-à-dire la façon dont on calcule la position du barycentre et la « masse » totale du système, détermine (et est à son tour déterminée par) le type d'espace dans lequel on se situe<sup>29</sup>. Dans la perspective de Whitehead, mais aussi de Clifford et de Ball, il y a un lien étroit entre des concepts purement géométriques et des notions « physiques » comme la masse. Ces développements « techniques » doivent bien entendu être reliés aux conceptions monistes que l'auteur de *UA* met au centre de sa réflexion, dès son grand article de 1905 (*MCMW*) – l'hypothèse moniste étant précisément, chez Whitehead, celle où la distinction entre deux types d'indéfinissable, les points de l'espace et les corps matériels qui les occupent, disparaît<sup>30</sup>.

Le monisme de Whitehead a donc, *UA* nous le révèle, une origine très profonde. Il n'est ni une simple affaire de goût, ni une simple conséquence du rasoir d'Occam. Il est liée à une tradition scientifique particulière, celle du calcul géométrique, perpétuée par Whitehead, et qui, de Möbius jusqu'à Peano et Ball, mêle, au sein d'un unique développement, considérations géométriques et mécaniques. Il est notamment important de garder à l'esprit, lorsque l'on aborde la suite de l'œuvre, que le lien établi entre masse (intensité) et espace date de 1898 – non pas de la lecture d'Einstein<sup>31</sup>. Cela ne veut évidemment pas dire que Whitehead anticipe, dans *UA*, la relativité générale : la relation entre matière et espace n'a pas du tout, ici et là, la même forme. Par contre,

<sup>27</sup> Au XIX<sup>ème</sup> siècle, les mathématiciens qui développent le calcul géométrique semblent particulièrement impressionnés par le fait que le produit externe grassmanien de deux points dans un espace tridimensionnel puisse être interprété comme un torseur. Voir sur ce point [Klein 1927] chap. 1 ; [Peano 1888], chap. 3, §27. Sur l'ensemble de cette tradition de « mécanique géométrique » au XIX<sup>ème</sup> siècle, voir [Ziegler 1985].

<sup>28</sup> Voir notamment [Clifford 1869] où le mathématicien anglais reformule la théorie cayleysienne de la distance en employant le symbolisme grassmanien (pour, notamment, représenter les Absolus).

<sup>29</sup> Cette détermination est seulement partielle ; voir *supra*.

<sup>30</sup> L'ensemble de ces travaux sur la signification mécanique du calcul géométrique est également l'horizon de [Russell 1897]. Le dépassement de la contradiction de la relativité des positions par l'introduction de la matière (p. 76-86 et p. 185-197) est certes avant tout motivé par des raisons métaphysiques ; mais il est également liée au rôle que joue la masse dans le calcul barycentrique.

<sup>31</sup> Sur la réception de Einstein et son impact sur l'évolution de Whitehead, voir [Grattan-Guinness 2002].



il n'est pas impossible de penser que l'engagement premier de Whitehead dans la tradition de l'analyse géométrique (et les conséquences monistes qu'il en a tiré) ait pu jouer un rôle dans la réception ultérieure de la mécanique einsteinienne. Il y aurait là matière à une vaste recherche – qui excéderait certainement le cadre d'un seul article.

CAYLEY (Arthur)

[1859] *A sixth Memoir upon Quantics*, in *Collected Mathematical Papers*, Cambridge : CUP, 1889-1897, vol. 2, p. 561-592.

CLIFFORD (W. K)

[1869] *On the Theory of Distances*, in R. Tucker éd., *Mathematical Papers*, London: Macmillan and Co., 1882, p. 131-157.

COXETER (H. S. M.)

[1947] *Non-Euclidean Geometry*, seconde édition, Toronto : Toronto University Press.

[1949] *The Real Projective Plane*, York : Maple Press Company.

GRASSMANN (Hermann Günther)

[1844] *Die Lineale Ausdehnungslehre, eine neuer Zweig der Mathematik, dargestellt und durch Anwendungen auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Kristallonomie erläutert*, Leipzig : Verlag von Otto Wigand ; trad. fr. de D. Flament, Paris : Blanchard.

[1862] *Die Ausdehnungslehre. Vollständig und in strender Form bearbeitet*, Berlin.

GRATTAN-GUINNESS (Ivor)

[2002] “Algebras, Projective Geometry, Mathematical Logic, and Constructing the Worlds: Intersections in the Philosophy of Mathematics of A. N. Whitehead”, in *Historia Mathematica*, 29, p. 427-462.

KLEIN (Felix)

[*Werke*] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921-1923), I-III

[1873] *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, zweiter Aufsatz*, *Math. Annalen*, 6, cité d’après [*Werke*] 1, p. 311-343.

[1874] *Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie“*, *Math. Annalen*, 7 ; cité d’après [*Werke*] 1, p. 344-352.

[1925] *Elementary Mathematics from an advanced Standpoint; vol. 2*, trad. anglaise de E. R. Hedrick et C. A. Noble, New York : Dover.

PASCH (Moritz)

[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, seconde édition de 1926, Berlin : Springer.

PEANO (Guiseppe)

[1888] *Calcolo Geometrico secondo l’Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin : Fratelli Bocca ; trad. anglaise de L. Kannenberg, Basel : Birkhauser, 2002.

[1895-96] *Saggio di calcolo geometrico*, *Atti. Accad. Sci. Torino* (1895-96), p. 952-75 ; trad. anglaise de H. C. Kennedy, paru dans *Selected Works of G. Peano*, Toronto : Toronto UP, 1973.

RICHARDS (Joan)

[1988] *Mathematical Visions : the pursuit of geometry in Victorian England*, London : Academic Press.

RICHE (Jacques)

[2004] L'Algèbre Universelle, in Beets (François), Dupuis (Michel), Weber (Michel) éds, *Alfred North Whitehead. De l'algèbre universelle à la théologie naturelle. Actes des Journées d'étude internationales tenues à l'Université de Liège les 11-12-13 octobre 2001*, Frankfurt et Lancaster : Ontos Verlag, 2004.

RUSSELL (Bertrand)

[1897] *An Essay on the Foundations of Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press ; London and New-York : Routledge, 1996.

TORETTI (Roberto)

[1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

ZIEGLER (Renatus)

[1985] *Die Geschichte der geometrischen Mechanik im 19. Jahrhundert*, Stuttgart : F. Steiner Verlag.