

**Qu'est ce que les mathématiques? Les réponses
taxinomiques de Bhāskara, un commentateur,
mathématicien et astronome indien du VIIe siècle**

Agathe Keller

► **To cite this version:**

Agathe Keller. Qu'est ce que les mathématiques? Les réponses taxinomiques de Bhāskara, un commentateur, mathématicien et astronome indien du VIIe siècle. Kimé. Sciences et Frontières, pp.29-61, 2007. halshs-00151008

HAL Id: halshs-00151008

<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00151008>

Submitted on 1 Jun 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Qu'est-ce que les mathématiques ? Les réponses taxinomiques de Bhāskara, un commentateur, mathématicien et astronome indien du VII^{ème} siècle.

Agathe Keller
CNRS, Paris

Introduction

Cette communication présente les réflexions d'un astronome et mathématicien indien du VII^{ème} siècle sur ce qui caractérise les mathématiques. L'auteur qui nous intéressera ici, Bhāskara, propose une floraison de définitions alternatives de cette discipline. Chacune de ces caractérisations tente de tracer des frontières : frontière entre les mathématiques et l'astronomie, frontières entre les divers sujets ou objets qui forment les mathématiques. Pourquoi juxtapose-t-il ainsi toutes ces définitions ? En quoi diffèrent-elles les unes des autres ? Quelles difficultés l'établissement de frontières résout-il ? Et quels problèmes ces démarcations soulèvent-elles ? Les passages que nous regarderons seront souvent déconcertants et obscurs : l'analyse qui suit espère y projeter quelques lumières. Nous montrerons que notre commentateur n'est pas m par le besoin d'unifier sa conception des mathématiques. La tolérance de Bhāskara pour une réalité diversifiée voir contradictoire est particulièrement apparente lorsqu'il travaille à la frontière des catégorisations qu'il a mises en place. Lorsque des difficultés y apparaissent, il choisit, le plus souvent, d'admettre que leurs contours sont flous, lorsqu'il ne propose pas tout simplement d'adopter un autre point de vue, c'est-à-dire une autre classification, plus convenable pour ce problème. Commenons par éclaircir le contexte dans lequel cette réflexion s'est déployée. Nous pourrons alors observer attentivement les définitions que Bhāskara propose avant de nous

Table 1: Les quatre chapitres de l'*Āryabhaṭṭīya*

<i>Gīṭikapāda</i>	Chapitre d'introduction qui fournit un ensemble de constantes numériques et
<i>Gaṇitapāda</i>	Chapitre consacré aux mathématiques
<i>Kālakriyapāda</i>	Chapitre consacré aux mesures du temps
<i>Golapāda</i>	Chapitre consacré aux mouvements des planètes

confronter aux questions que celles-ci soulèvent et aux réponses que le commentateur propose.

1 Contexte

1.1 Corpus considéré

La tradition savante en sanskrit est formée de deux types de textes : des traités (*śāstra*) et leurs commentaires (*bhāṣya*, *vyākhyā*). Les traités sont rédigés dans un style mnémotique au moyen d'aphorismes (*stra*) parfois versifiés. Ils sont souvent incompréhensibles en eux-mêmes. Ils étaient probablement conçus pour être accompagnés d'une explication écrite ou orale. L'importance d'un traité peut, de cette manière, se mesurer au nombre de commentaires qu'il a suscités. L'astronomie n'échappe pas à cette règle. L'*Āryabhaṭṭīya* (Ab) est ainsi un traité, datant de la fin du Vème siècle, rédigé en vers et présentant des algorithmes sous une forme elliptique, succincte et générale. Il est formé de quatre chapitres (*pāda*) le premier fournit des constantes numériques, le second est consacré aux mathématiques, le troisième aux mesures du temps et le quatrième au mouvement des planètes (voir la Table 1). Traité incontournable de l'astronomie savante, il sera commenté jusqu'à la fin du XIXème siècle, et suscitera de nombreux débats.

Bhāskara était un mathématicien et astronome gujarati, auteur de deux traités. Il écrit en 629 après Jésus-Christ le plus ancien commentaire qui nous soit parvenu de l'*Āryabhaṭṭīya*, l'*Āryabhaṭṭīyabhāṣya* (BAB). Ce texte en prose fournit une interprétation claire des vers du traité. L'*Āryabhaṭṭīya* et son commentaire par Bhāskara nous fournissent une image précise de ce que devaient être l'astronomie et les mathématiques en Inde entre le Vème et du VIIème siècle. Nous ne disposons pas d'autres textes de cette époque pouvant nous fournir une telle image.

1.2 Mathématiques et Astronomie : problématique et vocabulaire

Nous avons précisé que le deuxième chapitre de l'*Āryabhaṭīya* portait sur les mathématiques : comment cette discipline y est-elle exposée ? Y présente-t-on seulement les éléments de mathématiques qui sont utiles pour l'astronomie ? De telles questions se posent, en fait, pour l'ensemble du corpus des mathématiques de tradition hindoue en langue sanskrite à partir du VII^{ème} siècle. En effet, si les premiers textes mathématiques dont nous disposons dans le sous-continent indien sont effectivement entièrement dévolus à cette discipline, ils sont suivis d'un silence de presque mille ans à la suite duquel, à quelques notables exceptions près, tous les textes dont nous disposons sont des chapitres extraits de traités d'astronomie. Lorsque la présence européenne se fera sentir dans les textes en sanskrit aux environs du XVIII^{ème} siècle, des ouvrages ayant pour sujet unique les mathématiques apparaîtront de nouveau. Prenons l'exemple du *Līlāvati* et du *Bījagaṇita* de Bhāskara II (un homonyme du commentateur d'Āryabhaṭa qui vécut au XII^{ème} siècle). Ces ouvrages, pour avoir été traduits au début du XIX^{ème} siècle par Colebrooke, sont souvent les seuls textes de la tradition sanskrite des mathématiques accessibles en France. Ils traitent respectivement d'arithmétique et d'algèbre : on oublie souvent qu'ils étaient à l'origine des chapitres du *Siddhāntaśiromani*, un traité d'astronomie. Déterminer si les mathématiques en tant que discipline ont eues une existence distincte de l'astronomie durant cette période est donc un enjeu important de l'histoire de l'une et l'autre discipline en Inde. Pourtant, les mathématiques possèdent un nom propre: *gaṇita*. Or, le deuxième chapitre de l'*Āryabhaṭīya* s'intitule *gaṇitapāda*, 'quart portant sur les mathématiques'. Cependant, *gaṇita* signifie également 'calcul'. Il s'agit donc d'un terme ambigu : il désigne à la fois une discipline (les mathématiques) et quelque chose de contenu dans cette discipline (des calculs). Ce mot se distingue de celui que l'on emploie pour l'astronomie, nommée le plus souvent *jyotiṣa* (comme les points lumineux du ciel). Comme le texte de Bhāskara est un commentaire, les réflexions qu'il poursuit sur les mathématiques s'expriment au travers de gloses du mot *gaṇita*, lorsque ce dernier est utilisé par le traité. Nous allons à présent nous tourner vers elles.

2 Les cinq définitions de *gaṇita*

Bhāskara présente cinq acceptions alternatives du mot *gaṇita* :

- *gaṇita* est l'ensemble des sujets abordés dans le *gaṇitapāda* (le chapitre consacré à *gaṇita*)
- *gaṇita* recouvre l'ensemble du traité
- *gaṇita* est un ensemble de sujets spécialisé que le *gaṇitapāda* aborde en partie
- *gaṇita* est un ensemble de procédures caractérisées par la manière dont elles transforment les objets qu'elles manipulent (accroissement ; décroissement)
- *gaṇita* est ce qui traite des quantités et des figures géométriques

Nous allons observer précisément comment ces définitions sont mises en place par ce commentateur. Le mot *gaṇita* est employé dans le tout premier vers du traité, c'est-à-dire dans le premier vers du premier chapitre. Après un hommage usuel à sa divinité tutélaire, Brahmā, ryabhaa, nomme dans leur ordre d'apparition les trois chapitres principaux de son ouvrage. Ainsi, les premières définitions de *gaṇita* se situent dans le commentaire que Bhāskara fait de ce vers.

2.1 *Gaṇita* est l'ensemble des sujets abordés sous ce nom dans le traité

Voici la première glose :

Gaṇita (les mathématiques ou le calcul) c'est les Champs (*kṣetra*), les Ombres (*chāyā*), les Séries (*średdhā*), les Équations (*samakaraṇa*), le Pulvérisateur (*kuttakāra*), etc.

Kṣetra (les Champs) est le terme sanskrit qui désigne les figures géométriques et par extension les calculs portant sur ces figures . Bref, il s'agit du nom sanskrit pour la géométrie. Les Ombres (*chāyā*) désignent un ensemble de problèmes types portant sur la mesure de l'ombre d'un gnomon sur un sol . Ces problèmes utilisent des applications du Théorème de Pythagore pour dériver des segments dont certains correspondent à des sinus (*jyā*, *ardhajyā*).

Les procédures concernant les séries et les équations sont proches de ce que nous mettons sous ces termes aujourd’hui. Le Pulvérisateur est le nom d’une procédure qui sera développée tout au long de la tradition sanskrite des mathématiques indiennes. En exprimant le problème un peu rapidement il s’agit d’un algorithme permettant de trouver l’entier naturel N vérifiant

$$N = ax + R_1$$

;

$$N = by + R_2$$

; où $R_1 \geq R_2$; $0 \leq R_1 \leq a$ et $0 \leq R_2 \leq b$.

Cette liste de sujets correspond, dans ses grandes lignes, aux sujets abordés dans le *gaṇitapāda* (chapitre consacré à *gaṇita*), dans leur ordre chronologique, comme vous pouvez le voir dans la Table 2. En effet, un peu plus de 60% (20/33) des 33 vers du *gaṇitapāda* sont répartis sans ambiguïté vers l’un des sujets de la liste. Trois vers ont une position ambivalente en ce qui concerne ces catégories qui ne sont pas clairement définies. Les procédures restantes n’en relèvent pas du tout, comme la Règle de Trois exposée dans le vers 26. Bhāskara utilise la périphrase *ity ādi* (etc) qui commodément peut englober les vers non classifiés, en particulier ceux relevant de l’arithmétique qu’il définit plus tard comme nous le verrons.

Donc, dans une première caractérisation de *gaṇita*, cette discipline est présentée comme une liste de sujets abordés dans le *gaṇitapāda*. Cette glose est suivie d’une nouvelle exégèse de ce mot.

2.2 *Gaṇita* englobe l’ensemble du traité

Après avoir défini de manière similaire ce qu’étaient la Mesure du Temps et la Sphère, Bhāskara revient sur le mot *gaṇita* pour proposer une nouvelle acception de ce dernier :

Ici le mot *gaṇita* exprime *gaṇita* (les mathématiques ou le calcul) comme un tout (*aśeṣagaṇita*). Ainsi, parcequ’il exprime *gaṇita* comme un tout et parce que la Mesure du Temps et la Sphère ne sont pas distinguées de *gaṇita*, (par conséquent) il dit *gaṇita* dans l’ensemble du traité.

Dans ce cadre, le mot *gaṇita* semble désigner toute procédure, quel que soit l’objet manipulé. L’astronomie serait alors un sujet particulier, un

Table 2: Sujets abordés dans le Chapitre sur les Mathématiques et classification de Bhāskara

Vers formant le Chapitre sur les Mathématiques	
Vers 1	
Vers 2	
Vers 3	
Vers 4-5	
Vers 4-5	
Vers 6-11	Aire des triangles et volume du tétraèdre r
Vers 12	
Vers 13	
Vers 14-16	
Vers 17-18	
Vers 19-22	
Vers 23-28	
Vers 29-30	
Vers 31	
Vers 32-33	

Table 3: Gaṇita englobe l'ensemble du traité

‡

L'ensemble des Calculs

ou

L'ensemble des Mathématiques

(*aśeṣagaṇita*)

recouvre tous les sujets du traité:

les Mathématiques (*gaṇita*)

quelques calculs généraux

ou (*sāmānyagaṇita*) quelques mathématiques générales

la Mesure du temps et la Sphère (*kālakrīya* et *gola*)

calculs spéciaux

ou (*viśeṣagaṇita*) mathématiques spéciales

sous ensemble d'algorithmes spécialisés comprises dans l'ensemble de tous les calculs. Mais quel serait alors le sujet traité dans le second chapitre du traité, celui consacré précisément à *gaṇita* ? Bhāskara répond à cette question en effectuant une subdivision de cette discipline en *gaṇita* général (*sāmānyagaṇita*) et *gaṇita* spécial (*viśeṣagaṇita*) :

Je dirais les Champs, les Ombres, les Series, les Equations, les Pulvérisateurs, etc. qui sont quelques *gaṇitas* généraux (*sāmānyagaṇita*). Toutefois mon objectif ce sont les *gaṇitas* spéciaux (*viśeṣagaṇita*), au moyen de la Mesure du Temps et de la Sphère.

Bien qu'il n'élabore pas plus sur ce qui différencie l'une et l'autre catégorie de *gaṇita*, on peut deviner que cette subdivision s'effectue par le type d'objets que les algorithmes manipulent. Dans le *gaṇitapāda*, les objets définis et utilisés peuvent être qualifiés d'abstraites : il s'agit de nombres ou de figures géométriques. Dans les chapitres suivants, les objets utilisés sont techniques. Il s'agit de nombres de révolutions, de temps écoulés, de trajectoires de planètes, etc. Il nous faut, bien entendu, observer la distinction entre *sāmānya* (général) et *viśeṣa* (spécial, spécifique) avec prudence : le désir d'effectuer des rapprochements, pourrait nous mener à y voir une sorte d'écho

de la distinction entre mathématiques pures et mathématiques appliquées. Cette tentative ne serait pas sans fondement, comme nous le verrons plus tard. Cette définition des mathématiques est résumée dans la Table 3.

Bhāskara conclut de la manière suivante :

Nécessairement, l'on doit s'accorder que ce sens si \langle doit-être adopté pour le mot *gaṇita* tel qu'il est employé dans le traité \rangle : quelques *gaṇitas*.

En d'autres termes, en utilisant cette définition-ci de *gaṇita*, Bhāskara énonce une acception du mot plus large que celle qui lui est conférée par le traité. Ayant ainsi proposé cette signification du mot, Bhāskara avance une troisième interprétation de *gaṇita*.

3 Gaṇita désigne les huit vyavahāras et leurs quatre graines

Il propose en effet de définir *gaṇita* sous la forme d'une autre liste de sujets spécialisés :

D'un autre point de vue (*anyathā hi*) , le sujet de *gaṇita* est vaste. Il y a huit *vyavahāras* appelés Mixtures (*miśraka*), Séries (*średdhī*), Champs (*kṣetra*), Excavations (*khāta*), Empilements de briques (*citi*), Sciages (*krākacika*), Empilement de grains (*rāśi*), Ombres (*chāya*). *Gaṇita* ainsi \langle caractérisé \rangle ayant huit \langle sujets \rangle possède quatre graines (*bīja*), la première, la seconde, la troisième et la quatrième qui sont respectivement les équations simples (*yāvattāvat*), les équations quadratiques (*vargāvarga*), les équations cubiques (*ghanāghana*) et les équations à plusieurs inconnues (*viśama*).

Remarquons, en premier lieu, la simplicité avec laquelle Bhāskara ajoute cette définition, à celles qu'il a déjà proposées, par le biais de l'adverbe *anyathā*. Ce dernier signifie littéralement «en prenant une autre voie». Il juxtapose donc les points de vue, sans ressentir la nécessité de les confronter, semble-t-il. Nous y reviendrons. Cette liste des *vyavahāras* est la première occurrence dont nous disposons de ce qui deviendra une liste traditionnelle

de sujets exposés dans tout ouvrage traitant de *gaṇita* . La postérité de cette classification, l'évolution et le contenu précis de chacun de ces sujets demandent à être exploré. Bhāskara explicite dans la suite de son commentaire ce que chaque nom de cette liste signifie . Notons que les huit *vyavahāras* ne semblent pas se restreindre à l'astronomie. Les quatre graines (*bija*) portent des noms d'équation. Le terme *bija* désigne l'inconnue (probablement parce que cette dernière était figurée sur la surface de travail par des graines). Plus tard, le terme *bijagaṇita* ou " calcul sur des graines" en viendra à désigner l'algèbre. La relation liant les huit *vyavahāras* à leur quatre graines demeure vague, car l'auteur ne développe pas ce sujet. Il se peut qu'y soit préfigurée une lecture algébrique de l'ensemble des procédures formant les huit *vyavahāras* à la manière de ce que bien plus tard proposera Bhāskara II dans son *Bijagaṇita* (XII^{ème} siècle). Mais il ne s'agit ici que de conjectures. Dans cette définition ci de *gaṇita*, nous retrouvons, en filigrane, une partie des sujets abordés dans le traité dans le Chapitre consacré aux mathématiques, tel que Bhāskara les présente. Mais le pulvérisateur n'y est pas cité et les sujets n'y sont pas énumérés dans le même ordre, comme cela apparaît dans la Table 4. Sont présents, la géométrie (*kṣetra*), les ombres (*chāya*), les séries (*średdhā*) et les équations (*saṃkramaṇa*). Ici, de nouveau, Bhāskara propose une acception plus large du mot *gaṇita* que celui que le traité lui confère. Les problèmes abordés dans le chapitre sur les mathématiques ne semblent ainsi qu'une toute petite partie d'un ensemble plus vaste.

Dans son commentaire du premier vers du premier chapitre de l'Āryabhaṭīya, Bhāskara présente donc trois acceptions alternatives du mot *gaṇita* :

- *gaṇita* est l'ensemble des sujets abordés dans le *gaṇitapāda* (le chapitre consacré à *gaṇita*)
- *gaṇita* recouvre l'ensemble du traité
- *gaṇita* est un ensemble de sujets spécialisé que le *gaṇitapāda* aborde en partie

Deux de ces définitions conçoivent les mathématiques comme un ensemble de sujets spécialisés. L'autre considère cette discipline comme un ensemble de procédures. C'est au début du chapitre consacré à *gaṇita* que nous trouverons deux autres caractérisations de ce sujet.

Table 4: Les huit *vyavahāras*, leurs quatre graines et le *gaṇitapāda*
 Classification selon les huit *vyavahāras* et leur quatre graines Classification
 des sujets abordés dans le chapitre consacré à *gaṇita* de l'*Āryabhaṭīya*

Les huit <i>vyavahāras</i>	
Mixtures (<i>miśraka</i>)	
Séries (<i>średdhī</i>)	Séries (<i>średdhī</i>)
Champs (<i>kṣetra</i>)	Champs (<i>kṣetra</i>)
Excavations (<i>khāta</i>)	
Empilements de briques (<i>citi</i>)	
Sciages (<i>krākacika</i>)	
Empilement de grains (<i>rāśī</i>)	
Ombres (<i>chāya</i>)	Ombres (<i>chāya</i>)
Les quatre graines (<i>bīja</i>)	Équations (<i>saṃkramaṇa</i>)
Équations simples (<i>yāvattāvat</i>)	
Équations quadratiques (<i>vargāvarga</i>)	
Équations cubiques (<i>ghanāghana</i>)	
Équations à plusieurs inconnues (<i>viśama</i>)	
Pulvérisateur (<i>kuṭṭākāra</i>), etc.	

Table 5: *Gaṇita* formé d'accroissement et de décroissement
 }*Gaṇita* est double Il est fait

d'accroissement
 additions
 multiplications
 élévations à une puissance
 calculs d'aires à partir des côtés d'une figure
 et de
 décroissement
 soustractions
 divisions
 extractions de racines

4 *Gaṇita* est accroissement et décroissement

Bhāskara commence le Chapitre consacré aux mathématiques par une longue introduction, au cours de laquelle il présente de nouvelles compréhensions de *gaṇita*. Voici comment la partie en prose de cette introduction commence :

” Trois sujets se sont échapés de la bouche de lotus de maître Āryabhaṭa : *Gaṇita*, la Mesure du Temps, la Sphère. Ce *gaṇita*-ci est double et entre en quatre. Double, c'est à dire l'accroissement et le décroissement. L'accroissement c'est l'addition. Le décroissement c'est la soustraction.”

Bhāskara commence donc par un rappel du premier vers du traité dont nous avons examiné le commentaire plus haut. Il situe le chapitre dont il s'apprête à faire l'exégèse, le chapitre consacré à *gaṇita*, dans la succession de chapitres qui forment le traité. Puis, par l'usage d'un démonstratif (*tad* ; ce *gaṇita* ci), il précise qu'il accorde au terme *gaṇita* une signification restrictive. Implicitement, comme pour la première des significations du mot qu'il a proposé, *gaṇita* désigne l'ensemble des sujets abordés dans le chapitre consacré à *gaṇita*. Il fournit donc une caractérisation de ce *gaṇita*-ci.

En premier lieu, il affirme que *gaṇita* peut se subdiviser en ” accroissement” et ” décroissement”. Une partie de son commentaire, que nous ne reproduisons pas ici, vise à élaborer ce qu'il entend par ” accroissement” et

”décroissement”. Dans un premier temps, il nomme ” accroissement” toute opération arithmétique qui produit une augmentation de la quantité de départ : additions, multiplications, élévations à une puissance sont citées comme des exemples d’accroissement. Symétriquement, un décroissement est toute opération arithmétique qui produit une diminution de la quantité de départ : soustractions, divisions et extractions de racines sont citées comme des exemples de décroissement. Bhāskara expose cette caractérisation puis en explore les limites. Notre commentateur semble ainsi estimer que toutes les procédures n’ont pas une forme définissable en terme d’accroissement et de décroissement. C’est du moins ce que nous comprenons dans ce couples de périphrases, quelque peu obscurs :

”Parce que l’accroissement n’a pas de forme déterminée dans les séries, le pulvérisateur, etc. et dans le monde. Dans ce cas aussi, le décroissement n’a pas de forme déterminée dans les séries, le pulvérisateur, etc. et dans le monde”

Bhāskara met également en scène une objection qui figure des multiplications et des divisions par des fractions plus petites que : la multiplication de $1/5$ par $1/4$ produit un résultat plus petit que chacun de ces deux nombres, tandis que la division de $1/20$ par $1/5$ produit un nombre plus grand. Dans ce cas, donc, la multiplication est un ” décroissement” tandis que la division est un ” accroissement”. Bhāskara répond par une interprétation géométrique de ces opérations et valeurs (qui représenteraient des mesures de longueurs puis de surface). Subrepticement donc il semble attribuer le passage de deux longueur à une aire comme un accroissement . Cette subdivision de *gaṇita* est résumée dans la Table 5.

En explorant les accroissements et décroissements qui formeraient *gaṇita*, notre commentateur en est venu à distinguer une autre subdivision de cette discipline, celle qui sépare l’arithmétique de la géométrie.

5 *Gaṇita* est arithmétique et géométrie

Bhāskara achève sa réponse géométrique à l’objection que nous venons de décrire, en écrivant :

” De cette manière, une réfutation en ”kṣetragaṇita” (le calcul sur des champs ou géométrie) <a été proposée>. Un effort en

vue d'obtenir une réfutation en "rāśigaṇita" (le calcul sur des quantités, ou arithmétique) peut ⟨également⟩ être poursuivie."

Ayant ainsi, subrepticement, crée une nouvelle catégorisation de gaṇita il ajoute :

" Un autre dit : *gaṇita* est double, les quantités et les champs. *gaṇita* est de deux types : "kṣetragaṇita" et "rāśigaṇita". Les Proportions, le Pulvérisateur qui sont des ⟨sujets⟩ spécifiques des mathématiques sont citées dans "rāśigaṇita" ; les Séries les Ombres, etc. sont citées dans "kṣetragaṇita".

Notons que, de nouveau, le commentateur introduit cette nouvelle caractérisation par simple juxtaposition, en affirmant qu'il adopte le point de vue d'un autre. Il précise ensuite quelle est sa conception de ces deux sous-catégories de gaṇita en y classifiant les sujets qui forment cette discipline. Nous pouvons y remarquer la présence d'un nouveau venu, les proportions (qui correspondent aux calculs associés à la Règle de Trois) parmi la liste de sujets abordés dans le chapitre consacré à gaṇita. Observons également que ce que Bhāskara nomme géométrie englobe les séries : ces classifications en apparence familières peuvent masquer des surprises. Cette caractérisation de gaṇita est résumé dans la Table ??.

Remarquons enfin, qu'au détour, Bhāskara, tout en distribuant le Pulvérisateur et les Proportions en arithmétique, semble, en les jugeant à l'aune d'un critère définit auparavant, également les distribuer en *gaṇitaviśeṣa* (mathématiques spécifiques). Nous reviendrons sur ce point. Ce n'est que tout à la fin de son introduction qu'il revient laconiquement sur la seconde partie de sa caractérisation, celle qui affirme que deux catégories appartiennent à quatre subdivisions. Il y précise que ces quatre subdivisions sont " les quatre graines". De la même manière que pour la définition en termes de huit vyavahāras nous ne pouvons pas élaborer plus avant.

Nous avons donc observé cinq acceptions alternatives du mot *gaṇita* présentées par Bhāskara. Rappelons-les ici :

- *gaṇita* est l'ensemble des sujets abordés dans le gaṇitapāda (le chapitre consacré à gaṇita)
- *gaṇita* recouvre l'ensemble du traité

Table 6: *Gaṇita* est composé d’arithmétique et de géométrie

! *Gaṇita* est double
Il est fait de
kṣetraṅgaṇita
Calculs sur les champs
” géométrie”

Séries
Ombres
et de

rāśiṅgaṇita
Calculs sur les quantités
” arithmétique”

Pulvérisateur
Proportions
(sujets spécifiques de *gaṇita*)

- *gaṇita* est un ensemble de sujets spécialisé que le *gaṇitapāda* aborde en partie
- *gaṇita* est un ensemble de procédures caractérisées par la manière dont elles transforment les objets qu’elles manipulent (accroissement ; décroissement)
- *gaṇita* est ce qui traite des quantités et des figures géométriques

6 Bhāskara et les frontières

Comme il en va pour toute définition ou pour toute caractérisation, chacune de celles que nous venons d’observer, trace une frontière. Or ces démarcations effleurent des problématiques que l’on retrouve tout au long du commentaire de Bhāskara. De plus, chacune d’entre elles soulèvent des difficultés. Examinons donc thématiquement ces questions.

6.1 Frontière du traité et du monde

Lorsque Bhāskara introduit les huit *vyavahāras*, il nous indique qu'il existe une définition courante de *gaṇita*, que le traité ne semble pas reprendre explicitement à son compte. En effet, la glose du premier vers du traité semble effectivement avoir pour objectif de distinguer les définitions courantes, celles qui sont connues dans le monde (*loka*) des définitions techniques et restrictives qu'emploie le traité (*śāstra*). Nous avons montré ailleurs, qu'il s'agissait là d'un travail commun du commentateur lorsqu'il définit un terme. Bhāskara milite, inlassablement, pour que les mots employés par l'ouvrage qu'il commente reçoivent des sens techniques : il examine leur acceptions courantes et leur étymologie mais choisit, en général, une signification qui sera propre au traité. Les différentes gloses que Bhāskara offre de *gaṇita* entrent sans doute dans ce cadre : le commentateur tout à la fois indique l'existence de sens variés et communs du terme mais en restreint la portée au sein du traité. Or, ce sens qu'il confère, en l'absence de toute indication dans le traité lui-même, comment le justifie-t-il ? En ce qui concerne *gaṇita*, cette justification semble poser problème. Bhāskara ne choisit pas un sens plutôt qu'un autre. Toutes les acceptions sont énumérées, comme étant des points de vue divers sur une réalité dont nous ne savons pas si elle est unifiée. Cette revendication d'un vocabulaire technique, participe d'une articulation plus vaste des rapports qui lient le traité au monde. Nous en avons vu un bref exemple plus haut. En effet, Bhāskara, de manière laconique, précise que pour certaines procédures et dans le monde il n'y a pas de forme fixée d'accroissement ou de décroissement. Le sens précis de cette phrase demeure mystérieux. Comme souvent lorsqu'apparaissent ces remarques nous sommes déconcertés. Pourquoi effectue-t-il une telle observation ? Elle donne le sentiment que cet auteur veut souligner l'existence d'une dialectique irrésolue entre ce qui appartient à la sphère du traité et ce qui appartient au monde qui lui est extérieur.

6.2 Frontière de l'astronomie et des mathématiques

La question de déterminer si les mathématiques étaient perues indépendamment de l'astronomie nous intéresse tout particulièrement. La distinction que Bhāskara pose entre calculs spécifiques et calculs généraux pourrait être interprétée comme une articulation de ce qui sépare l'une et l'autre discipline : l'astronomie serait l'application spécifiée des calculs généraux qu'énoncent

les mathématiques. Comme Bhāskara ne développe pas sa pensée, nous ne savons pas si nous lisons, à tort, dans ces distinctions des choses qui nous sont familières. En effet, lorsque nous observons ces commentaires des vers du gaṇitapāda, un certain nombre d'entre eux explicite les applications que celles-ci ont en astronomie. Pourtant, son objectif principal est de montrer que ces procédures peuvent être appliquées dans des cadres extrêmement variés. Paradoxalement, Bhāskara va jusqu'à exposer des exemples ou des applications à l'astronomie sont néfastes. Donc, les mathématiques exposées dans le gaṇitapāda n'ont pas toutes pour objectif une application à l'astronomie. Mais alors comment relier l'activité interprétative du commentateur (celle qui suggère que le but de ces procédures n'est pas forcément leur application à l'astronomie) avec les distinctions qu'il effectue au début de son ouvrage (que les mathématiques du traité sont exposées dans l'idée de leur "spécification" en astronomie) ? Accroissons un peu plus notre confusion : bien que les mathématiques exposées dans le gaṇitapāda soient qualifiées de "générales" ; elles comportent des procédures que Bhāskara qualifie de "spécifiques", un adjectif qui devrait être réservé aux deux autres chapitres du traité. La seule chose que nous pouvons en déduire, c'est que les frontières que Bhāskara trace ont des délimitations flottantes.

6.3 Comment articuler accroissement et décroissement dans une procédure complexe ?

Nous avons noté plus haut deux segments de phrases qui suggéraient qu'en pratique un bon nombre de procédures ne pouvaient pas être qualifiées simplement d'"accroissement" ou de "décroissement". La procédure du pulvérisateur qui englobe divisions et additions relève-t-elle du décroissement, de l'accroissement ou bien des deux ? En effet, Bhāskara expose cette distinction, mais ne la reprend pas ailleurs dans son commentaire. Cela signifie-t-il qu'il ne la considère pas pertinente ? Comment "accroissement" et "décroissement" s'insèrent-ils dans l'ensemble qui les englobe, gaṇita ? Bhāskara, ayant décrit l'accroissement et le décroissement, répond de la sorte :

" Ces deux subdivisions recouvrent l'ensemble des mathématiques (aśeṣagaṇita)"

Nous voilà troublés à deux titres : la subdivision en terme d'accroissement et de décroissement s'annonce comme caractérisant une définition restrictive

de *gaṇita* ; voici qu'elle s'étend à la définition la plus vaste que nous ayons eue de cette discipline. De plus, cette extension augmente le nombre de procédures concernées. Par conséquent, la quantité d'algorithmes qu'il est difficile de caractériser en ces termes est également accrue : loin de résoudre le problème du classement des procédures complexes, cette remarque la rend d'avantage confuse. Une résolution de ces problèmes pourrait surgir du fait qu'à la frontière entre les procédures qui accroissent et les procédures qui décroissent il existe des procédures qui simultanément accroissent et décroissent. En effet, Bhāskara achève sa présentation de cette subdivision par cette phrase :

” Il en va ainsi dans le traité et dans le monde, il n'existe pas d'opération appartenant à *gaṇita* qui ne soit faite d'accroissement ou (*vā*) de décroissement.”

Or, cette remarque n'a de sens que si le ” ou ” (*vā*) employé dans cette phrase n'est pas exclusif, ce qui implique qu'il existe des opérations pouvant être caractérisées simultanément d'accroissement et de décroissement. Nous pouvons en conclure, une fois encore, que les frontières établies par Bhāskara sont mobiles (une subdivision peut se vérifier à un échelon restreint de *gaṇita* puis se retrouver un échelon plus vaste) et également ouvertes (puisqu'elles ont des limites qui permettent l'existence de procédures mixtes).

6.4 Tout calcul a-t-il une lecture arithmétique et géométrique ?

Comment donc s'articulent entre eux ” géométrie ” et ” arithmétique ” ? Leur relation est-elle similaire à celle qui unie l' ” accroissement ” et le ” décroissement ” ? Bhāskara ne nous livre pas ici de phrase qui nous permette de mieux cerner sa pensée. Le commentateur affirme une bipartition de *gaṇita*, mais simultanément s'autorise une lecture géométrique d'une opération arithmétique (lorsqu'il met en scène une objection à la caractérisation en terme d' ” accroissement ” et de ” décroissement ”). Il a recours à cette double lecture à plusieurs reprises. Nous avons montré qu'il y a chez Bhāskara la tentation de considérer que toute procédure admet une double lecture, l'une géométrique l'autre arithmétique . Mais cette affirmation pose parfois des difficultés qu'il ne peut résoudre qu'en érigeant une frontière stricte entre ces

deux disciplines. Ainsi affirme-t-il avec beaucoup d'insistance que les irrationnels (*karaṇī*) sont uniquement des entités géométriques . Retenons que les frontières séparant " arithmétique" et " géométrie" sont parfois inexistantes (toute procédure peut relever des deux qui ne seraient que les deux faces d'une même pièce en quelque sorte) parfois solidement imperméables (dans le cas des irrationnels).

Une frontière donc dans un premier temps circonscrit un objet, une discipline, la délimite et la définit. Ici, pour Bhāskara, il s'agit de distinguer *gaṇita* de la Mesure du Temps et de la Sphère puis de caractériser la discipline de l'intérieur. S'ajoute à cela le fait qu'il y a une acception courante de *gaṇita* qui ne correspond pas tout à fait à celle utilisée dans le traité. Dans un second temps, les démarcations qui ont été tracées semblent toujours s'effacer, être devenues inutiles face à une nouvelle frontière (une nouvelle définition) qui alors l'oblitére. Si les problématiques que nous venons de mettre en lumière peuvent nous aider à mieux saisir les enjeux qui régissent les différentes définitions que Bhāskara propose, elles n'expliquent pas leur floraison. Cette multiplicité des caractérisations et leurs grande souplesse pourraient être l'indice d'une insatisfaction.

Conclusion : *Gaṇita*, un ensemble d'algorithmes ou un ensemble de sujets spécialisés ?

Nous comprenons cette multiplicité de définitions et la souplesse des frontières qui les forment de deux manières complémentaires. Nous l'interprétons, en premier lieu, comme le signe d'une hésitation sur la nature de *gaṇita*. Est-ce un ensemble de méthodes pour répondre à des problèmes types ou une suite de sujets spécialisés ?

En effet, les subdivisions en termes de calculs généraux et spécifiques, d'accroissement et de décroissement, d'arithmétique et géométrie correspondent à une vision algorithmique de cette discipline. La première et la dernière caractérisation reposent sur une catégorisation des objets que les algorithmes manipulent (ce sont des objets " généraux" ou non, " géométriques" ou non) tandis que la seconde reflète les effets que ces procédures ont sur ces objets (elles les accroissent ou les diminuent). La définition en termes de *vyavahāras*, comme celle qui considère l'ensemble des thèmes qu'aborde le chapitre consacré aux mathématiques, en revanche, semble considérer que *gaṇita* est avant

tout un ensemble de sujets spécialisés et variés. Bhāskara ne choisit pas l'une ou l'autre option, mais semble embrasser les deux sans sentir la nécessité de faire un choix. Nous en venons ainsi à la seconde compréhension que nous avons de cette multitude. Bhāskara visiblement peut tracer plusieurs frontières alternatives et les utiliser en termes de caractérisation lorsqu'ils lui conviennent, sans qu'à aucun moment ces définitions ne soient normatives. S'agit-il là d'une attitude propre à ce commentateur, ou est-ce qu'il faut l'insérer dans une tradition du débat ou une définition normative de *gaṇita* n'est pas fixée et n'a pas à l'être ?

7 Appendice : Les gloses de *gaṇita* dans le commentaire de Bhāskara à l'*Āryabhaṭīya*

Ab. 1. 1. Ayant rendu hommage à Ka qui est Un et Plusieurs, qui est le vrai Dieu, le suprême Brahman/ Āryabhata énonce trois < Sujets >: les Mathématiques (*gaṇita*), la Mesure du Temps (*kālakr̥ya*) et la Sphère (*gola*)

(...)

gaṇita (les mathématiques ou les calculs) c'est les Champs (*kṣetra*), les Ombres (*chāya*), les Séries (*średdhī*), les Équations (*samakaraṇa*), le Pulvérisateur (*kuttakāra*), etc. (...)

Ici le mot *gaṇita* exprime *gaṇita* (les mathématiques ou les calculs) comme un tout (*aśeṣagaṇita*). Ainsi, parcequ'il exprime *gaṇita* comme un tout, de la même manière que lorsqu'il dit les mathématiques des champs, <il dit> également les mathématiques des planètes parce que les mathématiques des planètes n'est pas distinct des mathématiques des champs, etc. et parce que la Mesure du Temps et la Sphère ne sont pas distinguées de *gaṇita*, <par conséquent> il dit *gaṇita* dans l'ensemble du traité. Une fois que ceci a été établi, lorsque le maître évoque la Mesure du Temps ou la Sphère, il fait savoir <ce qui suit> : Je dirais les Champs, les Ombres, les Series, les Equations, les Pulvérisateurs, etc. qui sont quelques *gaṇitas* générales (*sāmānyagaṇita*). Toutefois, mon objectif ce sont les *gaṇitas* spéciales (*viśeṣagaṇita*), au moyen de la Mesure du Temps et de la Sphère. Aussi, dans le chapitre sur *gaṇita*, le maître n'évoque qu'une infime partie du sujet de *gaṇita*, dans <les chapitres sur> la Mesure du Temps et la Sphère, les [sujets] de la Mesure du Temps et de la Sphère <sont dites> spécifiquement. Nécessairement, l'on doit s'accorder

que ce sens si <doit-être adopté pour le mot *gaṇita* tel qu'il est employé dans le traité> : quelques *gaṇitas*. D'un autre point de vue, le sujet de *gaṇita* est vaste. Il y a huit *vyavahāras* appelés Mixtures (*miśraka*), Séries (*średdhā*), Champs (*kṣetra*), Excavations (*khāta*), Empilements de briques (*citi*), Sciages (*krākacika*), Empilement de grains (*rāśi*), Ombres (*chāya*).

"Mixtures", c'est-à-dire la mise en contact et le mélange de tous les sujets de *gaṇita* ; "Séries", c'est-à-dire empiler avec un premier terme et une raison arithmétique ; "Champs" c'est-à-dire l'évaluation des aires de figures ayant plusieurs côtés ; "Excavations", c'est-à-dire indiquer la quantité creusée ; "Empilements de briques", c'est-à-dire faire connaître, en utilisant la taille des briques, la grandeur de ce qui est un empilement d'objets <les uns> au dessus <des autres> ; "Sciages", la scie est ce qui coupe du bois, les sciages enseignent la taille d'objets produits par une scie ; Empilements de grains, c'est-à-dire trouver la taille d'un objet formé d'un empilement de grains, "Ombres", c'est-à-dire pouvoir dire l'heure au moyen de l'amplitude de l'ombre d'un gnomon, ou d'autres objets de la sorte. *gaṇita*, ainsi <caractérisé> ayant huit <sujets>, possède quatre graines (*bīja*), la première, la seconde, la troisième et la quatrième qui sont respectivement les équations simples (*yāvattāvat*), les équations quadratiques (*vargāvarga*), les équations cubiques (*ghanāghana*) et les équations à plusieurs inconnues (*viśama*).

8 BAB.2. introduction

Trois sujets se sont échappés de la bouche de lotus de maître Āryabhaṭa : *gaṇita*, la Mesure du Temps, la Sphère. Ce *gaṇita* ci est double et entre en quatre. Double, c'est à dire l'accroissement et le décroissement. L'accroissement c'est l'addition. Le décroissement c'est la soustraction. Ces deux subdivisions recouvrent l'ensemble des mathématiques (*aśeṣagaṇita*) (...) Il en va ainsi dans le traité et dans le monde, il n'existe pas d'opération appartenant à *gaṇita* qui ne soit faite d'accroissement ou (*vā*) décroissement. (...) Un autre dit : *gaṇita* est double, les quantités et les champs. (...) *gaṇita* est de deux types : "*kṣetragaṇita*" (le calculs sur des champs ou géométrie) et "*rāśigaṇita*" (le calcul sur des quantités ou arithmétique). Les Proportions, le Pulvérisateur qui sont des <sujets> spécifiques des mathématiques sont citées dans "*rāśigaṇita*" ; les Séries les Ombres, etc. sont citées dans "*kṣetragaṇita*". (...) "Elles entrent en quatre" en quatre graines.

9 Bibliographie

- Bag, A. K. (1979) Mathematics in ancient and medieval India, Chaukhambha Orientalia, Varanasi.
- Bronkhorst, J. (1994) 'Two literary conventions of Classical India'; Asiatische Studien/Études Asiatiques, XLVII, 10-39.
- Chemla, K. et Keller, A. (2002) 'The Sanskrit *karaṇīs* and the Chinese mian' In From China to Paris: 2000 Years of Mathematical Transmission,
- Proceedings of the International Conference on mathematical transmissions Bellagio 2000. Steiner, Stuttgart.
- Datta, B. et Singh, S. N. (1938) History of Hindu Mathematics, Asia Publishing House.
- Filliozat, P.-S. (1988) Grammaire Sanskrite Pāṇinéenne, Picard.
- Hayashi, T. (1995) The Bhakhshālī Manuscript, An ancient Indian mathematical treatise, Egbert Forsten, Groningen.
- Keller, A. (1997) Fractions et Règles de Trois en Inde au Vèmes et VIIèmes siècles, deux vers de l'Āryabhaṭīya d'Āryabhaṭa, accompagnés du commentaire de Bhāskara: Université Paris VII.
- Keller, A. (2000) Un commentaire indien du VIIème siècle: Bhāskara et le *gaṇitapāda* de l'Āryabhaṭīya:Thèse: Paris VII- Denis Diderot.
- Pingree, D. (1981) *Jyotiḥśāstra* : astral and mathematical literature, Harrassowitz, Wiesbaden.
- Rangacarya, M. (1912) The *Gaṇitasārasaṅgraha* of Mahāvīra, edited with translation and notes, Madras Government Publication, Madras.
- Sharma, K. V. et Shukla, K. S. (1976) *Āryabhaṭīya* of Āryabhaṭa, critically edited with translation, Indian National Science Academy, New-Delhi
- Shukla, K. S. (1959) *Pāṭīganīta* of śrīdharācarya, Lucknow University, Lucknow.

- Shukla, K. S. (1960) *Mahābhāskarīya*, Edited and Translated into English, with Explanatory and Critical Notes, and Comments, etc., Lucknow.
- Shukla, K. S. (1963) *Laghubhāskarīya*, Edited and Translated into English, with Explanatory and Critical Notes, and Comments, etc., Lucknow.
- Shukla, K. S. (1976a) *Āryabhaṭīya* of Āryabhaṭa, with the comment