Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie.

Sébastien Gandon

Pasch entre Klein et Peano : empirisme et idéalité en géométrie.

Sébastien Gandon
sgandon@wanadoo.fr
Université de Clermont II - PHIER

Abstract : Pasch is usually credited with having presented the first axiomatization of a geometrical theory, but the *Vorlesungen über neure Geometrie* (1882) contains many features which do not fit Hilbertian paradigm. Thus Pasch, while axiomatizing his "elementary geometry", claims that it is an empirically true theory. Scholars usually regard the discrepancies between Pasch and the post-Hilbertian standard method as mere inconsistencies of Pasch's theory. On the contrary, this article aims at reconstructing the coherence and originality of the *Vorlesungen*. We will first display the historical background of this work and then try to reconcile Pasch's logical axiomatic claim with his empiricist stance. More importantly, we will insist on the remarkable logical procedures worked out by Pasch in order to adapt his mathematical development to the strictures of his broad philosophical position.

Moritz Pasch naquit en 1843 à Breslau. Il suivit les cours de Kronecker et de Weierstrass à Berlin, et effectua ensuite toute sa carrière universitaire à Giessen où il mourut en 1930. En 1882, il publia deux livres qui connurent un succès inégal : un manuel d'analyse *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, ignoré, où l'on trouve pourtant, vingt ans avant celle de Russell, la première définition des irrationnels en terme de segment – un traité de géométrie, *Vorlesungen über neure geometrie*, qui aura lui une très grande influence, notamment sur Hilbert, Peano et Veblen. L'ouvrage de Pasch sera considéré comme la première présentation du point de vue axiomatique en géométrie[1]. Cependant Pasch lui-même était empiriste, et prétendait, comme beaucoup de ses confrères à l'époque, que la géométrie était une science de la nature. Les surfaces sont ainsi définies dans les *Vorlesungen* comme les limites extérieures d'un objet physique, et les points, comme des corps très petits[2].

Nous nous proposons ici d'étudier les relations entre l'empirisme revendiqué par Pasch et le mode d'exposition axiomatique déployé dans les *Vorlesungen*.

Rien n'oppose, *a priori*, l'idée selon laquelle les concepts géométriques fondamentaux sont tirés de l'expérience et l'exigence de justifier par des preuves la totalité des théorèmes. C'est même le contraire qui est vrai – le caractère non lacunaire des dérivations permet de garantir que le contenu empirique des axiomes suffit à développer tout l'édifice. Empirisme et formalisme pourraient donc se combiner harmonieusement pour former un puissant dispositif, permettant notamment d'évacuer tout recours à une forme kantienne d'intuition *a priori*.

Même si certains textes de Pasch semblent aller dans ce sens[3], une analyse attentive des *Vorlesungen* révèle un tout autre paysage. En premier lieu, la rigueur exigée par Pasch ne concerne pas seulement les preuves. Elle porte également sur les concepts fondamentaux contenus dans les axiomes et les théorèmes :

> En réalité, pour que la géométrie soit véritablement déductive, il faut que le processus de déduction soit partout indépendant du sens [*Sinn*] des concepts géométriques […] ; seules les relations entre les concepts géométriques, telles qu'elles sont explicitées dans les propositions et les définitions utilisées doivent être prises en considération. Au cours d'une déduction, il est certes permis et utile de conserver

---

[1] Voir par exemple [Enriques 1911, p. 22-23].
[2] [Pasch 1882a, p. 3].
[3] Citons par exemple [*Ibid.* p. 43] : « Les propositions fondamentales ne peuvent pas être comprises sans les figures correspondantes ; elles expriment ce qui a été observé sur certaines figures très simples. Les théorèmes ne sont pas fondées sur des observations, mais prouvées ; chaque inférence, apparaissant au cours d'une déduction, doit trouver confirmation dans la figure ; elle n'est cependant pas justifiée par la figure, mais est justifiée par une proposition déterminée qui la précède (ou par une définition). »

> à l'esprit la signification [*Bedeutung*] des concepts géométriques employés, mais ce n'est en aucune façon nécessaire. [Pasch 1882a, p. 98]

Ces remarques semblent inévitablement conduire à une conception abstraite de la géométrie, proche de celle de Hilbert, selon laquelle la signification des concepts primitifs est déterminée par les relations qu'ils entretiennent les uns aux autres dans le système[4]. Comment concilier cette position avec l'idée que les notions géométriques fondamentales ont un contenu purement empirique ?

En second lieu, de la thèse selon laquelle les concepts fondamentaux sont tirés de l'expérience perceptive, Pasch conclut à leur imprécision. Une telle conséquence pose des contraintes terribles sur l'entreprise de formalisation. En effet, les propositions fondamentales qui contiennent ces concepts vagues ne sont vraies que sous certaines conditions, et cette incertitude s'étend à l'ensemble de l'édifice. Citons Pasch :

> Nous apprenons les concepts fondamentaux et les propositions fondamentales de la géométrie à partir d'objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ; à l'extérieur de ce domaine leur application n'est pas sans autre condition justifiée. [Pasch 1882a, p. 18]

Il est ainsi parfois faux qu'il y ait un point entre deux points quelconques ; si les extrémités sont trop rapprochées, le postulat ne s'applique plus. Comment prendre en compte, à l'intérieur d'un système axiomatique, ces limitations pesant sur la taille des objets ? Comment faire, notamment, pour articuler ces contraintes, avec la pratique élémentaire consistant en géométrie à prolonger des droites ou des plans afin de trouver leur intersection ?

Empirisme et formalisation pourraient se combiner à condition de se limiter l'un l'autre : l'empirisme permettrait de donner un statut aux axiomes, tandis que la formalisation ne toucherait que les preuves. Mais l'empirisme de Pasch est radical : les restrictions qu'il induit sur les propositions fondamentales s'étendent à la totalité du système. L'exigence formelle qui l'anime n'est pas moins grande : le contenu des concepts ne dépend que des relations établies entre eux par les axiomes, non d'une source extérieure. D'où la question : comment nouer chez Pasch le souci de rigueur avec la défense de l'empirisme ? Comment appréhender cet empirisme à l'aune de la pratique mathématique déployée dans les *Vorlesungen* ?

La réponse à cette question nécessite que l'on se penche de près sur le contexte mathématique et l'organisation du traité de Pasch. Nous montrerons dans une première partie que c'est par rapport aux articles séminaux que Klein publie dans les *Mathematische Annalen* en 1871, puis en 1873, que Pasch se positionne. Nous nous pencherons alors de façon plus précise sur la question, cruciale à la fois philosophiquement et mathématiquement, de l'introduction des points idéaux. Nous préciserons, dans une seconde partie, en quoi la solution proposée par Pasch, reposant sur une redéfinition ensembliste des concepts géométriques primitifs, diffère de celle, encore fondée sur l'intuition, de Klein. Nous soulignerons, dans une troisième partie, que, même si les procédures de définition mises en place dans les *Vorlesungen* annoncent celles qui deviendront classiques au XX$^{\text{ème}}$ siècle, leur forme, très particulière, éloigne la démarche de Pasch de la perspective d'un Hilbert ou d'un Peano. Enfin, dans une dernière partie, nous chercherons à ressaisir ce qui constitue la cohérence de la démarche des *Vorlesungen* ; nous soutiendrons que le traité est tout autant le point d'aboutissement de la grande tradition de la géométrie projective synthétique inaugurée par Poncelet, que l'anticipation des *Grundlagen*.

I- Les *Vorlesungen* et leur contexte

Pasch inscrit son œuvre géométrique dans le sillage des travaux que Klein publie dans les *Mathematische Annalen* entre 1871 et 1874. Dans son premier article, le jeune mathématicien,

---

[4] Sur cette conception abstraite, hilbertienne, de la géométrie, voir [Toretti 1978, p. 249 sq.]

généralisant une idée de Cayley, parvient à définir la distance dans les trois géométries métriques « classiques » (hyperbolique, euclidienne et riemannienne ou elliptique) en terme purement projectif. La distance entre deux points *A* et *B* dans l'espace projectif complexe est identifiée au logarithme du birapport de *A* et *B* relativement aux deux points d'intersection entre la droite (*AB*) et une certaine quadrique fixée, nommée l'Absolu[5]. Les diverses géométries métriques, euclidienne comme non euclidiennes, apparaissent donc, dans cette approche, comme des déclinaisons d'une même géométrie fondamentale, la géométrie projective. Klein, au terme de son article, affirme avoir dérivé [*Ableiten*] les diverses métriques de la seule théorie projective.

Mais une difficulté compromet l'entreprise. Le concept de birapport (ainsi que le système de coordonnées homogènes que Klein introduit sur les diverses variétés qu'il considère) n'est pas défini de façon purement projective[6]. A l'époque, le birapport est encore conçu comme un rapport de rapport de distance[7], c'est-à-dire, en dernière instance, comme un concept euclidien. Si l'on en reste là, l'ensemble de l'édifice s'effondre : définir les diverses métriques à partir du birapport ne signifie pas dériver les géométries euclidiennes et non euclidiennes de la théorie projective, puisque le birapport est une notion euclidienne.

Klein, embarrassé, invoque alors le nom de Staudt :

> Dans les *Beiträge zur Geometrie der Lage* de v. Staudt, on trouve le matériel nécessaire pour définir le birapport comme un pur nombre [et non comme un rapport de longueurs]. Des birapports, nous pouvons alors nous élever jusqu'aux coordonnées ponctuelles et planaires homogènes, qui ne sont d'ailleurs rien d'autre que les valeurs relatives de certains birapports, comme v. Staudt l'a aussi montré. [Klein 1871, p. 304]

Le problème, à peine posé, est écarté : Staudt a tout résolu – Klein conclut donc tranquillement que les trois géométries classiques ont été dérivées de la théorie projective.

Hélas, le mathématicien s'aperçoit rapidement que les choses sont plus compliquées, et la seconde partie de son second article des *Mathematische Annalen* datant de 1873 est exclusivement consacré à l'examen des difficultés minant les travaux de Staudt. Klein repère deux problèmes. Le plus célèbre concerne le théorème fondamental de la géométrie projective (l'auteur n'y consacre pourtant qu'une section). La seconde difficulté, alors plus centrale pour Klein, a trait à la relation entre la définition du birapport et la théorie des parallèles. Ces deux problèmes jouent un rôle fondamental chez Pasch, c'est pourquoi nous allons nous y attarder.

Le théorème fondamental de la géométrie projective énonce qu'une transformation homographique sur une formation de première espèce (droite, faisceau de droites, faisceau de plans) est univoquement déterminée par la détermination de l'image de trois éléments quelconques différents. La preuve repose sur l'unicité de la construction du quadrilatère. A partir de trois points quelconques *A*, *B* et *C* sur une droite *d*, il est possible, en réitérant un nombre indéfini de fois ladite construction, d'engendrer un ensemble de points, appelé système harmonique, tous conjugués harmoniques les uns des autres et « couvrant » la droite *d*. Dans la figure ci-dessous, une partie d'un tel système est représenté : chaque point de coordonnée *n* est conjugué harmonique du point *n-2* par rapport aux points *n-1* et ∞.

---

[5] La distance angulaire entre deux droites *a* et *b* est définie comme le logarithme du birapport de *a* et *b* relativement aux deux droites du faisceau (*ab*) tangentes à une certaine quadrique fixée, nommée l'Absolu.

[6] [Klein 1871, p. 303] : « On pourrait formuler une objection à tout ce qui précède […]. Pour fonder la métrique projective générale, nous avons d'abord procédé géométriquement, en ce que nous avons défini la distance de deux points (etc) comme le logarithme d'un certain birapport, ensuite analytiquement, en ce que nous avons employé des coordonnées homogènes. Le birapport et les coordonnées homogènes présupposent l'un et l'autre, dans la fondation qu'on en donne habituellement, la métrique parabolique – les birapports comme les coordonnées homogènes sont définies comme des rapports de longueurs. »

[7] Le birapport de *ABCD* est égal au rapport de *CA*/*CB* à *DA*/*DB* (*CA* désignant la distance signée de *C* à *A*).

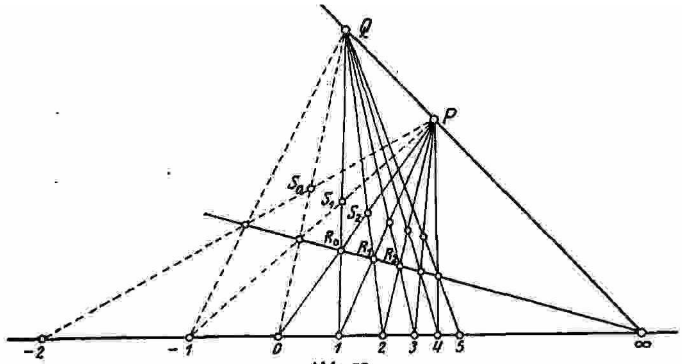

Abb. 99.

Fig. 1: tirée de Klein, *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Berlin : J. Springer, 1928, p. 159.

Trois points déterminent, par définition, un seul système harmonique. Lorsque les transformées de trois points sont données, les transformés de tous les éléments du système harmonique le sont donc également. Klein explique que Staudt, dans sa preuve du théorème fondamental, présuppose que si les transformés de tous les éléments du système sont donnés, alors les transformés de tous les points de la droite le sont aussi. Or rien ne garantit, explique Klein, que les « mailles » du réseau harmonique soient suffisamment « fines » pour ne pas enserrer un intervalle entier de points de la droite – dans ce cas, plusieurs transformations homographiques différentes pourraient correspondre à la même transformation d'un système harmonique[8]. La preuve de Staudt est en conséquence lacunaire : le fait que les images de trois points déterminent celle du système harmonique engendré par ces points ne suffit pas à prouver le théorème fondamental. Klein ne réussit pas à résoudre de façon satisfaisante ce problème en 1873 ; il évoque cependant la nécessité de poser un nouvel axiome de continuité. L'année suivante, il publie un bref texte dans lequel il fait état du contenu de deux lettres (une de Lüroth l'autre de Zeuthen) donnant la démonstration du théorème fondamental à partir d'un postulat de continuité repris, légèrement modifié, à Dedekind.

Le second problème analysé par Klein a trait à la théorie des parallèles. Au début de la seconde section de son article, il explique :

> Dans tous [les développements de Staudt], il n'est pas fait mention de la métrique, mais on présuppose en réalité l'axiome des parallèles, sans quoi, en effet, une correspondance complète entre (par exemple) une série de points sur une droite et un faisceau de plans ne serait pas requise, et le faisceau de plans pourrait contenir une série complète de plans qui ne rencontrent pas la droite. [Klein 1873, p. 331]

Comme la figure 1 le montre, la construction du système harmonique suppose l'existence d'une bijection entre chaque élément des faisceaux centrés en P et Q et les points de la droite étudiée – elle présuppose donc, que par un point extérieur à une droite ne passe pas une infinité de droites ne coupant pas la droite donnée. Or il n'est plus possible, après les travaux de Beltrami (cité par Klein), d'écarter l'hypothèse que l'espace soit hyperbolique[9]. Le but explicitement poursuivi par Klein dans son second opuscule est de montrer que, même dans ce cadre, le programme de Staudt peut être réalisé :

> Pour me convaincre que les considérations de Staudt ne requierent pas fondamentalement, comme je le conjecturais, l'axiome des parallèles, et en même temps pour éluder toutes les restrictions qui peuvent résulter (comme par exemple dans la géométrie hyperbolique) de la non-position de l'axiome des parallèles, je me suis demandé si on ne peut produire tout ce dont Staudt a besoin en imposant aux constructions requises la loi suivante : ne pas sortir d'un espace *limité donné* [*gegebenen begrenzten Raumes*]. Qu'on se représente ainsi les points, droites et plans donnés dans leurs relations de position réciproque [*ihrer gegenseitig Lagenbeziehung*] à l'intérieur d'un espace limité. La question de savoir si

[8] En utilisant un concept qui n'est pas encore alors totalement dégagé : rien ne nous dit que le système harmonique soit dense sur la droite.

[9] Frege n'a pas compris, ou n'a pas voulu prendre en compte, le problème spécifique posé par l'espace hyperbolique. L'exemple de la direction comme modèle de définition par abstraction illustre bien que l'arrière plan dans lequel le logicien se place est celui, trop étroit pour poser la question des points idéaux dans toute sa généralité, de la géométrie euclidienne. Pasch en fera explicitement le reproche à Frege dans sa lettre du 7/01/1905 [Frege 1976, p. 172-173].

> ces figures sont encore présentes en dehors de la portion d'espace donnée [*des gegebenen Raumstückes*] est laissée en suspens ; à plus forte raison, celle concernant les relations qu'elles entretiennent éventuellement les unes avec les autres. Serait-il alors encore possible, en s'appuyant sur les manières de voir de Staudt, de déduire la validité des relations projectives à l'intérieur de cet espace ? [Klein 1873, p. 332]

Klein s'enferme littéralement dans la situation la plus défavorable : celle où l'espace est réduit à un sous-espace propre convexe de l'espace projectif – celle donc où toutes les droites coplanaires ne se coupent pas. Dans la suite de l'article, Klein montre que cette limitation drastique ne lui interdit pas de déduire le théorème d'unicité de Staudt et de développer sur cette base une définition purement projective du birapport.

Cet état des lieux en tête, revenons aux *Vorlesungen über neure geometrie* de Pasch. Le mathématicien de Giessen suit de très près le diagnostic de Klein : le théorème fondamental de la géométrie projective n'est pas prouvé par Staudt et la notion de birapport présuppose encore chez lui la théorie des parallèles. Mais Pasch accompagne cette reprise d'une critique des solutions envisagées par Klein [1873].

L'auteur des *Vorlesungen* refuse, en premier lieu, de compléter par un axiome de continuité la preuve du théorème fondamental. Un tel postulat, explique-t-il, contient nécessairement une référence à un ensemble infini de points ; or ce genre de concept n'a pas de signification géométrique. La géométrie étant une science de la nature dont les concepts décrivent, comme les concepts de couleurs, certaines propriétés perceptives des corps physiques[10], et l'observation ne nous mettant en présence que d'un nombre fini d'objets, toute référence à un infini actuel est proscrite[11]. Pour remédier à la lacune dans la preuve de Staudt, Pasch préfère introduire un nouveau concept primitif, la congruence, dont il élabore la théorie au §13 de son ouvrage. A l'aide des nouveaux postulats, et notamment de l'axiome d'Archimède, Pasch parvient à déduire le théorème fondamental sans faire référence à un ensemble infini d'éléments.

Deux points sont ici cruciaux. Faire dépendre la théorie projective de la congruence ne signifie pas, souligne Pasch, la faire dépendre de telle ou telle théorie des parallèles. En effet, les axiomes de congruence ne présupposent rien quant aux relations d'incidence entre droites coplanaires[12]. En second lieu, Pasch souligne que, si la théorie de la congruence est un auxiliaire indispensable de la théorie projective, les concepts projectifs sont, eux, complètement autonomes et indépendants. Le mathématicien distingue donc nettement entre ce qui vaut pour les concepts et ce qui vaut pour la théorie. Si l'on peut, à partir des concepts géométriques fondamentaux présentés dans les deux premiers paragraphes des *Vorlesungen*, définir tous les concepts projectifs, il n'est pas possible de prouver le théorème fondamental de la géométrie projective sans recourir à la théorie de la congruence exposée au §13. En termes modernes, la combinaison de la théorie « purement » projective[13] et de la théorie de la congruence constitue une extension non conservative de la seule théorie projective[14].

---

[10] [Pasch 1882a, p. 3] : « Les concepts géométriques forment un groupe particulier parmi les concepts qui, de manière générale, décrivent le monde extérieur. Lorsque j'indique la couleur d'un objet, je parle d'une propriété physique ; lorsque je dis qu'il a une forme cubique, je lui applique un concept géométrique. »

[11] [Pasch 1882a, p. 126-127]. Sur ce point, voir notre troisième partie et la note *infra*.

[12] Le point est en réalité délicat. La congruence telle que formulée dans le §13 exclut le cas elliptique. Mais l'extension, réalisée au §14, des relations de congruence aux entités « généralisées » permet de définir une relation de congruence sur ces espaces.

[13] Les théorèmes « purement » projectifs sont ceux qui ne contiennent dans leur formulation comme dans leur preuve aucune référence, ni à la congruence, ni à des concepts propres, non généralisées (sur ces notions, voir notre prochaine partie) ; cf. [Pasch 1882a, p. 74-75 et p. 94-95].

[14] Le théorème fondamental est un énoncé où n'apparaît que des concepts projectifs (il peut être exprimé dans le « langage » de la théorie projective) ; mais la théorie de congruence est un auxiliaire indispensable à sa preuve. On pourrait même dire que, chez Pasch, la théorie de la congruence est entièrement cantonnée à ce rôle d'auxilaire ; une fois le théorème fondamental en poche, Pasch introduit en effet les diverses métriques à la façon de Klein, par sélection d'un Absolu, sans faire référence à la relation de congruence, pourtant disponible ; cf. [Pasch 1882, p. 155-164].

Pasch adhère par contre complètement à la seconde suggestion, « géographique », de Klein consistant à développer le programme de Staudt en se plaçant volontairement dans un espace limité. Les concepts fondamentaux des *Vorlesungen*, sur lesquels repose tout l'édifice, sont en effet les concepts de segments droits et de surfaces planes (portions de plan), non les concepts de droite et de plan illimité[15]. L'empirisme de Pasch leste même d'un poids supplémentaire les restrictions posées par Klein. La limitation de l'espace n'est plus en effet pour lui seulement le corrélât d'une stratégie scientifique visant à manifester l'indépendance de la théorie projective vis-à-vis de l'axiome des parallèles, mais la conséquence d'une thèse relative à la nature de la connaissance géométrique : c'est parce que la géométrie est une science de la nature et que nos capacités perceptives sont limitées qu'il faut, selon Pasch, se placer dans le cadre proposé par Klein. Les restrictions « géographiques » ne sont pour Klein qu'une simple fiction permettant de garantir que la théorie de Staudt ne s'effondre pas lorsque l'on lui enlève un de ses appuis – elles correspondent chez Pasch aux limites d'une expérience qu'un empiriste a le devoir de ne pas transgresser. Comme nous le verrons, cette différence d'appréciation n'est pas sans conséquence sur le développement mathématique lui-même.
Le plan des *Vorlesungen* se déduit logiquement de ce que nous venons de dire. L'ouvrage se divise en trois parties. Dans la première (§§1-12), Pasch définit les principaux concepts projectifs, en partant de la géométrie de l'espace limité donné (la géométrie élémentaire) ; il définit d'abord les notions graphiques[16] fondamentales de façon rigoureuse et détaillée et liste les principaux théorèmes, appelés *Stammsätze*, de la « nouvelle » géométrie[17] (§§1-9) ; il examine dans un second temps la nature de ces concepts en insistant notamment sur le rôle de la dualité (§§10-12). La seconde partie est consacrée à la congruence (§§13-15) dont Pasch expose d'abord, sous forme axiomatique, la théorie (§§13-14), qu'il combine ensuite aux résultats acquis dans la première partie, pour dériver le théorème fondamental de la géométrie projective (§15). Dans un dernier moment, Pasch, reprenant pour l'essentiel l'analyse de Klein, présente une théorie purement projective de la métrique (§§16-20)[18], et développe des remarques sur la continuité et sur le lien entre géométrie et analyse (§§21-23).
On le voit, l'influence des articles du mathématicien d'Erlangen est prépondérante dans les *Vorlesungen*. Mais le parti pris empiriste de Pasch modifie substantiellement le sens et le détail des procédures kleiniennes. D'une part, son empirisme conduit le géomètre à refuser le remède imaginé par Klein (introduire un axiome de continuité) pour corriger la preuve de Staudt[19] ; d'autre part, il l'amène à prendre au pied de la lettre ce qui n'est chez Klein qu'une stratégie scientifique (se placer dans le cadre d'un espace limité). Dans ce qui suit, nous allons surtout nous intéresser à la première partie des *Vorlesungen*, et plus particulièrement d'abord à la critique de la façon dont Klein introduit les objets idéaux. La question de l'idéalité est, chez les deux auteurs, cruciale à la fois mathématiquement et philosophiquement – elle est en effet directement liée au statut des contraintes que Klein se pose à lui-même, et est donc, de ce point de vue, particulièrement apte à manifester l'originalité et la fécondité mathématique de la démarche intransigeante de Pasch.

---

[15] [Pasch 1882a, p. 4, p. 20].
[16] Pasch emploie les concepts de projectif et de graphique dans le même sens. Il parle de géométrie de position ou de la nouvelle géométrie pour désigner la géométrie projective (graphique). Nous emploierons ici ces différents termes de façon interchangeable.
[17] Voir [Pasch 1882a, p. 94-95], où l'auteur affirme que les propositions projectives (à part le théorème fondamental et ses conséquences) sont toutes celles qui se déduisent du contenu des paragraphes 7-9.
[18] A la différence de Klein, Pasch ne travaille pas dans l'espace complexe, ce qui rend la déduction des géométries métriques plus difficile (les Absolus de Pasch sont des transformations, non des surfaces).
[19] Pasch ne fait ici qu'appliquer au raisonnement que Klein développe en 1873 un argument que Klein développera lui-même un plus tard : la continuité, telle qu'elle est définie par Dedekind, est un concept de nature « arithmétique ». L'auteur du programme d'Erlangen développe en effet dans [Klein 1883] l'idée selon laquelle une courbe continue est en tant qu'objet d'intuition toujours différentiable parce qu'elle a toujours une « épaisseur ». Klein soutient ainsi qu'une courbe continue non différentiable est un concept arithmétique, et non géométrique.

II- La reprise critique de Klein : l'extension du sens du mot « point ».

Rappelons le problème : Klein fait l'hypothèse que seule une portion limitée d'espace existe, et se demande si, dans ce cadre, les lois projectives dégagées par Staudt gouvernent encore les relations entre points, segments et morceaux de plans[20]. Le géomètre établit une première distinction entre deux genres de formation de première espèce : les formations limitées (les systèmes linéaires de point) et les formations illimitées (les faisceaux de plans – ou de droites)[21]. Cela le conduit à distinguer deux formes de correspondance incomplète entre formations. Une formation est dite correspondre complètement à une autre lorsqu'une des deux est la section de l'autre, ou lorsque les deux sont section d'une même troisième. Klein présente la correspondance incomplète en prenant l'exemple de la relation entre gerbe de droites et plan de points : « chaque point [de la surface] appartient à une [droite] de la gerbe, mais l'inverse n'est pas vrai » ; dans le morceau d'espace où l'on se situe, il y a des droites de la gerbe choisie qui ne rencontrent pas la portion de plan considérée.
Klein montre ensuite[22] que le théorème du quatrième harmonique vaut pour les formations illimitées de première espèce. Son mode d'argumentation est quelque peu curieux, dans la mesure où il prouve ce résultat pour un système linéaire de points conçu comme la section de l'axe d'un faisceau de plans. Un tel système linéaire, explique l'auteur, même s'il est une formation limitée, présente l'avantage d'être plus intuitif que les autres configurations de même espèce. Klein impose une condition sur l'ordre des trois points A, B, C[23], qui permet de garantir l'existence et l'unicité, dans l'espace limité, du quatrième harmonique D de A relativement à B et C[24] [voir figure 2]. Le géomètre reprend, dans son argument, la démarche classique consistant à tirer deux droites auxiliaires d_1 et d_2 se coupant en A (telles que (BC), d_1 et d_2 ne soient pas toutes dans un même plan) et à construire à partir d'elles deux quadrilatères ; arrivé à ce stade, on use habituellement du théorème de Desargues, pour montrer que ces quadrilatères sont les sections d'un cône à quatre arêtes, et que leurs diagonales coupent (BC) aux mêmes points A et D. Klein se contente de modifier légèrement la fin du raisonnement, en affirmant qu'étant donné la convention concernant l'ordre des points A, B, C, il est toujours possible de choisir les éléments auxiliaires de façon à ce que le sommet du cône et le point D se trouve dans la portion d'espace qu'il ne faut pas quitter[25].

[20] La perspective de Klein est en réalité quelque peu différente. Il se place dans le cadre plus général d'une portion d'espace à courbure constante. Il ne parle donc pas de segment droit et de surface plane, mais de système de courbe K et de surface F, bien entendu limitées. Comme ce trait de l'approche de Klein n'a pas de répercussion sur l'analyse du rapport à Pasch, nous n'en tiendrons ici pas compte.
[21] [Klein 1873 p. 335]
[22] [*Ibid*. p. 336]
[23] Klein affirme, sans le démontrer, que cette condition est toujours remplie par au moins une section d'un faisceau de plans (ou de droites) de la portion d'espace dans laquelle on se place – quel que soit le trio de plans *a*, *b* et *c* d'un faisceau, on peut toujours trouver une droite « sectionnante », suffisamment proche de l'axe du faisceau,, qui intersecte les plans dans l'ordre voulu.
[24] [Klein 1873, p. 336] : « Si les points A, B, C d'une [*droite*] *se suivent les uns les autres dans l'ordre alphabétique*, alors la construction du quadrilatère conduit à un quatrième élément déterminé D, appelé harmonique par rapport à A, B, C. » (C'est Klein qui souligne).
[25] [Klein 1873, p. 337] : « L'hypothèse concernant la série A, B, C garantit la possibilité de pouvoir effectuer la construction requise, et ce malgré la limitation de notre espace. »

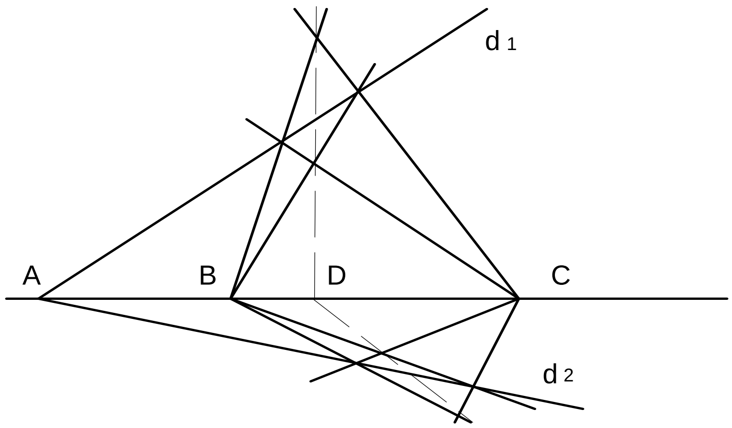

Figure 2 : existence et unicité du quatrième harmonique

L'« argument » que Klein expose en quelques lignes laisse évidemment beaucoup à désirer du point de vue de sa rigueur. L'absence de toute formalisation des relations d'ordre n'est ainsi comblée que par un appel constant à l'intuition du lecteur. Klein semble en prendre conscience à la fin de son développement lorsque, soucieux de montrer que la démonstration ne fait pas intervenir de concept métrique, il précise : l'analyse conduite « n'a rapport qu'avec le concept de plus grand et de plus petit, et non avec celui de mesure d'une telle différence »[26].

Prouver la validité du théorème d'unicité du quatrième harmonique revient à montrer que la géométrie projective s'applique sur ces formations illimitées de l'espace limité considéré. Au §6 de la seconde section de son article, moment crucial de la démonstration, Klein « transfère » la géométrie projective des gerbes illimitées sur celle des portions limitées de plan :

> Par transfert [*Uberträgung*] des formations illimitées de seconde espèce […], on obtient, à partir des formations limitées de seconde espèce, la géométrie du [plan] (conçu comme agrégat de points ou de [droites]). [Klein 1873, p. 339]

Comme la correspondance entre les deux formations est, dans la portion d'espace considérée, incomplète, il faut introduire de nouveaux objets :

> Mais les relations projectives et les relations duelles ne s'appliquent […] que lorsque l'on adjoint [aux surfaces] des points et des [droites] *idéaux* correspondant aux [droites] et aux [plans] de la gerbe [à partir de laquelle s'effectue le transfert]. [*Ibid.*]

Cette adjonction d'éléments permet de « transférer » la totalité de la géométrie d'une gerbe particulière illimitée sur une surface (jusqu'ici) limitée.

Rien ne garantit, cependant, que la même opération de « transfert », effectuée à partir d'une autre gerbe, conduise au même résultat. Klein cherche néanmoins à montrer que tel est bien le cas :

> Il est manifeste que ces éléments idéaux [du plan] […] sont indépendants de la gerbe dont on est parti. […] Le point idéal du [plan] donné est d'abord défini par une [droite] quelconque appartenant à une gerbe – [droite] qui ne croise pas [le plan]. Mais par [la droite] passe un faisceau de [plans] et une partie limitée du faisceau rencontre le [plan] donné. Nous obtenons ainsi […] une famille [*Schar*] de [droites] qui ont les mêmes propriétés, en particulier en ce qui concerne la construction du quatrième harmonique, qu'une partie limitée d'un faisceau de [droites] passant par un point. Si maintenant on considère les [plans] reliant un point quelconque à ces [droites], on voit qu'ils se croisent en [une droite]. Le point idéal, qui était déterminé par la première gerbe considérée coïncide ainsi avec le point idéal donné par une autre gerbe quelconque. [*Ibid.*]

Un point idéal I d'une portion de plan P est indépendant de la gerbe d'abord considérée, car l'on peut faire correspondre à I un même ensemble de portions de droites (celles émanant de I) appartenant à P. Cet ensemble, Klein affirme (sans le démontrer) qu'il est doté des mêmes

[26] [*Ibid.* p. 337].

propriétés qu'une partie limitée de faisceau de droites. Dit autrement, à chaque point idéal *I* d'une portion de plan *P*, Klein associe l'ensemble des droites de *P* émanant du point *I*, c'est-à-dire appartenant au faisceau de droites de *P* centrées en *I* dans l'espace englobant [voir fig. 3]. Seule cette association du point idéal à une famille de droite garantit l'indépendance de *I* par rapport à son mode de définition. Klein poursuit ensuite sans difficulté en introduisant sur l'espace étendu les coordonnées homogènes projectives et le birapport.

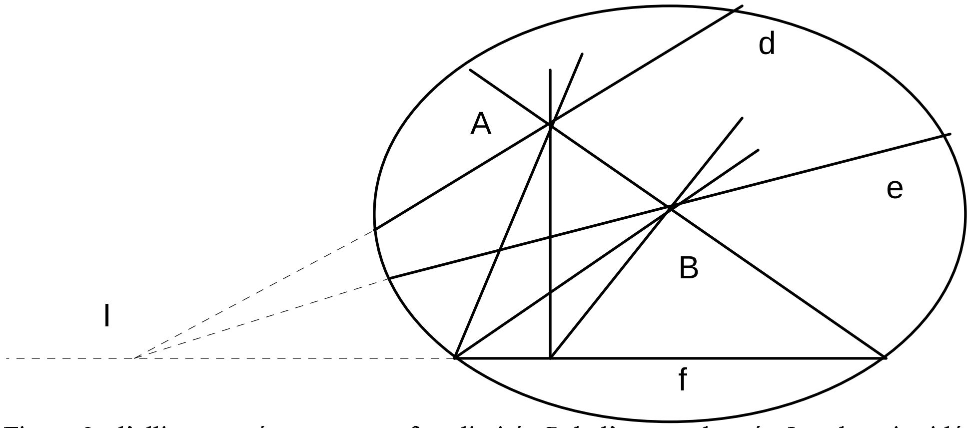

Figure 3 : l'ellipse représente une surface limitée *P* de l'espace donné ; *I* est le point idéal, visé successivement des points *A* et de *B* ; les droites *d*, *e* et *f* appartiennent à la famille de droites indiquant (émanant de) *I*.

Résumons. Il y a deux moments cruciaux, nettement séparés, dans le raisonnement de Klein. Le mathématicien prouve d'abord que la géométrie des formations illimitées de seconde espèce est projective ; il « transfère » ensuite cette géométrie sur les formations limitées de seconde espèce, en ajoutant les éléments idéaux nécessaires.

Le point faible de l'argumentation se situe au niveau de l'introduction des éléments idéaux. Klein pressent la nécessité de montrer que les points idéaux sont « indépendants » de la correspondance gerbe / plan qui les définit ; mais il ne précise jamais le sens qu'il donne à ce mot. D'une certaine façon, la question de « l'indépendance » est pour lui réglée avant d'être posée : il est en effet possible, selon Klein, d'associer à chaque point idéal *I* l'ensemble des (portions de) droites de l'espace limité donné qui émane de *I*. Le problème est qu'une telle association présuppose l'existence de *I* « à l'extérieur » de *P*. Il y a là une ambiguïté. Contrairement à ce qu'il prétend, Klein ne s'enferme pas dans le morceau d'espace qu'il se donne. Si le géomètre s'assure que toutes les entités dont il parle sont accessibles dans son cadre volontairement restreint (par exemple, il associe les points idéaux à des familles particulières de segments de *P*), il se donne le pouvoir, lui, pour garantir cette accessibilité, d'adopter une position de surplomb et de sortir des limites « géographiques » qu'il a posées[27]. C'est pour cela que Klein passe si vite sur la question de l'indépendance de l'objet idéal ; le point idéal *I*, lui, il le voit – et il peut donc facilement s'assurer que toutes les droites par lesquels il définit (il « vise ») *I* se croise en *I*. Comme nous allons maintenant le voir, l'entreprise de Pasch consiste précisément à restaurer, contre Klein, une position d'immanence – à réinsérer l'œil du géomètre au niveau des figures et des objets qu'il manipule, à l'intérieur de l'ellipse représentée dans la figure 3[28].

[27] Par exemple, lors de la preuve de l'unicité du quatrième harmonique, Klein affirme que, un des deux quadrilatères étant fixé, il est toujours possible, en partant d'un quadrilatère quelconque, d'obtenir par projection itérée un quadrilatère tel que le sommet du cône à quatre arêtes dont ce quadrilatère et celui fixé sont les sections, tombe dans un espace aussi petit que l'on veut. La procédure d'itération des projections, auquel il est fait ici appel, présuppose un accès du géomètre à ce qui se trouve en dehors des limites de son espace.

[28] En s'autorisant un anachronisme, on pourrait dire que le raisonnement de Klein s'effectue au niveau d'un métalangage qui reste celui de la géométrie de l'espace infini – non au niveau du langage objet. Mais un des intérêts de cette discussion Klein-Pasch est précisément de prendre au pied de la lettre une terminologie de « l'accessibilité » très souvent mobilisée dans les

La question des éléments idéaux occupe les paragraphes six à neuf des *Vorlesungen*, mais est préparée dans les cinq premiers paragraphes ; elle occupe donc plus de soixante pages au total, le tiers du traité – ce qu'il faut comparer avec la demi-page que Klein consacre à la question. Dans les deux premiers paragraphes, Pasch formule différents postulats, dont les postulats d'ordre, axiomatisant les relations entre points, droites et plans (qu'il qualifie de « propre » [*eigentlich*]) de l'espace limité dans lequel, avec Klein, il se situe. Aux paragraphes cinq et six, décisifs, Pasch introduit une nouvelle définition du mot « point », relayée ensuite par de nouvelles définitions des mots « droite » (§7), « plan » (§8) et « entre » (§9)[29]. Nous allons nous concentrer sur les seuls paragraphes cinq et six.

Brièvement dit, Pasch fond en un moment les deux étapes séparées chez Klein. Au lieu de montrer que les gerbes de droites sont gouvernées par des relations projectives, puis de caractériser les points idéaux par les familles de droites qui ont avec les gerbes plusieurs propriétés en commun, Pasch se fonde sur la géométrie des formations illimitées pour construire une relation d'équivalence entre des segments de droites de l'espace limité.

Au §5 des *Vorlesungen*, le géomètre reprend l'argument de Klein censé démontrer l'existence et l'unicité du quatrième harmonique sur les formations illimitées de première espèce ; mais il en change complètement la signification[30]. Les deux droites auxiliaires d_1 et d_2 tirées de A, non toutes deux dans le même plan que (BC), sont conçues par lui comme des segments droits EF et $E'F'$ coplanaires à (BC) et coplanaires entre elles (mais non toutes situées dans le même plan). Aucune mention n'est désormais faite d'un quelconque point d'intersection A entre ces trois droites [voir figure 4]. Pasch, en explicitant soigneusement l'ensemble des relations d'ordre entre les différentes entités, parvient à prouver que les deux quadrilatères construits (à peu près)[31] de la même façon que chez Klein, sont les sections d'un cône à quatre arêtes dont le sommet se trouve dans l'espace délimité par le pentaèdre $EFBCE'F'$. Il en déduit l'existence d'un unique point D, intersection de GH et de $G'H'$ avec (BC), qui se trouve entre B et C. D n'est plus ici le quatrième harmonique de A par rapport à B et C, puisque A n'est pas donné ; l'existence et l'unicité de D sont considérées simplement comme les conséquences de la (deux à deux) coplanarité des trois droites (BC), (EF), ($E'F'$). Pasch démontre que la même procédure effectuée à partir de n'importe quelle droite coplanaire à (BC) et à (EF)[32] conduit au même point D ; inversement, la même procédure, appliquée à une droite non coplanaire à (BC) ou à (EF), détermine un point D' sur (BC) différent de D.

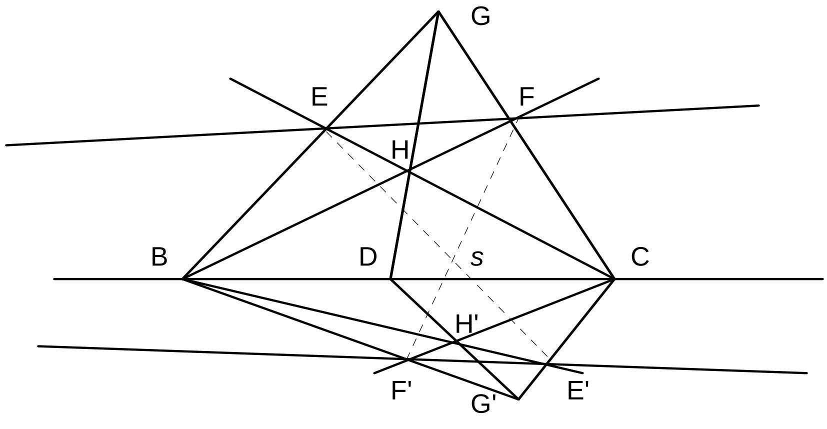

Figure 4 : le point S désigne le sommet du cône à quatre arêtes dont les deux quadrilatères $EGFH$, $E'G'F'H'$ sont les sections. Par rapport à la figure 2, le point A a disparu : il est hors de l'espace limité donné, et donc de la figure.

discussions contemporaines autour du statut des objets mathématiques. Pour Klein comme pour Pasch, ce vocabulaire « géographique » n'a pas une signification métaphorique mais un contenu mathématique précis – d'où l'intérêt toujours actuel de la controverse.

[29] Pour une présentation claire et stimulante de la démarche de Pasch, voir [Nabonnand 2002]. Nous nous sommes ici beaucoup inspiré de ce texte.

[30] Voir [Pasch 1882a, p. 33-34].

[31] En fait Pasch commence par se donner un point G arbitraire de l'autre coté de la droite (EF) par rapport à (BC), et définit E et F comme les intersections de cette droite avec GB et GC.

[32] Cette droite n'étant pas dans le même plan que (BC) et (EF).

Dit autrement, Pasch use de la propriété (étendue et détournée de son sens originel) d'unicité du quatrième harmonique pour prouver que la relation de coplanarité entre trois droites (non toutes coplanaires) est une relation d'équivalence – en particulier une relation « transitive », au sens où, si les paires de droites *lm*, *ln*, *mn*, *lp*, *mp*, sont coplanaires (et si le plan *lm* ne contient ni *n*, ni *p*), alors *n* et *p* sont aussi coplanaires[33].

Klein avait remarqué qu'il y avait des ensembles de droites, « qui ont les même propriétés, en particulier en ce qui concerne la construction du quatrième harmonique, que des parties limitées de [gerbes] ». L'originalité de Pasch n'est pas tant d'avoir effectivement démontré, grâce à sa formalisation des relations d'ordre, que l'ensemble des droites toutes deux à deux coplanaires possède effectivement ce genre de propriété, que de s'être fondée sur ces propriétés pour redéfinir le concept de gerbe par la coplanarité – ou plus précisément, d'avoir utilisé, en toute conscience, la construction du quadrilatère pour établir que la relation de deux à deux coplanarité entre droites[34] est une relation d'équivalence. Citons Pasch :

> *A la suite de ce théorème* [celui établissant la transitivité de la relation de coplanarité], *il s'est révélé avantageux d'étendre le concept correspondant de gerbe de droites.* Lorsque les droites *efg* sont liées deux à deux par un plan, mais pas toutes les trois par un plan, ou lorsque les droites *efg* contenues dans un plan peuvent être liées par des plans à une droite extérieure à ce plan, on dit alors, sans se soucier de savoir comment ces droites se comportent vis-à-vis de l'incidence : *g* appartient à la gerbe *ef*, *g* est une droite de la gerbe *ef*, etc. [Pasch 1882a, p. 35]

Lorsque les droites *ef* se coupent, la gerbe est dite propre et possède un sommet. Mais dans la nouvelle définition, et c'est bien entendu le point fondamental, une gerbe peut en être dépourvu : un ensemble de droites toutes deux à deux coplanaires (pensons à une famille de droites toutes deux à deux parallèles dans l'espace euclidien) ne se coupent pas nécessairement. Dans le §6, Pasch pousse son avantage, et redéfinit le mot « point » ; l'énoncé « le point *S* est sur la droite *g* » a désormais pour signification « la gerbe de droites *S* appartient à la droite *g* »[35]. Un point est donc défini comme une gerbe (propre ou non) et l'ensemble des propositions est modifié en conséquence. En particulier, puisqu'un point, au sens généralisé que le mot a maintenant, est déterminé par deux droites coplanaires, la proposition « deux droites coplanaires se coupent en un point » est vraie par définition.

Qu'est-ce qui distingue la démarche de Pasch de celle de Klein ? Les deux approches s'appuient de manière similaire sur les propriétés projectives des formations illimitées de première espèce pour « associer », en un second temps, les points idéaux à certaines familles de droites. Mais Klein, outre le caractère très cavalier de ses arguments, sépare nettement les deux moments, ce qui le conduit à concevoir les entités idéales comme simplement « indiquées » par les droites en question. Au contraire, Pasch réunit les deux étapes : les propriétés géométriques de l'espace limité donné sont utilisées pour prouver qu'une certaine relation est d'équivalence, c'est-à-dire pour garantir l'existence et l'unicité des objets idéaux de Klein. Deux droites coplanaires étant données, on peut toujours définir l'ensemble *Γ* des droites toutes deux à deux coplanaires avec elles. La « transitivité » de la relation de coplanarité nous apprend que toutes les droites de cet ensemble *Γ* sont deux à deux coplanaires entre elles, ce qui signifie que *Γ* peut être défini par n'importe laquelle de ses paires de droite, c'est-à-dire que *Γ* est indépendant de son mode de définition. Klein, on l'a vu, affirmait dans son article l'indépendance du point idéal par rapport à son mode de définition. Mais aucune définition du terme n'était alors avancée. Pasch donne, lui, une

---

[33] [Pasch 1882a, p. 34]

[34] La relation en question n'est pas la simple relation de coplanarité, qui n'est pas transitive. Il s'agit d'une relation entre trois droites *a*, *b*, *c* non coplanaires telle que *a* est coplanaire à *b*, *b* à *c*, *c* à *a*. Cette relation est symétrique au sens où si *a* est coplanaire à *b* et à *c*, alors *b* l'est par rapport à *a* et *c*, et *c* l'est par rapport à *a* et *b*. Elle est transitive au sens où si *d* est coplanaire à *a* et *b*, alors *d* est coplanaire à *a* et *c*. C'est toujours de cette relation que je parlerai dans la suite du texte lorsque j'emploierai le terme de relation de coplanarité entre droites.

[35] [Pasch 1882a, p. 40].

formulation précise à la notion : dire que le point (au sens étendu du terme) *I'* est indépendant, c'est dire que n'importe quelle paire de droites coplanaires aux droites *e* et *f* appartenant à *I'* définissent le même ensemble. Et Pasch montre, en se fondant sur la géométrie de l'espace limité donné, qu'une telle indépendance est garantie.

La singularité de Pasch n'est donc pas d'avoir déplié et explicité ce qui était contenu en germe chez Klein ; elle est plutôt d'être restée fidèle à la décision méthodologique et empiriste initiale. Le géomètre ne trangresse pas les limites qu'il se donne ; il n'a pas le pouvoir, grâce à son seul regard, de prolonger les surfaces et les segments en « créant » les corrélats absents d'une correspondance homographique. Tout est en conséquence, pour lui, plus difficile : le personnage qui effectue les raisonnements n'a pas simplement à tenir compte de la position de ce qu'il construit ; il lui est interdit, pour effectuer les vérifications qui s'imposent, de se référer, même provisoirement, à des éléments extérieurs et d'étayer les constructions sur des éléments non donnés[36]. La transformation de ce qui n'était chez Klein qu'une décision stratégique en une prise de parti philosophique et épistémologique a donc des conséquences sur le type de mathématiques déployées. Son engagement empiriste conduit Pasch à feindre de ne pas voir ce que Klein décrit – et à réécrire l'ensemble des démonstrations[37].

Pasch peut donc, nous semble-t-il, être considéré à bon droit comme un des premiers à avoir critiqué les définitions « créationnistes » et à leur avoir systématiquement préféré des définitions « ensemblistes », en terme de classe d'équivalence. Si nous insistons sur cette opposition, peut-être un peu facile[38], ce n'est pas pour montrer que l'on trouve chez Pasch, vingt ans avant Russell[39], les éléments de la critique à venir, mais pour souligner le lien existant, dans le cadre des *Vorlesungen*, entre cette « logicisation » des définitions et la position empiriste. L'analyse que nous avons menée montre, en effet, *in concreto*, que l'opposition entre intuition et exigence logique ne peut pas être poussée trop loin. Klein, on le sait, s'est tout au long de sa carrière posé en défenseur de l'intuition contre ce qui lui semblait être une dérive stérilisante de l'abstraction critique[40]. Si Pasch est conduit à critiquer les arguments de Klein, ce n'est cependant pas parce qu'il se défie de l'intuition – mais bien au contraire, parce qu'il considère que la promesse de s'en tenir à une intuition spatiale limitée n'a pas été satisfaite. L'entreprise de rigorisation des définitions provient, chez Pasch, de la volonté d'en rester à une position d'immanence par rapport à l'expérience et de ne pas adopter, comme Klein, une position de surplomb par rapport à l'espace limité donné. L'usage des procédures ensemblistes ne constitue pas, chez lui, un instrument destiné à se substituer à

[36] D'où l'importance fondamentale chez Pasch de la formalisation des relations d'ordre. Ce sont ces relations qui permettent à Pasch de prouver, dans « l'immanence », l'existence des entités dont il parle.

[37] On pourrait adopter pour décrire la situation un langage moins « chargé » philosophiquement, et dire que ce que Pasch critique, c'est le fait que Klein se donne en sous-main l'espace numérique (l'espace complexe à trois dimensions) qu'il est censé reconstruire géométriquement. La position de surplomb serait celle de l'analyste par rapport au géomètre. Cette formulation est peut-être plus proche de l'esprit des *Vorlesungen* dans lequel l'opposition entre méthode synthétique et analytique est très prégnante (voir notre quatrième section).

[38] Voir [Russell 1903, p. 276-286]. Il faut en effet prendre garde à ne pas systématiser l'opposition car les définitions ensemblistes « créent » elles-aussi des objets : les ensembles. Frege et Russell considéreront néanmoins (ce qui engendrera tous les problèmes que l'on sait) que les ensembles sont des objets dont l'existence est garantie par des lois « logiques », et suspecteront les entités crées par l'esprit de n'être que des représentations psychologiques subjectives. On ne trouve aucune thématisation dans [Pasch 1882a] des concepts ensemblistes.

[39] Il en va de Klein exactement comme il en va de Dedekind. Dans le premier paragraphe de son *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* [Pasch 1882b], Pasch critique la construction des irrationnels par la méthode des coupures, exactement comme Russell le fera vingt ans plus tard. Au lieu de dire, avec Dedekind, que les irrationnels « engendrent » les coupures (C_1, C_2) « vides » (où C_1 n'a pas de plus grand élément et C_2 pas de plus petit élément), Pasch propose d'identifier les nombres réels aux ensembles de rationnels C_1 (qu'il nomme, comme Russell, segments). Pasch préfère donc à la « création » dedekindienne, une définition ensembliste : les nombres réels (tous les nombres réels, même ceux qui correspondent à des rationnels) sont des segments, comme les points quelconques (même ceux qui correspondent à des points propres) sont des ensembles de droites. Sur l'ambiguïté de Dedekind, voir [Dugac 2003, p. 164].

[40] Voir notamment [Klein 1893].

l'intuition, mais au contraire, un outil permettant de ne pas aller au-delà de ce qu'elle nous donne.

III- Les limites de la formalisation

Dans ce qui précède, nous avons dépeint Pasch comme le précurseur d'un type nouveau de pratique mathématique qui privilégie les définitions formelles rigoureuses et les constructions ensemblistes, aux références à l'intuition et aux appels à la « création ». La manière dont les objets idéaux sont introduits dans les *Vorlesungen* inaugurerait ainsi la tradition axiomatique dominante en géométrie après la publication des *Grundlagen* de Hilbert. Ce jugement n'est pas faux, mais il nous paraît fortement minorer certains aspects de la pensée de Pasch. Ce sont sur ces facettes que nous allons à présent mettre l'accent.
Dans les présentations classiques de la géométrie projective, datant pour la plupart du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle[41], on distingue généralement, en suivant Pasch, deux théories : la géométrie descriptive (qui correspond à la géométrie élémentaire, celle de l'espace limité, des *Vorlesungen*[42]) ; la géométrie projective (dont les théorèmes sont, dans les *Vorlesungen*, les conséquences des propositions des §§ 7 à 9 et du théorème fondamental[43]). On insiste généralement aujourd'hui sur le fait que les deux théories distinguées ne sont pas sans lien l'une avec l'autre : d'une part, toute région convexe de l'espace projectif constitue un modèle de la géométrie descriptive ; d'autre part et surtout, la redéfinition ensembliste des points généralisés (ainsi que les autres généralisations présentées dans les *Vorlesungen*) permettent de construire à partir d'un modèle de la géométrie descriptive un espace projectif[44]. Le coup de génie de Pasch aurait été non seulement d'axiomatiser les deux théories, mais de comprendre comment il est possible de passer de l'une à l'autre.
Ces présentations trahissent Pasch sur un point. Le système décrit dans les deux premiers paragraphes des *Vorlesungen* n'a pas le même statut que la théorie formelle de la géométrie projective exposée par la suite. Les concepts primitifs apparaissant dans les postulats de la géométrie élémentaire ne sont pas des termes non interprétés, définis seulement formellement par les relations qu'ils entretiennent entre eux ; les points, segments droits et autres surfaces planes ont un contenu empirique, et les propositions fondamentales qui les relient, loin d'être des conventions ou des définitions implicites, sont des descriptions de faits perceptifs. La géométrie élémentaire porte sur des figures[45] données dans l'intuition ; elle ne définit pas un ensemble de modèles. Mais ce point est-il vraiment décisif ? Pasch n'affirme-t-il pas que l'intuition empirique, une fois fixée dans les axiomes, n'intervient plus dans les preuves ? Ne faut-il pas dès lors reverser cette conception, traditionnelle, des postulats, au compte d'un simple « retard » de l'épistémologie sur la pratique mathématique réelle ?
Il n'est pas possible de s'en tirer à si bon compte. Le fait de considérer les *Grundsätze* comme des descriptions empiriques a en effet des conséquences mathématiques importantes, sur lesquelles Pasch met l'accent dans la conclusion de son premier paragraphe. Après avoir affirmé que « les propositions fondamentales doivent contenir complètement le matériau empirique traité par les mathématiques de façon à ce que l'on n'ait plus besoin, après leur établissement, d'en revenir à la perception sensible », il ajoute :

---

[41] Voir [Russell 1903], [Whitehead 1906b et 1907], [Veblen 1904], [Veblen et Young 1910-1918], [Coxeter 1947 et 1949].
[42] Nous emploierons indifféremment dans la suite géométrie descriptive et géométrie élémentaire pour caractériser le système élaboré dans les deux premiers paragraphes des *Vorlesungen*.
[43] Voir [Pasch 1882a, p. 94-95].
[44] Voir entre autres [Russell 1903, p. 400-403], [Whitehead 1907, p. 12-33], [Veblen 1904, p. 371-376], [Veblen et Young 1918, p. 37-69].
[45] Sur ce concept de figure, voir [Pasch 1882a, p. 25].

Il faut être d'autant plus prudent et poser dès le début [des] restrictions [*Einschränkungen*], que sous-tend l'application de chaque proposition fondamentale prise individuellement. [Pasch 1882a, p. 17]

Quelques lignes plus loin, il continue :

Nous apprenons les concepts fondamentaux et les propositions fondamentales de la géométrie à partir d'objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ; à l'extérieur de ce domaine leur application n'est pas sans autre condition justifiée. [Pasch 1882a, p. 18]

Nous retrouvons ici le souci de ne pas dépasser les limites observables ; mais ce souci débouche ici, non pas sur une limitation des instruments de preuve, mais sur une restriction du champ de validité des axiomes.

Pasch donne trois exemples de « précautions » qu'il convient de respecter. La première a trait à la diminution de taille des figures. Au-delà d'un certain seuil, le second *Grundsatz*, stipulant que l'on « peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment droit donné » n'est plus valide. Si le segment devient trop petit, il n'est plus possible de distinguer, entre A et B, de point C[46]. La seconde limitation concerne au contraire l'augmentation de taille des figures. Imaginons qu'une courbe close soit si grande qu'un géomètre ne puisse en percevoir qu'une partie ; si, sur cette partie, C est entre A et B le mathématicien imprudent en conclura par l'axiome III (« si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB, alors le point A se trouve à l'extérieur du segment BC »), que A n'est pas entre C et B – ce qui est faux[47]. Le troisième exemple, plus complexe parce qu'il combine des considérations relatives à l'ordre à des considérations relatives à la congruence, reprend une démonstration, courante à l'époque[48], établissant l'existence d'au moins une droite parallèle passant par un point extérieur à une droite ; Pasch rejette le théorème, en arguant du fait qu'elle requiert une extension illégitime des axiomes d'ordre[49].

Ces restrictions ont toutes trait à la variation de la taille des figures dans un sens (rétrécissement) ou dans un autre (agrandissement)[50] – Pasch prétend que les théorèmes descriptifs ne sont valides que sur des figures de tailles « normales », peu éloignées. Trois remarques sur cette limitation du champ de validité des propositions géométriques. Pasch ne définit d'abord pas les seuils à partir desquels les variations de dimension rendent les postulats faux. Non seulement le mathématicien restreint la validité des théorèmes de géométrie élémentaire, mais il ne détermine donc même pas avec exactitude les limites de leur champ d'application. La seconde observation concerne la notion de construction, qui désigne chez Pasch l'opération consistant à enrichir une figure (plane) donnée « par la liaison de [ses] points et par l'indication [*Aufsuchen*] des points d'intersections de ses droites »[51]. Certains axiomes garantissent la possibilité d'étendre les figures (par exemple, engendrer une droite à partir de deux points), ou de construire des points entre des points donnés, même rapprochés (par exemple en itérant la construction du quadrilatère). Cela signifie que le système axiomatique donne de façon interne des moyens permettant d'engendrer des figures de plus en plus en plus grande ou de plus en plus petite à partir d'une figure donnée. Ce sont ces procédures, spécifiées pourtant dans le système, que les restrictions posées par Pasch limitent. Enfin, il faut distinguer entre la première sorte de restriction (qui concerne le rétrécissement) et la seconde (qui a trait à l'agrandissement). Le second type de limitation est éliminé grâce à l'élaboration (§§ 5 à 15 de [Pasch 1882a]) d'une géométrie plus générale, la géométrie

---

[46] [Pasch 1882a, p. 17-18]

[47] [*Ibid*. p. 18-19]. Ainsi l'adjonction d'un point à l'infini sur la droite euclidienne engendre un ordre cyclique.

[48] On la trouve chez Houël [1867, p. 50-51].

[49] [Pasch 1882a, p. 19-20].

[50] On pourrait être tenté de lier cette attention portée à la « taille » des figures avec la disparition, abondamment commentée à l'époque (voir [Delboeuf 1893-1895] et pour un commentaire [Panza 1995]), de la similitude dans les géométries non euclidiennes. Rien n'indique, toutefois, que ce soit ce que Pasch ait en tête.

[51] [Pasch 1882a, p. 25] : « Un groupe quelconque de points ou de droites ou de points et de droites dans un plan s'appelle une figure plane. On peut étendre une figure plane soit par l'apport [*Hinzunehmen*] de points et de droites quelconques du même plan, soit par construction [*Construction*], c-à-d ici : par la liaison de points de la figure et par l'indication [*Aufsuchen*] des points d'intersections de ses droites. »

projective. Par contre, les difficultés posées par la diminution de taille ne sont levées que lorsque l'on introduit sur la droite une échelle numérique rationnelle, puis continue (§§ 21 à 23 de [Pasch 1882a]). Le souci de libérer la géométrie des contraintes que nous venons d'énumérer structure, nous tenterons bientôt de le montrer[52], les *Vorlesungen* ; mais les deux types de restrictions, n'ont pas, pour Pasch, la même valeur[53]. Nous nous intéresserons dans la suite, exclusivement au premier genre de limitation.

Quel sens accorder aux contraintes que pose Pasch ? Dans une perspective post-hilbertienne, un système d'axiomes s'applique inconditionnellement à la totalité des modèles qu'il définit. Ces modèles peuvent être extrêmement différents les uns par rapport aux autres, mais tous ont en commun de satisfaire l'ensemble des postulats – c'est ce qui les définit comme modèles. Dans une telle approche, prétendre que les axiomes ne sont pas vrais sur les modèles de la théorie est donc tout simplement dénué de sens. Mais dans la perspective traditionnelle, où les postulats géométriques décrivent les propriétés de certains objets distingués dans l'intuition (les figures), les axiomes s'appliquent aussi inconditionnellement. Toute construction faite en conformité aux principes est permise dans les *Eléments*, et toute déduction établie à partir des axiomes est valide. Une fois énoncés, les postulats sont les seuls critères du vrai. Il est possible de remettre en cause la vérité d'un ou de plusieurs axiomes – c'est ce qui s'est passé avec le postulat des parallèles. Mais il est impossible, à moins de renoncer à la systématicité de la théorie elle-même, de restreindre arbitrairement, à la manière de Pasch, le champ d'application des principes et des procédures de construction.

L'empirisme défendu dans les *Vorlesungen*, qui conduit à considérer que la géométrie élémentaire porte sur des figures observables, c'est-à-dire sur des figures situées dans un espace « accessible » dont les contours ne sont même pas définis, oblige à renoncer à l'idée que la théorie décrit ou définit quoi que ce soit de précis. Le problème n'est pas que Pasch assigne à la géométrie élémentaire un modèle empirique unique, dicté par l'expérience. Le problème est plus radicalement, que, dans les *Vorlesungen*, les axiomes de la géométrie élémentaire ne sont même pas vrais sur le modèle unique qu'ils sont censés décrire. Ce n'est donc pas seulement à l'idée que la théorie définit ses modèles qu'il faut renoncer – c'est la notion même de modèle (que le modèle soit entendu comme ce que décrit ou comme ce que définit la théorie) qu'il faut abandonner. Pour Pasch, la géométrie élémentaire, dont il donne pourtant une axiomatisation rigoureuse, est essentiellement approximative – ses concepts fondamentaux sont intrinsèquement indéterminés et ne valent que dans le domaine très restreint et vaguement défini de nos perceptions moyennes. Allons plus loin : la géométrie élémentaire, bien qu'elle soit présentée sous forme axiomatisée (c'est la première géométrie à l'être !), n'est pas véritablement une théorie : elle ne définit pas de façon précise ses conditions de vérité.

L'étrange statut accordé à la géométrie élémentaire dans les *Vorlesungen* a des conséquences sur la façon dont Pasch développe sa théorie. Nous allons en donner deux exemples. Le premier concerne la notion d'idéalité. Pasch n'oppose pas, comme le fait Klein et les exposés classiques[54], les points propres aux points impropres, idéaux. La notion de point impropre [*Uneigentlich*], seulement idéal, n'est pas une catégorie des *Vorlesungen.* Pasch emploie systématiquement l'adjectif « *beliebig* »[55], lorsqu'il veut signaler que les points dont il parle sont ceux qui répondent à la définition du §6 ; mais il ne se prononce alors pas sur leur caractère propre ou impropre. Le géomètre dit parfois qu'un sous-ensemble des points généralisés est constitué des éléments propres, mais sans statuer sur la nature des autres

---

[52] Cf. notre partie IV.

[53] Voir [Pasch 1882a, p. 126-127]. Pasch motive son refus d'introduire un axiome de continuité en affirmant qu'un tel axiome présuppose son second postulat, celui soumis aux restrictions liées à la diminution de taille. Ces limitations ne sont levées que par l'introduction d'une échelle arithmétique sur la droite projective aux §§ 21-23.

[54] Voir [Coxeter 1947], ou [Whitehead 1907].

[55] « *Beliebig* » signifie « quelconque », ou « au choix ». Nous avons préféré ici parler de point généralisé.

éléments. Ce n'est qu'au §14, dans un contexte extrêmement particulier, que Pasch emploie, pour la première fois, le terme de point « *uneigentlich* ». L'auteur vient d'énumérer les axiomes de congruence, qui portent tous sur des entités géométriques propres. Un des postulats (le huitième) stipule que si, deux figures étant congruentes, on ajoute à l'une des éléments propres, alors il est toujours possible de compléter l'autre afin d'obtenir deux nouvelles figures congruentes. L'objet du §14 est de montrer que, l'homologie entre figures préservant les propriétés projectives, il est possible d'étendre cette relation aux points généralisés définis dans le §6. C'est dans ce contexte, celui d'une généralisation des relations de congruence, qu'il revient sur la « démonstration », présentée à la fin du premier paragraphe, selon laquelle il y a toujours au moins une droite parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite. L'argument, explique Pasch, ne prouve pas l'inexistence du point d'intersection, mais seulement le caractère *uneigentlich*, impropre, du point construit. C'est donc dans un cadre hautement élaboré, faisant intervenir la théorie de la congruence, et son extension aux points généralisés, que Pasch emploie le mot « *uneigentlich* ». Pourquoi une telle prudence[56] ?

Parler de points impropres suppose que l'on puisse avoir accès à la totalité des points « propres », c'est-à-dire que l'on puisse délimiter précisément l'espace dans lesquels sont plongées les figures analysées dans la géométrie élémentaire. Or une telle chose n'est pas possible pour Pasch. Comme nous l'avons expliqué, les postulats des deux premiers paragraphes ne délimitent pas un ensemble de modèles, les espaces « élémentaires » ou « descriptifs ». Les propositions descriptives s'appliquent à des figures dans un espace dont il est essentiel que les contours ne soient pas précisément délimités – d'où l'impossibilité de parler de la totalité des points propres, et de caractériser certains points comme idéaux. C'est donc le statut particulier attaché à la géométrie élémentaire, lui-même induit par l'empirisme radical des *Vorlesungen*, qui explique l'absence de distinction entre points propres et points idéaux. Et le fait que Pasch ait à s'appuyer sur la théorie de la congruence pour démontrer qu'un point est *uneigentlich* confirme le diagnostic.

Précisons encore un peu le propos. Peano, dans une des notes qui concluent son grand article *I Principii di Geometria Logicamente Esposti* [Peano 1889], dans lequel la mathématicien reprend l'essentiel des deux premiers paragraphes des *Vorlesungen*, affirme que lorsque l'on ajoute aux postulats de Pasch un axiome de continuité, alors il existe toujours dans un plan des droites qui ne se coupent pas[57]. Ce résultat constitue plus qu'une avancée mathématique par rapport aux *Vorlesungen* – il signale, nous semble-t-il, un décrochage épistémologique fondamental. Le théorème énoncé par Peano suppose que la géométrie élémentaire est une théorie décrivant la structure de certains espaces – ce que précisément Pasch refuse. Le fait que Pasch laisse ouverte la question des parallèles n'est pas du à un manque d'habileté logique, mais découle directement de sa conception de la géométrie élémentaire, comme géométrie essentiellement approximative, valide sur un espace « proche » (sans que cette « proximité » fasse l'objet d'une définition précise). La théorie « élémentaire » ne décrit pas, pour lui, un espace, mais un environnement. Il est donc absurde de se demander, avec Peano, si les segments de droites coplanaires, prolongées à l'infini, se croisent : un environnement, par définition, n'est pas extensible à l'infini.

On peut illuster les conséquences mathématiques des restrictions que Pasch pose sur les *Grundsätze* d'une autre manière, en se concentrant, non plus sur la différence entre entité idéale et réelle, mais sur les procédures de définition. Nous avons, dans notre seconde section, souligné l'importance du rôle joué par les relations d'équivalence et, sur cette base, qualifié d'« ensembliste » les constructions des *Vorlesungen*. A y regarder de près pourtant, les

---

[56] Pasch ne l'a pas dans son livre d'analyse [1882b] : il distingue en effet, dès son §1, les segments irrationnels des segments rationnels.

[57] [Peano 1889 p. 90-91]. Voir pour une démonstration [Whitehead 1907, p. 10-11].

définitions de Pasch ne sont pas ensemblistes : le géomètre introduit en effet ses concepts de façon indirecte, en donnant une signification à certaines propositions qui les contiennent. Dans le §1 de [1882a], il explique ainsi que définir la droite à partir du segment droit consiste à trouver un équivalent à « C appartient à la droite (AB) » dans lequel le mot « droite » n'apparaît pas – par exemple « C est entre A et B, ou B est entre A et C, ou C est entre A ou B ». De même, dans le §5, Pasch affirme que étendre le sens du mot « gerbe » revient à identifier l'énoncé « g appartient à la gerbe ef » à « efg sont liées deux à deux, mais pas toutes les trois, par un plan (ou efg sont contenues dans un plan mais peuvent être liées par des plans à une droite extérieure à ce plan) ». Pourquoi employer une procédure[58] aussi singulière ? Pourquoi ne pas définir la droite (AB), à la manière de Peano par exemple, comme l'ensemble des points X entre A et B, ou tel que A est entre X et B, ou tel que B est entre X et A[59] ? Pourquoi ne pas introduire la gerbe ef comme l'ensemble des droites coplanaires à e et f ?
Comme le cas de la droite, certainement parce qu'il constitue la première définition, est particulièrement développé dans les *Vorlesungen*, nous allons nous concentrer sur lui. Pasch souligne le fait que le symbole « droite » exprime non pas l'idée qu'un segment est illimité, mais l'idée que les extrémités d'un segment sont indéterminées[60]. Lorsque l'on définit la droite de façon classique, à la manière de Peano, c'est l'idée de prolongement à l'infini d'un segment que l'on privilégie – la référence à tous les points d'une droite est alors requise. Alors que dans la procédure imaginée par Pasch, ce n'est pas le cas : pour vérifier que C est sur (AB), il suffit de prolonger le segment AB jusqu'au point propre C dont il est question dans l'énoncé. Chez Pasch, le contexte propositionnel fournit toujours le point d'arrêt du prolongement du segment. Mais comme ce contexte varie, et comme avec lui varie le point auquel il fait référence, si le prolongement du segment ne se poursuit pas à l'infini, sa fin n'est pas fixée par avance. Dit autrement, c'est la variation des contextes propositionnels qui exprime l'idée d'indétermination, propre à la droite et absente du segment. Pasch fait ici montre d'une étonnante maîtrise et d'une grande subtilité dans l'usage des procédures logiques et de leurs implications philosophiques. Définir le symbole « droite », c'est trouver un équivalent à l'énoncé « C est sur la droite (AB) » – cette simple remarque lui permet de distinguer l'indétermination, fournie par la variation du contexte, de l'illimitation. Notons que le mathématicien n'a pas les mêmes scrupules en analyse qu'en géométrie. Dans son *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, les réels sont d'emblée définis comme segments de rationnel, c'est-à-dire comme des ensembles[61] infinis de nombres – ce qui montre que si Pasch n'emploie pas les définitions aujourd'hui classiques, ce n'est pas par ignorance, mais parce qu'il souhaite maintenir la différence entre espace indéterminé et espace illimité[62].

58 Pasch dans la seconde édition de [1882a] nommera cette procédure « définition implicite ». Il s'agit là d'une reprise de la terminologie hilbertienne. Mais Pasch distingue clairement ses définitions, qui sont substantielles, des définitions purement formelles de Hilbert ; voir [Pasch 1921].

59 Dans [Peano 1889], Peano désigne par ab le segment dont les extrémités sont a et b ; il désigne par $a'b$ (resp ab') : l'« ombre de b (resp a) éclairé par a (resp b) », c'est-à-dire l'ensemble des points x tels que b est entre lui et a. Plus précisément, la droite est définie comme un « segment éclairé par lui-même » (noté (ab)'').

60 [Pasch 1882a, p. 4, 8-9, 20].

61 Il convient d'ajouter que dans ses écrits postérieurs, Pasch introduit la notion d'ensemble [*Menge*] via des définitions implicites ; voir [Pasch 1914, p. 19 sq.]. La notion d'ensemble est donc seconde par rapport au concept de définition implicite.

62 La façon dont Pasch définit ses objets en géométrie est cependant très contraignante. La procédure adoptée n'a absolument pas la généralité des définitions ensemblistes ordinaires ; seuls certains usages des *definiens* sont en effet pris en compte. On peut se demander notamment, dans la perspective qui est la nôtre aujourd'hui, comment la quantification sur des points généralisés (par exemple) peut être justifiée dans le cadre mis en place par Pasch ; a-t-on le droit, sans autre précaution et surtout sans recourir implicitement à des considérations ensemblistes, de détacher les symboles définis de leur contexte ? Le géomètre croit que ces définitions suffisent à engendrer les théorèmes et les concepts de la nouvelle géométrie. Une explicitation de la logique sous-jacente employée dans ses déductions l'aurait probablement convaincu du contraire.

L'idée selon laquelle la géométrie élémentaire est une géométrie empirique et approximative n'est donc pas une prose « philosophique » extérieure à un développement mathématique supposé enfin « rigoureux ». Pasch (là est son intérêt) adapte sa pratique scientifique au statut empirique de son objet d'étude : les propriétés grossières des figures perceptibles de taille moyenne. Il refuse ainsi obstinément toute clôture de l'espace dans lequel sont insérées les figures observables, et tout résultat qui présupposerait une telle clôture ; il évite systématiquement dans ses définitions de faire référence aux points, droites, et plans qui ne sont pas données dans l'expérience. Que la géométrie élémentaire soit axiomatisée ne signifie donc pas qu'elle détermine de façon précise ses conditions de vérité – qu'elle soit une théorie, au sens fort et plein du terme. Chez Pasch, la géométrie élémentaire représente plus une ébauche de théorie, ou une théorie partielle, essentiellement approximative, qu'une doctrine achevée[63]. Comme nous allons maintenant tenter de le montrer, elle constitue en réalité pour lui un point de départ, axiomatisé, destiné à être dépassé.

IV- Algèbre et géométrie

Nous n'avons, pour l'instant, caractérisé que de façon négative le projet de Pasch, en le distinguant de celui de Klein d'une part (sections 1 et 2), de celui de Peano et des autres géomètres logiciens du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle de l'autre (section 3). Les *Vorlesungen* semblent bien constituer un entre-deux hybride, un point d'équilibre instable, entre une démarche fondée exclusivement sur la formalisation des preuves et des définitions et une approche intégrant les contraintes pesant sur l'intuition dans le cours même du raisonnement. Profondément innovante, l'entreprise de Pasch n'en resterait pas moins ambiguë – le mathématicien ne parviendrait pas à rompre les liens avec une conception faisant de la géométrie une théorie des figures sensibles. On ne peut cependant se satisfaire d'un tel diagnostic. Que l'entreprise de Pasch ne soit ni celle de Klein, ni celle de Peano ou de Hilbert, ne la condamne pas nécessairement à l'ambivalence. Nous tenterons dans cette section finale de restituer la cohérence et l'unité de la démarche des *Vorlesungen.*

Repartons de Klein. L'auteur du programme d'Erlangen oppose fréquemment l'intuition naïve, vague et inexacte, à l'intuition raffinée, absolument précise[64]. Selon lui, le passage de l'une à l'autre s'effectue par le biais de la formulation d'axiomes :

> L'axiome est pour seulement moi *l'exigence* [*Forderung*] par laquelle des *énoncés exacts sont substitués* à l'intuition inexacte [*in die ungenaue Anschauung genaue Aussagen hineinlege*]. [Klein 1890, p. 381]

L'intuition géométrique ordinaire ne détermine pas s'il existe ou non une parallèle unique à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite. Les systèmes euclidiens et non euclidiens, en choisissant entre ces possibilités, ne font qu'explorer les différentes voies laissées ouvertes par l'expérience spatiale ordinaire. Pour Klein, l'axiomatisation est un outil permettant de prolonger ce que l'intuition ne fait qu'ébaucher – elle est en quelque sorte une prothèse, palliant partiellement à la faiblesse de notre intuition[65].

Pasch partage avec Klein l'idée que la géométrie élémentaire est essentiellement vague, approximative, compatible avec les théories euclidiennes aussi bien que non euclidiennes. Il partage également la thèse selon laquelle les diverses géométries métriques, ainsi que la

[63] Il y a là un surprenant paradoxe historique : c'est le « le père de la rigueur en géométrie », celui qui présente pour la première fois une géométrie sous forme axiomatique, qui en souligne le caractère fondamentalement approximatif.

[64] Cette opposition traverse l'ensemble des mathématiques, aussi bien l'analyse (Cf. [Klein 1883]) que la géométrie (Cf. [Klein 1890]).

[65] [Klein 1890, p. 382]. Cette description s'applique aussi à des domaines étrangers à la géométrie. Pensons au rôle joué par l'axiomatisation en logique modale, où l'élaboration des différents systèmes supplée de différentes manière à la faiblesse de notre intuition.

géométrie projective, ne sont pas soumises aux mêmes restrictions et à la même indétermination que la géométrie élémentaire. Mais il se distingue de Klein sur deux points : le caractère indéterminé de l'intuition naïve n'est pas, selon lui, incompatible avec une formalisation de son contenu (dans les *Vorlesungen*, la géométrie élémentaire est axiomatisée) ; il n'est pas vrai, en second lieu, que la formulation d'axiomes suffise à substituer à une intuition vague, une connaissance précise. Pour passer de la géométrie élémentaire à la géométrie projective, des définitions, non de nouveaux postulats, sont requises. Si Pasch reprend la distinction kleinienne des deux régimes (inexact et exact) de connaissance, il ne conçoit ni la forme primitive de connaissance, ni le mouvement conduisant à la forme plus élaborée, de la même manière que son collègue.

La divergence entre les deux mathématiciens manifeste en réalité une différence plus profonde dans la façon de concevoir le rapport entre intuition et concept. Pour Klein, l'indétermination de la géométrie élémentaire est intrinsèquement liée à son caractère intuitif – autrement dit, déterminer la source (conceptuelle ou intuitive) d'un ensemble de connaissances, c'est, pour lui, qualifier la nature (exacte ou approximative) d'un certain savoir. Il n'en va pas de même pour Pasch. Selon lui, la géométrie élémentaire provient certes de l'intuition sensible, mais elle est exprimable sous forme axiomatique ; et ce sont les restrictions posées sur le champ de validité des concepts et des postulats qui rend la théorie approximative. Autrement dit, le statut de l'indétermination se transforme : le vague n'est plus conçu par Pasch comme le propre de l'intuition sensible, mais comme la propriété de certains concepts[66].

Mais nous n'avons fait ici, une nouvelle fois, qu'attirer l'attention sur les singularités des *Vorlesungen*, sans expliquer véritablement la cohérence de l'œuvre. D'où vient l'intransigeance logique affichée par Pasch dans le traitement des éléments idéaux ? Quelle est l'origine de la caractérisation de la géométrie élémentaire comme simple ébauche de théorie ? Comment ressaisir l'unité de deux exigences (exigence logique de rigueur et exigence empiriste de limitation) à première vue antagoniques ?

Dans notre première section, nous avons évoqué l'importance qu'ont eu, pour Pasch, les articles de Klein, parus dans les *Mathematische Annalen*. Si cette influence a été fondamentale, il nous semble que l'agenda des *Vorlesungen* provient en réalité d'une autre source. Klein appartient à un courant de pensée, représenté en Allemagne par Möbius et Plücker (dont Klein a été l'élève), qui n'oppose pas l'analyse à la géométrie. Le maître d'Erlangen combine constamment, dans ses articles, des considérations algébriques à des raisonnements purement géométriques. Cette tradition s'est opposée, tout au long du siècle, à un autre courant de pensée, dont les plus illustres représentants ont été Steiner en Allemagne et Poncelet en France, et dont l'objectif a été d'élaborer une géométrie pure, complètement indépendante de l'algèbre. Ce second lignage est clairement revendiqué dans l'introduction des *Vorlesungen*, où Pasch oppose la nouvelle géométrie à la fois à la géométrie euclidienne et à la géométrie analytique, à laquelle il reproche d'importer systématiquement la notion

[66] Lorsque Veblen, en 1904, introduit pour la première fois le terme de catégoricité, c'est précisément dans le contexte géométrique que l'on vient d'évoquer [Veblen 1904, p. 304-305]. L'auteur prend comme exemple de théorie non catégorique (c'est-à-dire de théorie dont les modèles ne sont pas tous isomorphes) la géométrie élémentaire au sens de Pasch, qui peut être complétée par différents axiomes des parallèles. Un système non catégorique est pour Veblen une sorte de théorie mère qui se spécialise en théories plus fines, plus précises ; ce genre de doctrine joue donc exactement le même rôle que l'intuition naïve de Klein – celui d'une matrice. Pasch pourrait constituer le chaînon manquant entre Klein et Veblen ; en effet, dans les *Vorlesungen*, l'indétermination devient la propriété d'un *corpus* conceptuel, non plus d'une intuition. Il n'est toutefois pas possible de considérer la géométrie élémentaire de Pasch comme une théorie non catégorique. Si elle est bien axiomatisée, la géométrie élémentaire (voir notre section 3) ne définit ou ne décrit dans les *Vorlesungen* aucun modèle. Pour une histoire du concept de catégoricité, voir [Corcoran 1980], [Scanlan 1991], [Awodey et Reck 2002] ; mais aucun de ces auteurs ne remontent jusqu'à Klein ou Pasch.

étrangère de nombre, et de résoudre les problèmes de construction par le calcul[67]. Cette double opposition, absente chez Klein, est au cœur du programme des « géomètres ». Pour Poncelet comme pour Chasles, le défaut majeur de l'ancienne géométrie consiste à multiplier les distinctions de cas et à ne pas parvenir à une généralité de traitement[68]. Selon eux, les méthodes analytiques ne souffrent pas d'un tel vice, car l'équation donne le moyen d'unifier ce qui est distingué dans l'intuition. Ainsi, la possibilité de représenter l'ellipse, l'hyperbole et la parabole par un même type d'équation permet d'élaborer une théorie générale des coniques. Mais, pour Poncelet et Chasles, ce gain en généralité se paie au prix fort, car il conduit à introduire dans la théorie des éléments non géométriques, les nombres. Le but, pour eux, est donc de réformer l'ancienne géométrie afin de lui donner la puissance et la généralité de l'analyse, sans pour autant la dénaturer, c'est-à-dire lui faire perdre son statut de géométrie.

Pasch reprend constamment, dans les *Vorlesungen*, le thème de la distinction des cas et de leur nécessaire dépassement dans une géométrie devenue enfin générale. Citons ce passage[69], particulièrement représentatif, qui suit l'introduction des points « généralisés » :

> La poursuite de notre réflexion nous amène maintenant à expliquer [*erläutern*] par des figures des théorèmes dans lesquels des points généralisés apparaissent. Tout point de ce genre peut dans la figure être admis comme point propre ou être indiqué simplement par deux droites. Par conséquent, pour chaque point de ce genre, on peut distinguer dans la représentation deux cas, et les cas à représenter se multiplieront très rapidement avec le nombre des points. Mais il n'est pas toujours nécessaire de tenir compte des différents cas. Là où dans la preuve elle-même on distingue plusieurs cas, on doit expliquer chacun des cas sur des figures particulières. Si toutefois la preuve est conduite de manière unitaire, une seule figure, illustrant un cas quelconque, remplit parfaitement sa fonction. [Pasch 1882a, p. 43]

La nécessité de distinguer différents cas naît, dans les *Vorlesungen*, de la limitation de l'espace donné[70]. Deux droites coplanaires ne déterminent pas toujours une intersection ; selon la disposition des droites sur la portion de plan du morceau d'espace considéré, une telle intersection existe ou non. Et c'est le désir de se libérer des pesanteurs de la géométrie élémentaire qui gouverne l'élaboration d'une nouvelle géométrie générale. L'avantage du concept généralisé de point est précisément, explique Pasch, qu'il nous dispense de distinguer les cas où deux droites se coupent des cas où elles ne se coupent pas[71].

---

[67] [Pasch 1882a, p. 1] : « La nouvelle géométrie constitue, d'après son origine, une alternative non pas tant à la géométrie des Anciens qu'à la géométrie analytique » [premère phrase de l'introduction].

[68] Voir par exemple [Chasles 1889, p. 2] : « Nous avons eu en vue surtout, en retraçant la marche de la Géométrie, et en présentant l'état de ses découvertes et de ses doctrines récentes, de montrer par quelques exemples, que le caractère de ces doctrines est d'apporter, dans toutes les parties de la science de l'étendue, une facilité nouvelle et les moyens d'arriver à une généralisation, jusqu'ici inconnue de toutes les vérités géométriques ; ce qui avait été aussi le caractère propre de l'Analyse, lors de son application à la Géométrie. Aussi conclurons-nous de notre Aperçu, que les ressources puissantes que la Géométrie a acquises depuis une trentaine d'années sont comparables, sous plusieurs rapports, aux méthodes analytiques, avec lesquelles cette science peut rivaliser désormais, sans désavantage, dans un ordre très étendu de questions. »

[69] Voir également [Pasch 1882a, p. 2-3].

[70] Pasch précise que par différence de « cas », il entend une différence prise en compte par le géomètre, qui n'est pas engendrée par le système axiomatique ou le mouvement de la preuve lui-même. Ainsi, les distinctions dues à l'ordre entre les éléments d'une figure, qui constituent un genre particulier de « cas de figure » chez Euclide, ne sont pas considérés comme tels par Pasch : les axiomes d'ordre permettent en effet de reprendre, au niveau de la preuve, une différence qui chez Euclide affectait seulement la disposition intuitivement saisie des éléments dans la figure. La nécessité de tenir compte des différences de « cas » en géométrie élémentaire ne provient donc dans les *Vorlesungen* que des restrictions « externes » posées, à la fin du §1, sur le champ de validité des propositions fondamentales, notamment sur celles afférant au prolongement des segments.

[71] Signalons que, pour Pasch, la géométrie projective n'est pas complètement générale. Les restrictions concernant les constructions et l'« extension » des figures sont levées dans la nouvelle géométrie, mais non celles concernant l'axiome II. Ainsi, en géométrie projective, des points que Klein considéreraient comme différents mais « très proches » ont les mêmes coordonnées homogènes (cf. [Pasch 1882a, p. 176-201]). Pour libérer complètement la géométrie projective de toutes les limitations, il faut, explique Pasch, introduire la continuité arithmétique sur la droite projective, et substituer les points mathématiques, identifiés par leur coordonnées homogènes réelles, aux points géométriques généralisés. Si Pasch accorde que la théorie projective est plus générale que la géométrie des Anciens, il reste donc réservé sur sa capacité à rivaliser complètement avec les méthodes analytiques. Que ses recherches futures se soient orientées vers les fondements de l'analyse n'est ainsi pas surprenant.

L'unification proprement géométrique (qui ne fait pas référence à une équation) réclamée par les tenants d'une méthode purement synthétique passe par l'introduction de nouvelles entités, notamment des points complexes et des points à l'infini, qui permettent de suppléer aux éléments dont l'absence conduit à distinguer entre divers cas. Toute la question est de savoir comment justifier cet enrichissement de l'ontologie géométrique traditionnelle. Poncelet, on le sait, légitime l'introduction des éléments idéaux par son célèbre et fort contesté principe de continuité, selon lequel « les propriétés métriques ou descriptives d'une figure donnée demeurent applicables, sauf les variations de signes et de positions des parties, à toutes les figures [dérivant de la première par un mouvement réel et géométriquement possible] »[72]. Ainsi, « si la figure primitive renfermait une droite et un cercle […], et que cette droite rencontrât d'abord la circonférence de ce cercle en deux points, on pourrait concevoir qu'elle se détachât ensuite du cercle par un mouvement continu ; alors les deux points dont il s'agit cesseraient d'être réels […], et la nouvelle figure serait […] en corrélation idéale avec la première »[73]. Chasles, comme Steiner, reprendront, en le modifiant, ce principe, critiqué par Cauchy. Mais l'essentiel pour nous est que tous les partisans de la géométrie pure qui précèdent Pasch considèrent qu'un nouvel axiome est requis pour garantir à la géométrie projective sa généralité.

L'originalité de Pasch est, dans cette optique, de construire la nouvelle géométrie à partir de l'ancienne sans introduire de principes supplémentaires. Certes, Pasch n'use jamais, comme le fait Poncelet, de points, de droites ou de plans de l'espace complexe ; dans cette mesure, l'« ontologie » des *Vorlesungen* est moins riche que celle des traités de Poncelet. Mais lorsque Pasch généralise les éléments de la géométrie traditionnelle, il ne se réfère jamais à un nouveau « principe » ; ce sont des définitions (les définitions implicites des §§5 à 9) qui engendrent les nouveaux concepts, et rendent l'élaboration de la nouvelle géométrie possible[74]. La formalisation des preuves et des définitions joue là un rôle décisif. Comme nous l'avons montré, Pasch, lorsqu'il introduit les points « *beliebig* », démontre l'indépendance (l'existence et l'unicité) des entités définies. Cette démonstration, essentielle si l'on veut éviter tout recours à l'intuition, suppose l'axiomatisation de la géométrie élémentaire. Plus généralement, ce n'est que parce qu'il a formalisé les relations géométriques fondamentales que Pasch est en mesure de démontrer que les concepts étendus possèdent les propriétés d'incidence et d'ordre que les géomètres purs attribuent aux nouvelles entités dont ils dérivent l'existence du principe de continuité. Autrement dit, si Pasch peut se passer d'un principe de continuité, ce n'est que parce qu'il a réussi à formaliser et à axiomatiser la totalité de la géométrie élémentaire.

L'insertion de [Pasch 1882] dans la tradition synthétique de Poncelet et Steiner permet ainsi, semble-t-il, d'expliquer ce sur quoi nous butions jusqu'à présent, à savoir le double traitement dont la géométrie élémentaire fait l'objet dans les *Vorlesungen*. Si Pasch « dévalorise » la géométrie élémentaire, c'est parce qu'il l'assimile à la géométrie imparfaite des Anciens. L'essentielle indétermination de cette première théorie est précisément, pour lui, ce qui fonde la nécessité de distinguer les cas de figure. Mais il est en même temps essentiel que cette géométrie élémentaire inexacte soit complètement axiomatisée, car Pasch, à la différence de ces prédécesseurs veut engendrer, sans nouveau principe, les principaux concepts projectifs.

[72] [Poncelet 1862, p. 337]

[73] [Poncelet 1862, p. 301]

[74] Bien entendu, l'extension de la seule notion de « point » ne suffit pas. Pasch explique qu'entre deux points généralisés, il n'est pas toujours certain que l'on puisse tirer une droite. D'où la nécessité, dans le paragraphe sept, de redéfinir la notion de « droite » en terme de faisceau généralisé de plans ; puis dans le paragraphe huit, d'introduire un concept étendu de plan et finalement d'adapter, dans le paragraphe neuf, les axiomes d'ordre à la nouvelle situation. Ces généralisations graduelles des *Grundbegriffe* sont commandées par le souci de pouvoir effectuer les constructions sans avoir à prendre en compte les différences de position à l'intérieur d'un espace limité. L'exigence de généralité et d'unité de traitement dans les constructions animent de l'intérieur le processus de redéfinition entamé au paragraphe cinq.

Et la formalisation est le seul moyen permettant de garantir qu'aucun élément extérieur au système ne s'introduise dans la dérivation. Vue dans cette perspective, l'entreprise de Pasch acquiert une cohérence : l'exigence de formalisation, loin de s'opposer à la dévalorisation dont la géométrie élémentaire fait l'objet, est au fondement du dépassement de ce qui ne constitue pour le mathématicien qu'une première ébauche. La pensée de Pasch est essentiellement dynamique. L'auteur des *Vorlesungen* veut montrer que l'ancienne géométrie contient tous les éléments nécessaires à sa propre généralisation, et la formalisation est la seule façon de manifester la possibilité de cet auto-engendrement.

Reste une difficulté, touchant à la nature de la nouvelle géométrie. Pour Poncelet, le propre des méthodes pures était de ne porter que sur les figures et sur les relations entre les figures. Lorsque le géomètre critiquait les méthodes analytiques, il fustigeait toujours l'introduction des « hiéroglyphes » (les équations) gauchissant les traits de l'objet étudié. Pasch, au contraire, estime que ce sont les concepts de preuve et de définition, qui, dans la nouvelle géométrie, doivent être mis en avant. Défendre les méthodes synthétiques, ce n'est pas, pour lui, replacer la figure et ses propriétés au cœur de la théorie, mais s'assurer du caractère non lacunaire des dérivations et des constructions[75]. Ainsi, la nouvelle géométrie est-elle parfois qualifiée de géométrie sans figure : les « figures » généralisées sont des ensembles très élaborés de droites, de plans, et de points « propres » qui échappent à toute visualisation. Pire, Pasch, dans des textes annonçant Hilbert[76], affirme qu'en réalité, dans la géométrie projective, les symboles « point », « droite » et « plan » perdent toute signification pour devenir de simples symboles dont l'usage est fixé de façon autonome à l'intéreur du système axiomatique[77]. Ainsi, comme, par dualité, « point » et « plan » généralisés occupent des positions symétriques, il est toujours possible de substituer l'un des termes à l'autre dans un théorème sans modifier sa validité[78]. « Point » et « plan » généralisés ne sont plus ici des entités spatiales, mais de simples mots assurant les mêmes fonctions au sein du système. La généralisation de la géométrie a donc un prix, chez Pasch : celui de la perte de ce qui constituait sa singularité, la référence aux figures. L'auteur des *Vorlesungen* parvient à son objectif en évitant de recourir à un principe de continuité ; mais, ce faisant, il vide les concepts géométriques de leur contenu.

D'où la question : la géométrie projective, au sens de Pasch, est-elle encore une géométrie ? En identifiant la méthode synthétique à la formalisation des preuves et des constructions, en s'appuyant sur l'axiomatisation pour généraliser la géométrie élémentaire, le mathématicien de Giessen ne renonce-t-il pas, comme les tenants des méthodes analytiques qu'il dit pourtant combattre, à la singularité de la géométrie elle-même ? Ces questions ne se poseront plus après les *Grundlagen* de Hilbert, tout lien entre géométrie et figure, plus généralement entre géométrie et espace, étant définitivement détruit. Mais pour Pasch, le problème reste crucial, dans la mesure où, comme nous l'avons montré, il entend se situer dans la même tradition que Poncelet, Steiner et Chasles. Sur quoi porte donc la géométrie projective, chez Pasch ?

L'auteur répond à la question dans la conclusion du §9 des *Vorlesungen* :

> [Dans la nouvelle géométrie] lorsque […] nous recherchons à partir d'une figure donnée, une autre qui ait avec elle une relation déterminée, nous traitons du problème dans son sens général et cherchons pour la figure inconnue une construction qui puisse être appliquée selon une règle unique dans tous les cas possibles. Ce n'est qu'au niveau des résultats que les exigences de limitation éventuelle trouvent leur justification. [Pasch 1882a, p. 71-72]

---

[75] L'auteur des *Vorlesungen* dénonce ainsi vivement les lacunes des preuves euclidiennes – l'absence d'axiomes d'ordre notamment ; voir [Pasch 1882a, p. 44-46].

[76] Si la comparaison est naturelle, il faut tenir compte des limitations que donne Pasch à sa thèse. Ce n'est pas pour lui dans toutes les axiomatiques que le sens des concepts peut être mis entre parenthèses ; ainsi, cela ne vaut pas pour la géométrie élémentaire. L'abstraction est le point d'arrivée d'un long processus qui de la géométrie élémentaire nous fait passer à la géométrie projective, générale. Elle n'est pas un point de départ comme chez Hilbert.

[77] Voir [Pasch 1898a, p. 98-99] et l'extrait cité en introduction.

[78] [Pasch 1898a, p. 98-99].

La géométrie de position est définie ici comme l'étude générale des constructions géométriques, c'est-à-dire l'étude de certaines opérations (liaison de points par une droite ou un plan, intersection de droites en un point, intersection de plans en une droite ou un point) qui, effectuées sur des figures propres, engendrent de nouvelles figures. Pasch affirme que la définition des concepts projectifs a pour seul but de traiter, dans le cas général, des questions de construction. Autrement dit, ce sont les problèmes posés par les opérations géométriques de construction sur les figures propres qui sont déclarés être ici le « vrai » sujet de la nouvelle géométrie. L'émergence d'une approche abstraite, purement « linguistique », des concepts projectifs fondamentaux est liée à la pratique géométrique la plus classique : si la nouvelle géométrie ne porte plus directement sur des objets, c'est parce qu'elle s'intéresse, explique Pasch, à des opérations sur les objets.

Le mathématicien poursuit sa réflexion en établissant une comparaison très éclairante avec l'analyse :

> L'analyse procède de la même manière lorsque, à partir de nombres donnés, on en calcule un autre ayant avec eux une relation déterminée. Elle enseigne à trouver toutes les solutions subsumées sous le concept le plus général de nombre, sans se préoccuper des causes du problème, dont la nature nécessite fréquemment un genre de nombre particulier. [Pasch 1882a, p. 72]

Les constructions en géométrie, nous dit Pasch, jouent exactement le même rôle que les équations en algèbre. Le rapport entre construction et figure est le même que celui entre équation et nombre – dans une construction comme dans une équation, une figure ou une quantité inconnue est déterminée à partir d'opérations sur des figures, ou sur des quantités, connues[79]. Pour pouvoir étudier les équations en tant que telles, les mathématiciens ont graduellement étendu la notion de nombre entier – ils ont peu à peu admis l'existence des nombres fractionnaires, négatifs, algébriques, puis complexes. Ces extensions ne signifient pas, suggère Pasch ici, que ces nouveaux nombres existent au même titre que les entiers. La généralisation effectuée n'est que la conséquence de la décision de considérer les équations, c'est-à-dire les relations entre entiers, comme un objet d'étude à part entière[80]. De même, en prenant pour objet d'analyse les constructions, la nouvelle géométrie est amenée à redéfinir les éléments de l'espace sur lequel elle opère. Cela ne signifie pas pour autant que son étude porte sur des « points », « droites » et « plans » plus généraux. Cela signifie simplement le géomètre projectif entend résoudre les problèmes de construction de façon complètement générale, sans se préoccuper des limites de l'espace donné dans l'expérience perceptive. Dit autrement, la géométrie projective a dans les *Vorlesungen* le statut d'une algèbre géométrique. L'algèbre (la théorie des équations) est à l'arithmétique (la théorie des entiers), exactement ce que la nouvelle géométrie (la théorie des constructions) est à l'ancienne (la théorie des figures)[81]. Le mouvement de formalisation, qui de la géométrie élémentaire conduit à la géométrie projective, a donc un sens très particulier chez Pasch : il ne s'agit pas encore, chez lui, d'élaborer une théorie purement abstraite de l'espace, mais de produire une doctrine générale des opérations de construction sur les figures.

* * *

[79] Ce passage et d'autres (Cf. Pasch [1882a, p. 45-47]) conduisent à établir une relation entre le rôle joué par la figure en géométrie projective et le rôle de la lettre indéterminée en algèbre. Une figure projective représente plusieurs « cas » différents, exactement comme la lettre indéterminée représente plusieurs nombres – une figure projective est ainsi une sorte de variable. Pasch souligne que ce nouveau rôle de la figure a un avantage, dont tous les géomètres du XIX^{ème} ont tiré parti : les éléments à « l'infini » peuvent être représentés par des objets propres. Pour un exemple saisissant de cet emploi projectif des figures, voir par exemple la représentation des « régions triangulaires » dans le plan projectif que donne Veblen et Young dans leur [1918, p. 67-69].

[80] Sur ce point, Pasch a vraisemblablement été influencé par Kronecker, dont il a été l'élève.

[81] On trouve une liaison similaire effectuée entre géométrie projective et algèbre, comme théorie des équations dans [Poncelet 1862, p. 333-336].

Deux mouvements de pensée coexistent chez Pasch : un mouvement de formalisation des preuves et des définitions (qui annoncent les lignes de force des mathématiques futures) – une analyse plus idiosyncrasique de la géométrie élémentaire comme proto-théorie dont la validité est drastiquement limitée. Ces deux affirmations sont en conflit l'une avec l'autre. Considérer Pasch comme l'héritier de la tradition synthétique inaugurée par Poncelet permet d'atténuer la tension. Cette approche explique en effet pourquoi le mathématicien dévalorise la géométrie élémentaire (identifiée à la géométrie des Anciens) qu'il est pourtant le premier à complètement axiomatiser – c'est en effet seulement la formalisation complète de cette géométrie imparfaite qui permet de la dépasser, et d'atteindre, sans recourir au principe de continuité, à la généralité des méthodes projectives.

Les *Vorlesungen* ne sont donc pas un ouvrage ambigu, hybride, encore pré-hilbertien. Un tel jugement n'est que le fruit d'une lecture rapide, qui fait du traité de Pasch un marche-pied conduisant aux *Grundlagen*. Notre proposition ici a été d'inverser la perspective, et d'interroger l'origine du vaste mouvement de formalisation des mathématiques que Hilbert va initier. Ce programme ne naît pas de nul part ; il prend sa source dans les débats suscités, au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, par l'émergence de la « nouvelle » géométrie.

Que le mouvement d'axiomatisation soit lié au développement de la théorie projective, n'est certes pas une idée nouvelle ; Nagel le défendait déjà en 1939 dans son grand article *The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry*. Mais le commentateur insistait surtout sur Plücker et sur le rôle joué par le principe de dualité (en lequel il voyait les prémices du concept moderne d'interprétation). Le filon que nous nous sommes attaché ici à creuser n'est pas le même. La lecture des *Vorlesungen* invite en effet à concevoir le processus d'axiomatisation comme une solution au programme élaboré par Poncelet : renouveler la géométrie des Anciens en la dotant de la puissance de l'analyse. Chez Pasch, ce débat entre géomètres et algébristes prend un tour nouveau ; il ne s'agit plus, pour lui, de généraliser l'objet de la géométrie, mais de restaurer la structure axiomatique d'un *corpus* – de construire la nouvelle géométrie à travers une formalisation progressive de l'ancienne. Si le traité de Pasch ouvre la voie aux mathématiques formelles du début du XX$^{\text{ème}}$ siècle, c'est en cherchant à répondre à la question, élaborée au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, de la nature des méthodes synthétiques[82].

[82] Cet article est une version remaniée d'une conférence prononcée dans le cadre du séminaire de philosophie du PHIER à Clermont. Il a bénéficié des critiques des auditeurs et des collègues du centre de recherche. Je profite de l'occasion pour les remercier.

AWODEY S., RECK E.,
[2002] Completeness and Categoricity : 19th century axiomatics to 21st century semantics, *History and Philosophy of Logic*, 23, pp. 1-30, 77-94, 2002.

CHASLES L.
[1889] *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie projective*, Paris : Gauthiers-Villard, 1889.

COXETER H. S.
[1949] *The Real Projective Plane*, York : Maple Press Company, 1949.
[1947] *Non-Euclidean Geometry*, seconde édition, Toronto : Toronto University Press, 1947.

CORCORAN J.
[1980] Categoricity, *History and Philosophy of Logic*, 1, p. 187-207.

DELBOEUF J.
[1893-1895] L'ancienne et les nouvelles géométries (I-IV), *Revue Philosophique*, XXXVI, 1893, p. 449-84, XXXVII, 1894, p. 353-383, XXXVIII, 1894, p. 113-147, XXXIX, 1895, p. 345-371.

DUGAC P.
[2003] *Histoire de l'analyse – autour de la notion de limite et de ses voisinages*, Paris : Vuibert, 2003.

ENRIQUES F.
[1911] *Fondements de la géométrie. Géométrie générale*, in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, tome III, volume 1, J. Molk éd., Paris : Gabay, 1991.

FREGE G.
[1976] *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Gabriel G. et alii éds, Hamburg : Felix Meiner, 1976.

HILBERT D.
[1899] *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1899 ; trad. fr. commentée de la 10ème édition par P. Rossier, Paris : Dunod, 1971.

HOUËL J.
[1867] *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur XXXII premières propositions d'Euclide*, Paris : Gauthier-Villars, 2nde éd., 1883.

KLEIN F.
[*Werke*] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921-1923), I-III
[1871] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Mathematische Annalen*, 4, 1871, cité d'après [*Werke*] 1, p. 254-305.
[1873] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, zweiter Aufsatz, *Mathematische Annalen*, 6, 1873, cité d'après [*Werke*] 1, p. 311-343.
[1874] Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie", *Mathematische Annalen*, 7, 1874, cité d'après [*Werke*] 1, p. 344-352.
[1883] Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve, *Mathematische Annalen*, 1883.

[1890] Zur Nicht-Euklidischen Geometrie, *Mathematische Annalen*, 1890
[1893] *On the mathematical character of space intuition and the relation of pure mathematics to the applied sciences*, Evanston Colloquium.
[1909] *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte ; Teil 2 Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1909, cité dans la trad. anglaise de E. R. Hedrick et C. A. Noble, New York : Dover, 1925.

KLEIN F. et ROSEMANN W.
[1928] *Vorlesungen über nicht euklidische Geometrie*, Berlin : J. Springer, 1928.

LELONG-FERRAND J.
[1985] *Les fondements de la géométrie*, Paris : PUF, 1985.

NABONNAND P.
[2002] Des « Grundbegriffe » aux « Stammbegriffe », in *Histoires de Géométries, textes du séminaire de l'année 2002*, Paris : Maison des Sciences de l'Homme.

NAGEL E.
[1939] The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry, *Osiris*, 7, 1939, p. 142-224.

PANZA M.
[1995] L'intuition et l'évidence. La philosophie kantienne et les géométries non euclidiennes, in *Les savants et l'épistémologie vers la fin du XIX^{ème} siècle*, Panza M. et Pont J-C. éds, Paris : Blanchard, 1995.

PASCH M.
[1882] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1882 ; 2ème édition avec un supplément de Max Dehn, *Die Grundlegung der Geometrie in Historischer Entwicklung*, Berlin : Springer, 1926.
[1908] *Grundlagen der Analysis*, Leipzig und Berlin : Teubner, 1908.
[1914] *Verändliche und Funktion*, Leipzig und Berlin : Teubner, 1914.

PEANO G.
[1957-59] *Opere scelte*, 3 vols, Rome : Cremonese.
[1888] *Calcolo Geometrico secundo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Turin : Fratelli Bocca, 1888 ; trad. anglaise de L. Kannenberg, Basel : Birkhauser, 2002.
[1889] I principii di geometria logicamente esposti, Turin : Bocca, in *Opere scelte* 2, p. 56-91.
[1894a] Sui Fondamenti della Geometria, *Rivista di matematica*, vol. IV, 1894, p. 51-90.
[1894b] Notations de logique mathématique, Introduction au formulaire de mathématiques, Turin : Guadagnini, cité in *Opere scelte* 2, p. 123-176.

PONCELET J.-V.
[1822] *Traité des propriétés projectives des figures*, Paris : Bachelier, 1822.
[1862] *Applications d'analyse et de géométrie, qui ont servi, en 1822, de principal fondement au Traité des propriétés projectives des figures*, tome II, Paris : Mallet-Bachelier, 1862

RICHARDS J.
[1988] *Mathematical Visions : the pursuit of geometry in Victorian England*, London : Academic Press, 1988.

RUSSELL B.
[1903] *The Principles of Mathematics*, Londres : Routledge, 2nde éd., 1937.

SCANLAN M. J.
[1991] Who were the American postulate theorists ?, *Journal of Symbolic Logic*, 56, p. 981-1002.

STAUDT G. K. C. von
[1847] *Geometrie der Lage*, Nuremberg : Bauer und Raspe, 1847. Trad. italienne de M. Pieri, *Geometria di posizione* di Georgio von Staudt, avec une présentation des travaux de Staudt de C. Segre, Turin : Bocca, 1889.

TORETTI R.
[1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1978.

VEBLEN O.
[1904] A System of Axioms for Geometry, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 5, n°3, 1904, p. 343-384.

VEBLEN O. et YOUNG J. W.
[1910] *Projective Geometry vol. 1*, Boston : Ginn, 1910.
[1918] *Projective Geometry vol. 2*, Boston : Ginn, 1918.

WHITEHEAD A. N.
[1898] *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge : Cambridge University Press, 1898, rééd. New York : Hafner, 1960.
[1906b] *The axioms of projective geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906, rééd. New York : Hafner, 1971.
[1907] *The axioms of descriptive geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1907, rééd. New York : Hafner, 1971.