La réception des Vorlesungen über neure Geometrie de Pasch par Peano

Sébastien Gandon

La réception des *Vorlesungen über neure Geometrie* de Pasch par Peano

Résumé : Peano écrit en 1888 le *Calcolo geometrico*. Un an après, il publie *I principii di geometria*, où il développe, dans le sillage des *Vorlesungen über neure Geometrie* de Pasch, une axiomatisation de la géométrie. Comment concevoir le rapport entre ce projet et celui du calcul géométrique ? Dans cet article, nous soulignons le profond fossé entre les deux entreprises : alors que l'élaboration d'une algèbre géométrique vise chez Peano à manifester la singularité des grandeurs spatiales par rapport aux nombres, l'axiomatisation se développe de façon autonome et sans aucune référence à la distinction entre entités géométriques et numériques. Mais nous montrons dans un second temps que la façon dont Peano lit Pasch est complètement tributaire de son engagement antérieur dans la tradition grassmannienne : le segment *AB* n'est pas pour lui comme il l'est pour Pasch un objet observable, mais le résultat d'un certain produit de points. Le tableau, au final, est assez complexe : d'une part, calcul et axiomatique sont supportées par des conceptions fondamentalement opposées de l'objet géométrique ; en même temps, la méthode axiomatique, telle qu'elle se développe dans *I Principii*, résulte d'une lecture de Pasch selon une grille élaborée dans le *Calcolo*.

Abstract : Peano wrote the *Calcolo geometrico* in 1888. One year later, in 1899, he published *I Principii di geometria*, in which he developed, following Pasch's wake, an axiomatisation of geometry. What is the relationship between this work and the previous elaboration of a geometrical calculus ? In this article, we outline the deep difference between the two methods : althrough the construction of a geometrical algebra aimed at showing the specificity of spatial magnitudes, the axiomatisation does not refer to the ontological distinction between geometrical and numerical entities. However, we show that the way Peano read Pasch's *Vorlesungen* depended on his previous involvement in the Grasmannian tradition : for him, the segment *AB* does not refer (as it did for Pasch) to an observable object, rether, *AB* designates the result of a new geometrical product. In the end, the situation is quite complicated : on the one hand, the algebra and the axiomatic are grounded, in Peano's thought, on completely opposite conceptions of geometrical object ; on the other, the axiomatic method, as it is developed in *I Principii*, results directly from an interpretation of Pasch entirely based on the *Calcolo*.

En 1889, Peano rédige deux articles qui constituent le point de départ de son entreprise de réécriture de l'ensemble des mathématiques : le très célèbre *Arithmetices Principia, nova methodo esposita*, consacré aux fondements de l'arithmétique, et *I principii di geometria logicamente esposti*, portant sur les principes de la géométrie. Comme le manifeste le choix des sous-titres, une commune « nouvelle méthode d'exposition », logique, axiomatique, se dégage de ces travaux. Dans la préface du premier opuscule, Peano caractérise son approche en ses termes : Si les questions de fondement des mathématiques, « bien que très travaillées […], n'ont reçu pour l'heure aucun traitement satisfaisant », cela est dû, selon Peano, principalement à « l'ambiguïté du langage ordinaire ». Or, à l'aide de la nouvelle notation et méthode logique utilisée dans les deux articles :

> Les questions relevant des fondements des mathématiques, bien que beaucoup travaillées de nos jours, manquent encore d'une solution satisfaisante. Les difficultés les plus grandes proviennent de l'ambiguité du discours.
>
> Pour cette raison, il est de la plus haute importance de considérer attentivement les mots que nous utilisons. J'ai pris la décision de faire cet examen, et présente dans cet article les résultats de mon étude, ainsi que des applications à l'arithmétique.
>
> J'ai indiqué par des signes toutes les idées qui apparaissent dans les fondements de l'arithmétique, de façon à ce que chaque proposition soit énoncée à l'aide de ces seuls signes. […]
>
> Grâce à cette notation, chaque proposition [du système] possède la forme et la précision dont les équations jouissent en algèbre, et de ces propositions ainsi écrites d'autres peuvent être déduites, par un processus qui ressemble à celui de la résolution des équations algébriques.[1]

[1] [Peano 1889a, p. iii] : « Quaestionis, quae ad mathematicae fundamenta pertinent, etsi hisce temporibus a multi tractatae, satisfacienti solutione et adhuc carent. Hic difficultas maxime ex sermonis ambiguitate oritur. Quare summi interest verba

Ce n'est donc qu'en usant d'une notation artificielle respectant les articulations conceptuelles que le mathématicien peut espérer, selon Peano, se libérer des associations non justifiées que la langue commune introduit dans le contenu scientifique, et fonder de façon enfin satisfaisante les mathématiques.

Mais dans l'extrait cité, un autre élément attire l'attention : la comparaison de la déduction à la résolution d'équation, et celle de la proposition à une équation. La comparaison arrête surtout lorsqu'on la replace dans le contexte des travaux de Peano. Le mathématicien a, en effet, publié en 1888, un an avant d'écrire ces lignes, un ouvrage intitulé *Calcolo Geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, consacré, comme son nom l'indique, aux algèbres géométriques et plus particulièrement au calcul grassmanien. Quel rapport faire entre le *Calcolo* et les deux articles de 1889 ? En quoi la méthode employée dans *Arithmetices principia* et *I principii* est-elle nouvelle, si en la présentant, Peano la compare à celle, toute algébrique, de la résolution d'équation ? Plus généralement, comment concevoir, chez le mathématicien italien, la relation entre calcul et axiomatique ?

L'idée qu'il y a une continuité entre la tradition du calcul géométrique et l'approche fondationnelle ultérieure est souvent avancée dans la littérature secondaire : le *Calcolo* représenterait la première étape du processus aboutissant au projet d'axiomatisation développé dans la *Rivista*[2]. A l'inverse, la distinction, effectuée pour la première fois par van Heijenoort, entre la logique comme langue et la logique comme calcul pourrait suggérer une opposition entre l'approche axiomatique et celle de l'algèbre géométrique[3]. Même si la position de Peano à l'égard de la logique n'est pas facilement caractérisable[4], la nouvelle présentation adoptée en 1889, qui met en avant l'existence d'une partie logique commune à toutes les branches mathématiques, paraît plus propice au développement d'un universalisme logique, que le modèle algébrique déployé dans le *Calcolo*.

Nous voudrions, dans ce qui suit, défendre deux thèses. La première est qu'il y a discontinuité sur le plan de la méthode entre le *Calcolo* et *I principii*. [Peano 1888] est la mise au point d'un symbolisme s'appliquant directement à un certain type d'entité spécifiée par avance ; la méthode nouvelle mobilisée dans *I principii* entend caractériser de manière complète un domaine de réalité en ne se référant qu'à ses propriétés formelles. Mais notre seconde thèse atténue quelque peu cette première opposition : la référence au calcul est encore bien présente dans *I principii* et permet à Peano, qui suit les *Vorlesungen* de très près, de renouveler complètement l'approche développée par Pasch. La reformulation, en terme algébrique, des concepts géométriques fondamentaux, élimine les contraintes très fortes que le parti-pris empiriste du mathématicien allemand (Pasch) faisait peser sur sa propre pratique. Pour le dire autrement, c'est grâce au calcul que Peano réussit à penser l'axiomatique comme un système abstrait.

Dans la première section de l'article, nous montrerons en quoi la méthode du *Calcolo* diffère de celle utilisée dans *I principii*. Dans la seconde partie, nous présenterons l'axiomatisation proposée dans *I principii* et la comparerons à celle exposée dans les *Vorlesungen*. Enfin, dans un dernier temps, nous pointerons, en prenant quelques exemples, la différence fondamentale entre Peano et Pasch.

---

ipsa, quibus utimur attente perpendere. Hoc examen mihi proposui, atque mei studii resultatus, et arithmeticae applicationes in hoc scripto expono. Ideas omnes quae in arithmeticae principiis occorrunt, signis indicavi, ita ut quaelibet propositio his tantum signis enuncietur. […]. His notationibus quaelibet propositio formam assumit atque praecisionem, qua in algebra aequationes gaudent, et a propositionibus ita scriptis aliae deducuntur, idque processis qui aequationum resolutioni assimilantur. »

[2] [Grattan-Guinness 2000, p. 223-4] : « [Peano, dans le *Calcolo*] employait un style plus axiomatique que Grassmann lui-même […], un trait qui prendra de l'importance dans son travail à partir de ce livre. » ; voir également [Bottazzini 1985].

[3] [Van Heijenoort 1967].

[4] Voir sur ce point les analyses de Rodriguez-Consuegra dans son [1991].

I- *I Principii di geometria* présente un système qui ne contient, outre les symboles logiques, que deux signes primitifs, les lettres de point et de segment :

> Le signe **1** se lira *point.* […]
> Si *a*, *b* sont des points, par *ab* nous entendrons la classe formée des points intérieurs au segment *ab*. Ainsi, la formule $c \in ab$ signifiera « *c* est un point intérieur au segment *ab* ».[5]

Tous les autres concepts fondamentaux, notamment ceux de droite et de plan, sont définis à partir de ces deux là. Mais quel statut ont ces entités primitives ?

Que ce soit en 1889 ou en 1894[6], Peano ne conçoit pas les concepts géométriques primitifs comme étant définis implicitement par l'ensemble des axiomes. Suivant la plupart de ces contemporains, en particulier Pasch, le mathématicien italien considère alors la géométrie comme une science de la nature, qui décrit certaines propriétés élémentaires des corps. Peano écrit ainsi dans la préface de *I Principii di geometria* :

> Quelles sont, parmi les entités géométriques, celles que nous pouvons définir et celles qu'il nous faut admettre sans définition ?
> Et, parmi les propriétés de ces entités qui sont *empiriquement* vraies, lesquelles pouvons-nous admettre sans démonstration, et lesquelles devons-nous déduire comme conséquence ? [nous soulignons] [7]

Dans *Sui fondamenti della geometria*, il est encore plus explicite :

> Avant d'abandonner ce sujet, une remarque concernant la nature *pratique* ou *empirique* des postulats sera encore utile. On a certes le droit de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent. Mais pour qu'un tel travail mérite le nom de géométrie, il faut que ces hypothèses ou postulats expriment le résultat *des observations les plus simples et élémentaires des figures physiques*. [nous soulignons][8]

Peano n'est pas Hilbert. Les termes non définis désignent pour lui une classe d'objets ou de relations empiriquement identifiables, dont les principales propriétés sont énoncées dans les postulats.

Malgré tout, comme l'ont montré de nombreux commentateurs[9], Peano a une très claire conscience du caractère « abstrait » de son système. Si l'expérience fonde la vérité des axiomes et donne une signification aux concepts primitifs, elle ne joue, et ne doit jouer aucun rôle dans le développement des preuves. C'est ce qu'indique Peano lorsqu'il affirme, dans l'extrait cité, que l'on a le droit « de poser les hypothèses que l'on veut et de développer les conséquences logiques qu'elles contiennent ». La possibilité d'une axiomatisation ne dépend pas d'un ancrage empirique, et l'interprétation des symboles primitifs n'a aucune incidence sur le développement théorique lui-même. Il précise ainsi :

> Le lecteur peut comprendre [*può intendere*] par le signe **1** une catégorie quelconque d'entité, et par $c \in ab$ une relation quelconque entre trois entités de cette catégorie ; toutes les définitions qui suivent (§2) auront toujours leur valeur, et toutes les propositions du §3 subsisteront. Selon la signification attribuée aux signes non définis **1** et $c \in ab$, les axiomes pourront être, ou non, satisfaits. Si un certain groupe d'axiomes est vérifié, *toutes les propositions qui s'en déduisent seront aussi vraies*, les propositions en lesquelles les axiomes et les définitions se transforment n'étant pas essentielles.[10] [nous soulignons]

---

[5] [1889b, p. 9] : « Il signo **1** leggasi *punto.* […] Se *a*, *b* sono punti, con *ab* intendermo la classe formata dai punti interni al segmento *ab*. Quindi la formula $c \in ab$ significa « *c* è un punto interno al segmento *ab* ». »

[6] 1894 est la date de publication de *Sui Fondamenti della geometria* qui reprend et étend [Peano 1889b].

[7] [1889b, p. 3] : « Quali fra gli enti geometrici si possono definere, e quali occorre assumere senza definizione ? E fra le proprietà, sperimentalmente vere, di questi enti, quali bisogna assumere senza dimostrazione, e quali si possono dedurre in conseguenza ? »

[8] [1894, p. 75] : « E prima di abbandonare questo soggetto, sarà ancora utile un'osservazione sulla natura pratica, o sperimentale dei postulati. Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e lo sviluppare le conseguenze logiche contenuto in quelle ipotesi . Ma affinchè questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche. »

[9] [Avellone 2002], [Van den Waerden 1986], [Freguglia 1985], [Contro 1975].

[10] [1889b, p. 24] : « Il lettore puó intendere col segno **1** une categoria qualunque di enti, e con $c \in ab$ una relazione qualunque fra tre enti di quella categoria ; avranno sempre valore tutti le definizioni che seguono (§2), e sussisteranno tutte le proposizione del §3. Dipendentemente dal significato attribuito ai segni non definiti **1** e $c \in ab$, potranno essere soddisfatti, opurre no, gli assiomi. Se un certo gruppo di assiomi è verificato, saranno pure vere tutte le proposizioni che si deducono, non essendo queste proposizioni che trasformazioni di quegli assiomi e delle definizioni. »

Pasch, dont s'inspire Peano, combinait déjà une approche empirique de la géométrie à une démarche axiomatique. L'auteur des *Vorlesungen* soulignait aussi que, si les concepts indéfinissables ont un contenu intuitif, le sens de ces notions ne doit jouer aucun rôle dans les preuves[11]. Le mathématicien italien va cependant plus loin que son collègue allemand, puisque, dès 1889, il présente des preuves d'indépendance. Par exemple, pour montrer que l'axiome 3, qui stipule que si « *a* est un point, la classe *aa* est vide », n'est pas toujours vrai, Peano propose une interprétation numérique des points, et algébrique des segments :

> Si, par **1** nous désignons le nombre (réel et fini), et si nous prenons pour relation fondamentale l'équation $f(a, b, c) = 0$, que nous supposerons algébrique et de premier degré en c, alors, afin de rendre vraie la prop. 3, qui dans notre cas signifie « l'équation $f(a, a, c) = 0$ ne peut être satisfaite pour aucune valeur de a et de c », il faut que le coefficient de c dans $f(a, b, c)$ soit divisible par $a - b$ et [...].[12]

La pratique n'est pas encore, dans *I principii di geometria*, systématiquement mise en œuvre ; mais l'existence de quelques exemples suffit pour montrer que Peano mesure toute l'importance de la possibilité de varier les interprétations des indéfinissables.

Pour résumer : le fait, en premier lieu, que Peano détache les indéfinissables de leur interprétation géométrique attendue – le fait, en second lieu, que Peano use de la variabilité des interprétations pour prouver l'indépendance des postulats, montre que, dans *I principii*, les conditions posées dans les axiomes déterminent complètement le type de réalité auquel le système s'applique. Si Peano affirme encore que la géométrie est une science de la nature, c'est parce qu'il considère que le contenu déjà autonome de la théorie, pour être qualifié de géométrique, doit correspondre aux données fournies par notre expérience de l'espace. Mais ces données intuitives ne sont en rien constitutives – elles agissent comme des contraintes, que le système purement conceptuel, engendré de façon indépendante par la totalité des axiomes, doit retrouver et satisfaire.

Il nous semble que, sur ce point, la méthode axiomatique, déployée en 1889 s'oppose à l'approche algébrique développée dans le *Calcolo*[13]. Loin, en effet, de vouloir caractériser de façon purement conceptuel un contenu, Peano cherche en 1888 à exprimer dans le *medium* du calcul, les spécificités propres à un domaine d'objet, celui des grandeurs géométriques. C'est ainsi la notion d'analogie que Peano mobilise lorsqu'il définit la nature de son projet : l'algèbre ordinaire est à l'arithmétique et aux nombres ce que le nouveau calcul est censé être à la géométrie et aux grandeurs spatiales. Citons le début de la préface de [Peano 1888] :

> De manière générale, le calcul géométrique consiste en un système d'opérations sur les entités géométriques, analogue [*analoghe*] à celui que l'algèbre déploie concernant les nombres. Il permet d'exprimer en formules les résultats des constructions géométriques, de représenter par des équations les propositions de géométrie, et de substituer une transformation d'équations à un raisonnement. Le calcul géométrique présente une analogie [*presenta analogia*] avec la géométrie analytique ; mais il en diffère en ce que, alors que dans la géométrie analytique, les calculs sont faits sur des nombres qui

---

[11] Voir notamment [Pasch 1882a, p. 98] : « Pour que la géométrie soit véritablement déductive, il est nécessaire que le processus d'inférence soit complètement indépendant du *sens* des concepts géométriques, comme il doit être indépendant des figures – ce sont seulement les *relations* entre les concepts géométriques, telles qu'elles sont consignées dans les théorèmes et les définitions, que l'on doit prendre en compte. »

[12] [1889b, p. 26] : « Se col segno **1** si intendeno i numeri (reali e finiti), e colla relazione $c \in ab$ si intende un'equazione fra a, b, c della forma $f(a, b, c) = 0$, allora la scriturra $d \in abc$ (d è un punto del triangolo abc) rappresenta la relazione fra a, b, c, d che risulta eliminando x fra le due equazioni $f(b, c, x)=0$ e $f(a, x, d)=0$. »

[13] La question de savoir quel est le lien entre le *Calcolo* et *I Principii* (plus largement : entre la perspective des algèbres géométriques et l'approche axiomatique chez Peano) n'est pas souvent abordée en tant que telle dans la littérature secondaire. Les commentateurs, lorsqu'ils se penchent sur ce point, soulignent généralement le caractère également « abstrait » des deux points de vue (Voir notamment [Avellone et alii 2002], p. 376-379, dans lequel l'accent est mis sur les différents usages que Peano et Segre font de ce qui est considéré comme une commune méthode). U. Bottazzini, dans son [1985], soutient lui que le *Calcolo* est à la base de l'entreprise axiomatique – mais il fonde son analyse sur le rôle que l'algèbre de la logique joue dans [Peano 1888] et dans les œuvres ultérieures. Même si cette dernière analyse nous paraît très pertinente, c'est sur les différences entre les *méthodes* de l'algèbre et de l'axiomatique géométrique que nous avons choisi ici de mettre l'accent.

déterminent des entités géométriques, dans cette nouvelle science les calculs sont faits sur les entités géométriques elles-mêmes.[14]

Les spécificités du calcul géométrique sont immédiatement ici rapportées à celle d'un champ ontologique particulier, les êtres géométriques. Le projet peanien d'un calcul géométrique repose ainsi complètement sur la distinction, admise comme primitive, entre grandeurs géométriques et nombres. L'algèbre ordinaire, parfaitement adaptée aux grandeurs numériques, s'ajuste mal aux spécificités d'un autre type d'objet, les entités géométriques, et doit donc, selon Peano, être complété par une nouvelle algèbre, dont les opérations et les règles reflètent les particularités de ce sur quoi il porte. Ce qui distingue la nouvelle discipline de la géométrie analytique, c'est ainsi, selon Peano, que « les calculs sont faits [directement] sur les entités géométriques elles-mêmes ». Quelle différence avec le programme développé un an plus tard, dans lequel la variabilité des interprétations, non seulement est admise, mais constitue un des instruments méthodologiques fondamentaux ! Dans *I principii*, la forme du système détermine de façon autonome ses applications possibles ; dans le *Calcolo*, c'est le contraire : les règles d'emploi des symboles sont censées refléter les spécificités d'entités connues par ailleurs.

Les analyses que Peano consacre, autour des années 1890, à la définition de l'aire illustrent particulièrement bien l'usage que le mathématicien fait de son calcul géométrique, et le contraste, voire l'opposition, qu'il convient d'établir, sur le plan de la méthode, entre les projets du *Calcolo* et de *I Principii*. Dans *Sulla definizione dell'area d'una superficie* [Peano 1890], le maître de Turin commence par critiquer la définition d'une surface gauche avancée par Serret dans le second volume de son *Cours de calcul différentiel et intégral* [Serret 1879] :

> On ne peut comparer à une ligne droite qu'une autre ligne droite ou une somme de telles lignes ; aussi nous avons dû définir avec précision, dans le Calcul différentiel, la longueur rectiligne qu'on nomme longueur d'un arc de courbe. Nous emploierons ici des considérations analogues pour définir ce que nous entendons par aire d'une portion déterminée de surface courbe. […]
> *Soit une portion de surface courbe terminée par un contour C ; nous nommerons aire de cette surface la limite S vers laquelle tend l'aire d'une surface polyédrique inscrite formée de faces triangulaires et terminée par un contour polygonal Γ ayant pour limite le contour C.* [Serret 1879, p. 292-293]

Pour définir la longueur d'un arc de courbe, le mathématicien français considère la famille des polygones inscrits, et pose que la longueur de l'arc est la limite de la somme des longueurs des côtés des polygones, lorsque les limites de ces longueurs tendent vers zéro. Serret souhaite étendre cette technique aux problèmes de quadrature : l'aire d'une surface est conçue par lui comme la limite de la somme des aires d'une surface polyédrique, à face triangulaire, inscrite, lorsque ces triangles deviennent « infiniment petits ». Peano note que cette définition est erronée. Serret présuppose en effet que « que le plan passant par trois points de la surface a pour limite le plan tangent à cette surface » [Peano 1890, p. 55]. Cela n'est pas toujours vraie : si l'angle en un sommet diminue « plus vite » que les côtés de ce triangle, alors le plan passant par les trois sommets n'aura pas de limite déterminée[15].

---

[14] [Peano 1888, p. 3] : « Il calcolo geometrico, in generale, consiste in un systema di operazioni a eseguirci sui enti geometrici, analoghe a quelle che l'algebra fra sopra i numeri. Esso permette esprimere con formule i risultati di costruzioni geometriche, di rappresentare con equazioni proposizioni di geometria, e di sustituire una transformazione di equazioni ad un ragionamento. Il calcolo geometrico presenta analogia colla geometria analitica ; ne differisce in sciò, che, mentra nella geometria analytica, i calcoli si fanno sui numeri che determinano gli enti geometrici, in questa nova scienza i calcoli si fanno sugli enti stessi. »
Voir également [Peano 1896].

[15] Peano expose un contre-exemple dans [Peano 1903] (repris dans [Kennedy 1973, p. 140-142]) développé indépendamment par Schwartz. Citons Lebesgue [1975, p. 95] : « Schwarz avait eu l'occasion de réflechir à la notion d'aire d'une surface pour ses recherches sur le corps de volume maximum parmi tous ceux d'aire donnée ; dans une lettre à Genocchi, il montre les aires des surfaces polyédrales inscrites dans une surface donnée n'ont aucune limite. Et cela qu'elle que simple que soit la surface, même quand il s'agit d'un cylindre de révolution. L'exemple de Schwartz se présente si naturellement, quand on réfléchit à la question, que Peano l'obtenait de son côté à peu près simultanément et qu'il a été retrouvé et publié depuis par d'autres géomètres. »

Mais, plus intéressant pour notre propos, Peano continue en rejetant une seconde définition[16], donnée par Hermite, qui, si elle est mathématiquement irréprochable, présente l'inconvénient d'introduire une référence à un système de coordonnée, extérieure à la surface elle-même[17]. Comment expliquer que, lorsque l'on passe à la surface, une référence à des éléments extrinsèques devienne subitement nécessaire, alors que, dans le cas des courbes, une définition intrinsèque pouvait être formulée ? Cette seconde critique indique que Peano, s'il en dénonce les erreurs, défend la démarche de Serret : il faut, contre Hermite, maintenir l'analogie « archimédienne »[18] qui, au rapport entre polygone et courbe, fait correspondre celui entre polyèdre et surface. Mais comment conserver l'analogie géométrique sans renoncer à la rigueur ? Précisément, en ayant recours au calcul géométrique. Peano écrit ainsi :

> La rigueur et l'analogie entre les définitions reliant arc et aire peuvent être toutes les deux préservées en faisant usage non seulement du concept de segment linéaire considéré comme ayant une longueur et une direction (vecteur), mais également du concept dual de région planaire considérées comme ayant une taille et une orientation. Ces entités ont été introduites en géométrie par les travaux de Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann et Hamilton. Une région planaire ainsi considérée, ou plutôt sa limite, peut être définie comme un bivecteur, c'est-à-dire comme étant le produit, au sens de Grassmann, de deux vecteurs.[19]

Et Peano en se fondant sur des théorèmes démontrés dans le *Calcolo*[20], propose les définitions suivantes, dans lesquelles l'analogie entre rectification et quadrature est manifeste :

> La longueur d'un arc de courbe est la limite supérieure de la somme des longueurs des vecteurs qui constituent ses parties. […]
>
> L'aire d'une région de surface est la limite supérieure de la somme des tailles des bivecteurs qui constituent ses parties.[21]

Tout n'est pas clair, loin de là, dans la « solution » proposée par Peano. Le mathématicien n'indique en réalité jamais précisément en quoi l'introduction du concept de bivecteur permet de résoudre les problèmes délicats posée par la définition de l'aire[22]. Mais le point important

[16] Peano critique également la solution de Harnack, qui imposait aux triangles la condition supplémentaire de ne pas avoir des angles qui approchent zéro. La solution ne tient pas, car [Peano 1890, p. 55] : « Le défaut [de cette solution] réside en ceci que si $z = f(x, y)$ est l'équation de la surface et $f(x, y)$ est une fonction univaluée, il ne s'ensuit pas que toutes les surfaces polyédriques inscrites ne peuvent pas être croisées en plus d'un point par une parallèle à l'axe des *z*. »

[17] Hermite (voir [1882, p. 39-42]) définit l'aire comme « la limite d'un système de polygones non contigus tangents à la surface » [Peano 1890, p. 56]. Il projette les polygones tangents sur un plan arbitraire extérieur à la surface, et fait donc référence, dans sa définition, aux angles entre les plans tangents et ce plan de projection.

[18] Comme le note Lebesgue, l'approche de Serret n'est que partiellement archimédienne, dans la mesure où elle ne prend en compte que les polygones inscrits, et laisse de côté l'approximation des courbes convexes par les lignes polygonales circonscrites. Mais il reste que Serret cherche, contrairement à Hermite, à donner une définition géométrique « intrinsèque » de l'aire. Sur ce point Cf. [Lebesgue 1975], p. 94 : « D'après Peano les postulats admis par Archimède équivalent à la définition suivante : la longueur d'un arc de courbe plane convexe est la valeur commune de la limite supérieure des longueurs des lignes polygonales inscrites et de la limite inférieure des circonscrites. Archimède utilisait donc de la même manière la droite et le point […] ; il envisageait la courbe sous ses deux aspects dualistiques : lieu de points et enveloppe de droites. On sait que, peu à peu, la notion de droite est devenue une notion secondaire […]. Dans l'étude des longueurs, on n'a plus considéré que les lignes polygonales inscrites, oubliant d'ailleurs qu'on les avait choisies de préférence seulement à cause de leur simplicité et qu'elles ne possèdent aucune vertu spéciales qui les imposent plus à notre attention que les autres lignes polygonales approchées. »

[19] [Peano 1890, p. 55] : « Si può ottenere ad un tempo il rigore e l'analogia fra le definizioni relative all'arco et all'area, ove si faccia uso, oltrechè del concetto di retta limitata considerata in grandezza e in direzione (*segmento*, *vettore*), anche del concetto dualitico di area piana concierata in grandezza e giacitura. Questi enti furono introdotti in geometria specialmente per opera di Chelini, Möbius, Bellavitis, Grassmann e Hamilton. Un'area piana così considerata, o meglio la linea suo contorno, si può chiamare bivettore, essendo essa il prodotto, secondo Grassmann, di due vettori. »

[20] Voir [Peano 1888, p. 58 sq, p. 66-67].

[21] [Peano, p. 56] : « *Lunghezza d'un arco di curva è il limite superiore della somma delle grandezze dei vettori delle sue parti.* 5. […] *Area d'un porzione di superficie è il limite superiore della somma delle grandezze dei bivettori delle sue parti.* ». Par limite supérieure (inférieure), il faut entendre ici la plus petite borne supérieure (la plus grande borne inférieure). Peano préfère au « passage à la limite » la méthode consistant à considérer la plus petite borne supérieure (ou plus grande borne inférieure) d'un ensemble de nombres. Mais la question est secondaire dans notre perspective.

[22] Voir l'évaluation de Lebesgue [1975, p. 96] : « On avait une définition analytique [de l'aire d'une surface], il n'y avait qu'à en donner des interprétations géométriques et même on possédait déjà de telles interprétations. Avant que soit connu l'exemple de Schwartz qui montra l'impossibilité de conserver la définition alors admise, les difficultés de cette définition

est pour nous ailleurs, dans le lien explicitement établi entre les difficultés liées à cette notion et l'absence d'un véritable calcul géométrique. Selon Peano, Serret échoue, non pas à cause de son approche « géométrique », mais parce qu'il ne possède pas les bons concepts. La notion de « face triangulaire » est trop pauvre pour supporter l'application directe d'un passage à la limite. Corriger Serret, c'est donc, selon Peano, redessiner les contours de la géométrie élémentaire, en introduisant les concepts grassmaniens d'éléments plans et de bivecteurs, de façon à pouvoir leur appliquer les algorithmes différentiels[23]. Le développement du calcul géométrique semble, aux yeux du mathématicien italien, la seule possibilité pour concilier la rigueur de Hermite avec l'approche « archimédienne » de Serret.

Que l'on ait des raisons des douter, avec Lebesgue, de la réussite d'un tel programme n'est pas ici le point fondamental – ce que nous cherchons à comprendre, c'est avant tout la façon dont Peano utilise le calcul géométrique à l'occasion d'une réflexion sur les fondements de l'analyse. Or, dans ce contexte, l'appel aux concepts grassmaniens est incontestablement motivé par le souhait de défendre la définition géométrique de Serret, opposée à la démarche, considérée par Peano comme plus analytique, de Hermite. Si la définition de Serret échoue, c'est parce que la singularité des objets auxquels il applique le passage à la limite n'est pas ressaisie de façon adéquate. L'algèbre grassmannienne constitue précisément, selon Peano, l'outil permettant d'exprimer les spécificités de ce type de grandeurs. Bien loin donc de chercher, comme Hilbert, à fonder axiomatiquement la géométrie, et à couper ainsi le lien entre géométrie et espace, Peano tente, dans le *Calcolo*, de refléter, de répercuter dans un calcul, les propriétés et les relations, considérées comme déjà connues et déjà données, d'un certain type d'entités, les objets spatiaux. En d'autres mots, dans un système axiomatique, la référence des constantes non logiques n'est pas fixée, et Peano, on l'a vu, dès *I Principii*, fait varier l'interprétation des indéfinissables, qui peuvent désigner indifféremment des nombres ou des points, des relations numériques ou des relations géométriques. Au contraire, dans le *Calcolo*, tout est fondé sur le fait que les symboles ne désignent pas des nombres, mais directement des entités géométriques, orientées. En un sens, les deux démarches sont bien, comme de nombreux commentateurs l'ont noté, « abstraites » : l'accent est dans les deux cas mis sur les règles de transformations ou de déductions. Mais malgé tout, sur le plan de la

s'étaient révélées à tous ceux qui avaient essayé de la mettre en œuvre rigoureusement ; certains avaient imaginé de restreindre la famille des polyèdres inscrits de façon à pouvoir prouver l'existence d'une limite de leurs aires. Ainsi : l'aire d'une surface est la limite des aires de surfaces polyédrales inscrites dans la surface, quand leurs faces deviennent infiniment petites dans toutes les dimensions et *de façon que les angles de ces faces ne tendent pas vers zéro*, disaient les uns, *de façon que les angles que font les faces avec la surface tendent vers zéro, disaient d'autres*. Seulement ces restrictions sont artificielles : rien ne prouve que d'autres restrictions simples ne donneraient pas une autre limite ; on ne sait laquelle de toutes ces limites correspond le mieux à la notion physique d'aire. De plus, les mathématiciens désiraient une définition de l'aire ayant une étendue d'application quelque peu comparable à celle de la définition de la longueur étudiée par Scheefer et Jordan. On imagina donc, Peano et Hermite en particulier, d'autres définitions, mais si éloignées de la forme primitive que l'aire n'y apparaît même plus comme une limite d'aires de polyèdres ! ». Lebesgue renvoie ainsi dos à dos Hermite et Peano – leurs définitions de l'aire sont, selon lui, également artificielles : si elles justifient bien l'intégrale, aucunes des deux ne réussir à exprimer le contenu géométrique et physique du concept.
Sur Lebesgue, voir sur les analyses de [Michel 1992, p. 40-43 et p. 61-65].

[23] Sur le rapport entre algèbre géométrique et calcul différentiel, il est important de signaler que c'est dans son ouvrage sur l'application du calcul différentiel [Peano 1887] que Peano expose pour la première fois les concepts grassmaniens ; pour une comparaison entre [Peano 1887] et [Peano 1888], voir [Bottazzini 1985]. Signalons que cette relation entre *calcolo* et calcul différentiel est développée dans l'ouvrage d'un disciple de Peano, Burali-Forti [Burali-Forti 1897] , qui écrit dans sa préface : « Le but que nous nous sommes proposé est de donner aux jeunes étudiants le moyen d'apprendre aisément ce puissant instrument de calcul [qu'est le calcul géométrique de Peano], et de leur donner, en même temps, le moyen de l'appliquer aux questions de la Géométrie différentielle supérieure. Nous croyons ce dernier but de notre Ouvrage fort important. En effet, on obtient, dans la Géométrie différentielle ordinaire, des propriétés bien simples avec des développements très compliqués. Cette complication est due, en général, à l'emploi des coordonnées, car avec les coordonnées nous faisons des transformations algébriques sur des nombres pour obtenir, d'après des calculs bien souvent fort compliqués, une petite formule, une *invariante*, qui est susceptible d'une interprétation géométrique. Le calcul géométrique ne fait point usage des coordonnées ; il opère directement sur les éléments géométriques, et chaque formule, qui est par elle-même une invariante, a une signification géométrique bien simple qui conduit très aisément à la présentation graphique de l'élément considéré. »

méthode, la différence entre elles ne peut pas être sur-estimée : l'axiomatique fixe elle-même les conditions de son applicabilité, alors que l'algèbre, telle que développée par Peano, s'attache à refléter dans un calcul les spécificités d'un domaine d'objets particulier déjà donné[24].
Cette opposition entre les deux démarches peut recevoir une autre illustration. En 1888, la différence entre nombres et grandeurs spatiales fonde la distinction entre deux types de calculs, l'algèbre ordinaire et l'algèbre géométrique. En 1889, une telle dualité d'approche n'est plus de mise – c'est une même méthode logique qui est utilisée dans *Arithmetices principia* et *I principii*. La méthodologie n'est plus à la remorque de l'ontologie, mais est commune à des disciplines aussi différentes que l'arithmétique et la géométrie. Il y a donc bien une forme d'inversion entre le *Calcolo* et les articles de 1889, et on peut comprendre pourquoi Peano a tant voulu insister sur la nouveauté de sa démarche. Mais précisément : d'où vient la nouvelle approche ?

II- Les *Vorlesungen* de Pasch ont vraisemblablement joué, dans le brusque changement que subit la pensée de Peano, un rôle fondamental[25]. Dans *I principii di geometria*, le maître de Turin suit en effet de très près, comme nous allons le voir, l'exposition du mathématicien allemand. Qu'est-ce que Peano retire exactement des *Vorlesungen* ? Que laisse-t-il de côté ? Quelles modifications apporte-t-il à la construction de son prédécesseur ?
L'ouvrage de Pasch se divise en deux grandes parties. La première (§§1-15) porte sur la géométrie projective ; la seconde est consacrée à la dérivation projective de la métrique (§§16-20)[26] et à l'étude des rapports entre géométrie et analyse (§§21-23). Seule la première partie nous intéresse ici. Pasch y développe une démarche très originale : la géométrie projective, loin d'être considérée, à la manière de v. Staudt et Klein, comme un point de départ, est engendrée à partir d'une théorie considérée comme plus fondamentale, également non métrique, la géométrie élémentaire, qui décrit les propriétés les plus simples de notre espace empirique.
Les axiomes [*Grundsätze*] de cette géométrie première sont présentés dans les deux premiers paragraphes (§§1-2). Dans les sept paragraphes suivants (§§3-9), certainement les plus novateurs, Pasch définit, à partir des concepts élémentaires, les notions projectives fondamentales, à savoir les concepts de point, de droite et de plan projectifs, ainsi que la relation ordinale de séparation. Après avoir examiné (§§10-12) la structure de ces notions, Pasch introduit un nouvel indéfinissable, la congruence, dont il développe, toujours sous forme axiomatique, la théorie (§§13-14). C'est au paragraphe quinze que le géomètre, en combinant les deux doctrines, celle purement projective des paragraphes un à douze, et celle fondée sur la congruence des paragraphes treize et quatorze, prouve le théorème fondamental de la géométrie projective (une transformation projective entre deux droites est univoquement

[24] Un des éléments qui contribue à masquer la profonde différence entre les deux démarches est la présence, dans le dernier chapitre de [Peano 1888], de ce que l'on considère comme la première définition axiomatique de la notion d'espace vectoriel (que la mathématicien nomme « espace linéaire ») ; voir [Moore 1995]. Il faut cependant prendre garde au fait que le calcul géométrique, notamment la théorie des formes de première espèce et la théorie des vecteurs, n'est absolument pas, en 1888, fondée sur le concept d'« espace linéaire » et n'est pas présenté sous forme axiomatique (le *Calcolo Geometrico* présuppose le cadre euclidien). De surcroît, lorsqu'en 1898, dans *Analisi della teoria dei vettori*, Peano revient sur sa première présentation et fonde la géométrie sur une axiomatisation de la théorie des vecteurs, il ne fait pas référence à son concept d'« espace linéaire ». De façon plus générale, il nous semble qu'il faut distinguer, lorsque l'on cherche à retracer les origines de la notion moderne d'espace vectoriel, entre le concept de vecteur dont la théorie est, chez Peano, développée dans le cadre d'une doctrine générale des formes, et le concept d'espace linéaire qui n'est pas, lui, spécifiquement géométrique.
[25] Ceci ne veut pas dire que Peano ait lu Pasch entre 1888 et 1889, mais simplement que *I Principii* est une reprise critique de [Pasch 1882]. Kennedy rapporte dans son [2002] que Peano mentionne Pasch dans la controverse qu'il a eue avec Gilbert à propos du théorème de la moyenne en 1884. Mais aucune référence n'est alors spécifiquement faite à l'œuvre géométrique.
[26] Pasch reprend [Klein 1871]. A la différence de Klein, Pasch travaille cependant sur un espace réel, non sur un espace complexe, ce qui rend la déduction plus difficile (les Absolus de Pasch sont des transformations, non des quadriques).

définie par la donnée des images de trois points distincts). Ce théorème ne peut pas, selon Pasch, être démontré sans recourir à la congruence.
La structure de la première partie des *Vorlesungen* est relativement complexe. Retenons trois éléments. Pasch présente, sous forme axiomatisée, deux doctrines différentes : la géométrie élémentaire (§§1-2), la théorie de la congruence (§§13-14). A chaque fois, il énumère l'ensemble des *Grundsätze* et présente les dérivations de quelques théorèmes, sans toutefois adopter une notation logique enrégimentée. Pasch axiomatise, en second lieu, une troisième théorie, dont il liste également, au paragraphe neuf, l'ensemble des postulats – il s'agit de la partie de la géométrie projective qui ne repose par sur le théorème fondamental. Toutefois ce système ne jouit pas, dans les *Vorlesungen*, du même statut que les deux autres : les postulats ne sont pas des *Grundsätze*, fondées sur l'observation directe des propriétés des corps, mais seulement des *Stammsätze*, c'est-à-dire des théorèmes de géométrie élémentaire couchés dans un langage qui est celui de la géométrie projective – les axiomes ainsi que les concepts projectifs sont, selon Pasch, dérivés de la géométrie descriptive. Troisième et dernier point : si le mathématicien axiomatise des théories jusqu'à lui non complètement formalisées, il accorde au moins autant d'importance aux procédures de construction des concepts projectifs à partir des notions élémentaires. Ce mouvement « vertical » de redéfinition progressive de tous les termes fondamentaux, qui conduit de l'élémentaire au projectif et dont l'importance ne peut pas être surestimée, doit être soigneusement distingué de l'entreprise « horizontale » d'axiomatisation[27].
Que Peano retient-il des *Vorlesungen* ? Le mathématicien italien ne s'intéresse, en 1889 comme en 1894, qu'à l'entreprise d'axiomatisation des deux théories fondamentales que sont la géométrie élémentaire et la géométrie de la congruence. Il n'évoque qu'à peine, dans son second article, la géométrie projective, et néglige complètement le contenu des paragraphes trois à neuf des *Vorlesungen*, c'est-à-dire la construction du projectif à partir de l'élémentaire[28]. *I principii di geometria* se présente comme une réécriture des deux premières sections du traité de Pasch ; dans *Sui fundamenti di geometria*, Peano ajoute une partie sur la congruence, qui reprend le propos des paragraphes treize et quatorze de [Pasch 1882a]. La lecture de Peano est donc très sélective ; le maître ne se concentre que sur les axiomatiques fondamentales, qu'il isole du reste des *Vorlesungen*.
Son but est, officiellement, le suivant : montrer comment l'usage d'une notation logique artificielle permet, non seulement d'exprimer un contenu mathématique complexe, mais encore d'améliorer les présentations classiques. De ce point de vue, les *Vorlesungen* sont une occasion sans pareille : si le langage de Pasch reste l'allemand ordinaire, il est en même temps suffisamment précis pour rendre possible une enrégimentation logique. Le double pari que fait Peano semble donc être le suivant : montrer en premier lieu qu'une traduction en « peanien » de tous les postulats des *Vorlesungen* est réalisable – c'est l'objet de la première partie de son texte [voir l'appendice à la fin de notre article] ; montrer en second lieu qu'une telle reformulation n'est pas inutile et permet d'améliorer la présentation de Pasch. C'est dans la seconde partie de *I principii di geometria* que le maître de Turin commente ses différentes traductions, et s'emploie à souligner l'apport scientifique de l'entreprise.
Trois types d'avancées sont indiqués. L'usage de la notation logique permet, tout d'abord, de critiquer[29] certaines formulations de Pasch, notamment celle de son premier axiome : « entre deux points, on peut toujours tracer un segment de droite, et seulement un ». Le mathématicien italien demande si deux points identiques déterminent un segment – il soulève également la question de l'ordre des points : *AB* est-il ou non le même que *BA* ? L'abandon de la langue usuelle au profit du « péanien » oblige à fixer de façon précise le sens des concepts,

[27] Sur Pasch, voir [Torretti 1978], [Nabonnand 2002].
[28] Il y fait une allusion à la fin de la première partie de son [1894].
[29] [Peano 1889b, p. 32-33].

et à ne plus laisser dans l'ombre des indéterminations susceptibles de poser problème par la suite. Plus intéressante est la seconde avancée soulignée par Peano : le traitement de la question de l'indépendance des axiomes. Pasch ne s'intéresse pas à ce problème, car il s'agit simplement pour lui de formuler un ensemble de postulats suffisamment puissant pour ne plus revenir, au cours des démonstrations, à l'intuition ; la question n'est pas de fixer les conditions nécessaires à l'élaboration de la science géométrique. Transcrire dans une langue artificielle les axiomes contribue à les couper de leur ancrage naturelle, et permet d'étudier les relations que ces axiomes ont les uns avec les autres. Peano ne systématise pas, en 1889, ses analyses. Dans [Peano 1894] par contre, une section entière est spécifiquement consacrée à l'examen systématique de l'indépendance relative des postulats concernant la droite[30]. La troisième modification accomplie dans *I principii*, la plus importante aux yeux de Peano, est la diminution du nombre de terme primitif. Pasch fonde son développement sur trois indéfinissables : les points, les segments, les surfaces planes. Peano définit le plan à partir des segments et des points[31]. Nous reviendrons bientôt sur la construction, mais l'essentiel, pour l'instant, est de comprendre que cette avancée est liée à l'usage de la langue logique. La transcription en « peanien » des définitions de la droite à partir de deux points (présente chez Pasch) :

$$\mathbf{2} = [x\in](\ a,b\in 1\ .\quad a\text{-}{=}b\quad .\ x = (ab)'' \colon\text{-}{=}_{a,b}\ \Lambda),$$

et du plan à partir d'un triangle (absente chez Pasch) :

$$\mathbf{3} = [x\in](a,b,c\in 1\ .\ a,b,c\text{-}{\in} Cl\ .\ x = (abc)'' \colon\text{-}{=}_{a,b,c}\ \Lambda)^{32},$$

manifeste qu'ici et là, une même procédure est appliquée. La possibilité de définir l'une des notions porte en elle la possibilité de définir l'autre, de sorte qu'admettre l'une c'est *de facto* admettre l'autre. La diminution du nombre d'indéfinissable constitue incontestablement une avancée mathématique et s'exprime ici, pour la première fois, une exigence, qui caractérisera plus tard l'école peanienne dans son ensemble.

Reprenons le fil de notre propos. La reformulation dans une langue artificielle des axiomes de Pasch ne constitue pas, aux yeux de Peano, une simple redite. Outre le fait qu'il exemplifie une méthode générale, le travail entrepris par Peano contribue à des avancées non négligeables : à l'introduction systématique des preuves d'indépendance, à la diminution du nombre des termes primitifs. Mais la moisson n'est-elle pas un peu maigre, finalement ? Ces avancées sont-elles si importantes que cela ? Et Peano est-il vraiment à son avantage lorsqu'il critique si sévèrement celui à qui il doit le contenu de ses deux articles[33] ? Ces questions posent un problème de fond, que les nombreuses polémiques qui opposeront Peano à ses contemporains ne feront que souligner[34] : suffit-il de traduire dans une nouvelle langue « logique » des axiomatiques déjà constituées pour faire oeuvre mathématique ?
Mais ces questions mettent également en lumière un manque dans l'analyse que nous venons de conduire. Nous avons présenté *I principii* comme étant essentiellement une traduction, dans une « nouvelle langue », du contenu des deux premières sections des *Vorlesungen*. Mais nous n'avons rien dit sur cette langue elle-même, sur sa syntaxe, sur son vocabulaire. Nous avons fait comme si le seul acte, purement négatif, d'abandonner le langage usuel était par lui-même important. Il n'est dès lors pas étonnant que nous soyons amené à mettre en doute la valeur des avancées peaniennes : si, de l'aveu même de l'auteur, l'essentiel consiste à traduire, il faut se pencher sur la structure de la langue employée avant de se risquer à une évaluation.

---

[30] Voir [Peano 1894, p. 61-64].
[31] Voir [Peano 1889b, p. 33] où Peano établit lui-même la comparaison avec Pasch.
[32] [Peano 1889b, p 10]. Voir l'appendice pour une traduction dans le calcul des prédicats.
[33] Nous voulons parler de [Peano 1889b] et [Peano 1894].
[34] Sur ces polémiques, voir [Borga et alii 1985, p. 244-255] et [Avellone et alii 2002].

Il faut distinguer deux niveaux dans la notation proposée dans *I principii*. Le premier, que l'on peut qualifier de « logique », est commun à toutes les disciplines mathématiques ; il comprend les symboles fondamentaux de ce qui deviendra plus tard le calcul des propositions, la logique des prédicats avec identité et la théorie des ensembles. Les commentateurs de Peano, même lorsqu'ils se penchent sur sa pensée géométrique, se concentrent généralement sur ce premier niveau, « logique », du langage peanien[35]. Mais il y a un second niveau de langue dans *I principii*, proprement géométrique, que l'auteur présente, juste avant d'énoncer ses axiomes, dans les paragraphes deux et trois de son texte. C'est cette partie qui, selon nous, joue le rôle fondamental dans son raisonnement et qui explique le décalage entre Peano et Pasch.
Dans le paragraphe deux, Peano étend la notation du segment et explique l'usage du signe d'apostrophe « ' ». Il définit d'abord le symbole *hk*, *h* et *k* étant des figures (des classes de points), à partir de *ak* (avec *a* un point). Le signe *ak* désigne l'ensemble des points des segments reliant *a* à un point de *k* :

$$a\in \mathbf{1} \,.\, k\in \mathrm{K}\mathbf{1} \,.\supset:.\, ak =:\, \mathbf{1} \,.\, [x\in](y\in k \,.\, x\in ay :-=_y \Lambda)$$

Le symbole *hk* dénote l'ensemble des points des segments reliant les points de *h* aux points de *k* :

$$h,\, k\in \mathrm{K}\mathbf{1} \,.\supset:.\, hk =:\, \mathbf{1} \,.\, [x\in](y\in h \,.\, x\in yk :-=_y \Lambda).$$

La zone ombrée de figure 1 représente *hk* lorsque *h* et *k* sont deux segments :

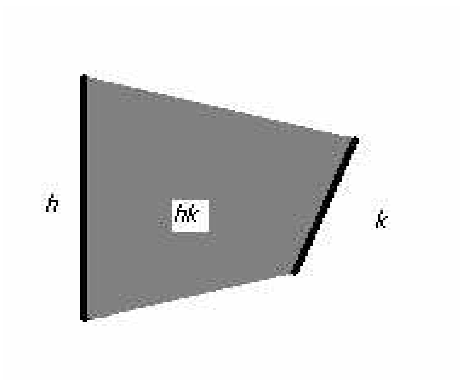

Figure 1 : *hk* est le quadrilatère ombré.

Peano définit ensuite, *a'b* (*a* et *b* étant des points) ou, comme il l'appelle plaisamment en 1894, « l'ombre de *b* éclairé par *a* », c'est-à-dire la demi-droite d'extrémité *a* ne contenant pas *b* :

$$a,b\in \mathbf{1} \,.\supset:.\, a'b =:\, \mathbf{1} \,.\, [x\in](b\in ax)$$

Il poursuit en définissant, *k* étant une figure (un ensemble de points), *a'k*, « l'ombre de *k* éclairé par *a* », et *ak'*, « l'ombre de *a* éclairé par *k* » :

$$a\in \mathbf{1} \,.\, k\in \mathrm{K}\mathbf{1} \,.\supset:.\, a'k =:\, \mathbf{1} \,.\, [x\in](y\in k \,.\, x\in a'y :-=_y \Lambda)$$
$$a\in \mathbf{1} \,.\, k\in \mathrm{K}\mathbf{1} \,.\supset:.\, ak' =:\, \mathbf{1} \,.\, [x\in](y\in k \,.\, x\in ay' :-=_y \Lambda)$$

Puis *k* et *h* étant deux figures, il introduit *h'k*, « l'ombre de *k* éclairé par *h* », et *hk'*, « l'ombre de *h* éclairé par *k* ». La figure 2 représente les deux régions du plan *hk'* et *h'k* :

[35] Voir par exemple [Bottazzini 1985].

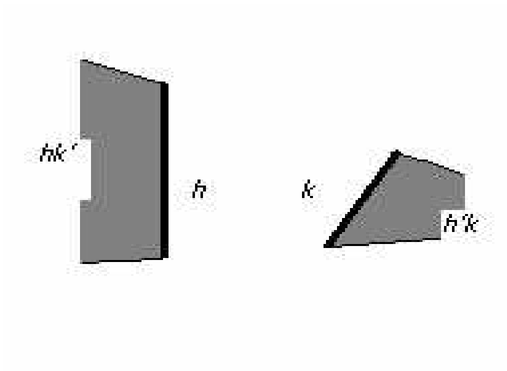

Figure 2 : *hk'* est la région ombrée à gauche de *h* ; *h'k* la région ombrée à droite de *k*.

Enfin, Peano définit *h''*, « l'ombre de la figure *h* éclairée par elle-même » :

$h \in \mathrm{K}\mathbf{1} \;.\!\supset\!.\; h'' = hh'$;

le mathématicien précise également que *abc* signifie *a*(*bc*), c'est-à-dire « l'ensemble des points entre *a* et le segment *bc* », et que *abcd* désigne *a*(*bcd*) (et ainsi de suite).
Ces différentes règles donnent un sens au signe « ' ». Pour le dire de façon imagée, le fait qu'une lettre soit suivie d'un apostrophe indique que l'objet désigné par cette lettre (que ce soit un point ou une figure) est considéré comme un lieu d'émission de la lumière ; l'expression dans son ensemble désigne alors l'ombre produit par cette lumière sur les objets nommés par les autres lettres de la formule. Une des subtilités du dispositif est qu'une même figure peut à la fois émettre et faire obstacle à la lumière. Peano utilise cette ressource notamment dans la définition très élégante qu'il donne du plan. Un plan contenant trois points non alignés *a*, *b*, *c* n'est rien d'autre que le triangle *abc* éclairé par lui-même, c'est-à-dire (*abc*)''. La figure 3, extraite de [Whitehead 1907], dans laquelle les différentes régions planaires découpées par un triangle sont désignées à l'aide du symbolisme peanien, illustre démarche du mathématicien :

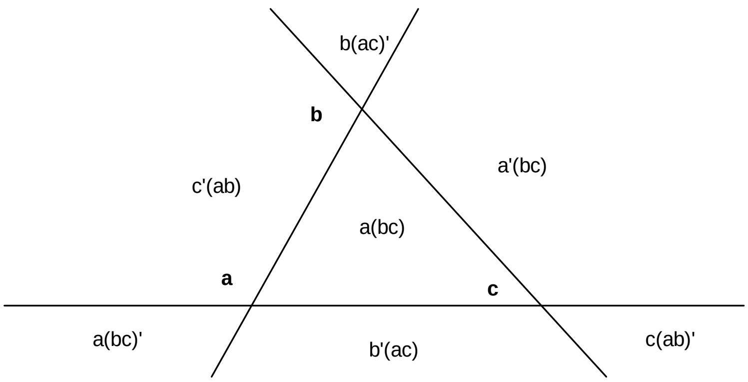

Figure 3. NB : nous aurions pu exprimer de la même façon les segments et demi-droites de la figure.

Dans le paragraphe trois de *I principii*, de notre point de vue le plus intéressant, Peano étudie les propriétés formelles des notations introduites. En particulier, il examine comment ces dispositifs interagissent avec l'inclusion et l'union ensembliste. Peano établit d'abord que, si la figure *h* est une partie de la figure *k*, alors, *a* étant un point :

$ah \subset ak,\ a'h \subset a'k,\ ah' \subset ak'$.

Introduisant la somme logique, il montre ensuite que :

$a(h \cup k) = ah \cup ak$

$a'(h \cup k) = a'h \cup a'k$

$a(h \cup k)' = ah' \cup ak'$.

Qu'enfin, si *k* est la classe vide, alors :

$ak = a'k = ak' = \Lambda$.

Il généralise ces résultats aux relations entre trois figures quelconques h, l et k :

- si $h \subset k$, alors $lh \subset lk$, $l'h \subset l'k$, $lh' \subset lk'$
- $l(h \cup k) = lh \cup lk$, $l'(h \cup k) = l'h \cup l'k$, $l(h \cup k)' = lh' \cup lk'$
- enfin, si k est la classe vide, $hk = h'k = hk' = \Lambda$.

La façon dont Peano conduit son analyse ne laisse aucun doute sur la nature de sa démarche : le mathématicien étudie les propriétés formelles de ce qu'il considère comme trois opérations : hk, $h'k$ et hk'. Plus précisément, Peano montre que ces opérations sont toutes des produits, c'est-à-dire, selon le critère grassmannien, des opérations distributives sur une opération d'addition, ici l'union ensembliste[36]. Ces produits, de surcroît, sont compatibles avec la structure d'ordre partielle fournie par l'inclusion, et admettent toutes le même élément neutre, l'ensemble vide. La démarche développée dans ce §3 reprend donc celle déjà mis en œuvre un an avant dans le *Calcolo*. Peano déploie, ici comme là, une théorie générale, formelle, de certaines opérations géométriques.

Cette façon de lire les *Vorlesungen* est extrêmement étonnante. Pasch ne considère lui-même à aucun moment la formation d'un segment, ou de son prolongement, comme un produit de deux points – un segment est pour lui un objet observable, et son prolongement jusqu'à un autre point, une construction géométrique particulière. La perspective algébrique, complètement absente des *Vorlesungen*, est propre à *I principii* et provient directement, nous semble-t-il, de l'engagement de Peano dans la tradition du calcul géométrique. Tout se passe comme si la formation grassmanienne du maître turinois le conduisait à lire spontanément, et sans même prendre la mesure ni de la violence faite au texte ni de l'originalité de l'interprétation, les deux premières sections de [Pasch 1882a] comme la mise au point d'une nouveau calcul, comparable à celui de Grassmann, fondée sur la définition d'un triple produit géométrique : hk, $h'k$ et hk'.

Vu dans cette perspective, le traité de Pasch ne manque d'ailleurs pas d'intérêt. Les trois produits sont expressivement plus riches que le produit progressif grassmannien, repris dans [Peano 1888], qui n'est que la mise en forme algébrique de l'opération symétrique de projection. Ce qu'introduit l'usage de l'apostrophe, et son commentaire en terme d'ombre et d'éclairage, c'est en effet une asymétrie dans les opérations, asymétrie qui reflète, au niveau des notations, l'orientation de la droite descriptive. Ainsi $a'b$ est la demi-droite d'extrémité b ne contenant pas a ; ab', la demi-droite d'extrémité a ne contenant pas b ; ab le segment d'extrémités a et b. Aucun de ces produits n'est identifiable au produit progressif ab ou ba, dont l'interprétation géométrique est la droite projective (ab) non orientée. Les nouveaux « produits » de Pasch sont mathématiquement féconds car ils permettent une prise au compte, au niveau des calculs, des relations d'ordre sur la droite ou dans le plan descriptif qui échappaient au produit grassmannien[37].

L'étude des paragraphes deux et trois de *I principii di geometria* suggère donc une nouvelle interprétation, plus prometteuse que la précédente. Même si Peano ne caractérise pas

---

[36] Sur la définition du produit par la distributivité, voir [Peano 1888, p. 30].

[37] Dans le *Calcolo*, Peano avait besoin de définir des notions qui se développent très naturellement dans le cadre du nouveau calcul. Il en va ainsi du concept d'enveloppe convexe. Peano, lorsqu'il développe le calcul différentiel sur les formes géometriques au chapitre 8 de son [1888] doit (pour généraliser le théorème de Rolle) définir les formations « médiales » d'un ensemble $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de formations de même degré [1888, p. 132-133]. Si par exemple les $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des points, « les formations médiales […] sont les points simples appartenant au plus petit sous-espace convexe clos qui les contient » [*Ibid*. p. 132]. Une telle définition, pourtant requise, est compliquée à obtenir dans le cadre du calcul grassmannien : elle exige que l'on pose des conditions sur les coefficients numériques. Au contraire, dans *I principii*, la construction de l'enveloppe convexe d'un ensemble quelconque de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est très simple : elle est le résultat du « produit » $A_1 A_2 \ldots A_n$. Peano montre [1889b, p. 11] en effet, après avoir défini la notion d'ensemble convexe (Cnv .=. $[x\in](x \in \mathrm{K}\mathbf{1} : a,b \in x \,.\supset_{a,b}.\, ab \supset x)$), que :

$$k \in \mathrm{Cnv} \,.\, a,b,c,d \in k :\supset.\, abcd \supset k.$$

explicitement les combinaisons *hk*, *h'k*, *hk'* comme des produits, son texte[38] doit se lire, non pas simplement comme une reprise plus économe et rigoureuse des *Vorlesungen*, mais comme la définition d'un nouveau calcul géométrique. [Peano 1889b] constituerait ainsi, selon nous, une rencontre de deux traditions fort différentes, celle de l'exposé euclidien adoptée par Pasch, et celle de l'algèbre géométrique développée, un an auparavant, par l'auteur du *Calcolo*. C'est cette piste interprétative que nous allons suivre, dans la dernière partie, pour tenter de réévaluer les rapports entre les deux mathématiciens.

III- La confrontation entre les *Vorlesungen* et *I principii* vient de nous conduire à souligner l'importance de certains passages, habituellement passés sous silence, du texte de Peano. Mais la comparaison nous oblige également à revenir sur le traité de Pasch. Le survol des *Vorlesungen* auquel nous nous sommes livré laisse en effet des points décisifs dans l'ombre. Nous avons ainsi affirmé que, dans les deux premières sections, Pasch présente une axiomatisation (au sens moderne du terme) de la géométrie élémentaire. Ce jugement, s'il n'est pas complètement faux[39], minore fortement certains aspects des *Vorlesungen*, et contribue à masquer l'écart entre les travaux de Pasch et de Peano.

Le géomètre allemand, nous l'avons dit, considère que les indéfinissables (points, segments droits et surfaces planes) ont un contenu empirique, et que les postulats, loin d'être des conventions ou des définitions implicites, sont des descriptions de faits perceptifs. L'axiomatique de la géométrie porte, selon Pasch, sur des figures[40] données dans l'intuition, et ne définit pas abstraitement, comme c'est le cas aujourd'hui, un ensemble de modèles. Cette différence entre Pasch et nous pourrait être considérée comme importante, mais non essentielle dans la mesure où l'expérience n'intervient, dans les *Vorlesungen* qu'au niveau de la justification des axiomes, et nulle part ensuite. Au lieu d'appliquer le système à n'importe quel domaine satisfaisant les postulats, le géomètre privilégierait, pour des raisons philosophiques, une interprétation particulière, sans que ce biais affecte de quelque façon le développement axiomatique. Mais à la fin de la première section de son traité, juste après avoir affirmé que « les propositions fondamentales doivent contenir complètement le matériau empirique traité par les mathématiques de façon à ce que l'on n'ait plus besoin après leur établissement d'en revenir à la perception sensible », Pasch affirme :

> Mais par précaution, des restrictions [*Einschränkungen*] doivent être dès le début posées, qui sous-tendent l'application de chaque proposition fondamentale prise individuellement.[41]

Quelques lignes plus loin, il continue :

> Nous apprenons les concepts fondamentaux et les propositions fondamentales de la géométrie sur des objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ; à l'extérieur de ce domaine leur application n'est tout simplement pas justifiée.[42]

La géomètre de Giessen est en train d'expliquer que les axiomes qu'il vient de formuler ne valent pas inconditionnellement. Ils ne s'appliquent qu'aux « objets par rapport auxquels nous ne sommes que peu éloignés ». Et le géomètre précise immédiatement son propos en donnant

[38] Le fait que la reprise de Pasch par Peano s'inscrive dans la tradition grassmannienne est plus visible dans [1889b], que dans l'article plus tardif de 1894. Dans le second texte, Peano ne développe pas systématiquement son étude comme il le fait dans le §3 de *I principii*. De façon plus générale, Peano n'élaborera pas de calcul fondé sur les *Vorlesungen*. Cette absence ne remet pas en question notre thèse : nous n'affirmons pas que Peano construit une nouvelle algèbre à partir du texte de Pasch, mais que son interprétation des *Vorlesungen* est surdéterminée par son engagement antérieur dans la tradition du calcul géométrique.

[39] Voir par exemple [Enriques 1911, p. 22-23].

[40] Sur ce concept de figure, voir [Pasch 1882a, p. 25].

[41] [Pasch 1882a, p. 17] : « Um so vorsichtiger müssen von vornherein etwaige Einschränkungen festgestellt werden, denen die Anwendung einzelner Grundsätze unterliegt. »

[42] [Pasch 1882a, p. 18] : « Die geometrischen Grundbegriffe und Grundsätze erlernt man an Objecten, von denen man verhältnissmässig nur wenig entfernt ist ; über ein solches Gebiet hinaus ist also ihre Anwendung nicht ohne Weiteres berechtigt. »

trois exemples. La premier traite d'une situation où la figure est excessivement éloignée, et où sa taille est donc très petite. Le second *Grundsatz*, stipulant que l'on « peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment droit donné » n'est alors plus valide. Si le segment est trop petit, il n'est plus possible de distinguer, entre A et B, un point C[43]. La seconde limitation concerne, au contraire, une situation de « proximité excessive ». Imaginons qu'une courbe close soit si grande que l'on ne puisse en percevoir qu'une partie ; si, sur cette partie, C est entre A et B, un observateur imprudent en conclura par l'axiome III (« si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB, alors le point A se trouve à l'extérieur du segment BC »), que A n'est pas entre C et B – ce qui est faux[44]. Le troisième exemple, plus complexe parce qu'il combine des considérations ordinales à des considérations relatives à la congruence, reprend une démonstration, courante à l'époque, de « géométrie absolue »[45], établissant l'existence d'au moins une droite parallèle passant par un point extérieur à une droite donnée ; Pasch refuse ce résultat, arguant du fait qu'il dépend de l'application illégitime des axiomes d'ordre à des figures trop « grandes », et se ramène ainsi au second cas[46].

Il est donc faux de dire que, pour Pasch, une fois consignée dans les axiomes, le contenu théorique peut être développé sans que l'on n'ait jamais plus besoin de recourir à l'expérience. L'application des postulats est toujours soumise à une vérification préalable concernant la « taille » et l'« éloignement » des figures. Cette exigence est très étrange. Dans une perspective post-hilbertienne, un système d'axiomes s'applique inconditionnellement à la totalité des modèles qu'il définit. Ces modèles peuvent être extrêmement différents les uns par rapport aux autres, mais tous ont en commun, par définition, de satisfaire l'ensemble des postulats. Dans une telle approche, prétendre que les axiomes ne sont pas toujours vrais sur leurs modèles est donc tout simplement dénué de sens. Dans une perspective plus traditionnelle, euclidienne, où les postulats géométriques décrivent les propriétés de certains objets distingués dans l'intuition (les figures), les axiomes s'appliquent aussi inconditionnellement. Toute construction faite en conformité aux principes est permise, dans les *Eléments* d'Euclide, et toute déduction établie à partir des axiomes est valide. Une fois énoncés, les postulats sont les seuls critères de vérité. Il est possible de remettre en cause la vérité d'un ou de plusieurs axiomes. Mais il est impossible, à moins de renoncer à la systématicité de la théorie elle-même, de restreindre arbitrairement, à la manière de Pasch, le champ d'application des principes et des procédures de construction.

L'étrangeté des propos tenus à la fin de la première section est accru par le fait que l'auteur des *Vorlesungen* ne donne aucune caractérisation du « bon » éloignement des figures. Non seulement Pasch restreint la validité de certains postulats, mais pire encore, il ne détermine même pas les seuils à partir desquels ses axiomes deviennent inapplicables[47]. Une telle attitude est cohérente : pour délimiter précisément le champ d'application des postulats, il faudrait pouvoir s'abstraire de l'espace empirique environnant, et le caractériser de « l'extérieur », ce qui est bien entendu impossible aux yeux de l'empiriste qu'est Pasch. La seule chose que l'on puisse faire, c'est de mettre en garde contre l'extension, dans un sens ou dans un autre, du champ de validité des axiomes.

Tout ceci rend le statut de la géométrie élémentaire dans les *Vorlesungen* extrêmement difficile à comprendre. Sur quoi porte réellement la géométrie élémentaire ? Que sont ces

[43] [Pasch 1882a, p. 17-18].
[44] [*Ibid.*, p. 18-19].
[45] On la trouve la même démonstration chez Houël [1867, p. 50-51]. La géométrie absolue est définie alors comme celle qui peut se déduire des quatre premiers axiomes d'Euclide, indépendamment de l'axiome des parallèles.
[46] [Pasch 1882a, p. 19-20]. Cette dernière illustration a une grande importance, car elle revient à reconnaître une compatibilité entre la géométrie absolue et la géométrie riemannienne. Comme nous le verrons, le même argument permet de rejeter le théorème de Peano, selon lequel dans un plan de la géométrie « élémentaire » au sens de Pasch, il existe des droites qui ne se coupent pas.
[47] Cette question des « seuils » est cruciale à l'époque ; Voir [Klein 1883].

points, ces segments, ces surfaces planes, solidaires du regard qui les observe ? Une théorie géométrique a-t-elle à prendre en compte le fait, totalement contingent, de la taille de la feuille sur laquelle les figures sont couchées, de la position du géomètre qui les étudie ? Devant les conséquences, semble-t-il incontrôlables, qui paraissent découler des affirmations de Pasch, le plus raisonnable ne serait-il pas de reculer, c'est-à-dire de reverser les propos du mathématicien au compte d'un bavardage empiriste, à la mode alors dans la tradition post-kantienne, sans conséquence sur la pratique scientifique elle-même ? Ce serait trahir le génie de Pasch que de s'engager dans cette voie. Nous allons montrer, en prenant deux exemples, qu'il y a, chez le géomètre de Giessen, une véritable prise en compte des réquisits empiristes dans les structures formelles qu'il introduit.

Le premier exemple est celui de la définition que Pasch donne de la droite. On adopterait, aujourd'hui, assez naturellement, la définition nominale proposée par Peano : la droite (AB) est l'ensemble des points X entre A et B, ou tel que A est entre X et B, ou tel que B est entre X et A :

$$\mathbf{2} = [\mathrm{x}\in](a, b \in \mathbf{1} \,.\, a -\!\!= b \,.\, x = (ab)'' : -=_{\mathrm{a,b}} \Lambda).$$

Or, dans les *Vorlesungen*, Pasch ne définit pas nominalement le symbole « la droite (AB) ». Il emploie à la place une procédure plus complexe, qu'il nomme, dans la seconde édition du traité, « définition implicite »[48]. Pourquoi ce détour ?
Dans la définition de Peano, la droite est caractérisée comme un segment illimité : elle est le prolongement à « l'infini », des deux côtés, du segment AB. La belle image d'un segment éclairé par lui-même le dit assez : une ombre n'a pas de fin. Or en raison de la validité « géographiquement » limitée des axiomes élémentaires, Pasch ne peut pas admettre ce genre d'objet dans sa géométrie. Il ne peut pas suivre Peano dans l'usage qu'il fait de la variable X. Pasch accepterait sans doute de parler d'un point variable entre des points donnés A et B ; mais pour lui, parler de l'ensemble des points X, tels que B est entre A et eux, ou tels que A est entre B et eux, est, dans le cadre très contraignant de la géométrie élémentaire, absurde : il n'y a pas, dans les *Vorlesungen*, d'ensemble de ce type, tout simplement parce que, par définition, l'espace considéré est un espace accessible, donc qui se situe toujours, lorsqu'on parle d'un segment droit, entre deux points donnés. Mais en même temps, Pasch a besoin, en plus du concept de segment, de la notion de droite. Comment alors introduire une droite sans violer les contraintes imposées par l'empirisme ?
Pasch explique que le symbole « droite » exprime non pas l'idée d'illimitation, mais celle d'indétermination[49]. La référence à un contexte implicite est précisément ce qui permet d'obtenir l'indétermination sans présupposer l'illimitation. En effet, définir « la droite (AB) », c'est, selon Pasch, trouver un équivalent à un énoncé dans lequel le symbole « droite (AB) » apparaît : par exemple, « C est sur la droite (AB) » (C étant un point propre quelconque) équivaut à « C est entre A et B, ou B est entre A et C, ou C est entre A et B ». Ici, aucun prolongement à l'infini n'apparaît : au contraire, le point C jusqu'auquel le segment AB doit être prolongé est fourni avec le contexte. En même temps, à la différence d'un segment, les extrémités d'une droite ne sont pas fixées car le contexte propositionnel varie, et avec lui la référence au point C. C'est donc le contexte, chez Pasch, qui est variable – non le point, comme chez Peano ; et c'est ce renvoi à un énoncé variable, qui réfère lui-même à un point, qui permet, dans la définition des *Vorlesungen*, d'introduire une indétermination sans en appeler à une illimitation. La droite n'est pas un segment illimitée, mais un segment dont on ne peut pas dire où il s'arrête. En employant une terminologie anachronique, on pourrait affirmer que la variable, donnant à la différence entre segment et droite une existence

[48]Il s'agit là d'une reprise de la terminologie hilbertienne. Mais Pasch distingue clairement ses définitions implicites, qui sont substantielles, des définitions purement formelles de Hilbert ; voir [Pasch 1921].
[49] [Pasch 1882a, p. 4, 8-9, 20].

formelle, n'appartient pas chez Pasch au langage-objet, mais au métalangage, au discours du géomètre sur les objets perceptifs[50].

Le géomètre allemand cherche, dans l'élaboration des procédures de définition, à respecter la caractérisation qu'il donne de l'objet de la géométrie élémentaire. La notion de droite comme segment prolongé à l'infini ne peut être développée dans le cadre d'une théorie qui porte sur les figures « peu éloignées ». Par contre, le concept de segment aux limites indéterminées est tout à fait intelligible. Pasch fait ici montre d'une grande maîtrise et d'une belle lucidité dans l'usage des procédures logiques et de leurs implications philosophiques. Le mathématicien n'a par exemple pas les mêmes scrupules en analyse. Dans son *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung* (publié la même année), les réels sont d'emblée définis en terme de coupure, c'est-à-dire en terme d'ensembles infinis de nombres rationnels – ceci prouve que, si Pasch n'emploie pas les définitions aujourd'hui classiques, ce n'est pas par ignorance, mais parce qu'il considère que la nature empirique de la géométrie le contraint à maintenir une différence entre l'indétermination et l'illimitation.

Autre exemple d'« effet formel » induit par l'empirisme : la façon dont Pasch traite de la question du parallélisme et de la relation entre géométrie élémentaire et projective. Pasch n'oppose pas, comme le font aujourd'hui les manuels classiques[51], les points propres (ceux de l'espace « descriptifs »), aux points impropres (ceux qu'il faut « ajouter » au premier espace pour obtenir l'espace projectif). La notion de point impropre [*uneigentlich*], seulement idéal, n'est pas une catégorie des *Vorlesungen*. Pasch, après avoir défini les points génériques [*beliebig*] au §6[52], se contente de dire qu'un sous-ensemble de ces points est constitué des éléments propres, en refusant soigneusement de se prononcer sur la nature des autres entités. Et ce n'est qu'au paragraphe quatorze, dans un contexte extrêmement particulier, que Pasch emploie, pour la première fois, le terme de point impropre ou idéal[53]. Pourquoi une telle prudence ?

Parler de points impropres suppose que l'on puisse avoir accès à la totalité des points « propres », c'est-à-dire que l'on puisse délimiter précisément l'espace dans lesquels sont plongées les figures analysées dans la géométrie élémentaire. Or une telle opération n'est pas possible pour Pasch. Nous l'avons vu, les postulats « élémentaires » s'appliquent à des figures « peu éloignées », sans que l'on puisse déterminer avec précision les limites de ce champ d'application. Pour parler de points impropres, il faut admettre que l'on puisse s'abstraire de l'espace physique et le caractériser de l'extérieur – or pour un empiriste comme Pasch, on ne peut pas sortir de l'expérience. Celui qui élabore une géométrie élémentaire travaille donc essentiellement sur des figures-dans-un-espace ; il n'étudie pas un espace conçu comme une totalité – encore moins un sous-espace d'un espace plus englobant, comme c'est le cas

---

[50] Même si le problème est moins évident que dans le cas de la définition de la droite, Pasch aurait, nous semble-t-il, objecté à la définition du plan donné par Peano. « *D* appartient au plan *ABC* » pourrait être « implicitement » défini comme signifiant « *D* appartient au prolongement d'un segment de la surface limitée contenant *A*, *B*, *C* ». Mais le problème, pour Pasch, serait vraisemblablement qu'une telle définition ne précise pas quel segment de la surface limitée donnée doit être prolongé.

[51] Voir [Coxeter 1947], ou [Whitehead 1907].

[52] « *Beliebig* » signifie « quelconque », ou « au choix ». Nous avons préféré suivre P. Nabonnand [2002] et parler de point générique.

[53] L'auteur vient d'énumérer les axiomes de congruence, qui portent tous sur des entités géométriques propres. Un des postulats (le huitième) stipule que si, deux figures étant congruentes, on ajoute à l'une des éléments propres, alors il est toujours possible de compléter l'autre afin d'obtenir deux nouvelles figures congruentes. L'objet du paragraphe quatorze est de montrer que, l'homologie entre figures étant une relation qui préserve les propriétés projectives, il est possible d'étendre cette relation aux points génériques définis dans le paragraphe six. C'est dans ce contexte, celui d'une généralisation des relations de congruence, qu'il revient sur la « démonstration », présentée à la fin du premier paragraphe, selon laquelle il y a toujours au moins une droite parallèle à une droite donnée passant par un point extérieur à cette droite. L'argument, explique Pasch, ne prouve pas l'inexistence du point d'intersection, mais seulement le caractère *uneigentlich*, impropre, du point construit.

aujourd'hui des mathématiciens présentant l'espace descriptif comme un sous-espace propre de l'espace projectif.
Là encore, la perspective de Pasch est très différente de celle de Peano. A la fin de son [Peano 1889b], le mathématicien affirme sans démonstration que, si l'on ajoute aux postulats de son système un axiome de continuité, alors l'existence de droites coplanaires qui ne se coupent pas peut être prouvée[54]. Ce résultat constitue plus qu'une avancée mathématique par rapport aux *Vorlesungen* ; il signale un décrochage épistémologique fondamental. S'interroger sur l'existence de droites coplanaires non sécantes suppose en effet que l'on accepte de considérer la totalité des points propres d'un plan « élémentaire », ce qui est absurde, pour Pasch, dans le cadre de la géométrie élémentaire. L'ensemble des points propres n'est que vaguement défini, et la possibilité de parler de deux droites infiniment prolongées n'existe pas. Le fait que Pasch laisse ouverte la question des parallèles n'est donc pas dû à un manque d'habileté logique, mais découle directement de sa conception de la théorie élémentaire, comme géométrie essentiellement indéterminée, valide seulement sur un espace « proche » (sans que cette « proximité » fasse l'objet d'une reprise théorique)[55]. Le système de Pasch ne décrit pas un espace ; il porte essentiellement sur un environnement. Se poser des questions portant sur l'espace élémentaire en tant que telle, se demander par exemple, avec Peano, si les segments de droites coplanaires, indéfiniment prolongées, se croisent toujours, manifestent une incompréhension totale du statut qu'ont les objets ce cette géométrie première.

Nous en avons dit assez sur Pasch pour montrer que l'idée générale selon laquelle la géométrie élémentaire est une géométrie essentiellement vague, approximative n'est pas seulement un bavardage, une prose « philosophique » extérieure à un développement mathématique supposé « rigoureux ». Pasch adapte sa pratique au statut (empirique) de son objet : les propriétés grossières des figures perceptibles de taille moyenne. La reprise que propose Peano évacue complètement cette dimension. Pour le maître italien, le système présenté par Pasch n'est, dans son application, limité par aucune clause. Peano n'éprouve ainsi aucun scrupule à définir la droite comme un segment prolongé à l'infini et à formuler des théorèmes portant sur la totalité du plan ou de l'espace « descriptif ». L'ironie est que le mathématicien italien reprend l'empirisme du géomètre : l'axiomatique de *I principii* porte officiellement sur l'espace empirique[56]. Mais Peano, en dotant son objet d'étude de propriétés trop « robustes » (les segments sont prolongeables à l'infini, les considérations ordinales ne sont pas seulement locales), ne respecte pas ses déclarations liminaires : il transgresse sans cesse les limites de l'expérience qu'il prétend décrire. L'empirisme est, chez Peano, complètement vidé de sa substance – il ne devient qu'une coquille vide, dont les disciples se débarrasseront bien vite[57].
La précédente analyse accroît donc l'écart entre les projets de Peano et de Pasch, et suscite immédiatement deux questions : Peano, en présentant Pasch comme un simple prédécesseur peu rigoureux, rend-il véritablement justice à l'auteur des *Vorlesungen* ? Et en plaçant sa réflexion dans le sillage de celle de Pasch, le mathématicien italien ne manque-t-il pas la véritable originalité de son propre travail ?
Peano est injuste envers Pasch car il ne voit pas à quel point la démarche du mathématicien allemand intègre dans ses procédures « techniques » la philosophie empiriste dont il se réclame. La « traduction » peanienne, en modifiant les dispositifs mis au point par Pasch, ne

[54] Voir [Peano 1889b, p. 38-39] ; plus précisément, Peano parle de l'existence dans un plan d'une demi-droite, passant par un point donné, parallèle à une demi droite donnée. Ce résultat sera repris par Veblen, qui s'en sert pour construire un modèle de géométrie élémentaire plane (non continue) dans lequel toutes les droites se coupent ; voir [Veblen 1904, p. 347-349] et [Whitehead 1907, p. 10-11].
[55] Voir *supra*.
[56] Voir notre section 1, *supra*.
[57] Voir [Pieri 1900].

« corrige » pas certaines « imperfections », mais transforme complètement le sens et la portée de l'analyse. Il s'agissait pour Pasch de montrer comment, à partir d'un noyau empirique minimum la totalité de la géométrie, de ses concepts et de ses théorèmes, pouvait être développée. La question de l'assise empirique de la science géométrique est complètement évacuée chez Peano, et ce quoi qu'il en dise – la définition de la droite et le théorème sur l'existence des droites parallèles en attestent.
Mais Peano est également injuste envers lui-même car il ne souligne pas à quel point son élaboration d'une langue géométrique est un geste mathématique majeur. Si Peano peut se libérer aussi facilement (au point de ne même pas voir l'existence du problème) des très fortes contraintes pesant sur l'axiomatique de la géométrie élémentaire, c'est parce qu'il interprète spontanément le début des *Vorlesungen* comme la mise au point d'un nouveau produit. Pasch est lu par Peano comme un continuateur de la tradition de l'algèbre géométrique. Un segment n'est ainsi pas conçu dans [Peano 1889a] comme une entité observable, mais comme un produit particulier de points – le prolongement n'est pas défini comme une construction géométrique problématique, mais comme le résultat d'un nouveau type de multiplication. C'est ce premier décalage, silencieux car syntaxique, qui permet à Peano d'ignorer tout ce qui relève chez Pasch des limites de l'expérience. Lire le début des *Vorlesungen* comme une contribution aux recherches portant sur le calcul géométrique dégage le texte de Pasch de son socle problématique, et l'installe dans une perspective radicalement différente.
Il y a donc un gouffre entre les *Vorlesungen* et *I Principii* et cet écart manifeste, selon nous, l'emprise que conserve le paradigme du calcul géométrique sur la pensée de Peano. Le mode de questionnement du mathématicien italien n'a rien à voir avec celui de Pasch : au lieu de se demander comment concevoir le rapport entre la géométrie et l'expérience, Peano explore les possibilités offertes par les combinaisons des apostrophes et des lettres dans l'élaboration de nouveaux produits. Il se demande par exemple comment exprimer un plan à partir de trois points non colinéaires, comment écrire une enveloppe convexe sous la forme d'un produit de *n* points[58], comment représenter le parallélisme entre demi-droites en terme de ces produits[59]. C'est dans l'exploitation des ressources expressives de ce qui est d'emblée conçu comme un calcul que se révèle le génie de Peano.

*   *   *

Résumons le cheminement qui a été le nôtre. Nous avons distingué trois paradigmes : celui du calcul géométrique (le Peano du *Calcolo*), celui de l'axiomatique conçu comme un moyen de développer une théorie à partir d'une base empirique restreinte (Pasch), celui de l'axiomatique conçu comme un système autonome définissant librement une famille de modèles (Hilbert). Nous avons, en premier lieu, opposé le premier canevas, qui présuppose une distinction ontologique entre différentes sortes d'entités, au troisième. Mais nous avons montré, dans un second temps, que la transition du second au troisième modèle (de l'axiomatisation « à la Pasch » à l'axiomatisation « à la Hilbert » ou « à la Pieri ») s'effectue, chez Peano, *via* un détour par le calcul : le point de vue algébrique qui guide la pensée du maître italien lui permet d'arracher les liens qui reliaient encore chez Pasch les symboles à l'intuition empirique. Dit autrement, s'il faut distinguer le modèle de l'algèbre géométrique de celui de l'axiomatique, on ne saurait sur-estimer le rôle joué par la tradition du calcul dans la lecture que Peano fait des *Vorlesungen*. *I principii di geometria* est un texte dans lequel se juxtapose sans se fondre deux types de référence très hétérogène, la référence à Grassmann et celle à Pasch.

[58] Voir note *supra*.
[59] Voir [1889a, p. 38-39], la très belle définition du parallélisme : *a'b* est parallèle à *c'd* si et seulement si *bc'd* = *da'b*.

Chez Peano, un thème dissimule la diversité des sources : celui de la langue artificielle. En algèbre, la langue ordinaire est remplacée par la notation littérale. Mais Pasch comme Hilbert plus tard insistent également sur la nécessité, dans un système axiomatique, de mettre à distance le langage usuel. La dénonciation de l'ambiguïté des langues vernaculaires représente ainsi une vaste plate-forme commune autorisant la juxtaposition de divers paradigmes. Rappelons le passage cité dans notre introduction :

> Chaque proposition [du système] possède la forme et la précision dont les équations jouissent en algèbre, et de ces propositions ainsi écrites d'autres peuvent être déduites, par un processus qui ressemble à celui de la résolution des équations algébriques. [Peano 1894, p. iii]

C'est parce qu'ils peuvent être tous couchés dans une même langue précise et artificielle que les théorèmes ressemblent à des équations, et la déduction à la résolution d'équations. La critique du langage usuel est ainsi suffisamment indéterminée pour permettre la combinaison lâche et non complètement réfléchie de pratiques distinctes. D'un point purement négatif (la critique du langage ordinaire), Peano conclut à une « ressemblance » entre des méthodes profondément différentes.

Nous avions évoqué, dans l'introduction, la célèbre distinction, proposée par van Heijenoort, entre la logique comme calcul et la logique comme langage. En un sens, l'analyse des textes de Peano, en révélant à quel point la référence au langage recouvre alors des pratiques extrêmement diverses, justifie l'effort de discernement initié par van Heijenhoort. Mais en même temps, elle révèle, nous semble-t-il, les limites de ce type d'approche. A cette époque, peut-être surtout chez Peano, c'est aussi dans ce qu'elle a de vague et d'indéterminée que la référence au langage joue un rôle scientifiquement important. C'est ainsi la thématique, purement négative, de la critique de la langue ordinaire qui permet à Peano de greffer de façon très opportune[60] ses recherches sur le calcul géométrique à sa lecture des *Vorlesungen*. Il convient, certes, de distinguer les diverses étages conceptuels recouverts par l'usage d'une même terminologie. Mais il convient également de ne pas figer ces modèles sur eux-mêmes, et, pour cela, de reconnaître le rôle scientifique que revêtent les modes de présentation vagues mais commodes, rhétoriques mais souples utilisés par Peano : ce sont ces « slogans », dans ce qu'ils ont d'indéterminé et d'accueillant qui permettent de faire coexister, au sein d'une même pensée, différentes traditions mathématiques, et d'ouvrir ainsi vers de nouvelles pratiques.

[60] I. Grattan-Guinness qualifie, dans le portrait qu'il fait de Peano dans son [2000], d'opportuniste.

Appendice : comparaison de l'axiomatique de Peano (*I principii di geometria*) et de Pasch (*Vorlesungen über neure Geometrie*, §§ 1 et 2)[61]

1- PEANO: *I principii di geometria*

Axiomes préliminaires concernant l'identité et le segment :

1- a=a
2- a=b .=. b=a
3- a=b . b=c : ⊃. a=c
4- a,b ∈ 1 .⊃. ab ∈ K1
5- a,b,c,d∈1 . a=b . c=d .⊃. ac = bd

Axiomes :

I- 1-=Λ	I- ∃x(x∈1)
II- a∈1 .⊃:. x∈1 . x-=a : -=$_{x}$Λ.	II- ∀x∃y(x≠y)
III- a∈1 .⊃. aa=Λ.	III- ∀x~∃y(y∈xx)
IV- a, b∈1 . a-=b :⊃. ab -= Λ.	IV- ∀x∀y(x≠y⇒∃z(z∈xy))
V- a,b∈1 .⊃. ab=ba.	V- ∀x∀y(xy=yx)
VI- a,b∈1 .⊃. a-∈ ab.	VI- ∀x∀y(x ∉ xy)

Déf:

a,b∈1 .⊃:. a'b =: 1 . [x∈](b∈ax)	x'y = {z : x,y,z∈1 ∧ y∈xz}

VII- a,b∈1 . a-=b :⊃. a'b-=Λ.	VII- ∀x∀y(x≠y⇒∃z(z∈x'y))
VIII- a,b,c,d∈1 . c∈ad . b∈ac: :⊃. b∈ad	VIII- ∀x∀y∃z∃w((z∈xy ∧ w∈xz) ⇒w∈xy)
IX- a,d∈1 . b,c∈ad :⊃: b=c .∪. b∈ac .∪. b∈cd.	IX- ∀x∀y∃z∃w((z∈xy ∧ w∈xz)⇒ (z∈xw ∨ z=w ∨ z∈wy))
X- a,b∈1 . c,d∈a'b :⊃: c=d .∪. d∈bc .∪. c∈bd	X- ∀x∀y∃z∃w((z∈x'y ∧ w∈x'z)⇒ (z∈yw ∨ z=w ∨ z∈yz))
XI- a,b,c,d∈1 . b∈ac . c∈bd :⊃. c∈ad	XI- ∀x∀y∀z∀w((y∈xz ∧ z∈yw) ⇒z∈xw)

Définition :
- Droite:

2 = [x∈](a,b∈1 . a-=b . x :=: b'a.∪.a.∪.ab.∪.b.∪.a'b:-=$_{a,b}$ Λ)

2 = [x∈](a,b∈1 . a-=b . x = (ab)'':-=$_{a,b}$ Λ)	2 = {r : ∃x∃y(x,y∈1 ∧ x≠y ∧ r= y'x∪{x}∪xy∪{y}∪x'y}

- Colinéarité :

a,b,c∈1 ::⊃:: a,b,c∈Cl .:=:. x∈2 . a,b,c∈x :-= $_{x}$Λ	a,b,c∈Cl = a,b,c∈1 ∧ ∃x(x∈2 ∧ a,b,c∈x)

XII- r∈2.⊃: x∈1 . x-∈r . -=$_{x}$Λ	XII- ∀x(x∈2⇒∃y(y∈1∧y∉x))
XIII- a,b,c∈1 . a,b,c-∈Cl . d∈bc . e∈ad :⊃:. f∈ac . e∈bf :-=$_{f}$Λ.	...
XIV- a,b,c∈1 . a,b,c-∈Cl . d∈bc . f∈ac :⊃:. e∈ad . e∈bf :-=$_{e}$Λ.	...

Définition :
Plan : 3 = [x∈](a,b,c∈1 . a,b,c-∈Cl . x = (abc)'':-=$_{a,b,c}$ Λ)

XV- p∈3 .⊃:.a∈1 . a-∈p:-=$_{a}$Λ

[61] Nous avons ici repris [Freguglia 1985, p. 206-211].

XVI- p∈3 . a∈1 . a-∈p . b∈a'p . x∈1 :⊃: x∈p .∪. ax∩p-=Λ .∪. bx∩p-=Λ.

2- PASCH: *Vorlesungen über neure Geometrie*, §§ 1-2.

Axiomes du segment (trad. tiré de [Nabonnand 2002]) :

1- Entre deux points, on peut toujours tracer un segment de droite, et seulement un.
2- On peut toujours désigner un point qui se trouve à l'intérieur d'un segment de droite donné
3- Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB, alors le point A se trouve à l'extérieur du segment BC
4- Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB, alors tous les points du segment AC sont en même temps des points du segment AB
5- Si le point C se trouve à l'intérieur du segment AB, alors un point D qui n'appartient à aucun des segments AC et BC ne peut pas appartenir au segment AB.
6- Soit A et B deux points, alors on peut choisir le point C de telle manière que B se trouve à l'intérieur du segment AC.
7- Si le point B se trouve à l'intérieur du segment AC et du segment AD, alors soit le point C se trouve à l'intérieur du segment AD, soit le point D se trouve à l'intérieur du segment AC
8- Si le point B se trouve à l'intérieur du segment AC et le point A à l'intérieur du segment BD, alors A se trouve également à l'intérieur du segment CD.
9- Etant donnés deux points A et B quelconque, alors on peut choisir un troisième point tel que aucun des trois points A, B, C ne se trouve à l'intérieur du segment joignant les deux autres.

Déf.:
- Si B est un point du segment AC, le segment BC est un prolongement du segment AB
- A, B, C forme une série linéaire si l'un des points appartient au segment joignant les deux autres
- Si A, B, C constitue une série linéaire, on dit que C se trouve sur la droite AB.

Axiomes de la surface plane:

10- Par trois points quelconque, on peut poser une surface plane
11- Si un segment est tracé entre deux points d'une surface plane, alors il y a une surface plane qui contient tous les points de la surface originale et tous ceux du segment.
12- Si deux surfaces planes P, P' ont un point commun, on peut désigner un autre point qui est contenu aussi bien dans une surface plane contenant tous les points de P que dans une surface plane contenant ceux de P'.
13- Soient trois points A, B, C d'une surface plane reliés deux à deux par les segments AB, AC, BC et dans la même surface une droite DE passant par un point situé à l'intérieur du segment AB, alors le segment DE ou un prolongement de celui-ci passe soit par un point du segment AC, soit par un point du segment BC.

Déf.:
D est dans le plan ABC ssi il existe une surface plane dans laquelle sont A, B, C, D.
On démontre que si D et E sont dans le plan ABC, alors A et B sont dans le plan CDE.

3- COMPARAISON PASCH / PEANO

Axiomes de la droite (selon [Peano 1889, p. 84-85]):

Pasch:	Peano:
1 (existence et unicité du segment)	4, 5, V
2 (un segment n'est pas vide)	II
3 (ordre)	III, VI, P18 (théorème)
4 (ordre)	VIII
5 (ordre)	IX
6 (ordre)	VII
7 (ordre)	X

8 (ordre)	XI

Axiomes du plan:

9 (existence de trois points non colinéaires)	XII
10 (surface plane et trio de points)	déf.
11 (prolongement d'une surface plane et segment)	déf.
12 (relation entre plans dans l'espace)	XV, XVI
13 (relation d'ordre dans le plan)	XIII, XIV

AVELLONE M., BRIGAGLIA A., ZAPULLA C.,
[2002] The Foundations of Projective Geometry in Italy from De Paolis to Pieri, *Archive for History of Exact Sciences*, 56, p. 363-425.

BORGA M., FREGUGLIA P., PALLADINO D.,
[1985] *I contributi fondazionali della scuola di Peano*, Milano : Franco Angeli.

BOTTAZZINI Umberto
[1985] Dall'analisi matematica al calcolo geometrico : origini delle prime ricerche di logica di Peano, *History and Philosophy of Logic*, 6 : 1, p. 25-52.

BURALI-FORTI Cesare
[1897] *Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann*, Paris : Gauthier-Villars.

BURALI-FORTI C. et MARCOLONGO R.
[1910] *Eléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, Paris : Hermann, 1910.

CARNOT Lazare
[1804] *Géométrie de position*, Paris, 1804.

CONTRO W.
[1976] Von Pasch to Hilbert, *Archive for History of Exact Sciences*, 15, p. 283-295.

DEDEKIND Richard
[1888] *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, Braunschweig, Vieweg.

ENRIQUES Federigo
[1911] *Fondements de la géométrie. Géométrie générale*, in *Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, tome III, volume 1, J. Molk éd., Paris : Gabay, 1991.

FREGUGLIA Paolo
[1985] Il calcolo geometrico ed i fondamenti della geometria, in [Borga et alii 1985, p. 174-236].
[1992] *Dalle equipollenze ai sistemi lineai – Il contributo italiano al calcolo geometrico*, Urbino : QuattroVenti.

FREUDENTHAL Hans
[1974] The impact of von Staudt's foundation of geometry, in R. S. Cohen et alii, *For Dirk Struik*, Dordrecht : D. Reidel, p. 189-200.

GRATTAN-GUINNESS Ivor
[2000] *The search for mathematical roots 1870-1940 – Logic, set theories and the foundations of mathematics from Cantor through Russell to Gödel*, Princeton and Oxford : Princeton University Press.

HERMITE Charles
[1882] *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer*, 4ème édition, Paris : Hermann, 1891.

HOUËL J.
[1867] *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur XXXII premières propositions d'Euclide*, Paris : Gauthier-Villars, 2nde éd., 1883

KENNEDY Hubert C. éd.
[1973] *Selected Works of Giuseppe Peano*, Toronto : University of Toronto Press.
[2002] *Life and Works of Giuseppe Peano*, http://home.att.net/~clairnorman/Peano2002.pdf.

KLEIN Felix
[*Werke*] *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Berlin : Springer (1921-1923), I-III
[1871] Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, *Math. Annalen*, 4, 1871, cité d'après [*Werke*] 1, p. 254-305.

LEBESGUE Henri
[1975] *La mesure des grandeurs*, Paris : Blanchard.

MICHEL Alain
[1992] *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*, Paris : Vrin.

MOORE Gregory H.
[1995] The Axiomatization of Linear Algebra : 1875-1940, *Historia Mathematica*, 22, p. 262-303.

NABONNAND P.
[2002] Des « Grundbegriffe » aux « Stammbegriffe », in *Histoires de Géométries, textes du séminaire de l'année 2002*, Paris : Maison des Sciences de l'Homme.

PASCH Moritz
[1882a] *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig : Teubner, 1882 ; 2ème édition avec un supplément de Max Dehn, *Die Grundlegung der Geometrie in Historischer Entwicklung*, Berlin : Springer, 1926.
[1882b] *Einleitung in die Differential- und Integralrechnung*, Leipzig : Teubner.
[1921] Die Begründung der Mathematik und die implizite Definition, *Annalen der Philosophie*, 2, p. 144-162.

PEANO Guiseppe
[1887] *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale,* Torino : Bocca.
[1888] *Calcolo geometrico secondo l'Ausedehnungslehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva*, Torino : Bocca. Traduction anglaise de L. C. Kannenberg, Boston : Birkhäuser, 2000.
[1889a] *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, Torino : Bocca. Traduction anglaise dans [Kennedy 1973, p. 101-134]
[1889b] *I principii di geometria logicamente esposti*, Torino: Bocca.
[1890] Sulla definizione dell'area d'una superficie, *Atti Accad. naz. Lincei*, Rend., (4), 6-1, p. 54-57. Traduction anglaise dans [Kennedy 1973, p. 137-142].
[1894] Sui fondamenti della geometria, *Rivista di Matematica*, p. 51-94.
[1896] Saggio di calcolo geometrico, *Atti Accad. sci. Torino*, 31, p. 952-975. Traduction anglaise dans [Kennedy 1973, p. 169-188]

[1898] Analisi della teoria dei vettori, *Atti Accad. sci. Torino*, 33, p. 513-534.

PIERI Mario
[1901] Sur la géométrie envisagé comme un système purement logique, *Bibliothèque du Congrès International de Philosophie 3*, Paris : Colin, 1967.

RODRIGUEZ-CONSUEGRA Francisco
[1991] *The mathematical philosophy of Bertrand Russell: origins and development*, Basel, Boston and Berlin : Birkhäuser.

ROTA G.-C., BARNABEI M., BRINI A.
[1985] On the Exterior Calculus of Invariant Theory, *Journal of Algebra*, 96 : 1, p. 120-160.

RUSSELL B.
[1903] *The Principles of Mathematics*, Londres, Routledge, 1937.

SERRET Joseph-Alfred
[1879] *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris : Gauthiers-Villard, 1900.

TORRETTI Roberto
[1978] *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

VAN DER WAERDEN B.,
[1986] Les contributions de Peano aux théories axiomatiques de la géométrie, in *Celebrazioni in memoria di Giuseppe Peano*, Turin, p. 61-71.

VAN HEIJENOORT Jean
[1967] Logic as Calculus and Logic as Language, *Synthese*, 17, p. 324-330.

VEBLEN Oswald
[1904] A system of axioms for Geometry, *Transactions of the American Mathematical Society*, 5: 3, p. 343-384.

WHITEHEAD Alfred North
[1898] *A treatise on universal algebra with applications*, Cambridge : Cambridge University Press, 1898, rééd. New York : Hafner, 1960.
[1906] *The axioms of projective geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1906, rééd. New York : Hafner, 1971.
[1907] *The axioms of descriptive geometry*, Cambridge : Cambridge University Press, 1907, rééd. New York : Hafner, 1971.