



HAL
open science

Un commentaire indien du VII^{ème} siècle, Bhâskara et le ganitapada de l'aryabhatiya

Agathe Keller

► **To cite this version:**

Agathe Keller. Un commentaire indien du VII^{ème} siècle, Bhâskara et le ganitapada de l'aryabhatiya. Histoire, Philosophie et Sociologie des sciences. Université Paris 7 - Denis Diderot, 2000. Français. NNT : . halshs-00006349

HAL Id: halshs-00006349

<https://shs.hal.science/halshs-00006349>

Submitted on 28 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

Université Paris VII – Denis Diderot
Formation Doctorale Epistémologie, Histoire des Sciences
et des Techniques

THÈSE

pour l'obtention du Diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 7
SPECIALITE : *Histoire des Mathématiques*
Présentée et soutenue publiquement le

Un commentaire indien du VIIème siècle
Bhāskara et le *gaṇita-pāda* de l'*Āryabhaṭīya*

par Agathe Keller

Sous la direction de :
Karine Chemla

Rapporteur extérieur au jury :
Takao Hayashi

JURY

J. Bronkhorst
K. Chemla
P. -S. Filliozat
C. Houzel
J. -L. Verley

Rapporteur

Prélude et Remerciements

En 1993 j'ai contacté Karine Chemla, lui confiant mon intérêt pour les mathématiques ■non-occidentales■ et le désir de voyager pour mes études. Elle me proposa alors d'aller étudier les mathématiques indiennes au Japon. Le paradoxe me plut. Le projet prit du temps à se réaliser.

Je me mis à l'étude du sanskrit, fis un voyage en Inde. En 1995, le professeur Takanori Kusuba vint à Paris pour faire une présentation sur un point d'histoire des mathématiques en Inde. Je finissais une première année du DEA d'Épistémologie et d'Histoire des Sciences à Paris 7. Il nous indiqua à Karine Chemla et moi-même le texte de Bhāskara, traitant entre autre d'un problème de Théorie des Nombres dont la résolution a recours au ■pulvérisateur■. Je fis mon mémoire de DEA sur une section de ce commentaire, en étudiant le passage consacré à la Règle de Trois et au calcul des fractions. Ce fut mon premier contact avec un texte mathématique en sanskrit : il fallait y distinguer à la fois les termes techniques mathématiques et comprendre les analyses grammaticales qui punctuaient le texte. Pierre-Sylvain Filliozat eut à l'époque la gentillesse de discuter certains passages avec moi mais il me manquait une vraie formation sur ces deux points. En 1997, la bourse Aguille Basualdo de la Chancellerie de Paris me permit de partir à Kyoto pour un premier séjour de six mois. Avec beaucoup de patience, MM. les Professeurs T. Kusuba, T. Hayashi, et M. Yano prirent le temps de lire avec moi une partie du commentaire de Bhāskara. De plus, T. Hayashi me fit lire d'autres textes mathématiques en sanskrit, en particulier une bonne partie du *Līlāvati* de Bhāskara II. Après ce passage à Kyoto, je fis un séjour d'un an en Inde, grâce à une bourse du Ministère indien des Affaires étrangères. À Pondichery, j'appris les rudiments de la grammaire sanskrite pāṇinéenne auprès du Pandit Venkataraja Sharma. Puis de nouveau, je repartis pour Kyoto avec une bourse du gouvernement japonais, pour un séjour d'un an et demi. Le Professeur T. Hayashi me guida pas à pas, me permettant d'achever la lecture et la traduction du commentaire de Bhāskara au chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya*, le coeur de ce travail.

Cette thèse est le résultat de ces voyages, de ces rencontres et des efforts entrepris pour surmonter ces difficultés. La traduction est en anglais parce qu'en Inde et au Japon elle fut ma langue de communication avec mes professeurs. Cette introduction et les analyses qui portent sur le texte sont en fran■ais parce que cette thèse est soutenue dans une université fran■aise. Ce parcours éclaire à la fois les connaissances que j'ai acquises et les lacunes qui subsistent. La trace des professeurs qui m'ont guidée et influencée s'imprime

dans les approches que j'ai eues du texte et les problématiques qui m'ont intéressée.

J'aimerais donc remercier ici, tout d'abord Karine Chemla. Sans elle je n'aurais jamais entrepris ce travail et sans ses encouragements, sa patience et sa curiosité je n'aurais jamais pu le mener à bout. Mes remerciements vont, tout autant, à Takao Hayashi qui n'a ménagé ni son temps, ni sa patience, pour scruter à la loupe tout ce que j'écrivais, proposer des corrections, m'indiquer des lectures, m'encourager : la traduction présentée ici est probablement plus la sienne que la mienne, quoique, sans aucun doute, toutes les erreurs, tous les faux sens, et toutes les maladroites proviennent de moi.

Mes remerciements vont également aux Institutions, Fondations et personnes sans lesquelles ma formation itinérante aurait été impossible : la Fondation des Bourses de la Chancellerie de Paris, Serge François et Mme Bonnance au Ministère des Affaires Etrangères, l'ICCR, la société Kepler, François Grimal et François Houllier à l'EFEO et à l'IFP, Mme Endo à l'ambassade du Japon à Paris, le Monbusho, Nadège Blanchet et Catherine Harcourt à Rehseis.

Enfin je remercie tous ceux sans l'amitié et l'amour desquels ce travail n'aurait pu aboutir, et à qui je me dois bien de tenir la promesse de les inclure dans les remerciements de ma thèse (en ordre alphabétique bilingue) :

Sonia Antaraz-Cortes for love, and friendship, and work, and constituting an international reading committee, Andrea Bréard mon encourageante ■soeur-d'âme chinoise■, Mary Bendine pour le soutien moral et physique que constitua sa cuisine, Tayeb Bijou pour les remontants trip hop, Daniel Cohen for patiently scrutinizing parts of the translation and underlining the humorous aspect of every paragraph, Michel Ferreira pour son amour inconditionnel, Fabien Gerbal non seulement pour les circuits électriques et les douches chaudes nécessaires à la rédaction finale, mais aussi le lieu merveilleux où ceux-ci se trouvent, Martine Gestin pour nos séances de maTéutique et ses leçons de style, Sohanjit Halder for patient panick listening at Seagull's, Kinue Hayashi for motherly sustaining meals, Brigitte Huron pour m'avoir accompagnée jusqu'à la dernière minute avec beaucoup d'attention, de patience, d'amour et d'éclats de rire, Ipeei Kawamoto for Nipponbashi-Tanabe wanderings and taxi, Ange and Yo Keller for overseas and over-the-net secretarial work and all kinds of support, Merlin Keller parce qu'il est un vrai frère, Nicolas Lartillot pour avoir pris de son temps pour lire, commenter,

cuisiner, corriger, écouter, ranger, discuter, etc., Hanako Matsutani for going through the hell of a first reading with the usual psychodramas, Emmanuel Modchane pour SOS-LateX, Teresa for reading a first draft as a cosmological curiosity, Corinne Tiry pour les impressions de dernière minute, merci enfin à tous ceux que j'ai cotoyés ou croisés qui m'ont fait profiter de leurs compétences tout en contribuant à créer une atmosphère de travail agréable et stimulante.

Contents

Prélude	1
i Petite histoire du texte et des manuscrits	7
ii Un peu d'histoire des mathématiques en Inde	11
iii Invitation à la lecture : quelques questions	14

I Etude introductive de certains éléments du commentaire 18

1 Caractéristiques du commentaire	19
1.1 Oralité, écriture et lecture.	20
1 Qu'est-ce qu'un texte écrit en sanskrit ?	20
2 Comment un texte était-il lu ?	22
1.2 Fabriquer des <i>sūtras</i>	25
1 Définitions et procédures : le genre des vers	25
2 L'ellipse : concision et ambivalence	26
3 Noms des vers du traité dans le commentaire	28
4 Remarques glanées dans le commentaire de Bhāskara	31
5 Conclusion	39
1.3 La structure du commentaire	40
1 Phrase introductive et citation du <i>sūtra</i>	41
2 Le commentaire général	42
3 Les Exemples	44
1.4 Interpréter des <i>sūtras</i>	45
1 Lever des ambiguïtés	46
2 Suppléer et connecter	48
3 Omissions	51
4 Un cas exemplaire de lecture interprétative : les vers 32-33	55
5 Conclusion	61

6	Fabriquer des <i>sūtras</i> : premier retour	62
1.5	Faire d'un vers une procédure	63
1	Cohérence de la règle	63
2	Contextualiser	65
3	Ordonner les opérations	69
4	Fabriquer des <i>sūtras</i> : second retour	70
5	Reconnaître des procédures : nommer et formuler la bonne question	71
6	Conclusion	77
1.6	La fonction des exemples	78
1	Les Exemples résolus	79
2	Relations des exemples entre eux	84
3	Relations des exemples avec la règle commentée	86
4	Conclusion : ce que l'illustration apporte à la règle caractérisante	89
1.7	Définir et Caractériser	89
1	Nommer : le nom et l'objet qui possède le nom	90
2	Termes techniques : sens conventionnels et étymologies	94
3	Analyser des mots et catégoriser	98
4	Conclusion	99
1.8	Explications, vérifications, preuves et réfutations	100
1	Justifier et défendre	100
2	Arguments valides et invalides	101
3	Réinterpréter des procédures	103
4	Explications	106
5	Vérifications	112
6	Preuve	115
7	Justifier et expliquer au moyen de procédures : con- clusions provisoires	116
8	Réfutations	117
9	Quelques modes de raisonnement	123
1.9	Conclusion	124
1	La lecture du traité qu'offre le commentaire	124
2	Fonction des différentes activités du commentaire	124
3	Récapitulons	127
4	Le traité	127
5	<i>l'Āryabhaṭīya</i> et les traités sanskrits en vers	128
6	Plaidoyer pour de nouvelles lectures de <i>l'Āryabhaṭīya</i>	129
7	Diversité des types de commentaires mathématiques sanskrits	130

8	Traditions de commentaires en sanskrit	132
---	--	-----

2	Pratiques et Concepts mathématiques	134
2.1	Qu'est-ce que <i>gaṇita</i> ?	134
1	Un ensemble de sujets	136
2	Un ensemble d'opérations	143
3	Un ensemble d'objets	145
4	Relier ces distinctions entre-elles	146
5	<i>gaṇita</i> dans et hors du traité	146
6	Conclusion	151
2.2	Arithmétique	152
1	Dire et écrire les nombres	152
2	Valeurs approchées	161
3	Qu'est-ce qu'une quantité ?	161
4	Manipulation des quantités dans les procédures arith- métiques	162
5	Conclusions	173
2.3	Géométrie	175
1	Figures planes	175
2	Les demi-cordes	180
3	Aires, volumes et procédures descriptives	186
4	Conclusion	189
2.4	Arithmétique et Géométrie	190
1	Est-ce que toute opération arithmétique admet une explication géométrique ?	190
2	La Règle de Trois	194
3	<i>Samkramaṇa</i>	195
4	Séries	196
5	<i>Karaṇīs</i>	198
6	Conclusion	206
2.5	Mathématiques et Astronomie	207
1	Gnomons	209
2	Planètes	211
3	Conclusion	212
2.6	Conclusions	213
B	Une partie du commentaire de Bhāskara au vers 1 du <i>Gītika-</i> <i>pāda</i> (en anglais)	216

3 Diagrammes	218
3.1 Introduction : Pourquoi parler des diagrammes ?	218
3.2 Présentation des diagrammes du texte	221
1 Diversité	221
2 Insertion des diagrammes dans le texte	230
3.3 Les diagrammes en mots	230
1 Vocabulaire	230
2 Orientation	231
3 Outils pour la construction	233
3.4 Fonction des diagrammes	237
1 Explicitation d'une définition	238
2 Illustration	240
3 Explications et Preuves	242
4 Lieu d'application d'une procédure	243
3.5 Conclusion	243
Parameśvara's commentary to verse 13 of the <i>Gaṇita-pāda</i> . .	245
Parameśvara's supercommentary of Govindasvāmin's commen- tary of verse I of chapter three of the <i>Mahābhāskarīya</i>	245
Conclusion et perspectives	248
1 Un premier portrait de <i>gaṇita</i> selon Bhāskara	248
2 De nouvelles questions	250
Bibliographie	253

List of Tables

1	Les quatre chapitres de l' <i>Āryabhaṭīya</i>	8
2	Contenu du Chapitre sur les Mathématiques (<i>gaṇita-pāda</i>)	9
3	Manuscrits de l'édition de K.S. Shukla	10
4	Une brève chronologie des textes mathématiques et astronomiques de la tradition hindoue jusqu'au VIIème siècle après J.C.	12
1.1	Exemples de mots substitués par Bhāskara	46
1.2	Procédures lues dans le vers 19	53
1.3	Différentes interprétations du sens des composés dans les vers 32-33. Les () indiquent une substitution de termes par Bhāskara	59
1.4	Données requises et données obtenues dans le vers 16	68
1.5	Catégorisation des problèmes dans le commentaire du vers 15	88
2.1	La liste de sujets énumérés par Bhāskara et les vers du chapitre sur les mathématiques	136
2.2	Présence des <i>vyavahāra</i> après Bhāskara	142
2.3	Les procédures arithmétiques et algébriques données par Bhāskara	163
2.4	Les procédures géométriques données par Bhāskara	176
2.5	Les procédures liées à l'astronomie données par Bhāskara dans le <i>gaṇita-pāda</i>	208

List of Figures

1.1	Identification d'un triangle rectangle dans un quart de cercle	72
1.2	Segments et figures internes dans un trapèze.	110
1.3	Figures à l'intérieur d'un cercle : un diagramme considéré par Bhāskara dans une réfutation	119
2.1	Le rapport que les 8 <i>vyavahāras</i> et les quatre <i>bījas</i> entretiennent avec les sujets abordés dans le <i>gaṇita-pāda</i>	139
2.2	Opérations et procédures relevant de l'augmentation ou de la diminution, de l'arithmétique ou de la géométrie, selon Bhāskara	147
2.3	Les différents types de mathématiques	150
2.4	Quadrilatères considérés dans le commentaire de Bhāskara et le noms de leurs cōtés.	178
2.5	Noms des segments attachés aux triangles dans le commen- taire de Bhāskara	179
2.6	Noms des segments et figures internes à un cercle	181
2.7	Arcs, cordes, demi-cordes et flèches	182
2.8	Deux flèches et leur cordes	183
2.9	Flèches de l'intersection de deux cercles	184
2.10	Un tétraèdre et son cōté érigé	188
2.11	Interprétation géométrique du produit de deux fractions . . .	191
2.12	La différence de deux demi-cordes consécutives est un segment	193
2.13	Deux triangles proportionnels	195
2.14	Empilements d'objets représentant des séries	197
2.15	La manière dont une diagonale fait des carrés unités dans les <i>śulba-sūtras</i>	205
2.16	Un gnomon et la sphère céleste	210
3.1	Feuilles de manuscrit émiettées	220
3.2	Diagrammes de la première moitié du vers 6 (aire du triangle)	222
3.3	Diagrammes du 8 (aire et segments d'un trapèze)	223

3.4	Diagramme du vers 11 (dérivation de demi-cordes)	224
3.5	Diagramme de la première moitié du vers 3 (aire d'un carré) .	225
3.6	Diagramme du vers 10 : un cercle, ses champs d'arcs et son rectangle interne	226
3.7	Diagrammes de la seconde moitié du vers 17 : Problèmes de Lotus immergés et de Grues et de Poissons	227
3.8	Diagrammes du vers 22 : empilements de carrés et de cubes .	228
3.9	Diagrammes du vers 16 (deux gnomons, leurs ombres et une source de lumière)	229
3.10	Deux triangles représentant une même figure	233
3.11	Deux ■équi-quadrilatères■ qui ne sont pas des carrés	239
12	Une paire de compas telle qu'elle est décrite par Parameśvara	247

Introduction

Cette thèse porte sur le commentaire de Bhāskara au chapitre mathématique de l'*Āryabhaṭīya*. Elle est essentiellement constituée d'une traduction de ce texte, que l'on trouvera en seconde partie. Nous ne proposerons pas ici une analyse mathématique de son contenu : le lecteur pourra se reporter aux annexes mathématiques insérées dans la traduction. Cette introduction, tout en situant historiquement ce commentaire, éclairera les problématiques qui ont guidé les réflexions exposées dans cette première partie.

i Petite histoire du texte et des manuscrits

En 499 après J.-C. (Billard : 510¹), un certain Āryabhaṭa produit un traité d'astronomie, que la tradition appelle le plus souvent du nom de son auteur : l'*Āryabhaṭīya*, ou parfois en référence à la région d'appartenance de celui-ci l'*Āśmakīya* (de celui du pays d'*Āśmaka*)². Ce traité se divise en quatre chapitres (voir le tableau 1), le second portant sur les mathématiques (*ganīta-pāda*, ■quart sur les mathématiques■).

C'est un traité en vers. Le premier chapitre est rédigé en *gītikā*, et son titre porte le nom de ce vers : *gītikā-pāda* (■chapitre en vers *gītikā*■).

¹Il existe à présent, pour la datation des traités d'astronomie en sanskrit, au moins deux théories opposées : l'une, la plus courante et la plus admise, que défend David Pingree, s'appuie sur des données philologiques pour dater les textes. L'autre, qui fut développée par André Billard, se base sur les données présentes dans les textes (les latitudes des constellations, etc.), et utilise des techniques statistiques afin de les dater. L'ouvrage d'André Billard ([Billard 1971]) fut à sa publication un objet de polémique ([Pingree 1993], [Billard 1977]) puis tomba quelque peu dans l'oubli. Dans les dernières années les chercheurs ont pris l'habitude de présenter deux dates pour les textes sur lesquels il n'y a pas d'accord. Nous avons donc opté pour la convention suivante : les dates données sans précision sont admises par D. Pingree. Lorsqu'André Billard propose une date alternative, nous l'avons indiquée entre parenthèses. Ces polémiques sont symptomatiques d'une incertitude plus générale. En ce qui concerne l'ensemble de la littérature sanskrite, il existe une floraison de dates qui varient (parfois de plus de 1000 ans) selon les indologistes.

Le débat sur la datation des Védas et par conséquent de tous les textes qui les suivent demeure un enjeu extrêmement politique en Inde. Lorsque des dates ne proviennent ni du *CESS* de Pingree, ni de *l'Astronomie Indienne* de Billard, nous préciserons également les sources sur lesquelles nous nous sommes appuyés. Les dates données sont ainsi indicatives d'une chronologie approximative, et ne doivent en aucun cas être considérées comme définitives. Nous ne discuterons pas ici des problèmes de datation du texte que nous avons étudié. Pour la bibliographie, se reporter à la fin de la traduction.

²De cet astronome nous ne savons pas grand chose de plus. Pour plus de précisions voir [Intro, p.xxv-xxviii; Shukla1976].

Table 1: Les quatre chapitres de l'*Āryabhaṭīya*

L'*Āryabhaṭīya* est formé de quatre chapitres ou ■quarts■ (*pāda*) :

<i>Gītikā-pāda</i> (Chapitre en vers <i>gītikā</i>)
<i>Gaṇita-pāda</i> (Chapitre sur les mathématiques)
<i>Kāla-kṛyā-pāda</i> (Chapitre sur la mesure du temps)
<i>Gola-pāda</i> (Chapitre sur la Sphère)

Les trois derniers chapitres sont rédigés en *āryā*³. Le *gaṇita-pāda* traite de divers points de géométrie, de trigonométrie et d'arithmétique. Son contenu est succinctement décrit dans le tableau 2.

Ces vers sont si elliptiques qu'ils sont parfois incompréhensibles : c'est pourquoi ils sont lus à l'aide d'un commentaire.

C'est, pense-t-on, au Kāthiāwar, péninsule de la région appelée actuellement le Gujarat, que Bhāskara écrit en 629 après J.-C. un commentaire de ce traité, intitulé l'*Āryabhaṭīya-bhāṣya*⁴. Il s'agit du plus ancien commentaire de ce texte qui nous soit parvenu. Il en existait peut-être d'autres plus anciens. En effet, Bhāskara cite souvent des interprétations divergentes. En particulier, il évoque à plusieurs reprises le nom de Prabhākara, un *guru* dont on ne sait s'il a écrit un commentaire ou s'il dispensait oralement une interprétation qu'il aurait eu de la voix même du maître⁵.

Des commentaires de l'*Āryabhaṭīya* postérieurs à celui de Bhāskara ont été écrits jusqu'au milieu du XIXème siècle dans diverses langues du sous-continent indien⁶. Āryabhaṭa fut particulièrement populaire au Kerala⁷. Ceci met en valeur l'importance de ce traité dans la tradition hindoue.

L'édition sur laquelle je m'appuie est la seule qui existe de ce texte : elle a été faite par K. S. Shukla pour l'Indian National Science Academy, à New-Dehli en 1976. Pour effectuer cette édition il s'est appuyé sur cinq manuscrits, présentés dans le tableau 3.

En Inde, les ■manuscrits■ sont le plus souvent des feuilles de palmier traitées de manière à devenir étanches. Les textes y sont gravés à l'aide

³Voir, pour plus de détails, la section consacrée aux vers dans l'introduction de la traduction.

⁴Voir [Intro, p.xxix-xxx, p.xix-xx; Shukla1976].

⁵Pour une discussion détaillée voir [Intro, p. liv-lvi; Shukla1976].

⁶Voir [Intro, p. xxxv-lxii; Sharma-Shukla1976].

⁷[Sarma 1977]

Table 2: Contenu du Chapitre sur les Mathématiques (*gaṇita-pāda*)

Vers 1	Prière
Vers 2	Définition de la numération positionnelle décimale
Vers 3	Définition du carré et du cube géométrique et arithmétique
Vers 4	Extraction de la racine carrée
Vers 5	Extraction de la racine cubique
Vers 6	Aire du triangle et volume du tétrèdre
Vers 7	Aire du cercle et volume de la sphère
Vers 8	Aire du trapèze et longueurs de segments internes
Vers 9	Aire de toutes les figures planes, et corde sous-tendant un sixième de la circonférence d'un cercle
Vers 10	Rapport approximatif du diamètre d'un cercle particulier à sa circonférence
Vers 11-12	Dérivation de sinus et de différences de sinus
Vers 13	Outils pour la construction de cercles, triangles et quadrilatères; et pour obtenir horizontalité et verticalité
Vers 14-16	Gnomons
Vers 17	■Théorème de Pythagore■ et segments internes dans un cercle
Vers 18	Intersection de deux cercles
Vers 19-22	Séries
Vers 23-24	Trouver deux quantités connaissant leur produit, la somme de leur carrés...
Vers 25	Problème commercial
Vers 26	Règle de Trois
Vers 27	Règle de calcul sur les fractions
Vers 28	Règle d'inversion des procédures
Vers 29	Série/Equation du premier degré à plusieurs inconnues
Vers 30	Equation du premier degré à une inconnue
Vers 31	Instant d'une rencontre
Vers 32-33	Pulvérisateur

Table 3: Manuscrits de l'édition de K.S. Shukla

L'édition : <i>Āryabhaṭīya-bhāṣya</i> by Bhāskara, edited by K. S. Shukla, INSA, New-Delhi, 1976.
Manuscrits à la base de l'édition :
Manuscrit A : Kerala University of Oriental Research and Manuscript Library (KUORML), Trivandrium. Malayalam. Incomplet.
Manuscrit B : Indian Office, Londres. Grantha. Incomplet.
Manuscrit C : KUORML. Malayalam. Incomplet.
Manuscrit D : KUORML. Malayalam. Incomplet.
Manuscrit E : KUORML. Malayalam. Incomplet.
Manuscrit supplémentaire recensé par D. Pingree :
KUORML. Malayalam. Incomplet.

d'un stylet. Ces feuilles sont ensuite enduites d'encre : celle-ci s'insère dans les sillons tracés par le stylet rendant les lettres visibles. Ces manuscrits se conservent mal : ils souffrent de l'humidité, de la chaleur et sont rongés par des vers. Les plus anciens manuscrits de ce type qui nous sont parvenus ont moins de 700 ans.

Les cinq manuscrits utilisés par Shukla pour son édition proviennent apparemment d'un même manuscrit source car ils contiennent tous une même trame d'erreurs. Ils sont tous incomplets ; l'édition a été complétée à l'aide du commentaire de Someśvara (968-1200) à l'*Āryabhaṭīya*, sorte de résumé de celui de Bhāskara. On peut penser que ces manuscrits sont originaires du Sud de l'Inde : trois d'entre eux utilisent des transcriptions du texte en Malayalam ; quatre appartiennent à la même bibliothèque du Kerala. L'un se trouve dans la collection de l'Indian Office, à Londres. Il appartient au fond de l'indologue anglais A.C. Burnell ; on n'en connaît pas la provenance originale. Aucune recherche n'a été faite sur l'histoire de ces manuscrits ou pour les dater.

David Pingree a entrepris depuis 1955⁸ un recensement des manuscrits

⁸[Volume 1, p.v ; CESS]

sanskrits portant sur les mathématiques, l’astronomie et l’astrologie. Il a répertorié un nouveau manuscrit, qui par son état (noirci par des moisissures et tombant en poussière) ne serait pas en mesure d’apporter quoi que ce soit de neuf. Comme de nombreux manuscrits sommeillent encore loin des bibliothèques et des indologues, en tant que patrimoine des familles brahmanes, il n’est pas exclu que l’on en découvre un jour de nouveaux.

Gardons à l’esprit que l’édition sur laquelle cette étude se base est incomplète.

ii Un peu d’histoire des mathématiques en Inde

Le commentaire de Bhāskara a été rédigé vraisemblablement à un moment clef de l’histoire des mathématiques et de l’astronomie en Inde.

Grâce à la stabilité politique instaurée par la dynastie Gupta, les Vème-VIIème siècles sont une période florissante du point de vue culturel en Inde⁹. De nombreux textes savants ou religieux, élaborés pendant des siècles ont à cette époque été fixés canoniquement, prenant ainsi l’aspect que nous leur connaissons aujourd’hui. Ainsi, la version sanskrite du *Mahābhārata*, l’une des deux grands épopées en vers de l’hindouisme, y a probablement pris la forme que nous lui attribuons actuellement. D’importants commentaires savants portant sur tous les domaines, de la loi à la grammaire en passant par la philosophie, sont également rédigés à cette époque.

Au début du VIème siècle, un grand concile Jain à Valabhī –ville que l’on retrouvera dans le texte de Bhāskara et située dans la région où il aurait vécu– fixa le canon des textes de référence de cette religion. Certains de ces textes contiennent des passages mathématiques et cosmogoniques¹⁰.

A la même époque, dans la tradition hindoue, en mathématiques et en astronomie, nous sont parvenus des textes, qui en synthétisant des traités antérieurs, ont fait disparaître les textes dont ils sont issus tout en posant les bases d’un renouveau.

Les plus vieux textes mathématiques dont nous disposons s’appellent les *śulba-sūtras*. Il s’agit de textes d’auteurs et de dates divers; ils font partie d’une annexe des Védas consacrée aux règles du sacrifice. Les *śulba-sūtras* traitent de la géométrie des autels védiques; ils en donnent les règles

⁹Pour plus de détails se reporter, à titre d’exemple, au chapitre intitulé ■The Evolution of the ■Classical Pattern■ dans [Thapar1966].

¹⁰Précisons ici que le sous-continent indien connaissait, déjà à date ancienne, une floraison de langues écrites. Les textes jains qui nous sont parvenus sont ainsi rédigés dans des dialectes du sanskrit appelés génériquement *prākṛta*.

de construction. On peut également y déceler les traces d'une réflexion mathématique plus générale. Les constructions, à l'aide de cordes, à partir d'une figure donnée, de figures de même aire sont typiques des problèmes qu'on y rencontre. La date généralement admise pour le plus ancien des *śulba-sūtras* est d'environ 800 avant J.-C., la date la plus récente étant autour de 500 après J.-C. Avec le *jyotiṣa-vedāṅga* (l'annexe du véda consacré à l'astronomie que l'on date d'environ 200 avant J.C.¹¹), ce corpus de texte délimite la tradition ■ancienne■ des mathématiques et de l'astronomie de la tradition hindoue¹².

Les *śulba-sūtras* ont été commentés jusqu'au XVème siècle après J.-C. Certains commentaires sont contemporains de l'époque de Bhāskara.

A la suite de ce corpus ■ancien■, la tradition hindoue ne nous a pas légué de traités de mathématiques ou d'astronomie complet avant le Vème siècle de notre ère. C'est ce qu'illustre la brève chronologie dans le tableau 4.

Table 4: Une brève chronologie des textes mathématiques et astronomiques de la tradition hindoue jusqu'au VIIème siècle après J.C.

<p>800-600 avant J.-C. Rédaction du plus ancien des <i>śulba-sūtras</i>, le <i>Baudhāyana śulba-sūtra</i>.</p> <p>env. 200 avant J.-C. Fixation du <i>jyotiṣa-vedāṅga</i>.</p> <p>149/150 après J.-C. Yavaneśvara traduit un traité d'astrologie grec, qui laissera une trace sur l'astrologie indienne.</p> <p>env. 425 après J.-C. (Billard 628-1042) le <i>Paitāmaha-siddhānta</i> est rédigé. Ce texte d'astronomie donne, pour approximation de π, $\sqrt{10}$ et propose une méthode de dérivation de tables de différence de sinus.</p> <p>499 après J.-C. (Billard 510) : l'<i>Āryabhaṭīya</i> d'Āryabhaṭa.</p> <p>env. 550 après J.-C. Varāhamihira compile le <i>Pañca-siddhāntikā</i>.</p> <p>628 après J. -C. <i>Brāhma-sphuṭa-siddhānta</i> de Brahmagupta.</p> <p>629 après J.-C. Commentaire de Bhāskara (<i>Āryabhaṭīya-bhāṣya</i>)</p> <p>655 après J. -C. <i>Khaṇḍakhādya</i> de Brahmagupta</p> <p>env. 600-700 après J.-C. <i>Bakhṣālī-Manuscript</i>.</p>
--

¹¹[p.7; Bag 1976].

¹²Cette tradition ■ancienne■, s'oppose à la tradition ■classique■ à laquelle appartient le texte de Bhāskara

Il est probable que la continuité de la tradition mathématique des *śulbasūtras* avec celle qui apparaît dans le commentaire de Bhāskara, les œuvres de Brahmagupta et le *Bakṣali-Manuscript* pourra un jour être mise en lumière grâce aux commentaires existants des premiers textes¹³.

Deux traités d’astronomie complets sont parvenus jusqu’à nous. Ce sont les seuls dont les indologistes s’accordent à penser qu’ils datent de la fin du Vème siècle ou du début du VIème siècle. Il s’agit du *Pañca-siddhānta*, puis de l’*Āryabhaṭīya*. Aucun texte plus ancien ne nous a été légué probablement parce que ces deux traités reprenaient succinctement leur teneur. Le *Pañca-siddhānta* (■les cinq traités d’astronomie■) comme son nom l’indique est clairement un tel compendium¹⁴. Bhāskara lui-même dans son commentaire à l’*Āryabhaṭīya* nous parle de textes dont ce compendium est issu¹⁵.

Bhāskara, confondu pendant un certain temps avec son homonyme du XIIème siècle et appelé depuis ■Bhāskara I■¹⁶, est un astronome de cette période florissante, qui, outre son commentaire à l’*Āryabhaṭīya*, nous a laissé deux traités d’astronomie. Le *Mahābhāskarīya* (■le grand de Bhāskara■) est une exposition exhaustive et non elliptique de ses interprétations des procédures d’Āryabhaṭa. Le *Laghū-bhāskarīya* (■le facile/concis de Bhāskara■) donne de manière plus succincte des procédures similaires. Le premier a été rédigé avant son commentaire. Il y est cité sous le nom de *Karma-nībandha*. Le second lui est postérieur.

Ces deux traités furent commentés, cités, discutés et résumés jusqu’à la fin du XVème siècle. Ils furent particulièrement populaires en Inde du Sud, notamment au Kérala.¹⁷

Le commentaire de Bhāskara à l’*Āryabhaṭīya* est donc important car il nous donne à voir l’auteur de ces deux traités d’astronomie raisonnant directement sur le texte de l’auteur dont il s’est inspiré. Contrairement à la tradition des traités versifiés concis, des discussions et des raisonnements y sont exposés dans le détail puisqu’il s’agit d’un commentaire¹⁸. Ce dernier est souvent cité dans des textes consacrés à l’histoire du zéro, de la notation

¹³J.M. Delire de l’Université de Bruxelles prépare actuellement l’édition des commentaires de Venkateśvara (XVIème siècle) et Dvārakānātha (après le VIème siècle) au *Baudhāyana śulba-śūtra*. Nous l’attendons avec force impatience et curiosité.

¹⁴De nombreuses éditions, accompagnées de divers commentaires ont été faites de ce texte. Citons [Neugebauer and Pingree 1971].

¹⁵Voir [Intro, p. lvi-lxi; Shukla1976].

¹⁶Voir [Datta 1930].

¹⁷Voir [Intro, p. xxxiii-xlvi; Shukla 1976].

¹⁸Ce fait est rarement mis en valeur par les historiens des sciences travaillant sur l’Inde. A ce titre, [p. 31; Srinivas 1990] fait exception.

décimale en Inde à l'■invention du sinus■ et aux calculs du ■pulvérisateur■ (*kuttākāra*). Pourtant peu d'études complètes et détaillées ont été publiées à son sujet. Le caractère un peu archaïque et difficile du texte, dont de nombreux passages sont elliptiques, est sans doute à l'origine de cette lacune. Nous avons systématiquement proposé des hypothèses à leur sujet, mais de nombreux passages de ce commentaire demeurent énigmatiques. Il se peut que ces difficultés ne naissent pas du texte original mais du peu de manuscrits dont nous disposons actuellement pour le reconstituer. Ils renverraient alors à un problème d'édition critique.

Cet aperçu sur l'histoire des mathématiques et de l'astronomie en Inde souligne l'intérêt du commentaire de Bhāskara et les perspectives que son étude ouvre. En effet, puisque nous disposons de plusieurs textes de cette époque nous pourrions envisager de les comparer, afin d'améliorer notre connaissance du paysage mathématique de l'époque. Le commentaire lui-même présente des discussions d'écoles. Il contient, en particulier, une longue réfutation de procédures, probablement Jain, utilisées pour des calculs d'aires et d'arcs en rapport avec le cercle. La connaissance comparative de ce paysage permettrait de mieux cerner, au niveau international, la nature et les modalités des échanges entre l'Inde, le monde de langue arabe et la Chine. Nous n'entreprenons pas ici un tel travail.

Nous allons en revanche énoncer à présent les problématiques qui nous ont guidées tout au long de la traduction. C'est d'elles que nous sommes parties pour élaborer la brève étude du commentaire que nous proposons ici.

iii Invitation à la lecture : quelques questions

Notre problématique a deux axes : la forme textuelle du commentaire et les pratiques mathématiques dont il témoigne.

L'*Āryabhaṭīya-bhāṣya* (commentaire de l'*Āryabhaṭīya*) est un texte particulier : c'est un commentaire.

Dans la tradition savante du sous-continent indien, les traités sont commentés à la mesure de leur importance. Pour reprendre une expression de J. Bronkhorst¹⁹, les commentaires sont les ■lunettes■ à travers lesquelles nous lisons les traités. Pourtant, aujourd'hui encore, l'indologie s'est peu penchée sur ce genre. Nous disposons de peu d'études discutant du biais par lequel le commentaire lit le traité ou distinguant les spécificités de ce genre de texte en fonction des matières, des époques, etc.

En essayant de relever dans le détail, non seulement la forme du texte

¹⁹[p. 212; Bronkhorst 1991].

de Bhāskara, mais également le travail d'interprétation qu'il effectue et ses modes de raisonnements spécifiques, nous souhaitons éclairer un type de travail textuel particulier en Inde. Nous espérons également que ce ■portrait■ d'un commentaire pourra un jour s'insérer dans le paysage des commentaires sanskrit de la même époque.

Parallèlement à la tradition indienne, des commentaires mathématiques ont été rédigés à d'autres époques et dans diverses régions : citons, à titre d'exemple, les commentaires des *Eléments de Géométrie* d'Euclide du haut moyen-âge européen ou ceux aux *Neuf Chapitres* de la tradition chinoise. Est-ce que les variations des formes textuelles des traités, suivant les régions, ont une incidence sur la manière dont s'y élabore un raisonnement ou un calcul ? Pour le savoir, il faudrait répertorier les diverses activités mathématiques dans un commentaire. En quoi consistent-elles ? Comment le type d'exercice intellectuel qu'un commentaire présuppose a-t-il influencé la pratique effective des mathématiques ?

Notre objectif est donc également de jeter les bases d'une étude comparative des commentaires mathématiques.

La comparaison entre différentes traditions nous incite à considérer l'aspect culturel de l'activité mathématique. Nous verrons que le texte de Bhāskara met sans cesse en lumière les présupposés textuels et intellectuels de notre conception contemporaine des mathématiques.

Qu'avait donc de particulier la ■pratique mathématique■ de Bhāskara (et de ses contemporains) ? Pour répondre à cette question, nous nous proposons, concrètement, d'observer des manières de poser et de penser des calculs, de dessiner et de concevoir des figures géométriques, d'élaborer des raisonnements... Etudier une ■pratique mathématique■, c'est tenter de cerner les problèmes que des mathématiciens se sont posés et la manière dont ils s'y sont pris, concrètement et théoriquement, pour les résoudre. C'est donc aussi, mais en partie seulement, la manière dont ils ont présenté textuellement le savoir qu'ils ont élaboré ou qu'ils ont cherché à transmettre.

Ce qui nous reste d'une pratique gujaratie du VII^{ème} siècle de notre ère n'est, au mieux, qu'un ensemble de textes²⁰. Par conséquent, tenter de reconstruire des pratiques mathématiques dans le contexte indien implique une description de ce que laisse voir le texte lui-même : à la fois une conception de ce qu'est un texte mathématique (en tant que type particulier

²⁰Le commentaire de Bhāskara décrit, parfois avec précision, des instruments : compas, gnomons, fils à plombs... A notre connaissance, des fouilles archéologiques ne nous ont pas encore fourni de tels objets de cette époque.

de texte savant) et également une idée assez explicite des mathématiques et de ses objets. Il y a aussi ce que le texte ne nous dit pas parce que cela lui semble évident : ce sont des choses simples, comme la manière dont on pose une addition, une manière de faire sans doute si habituelle qu'elle n'est pas exposée. De ces pratiques-là, le texte peut parfois nous livrer des traces succinctes, que l'on s'efforcera de mettre en lumière.

Décrire et reconstruire partiellement la pratique mathématique présente dans le texte de Bhāskara nécessite d'être à l'écoute de l'aspect formel du commentaire, de son contenu et de ce qui n'y est pas explicitement formulé. Mais cette séparation des strates d'informations que nous livrent un texte est artificielle : c'est ensemble, intimement liées les unes aux autres, solidaires les unes des autres, que de telles informations nous apparaissent.

Ce type de questionnement a orienté le style de la traduction que nous avons faite. Elle est littérale car elle espère mettre en lumière des pratiques mathématiques locales, dont l'expression se fait à travers la langue. Elle espère également (comme les annexes sur les noms de nombres le soulignent probablement clairement) replonger ce texte dans le contexte culturel indien.

L'étude que nous proposons est composée de trois parties. La première répertorie et étudie les caractéristiques de ce commentaire, la seconde se penche sur les pratiques mathématiques dont le texte témoigne. Cette division, comme nous l'avons souligné plus haut, est rhétorique. Une troisième partie analysera en détail un objet spécifique : les diagrammes. Nous aurons pour objectif d'y souligner comment la conception d'un objet et sa manipulation sont tributaires tout à la fois du genre du texte, de la conception mathématique de l'objet et des pratiques implicites que le texte laisse échapper.

La partie consacrée au commentaire, se concentrera sur la nature des vers d'Āryabhaṭa telle que nous pouvons la saisir à travers la lecture qu'en donne Bhāskara. Nous nous attacherons également à décrire cette lecture dans sa dimension interprétative et mathématique : il s'agira donc aussi d'un travail sur la nature du commentaire lui-même. La partie consacrée aux mathématiques examinera la manière dont les différents sujets abordés dans le *gaṇita-pāda* sont articulés entre eux par le commentateur. Nous y expliciterons certaines de ses conceptions des objets mathématiques, et décrirons des manières particulières de ■faire des mathématiques■. Enfin, la partie sur les diagrammes examinera comment cet objet non discursif du commentaire est manipulé et con■u, comment il s'articule au texte et quelle est sa fonction en géométrie.

Soulignons que l'essentiel de notre travail, au cours des quatre dernières années, a porté sur la traduction. Les parties qui suivent sont à la fois une invitation à la lecture du commentaire de Bhāskara, et un texte auquel l'on pourra se reporter, en lisant la traduction, pour une interprétation de certains passages obscurs.

Part I

Etude introductive de certains éléments du commentaire

Chapter 1

Caractéristiques du commentaire

Nous commencerons dans un premier temps par analyser la manière dont le traité est perçu par le commentaire. Nous nous pencherons ensuite sur la lecture et l'interprétation que le commentaire donne du traité. Après une présentation de la forme du commentaire, nous examinerons comment se fait l'exégèse des vers : comment ils sont expliqués, puis comment ils sont transformés pour devenir des procédures. Nous analyserons également, la fonction des listes d'exemples présents dans chaque commentaire de vers. Enfin, nous étudierons une activité qui nous semble typique de ce commentaire : la définition et caractérisation des objets mathématiques manipulés.

Notre objectif est triple. Premièrement, répertorier ce que le commentaire nous apprend sur la manière dont le traité a pu être rédigé puis lu. Deuxièmement, souligner comment, si le commentaire est indispensable pour pouvoir lire et comprendre le traité, il n'en donne toutefois que sa propre interprétation. Cette interprétation est sémantique mais concerne également la cohérence et l'organisation du traité. Troisièmement, tenter de décrire des pratiques mathématiques qui découlent ou émanent de la forme du commentaire.

Mais auparavant, dans la continuité des questions que nous avons abordées dans l'Introduction, nous allons commencer par éclairer le contexte dans lequel le commentaire de Bhāskara se présente : un éclaircissement tout relatif car nous nous poserons surtout beaucoup de questions. Celles-ci soulignent l'existence d'un contexte dont nous ignorons presque tout : on comprend donc avec quelles précautions les analyses qui suivent doivent être prises.

1.1 Oralité, écriture et lecture.

1 Qu'est-ce qu'un texte écrit en sanskrit ?

Qu'il s'agisse de stéréotypes ou de réflexions savantes, nous avons l'habitude de considérer que la tradition hindoue est orale. Ainsi, l'Inde est-elle pour chacun de nous associée à la figure du *guru*, le maître de la bouche duquel un savoir est transmis. En témoignent également les Védas¹, le plus vieil ensemble de poèmes et de prières qui nous est parvenu du sous-continent, transmis oralement de père en fils dans les milieux brahmaniques. Ces textes sacrés ont ainsi été préservés depuis l'Antiquité.

Or, dans ce que nous avons l'habitude de considérer comme une tradition orale, nous sommes, en fait, submergés par les manuscrits. Si l'on se limite seulement à cette section extrêmement spécialisée de la littérature sanskrite constituée par les textes d'astronomie, d'astrologie et de mathématiques, plusieurs dizaines de milliers de manuscrits ont été répertoriés à ce jour².

L'indologie toute entière – en cela elle s'oppose malheureusement trop souvent à l'anthropologie – est confrontée à ce paradoxe : reconstruire uniquement par les écrits une culture dont les textes nous expliquent l'importance de la transmission orale.

Cette transmission orale du savoir est présente dans le commentaire que nous étudions. Bhāskara précise systématiquement avant de les citer que les vers d'Āryabhaṭa ont été *dits* (*āha*). Cette insistance met en valeur l'autorité conférée à la parole dite. Nous la retrouvons également dans les multiples citations sans références qui traversent le commentaire : introduites par la formule consacrée ■il a été dit que■ (*uktam, ucyate, etc.*) elles semblent par le seul fait d'être citées avoir leur propre autorité.

D'autres éléments du commentaire, plus difficiles à cerner, semblent prolonger ce caractère oral du travail savant. Ainsi, de nombreux dialogues y sont mis en scène : des jeux de questions-réponses, des objections et leur réfutations parsèment le texte³.

¹Ils sont datés dans un intervalle allant d'environ 2500 à 800 avant J.-C.

²Voir les cinq tomes de [CESS], qui contiennent les résultats du travail titanesque entrepris par David Pingree pour répertorier l'ensemble de ces manuscrits éparpillés dans le monde entier.

³Notons ici la suggestion de Louis Renou au sujet des dialogues présents dans les commentaires, dans [§32; Renou 1963] : leur origine remonterait à certains textes spéculatifs védiques qui se caractérisent par une succession de vers qui s'enchaînent par des jeux de questions-réponses. Dans le même article l'auteur se pose la question de savoir s'il faut penser la rédaction des *sūtras* comme relevant d'une tradition écrite ou orale, sans donner de réponse.

Mais si l'autorité, et donc le traité, appartiennent à l'univers de la parole, le commentaire en revanche est un texte écrit. Ainsi, Bhāskara précise au tout début du chapitre sur les mathématiques (p. 43; lignes 10)⁴ :

vyākhyānaṃ (...) adhunā kiñcin mayā likhyate//

j'écris à présent un bout de commentaire

Nous sommes donc ici dans le cadre d'une tradition qui valorise la transmission orale du savoir, tout en ayant recours également à une transmission écrite de celui-ci. Pourquoi donc les textes étaient-ils écrits ? L'hypothèse la plus souvent avancée est celle de la perte d'une tradition : n'ayant plus d'élèves un vieux maître transcrivait par écrit son savoir afin de le préserver pour des générations futures.

Or cette explication n'est guère crédible lorsqu'on examine le contexte culturel de l'époque : les commentaires y apparaissent comme autant de signes d'une culture florissante. L'épanouissement des mathématiques à l'époque de Bhāskara et la vigueur des querelles d'écoles qui émanent des textes ne nous donnent pas l'image d'une tradition mourante, bien au contraire.

D'autre part, le commentaire de Bhāskara nous indique que l'écriture pouvait être utilisée dans l'élaboration d'un raisonnement. En effet, l'activité mathématique requiert une écriture, comme en témoignent les règles pour écrire les nombres avec un positionnement décimal, les descriptions précises de construction de figures à l'aide de compas et de fils, la partie **■disposition■** (sur une surface de travail) des données d'un exemple à résoudre.

Mais là encore, à quelques reprises, nous avons le sentiment que cette

⁴Nous avons adopté la convention suivante concernant les passages du commentaire cités. Les pages et les lignes entre parenthèses correspondent à ceux de l'édition de Shukla [Shukla1976], les mêmes pages et numéros de lignes sont donnés dans la marge droite de notre traduction. Nous avons retranscrit ici le passage en sanskrit et donné une traduction hypothétique en français. Néanmoins, pour une traduction rigoureuse, le lecteur devra se reporter au texte de la traduction en anglais. Ce dernier fera référence en cas d'ambiguïté. En effet, nous n'avons pu, faute de temps, réélaborer en français certaines conventions et nuances que nous avons adoptées pour traduire le sanskrit en anglais. Par exemple nous avons distingué les termes *gaṇita* et *ānāyana* d'un côté, de *kriyā* de l'autre en les traduisant respectivement par **■computation■** et **■calculation■**; tous ont été traduits en français par le mot **■calcul■**. De même, en anglais nous avons traduit *nyāsa* par **■setting down■** et *sthāpanā* par **■disposition■**, en français les deux ont été traduits par **■disposition■**. De manière générale, le texte que nous avons adopté pour la traduction française, afin de rendre le texte d'introduction linguistiquement homogène, n'a pas été fait avec le soin rigoureux et maniaque qui a présidé à la traduction en langue anglaise. Le lecteur se reportera donc à celle-ci en cas d'ambiguïté.

écriture est per■ue comme une étape, dont un mathématicien à l’esprit vif pourrait faire l’économie.

Ainsi, ayant décrit en mots la construction d’une figure géométrique, Bhāskara écrit (p. 48; ligne 16) :

durvidagdha-pratyāyanāya ca kṣetram ālikhyate

Et afin de persuader ceux dont l’esprit est lent, un champ est dessiné.

Faut-il ici comprendre que ■’esprit vif■ serait capable, sur la base de la seule description de ce diagramme, de le voir mentalement sans avoir besoin du dessin ?

La question de savoir quel est le statut du texte écrit reste donc ouverte à l’horizon de l’indologie en général. Gardons cela à l’esprit.

2 Comment un texte était-il lu ?

De l’oralité de la tradition savante indienne découle un cliché sur la transmission du savoir : les grands traités étaient appris par cœur, par répétition, et ensuite expliqués par un maître⁵. Mais l’existence d’un texte écrit implique l’existence d’une lecture. Or ne connaissant pas le cadre social dans lequel les manuscrits d’astronomie étaient utilisés, nous ne savons ni par qui, ni dans quel contexte ils étaient lus⁶. Ainsi nous ne savons pas comment les traités étaient abordés, s’ils étaient systématiquement appris par cœur ou non. Nous ne savons pas non plus dans quel cadre le commentaire était

⁵A titre d’exemple, voir [Introduction, p.31-32; Filliozat 1988b].

⁶Le peu que nous savons du système d’enseignement à l’époque, c’est qu’il existait des centres d’études brahmaniques et bouddhistes, qui attireraient des étudiants de tous les recoins de l’Inde et même de l’étranger. Dans ces centres d’études, l’astronomie et partant les mathématiques nécessaires à celle-ci, étaient étudiées. Mais nous ne savons pas comment en pratique se faisait cet enseignement. En ce qui concerne le texte que nous étudions, nous avons noté les éléments suivants, traces du contexte social dans lequel il s’insère : les exemples versifiés interpellent, de temps en temps, le mathématicien/calculateur (*gaṇaka*), auquel le problème s’adresse. Bhāskara fait parfois référence à ceux qui font des calendriers ou almanachs : *sāṃvatsara*. Notons que dans son commentaire du vers 14, ceux-ci semblent être distingués des artisans (*śilpīns*) qui construisent effectivement les gnomons. Enfin, mettant en scène une objection qu’il juge idiote, Bhāskara s’exclame (p. 85; ligne 4) : ■même ceux qui ne connaissent pas les mathématiques (le) savent, que dire alors de ceux qui font des calendriers !■ (*agaṇitajñō ’pi ca jānāti, kiṃ punaḥ sāṃvatsaraḥ*). Si la connaissance mathématique désignée ici concerne les mathématiques transmises par le traité, cette remarque soulignerait une connaissance mathématique commune existant en dehors des cercles savants.

utilisé, ni à quel public il était destiné. L'idée reçue à ce sujet est la suivante : le traité était appris par cœur par des élèves. Le commentaire aurait été lu par un professeur, en préparation d'un cours⁷.

En fait, nous ne disposons pas d'autre information sur la manière dont les textes étaient lus au-delà de ce que les textes peuvent nous en dire eux-mêmes.

L'un des objectifs de ce chapitre est d'examiner comment le traité est lu par le commentaire. Que savons nous de la manière dont le commentaire était lu ? Le commentaire examine le traité vers à vers. Pour chacun des vers commentés, les gloses grammaticales se rapportent, unes-à-unes à chacun de leur mots. Si les vers étaient connus par cœur, la lecture des gloses grammaticales pouvait être linéaire, s'ils ne l'étaient pas, il fallait alors procéder à un va-et-vient entre les vers, cités au début, et l'analyse de chaque mot. Cette dernière donne parfois lieu à des discussions de plusieurs pages avant d'en revenir au vers lui-même. D'autre part, plusieurs lectures semblent requises pour comprendre un même commentaire de vers. En effet, souvent, à la première lecture, nous avançons sans comprendre ce que le commentaire explique. Le sens s'éclaircit progressivement, une affirmation ne prenant sens que dans la suite, etc. Ainsi deux lectures au moins semblent nécessaires pour bien comprendre tous les éléments d'un commentaire de vers donné.

Cette lecture non-linéaire semble s'étendre à l'ensemble du commentaire. En effet, il n'est pas rare qu'un commentaire de vers cite un vers qui n'a pas encore été commenté. Par exemple, ce qu'on appelle communément le ■Théorème de Pythagore■, donné dans la première moitié du vers 17⁸, est abondamment cité et utilisé comme s'il était déjà compris et assimilé dans le commentaire de la première moitié du vers 6. Ce dernier cite partiellement et utilise également le calcul décrit dans le vers 24.

Des indications temporelles accompagnent fréquemment ces citations. Bhāskara précise alors, quand tel sujet sera abordé ou bien s'il a déjà été traité. Par exemple, dans son commentaire du vers 8 il écrit (p. 63; lignes 19-20) :

pūrvasūtreṇātra dviṣamaviṣamatryaśrakṣetraphalaṃ darśayitavyam / vaksyamāṇasūtreṇāntarāyatacaturaśrakṣetraphalānayanam anena vā...

⁷Voir par exemple [la partie entre crochets p.1; Sharma-Shukla 1976].

⁸Le tableau 2 donne la liste des vers du deuxième chapitre et leurs contenus mathématique.

Ici, avec une règle précédente (Ab.2.6.ab), les aires de tri-latères isocèles et inégaux doivent être montrés. Ou, avec une règle qui sera dite (Ab.2.9) le calcul de l'aire du rectangle intérieur (doit être faite)...

Ainsi tout se passe à la fois comme si l'on devait connaître ce qui sera traité ultérieurement et que l'on pouvait ignorer ce qui a été traité auparavant.

Lorsqu'un commentaire de vers n'est pas suffisant en lui-même c'est que les commentaires aux vers qui le précèdent l'accompagnent thématiquement. Ainsi les vers 14 à 16 portent sur des calculs d'ombres de gnomons. Le vers 14 discute en détail la taille et la forme des gnomons et ceci est utilisé dans les commentaires des vers 15 et 16. Dans son commentaire du vers 15, Bhāskara traite systématiquement de tous les cas de figures où apparaissent une source de lumière, un gnomon et son ombre. Dans ce cadre, une interprétation particulière d'une partie du vers 16 est donnée. Le commentaire du vers 16 ne reprend pas l'interprétation qui en a été faite antérieurement. Par contre le commentateur y discute des cas où les vers 15 et les vers 16 s'appliquent à l'astronomie.

Tout se passe donc comme si ces commentaires de vers devaient être lus d'une traite et qu'une fois lus ils contenaient tout ce qui était nécessaire pour traiter les problèmes de gnomons par la suite.

Le paradoxe quant aux connaissances requises pour lire un commentaire de vers donné pourrait être levé si l'on émet l'hypothèse suivante : la lecture était thématique. Ceci est suggéré par le fait qu'autant que possible un commentaire de vers se suffit à lui-même – quitte à indiquer au lecteur où, ailleurs dans le commentaire, il pourra préciser tel point. Le fait que le commentaire puisse être lu de cette manière, serait également souligné par les citations sans références : celles-ci sont extraites de leur contexte originel (nous ne savons pas d'où elles proviennent), mais arrivent avec à-propos au cours d'une discussion.

Nous pouvons donc supposer que le commentaire n'était pas lu de la première feuille de palmier à la dernière. Pour comprendre un commentaire de vers donné, le lecteur se livrait peut-être à un va-et-vient entre divers commentaires de vers. D'autre part, le commentaire était peut-être consulté, avec d'autres commentaires, pour l'étude d'un thème précis.

La concision des vers du traité et les jeux par les mots qu'ils emploient sont souvent interprétés comme des caractères mnémotechniques de ces derniers. Aucune indication dans le commentaire ne laisse deviner que ces vers étaient appris par cœur. Cela semble néanmoins plausible, au vu de

la gymnastique intellectuelle requise, dans le cas contraire, pour la lecture mot-à-mot des gloses grammaticales et syntaxiques.

Ayant mis en évidence ce que nous ignorons de l'usage du commentaire en tant que texte écrit et proposé des hypothèses quant à la manière dont il était lu, nous allons à présent nous pencher sur le texte lui-même. Nous examinerons tout d'abord les caractères attribués au traité par le commentateur.

1.2 Fabriquer des *sūtras*

1 Définitions et procédures : le genre des vers

Si l'on met de c^zté la prière initiale, les vers qui forment le second chapitre de l'*Āryabhaṭīya* sont de deux types : soit ils donnent des procédures, soit ils énoncent des définitions. Par exemple, le vers 3 est une définition (p. 47, ligne 17; p. 50, ligne 15) :

*vargaḥ samacaturaśraḥ phalaṃ ca sadṛśadvayasya saṃvargaḥ|
sadṛśatrayasaṃvargo ghanas tathā dvādaśāsriḥ syāt||*

Un carré est un équi-quadrilatère ainsi que le fruit qui est le produit des deux mêmes|

Un cube devrait être le produit des trois mêmes ainsi qu'un <solide> à douze bords||

Mais le vers 4 est une procédure (p. 52; lignes 3-4) :

*bhāgaṃ hared avargān nityaṃ dvi-guṇena vargamūlena|
vargād varge śuddhe labdhaṃ sthānāntare mūlam||*

On doit diviser, constamment, <la place> non-carrée par deux fois la racine carrée|

Lorsque le carré a été soustrait de <la place> carrée, le quotient est la racine dans une place différente||

Certains vers peuvent être interprétés comme relevant des deux à la fois. Par exemple le vers 2 commence par fixer les noms des nombres jusqu'à 10^9 , puis donne une règle concernant la notation positionnelle décimale (p. 46, lignes 6-9) :

*ekaṃ ca daśa ca śataṃ ca sahasraṃ tvayutanīyute tathā prayutam|
koṭyārbudaṃ ca vṛndaṃ sthānāt sthānaṃ daśaguṇaṃ syāt||*

Ab.2.2. Un et dix et cent et mille et dix mille et cent mille, puis un million|
 Dix millions, cent millions et mille millions. Une place doit être dix fois la place ⟨qui la précède immédiatement⟩ ||

La première moitié du vers 9 est un vers qui se prête à de nombreuses interprétations sous ce rapport (p. 63, lignes 4-5) :

sarveṣāṃ kṣetrāṇāṃ prasādhya pārśve phalaṃ tadabhyāsaḥ|

Pour tous les champs, lorsqu'on a acquis les deux c²tés, l'aire est leur produit |

Elle est interprétée par le commentateur comme étant l'indication succincte d'une méthode générale pour trouver l'aire de toute figure plane. Elle donnerait en particulier la manière de calculer l'aire d'un rectangle. Mais elle peut aussi servir à vérifier des règles déjà connues. Elle pourrait d'une manière plus générale être aussi une caractérisation de l'essence d'une aire plane : ce qui en dernier lieu peut se reporter à un rectangle de même aire⁹.

Environ 87% (29 sur 33) des vers du deuxième chapitre de l'*Āryabhaṭīya* ont une teneur abstraite –ils concernent des objets mathématiques tels que des figures géométriques ou des nombres. Le vers 13 évoque des instruments. Le vers 25 porte sur des calculs d'intérêt et le vers 31 est un vers d'astronomie mathématique. Il se peut que ces deux derniers vers aient eux aussi été considérés comme faisant partie des mathématiques de manière abstraite. Nous pourrions être dans un cas comparable à celui des trois vers qui portent sur ■les ombres■ (*chāyā*) des gnomons. Ceux-ci appartiennent à un sujet habituel des mathématiques¹⁰.

La plupart des vers traitent de cas aussi généraux que possible. Ceci est souligné par le commentaire, dont l'un des devoirs consiste à distinguer les différents cas particuliers auxquels une procédure peut s'appliquer. Nous aurons l'occasion de souligner cet aspect de la rédaction des *sūtras*, en examinant les lectures que Bhāskara en fait.

2 L'ellipse : concision et ambivalence

Comme nous l'avons indiqué dans notre introduction, les vers de l'*Āryabhaṭīya* sont elliptiques, ce qui les rend incompréhensibles pour un lecteur contemporain. Les difficultés de lecture que nous pouvons avoir proviennent de leur

⁹Nous reviendrons sur l'interprétation de ce vers à deux reprises dans le chapitre 2.

¹⁰Voir la section 2.1

concision d'une part et des jeux par les mots qui prêtent à confusion d'autre part.

2.a Concision

La concision des vers d'Āryabhaṭa est caractérisée par le fait que le contexte dans lequel une procédure est appliquée n'est que rarement explicité. Ces vers n'énoncent pas clairement quelles sont les données de départ d'une procédure. Ils omettent parfois de préciser ce qu'une procédure produit. En bref, les énoncés des problèmes que les procédures résolvent ne sont pas explicites. Le style propre aux aphorismes en sanskrit élimine souvent les sujets ou les verbes. Ceux-ci doivent alors être suppléés. Nous ne donnerons pas d'exemples ici de cette concision sur laquelle nous reviendrons à de multiples reprises.

2.b Ambivalence

Des jeux par les mots donnent au vers son style qui peut sembler mnémotechnique. Examinons, à titre d'exemple, la procédure donnée pour l'extraction de la racine carrée dans le vers 4. Si nous lisons ce vers, sans suppléer les informations fournies par le commentaire de Bhāskara, cela donne (p. 52; lignes 3-4) :

*bhāgaṃ hared avargān nityaṃ dviguṇena vargamūlena|
vargād varge śuddhe labdhaṃ sthānāntare mūlam||*

On doit diviser, constamment, le non-carré par deux fois la racine carrée|

Lorsque le carré a été soustrait du carré, le quotient est la racine dans une place différente||

Ce vers est concis car il ne donne ni le point de départ de la procédure, ni dans quelles conditions elle s'effectue. En fait, nous y reviendrons, il ne donne que le cœur d'un processus itératif. Il produit une ambivalence parce que le nom de *varga* est attribué à la fois à un nombre carré et à la place ■carrée■ où un chiffre pourrait être écrit (une place correspondant à une puissance paire/carrée de 10 dans la numération positionnelle décimale).

Dans le vers 6 le mot *ghana*, est utilisé une fois. Il désigne à la fois une figure solide et signifie volume. Ne pouvant rendre compte de cette ambiguïté du sanskrit, nous avons suppléé le mot ■volume■ entre ⟨⟩ (p. 58; ligne 3) :

ūrdhvabhujātatsaṃvargārdhaṃ sa ghaṇaḥ ṣaḍaśrir iti||

Ab.2.6.cd La moitié du produit de cela avec le cZté érigé, ceci est <le volume (*ghana*) du solide (*ghana*) nommé ■à six bords”||

Nous avons vu comment les vers du traité peuvent être qualifiés d’abstrait, généraux et elliptiques. Ils sont concis et souvent ambivalents. Les noms qui leur sont attribués dans le commentaire abondent en ce sens.

3 Noms des vers du traité dans le commentaire

Les vers du traité sont affublés de divers noms. Le plus courant est *sūtra*, le terme habituel pour désigner des vers concis. Nous l’avons traduit par ■règle■ (■rule■ en anglais). Cette traduction nous permet de le distinguer des termes évoquant uniquement leur aspect métrique : *kārikā* (la règle versifiée) et *āryā* (le nom du vers dans lequel le *sūtra* est rédigé)¹¹.

Un autre terme, *lakṣana-sūtra*, précise le style de règle utilisé par Āryabhaṭa. Nous l’avons littéralement traduit par l’expression : ■caractérisation rule■ (règle caractérisante)¹². Une règle est caractérisante lorsqu’elle transmet indirectement un savoir. Elle est générale et regroupe de multiples cas de figures, dont certains sont insoup■onnés. Les applications les mettront en évidence. La connaissance qu’elle transmet nécessite donc un détour par ses applications.

En revanche, l’illustration qui s’oppose traditionnellement à la caractérisation permet la connaissance immédiate d’une règle. Le terme utilisé pour la connaissance directe est *pratyakṣa*¹³. Ce mot signifie également ■ce qui est visible■. De même que l’expression ■règle caractérisante■ peut paraître étrange, le terme *pratyakṣa*, utilisé à trois reprises dans la partie du commentaire que nous avons examinée, apparaît dans un contexte inattendu.

Dans un cas ce mot peut se comprendre étymologiquement dans le sens de ■visible■ (p. 58; lignes 8-9) :

tad yathā-ūrdhvabhujā hi nāma kṣetramadhya ucchrāya iti pratyakṣam/

¹¹Voir, pour plus de détails, la section consacrée aux vers dans l’introduction de la traduction.

¹²Le paragraphe qui suit résulte d’une communication personnelle de P.-S. Filliozat. Qu’il en soit remercié ici. Je ne citerai pas d’autres sources, n’ayant pas trouvé de littérature secondaire sur le sujet. Nous verrons par la suite que la lecture des *sūtras* par Bhāskara confirme cette interprétation.

¹³Ma connaissance de la philosophie indienne est malheureusement limitée : il semble que ce soit un terme courant de toutes les théories de la connaissance. Dans ce contexte il prendrait alors le sens de ■perception■.

Que ce qui porte le nom de ■cŽté érigé■ soit une hauteur au milieu d'un champ est directement connaissable/visible.

Ici nous pouvons comprendre que le fait de voir le ■cŽté érigé■ (*ūrdhva-bhujā*) nous le fait connaître immédiatement. Ou peut-être que puisque nous savons ce qu'est un ■cŽté érigé■, nous pouvons nous imaginer immédiatement dans quelle figure il s'inscrit. On ne sait si ces deux mots, ■cŽté érigé■, donnent à voir par eux-même où se situe la hauteur, ou s'ils décrivent une figure que l'on a sous les yeux¹⁴.

Le second exemple est plus dérangeant. Dans le commentaire du vers 10, une objection est mise en scène pour, en allant vite, défendre la valeur de $\sqrt{10}$ pour π (p. 72, lignes 16-17) :

*atha manyate pratyakṣeṇaiva pramāyamāṇo rūpaviṣkambakṣetrasya
paridhir daśakaraṇya iti/*

Maintenant, certains pensent que la circonférence d'un champ ayant un diamètre-unité, mesuré par une perception directe (*pratyakṣa*), 〈vaut〉 les *karaṇīs* de dix.

En quoi consiste cette mesure par perception directe ? Elle ne correspond pas à notre expression ■à vue d'œil■ puisqu'elle ne produit pas une mesure approximative. Nous n'en savons rien. Une occurrence similaire de ce terme, alors que Bhāskara met en scène une fausse interprétation, se trouve dans le commentaire du vers 16 (p. 96; lignes 4-5). Notre compréhension de ce terme est rendue d'autant plus difficile que la phrase dans laquelle il apparaît est obscure. Mais, dans ce cas aussi, il s'agit de la longueur d'une ombre ■ qui nous est connue par perception directe■ (*chāyā (...) pratyakṣam asmābhir upalabdā*).

Ces trois occurrences du terme de ■connaissance directe■ ne nous permettent pas de saisir une dimension implicite de la théorie de la connaissance de Bhāskara (ou de celle qu'il prête à ses objecteurs).

Retenons de l'analyse du terme *lakṣaṇa-sūtra*, que la règle, aussi générale que possible, ne transmet pas une connaissance dont l'acquisition est immédiate. Le savoir qu'elle contient s'obtient par des détours, et nécessite ainsi une élaboration. L'illustration (*uddeśana*) en revanche est un mode de connaissance directe (*pratyakṣa*). Les modalités de cette connaissance directe, notamment en ce qui concerne l'évaluation d'une mesure, nous sont énigmatiques.

¹⁴Cet aspect de la définition d'un segment de figure géométrique en rapport avec un diagramme sera développé dans le chapitre 3.

Un autre terme, qui caractérise la nature d'un morceau de vers, est donné dans le commentaire du vers consacré à la Règle de Trois (Ab.2.26) : *paribhāṣā*. Selon Louis Renou cette expression indique une règle interprétative¹⁵ :

(ce sont des) axiomes qui doivent être présents à l'esprit de l'usager en sorte qu'on puisse en suppléer le contenu (d'un *sūtra*) à l'endroit précis qu'il convient

Il s'agit donc d'une règle qui sert à l'interprétation d'une règle. Nous avons donc traduit ce mot par l'expression ■meta-rule■ (méta-règle).

Le vers 26 énonce la Règle de Trois. Un terme d'apparence anodine, ■maintenant■ (*atha*) y est employé. Bhāskara, en glosant ce mot, l'interprète comme une méta-règle (*paribhāṣā*). Le passage où le commentateur explique ce qu'il entend par là, est quelque peu obscur (p. 116, lignes 5-8) :

*ucyate- paribhāṣā/ sā ca lokavyavahārāt prativīṣayaṃ bhinneti
lokaprayogād eva pradarsītā/ anyathā hi prativīṣayaṃ bhinnāḥ
paribhāṣāḥ viśayās ca saṃkhyātītāḥ/ tenopadeṣṭum aśeṣataḥ sā
na śakyate/ ataḥ athaśabdena lokaprasiddhāṃ paribhāṣāṃ pratipādayati/*

Ceci est dit-⟨Le mot ■maintenant■ indique⟩ une méta-règle. Et puisque cette ⟨méta-règle⟩ est différente, dans chaque situation, à cause de la pratique dans le monde, elle est expliquée à partir de l'usage ⟨qui est faite de la Règle de Trois⟩ dans le monde. Car sinon, une méta-règle différente ⟨serait nécessaire⟩ dans chaque situation et les situations sont innombrables. Ainsi cette ⟨méta-règle⟩ ne peut être entièrement spécifiée. Donc, au moyen du mot ■maintenant■ il (Āryabhaṭa) met en avant la méta-règle telle qu'elle est (i.e. telle qu'elle peut être ?) établie dans le monde.

Bhāskara préciserait, dans ce paragraphe, que la Règle de Trois doit être interprétée de manière spécifique, suivant la situation dans laquelle on se trouve. Comme chaque situation est variable et demande une application appropriée, Āryabhaṭa ne peut préciser comment, dans chaque cas, une Règle de Trois est mise en œuvre. En indiquant la particularité de la situation, le terme ■maintenant■ nous signifierait en même temps qu'il faut appliquer de manière spécifique la Règle de Trois. Le terme ■maintenant■ contiendrait

¹⁵[§15; Renou 1963]

donc en germe un principe d'application de la règle dans laquelle ce mot se trouve. Ce raisonnement expliquerait pourquoi ce mot est qualifié de ■méta-règle■ par le commentateur.

On voit par cette interprétation du terme ■maintenant■ comment la généralité des règles a pour fonction d'englober autant que possible toutes les situations où celles-ci pourraient être appliquées.

Retenons de ces termes, ce qu'ils nous disent sur le caractère indirect de la connaissance transmise par les vers du traité et sur la multiplicité des applications que l'on peut tirer de ces derniers. Si ces noms nous livrent des indications implicites sur le statut conféré par le commentateur aux vers du traité, d'autres passages nous montrent explicitement une réflexion sur leur nature.

4 Remarques glanées dans le commentaire de Bhāskara

1. Un *kārikā* n'exprime que l'essentiel

Alors que le vers 11 décrit un cadre géométrique dans lequel des demi-cordes d'arc peuvent être produites, Bhāskara, quant à lui, développe une procédure détaillée effectuée dans un diagramme précis. Il ajoute (p.78; lignes 8-11) :

*asyāṃ kārikāyāṃ jyotpattivastumātram eva pratipāditam ācāryeṇa,
[karaṇam] tu na pratipāditam, pradeśāntaraprasiddhatvāt karaṇasya/
athavā jyotpattau yatkarāṇaṃ tatsarvaṃ chedyakaviṣayaṃ,
chedyakam ca vyākhyānagamyam iti [na] pratipāditam/*

Dans ce vers (*kārikā*), seulement l'essence de la production des cordes a été mise en avant par l'*ācārya* mais [la procédure] n'a pas été donnée, parce qu'elle a été établie ailleurs.

Ou alors, toutes les procédures ⟨utilisées⟩ dans la production des cordes le sont dans le cadre d'un diagramme, et un diagramme ⟨n'⟩est intelligible ⟨qu'⟩ avec une explication/un commentaire (*vyākhyāna*). Ainsi, cela n'a pas été mis en avant ⟨par Āryabhaṭa dans l'*Āryabhaṭīya*⟩.

Dans ce passage divers lieux de transmission du savoir sont distingués, chacun ayant sa propre fonction.

Ainsi, la procédure, selon le commentateur, est établie ■dans un autre endroit■ (*pradeśa-antara*). S'agit-il d'un autre traité ? Ou cette af-

firmation indique-t-elle que l'établissement d'une règle n'est pas faite dans une règle (mais dans un commentaire) ?

De même apparaît ici un objet qui, par sa nature, est à la frontière d'un texte discursif : le diagramme. Il est clairement explicité que le diagramme n'appartient pas au traité mais que celui-ci est également un objet à partir duquel une transmission de savoir peut avoir lieu¹⁶.

Par ailleurs, Bhāskara affirme qu'une règle peut ne donner que l'essentiel d'une idée. Le rôle du commentateur serait d'expliciter les intentions lues dans les vers d'Āryabhaṭa. L'ambiguïté du sens à attribuer au terme *vyākhyāna* dans ce paragraphe est révélatrice. Ce mot signifie à la fois ■explication■ et ■commentaire■. Il est utilisé ailleurs par Bhāskara pour désigner un commentaire (c'est le terme qu'il utilise au début du chapitre pour caractériser le texte qu'il écrit). Bhāskara a recours à d'autres termes pour désigner un commentaire, tel celui du titre du texte : *bhāṣya*. Mais la fonction du commentaire est explicitée par l'ambiguïté de son sens dans ce contexte : un commentaire (*vyākhyāna*) doit donner une explication (*vyākhyāna*) de ce que le vers ne fait que dire succinctement.

La seconde moitié du vers 17, dont l'application à des problèmes traditionnels, tel le ■bambou cassé■ ou ■la grue et le poisson■, nécessite une élaboration supplémentaire par Bhāskara, fait l'objet d'une remarque similaire (p. 98; ligne 14) :

evaṃ gaṇitaṃ bījamātram upadiṣṭam/

De cette manière, seule la graine du calcul a été indiquée
(par Āryabhaṭa).

La même métaphore est reprise par Bhāskara dans le commentaire déjà cité du vers 26 et de la première moitié du vers 27. Il y explique que la Règle de Trois est la *graine* à partir de laquelle découlent toutes les autres règles de proportion. Précisément, le commentaire de Bhāskara qualifie le vers donné par Āryabhaṭa de cette manière (p. 116; lignes 14-16) :

*anupātabījamātram evācāryeṇopadiṣṭam; tenānupātabījena
sarvam eva pañcarāśyādikaṃ siddhayati*

¹⁶Nous y reviendrons dans le dernier chapitre.

Seulement la graine (*bīja*) des proportions a été indiquée par le maître; au moyen de cette graine des proportions, la Règle de Cinq, etc., tout en vérité est établi.

Ici, donc, l'ellipse du vers d'Āryabhaṭa ne concerne pas seulement la règle énoncée. Elle s'étend au delà vers le contenu de toute une sous-discipline des mathématiques, les proportions. La Règle de Trois est elle-même la forme elliptique de toutes les Règles à $2n + 1$ quantités¹⁷.

Ainsi, d'après le commentateur, les vers d'Āryabhaṭa n'indiquent que l'essentiel. Cette ellipse, qui choisit de n'exprimer que ce qui est fondamental, existe à la fois dans la forme et dans le fond. Le commentaire a pour but d'expliciter ce qui reste implicite dans le vers. Il doit également en déduire toutes les conséquences possibles.

2. Un *sūtra* ne doit pas à la fois contenir une proposition caractérisante et une illustration.

Bhāskara propose plusieurs interprétations du vers 2. L'une d'elle comprend que le vers donne dans une première partie une liste de noms : ceux des places de la numération positionnelle décimale. La seconde partie du vers donnerait une procédure par laquelle les valeurs exprimées par ces noms sont obtenues. La première partie du vers serait alors une illustration de la procédure donnée dans la seconde (p. 47; lignes 1-4) :

*sthānāt sthānaṃ daśaguṇaṃ syād ity etal lakṣaṇam/ ekaādīni
sthānāny asya lakṣaṇasya udāhṛtāni/na etad asti/ na hi sūtrakārāḥ
saṃkṣepavivakṣavo lakṣaṇam udāharaṇaṃ brūyuh/*

■Une place doit être dix fois la place (qui la précède immédiatement)■, ceci est une caractérisation (*lakṣaṇa*). Les (noms des) places commen■ant avec un etc. sont des illustrations (*udāhṛta*) de cette caractérisation.

⟨Objection⟩

Il n'en est pas ainsi. Car ceux qui font les *sūtras* en souhaitant la concision ne doivent pas dire ⟨ensemble⟩ des caractérisations et des illustrations.

¹⁷Nous renvoyons à l'annexe de BAB.2.26-27 pour une explication mathématique de cette affirmation.

Nous pouvons voir exprimer dans ce passage l'opposition que nous avons décrite plus haut entre règle caractérisante et illustration. Ici, Bhāskara fait une affirmation, à la suite de laquelle il met en scène une objection. Cette objection donne une règle de construction des vers. Il n'est pas affirmé qu'un traité ne doit pas donner d'illustrations (nous connaissons des traités plus tardifs qui en comportent). Toutefois, le texte d'Āryabhaṭa quant à lui n'en contiendrait pas en dehors de celui décrit ici dans le vers 2. Si notre interprétation des différentes mises en scène faites dans ce passage est correcte (car à vrai dire il présente des difficultés de compréhension), alors nous pouvons constater que cette règle de composition n'est pas considérée strictement par notre commentateur. Il la place dans une objection; puis, en réponse à celle-ci, développe un autre type d'argumentation que nous n'avons pas retranscrit¹⁸.

Ainsi, puisque Bhāskara pourrait accepter qu'une règle caractérisante comporte une illustration, mais qu'il met en scène un objecteur qui ne l'accepte pas, nous observons qu'apparemment les règles de construction des vers varient suivant les interlocuteurs. Dans la suite, Bhāskara semble alors développer un arsenal argumentatif qui puisse convenir quel que soit le cas de figure.

3. Une règle peut être utilisée pour un but autre que celui qu'elle professe

La première partie du vers 9, nous l'avons vu, peut être interprétée de diverses manières : elle est une règle pour calculer des aires de figures géométriques diverses; elle peut également être comprise comme un mode de vérification de ces aires. Bhāskara met en scène une objection (p. 67; lignes 9-13) :

*atha katham ekenaiva yatnena phalānayanam pratyayakaraṇam
ca prasādhyate ? athedaṃ pratyayakaraṇārtham prakṛtam,
sa katham phalānayanāya bhavati ? atha phalānayanārtham,
katham pratyayakaraṇāya ? naiṣa doṣaḥ/ anyārtham prakṛtam
anyārtham sādhakam dṛṣṭam/ tad yathā- 'śālyarthaṃ kulyāḥ
prañīyante/ tābhyaś ca pāñīyam pīyate, upasprśyate ca/'
[aṣṭādhyāyī, 1.1.22, pātañjalabhāṣyam] evam ihāpi/*

⟨Question⟩

¹⁸Nous renvoyons à la traduction de ce commentaire de vers, pour la suite de ce passage.

Mais comment le calcul de l'aire et la vérification peuvent-
être acquis au moyen d'un seul effort ? En effet, si cette
(règle), à l'origine, a été faite afin (d'obtenir) une vérifica-
tion, comment peut-elle être (utilisée) pour le calcul de l'aire
? Et, (inversement, si cette règle, à l'origine, a été faite) afin
de calculer l'aire, comment peut-(elle être utilisée) pour une
vérification ?

Ceci n'est pas faux. Il a été observé que ce qui à l'origine
a été fabriqué dans un but est l'instrument d'un autre but.
Comme dans (le cas) suivant–

Des canaux sont construits pour des champs de riz.

De ceux-ci, l'eau est bue et (sert) au bain.

Aṣṭādhyāyī, 1. 1. 22, *Pātañjala-bhāṣyam*.

Il en est ainsi dans ce cas également.

On peut voir ici s'exprimer une partie des propriétés d'une règle carac-
térisante : il n'y a pas de limites à la manière dont on peut la détourner,
la rendre productive à des fins insoupçonnées au départ. La connais-
sance que nous avons de la règle caractérisante n'est pas immédiate
justement parce qu'elle englobe des situations insoupçonnées.

4. Une procédure produisant le même résultat qu'une autre, n'a d'intérêt que si elle est plus facile et/ou indépendante de la première

Le vers 12 concerne la production de différences de sinus. Le commen-
taire du vers 11 donne, quant à lui, une méthode géométrique pour
dériver des tables de sinus – on peut donc déduire des différences de
sinus à partir de ces tables. Dans l'interprétation que le commentateur
donne du vers 12 et qu'il attribue à Prabhākara, la procédure semble
plus complexe arithmétiquement que celle esquissée dans le vers 11.
Elle s'appuie sur cette dernière car elle requiert la connaissance de
la valeur de deux sinus au préalable. Bhāskara fait donc la liste de
prescriptions suivante (p. 84; lignes 13-18) :

tac cāyuktam anarthakam apratyākhyāya vyākhyānam kar-
tum/ katham anarthakam ? atra gaṇitaśāstre laghūpāyapradarśanārtham
upāyāntarapradarśanārtham vā sūtrāntaram ārabhyate/ atrānyatara
gandho 'pi nāsti/ katham ? pūrvāryābhihitachedyakavidhinā
nirjñātābhyām prathamadvitīyacāpajyārdhābhyām idaṃ karma
kriyate/ tasmin dvisūtrāyatvāt karmaṇo lāghavam nāsti/ upāyāntaratā

ca [na]pūrvasūtrāśrayatvāt/ etasmāt nārtho'neṇa sūtreṇa/

Il est impropre (et) inutile de donner une interprétation/explication sans fournir la controverse (*pratyākhyā*) (dont elle est issue).

Pourquoi (cette interprétation) est-elle inutile ?

Dans ce traité de mathématiques, une règle différente est mise en avant soit pour enseigner une méthode différente soit pour enseigner une méthode plus facile. Dans ce cas, il n'y a de trace ni de l'une ni de l'autre.

Pourquoi ?

Ce calcul se fait avec les premières et secondes demi-cordes d'arcs unités, qui sont connues avec certitude au moyen de la méthode diagrammatique citée dans l'*ārya* précédent (Ab.2.11). Dans ce cas (Ab.2.12) la méthode n'est pas facile parce qu'elle dépend de deux règles. Et ce n'est pas une méthode différente parce qu'elle dépend de la précédente. Ainsi, cette règle est inutile.

La première phrase formule un interdit très fort en utilisant le verbe *pratyākhyā*. Ensuite deux règles de rédaction de *sūtras* sont énoncées. Elles portent non pas sur leur forme mais sur leur sens : une nouvelle procédure ne doit être donnée que dans le cas où elle serait plus facile ou indépendante d'une autre produisant le même résultat¹⁹.

La facilité des règles d'application est donc une valeur. L'indépendance de deux procédures donnant le même résultat, également. Cette indépendance, nous le verrons, permet la vérification de l'une ou l'autre règle.

5. Des doutes peuvent naître d'une règle, mais alors une interprétation doit être donnée qui leur réponde

Dans son commentaire du vers 10, Bhāskara – ce qui peut paraître curieux si l'on pense qu'il met lui-même en scène ces dialogues – soulève ce qui ressemble à une objection et répond ainsi (p. 72; lignes 4-5) :

¹⁹Il est délicat de déterminer si Bhāskara critique dans ce passage l'interprétation que donne Prabhākara du vers ou si cette critique vise le vers d'Āryabhaṭa lui-même. En effet, il ne propose pas d'autre interprétation de celui-ci. Toutefois, Bhāskara à d'autres reprises critique les interprétations de Prabhākara. Il se peut donc qu'il soit encore visé ici.

*naiṣa doṣaḥ, sandehamātram idam/ sarvasandehēṣu vedam
avatiṣṭhate ■vyākhyānato viśeṣapratipattiḥ [nahi sandehād alakṣaṇam]■
[aṣṭādhyāyī, śivasūtram 6, pātañjalabhāṣyam] iti/*

Il n’y a pas d’erreur. Il s’agit seulement d’un doute. ⟨Ce⟩
savoir existe au sein de tous les doutes :

Une règle spécifique naît d’une interprétation [ja-
mais une ⟨règle⟩ n’est invalidée par un doute]. Śiva-
sūtra 6, *Pātañjala-bhāṣyam*;

Au vu de cette remarque il semble naturel que la proposition énoncée
par un vers du traité provoque des débats. Ceux-ci s’entendent dans
l’expression des doutes et les interprétations qu’elles doivent susciter.
La prescription qu’énonce ici Bhāskara souligne de nouveau comment
un vers est con■u avec la nécessité d’un commentaire. Cet accent prend
d’autant plus de force que Bhāskara cite le commentaire de Patañjali
à l’*Aṣṭādhyāyī* de Paṇini, le commentaire par excellence de la tradition
savante indienne.

Nous voyons également se dessiner ici une classification des objections
émises à l’encontre d’une règle, et les réponses qui doivent les accom-
pagner. Là où un doute est émis, une interprétation devra lever le
doute. Nous verrons que là où la règle sera critiquée, une réfutation
(*parihāra*) devra être mise en œuvre²⁰.

6. Est-ce qu’un vers ne devrait donner que des nombres pre- miers entre-eux ?

Une telle question apparaît dans le commentaire du vers 10. Ce dernier
donne une valeur approchée du rapport d’un diamètre d’un cercle par-
ticulier à sa circonférence. Les deux nombres exprimés dans le vers ne
sont pas réduits (p. 75; lignes 11-17) :

*athaitau mahāntau rāśī kasmād ucyete, na punar apavar-
titāḥ evocyete, ācāryaś ca lāghavikaḥ, na tasya lāghavikasya
mahārāśyabhīdhānaṃ yujyate/ idam ekam ācāryasya mṛśyatām/
athavā ayutadvayaviṣkambham ity alpairakṣarair ucyate/ na*

²⁰Voir à ce sujet la section 1.8.

*tathāpavartitaviṣkambhābhīdhāne alpākṣaratā/ athavā manyate-
mahāparidhiviṣkambhābhīdhāne mahāviṣkambhāsu jyāsu al-
papariagrahāpacayeṣu na phalaviśeṣaḥ alpāntaratvād iti*

⟨Objection⟩

Maintenant, pourquoi ces deux grandes quantités (20000 and 62832) sont dites et non pas leurs formes réduites. Le maître recherche la concision (*lāghavika*), pour un tel défenseur de la concision il n'est pas approprié de dire de si grandes quantités.

⟨Réponse⟩

Excuse cette fois seulement le maître.

Ou bien ■un diamètre de deux *ayutas* est exprimé au moyen d'un petit nombre de lettres. En revanche, lorsqu'on dit le diamètre réduit, il n'a pas l'état d'avoir un petit nombre de lettres.

Ou bien, d'autres peuvent considérer-■Lorsque sont dites de grandes circonférences et de grands diamètres, lorsque les cordes des grands diamètres ont de petits accroissements ou diminutions, il n'y a pas de différence dans le résultat parce que la différence est petite■.

Notons un caractère du commentaire présent dans cette citation : il donne plusieurs arguments, qui se complètent, en réponse à une objection mise en scène. Le commentaire de Bhāskara, dans une certaine mesure, semble en effet avoir été écrit pour répondre à toutes sortes d'objections et de querelles d'écoles suscitées par l'*Āryabhaṭṭya*. Ajoutons également qu'il essaye de rectifier ce qu'il considère comme étant une mauvaise interprétation de certains des vers. Dans le cas du passage que nous examinons, cette multiplicité d'arguments laisse deviner plusieurs règles de rédaction lorsqu'il s'agit d'exprimer des proportions en nombres. Nous allons à présent essayer de les expliciter.

La première réponse donnée par Bhāskara est étonnante car en principe un commentaire défend toujours le traité qu'il commente. Bhāskara admettrait donc qu'il est préférable que deux nombres soient réduits avant d'être énoncés. Par exemple, la procédure du pulvérisateur, décrite dans son long commentaire des vers 32-33, commence en général

par une telle réduction. La concision dont parle l'objection ici ne concerne pas les mots mais les nombres eux-mêmes.

Pourtant, la seconde réponse proposée met l'accent sur la forme du vers. De son point de vue la concision de l'expression est plus importante que la ■concision/simplicité des nombres■.

La troisième réponse, quant à elle, est une justification toute mathématique : plus les nombres seront grands, plus l'erreur dans l'approximation dont ils pourraient faire l'objet sera négligeable lorsqu'elle est petite. Cette propriété est énoncée ici, dans un cas particulier, concernant le rapport d'une corde à l'arc qu'elle sous-tend.

Nous avons ainsi vu chaque réponse exhiber des règles de priorité différentes pour la rédaction des vers, en ce qui concerne l'expression des nombres dans un texte. Ces règles de priorité oscillent entre différents niveaux d'évaluation du vers. Soit le niveau purement formel du nombre de mots est prioritaire, soit c'est son contenu qui prime. Dans ce contenu, de nouveau on peut distinguer un niveau formel, celui de l'expression de la propriété (la simplicité des nombres donnés) soit du contenu de la propriété (la qualité de l'erreur dans l'approximation). Quoi qu'il en soit, ces problèmes propres à la rédaction d'un vers mathématique, loin d'aboutir à l'établissement d'un canon, d'un ensemble de règles propres à la rédaction, semblent sciemment irrésolus. Diverses valeurs, à priori concurrentes, sont données. Elles semblent fournies dans l'idée d'un débat où seraient distinguées les points de vue de chaque intervenant. Celui qui serait en position de défendre un vers devrait savoir varier ses arguments en fonction des règles implicites qui ont l'approbation de l'objecteur.

5 Conclusion

Un premier survol des vers nous a appris qu'ils formulent soit des procédures soit des définitions. Ils sont abstraits et aussi généraux que possible. Le commentaire développe des réflexions sur le traité en tant que texte. Ceux-ci nous laissent entrevoir de quelle manière les *sūtras* sont per■us par Bhāskara. Nous pouvons retenir les idées suivantes des propositions énoncées par le commentateur : un vers est concis (*laghu*); il n'exprime que l'essentiel; il n'énonce que la forme elliptique d'une règle; l'usage du terme *paribhāṣā* nous a montré qu'une règle peut indiquer parfois comment elle-même s'interprète.

Globalement les remarques de Bhāskara semblent avoir pour objectif de souligner toutes les manières dont une règle caractérisante peut être détournée afin de révéler un sens, un savoir qui n'est pas directement apparent. En soulignant qu'un traité ne donne pas toutes les explications nécessaires à sa compréhension, l'existence d'un commentaire est justifié en filigrane. Ce dernier doit expliciter la règle qu'un vers énonce et les applications qui peuvent en être déduites.

Une analyse plus fine nous a montré qu'il n'existait pas de règle stricte de rédaction des vers mathématiques. Une priorité peut-être donnée à une concision de forme aux dépens de la facilité ou de la pertinence du fond. Mais le contraire semble également acceptable. Il est frappant, de constater qu'il ne semble pas y avoir de modèle figé et fixe du traité : tout se passe comme si, face à une objection de forme, diverses manières d'envisager la rédaction du vers pouvaient exister. L'important étant de disposer d'un arsenal argumentatif qui puisse répondre à diverses objections. Le commentaire de Bhāskara apparaît de cette manière non seulement comme explicatif mais également défensif : il justifie et défend son interprétation des vers d'Āryabhaṭa et la justesse tant formelle que mathématique des règles que ceux-ci formulent. On pourra remarquer qu'une question semble escamotée : celle de savoir ce qui dans l'interprétation est intentionnellement contenu, selon le commentateur, dans le *sūtra* et quelle part provient du commentateur.

Nous allons donc à présent nous tourner vers le commentaire, afin d'examiner comment sont mises en œuvre les différentes fonctions que Bhāskara lui assigne.

1.3 La structure du commentaire

Un commentaire est par définition un texte composite car il contient le texte commenté et son exégèse. Dès la première page de la traduction d'autres éléments sautent également aux yeux : le chapitre mathématique commence par un hommage à Śiva puis est rapidement suivi d'une citation de vers qui n'appartient pas au traité. En effet, le commentaire de Bhāskara est composé d'éléments extrêmement variés : des citations du traité, d'autres extérieures à celui-ci, des mises en scènes de dialogues, des analyses grammaticales, des problèmes versifiés résolus, etc. Notre objectif sera de comprendre comment ces éléments composites s'articulent de manière à produire un texte cohérent, dont la fonction est de faire comprendre et de justifier le traité qu'il commente. Nous décrirons donc la structure du commentaire pour, dans les sections suivantes, nous atteler plus avant à une analyse de la manière dont

le commentaire procède.

Pour chaque commentaire de vers, Bhāskara suit toujours un même plan. Il commence par une petite phrase introductive, puis cite le/les vers qu'il va commenter. Cette citation est suivie d'un commentaire en deux parties : un commentaire général puis une suite d'exemples résolus.

1 Phrase introductive et citation du *sūtra*

Chaque vers commenté est introduit par une phrase. Celle-ci précise le sujet ou le thème traité. Par exemple (p. 115; lignes 28) :

trairāśīkapratipādanārtham adhyardhāryām āha-

Afin d'expliquer la Règle de Trois il a dit un *āryā* et demi-

Comme le montre l'exemple ci-dessus, le commentaire ne choisit pas forcément de commenter un seul vers. Il peut commenter séparément la moitié d'un vers, un ensemble formé d'un vers et demi (exemple) ou deux vers pris ensemble. Mais ce découpage suit toujours l'ordre du traité, qu'il ne désarticule pas. On peut ainsi voir dans ce découpage du traité, une première organisation de la lecture du texte et de son interprétation. En ce qui concerne la Règle de Trois, le commentaire regroupe l'ensemble du vers 26 accompagné de la première moitié du vers 27. Ceux-ci sont commentés ensemble. La première moitié du vers 27 est interprétée par Bhāskara comme une règle d'application de la Règle de Trois aux fractions. En fait, elle pourrait tout aussi bien se lire comme une règle concernant la multiplication et la division de fractions²¹.

Les vers sont ensuite cités. Ceux-ci sont parfois déformés par une longue tradition de commentateurs. Ainsi, les vers 9 et 10 du quatrième chapitre de l'*Āryabhaṭīya*, professent que la terre tourne sur elle-même tandis que les étoiles restent fixes. Cette affirmation, contraire aux textes cosmogoniques de l'hindouisme, fut à l'origine d'un débat virulent qui amena en fin de compte les commentateurs à changer le vers afin de lui donner le sens opposé²².

Le vers cité est ensuite glosé mot-à-mot. Il s'agit de la partie que nous avons nommée ■Commentaire général■. Bhāskara y donne des synonymes, substitue aux termes utilisés par le vers des équivalents plus explicites, analyse systématiquement tous les composés.

²¹Comparer l'interprétation qui en est faite dans le commentaire de Bhāskara à celle proposée par K.V. Sharma et K.S. Shukla [p. 71; Sharma-Shukla 1976].

²²Voir [Yano 1980] and [Bhattacharya 1991].

2 Le commentaire général

2.a Synonymes et mots substitués

On peut distinguer deux types de synonymes. Premièrement, ceux qui sont déclarés explicitement. Ils se situent dans une énumération close par l'expression : *iti paryāyāḥ* (■sont des synonymes■). Par exemple au début du commentaire de la première moitié du vers 6 :

bhujā bāhuḥ pāśvam iti paryāhāḥ

Bhujā (un nom féminin signifiant ■bras■), *bāhu* (un nom masculin signifiant ■bras■), *pāśva* (un nom neutre signifiant ■flanc■) sont synonymes.

Tous les synonymes ne sont pas donnés en fonction de leur genre (masculin, féminin, neutre), comme c'est le cas dans l'exemple cité. Ces synonymes explicites sont locaux : ils sont synonymes dans cette partie du vers, mais pas toujours dans un autre contexte. Ainsi le terme *bhujā* glosé ci-dessus a le sens général de ■côté■ d'une figure géométrique. Mais dans un triangle il désigne toujours un côté particulier, la base. Les deux termes *pāśva* et *bāhu* en revanche ne prennent jamais cette signification. Ils sont unis ici, dans leur sens commun, de côté d'une figure géométrique.

Deuxièmement, moins explicitement mais plus systématiquement des termes du vers sont substitués à d'autres dans le commentaire.

Les termes du vers sont parfois glosés par juxtaposition avant d'être employés de manière répétée dans le commentaire. De nombreux synonymes de mots clefs du vers sont ainsi donnés par Bhāskara. Ils apparaissent aussi dans les problèmes versifiés, où ils sont employés probablement pour convenir au mètre. Par exemple, le terme *karṇa* désigne techniquement en mathématique soit l'hypoténuse d'un triangle rectangle soit la diagonale d'un quadrilatère. En sanskrit courant il signifie ■oreille■. Des synonymes du mot oreille sont employés avec la signification technique de *karṇa* en mathématique.

Les termes alternatifs employés par Bhāskara n'éliminent pas toujours ceux employés par Āryabhaṭa. Un commentaire de vers peut employer ensemble les deux termes.

2.b Analyses des composés et discussions grammaticales

Les discussions grammaticales sont l'une des caractéristiques surprenantes du commentaire de Bhāskara pour un lecteur qui n'est pas familier des textes techniques en sanskrit. Essentiellement, ce sont des analyses de composés

ou bien des explicitations de cas des mots du vers²³. A titre d'exemple nous renvoyons au début du commentaire du vers 20, afin d'y souligner comment sont analysés un-par-un tous les composés qui forment le vers (p. 108; lignes 8-18).

A chacun d'eux est attribué un genre. Leur cas est élucidé, leur rapports syntaxiques avec les autres mots du vers est explicité. Par exemple, le composé *aṣṭa-uttara-guṇita* (multiplié par huit et la raison) est analysé comme un *tatpuruṣa* instrumental formé d'un sous-*dvandva*. Le rapport syntaxique (une coordination) qui lie *aṣṭa* (huit) et *uttara* (la raison) et celui qui lie ces deux mots à *guṇita* (multiplié-l'instrumental) est explicité. Bhāskara ensuite souligne que l'ensemble du composé est décliné à l'ablatif.

2.c Dialogues mis en scène

Le texte est parsemé de dialogues et de débats mis en scène, sans que pour autant un nom ou une marque textuelle permettent la distinction entre la partie du texte qui appartient à un interlocuteur putatif et la partie qui constitue la réponse de Bhāskara. Des exemples de ces dialogues parsèment nos citations des passages du commentaire. Nous pouvons peut-être y voir l'une des influences de l'oralité en tant que modèle dominant de transmission du savoir. Nous y apercevons également l'une des fonctions du commentaire de Bhāskara : rectifier de mauvaises interprétations des vers du traité et défendre celui-ci contre des écoles qui contestent les procédures qu'il propose.

2.d Citation de vers

De nombreux vers sont cités dans ce texte et ont été repertoriés par K.S. Shukla dans l'appendice V de son édition. Certaines de ces citations nous sont données avec le nom de leurs auteurs : il s'agit alors de savants connus, tel Paṇini, le grand grammairien de la tradition sanskrite. Le plus souvent, pourtant, ce sont des citations hors contexte introduites par un simple ■il a été dit que■ (*ucyate*). Elles peuvent également être indiqués par l'expression de la citation en sanskrit (*iti*). L'origine de certaines a été retracée par l'éditeur K.S. Shukla. Ainsi, par deux fois, dans la première partie du vers 9, et dans celui du vers 10, le commentaire de Patañjali à l'*Aṣṭādhyāyī* de Pāṇini est cité.

Ces citations sont le plus souvent intégrées dans une argumentation, sans faire l'objet d'un commentaire. Une seule fait l'objet d'une sous-glose, à la

²³L'introduction à la traduction comporte une partie expliquant brièvement quelques caractères grammaticaux du sanskrit.

manière des *vākya*s de Patañjali²⁴.

3 Les Exemples

Chaque commentaire à un/des vers se conclut par une liste d'exemples résolus. Ceci est seulement le cas dans le commentaire du second chapitre de l'*Āryabhaṭīya*. Les commentaires aux trois autres chapitres du traité n'intègrent pas aussi systématiquement des listes d'exemples résolus. On note, néanmoins, deux exceptions au sein du *gaṇita-pāda* : le vers 1, qui ne se prête pas à des illustrations puisqu'il s'agit d'un vers d'hommage, et le vers 2, qui définit ou décrit la numération positionnelle décimale. En ce qui concerne ce dernier, d'une certaine manière, la règle qu'il énonce est illustrée à chaque fois que des nombres sont notés. D'autre part le caractère obscur de ce commentaire est peut-être une conséquence du fait qu'il n'est pas illustré.

Ces listes d'exemples suivent une structure fixe. Il s'agit d'un problème, suivi d'une disposition des données du problème, suivi d'une résolution. Il existe des variations sur ce schéma : certaines étapes sont parfois omises lorsqu'elles paraissent évidentes. Les exemples sont toujours annoncés par le même nom générique : *uddeśaka*. Ce terme est étymologiquement dérivé du verbe *ud-diś* qui signifie à la fois ■indiquer■ et ■illustrer■.

3.a Problèmes versifiés

La plupart des problèmes sont versifiés. Beaucoup de ceux cités par Bhāskara dans son commentaire sont devenus des classiques. Ils ont été repris dans des commentaires postérieurs à l'*Āryabhaṭīya* et dans des commentaires aux traités de Bhāskara²⁵. Étant donné que nous ne connaissons pas à présent de texte antérieur qui soit proche du commentaire de Bhāskara, il est difficile de savoir si ces exemples sont de son crû où s'ils avaient déjà le statut de classiques à l'époque. Les mètres employés n'ont pas été repertoriés.

3.b Disposition des données

B. Datta et A. N. Singh ont souligné comment certains des termes usuels employés pour nommer l'arithmétique, *pāṭi-gaṇita* (mathématiques sur une planche) et ceux pour désigner des calculs, *dhūlī-karma* (opération dans la poussière) supposaient l'existence d'une surface de travail, où des nombres

²⁴Il s'agit d'un vers cité dans l'introduction du chapitre sur les mathématiques. Voir à ce sujet [Bronkhorst 1990] et se reporter à la comparaison dans la conclusion de ce chapitre.

²⁵Voir les notes qui parsèment l'Appendix I [p.289-334; Shukla 1976].

étaient notés²⁶. Mises à part quelques remarques textuelles, la partie ■disposition■ du commentaire est la seule qui nous permette de voir directement comment des données étaient disposées sur une surface de travail. Elle suit immédiatement le problème versifié. Elle est annoncée le plus souvent par le terme *nyāsa* que nous avons traduit en anglais par l’expression ■setting-down■. Plus rarement, elle est appelée *sthāpana* (disposition). Elle présente les données du problème formulé au-dessus soit sous la forme de nombres écrits soit sous la forme de diagrammes.

3.c Résolutions

Une résolution suit le plus souvent la partie ■disposition■. Elle est ouverte par le terme *karāṇa*, littéralement ■fabrication■, que nous avons traduit par ■procédure■. Les parties ■résolution■ explicitent les différentes étapes du raisonnement et des calculs qui permettent d’aboutir au résultat. Ce dernier est en général annoncé par le terme *labdha* ■il a été obtenu■ suivi de nombres écrits.

La fonction d’un commentaire est d’expliciter ce qu’un vers dit de manière elliptique. Ayant vu formellement comment il se structure, nous allons à présent examiner comment chacun de ces éléments accomplit une ou plusieurs fonctions en ce sens. De manière un peu artificielle, nous allons distinguer ici dans le travail effectué par le commentaire deux parties : ce qui vise à donner un sens non ambigu au vers et ce qui à partir du vers, reconstruit une procédure à appliquer. La première nous semble propre à tout commentaire, la seconde plus spécifique à un commentaire mathématique.

1.4 Interpréter des *sūtras*

L’essentiel de l’explicitation du sens du vers se fait dans le ■commentaire général■. En observant la manière dont le vers est interprété, nous verrons avec quelle liberté et avec quelles techniques précises, le commentaire lit les *sūtras* du traité. En retour, nous pourrions alors nous poser quelques questions sur leur rédaction.

²⁶[p.123; Datta-Singh 1938].

Table 1.1: Exemples de mots substitués par Bhāskara

Vers	Āryabhaṭa	Bhāskara
Ab.2.4.	<i>varga</i> ((place) carrée) <i>a-varga</i> ((place) non-carrée)	<i>viṣama</i> ((place) impaire) <i>sama</i> ((place) paire)
Ab.2.6.ab.	<i>tri-bhujā</i> (trilatère) <i>sama-dala-koṭī</i> (médiatrice) <i>bhujā</i> (base)	<i>tri-aśra</i> (trilatère) <i>avalambaka</i> (perpendiculaire) <i>bhūmi</i> , <i>bhū</i> (terre)

1 Lever des ambiguïtés

1.a Ambiguïtés grammaticales : relations syntaxiques et analyses des composés

Le commentaire procède de manière systématique, chaque mot du vers étant toujours expliqué en termes syntaxiques. Souvent à vrai dire les passages ainsi glosés ne posent pas de problèmes. Le vers est ainsi passé au crible : passages ambigus et passages non-ambigus sont tous mis sur un même plan. Comme nous le verrons dans la section 1.7 où nous examinerons ce phénomène en détail, et également dans cette section en examinant les diverses analyses des composés utilisés dans les vers 32 et 33 l'analyse grammaticale des composés se prête à de multiples interprétations.

1.b Ambiguïtés sémantiques : substituer des mots

C'est dans ce travail que les jeux par les mots et les ambivalences induites par l'ellipse des vers sont levés. Il y a le plus souvent une reformulation de passages du vers, ponctuée par deux expressions types : *ity arthaḥ* (le sens est) et *iti yavāt* (en résumé). Examinons par exemple, les mots substitués à ceux d'Āryabhaṭa dans les vers 4 et 6, tels qu'ils apparaissent dans le tableau 1.1.

Le terme ■carré■ (*varga*) utilisé dans le vers 4, lorsqu'il désigne la place d'un chiffre, i.e. une place correspondant à une puissance paire de 10, est glosée par le terme *viṣama* qui signifie impair. Ceci s'explique car en comptant à partir de la droite, les puissances paires de la numération positionnelle décimale correspondent toutes aux places impaires : la première place correspond à une puissance de 10 nulle, la troisième place correspond à 10^2

etc.²⁷

Par cette substitution une ambiguïté est levée. Mais elle implique simultanément une lecture du vers dans lequel un sens mathématique est attribué à ce jeu par les mots. Tout se passe comme si, dans les vers d'*Āryabhaṭa* tels qu'ils sont lus par Bhāskara, les ambivalences n'étaient pas gratuites mais avaient pour fonction de souligner des propriétés mathématiques. Ainsi ici, comme nous l'avons déjà remarqué auparavant, le double usage du terme carré se comprend par le fait que l'emplacement lui-même correspond à un nombre au carré : c'est à la fois le carré de la puissance de 10 et le carré du nombre dont la racine formera l'un des chiffres de la racine carrée extraite. Ce fait n'est pas souligné explicitement par le commentateur, mais c'est à travers sa compréhension du vers et de la règle qu'il énonce que cette propriété apparaît.

D'autre part, le commentaire de la première moitié du vers 6 nous laisse voir comment Bhāskara, en substituant un terme, transforme le vers. En effet, nous y reviendrons²⁸, ce dernier énonce une procédure pour calculer les aires de triangles isocèles et équilatéraux : on multiplie la médiatrice (*sama-dala-koṭī*) par la moitié de l'un des côtés (*bhujā*). En glosant le terme signifiant médiatrice comme s'il signifiait perpendiculaire (*avalambaka*), et en comprenant le terme *bhujā* comme signifiant une base (*bhū*), Bhāskara interprète le vers en lui donnant une portée plus grande que son sens littéral semble avoir.

Parfois la substitution de mots ne semble pas spécialement significative. Ainsi dans le commentaire de la première moitié du vers 6, le terme trilatère (*tri-bhujā*) est glosé par un synonyme, *tri-aśra*. Le mot *aśra* signifie côté, rebord; il ne diffère pas significativement, au sein de ce composé, du terme *bhujā*. Dans ce cas précis toutefois, il se peut que ce terme soit utilisé pour éviter la confusion avec l'acception technique de *bhujā* comme base du triangle.

Dans le cas de substitutions non significatives, il se peut qu'elles mettent en lumière soit un écart régional dans l'usage des termes techniques soit un écart entre les vocabulaires en usage du temps d'*Āryabhaṭa* et de Bhāskara.

On voit ainsi comment tout en nous permettant de lire et de comprendre le vers, par une explicitation des mots qui le composent, le commentateur le transforme : il en donne déjà sa propre interprétation. En retour, il nous montre comment les ambivalences qu'opère le *sūtra* par des jeux par les mots

²⁷Pour plus de précisions, voir l'Annexe de BAB.2.4-5.

²⁸Cette partie du commentaire est analysée en détail dans la section 1.7 de ce chapitre.

sont mathématiquement significatives.

2 Suppléer et connecter

Naturellement, lorsque des vers elliptiques sont commentés, une partie du travail consiste à suppléer au vers des informations qui n'y sont pas. Bhāskara s'y prend de diverses manières, en ajoutant directement des termes, en donnant des sens forts à des termes peu significatifs du vers, en effectuant des connexions avec des vers précédents et en ayant recours à des arguments extérieurs au traité lui-même. Ce sont ces techniques que nous allons à présent examiner.

2.a ■Le restant de la phrase■

Pour suppléer directement des termes aux vers, Bhāskara a recours à une terminologie stéréotypée : l'expression suppléée peut être suivie de l'expression *iti vākya-śeṣaḥ*, que nous avons traduits par ■is the remaining part of the sentence■ (est le restant de la phrase). Il peut également être suivi d'un dérivé conjugué du terme *adhyāhāraḥ* (*adhy-ā-hṛ*). Ceci est un terme technique qui désigne le fait de compléter une phrase elliptique pour qu'elle prenne sens.

Par exemple, si nous ne suppléons pas de terme au vers 5 qui décrit l'extraction de la racine cubique, il se lit ainsi (p. 53; lignes 10-13) :

*Ab.2.5. aghanād bhajed dvitīyāt triḡuṇena ghanasya mūlavargeṇa|
vargas tripūrvaguṇitaḥ śodhyaḥ prathamād ghanas ca ghanāt||*

Ab.2.5. L'on doit diviser le second non-cube par trois fois le carré de la racine du cube|

Le carré multiplié par trois et par le précédent doit être soustrait du premier, et le cube du cube||

Comme pour le vers 4, il y a une part d'ambivalence dans ce vers qui provient du fait que sont nommés ■cube■ à la fois des nombres élevés au cube et les places de la numération positionnelle qui correspondent à des puissances de 10 multiples de 3. Corrélativement des ■non-cubes■ sont des places de la numération positionnelle décimale qui correspondent à des puissances de 10 qui ne sont pas multiples de 3. Cette ambiguïté est éclaircie par Bhāskara mais ne suffit pas à rendre le vers compréhensible.

Le commentateur s'emploie donc à préciser d'autres points. Ainsi une multiplication de carré débute à la seconde moitié du vers. Comme on ne

sait pas de quel nombre il s'agit, Bhāskara met en scène le dialogue suivant (p. 53; ligne 21) :

kasya vargaḥ ? labdhasyeti vākyaśeṣaḥ /

Le carré de quoi ? ■Du quotient” est le restant de la phrase.

Ce vers n'indique pas ce que la procédure calcule. L'ayant commenté en entier, il ajoute également (p. 53; ligne 23, p. 54; ligne 1) :

tato ghanamūlaṃ bhavatīty adhyāhāryam /

■Ensuite la racine cubique est produite” doit être suppléé.

Nous voyons comment le sens du vers est déplié par le commentateur : une fois que les ambiguïtés syntaxiques et sémantiques sont levées, les parties omises d'un vers sont suppléées. Voici ce que donne le vers 5, si nous suppléons les informations que le commentaire de Bhāskara nous propose²⁹ :

Ab.2.5. L'on doit diviser la seconde ⟨place⟩ non-cubique par trois fois le carré de la racine du cube|
Le carré ⟨du quotient⟩ multiplié par trois et par la ⟨quantité⟩ précédente doit être soustrait de la première ⟨place non-cubique⟩, et le cube de ⟨la place⟩ cubique. ⟨Ceci produit la racine cubique.⟩ ||

Le fait que notre compréhension du vers soit tributaire de telles parties qui ne sont pas exprimées dans le vers nous montre en retour que les vers sont rédigés en supposant une lecture qui puisse les suppléer. Nous pouvons également deviner comment ces compléments laissent la porte ouverte à diverses interprétations de la procédure. Nous examinerons, dans un exemple à la fin de cette section, la manière dont suivant l'interprétation que le commentateur fait du vers, ces compléments varient.

Mais le vers 5 nous le montre : ces ajouts à eux seuls ne suffisent pas à nous expliquer de quelle manière la procédure est appliquée. Comment dispose-t-on un nombre dont on veut extraire la racine cubique ? Où sont placés les résultats des opérations intermédiaires ? Dans quel ordre les opérations sont-elles exécutées ? Bref, comment s'y prend-on, concrètement, dans

²⁹Notons que contrairement au français, il n'y a pas de différence de genre entre *le* cube d'un nombre et *la* place cubique, et que l'adjectif (cubique) et le nom (cube) gardent la même forme en sanskrit comme en anglais. Nous n'avons ainsi pas pu rendre compte du jeu de mot, qui est facile à rendre en anglais.

un cas particulier ? Nous reviendrons à ces questions en examinant, dans la section 1.5, la manière dont le commentaire transforme un vers en une procédure à appliquer.

2.b Connections et répétitions

Dans un vers elliptique, un même mot peut être utilisé en tant que sujet de deux verbes différents ou avoir plusieurs fonctions syntaxiques. Ceci est par exemple le cas de la seconde moitié du vers 3. Nous avons déjà remarqué que le terme *ghana* y est employé à la fois comme sujet, signifiant le volume et en tant qu’adjectif qualificatif, signifiant ■solide■ de la figure ■ayant douze ctes■ (un cube).

Dans de tels vers la position traditionnelle des mots d’une phrase est bouleversée. En général, cette modification n’appelle pas de remarque. Toutefois, dans son commentaire du vers 5, la dernière partie du vers (*vargas tri-prva-guṇitaḥ śodhyaḥ prathamād*, ■le carré multiplié par trois et par le précédent doit être soustrait du premier■), on ignore ce qu’est que ce ■premier■ duquel le carré doit-être soustrait. Bhāskara explique (p. 53; ligne 22)

prathamād aghanād iti sambandhanāyam /

■La première ⟨place⟩ non-cubique”, ⟨les termes *prathamād* (du premier) et *aghanād* (place non-cubique)⟩ doivent être connectés.

Ici il explicite une ambiguïté en liant le premier mot du vers, à un terme qui se trouve dans son dernier quart. Effectivement, leurs cas l’ablatif s’accordent et en les mettant l’un à cté de l’autre, le sens ■la première ⟨place⟩ non-cubique■ est produite.

Ainsi si l’on peut connecter (*sambandh-*) des mots d’un vers, pour rétablir une relation syntaxique que la métrique d’un vers rédigé succinctement a bouleversé, l’on peut également répéter des mots. Le verbe *anuvṛt* est un terme technique de glose. Il désigne le fait de rappeler dans un vers un terme utilisé auparavant.

Dans le vers 21, l’opération de division par 6 est annoncée dans la seconde moitié du vers. Elle se rapporte à la fois au calcul décrit dans la première moitié du vers et au calcul donné dans la seconde moitié. Bhāskara commentant la seconde moitié du vers précise donc (p. 109; ligne 23) :

ṣaḍbhaktaḥ ity anuvartate

Divisé par six doit-être répété (*anuvartate*)

Les problèmes versifiés des listes d'exemples procèdent de la même manière. On peut donc voir dans ce procédé une astuce souvent utilisée pour obtenir un vers concis. En général, cette rédaction n'appelle pas de commentaire. De temps en temps, Bhāskara le souligne lorsque deux demi-vers sont commentés séparément ou lorsqu'il s'agit de la relation d'un terme appartenant à un vers précédent.

2.c Glose des explétifs

Le mètre dans les traités versifiés requiert parfois une ou deux syllabes supplémentaires qui sont alors comblées par ce qu'on appelle communément des explétifs. De temps en temps Bhāskara attribue cette fonction à des mots des vers d'Āryabhaṭa, en utilisant l'expression stéréotypée *iti pādapūraṇe*, ■est utilisé pour emplir le quart de vers■. Parfois il les utilise afin d'y introduire une nuance, que le vers n'exprime pas. Nous avons ainsi étudié plus haut comment un terme semble-t-il anodin du vers 26, ■maintenant■ (*atha*), a été interprété comme la trace d'une méta-règle, indiquant que la Règle de Trois s'applique de manière particulière suivant la situation dans laquelle on se trouve. D'autres exemples parsèment le commentaire.

2.d Arguments extérieurs

Pour justifier de parties importantes de procédures qu'il supplée au vers et qui pourraient être sujettes à discussion, Bhāskara a souvent recours à l'argument de la tradition (*āgama, sampradāya-aviccheda*), non sans paradoxe puisque dans un autre contexte, il rejettera ce même argument en exigeant qu'un fait soit établi et non pas simplement accepté. Que Bhāskara se sente obligé de justifier ces compléments est indicatif du fait que si ces ajouts sont attendus, ils se doivent d'être argumentés.

3 Omissions

Le commentaire du vers 19 nous présente un cas particulier et très beau de la liberté qu'un commentateur peut prendre à connecter et suppléer ce qui semble nécessaire pour donner sens et faire d'un vers une procédure. Une autre technique de lecture y est mise en œuvre. Elle supprime certaines parties du vers afin d'y lire de nouvelles règles. En effet, Bhāskara y lit non moins de 5 procédures.

Présentant son interprétation de ce *sūtra*, Bhāskara écrit quelque peu elliptiquement (p. 105, ligne 12) :

atra bahūni sūtrāṇi muktakavyasthitāni, teṣām yathā saṃyogaṃ sambandhaḥ.

Ici (dans ce vers) de nombreuses règles (*sūtra*) se trouvent dans différentes strophes (*muktaka*). Leur union (*saṃbandha*) (est faite) en accordance avec une connection (*saṃyoga*) (convenable de différents mots).

Un peu plus loin il précise (p. 105, ligne 17) :

evam etāni pādonayāyā "ryayā pratibaddhāni/

De cette manière, ces (règles) sont unies (*pratibaddha*) dans un *āryā* privé d'un quart.

Les deux termes *saṃbandha* et *pratibaddha* utilisés pour nommer cette connection ont des sens similaires (connection, union, combinaison). Le terme *saṃyoga* est utilisé généralement dans le traité dans le sens d'addition.

Le vers 19, en lecture ordinaire contient trois relations, deux d'entre elles donnent le même résultat (p. 105; lignes 5-6) :

*iṣṭaṃ vyekaṃ dalitaṃ sapūrvam uttaragunaṃ samukhaṃ madhyam|
iṣṭagunitam iṣṭadhanam tv athādyantaṃ padārdhahatam||*

Le (nombre de termes) désirés, diminué de un, dont on prend la moitié, augmenté du (nombre de termes) qui précèdent, ayant la différence commune pour multiplicateur, augmenté par le premier terme, est la (valeur) moyenne.|

(Le résultat), multiplié par le désiré, est la valeur du (nombre de termes) désiré. Ou alors, le premier et le dernier (ajoutés puis) multipliés par la moitié du nombre de termes (est la valeur).||

Bhāskara en omettant certains mots présente de manière systématique toutes les règles qu'il lit. Nous renvoyons à la traduction et à l'annexe de BAB.2.19. pour une explication du sens mathématique de ces procédures.

En fait, Bhāskara interprète la première de ces règles en indiquant qu'elle ne doit pas être lue littéralement : la valeur moyenne (*madhya-dhanam*) étant obtenue en omettant la partie du vers qui prescrit la somme du nombre de termes précédents (*sa-pūrvam*). Ceci est indiqué dans le tableau 1.2 avec l'ensemble des procédures déduites des trois premiers quarts du vers.

Table 1.2: Les différentes procédures obtenues par omission dans les premiers trois quarts du vers 19

Omissions	Sanskrit	Traduction
Sans omission	<i>iṣṭaṃ vyekaṃ dalitaṃ sapūrvam uttaragaṇaṃ samukhaṃ madhyam iṣṭagaṇitam iṣṭadhanam</i>	Le ⟨nombre de termes⟩ désirés, diminué de un, dont on prend la moitié, augmenté du ⟨nombre de termes⟩ qui précèdent, ayant la différence commune pour multiplicateur, augmenté par le premier terme, est la ⟨valeur⟩ moyenne. ⟨Le résultat⟩, multiplié par le désiré, est la valeur du ⟨nombre de termes⟩ désirés. (Ainsi formulé, la règle est fausse, et n'est pas interprétée dans ce sens par Bhāskara)
Seule la première moitié du vers est considérée. Dans cette dernière <i>sapūrvam</i> (augmenté du nombre de termes qui précèdent) est omis	<i>iṣṭaṃ vyekaṃ dalitaṃ uttaragaṇaṃ samukhaṃ madhyam</i>	Le ⟨nombre de termes⟩ désirés, diminué de un, dont on prend la moitié, ayant la différence commune pour multiplicateur, augmenté par le premier terme, est la ⟨valeur⟩ moyenne.
La procédure obtenue résulte de l'interprétation donnée au-dessus de la première moitié du vers. Ici le dernier mot de la première moitié du vers, et ceux de son troisième quart sont considérés.	<i>madhyam iṣṭagaṇitam iṣṭadhanam</i>	⟨Le résultat⟩, multiplié par le désiré, est la valeur du ⟨nombre de termes⟩ désirés.

Omissions	Sanskrit	Traduction
Bhāskara omet de la première moitié du vers 19 <i>madhyam</i> (la valeur moyenne)	<i>iṣṭaṃ vyekaṃ dalitaṃ sapūrvam uttara-guṇaṃ samukham</i>	Le ⟨nombre de termes⟩ désirés, diminué de un, dont on prend la moitié, augmenté du ⟨nombre de termes⟩ qui précèdent, ayant la différence commune pour multiplicateur, augmenté par le premier terme est ⟨valeur moyenne d'une somme partielle de termes ou la valeur de chaque terme.⟩ Cette procédure peut être comprise comme donnant la moyenne d'une somme partielle de termes ou la valeur de chacun des termes de la suite
La totalité des trois premiers quarts du vers 19 est considéré en omettant <i>madhyam</i> (mean ⟨sum⟩)	<i>iṣṭaṃ vyekaṃ dalitaṃ sapūrvam uttara-guṇaṃ samukham iṣṭaguṇitam iṣṭadhanam</i>	Le ⟨nombre de termes⟩ désirés, diminué de un, dont on prend la moitié, augmenté du ⟨nombre de termes⟩ qui précèdent, ayant la différence commune pour multiplicateur, augmenté par le premier terme, multiplié par le désiré, est la valeur du ⟨nombre de termes⟩ désirés.

Ce tableau montre comment, sans modifier l'ordre des mots mais en supprimant ■a et là des termes, de nouvelles procédures sont lues dans le vers. La troisième règle (dans la quatrième ligne du tableau) joue également sur la double signification du mot *dhana*. Comme nous l'avons expliqué dans l'annexe de BAB.2.19-22, celui-ci peut désigner la valeur d'une somme finie de termes d'une suite. Dans ce cas, la règle peut se lire comme donnant la valeur moyenne d'une somme partielle des termes de la suite. Mais ce mot peut aussi se comprendre comme désignant la valeur d'un des termes de la suite. Dans ce cas, elle donne une règle pour calculer la valeur d'un terme de la suite, en prenant pour ■nombre de termes désirés■, un.

La quatrième règle lue dans le vers repose elle aussi sur une ambivalence des termes utilisés pour décrire la situation. En effet, le terme *iṣṭa* (désiré) dans la deuxième règle lue désigne le nombre total de termes de la suite

considérée. La valeur obtenue *in fine* est donc la somme de tous les termes. Dans le cas de la quatrième règle, le même mot désigne le nombre désiré d'un ensemble fini et consécutif de termes de la suite. La valeur finale obtenue correspond donc à la somme de cet ensemble de termes.

Le dernier quart du vers 19, quant à lui, donne bien une règle alternative pour calculer la somme totale des termes (p. 105; ligne 6) :

tv athādyantaṃ padārdhahatam||

Ou alors, le premier et le dernier (sommés puis) multipliés par la moitié du nombre de termes (est la valeur).

Bhāskara dans ce cas utilise un procédé que nous avons souligné plus haut. En effet, si le mot *atha* indique que la règle est une alternative, ce qu'elle calcule n'est pas précisé dans la dernière partie du vers. Bhāskara indique donc (p. 107; ligne 14) :

iṣṭadhanam ity anuvartanād

Parce qu'il y a répétition (*anuvartana*) (de l'expression) ■ la valeur (des termes) désirés■.

La fausseté de la première procédure obtenue par une lecture naïve du vers pourrait être un indice du fait qu'il est connu de manière à être lu différemment. Le vers est effectivement rédigé de manière à permettre ces multiples opérations : d'une part, il est fait d'une succession de participes passés et de noms apposés, d'autre part le vocabulaire utilisé est suffisamment ambigu pour pouvoir se reporter à diverses situations.

4 Un cas exemplaire de lecture interprétative : les vers 32-33

Bhāskara propose en effet deux interprétations différentes de ces vers. Le détail mathématique de ces procédures est expliqué dans l'annexe de BAB.2.32-33. L'expression sanskrite et les deux interprétations de ces vers sont les suivantes (p.132, lignes 7-10) :

adhikāgrabhāgahāraṃ chindyād ūnāgrabhāgahāreṇa|
śeṣaparasparabhaktaṃ matiguṇam agrāntare kṣiptam||
adhopariḡuṇitam antyayugūnāgracchedabhājite śeṣam|
adhikāgracchedaguṇam dvicchedāgram adhikāgrayutam||

32. L'on doit diviser le diviseur du grand reste par le diviseur du petit reste. |

La division réciproque ⟨du précédent diviseur⟩ par le reste ⟨est effectuée continuellement. Le dernier reste⟩ ayant pour multiplicateur une ⟨quantité⟩ maligne est ajouté à la différence des restes ⟨initiaux et divisé par le dernier diviseur⟩. ||

33. L'au-dessus est multiplié par l'en-dessous, et augmenté par le dernier. Lorsque ⟨le résultat de cette procédure⟩ est divisée par le diviseur du petit reste |

Le reste, ayant le diviseur du grand reste pour multiplicateur, et augmenté par le grand reste est la ⟨quantité ayant de telles⟩ restes pour deux diviseurs ||

Ou alors :

32. L'on doit réduire le diviseur qui est un grand nombre ⟨et le dividende⟩ par un diviseur qui est un petit nombre. |

La division réciproque ⟨du précédent diviseur⟩ par le reste ⟨est effectuée continuellement. Le dernier reste⟩ ayant pour multiplicateur une ⟨quantité⟩ maligne est ajouté à l'intérieur d'un nombre ⟨divisé par le dernier diviseur⟩. ||

33ab. L'au-dessus est multiplié par l'en-dessous et augmenté du dernier. Lorsque ⟨la quantité au-dessus restante⟩ est divisée par le diviseur qui est un petit nombre, le reste est ⟨le pulvérisateur. Lorsque la quantité en-dessous restante est divisée par le dividende, le quotient de la division est produite.⟩ |

Dans la seconde interprétation, celle du ■pulvérisateur sans reste■ (*niragra-kuttākāra*), Bhāskara omet le dernier quart du vers 32-33.

Bhāskara met ici en jeu des techniques que nous avons décrites précédemment.

Ainsi sa double interprétation des termes-clefs *adhika-agra-bhāgahāra* et *ūna-agra-bhāgahāra* utilise à la fois le fait qu'un composé peut syntaxiquement être interprété de différentes manières et la polysémie des termes sanskrits. Cette dernière à vrai dire est employée dans ce cas pour une interprétation de mots qui peut sembler forcée.

En effet, dans le cas de la première interprétation, ces deux composés sont analysés comme des *karmadhāraya*³⁰, ayant en premier terme un *bahuvrīhi* : le lien syntaxique qui lie le terme *bhāgahāra* (diviseur) à *adhika-agra* d'une part et *ūna-agra* de l'autre est celui du sujet à son adjectif qualificatif. D'autre part le terme *agra* est compris dans sa signification usuelle de reste (d'une division) (p. 132; lignes 11-12) :

*agraṃ śeṣaḥ / adhikāgra yasya so 'yam adhikāgraḥ/ adhikāgras
cāsau bhāgahāras ca adikāgrabhāgahāraḥ/*

Agra est un reste (*śeṣa*). *Adhika-agra* (le reste le plus grand) est un *bahuvrīhi*; *Adhika-agra-bhāgahāra* (le diviseur du reste le plus grand) est un *karmadharāya* (signifiant ce qui est un diviseur et qui a le reste le plus grand).

Plus tard dans le commentaire, Bhāskara fait une remarque en apparence anodine (p. 133; ligne 1) :

agraṃ saṅkhyā
le reste (*agra*) est un nombre (*saṅkhyā*)

Or, dans sa seconde interprétation du vers, le terme *agra* y est glosé comme désignant un nombre. Dans ce commentaire, c'est l'unique occurrence de ce mot avec cette signification. D'autre part les composés sont analysés comme étant des *karmadhāraya*. Dans un *karmadhāraya* les termes du composé sont dans un rapport d'identité : il signifie ce qui est à la fois un *bhāgahāra* (diviseur) et un *adhika-agra* ou un *ūna-agra* (p.135; lignes 3-4) :

*agraṃ saṅkhyā, ūnaṃ ca tadagraṃ ca ūnāgraṃ, ūnāgraṃ ca tad
bhāgahāras ca sa ūnāgrabhāgahāraḥ*

Agra est un nombre (*saṅkhyā*); *ūna-agra* (un petit nombre) est un *karmadhāraya* (signifiant ce qui est petit et un *agra*), *ūna-agra-bhāgahāraḥ* (le diviseur qui est un petit nombre) est un *karmadhāraya*.

De même dans la première moitié du vers 33, le composé *agra-antara*, est compris de deux manières différentes. Dans le premier cas, suivant

³⁰Se reporter à la partie donnant quelques éléments de grammaire sanskrite dans l'introduction de la traduction, pour une définition de ces composés.

l'acception technique habituelle de *agra* comme reste et de *antara* comme différence, le composé signifie ■la différence des restes■. Dans le second cas, au sens inhabituel de *agra* en tant que nombre, s'ajoute l'acception courante du terme *antara* comme ■l'intérieur■, ce qui donne l'étrange ■intérieur d'un nombre■.

De même qu'avec le mot *agra*, le terme employé pour la division est interprété différemment dans un cas comme dans l'autre. Dans la première interprétation, le terme *chindyāt* (on doit diviser) est glosé par un synonyme strict (p. 132; ligne 13) :

chindyād vibhajed ity arthaḥ/

Chindyāt, le sens est : on doit diviser (*vibhajed*)

La seconde fois, le terme est investit d'une acception plus technique, celle de la réduction par les facteurs communs (*apavartayed*), et donne lieu à une justification que nous examinerons plus bas.

Ces analyses sont résumées dans le tableau 1.3.

Ces trois transformations ont pour effet de changer la première opération décrite dans la première moitié du vers 32.

Ainsi la première interprétation est la suivante :

adhikāgrabhāgahāraṃ chindyād ūnāgrabhāgahāreṇa|

On doit diviser le diviseur du grand reste par le diviseur du petit reste|

La seconde requiert une précision :

On doit réduire le diviseur qui est un grand nombre <et le dividende> par un diviseur qui est un petit nombre.|

Le restant des vers à chaque fois est interprété de la même manière. Mais la seconde interprétation omet la dernière moitié du vers 33. Ainsi, la fin du processus requiert elle aussi qu'on supplée une information pour être interprétée. Bhāskara note ainsi (p. 135; ligne 18) :

kuṭṭākāro bhavatīti vākyaśeṣaḥ /

■Le pulvériseur est produit" est le restant de la phrase.

Mais il a également recours à une citation d'un vers d'un autre traité, afin de justifier qu'il arrête là le processus (idem; lignes 19-22) :

Table 1.3: Différentes interprétations du sens des composés dans les vers 32-33. Les () indiquent une substitution de termes par Bhāskara

Symbole	Sanskrit	Pulvérisateur avec Reste	Pulvérisateur sans reste
		On cherche N tel que $N = ax + R_1$ $N = by + R_2$ $0 \leq R_1 < a$ $0 \leq R_2 < b$ $R_1 > R_2$	On cherche x et y tel que $y = \frac{ax \pm c}{b}$ $c = R_1 - R_2$ $R_1 > R_2$
a	<i>adhika-agra-bhāgahāra</i>	le diviseur du grand reste	le diviseur qui est un grand nombre (le dividende)
b	<i>ūna-agra-bhāgahāra</i>	le diviseur du petit reste	le diviseur qui est un petit nombre (le diviseur)
c	<i>agra-antara</i>	la différence des restes	l'intérieur d'un nombre

*gaṇite 'py uktam-
 upari ca bhāgahāreṇa bhakte hi rāsīr bhaved vā/
 ityevam-ādinā granthena / śeṣe kuṭṭākārabhāgalabdhe bhavataḥ
 iti / adhikāgracchedagaṇam ityādi na niragrakuṭṭākāreṣu [upay-
 ojjate] /*

Dans ⟨un traité de⟩ mathématiques, ceci a été dit également, de cette manière, avec les mots qui débutent par :

Et lorsque l'au-dessus est divisé par le diviseur, alors
 la quantité sera produite|

Les deux restes sont le pulvérisateur (*kuṭṭākāra*) et le résultat de la division (*bhāga-labdha*).

■Multiplié par le diviseur du premier reste”, etc., ceci n’est pas [utilisé] dans les pulvérisateurs sans reste.

La seconde moitié du vers 33 n’est ainsi interprétée qu’une seule fois. Elle est reformulée par Bhāskara à la fin de l’analyse syntaxique qu’il en fait dans sa première partie (p.133; lignes 2-3) :

*etad uktaṃ bhavati- ūnāgracchedhabhājite śeṣam adhika-agra-
 cchedena-abhyastam adhikāgra-sahitaṃ tad dvayor api chedayor
 bhājyarāsīr bhavatīti/*

Ceci est ce qui a été dit-Lorsqu’ ⟨il est divisé⟩ par le diviseur du petit reste, le reste, multiplié par le diviseur du grand reste et augmenté par le grand reste, ceci est la quantité qui doit être divisée pour (i.e. par) ces deux diviseurs.

A deux reprises et pour ces deux différentes interprétations des vers 32-33, Bhāskara a recours à l’argument de la tradition, afin de justifier les informations qu’il supplée au vers.

Dans le premier cas, il s’agit de la procédure à suivre une fois que la ■quantité maligne■ (*mati*) a été obtenue. Bhāskara la définit comme étant une réponse à une question type³¹. Le vers 32 nous indique que cette quantité, multipliée par un reste est ajoutée à une différence (p. 132; lignes 18-19). Bhāskara précise :

³¹Voir soit l’annexe de BAB.2.32-33, soit l’analyse de la formulation-type dans le paragraphe 5.c de ce chapitre.

*agrāntare kṣiptam / sameṣu kṣiptaṃ viṣameṣu śodhyam iti sam-
pradāyāvicchedād vyākhyāyate/*

⟨En ce qui concerne⟩ ■Ajouté à la différence des restes”; ⟨c’est⟩
ajouté lorsque ⟨le nombre de termes placés⟩ est pair, soustrait
lorsqu’il est impair, comme cela a été expliqué par une tradition
ininterrompue.

Une seconde fois Bhāskara à recours a cet argument alors qu’il propose
un commentaire alternatif aux vers 32-33. Comme nous l’avons souligné plus
haut, il se trouve dans la nécessité de suppléer des opérations, qui ne sont pas
données dans le vers. Aussi indique-t-il qu’on doit commencer l’algorithme
du pulvérisateur sans reste par une réduction du diviseur et du dividende
par des facteurs communs. Dans son interprétation du vers d’ Āryabhaṭa,
seule la réduction du diviseur est mentionnée. Le vers ne fait plus intervenir
alors le dividende. Le dialogue suivant est donc mis en scène (p. 135; lignes
6-7) :

*katham idam avagamyate yenaiva bhāgahāro ’pavartitas tenaiva
bhājyo ’py apavartanīya iti sampradāyāvicchedāt /*

⟨Question⟩

Comment est-ce que cette ⟨opération⟩, ■le dividende également
est réduit par ⟨le nombre⟩ au moyen duquel le diviseur est réduit”,
est connue ?

Par une tradition ininterrompue.

Nous avons donc vu ici comment des opérations d’exégèse standard, dont
la fonction est d’expliciter le sens d’un vers, en permettent simultanément
diverses interprétations. Ainsi l’analyse des composés de la première moitié
du vers 32 donne-t-elle naissance à deux opérations différentes. De là, en
omettant une partie du vers, en suppléant des informations, puis en justifiant
par la tradition de telles interprétations, deux algorithmes distincts sont
produits.

5 Conclusion

Nous avons vu que le commentateur utilise des techniques standards de lec-
ture des *sūtras*. Il donne des synonymes, reformule ce qui a été dit puis de
manière plus étonnante, il peut connecter divers mots du vers indépendam-
ment de leur ordre habituel dans les phrases sanskrites, voir omettre certaines

de ces parties. Nous avons montré comment en explicitant le sens du vers Bhāskara en donne déjà une interprétation. Ainsi une substitution de mots peut-elle étendre la portée d'un vers (cas du vers 6). En omettant certains mots et en en connectant d'autres on peut modifier une procédure (cas des vers 32-22) ou en découvrir une nouvelle qu'une lecture littérale ne fait pas apparaître (cas du vers 19). De même l'analyse d'un composé, en modifiant les rapports syntaxiques qui lient les mots entre-eux et en jouant de la polysémie des termes sanskrits, donne naissance à diverses interprétations des mots du vers, et partant à diverses opérations (cas des vers 32-22). Ces interprétations semblent parfois nécessiter des justifications. Bhāskara pour cela à parfois recours aux explétifs du vers auxquels il attribue un sens spécifique. Il peut aussi avoir recours à des citations d'autres traités. Parfois, il justifie de tels ajouts en citant une tradition immémoriale. Dans tous les cas nous voyons comment cette exégèse même lorsqu'elle est grammaticale est intimement liée à un travail mathématique. L'interprétation du vers et celle de son sens mathématique sont indissociables.

6 Fabriquer des *sūtras* : premier retour

L'observation de ce mode de lecture éclaire la manière dont ont pu être rédigés des *sūtras*. Ainsi de nombreux exemples nous ont montré que Bhāskara interprétait la plupart des jeux par les mots du vers comme soulignant des propriétés mathématiques. Ajoutons ici un exemple, où la concision du vers est interprétée à l'aide d'une propriété mathématique par le commentateur. Dans son exégèse de la première moitié du vers 27, afin de justifier l'usage d'un seul terme pour désigner les deux quantités qui entrent dans un produit (p. 116; lignes 22-23), il écrit :

*guṇyaguṇakārayoḥ parasparāpekṣyayā guṇakāratvam, yasmād guṇyo
guṇakāreṇa guṇyate, guṇakāro 'pi guṇyena, na kaścit phala-viśeṣaḥ/
tenoktaṃ guṇya-guṇakārau guṇakāra-śabdena /*

L'état d'être un multiplicateur est indifférent pour les multiplicandes (*guṇya*) et les multiplicateurs (*guṇakāra*) puisque (lorsque) le multiplicande est multiplié par le multiplicateur, et le multiplicateur également par le multiplicande, il n'y a aucune différence de résultats. Par conséquent, (Āryabhaṭa) a mentionné le multiplicande et le multiplicateur par un mot ■multiplicateur■.

Par ailleurs, Bhāskara semble prendre pour acquis que l'omission des mots d'un vers est un mode de lecture propre à un certain type de vers

concis. Comme nous l'avons vu dans le vers 19, celui-ci n'a pas de sens littéral : c'est une succession de mots dans un certain mètre, qu'il faut réagencer pour en tirer un sens. Si parfois on a le sentiment que Bhāskara lit effectivement ce qu'Āryabhaṭa a voulu exprimer, dans d'autres cas les interprétations qu'il propose (tel que la deuxième interprétation des vers 32-33) semblent forcées.

Nous pouvons en conclure qu'il existait effectivement des méthodes spécifiques pour rédiger de manière concise des vers mathématiques. Ceux-ci exigeaient en contrepartie des techniques d'interprétation tout aussi précises. Muni de ces dernières, le commentateur pouvait en jouant sur son habilité lexicale et grammaticale et en tirant partie de son érudition produire des significations qui n'étaient peut-être pas présents dans le vers à l'origine.

1.5 Faire d'un vers une procédure

Nous allons à présent examiner comment un vers, auquel un sens est donné, est lu et transformé en procédure avec un contexte d'utilisation, une liste de données requises à priori, l'ordre dans lequel des opérations doivent être effectuées et le résultat obtenu à la fin.

1 Cohérence de la règle

La présence quasi continue de dialogues mis en scène constitue l'un des aspects frappants du commentaire. Dans certains cas, ces dialogues se transforment en débat sur la validité de la règle mathématique elle-même (comme c'est le cas dans le commentaire du vers 10), mais le plus souvent, c'est ce que nous essayerons de montrer ici, les questions semblent avoir pour fonction de mettre en valeur la cohérence du vers dans sa manière de formuler la procédure qu'elle décrit.

Cette formulation, nous le savons, est elliptique. En expliquant les diverses étapes de la procédure, des questions naissent et Bhāskara nous indique que leurs réponses se trouvent dans le vers commenté. Ces réponses sont à leur tour expliquées, ce qui fait naître de nouvelles questions, etc. La procédure se construit ainsi progressivement tout au long du commentaire d'un vers. Parfois, la réponse ne se trouve pas dans le vers. Bhāskara doit alors suppléer une ou plusieurs opérations. Parfois, il renvoie à une procédure qui se trouve ailleurs dans le traité. Ceci témoigne alors du travail interprétatif qu'il exerce dans l'élaboration de la compréhension du vers.

Contrairement au processus que nous avons décrit auparavant, il ne s'agit

pas ici de fournir un sens syntaxiquement correct au vers, mais de lui attribuer un sens qui soit cohérent par rapport aux différentes opérations à effectuer. Si une division doit être effectuée, quel en est le diviseur, et quel en est le dividende ? Si la longueur d'un segment doit être calculée, sur quelles données doit-on s'appuyer, quelle procédure doit-on utiliser ?

Prenons comme exemple le début du commentaire du vers 4; le vers d'Āryabhaṭa est (p. 52; lignes 3-4) :

*bhāgaṃ hared avargān nityaṃ dviguṇena vargamūlena |
vargād varge śuddhe labdhaṃ sthānāntare mūlam ||*

On doit diviser, constamment, ⟨la place⟩ non-carrée par deux fois la racine carrée |

Lorsque le carré a été soustrait de ⟨la place⟩ carrée, le quotient est la racine dans une place différente ||

Le commentaire général de Bhāskara commence par une glose des premiers termes du vers *bhāgaṃ hared* qui indiquent qu'une division doit être effectuée. Nous allons examiner comment une suite de questions, qui puisent leurs réponses dans le vers, produit une procédure.

kasmāt sthānāt prabhṛti

En commen■ant par quelle place ? (ligne 6)

Bhāskara répond avec une partie du vers :

āhāvargāt

Il a dit ■La ⟨place⟩ non-carrée” (ligne 6)

Cette question a une double fonction, si elle permet de préciser que la réponse se trouve dans le vers, elle lève également une ambiguïté sur la partie du vers cité. Comme nous l'avons fait remarquer plus haut, on comprend alors que ce ■non-carré■ (*a-varga*) n'est pas un nombre mais une place dans la numération positionnelle décimale.

La question suivante est (ligne 8) :

kena bhāgaṃ hared ity

Par quoi doit-on diviser ?

Bhāskara répond (lignes 8-9) :

āha- nityaṃ dviguṇena vargamūlena /

Il a dit-■Constamment par deux fois la racine carrée”.

Bhāskara demande alors (ligne 10) :

kathaṃ punas tad vargamūlaṃ labhyate / ity

Comment, alors, la racine carrée est-elle obtenue ?

Il répond (lignes 10-11) :

āha- vargād varge śuddhe labdhaṃ sthānāntare mūlam

Il a dit- ■Lorsque le carré a été soustrait de la ⟨place⟩ carrée, le quotient est la racine dans une place différente”.

Une fois encore la question a une double fonction. L’utilisation de la locution ■il a dit■ (*āha*) souligne que le vers contient la réponse. Elle permet également de lever une ambiguïté. D’où provient la racine carrée mentionnée au milieu du vers ? Bhāskara nous indique que son calcul est explicité dans la dernière partie du vers. Les différentes étapes de la procédure, nous le comprenons alors, ne sont pas énoncées par leur ordre d’exécution dans le vers. La procédure d’extraction de la racine carrée commence avec la soustraction d’un carré. Ce n’est qu’ensuite qu’une division est effectuée. Le vers, quant à lui, commence par expliciter la division.

Le commentateur lit le vers en montrant comment tout y est minutieusement exprimé. À travers un jeu de questions-réponses, ce qui dans le vers elliptique décrit certaines étapes d’une procédure est mis en valeur. De plus, le commentaire à l’aide de ce dialogue agence l’ordre dans lequel les opérations de la procédure doivent être appliquées.

Le commentaire éclaire comment le vers est rédigé de manière à ne retenir que l’itération centrale au calcul de la racine. La procédure est décrite par son milieu, le début de la procédure, celui à partir duquel on la recommence à chaque fois étant rejeté à la fin du vers.

2 Contextualiser

Nous avons vu qu’une partie de l’ellipse des vers d’Āryabhaṭa provient de la non-explicitation du contexte dans lequel une procédure s’emploie. Comme nous le verrons plus tard, le soin d’éclaircir complètement le contexte d’utilisation est dévolu aux exemples résolus. Toutefois, le terrain est souvent préparé par le commentaire général.

Ce que nous appelons le contexte d’application d’une procédure recouvre trois choses : les données requises a priori pour pouvoir appliquer la procédure, le problème auquel elle donne une réponse, les sujets mathématiques où elle peut être employée. Ces trois aspects dépendent les uns des autres,

toutefois, il nous a semblé utile de les distinguer afin de rendre compte du travail qu'effectue le commentaire. En élaborant le contexte d'application d'une procédure, souvent, Bhāskara complète et étend la règle donnée elle-même.

Par exemple, dans la seconde moitié du vers 6, en tentant d'explicitier les données requises a priori pour calculer le volume d'un tétraèdre, Bhāskara étend la procédure en amont. La règle, au demeurant fautive, donnée dans cette partie du vers est la suivante (p. 58; ligne 3) :

Ab.2.6.cd La moitié du produit de cela avec le cĀté érigé, ceci est <le volume du> solide appelé ■à six-bords”||

Le calcul repose sur le résultat obtenu dans la première moitié du vers 6. Celui-ci explique comment calculer l'aire d'un triangle. Il est ici désigné par un démonstratif, *tad* (cela). Le volume d'un tétraèdre régulier est considéré comme la moitié du produit de l'aire du triangle qui fait sa base et du cĀté ■érigé■. Ainsi, les données nécessaires pour effectuer ce calcul seraient l'aire du triangle de base et la dimension de la hauteur. Bhāskara met en scène le dialogue suivant (lignes 5-8) :

*atha nirjñāte ūrdhvabhujāpramāṇe ghanaphalam ūrdhvabhujātatsaṃvargārdham
iti śakyate vaktum, na cānirjñāte/ satyam evaitat/ kintv atra
nirjñātam eva ūrdhvabhujāpramāṇam/ kutaḥ ? śāstre tadānayanopāyapradarśanāt/
tad yathā-(ity ādi)*

Maintenant, lorsque la taille du cĀté érigé est connue, l'on peut dire 'le volume est la moitié du produit de cela avec le cĀté érigé', mais pas lorsqu'elle est inconnue.

Ceci est vrai, en effet. Toutefois, vraiment, dans ce cas, la taille du cĀté érigé est connue.

Pourquoi ?

Parce qu'une méthode pour la calculer est expliquée dans un <autre> traité.

Il en va ainsi, etc.

Nous n'avons pas retranscrit ici comment le problème est retravaillé, de manière à ce que de la seule connaissance d'un cĀté du tétraèdre régulier, son volume puisse en être déduit³². Connaissant le cĀté d'un triangle équilatéral,

³²Voir à ce sujet la traduction et l'annexe de BAB.2.6.

d'après la procédure décrite dans la première partie du vers 6 nous savons calculer l'aire du triangle. Bhāskara explique alors, dans cette partie du commentaire, comment calculer à partir de ce cŹté le ■cŹté érigé■. Ainsi Bhāskara étend ici le contexte d'application de la procédure, en exigeant un travail mathématique supplémentaire. Cette extension réduit le nombre de données requises à priori pour l'appliquer : la longueur d'un des cŹtés du tétraèdre régulier suffira pour en calculer le volume.

Dans ce passage, comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, lorsqu'une procédure n'est pas explicitée dans le texte, une référence extérieure au traité est évoquée.

Dans d'autres cas, Bhāskara explicite à la fois les données requises et le problème que la procédure résoud. Se faisant, il éclaire les deux sujets à partir desquels le vers peut-être lu.

Le vers 16, en effet, s'énonce abruptement ainsi (p. 93; lignes 8-9) :

chāyāguṇitaṃ chāyāgravivaram ūnena bhājitaṃ koṭī
śaṅkugunā koṭī sā chāyābhaktā bhujā bhavati||

Ab.2.16. Le cŹté érigé est la distance entre les extrémités des
 ⟨deux⟩ ombres multipliée par une ombre, divisé par la diminution.|
 Ce cŹté érigé, ayant le gnomon pour multiplicateur, divisé par
 ⟨son⟩ ombre, devient la base.||

Deux contextes différents sont juxtaposés ici. D'un cŹté, des gnomons sont considérés puisque deux ombres sont mentionnées. De l'autre un triangle rectangle est suggéré par l'emploi des termes *koṭī*³³ (cŹté érigé) et *bhujā*, la base³⁴.

Bhāskara explique (lignes 12-14) :

anirjñatocchrāyayaṣṭipradīpāt kiyad apy aparṣṭya śaṅkuḥ sthāpitaḥ/
tasya chāyā jñāyata eva/ tacchāyāgrāt parigaṇite 'ntare dvitīyaśaṅkuḥ
tacchāyāgrāt pūrva-śaṅkucchāyāgram ity antaraṃ chāyāgravivaram/

Un gnomon a été fixé à une certaine distance d'une lumière
 ⟨posée⟩ sur une colonne de hauteur inconnue. ⟨La longueur
 de⟩ son ombre est connue, en effet. A une ⟨certaine⟩ distance,
 mesurée depuis l'extrémité de l'ombre, il y a un second gnomon.
 ■La distance entre les extrémités des ombres■ est la distance
 depuis l'extrémité de l'ombre de ce ⟨second gnomon⟩ jusqu'à
 l'extrémité de l'ombre du gnomon précédent.

³³Deux formes sont employées par Bhāskara, *koṭī* et parfois *koṭī*, nous n'avons pas distingué le contexte d'emploi de l'une ou de l'autre.

³⁴Pour la définition des figures géométriques, se reporter à la section 2.3.

Sont ainsi explicités la situation de départ présupposée par la règle, les données que celles-ci requiert au départ et ce qu'elle produit. Ceci est illustré dans le tableau 1.4

Table 1.4: Données requises et données obtenues dans le vers 16

Une source de lumière, en hauteur, illumine deux gnomons produisant ainsi deux ombres.

Données requises	Données obtenues
la longueur d'une des deux ombres, la hauteur du gnomon, la distance séparant l'extrémité des deux ombres, et la différence en longueur des deux ombres	La distance séparant le pied de la source de lumière de l'extrémité de l'ombre la plus éloignée de celui-ci; la hauteur de la source de lumière.

Ces informations nous fournissent en même temps le type de problème auquel la procédure offre une réponse. Le contexte est donc celui d'un problème de gnomons. Bhāskara, en précisant cela, nous fournit une indication sur la manière dont le vers est rédigé. En effet, l'introduction d'un vocabulaire propre aux triangles rectangles dans le vers souligne la parenté de la situation des gnomons avec ce dernier. Le triangle rectangle et le ■Théorème de Pythagore■ qui lui est associé, nous aurons l'occasion de le souligner à plusieurs reprises, correspond à une situation plus générale que celle des gnomons, dans le commentaire de Bhāskara. Il est en effet appliqué à des situations abstraites, dans des figures internes au trapèze, à des problèmes de trigonométrie et à des problèmes d'astronomie.

Or, cette parenté est ce qui permet de comprendre la règle énoncée : c'est en effet parce qu'il y a des triangles rectangles semblables que cette règle est juste. Le vers ainsi tout en évoquant gnomons et ombres dans l'énoncé d'une règle, décrit également succinctement le contexte plus général dans lequel cette règle peut être appliquée.

Soulignons que l'aspect ■concret■ de la situation du gnomon est toute relative. En effet, le commentaire du vers 14 suggère clairement que les gnomons étaient utilisés pour mesurer l'heure, la longitude du lieu et l'altitude du soleil pour un jour donné. Toutefois, nous le verrons dans le chapitre 2, les problèmes d'ombres et de gnomons sont considérés comme une sous-discipline des mathématiques. Précisément Bhāskara explique dans son commentaire du vers 16 que la situation décrite dans ce vers, où la source de lumière n'est pas le soleil, ne permet pas d'application à l'astronomie.

A travers cette réflexion nous voyons le commentateur dans un premier temps préciser le contexte d'application d'une procédure puis dans un second temps la limiter.

Au début de ce chapitre nous avons cité un passage du commentaire portant sur la Règle de Trois, interprétant l'un de ces mots comme une méta-règle (*paribhāṣā*)³⁵. Rappelons que cette méta-règle concerne justement les domaines d'application de la Règle de Trois.

Ainsi le commentaire à la fois délimite les domaines d'applications d'une règle et peut décrire les innombrables cas où celle-ci peut être utilisée. Ceci fait précisément partie de l'un des aspects de l'explication d'une règle caractéristique.

Nous voyons donc comment le contexte dans lequel une procédure s'applique est suppléé par le commentateur : les données de départ, le type de problème qu'une procédure résout et les limites de ses domaines d'application. Nous avons également observé que cette dimension du commentaire répond à diverses modalités de rédaction du vers. Celui-ci en un mot peut suggérer les innombrables domaines d'application d'une règle. Et, par la juxtaposition de deux situations, tout en énonçant une procédure, le vers peut donner les éléments qui en permettent sa preuve.

3 Ordonner les opérations

Nous avons vu plus haut comment le commentateur procède pour établir l'ordre des opérations dans le cas de l'extraction de la racine carrée. C'est également le cas pour la racine cubique. Le vers 5 énonce la procédure de cette manière (p. 56; lignes 10-13) :

Ab.2.5. L'on doit diviser la seconde ⟨place⟩ non-cubique par trois fois le carré de la racine du cube |
Le carré ⟨du quotient⟩ multiplié par trois et par la ⟨quantité⟩ précédente doit être soustrait de la première ⟨place non-cubique⟩, et le cube de ⟨la place⟩ cubique. ⟨Ceci produit la racine cubique.⟩ ||

La procédure, telle qu'elle apparaît dans le vers, commence par une division par le carré d'une racine cubique. Nous ne savons pas d'où elle provient. Bhāskara précise (p. 54; lignes 1-3) :

³⁵Voir la citation dans la section 1.2.

*atredam eva ghanarāśiṃ dr̥ṣṭvā ghana eko dvāv aghanāv iti vigaṇayya
yatra ghanas tasmād ghanamūlaṃ pūrvam eva kuryāt, ghanaś ca
ghanāc chodhya ity anena/*

Dans ce cas, lorsque précisément on a vu cette quantité cubique et que l'on a considéré «une ⟨place⟩ cubique et deux ⟨places⟩ non-cubiques», de cette place cubique ⟨considérée comme la plus grande⟩, on doit auparavant faire la racine cubique, au moyen de cette ⟨règle énoncée à la fin du vers⟩ «le cube doit être soustrait de la ⟨place⟩ cubique.»

Le début de la procédure est mise en place dans ce passage : considérant le nombre dont on veut extraire la racine cubique, choisissant le chiffre qui se tient dans la place correspondant à la plus grande puissance de 10 multiples de trois, on soustrait un nombre qui est un cube. La division utilisant la racine cubique de ce nombre n'est effectuée que par la suite. L'évocation de ce cube et de sa racine cubique ne se trouve pas au début du vers, mais à la fin. Ce dispositif, qui considère la procédure par son milieu, souligne encore une fois comment Āryabhaṭa se concentre sur la partie itérative de la procédure. Les deux algorithmes pour l'extraction d'une racine commencent par cette division, leur similitude étant soulignée de cette manière.

Ainsi avec cet exemple nous voyons la manière dont le commentateur explicite l'ordre dans lequel la procédure se déploie. Nous avons également observé comment le *sūtra* est rédigé afin de dire l'essentiel d'une procédure : l'itération est soulignée, les principales opérations également et, dans le cas de la division située ainsi au début dans les deux procédures d'extraction de la racine, elle apparaît de cette manière comme l'élément essentiel de la procédure.

4 Fabriquer des *sūtras* : second retour

Résumons ici les caractères des vers du traité tels qu'ils sont du moins soulignés par Bhāskara. Un vers peut contenir en germe ses propres modalités d'application, voire de démonstration³⁶. Il peut ne donner que les opérations essentielles d'une procédure. Le commentaire doit alors suppléer les opérations intermédiaires. Dans les deux procédures d'extraction de racines, la règle est itérative. Ceci s'exprime, dans le vers, par le fait d'énoncer la procédure en commençant par son milieu. Le commentaire décrit, dans ce cas, l'ordre dans lequel les opérations doivent être effectuées. Le *sūtra*, en

³⁶Nous y reviendrons dans la section 1.8.

quelque sorte, contient le germe d'une procédure que le commentaire doit faire ressortir et organiser.

Nous avons vu le commentaire donner un contexte aux règles énoncées, rétablir l'ordre des opérations à effectuer dans une procédure. Nous allons à présent examiner deux autres aspects du travail d'exégèse mathématique. En effet, le commentateur en expliquant une règle, crée une catégorisation des quantités qui interviennent en elle. Il met également en place une formulation standardisée des problèmes qu'une procédure résout. Ces deux éléments ont une fonction. Catégorisations et formulations standardisées sont des moyens d'appeler à l'application de la procédure à laquelle elles renvoient. Elles sont les éléments à partir desquels l'analyse d'un problème ou d'une situation est reconnue comme relevant de la dite procédure.

Il s'agit donc bien ici d'une lecture et interprétation du vers en procédure à appliquer. Partant du travail d'explicitation directe de ce que dit le traité, nous allons observer une pratique mathématique que le commentaire développe par lui-même. C'est un travail textuel appartenant au commentaire auquel on peut attribuer une fonction mathématique.

5 Reconnaître des procédures : nommer et formuler la bonne question

Nous avons choisi ici d'illustrer notre propos en prenant le cas de trois procédures. La première est souvent utilisée en tant que sous-procédure, c'est le ■Théorème de Pythagore■. La seconde est employée en commentant une autre procédure soit parce qu'elle est considérée comme le fondement possible d'une autre règle, soit parce qu'elle explicite des proportions : il s'agit de la Règle de Trois. La troisième est une sous-procédure employée dans le pulvérisateur. Cette sous-procédure n'existe pas dans le vers; elle est introduite par Bhāskara. Son usage requiert systématiquement la formulation d'une question type.

Ces trois occurrences sont précieuses pour nous puisque nous pouvons voir une procédure générale être appliquée dans divers contextes, eux aussi généraux.

5.a Nommer : le ■Théorème de Pythagore■

Le ■Théorème de Pythagore■ est énoncé dans la première moitié du vers 17 :

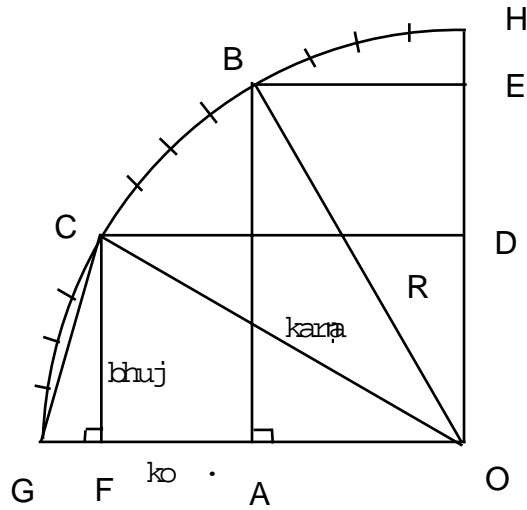
yaś caiva bhujā-vargaḥ koṭīvargaś ca karṇavargaḥ saḥ|

Ab.2.17ab. Ce qui précisément est le carré de la base et le carré du cĀtĀ-ĕrigĕ est le carrĕ de l'ĥypotĕnuse.

Cette affirmation repose sur les noms des cĀtĕs du triangle rectangle : l'ĥypotĕnuse (*karṇa*) et les deux cĀtĕs perpendiculaires, la base (*bhujā*) et le cĀtĕ ĕrigĕ (*koṭi*). Pour utiliser le Thĕorĕme de Pythagore dans une figure qui contient un triangle rectangle il faut identifier ce triangle. Pour le faire apparaĕtre, de maniĕre standard, le commentateur renouvelle l'appellation des segments.

Le commentaire de Bhāskara est parsemĕ d'usages du Thĕorĕme de Pythagore. Citons par exemple, la procĕdure employĕe dans le commentaire du vers 11. Un quart de cercle est divisĕ en douze arcs ĕgaux (voir la Figure ??).

Figure 1.1: Identification d'un triangle rectangle dans un quart de cercle



Le segment correspondant Ā la moitiĕ de la corde sous-tendant seize arcs s'appelle la demi-corde de huit arcs (les segments $AB = EO$ ou $CD = FO$ de la Figure ??, *aṣṭānāṃ kāṣṭhānāṃ jyā*). De mĕme, le segment correspondant Ā la moitiĕ de la corde sous-tendant huit arcs s'appelle la demi-corde de quatre arcs (les segments CF ou BE de la Figure ??). Dans l'exemple que nous prenons ici, Bhāskara vient de calculer la longueur de la demi-corde de quatre arcs. Il ĕcrit alors (p. 80; lignes 4-5) :

*iyam bhujā, vyāsārdham karṇaḥ, bhujākarṇavargaviśeṣamūlaṃ
koṭiḥ/ sā aṣṭānām kāṣṭhānām jyā*

Ceci est la base (*bhujā*), le semi-diamètre est l'hypoténuse (*karṇa*); le c^zté érigé (*koṭi*) est la racine de la différence des carrés de l'hypoténuse et de la base. Ceci est la <demi->corde de huit arcs unités.

Nous sommes en présence d'une figure où des segments à l'intérieur dessinent des triangles rectangles. Ces triangles rectangles sont désignés à l'attention du lecteur par un transfert de noms. Ainsi, la demi-corde de quatre arcs est renommée et s'appelle à présent la base (*CF* ou *BE*); le rayon devient l'hypoténuse (*CO* ou *OB*). Ceci suffit à identifier les triangles *OCF* et *OEB*. Dans ces derniers, le ■Théorème de Pythagore■ pourra être appliqué. Ayant calculé la longueur du ■c^zté érigé■ de ce triangle, celui-ci est de nouveau rebaptisé, afin de le reconsidérer dans le contexte de la figure originelle. Il redevient la ■<demi->corde de huit arcs unités■.

Remarquons une autre caractéristique de ce calcul. Puisque les c^ztés portent des noms standards, les sommets du triangle rectangle ne sont pas désignés. Ce calcul se rapporte ainsi à deux triangles rectangles dans cette figure. Nous reviendrons à cet aspect du travail géométrique au sein d'un diagramme dans le chapitre 3.

Retenons, pour le moment, que le ■Théorème de Pythagore■ s'applique à partir des noms spécifiques des c^ztés d'un triangle rectangle. C'est ce que nous appelons une catégorisation des données du problème. Appeler la procédure que nous avons l'habitude de nommer ■Théorème de Pythagore■ revient à identifier ces c^ztés dans le problème examiné. Cette analyse de la situation est reflétée dans le commentaire par l'attribution d'une nouvelle appellation pour les segments concernés. Rebaptiser les données d'un problème a deux effets simultanés : affirmer une propriété mathématique est affirmée et mettre en œuvre l'application d'une procédure.

5.b la Règle de Trois

La Règle de Trois a deux caractéristiques : elle emploie une catégorisation des quantités qu'elle utilise et elle répond à une question-type. Les quantités employées sont : la *quantité mesure* (*pramāṇa-rāśi*) qui produit une *quantité fruit* (*phala-rāśi*). La *quantité du désir* (*icchā-rāśi*) dont on cherche le *fruit du désir* (*icchā-phala*). Le vers 26, qui porte sur la Règle de Trois, s'énonce ainsi (p. 115; lignes 29-30) :

trairāśīkaphalarāśiṃ tam athecchārāśīnā hataṃ kṛtvā

labdham pramāṇabhajitaṃ tasmād icchāphalam idaṃ syāt||

Maintenant, lorsqu'on a multiplié cette quantité fruit de la Règle de Trois par la quantité du désir|
Le quotient de cela divisé par la mesure devrait être le fruit du désir||

Une manière d'appeler une Règle de Trois, lorsque quatre quantités proportionnelles sont en jeu, consiste à identifier à chaque fois la catégorie à laquelle chacune des quantités correspond. Ainsi le vers 10 donne, pour un diamètre précis, une circonférence approximative. Bhāskara explique qu'avec ce vers, la circonférence ou le diamètre de tout autre cercle peuvent être déterminés (p. 75; lignes 19-21) :

anena viṣkambhe nirjñāte paridhir anīyate, paridhau ca nirjñāte viṣkambha iti/ katham ? yady asya viṣkambhasyāyaṃ paridhir icchāviṣkambhasya kiyān, yady asya paridher ayaṃ viṣkambha icchāparidheḥ kiyān iti/

Au moyen de cette <règle>, lorsque le diamètre est connu, la circonférence est calculée et, lorsque la circonférence est connue, le diamètre <est calculé>.

Comment ?

Si ceci est la circonférence de ce diamètre, à combien s'évalue <la circonférence> de ce diamètre qui est le désir (*icchā*) ? Et si ceci a cette circonférence, à combien s'évalue le <diamètre> de cette circonférence qui est le désir ?

Puisque soit le diamètre soit la circonférence peuvent être des *quantités du désir*, on comprend ainsi, bien que cela ne soit pas explicité plus avant, que la circonférence et le diamètre donnés dans le vers 10 peuvent être *quantité mesure* et *quantité fruit* d'une Règle de Trois. Ce qui est recherché sera par conséquent *le fruit du désir*. Ainsi par un seul mot une Règle de Trois est mise en place. Celle-ci énonce une propriété mathématique : quel que soit le cercle, le rapport du diamètre à la circonférence est constant. Elle trace également un contexte procédural pour le vers 10. En effet, celui-ci ne formule pas de procédure, il ne fait que donner la valeur approximative de ce rapport. L'introduction de la Règle de Trois fait apparaître une procédure permettant le calcul soit d'un diamètre soit d'une circonférence.

Bhāskara explique dans son commentaire du vers 14 qu’il existe une formulation type (*vāco-yukti*) permettant d’identifier une Règle de Trois. Cette formulation, à la fois, montre une proportionnalité et l’insère dans un cadre où l’un des éléments de cette proportion pourra être calculé. Le commentaire du vers 14 décrit un rapport de proportion entre un gnomon et son ombre, d’une part, et des sinus dans le plan d’un grand cercle de la sphère céleste³⁷, d’autre part. Ici, trois couples de quantités sont proportionnels. Bhāskara écrit (p. 89; lignes 14-16) :

*atra ca svavṛttaviṣkambhārdhagrahaṇaṃ trairāśikaprasiddhyartham-
yady asya svavṛttaviṣkambhārdhasya ete śaṅku-cchāye tadā golaviṣkambhārdhasya
ke iti ’*

Et dans ce cas, la mention du semi-diamètre de son propre cercle est <effectuée> de manière à établir une Règle de Trois-■Si pour un semi-diamètre de son propre cercle, le gnomon et l’ombre sont <obtenus>, alors pour le semi-diamètre de la sphère <céleste>, quelles sont les deux <quantités obtenues> ?”

Cette formulation de la Règle de Trois se caractérise par une première clause conditionnelle donnant un rapport connu, suivi d’une question dans laquelle un second rapport possède un seul élément inconnu. Le plus souvent ces rapports sont formulés de la manière suivante : si au moyen de A, B est obtenu; au moyen de C qu’obtient-on ?

Nous avons vu comment dans le commentaire du vers 10, la Règle de Trois tout en explicitant une proportion créait un contexte procédural. Il en est de même dans le vers 14, mais elle sert dans ce cas à étendre à l’astronomie la procédure donnée.

Nous verrons comment dans d’autres cas, la Règle de Trois sert à réinterpréter des procédures : le calcul donné auparavant est alors *expliqué* par la Règle de Trois qui explicite la proportionnalité sur laquelle il repose. Nous pensons qu’il s’agit ici d’une des modalités de la preuve dans ce texte. Nous y reviendrons dans la section 1.8.

De même qu’en renommant, une propriété mathématique était soulignée tout en permettant l’emploi du ■Théorème de Pythagore■, la formulation d’une question-type souligne une proportionnalité à partir de laquelle la Règle de Trois peut-être employée. Nous avons donc vu que pour appeler une procédure, une catégorisation des données du problème peut être utilisée

³⁷Ce rapport de proportionnalité est expliqué dans l’Annexe de BAB.2.14 et dans la section 2.5.

tout aussi bien qu'une question-type. Cette dernière, tout en formulant différemment un problème, donne la clef de la procédure à employer.

5.c Trouver la quantité maligne dans la procédure du pulvérisateur

Bhāskara formule au début de son exégèse des vers 32-33 les conditions requises pour trouver la quantité maligne à utiliser dans la procédure du pulvérisateur (p. 132; lignes 15-17) :

*matiguṇaṃ, svabuddhiguṇaṃ ity arthaḥ/ kathaṃ punaḥ svabuddhiguṇaḥ
kriyate ? ayaṃ rāśiḥ kena guṇitam idam agrāntaraṃ prakṣipyā
viśodhya vā asya rāśeḥ śuddhaṃ bhāgaṃ dāsyatīti/*

⟨En ce qui concerne⟩ ■ayant pour multiplicateur la ⟨quantité⟩ maligne■, le sens est : avoir un multiplicateur (*guṇa*) selon sa propre intelligence (*buddhi*).

⟨Question⟩

Mais comment le multiplicateur est-il selon sa propre intelligence ?

⟨Il doit répondre à cette question :⟩ Est-ce que cette quantité (le reste), multiplié par ce qui ⟨est recherché⟩, lorsqu'est ajouté (*prakṣipyā*) ou soustrait (*viśodhya*) à la différence des restes, donnera une division exacte (*śuddhaṃ bhāgaṃ*) ⟨par le dernier diviseur⟩ ?

Cette formulation *définit* la quantité maligne. Mais elle apparaît dans la suite comme une formulation standard pour *appeler sa recherche*. Ainsi dans le premier exemple qui illustre la règle du pulvérisateur, le calcul suivant est décrit (p. 133; lignes 11-13)

*atraiva matiḥ kalpyate/ ayaṃ [upari]rāśiḥ kena guṇitaḥ rūpam
agrāntaraṃ prakṣipyā pañcabhiḥ śuddhaṃ bhāgaṃ dasyatīti labdhā
matiḥ dve rūpe/ bhāgalabdhā ekam 1, śeṣam 0/*

... dans ce cas seulement la ⟨quantité⟩ maligne est mise en avant : Est-ce que cette quantité [au-dessus] (trouvée auparavant et valant 2), multipliée par ce qui ⟨est recherché⟩, lorsqu'on a ajouté la différence des restes, qui est l'unité, donnera une division exacte par cinq ? ce qui est obtenu est la ⟨quantité⟩ maligne, deux unités. Le résultat de la division est un, 1, le reste 0.

Bhāskara ne donne pas de procédure pour trouver la quantité maligne, il lui suffit d'en exhiber une, remplissant les conditions requises par la formulation type³⁸.

Ici donc la question stéréotypée a deux fonctions : elle définit la quantité recherchée et elle appelle sa recherche.³⁹

Nous avons donc observé une pratique mathématique du commentaire, également vue à l'œuvre dans la rédaction des *sūtras* : le fait d'allouer des noms pour souligner des propriétés mathématiques. Cette pratique a également pour fonction, dans le commentaire, d'appeler à l'application d'une procédure. Nous avons également noté l'élaboration d'une question standard ayant la même fonction. Contrairement aux analyses mathématiques qui dérivent de l'exégèse directe des mots du vers, la catégorisation des données d'un problème et l'élaboration d'une question type font partie d'un travail élaboré par le commentaire sans référence directe au vers qu'il commente. Nous avons donc mis en lumière une pratique mathématique intrinsèquement liée à un style de texte mathématique : l'allocation d'un nom à un objet peut être une manière concise d'indiquer une propriété mathématique ou une procédure à mettre en œuvre.

6 Conclusion

Nous avons donc vu, en examinant seulement cette partie du texte que nous appelons le ■commentaire général■, comment Bhāskara lisait et découpait le vers afin d'en tirer un sens. Nous avons ensuite examiné comment il complétait et réagean■ait ce sens afin de faire de ce qui est dit une procédure applicable.

Ainsi avons-nous montré comment les dialogues, pour une part, soulignaient la cohérence du vers en rapport avec la procédure qu'il énonce. Nous avons également observé que le commentaire général fournit parfois le contexte d'emploi d'une procédure. Le vers ne le donne que rarement. En précisant le contexte d'application d'une procédure, le commentaire a recours à un travail mathématique qui peut étendre ce contexte d'application (dans la seconde moitié du vers 6) ou en expliquer les limites (dans le vers 16).

³⁸Voir à ce sujet l'annexe de BAB.2.32-33.

³⁹Notons que cette formulation correspond à une forme plus élaborée de la question-type présidant la réduction d'un quotient par un facteur commun, que l'on peut observer au début des applications à l'astronomie du pulvérisateur sans reste. Le type de problème qu'elle résoud est semblable à celle d'un pulvérisateur sans reste.

En observant cette manière de procéder, nous avons ainsi noté une pratique mathématique inhérente à une pratique textuelle : le fait de donner un même nom à deux objets distincts afin de souligner la propriété mathématique qui les lie. Cette pratique qui permet de désigner avec concision une propriété, relève à la fois du traité et du commentaire. Nous avons également vu que le commentateur appelle, comme un leitmotiv, une procédure en formulant une question-type. Cette reformulation implique un travail mathématique préalable : identifier dans le problème donné la situation où cette autre procédure est applicable. Énoncer cette question souligne alors une propriété mathématique du contexte (l'existence d'un triangle rectangle, d'une proportion, d'un quotient qui produit un entier). Cette propriété est intimement liée à une procédure que l'on pourra appliquer.

Nous allons à présent nous tourner vers la seconde partie du commentaire de Bhāskara, qui à chaque vers associe une liste d'exemples résolus. Dans cette partie le vers n'est que rarement glosé directement. Son sens est considéré comme entendu.

1.6 La fonction des exemples

Il existe trois types d'exemples dans le commentaire de Bhāskara :

- (1) ceux qui sont donnés au détour d'une définition, pour l'illustrer;
- (2) ceux qui sont utilisés dans des réfutations ou des objections;
- (3) ceux qui forment la partie des exemples résolus pour chaque commentaire de vers.

Les exemples résolus pour chaque commentaire de vers sont de loin les plus nombreux.

(1) Les exemples donnés au détour d'une définition ponctuent assez rarement le commentaire général. Ils sont introduits par le terme *yathā* que nous avons traduit par ■for example■ (par exemple). Ils illustrent directement le propos qui les précède. Le plus souvent ils sont de nature mathématique. De manière vivante, ils font de temps en temps référence à des situations qui ne sont pas de cette nature. Ainsi pour expliquer que diviseur et dividende doivent être ensemble réduits par leur PGCD, Bhāskara explique qu'ils ■s'accompagnent■ : ce qu'on fait à l'un, on doit le faire à l'autre. Ainsi s'il est précisé que ■le diviseur doit être réduit■, le dividende doit être réduit par le même nombre également. Le commentateur fait suivre cette remarque par un jeu de mot sanskrit. Ce dernier utilise l'expression ■laver les assiettes■ qui signifie ■laver la vaisselle■ (p. 135; lignes 11-12) :

yathā sthālāni parimṛjyantām ity ukte sarakāṅy api parimṛjyante/

Comme (*yathā*) lorsqu’il est dit : ■Lave les assiettes”, les verres sont lavés également⁴⁰.

(2) Les exemples dans les réfutations sont peu nombreux : nous en avons répertoriés trois exactement. Ils sont analysés dans la section 1.8.

Nous allons à présent nous tourner vers cette section de chaque commentaire de vers faite d’une liste d’exemples résolus (3).

1 Les Exemples résolus

Nous avons remarqué que l’ellipse des *sūtras* omettait souvent la situation dans laquelle la procédure prenait un sens. Un vers n’explicite pas la question à laquelle un algorithme répond, quelles données sont requises a priori, quels sont ses divers domaines d’application. Or, dans le commentaire général, la reconstitution de la procédure s’appuie directement sur le vers qui est aussi général que possible. La manière dont la procédure se décline dans des cas précis reste en suspens. D’autre part, le caractère général et abstrait du commentaire général ne nous donne aucune précision sur la manière dont les différentes opérations sont effectuées sur la surface de travail.

Les lacunes du vers et du ■commentaire général■ sont systématiquement expliquées dans la liste d’exemples résolus. Ce sont les problèmes versifiés⁴¹ qui, le plus souvent, fournissent le type de problème que résoud la procédure. Les parties ■disposition■, en représentant dans le texte du commentaire la surface de travail, nous donnent quelques indications sur les pratiques mathématiques dont le texte lui-même ne parle pas. Sans ces listes d’exemples, en fait, la compréhension de la procédure décrite serait lacunaire. Leur fonction explicative est parfois explicitée par le commentateur. Ainsi note-t-il dans son commentaire du vers 19, après avoir donné une liste de procédures (p. 105; lignes 17-18) :

tāni yathā krameṇa-uddeśakeṣv eva pratipādayiṣyāmaḥ

Nous expliquerons celles-ci dans l’ordre dans des exemples (*uddeśaka*) uniquement.

⁴⁰Dans la traduction anglaise ce jeu de mot se reproduit facilement car laver la vaisselle se dit ■to wash the dishes■. Nous pourrions, de manière non littérale, le traduire de la manière suivante (p. 135; lignes 11-12) :

Comme lorsqu’on dit ■mets le couvert■, on met également les assiettes.

Remarquons qu’en Inde on mange avec les mains, donc il n’est jamais à proprement dit question de ■mettre le couvert■.

⁴¹Se reporter à la section 1.3 pour une description de la structure formelle des listes d’exemples résolus.

1.a Problèmes versifiés

Le commentaire du deuxième chapitre de l'*Āryabhaṭīya* compte en tout 114 problèmes versifiés. Soit une moyenne de 3 à 4 exemples par ensemble de vers commentés. En fait, la répartition de ceux-ci est très inégale. Certains commentaires de vers ne comptent qu'un seul problème versifié, mais d'autres peuvent en comporter une dizaine. Celui qui porte sur le problème du pulvérisateur en compte 26. La grande majorité de ces problèmes est abstraite, en ce que les objets manipulés sont des objets mathématiques (tels des nombre ou des figures géométriques). Si nous incluons dans cet ensemble les problèmes de gnomons, sur l'ensemble des problèmes 60 sont abstraits (environ 52,6 %), 34 (environ 29,8%) sont soit ludiques soit d'aspect plus pratique (ce qui inclu les problèmes d'intérêts ou les problèmes marchands). Enfin une troisième grande partie concerne les applications des procédures à l'astronomie, formé de 20 problèmes en tout (environ 17,5%) dont 19 font partie du commentaire à la procédure du pulvérisateur (l'unique autre exemple étant consacré à un problème d'éclipse). A titre d'exemple le premier problème du commentaire de la première moitié du vers 6 est abstrait (p. 55; lignes 18-20) :

uddeśaka-

*saptāṣṭanavabhujānām kṣetrāṇām yatphalaṃ samānām/
pañcaśravaṇasya sakhe śadbhūsaṅkhyadvitulyasya//*

Un exemple-

**1. Ami, <dis> les aires des équi<latères> dont les c<ôtés>
sont <respectivement> sept, huit, et neuf|
Et de l'isocèle dont la base est six, et les oreilles cinq||**

Le premier exemple du commentaire de la Règle de Trois est d'aspect pratique (p. 117; lignes 1-3) :

uddeśakaḥ-

*candana-palāni pañca krītāni mayā hi rūpakair navabhiḥ/
candanam ekena tadā labhyaṃ [kiṃ] rūpakenaiva//*

Un exemple-

**1. Cinq *palas*⁴² de santal ont été achetés par moi pour
neuf *rūpakas*.|
Combien de santal, alors, doit être obtenu pour un *rūpaka*
?||**

⁴²En ce qui concerne les unités de poids, etc. voir la partie du glossaire consacrée aux unités de mesure (en anglais).

L'exemple 15 du commentaire aux vers 32-33 consacré au pulvérisateur est une application à l'astronomie (p. 145; lignes 1-3) :

uddeśakah-

*triṃśatpañcaśaśāṅkāḥ saṃyuktau śaśīdivākarau dr̥ṣṭau/
dīnarāśiṃ brūhi gataṃ cakrāṇi ca yāni bhuktāni//*

Un exemple-

15. Les ⟨longitudes de⟩ la lune et du soleil, sommées, sont vues être de trente ⟨minutes⟩, cinq ⟨degrés⟩ et un ⟨signe⟩ | Dis le nombre de jours passés ⟨dans le *Kali-yuga*⟩ et les révolutions effectuées.||

1.b Disposition

Les dispositions de données mettent en lumière certaines des pratiques mathématiques matérielles qui débordent du texte. Elles représentent la surface de travail dans ce dernier. Des quantités ou des diagrammes y sont notés. Elles demandent toujours un travail de traduction qui consiste à puiser les données dans le texte et à les noter d'une manière particulière, à partir de laquelle la procédure sera concrètement appliquée. Par exemple, en raison de la diversité des expressions sanskrites pour nommer les nombres, disposer des quantités consiste à traduire des valeurs exprimées en mots par des nombres notés à l'aide de la numération positionnelle décimale : ce travail est considéré comme une activité mathématique en soi puisqu'elle est l'objet du vers 2⁴³.

Mais une disposition n'est pas simplement un travail de réécriture. Les données du problème sont toujours placées les unes par rapport aux autres de manière significatives. En arithmétique, le positionnement des quantités sur la surface de travail rend compte de la catégorisation des quantités que la procédure emploie.

Par exemple, dans la Règle de Trois, les trois quantités connues sont les *quantités mesure, fruit et désir*. Bhāskara cite un vers qui leur assigne une disposition. Les *quantités mesure* et *désir* sont disposées d'un côté et de l'autre de la *quantité fruit* qui se trouve au milieu. Ainsi la partie ■disposition■ du problème que nous avons cité plus haut sur la Règle de Trois est la suivante :

⁴³Nous avons étudié cet aspect dans la section 2.2. De même, les figures géométriques évoquées en mots, sont dessinées. Nous reviendrons à ces diagrammes dans le chapitre 3.

Disposition (<i>nyāsaḥ</i>)-	quantité mesure	quantité fruit	quantité du désir
	9	5	1

Pour comprendre cette disposition, nous sommes obligés de relire le problème, d’y identifier quelles sont les différentes catégories de quantités avec les données du problème. Ce travail, nous le voyons, est le prélude nécessaire à l’application de la Règle de Trois. Comme nous le précisons plus bas, Bhāskara dans la partie ■résolution■, commence par effectuer cette identification avant d’appliquer la Règle. Suivant le même principe qui associe catégorisation des quantités et disposition, dans les Règles de Cinq, Sept et Neuf, les diviseurs sont disposés en colonne à gauche, les multiplicateurs à droite.

Disposer les quantités les rend donc prêtes à l’emploi. Elles sont notées de manière à effectuer simplement des opérations (la numération positionnelle décimale). Elles sont également disposées dans des places précises qui disent immédiatement dans quelles opérations elles seront employées en appliquant la procédure.

De même en géométrie, la position relative des côtés les uns aux autres dans une figure donnée indique en filigrane comment un Théorème de Pythagore sera employé. Ainsi, dans le manuscrit dont nous avons une copie⁴⁴, l’illustration du problème de la première moitié du vers 6 cité plus haut en exemple, est reproduite dans la Figure 3.2.

Les nombres désignent les segments dont on connaît la longueur. Ainsi est distinguée la base du triangle isocèle de ses oreilles. Dans tous les triangles dessinés, leur hauteur inconnue est représentée.

Dans ces deux cas, apparaissent les inconnues recherchées en filigrane, en arithmétique par une place vide (parfois notée avec un ■0■, nous y reviendrons) ou en géométrie par un segment qui ne porte pas de nombre.

Ainsi, la partie disposition reformule et résume le problème. Elle montre immédiatement ce qui est connu et ce qui ne l’est pas. Et elle suggère comment le problème sera résolu.

1.c Résolution

Cette partie peut se lire comme une glose particulière du vers commenté. Tournons-nous vers la partie résolution du problème concernant la Règle de Trois, que nous avons examinée plus haut. Rappelons ici la Règle de Trois, énoncée dans le vers 26 (p. 115; lignes 29-30) :

⁴⁴Voir à ce sujet le chapitre 3.

Maintenant, lorsqu'on a multiplié cette quantité fruit de la Règle de Trois par la quantité du désir|
Le quotient de cela divisé par la mesure devrait être le fruit du désir||

La partie ■résolution■ de l'exemple commence de cette manière (p. 117; lignes 9-11) :

*karaṇam- rūpakair navabhiḥ pañcacandanapalānāti nava pramāṇarāśiḥ,
pañca phalarāśiḥ/ ekena rūpeṇa kim ity ekaṃ icchārāśiḥ/ tenaikeneccchārāśinā
phalarāśir guṇitaḥ 5, pramāṇarāśinā navakena vibhajyate* $\frac{5}{9}$

Procédure- Puisque cinq *palas* de santal (sont obtenus) avec neuf *rūpakas*, neuf est la quantité mesure, cinq est la quantité fruit. Puisque ■qu'est-ce qui (est obtenu) avec un *rūpaka* ?■ (est la question) un est la quantité du désir. La quantité fruit multipliée par cette quantité du désir qui est un, 5, est divisée par la quantité mesure qui est neuf, $\frac{5}{9}$.

La première partie de la résolution relit donc le problème en y identifiant les catégories sur lesquelles repose la Règle de Trois. En vérité, la disposition des données, qui distingue les quantités *mesure*, *fruit* et *du désir*, a déjà effectué ce travail. Cette identification terminée, l'exécution des opérations se fait dans le cadre d'un exemple numérique précis.

Mais ne se contentant pas d'être une application dans un cadre spécifique de la procédure, la partie résolution élabore parfois un raisonnement afin de retrouver les conditions requises pour son application.

Ainsi la première moitié du vers 6 donne la règle suivante pour calculer les aires des triangles :

tribhujasya phalaśarīraṃ samadalakoṭībhujārdhasaṃvargah|

La grandeur de l'aire d'un trilatère est le produit de la moitié de la base avec la perpendiculaire|

Or le premier exemple d'application de cette règle, rappelons le, ne donne que la dimension des côtés du triangle. Bhāskara effectue donc un raisonnement général afin de montrer comment à partir de ces données, la hauteur peut-être obtenue. Il commence par citer un vers indiquant que la hauteur

dans un triangle équilatéral, comme dans un triangle isocèle, est la médiatrice. Puis il applique le ■Théorème de Pythagore■ au triangle formé par l'un des cĀtés, la hauteur et la moitié de la base. Ayant ainsi obtenu la hauteur il peut alors appliquer la règle contenue dans le vers 6.

Bhāskara, par des citations extérieures au traité, en utilisant le ■Théorème de Pythagore■, etc., reprend donc, dans la partie résolution, les mêmes techniques que celles mises en œuvre dans le ■commentaire général■ pour transformer la règle énoncée dans le vers en procédure. Dans le cas examiné ici, le problème et sa résolution élaborent une extension de la procédure : on peut l'appliquer ne connaissant que les cĀtés du triangle. Mais cette extension se fait dans un cadre plus particulier que celui énoncé par le vers : des triangles équilatéraux sont considérés.

De manière générale les parties ■résolution■ opèrent en amont de la procédure, afin de retrouver les conditions requises pour l'appliquer. Elles mettent en œuvre des variations au sein même de la procédure lorsque des quantités particulières apparaissent (tels des fractions ou des *karaṇīs*). Finalement, elles travaillent en aval de la procédure en cherchant par exemple à convertir des fractions en diverses unités, à travailler le résultat que produit la procédure de telle sorte qu'il réponde à la question de départ, etc. Ce faisant, nous y reviendrons, ce sont des passages du texte où, comme dans le ■commentaire général■, des définitions sont élaborées, des explications ou des preuves sont mises en œuvre.

2 Relations des exemples entre eux

Dans un commentaire de vers donné, la succession des exemples ne se fait pas au hasard; elle semble toujours suivre une progression. Les exemples sont souvent en ordre croissant de difficulté.

Ainsi le premier exemple d'application de la Règle de Trois utilise des quantités entières. Dans le second, deux des trois quantités sont fractionnaires, dans le troisième les trois le sont. Ce changement de nature dans les quantités rend la procédure plus compliquée à appliquer.

De même dans le commentaire de la première moitié du vers 6, le second exemple traite du cas d'un triangle isocèle et le troisième du cas d'un triangle quelconque. Dans le cas du triangle quelconque, le travail nécessaire pour obtenir la longueur de la hauteur est plus important.

Le premier problème dans le commentaire d'une règle formule une question-type. Pour reconnaître le contexte dans lequel une procédure peut-être utilisée, le commentateur prend appui sur elle. Dans les commentaires qui com-

portent de nombreux exemples des variations de cette question-type sont introduites. Les parties résolutions élaborent alors un raisonnement dont l'objectif est de ramener cette variation au cas standard défini auparavant.

Dans le commentaire de la Règle de Trois, les problèmes de conversion sont suivis de problèmes ludiques. Ainsi l'exemple cinq présente un problème de troupeau (p. 118; lignes 23-24) :

uddeśakah-
aṣṭau dāntās trayo damyā iti gāvah prakṛtitāḥ/
ekāgrasya sahasrasya kati dāntāḥ katitare//

Un exemple-

5. Du bétail est décrit (de la manière suivante) : huit sont domptés, trois doivent être domptés| Sur mille et une (têtes de bétail) combien sont domptées ? combien sont autres ?||

Comment la situation décrite dans ce problème se rapporte-t-elle à une Règle de Trois ? Le raisonnement élaboré par Bhāskara afin de disposer correctement les données du problème, nous l'explique (p.118; lignes 26-27; p. 119; lignes 1-4) :

nyāsaḥ- aṣṭau dāntāḥ 8, trayo damyāḥ 3, dāntadamyānām ekottaraṃ sahasraṃ 1001/
atrāyaṃ trairāśikanyāsaḥ-
dāntadamyāḥ 11, dāntāḥ 8, sarvasamudāyaḥ 1001/
atreyaṃ vāco yuktiḥ- ekādaśabhir dāntadamyaiḥ aṣṭau dāntā labhyante, tadaikāgreṇa sahasreṇa kiyantāṃ dāntāḥ iti labdhā

Disposition (*nyāsaḥ*)- huit sont domptées, 8, trois doivent être domptées, 3, les domptées et indomptées sont 1001. Dans ce cas la disposition de la Règle de la Trois est (la suivante)-
domptés et indomptées, 11 domptées, 8 l'ensemble du troupeau 1001
Dans ce cas la formulation verbale est- ■Si avec onze domptées et indomptées, huit domptées sont obtenus, avec mille et un combien de domptées (sont obtenues) ?■

La disposition se fait ainsi en deux temps. Une première disposition note les données du problème, la seconde transforme ses données et les réinterprète de manière à ce qu'elles correspondent aux catégories requises pour appliquer une Règle de Trois. Cette seconde disposition suit la disposition définie pour l'application de cette Règle. La formulation verbale, de

même, ramène la question posée par le problème versifié, à une autre dans laquelle les rapports de proportions sont clairement établis. Cette dernière formulation suit la structure de la question-type de la Règle de Trois. Cette transformation nécessite un calcul mathématique (une addition). Elle est surtout une analyse de la situation initiale qui identifie en elle le rapport de proportion qu'elle cache (les troupes ont toujours la même proportion de têtes domptées et indomptées).

Dispositions et questions-types de la Règle de Trois apparaissent comme des formes préétablies auxquelles tout autre problème doit pouvoir se ramener.

Le commentaire de la seconde moitié du vers 17 créé, au sein même des variations de problèmes, un ensemble de cas-types. Après un premier exemple abstrait, une suite d'exemples est donnée. Tous exigent un travail pour que l'on puisse y appliquer la procédure. Ceux-ci, portent des noms ludiques : ■le rat et le faucon■, ■le bambou brisé■, ■le lotus qui s'enfonce dans l'eau■ et ■le poisson et la grue■. Tous présentent un premier problème dans lequel le rapport avec la procédure initiale est souligné puis une disposition particulière est mise en œuvre (des diagrammes spécifiques) et enfin une procédure utilisant la règle du vers 17 comme une sous-procédure est élaborée. Ce premier problème est suivi de plusieurs autres à résoudre à partir de ce nouveau cas standard.⁴⁵

Parfois, certains exemples présentant différentes variations de la procédure appliquée, sont ensuite combinés. Ainsi dans le commentaire au vers 32-33, l'exemple 16 et l'exemple 23 donnent des exemples de pulvérisateur avec deux résidus. Les exemples 24-25 donnent des exemples de pulvérisateur orbital avec deux résidus. L'exemple 26 donne un exemple de pulvérisateur orbital avec trois résidus.

L'ensemble des exemples est ainsi structuré en fonction de la nature des données qu'ils emploient (des entiers aux quantités fractionnaires, du cas équilatéral au cas quelconque), suivant le type de contexte qu'ils proposent et la complexité des procédures qu'ils utilisent.

3 Relations des exemples avec la règle commentée

L'importance des exemples dans notre compréhension de la règle peut être soulignée par le fait que sans eux ou lorsqu'ils sont trop rapides, des informations manquent. Ainsi parce que nous n'avons pas d'exemple détaillé des

⁴⁵Nous renvoyons, pour plus de détails, à la traduction de ce commentaire de vers et à l'annexe de BAB.2.17.

procédures utilisées pour élever au carré, au cube et extraire des racines, nous sommes obligés de restituer de nombreuses étapes de ces procédures sans pouvoir nous assurer des hypothèses que nous avançons⁴⁶.

Les exemples précisent la manière dont une procédure est appliquée, le type de problème résolu et comment un contexte peut être analysé de manière à entrer dans le cas particulier où la règle peut être utilisée.

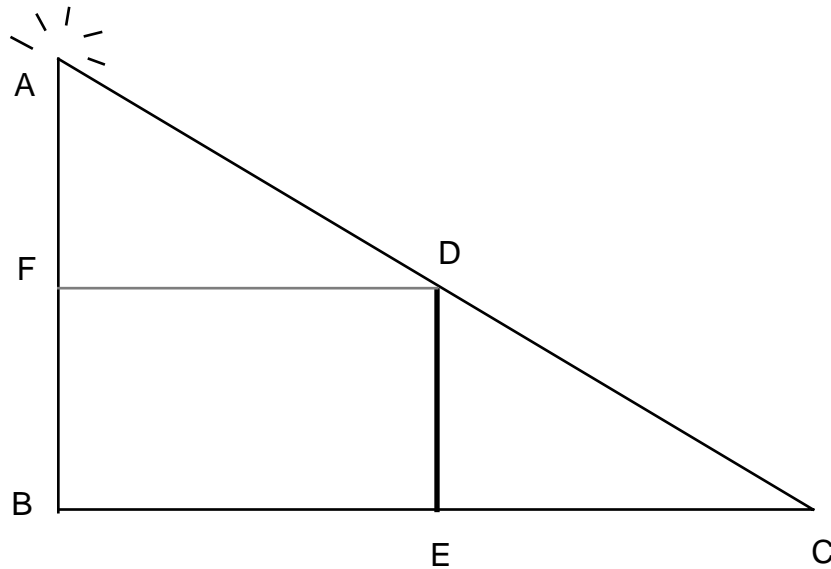
Les exemples définissent une catégorisation des contextes où la règle peut s'appliquer. Ils peuvent, de cette manière, étendre et généraliser la situation requise par la règle à plusieurs niveaux. Les exemples peuvent étendre les types d'objet utilisés par la règle (entiers, fractions, triangles isocèles et équilatéraux puis triangles quelconques). Ils élargissent parfois le contexte d'application lui-même. La procédure apparaît alors comme un cas particulier de ce nouveau contexte.

Par exemple, le vers 15 considère la relation qui lie un gnomon, une source lumineuse (tous deux sont connus) et l'ombre du gnomon que la règle produit. Dans son commentaire du vers 15, sont considérés toutes les relations qui peuvent lier l'une de ces données au deux autres. Pour résoudre ces problèmes seul l'un des cas utilise directement le vers 15. Un autre l'inverse, et le troisième considère le vers suivant, le vers 16, dans un cas particulier. Ceci est illustré dans le tableau 1.5.

⁴⁶Voir les annexes de BAB.2.3. et BAB.2.4-5.

Table 1.5: Catégorisation des problèmes dans le commentaire du vers 15
 Les problèmes traités dans le vers 15 tournent autour de la situation
 suivante :

Un gnomon de longueur connue (DE), éclairé par une source lumineuse en hauteur (AB), a une ombre (EC). Les données considérées sont la longueur de cette ombre (EC), la distance séparant le gnomon de la source lumineuse (BE), et la différence entre la hauteur de la source lumineuse et celle du gnomon (AF).



Le détail des procédures est expliqué dans l'Annexe de BAB.2.15.

	Données de départ	Donnée obtenue	Procédure utilisée
Exemple 1	BE et AF	EC	Vers 15
Exemple 2	EC et AF	BE	Inversion du vers 15
Exemple 3	EC et BE	AB	La seconde moitié du vers 16. (notons qu'à partir de AB , connaissant DE , on peut en dédire AF)

4 Conclusion : ce que l'illustration apporte à la règle caractérisante

Nous avons décrit la manière dont règles caractérisantes et illustrations forment un couple qui s'oppose et se complète. D'une certaine manière les deux parties qui forment chaque commentaire de vers chez Bhāskara, le commentaire général d'un cĀtē et la liste d'exemples résolus de l'autre, nous montrent précisément comment ce couple fonctionne.

La règle est une graine (*bīja*). Le commentaire général explicite son sens littéral dans toute sa généralité et reconstruit partiellement la procédure qu'elle énonce. Les exemples font germer la règle de toutes les manières possibles. Ils décrivent les divers contextes d'application d'une procédure. Ils précisent comment elle s'emploie suivant les objets particuliers qui y sont manipulés. Les exemples peuvent étendre la procédure dans un cadre spécifique. Ils peuvent intégrer la procédure dans un ensemble de procédures plus générales. La règle énoncée par le vers apparaît alors comme un cas particulier.

La liste d'exemples résolus complète ainsi le travail de transformation de la règle énoncée par le vers en procédure. Les premiers exemples de chaque liste apparaissent comme des formulations standardisées de la question que la procédure permet de résoudre. Ils mettent également en place une disposition

standardisée des données sur la surface de travail. Toute extension du cadre d'application d'une procédure passe alors par une réécriture de ce cadre afin de le ramener à cette situation-type.

Enfin les parties dispositions, qui figurent la surface de travail dans le texte, sont la fenêtre que le commentaire ouvre sur des pratiques mathématiques concrètes qui ne sont pas explicitées.

Les exemples ne sont donc pas de simples illustrations de la Règle. Le commentateur y élabore mathématiquement la procédure. Il y explicite à la fois comment elle peut être transformée dans des cas particuliers et comment elle peut être elle-même considérée comme un cas particulier d'un ensemble plus vaste de procédures.

1.7 Définir et Caractériser

Le commentaire de Bhāskara a, en partie, pour objectif d'éclaircir tout ce que le traité ne dit pas explicitement. Ceci requiert de préciser la signification du vocabulaire technique employé et son usage. La concision du traité nécessite

un choix rigoureux de chacun des mots qu'un vers emploie. Toutefois, les termes adoptés sont parfois ambigus parce qu'ils sont travaillés par l'ellipse que la rédaction de la règle requiert. En discutant par la glose de l'emploi d'un mot donné pour désigner un objet précis, le commentaire de Bhāskara élabore des définitions et des caractérisations des objets et opérations mathématiques que le traité examine. La signification de la plupart des termes employés par Āryabhaṭa est précisée, en général, par le commentateur à l'aide d'un synonyme. De temps en temps le commentaire fait des descriptions. Celles-ci peuvent être visuelles (en géométrie), mais elles peuvent également s'élaborer à partir d'un débat mis en scène qui discute du nom porté par un objet. Bhāskara distingue alors des sous-catégories d'objets portant le même nom. Ce travail débouche souvent sur une signification technique allouée au nom analysé.

Nous avons noté l'aspect frappant des continuelles analyses et discussions grammaticales qui forment le commentaire général de chaque commentaire de vers. Nous avons également souligné leur fonction première : l'éclaircissement syntaxique du vers. Nous allons ici mettre en évidence une autre fonction. Si une définition mathématique est l'association d'un nom technique à un objet mathématique délimité avec précision, alors, la mise en scène d'une discussion grammaticale est la manière la plus courante qu'emploie ce commentaire pour élaborer et justifier une définition mathématique.

Les deux problèmes sur lesquels portent des discussions grammaticales sont :

- La correction du terme utilisé par Āryabhaṭa dans sa fonction d'étiquetage d'un objet mathématique donné;
- L'argumentation en faveur d'un sens technique, généralement effectué en opposant le traité (*śāstra*) et le monde (*loka*) ou des sens conventionnels à des étymologies grammaticales.

Afin de justifier et illustrer notre propos, nous allons examiner deux cas particuliers : la définition du carré géométrique et celle de la base du triangle. Puis nous décrirons de manière plus générale ce travail à la fois textuel et mathématique du commentaire.

1 Nommer : le nom et l'objet qui possède le nom

L'objet géométrique et l'opération arithmétique affublés du nom de carré (*varga*) sont définis dans la première moitié du vers 3 (p. 47, ligne 17) :

AB 2.3ab/ vargaḥ samacaturaśraḥ phalaṃ ca sadṛśadvayasya saṃvargaḥ/

Un carré est un équi-quadrilatère ainsi que le fruit qui est le produit des deux mêmes|

Bhāskara commence par donner des synonymes du terme *varga* (idem, ligne 16) :

vargaḥ karaṇī kṛtiḥ vargaṇā yāvakaraṇam-iti paryāyāḥ/

Varga, karaṇī, kṛti, vargaṇā, yāvakaraṇa sont des synonymes.

Il analyse ensuite le composé *sama-catur-aśra* (lit. égal-quatre-c⁴tés, un équi-quadrilatère). Une discussion suit, qui met très clairement en lumière la relation que le mot utilisé entretient avec l'objet qu'il nomme (idem, lignes 19-22) :

samacaturaśra-kṣetraviśeṣaḥ saṃjñī, vargaḥ saṃjñā/ atra saṃjñī-saṃjñāyor abhedena upacāreṇa ucyate 'vargaḥ samacaturaśraḥ' iti/ yathā 'māṃsapiṇḍo devadattaḥ' iti/ anyathātra yāvān samacaturaśrakṣetraviśeṣaḥ tasya sarvasya aniṣṭasya api vargasamjñāprasaṅgaḥ/

Ce qui porte le nom est un genre de champ équi-quadrilatère. Ici, parce que la coutume ne distingue pas ce qui porte le nom du nom, il a été dit : ■un carré est un équi-quadrilatère■. Comme < dans l'expression > ■Devadatta est un amas de chair". Si ce n'était pas le cas, ici, tant qu'il s'agit d'un genre de champ équi-quadrilatère, il serait possible < d'attribuer > le nom de ■carré" à tous ces < champs >, même lorsqu'< ils sont > indésirables.

Ce passage est une justification linguistique de l'usage du mot : selon Bhāskara, c'est par convention qu'un tel objet est ainsi étiqueté. Une telle discussion est nécessaire, parce que des objets qui ont quatre c⁴tés égaux ne sont pas toujours des carrés. C'est ce que Bhāskara discute par la suite (p. 47, lignes 22-23, p.48, lignes 2-3) :

kva anyatra aniṣṭasya samacaturaśrakṣetraviśeṣasya vargasamjñāprasaṅgaḥ ? ucyate- asamakarṇasya samacaturaśrakṣetraviśeṣasya asya (parilekhaḥ 1)/ dvisamatryaśrakṣetrasya samunnatavadavasthitasyānya (parilekhaḥ 2)/

<Question>

Quand, dans cet autre cas, est-il possible que le nom de ■carré■ (soit porté) par un genre d'équi-quadrilatère indésirable ?

Ceci est dit- Ce genre d'équi-quadrilatère-ci dont les diagonales sont inégales porte (ce nom) (figure 1)⁴⁷, et ce (champ formé de) deux champs équi-trilatères disposés comme s'ils avaient été soulevés porte (ce nom) (figure 2).

Cette remarque est suivie par ce que nous pouvons interpréter comme une caractérisation du carré : un champ ayant quatre cĀtés égaux, dont l'aire est un cĀté élevé au carré ou, de manière équivalente, un champ avec quatre cĀtés égaux et dont les diagonales sont égales. D'après Bhāskara, la caractérisation qu'adopte Āryabhaṭa précise que l'aire d'un tel quadrilatère est le carré d'un cĀté. Le commentateur la reformule, quant à lui, en caractérisant le carré à partir de ses diagonales. Les deux phrases où il effectue cette reformulation peuvent également être interprétées comme deux analyses différentes du composé *sama-catur-aśra*. L'analyse grammaticale et la définition ne sont pas séparées. Dans le cas de la première phrase (p. 48, ligne 6) :

vargaḥ samakarṇasamacaturaśrakṣetraviśeṣa iti/

Un carré est ainsi un genre de champ équi-diagonales-équi-quadrilatère

Le composé est ici compris comme une forme concise, élidée d'un composé plus long, qui mentionne le fait que les diagonales sont égales.

Dans la seconde phrase (idem, lignes 6-7) :

*athavā tulyasaṅkhyābhyāṃ karṇābhyāṃ upalakṣitasyaiva samacaturaśrakṣetraviśeṣasya
vargasamjñā jñāsyate/*

Ou peut-être que le nom de ■carré” est reconnu pour un genre de champ équi-quadrilatère caractérisé effectivement par le fait que ses deux diagonales ont la même valeur.

C'est l'usage du terme *varga* qui, par convention ou, dans les termes de Bhāskara, par tradition restreindrait la signification du composé.

Bhāskara de cette manière définit le carré en donnant un sens technique au composé *sama-catur-aśra*. Pour ce faire, il est passé par un examen de

⁴⁷Les figures auxquelles il est fait référence ici sont celles de l'édition sanskrite, reproduites dans la traduction. Il s'agit de deux types de losanges.

ce qui n'est pas un carré. Dans le passage qui suit il donne une définition de ce qu'est un terme technique, s'écartant ainsi d'un discours strictement mathématique. Le terme technique aurait une signification dans le traité, qui peut s'écarter de celle que donnerait une analyse étymologique ou grammaticale. Cette remarque est suivie, d'une autre affirmation : le sens technique du terme *sama-catur-aśra* serait celui qui est entendu couramment, et s'opposerait à celui qui naît d'une analyse grammaticale (p. 48, lignes 7-9)

*kutaḥ ? nāniṣṭārthatvāc chāstrapravṛtteḥ/ athavā naiva loke
evam ākāraviśiṣṭasya samacaturaśrakṣetrasya samacaturaśrasamjñā
susiddhā/*

⟨Question⟩
Pourquoi ?

Parce que l'utilisation ⟨d'un mot⟩ dans le traité n'a pas l'état d'avoir un sens indésirable. Ou peut-être parce que, dans le monde, également, le nom d'«équi-quadrilatère» n'a pas été correctement établi pour un équi-quadrilatère caractérisé par de telles formes (telles que celles des figures 1 et 2).

Plusieurs niveaux d'acception du sens d'un mot sont distingués ici. L'un est courant, l'autre provient d'une analyse grammaticale, l'autre encore est produit au sein du traité et a une acception conventionnelle. Ces trois niveaux peuvent se contredire ou être en accord.

Bhāskara, dans ce passage, oscille sans cesse entre explication à caractère mathématique et explication non mathématique, chaque étape du raisonnement étant soulignée par la mise en scène d'une question. Nous avons ainsi un bel exemple de comment une analyse mathématique peut se tisser avec une analyse linguistique. Ce passage souligne, par ailleurs, les différentes étapes que peut suivre le processus de définition dans un commentaire :

- Des synonymes des mots employés dans le vers sont fournis;
- Une discussion sur le sens technique qu'il faut donner au mot est menée. C'est ici que l'objet étiqueté est défini, ceci passe par une caractérisation de ce qu'il n'est pas;
- Les divers procédés par lesquels on peut déterminer le signifiant d'un signifié sont analysés : une analyse étymologique/grammaticale, l'usage, ou une convention qui élabore un sens technique.

Une argumentation, justifiant le nom employé dans le traité, est élaborée pour chacun de ces procédés.

2 Termes techniques : sens conventionnels et étymologies

Le même processus consistant à déterminer de quelle manière un mot ou un composé employé dans le vers se rapporte à l'objet qu'il désigne se trouve dans le commentaire de la première moitié du vers 6. Ce dernier donne la règle suivante (p. 54 ligne 54) :

tribhujasya phalaśārīraṃ samadalakoṭībhujārdhasaṃvargaḥ/

La grandeur de l'aire d'un trilatère est le produit de la moitié de la base (*bhujā*) avec la perpendiculaire (*samadalakoṭī*)|

Dans ce passage Bhāskara discute du sens de deux mots, celui employé pour la base, *bhujā*, et celui employé pour la perpendiculaire, *sama-dala-koṭī*. Dans les deux cas Bhāskara retient une signification technique. Si pour *bhujā* il restreint la signification du mot, pour *sama-dala-koṭī* il argumente pour une extension de la signification de ce terme.

Au-delà de la définition qu'il construit à travers ces discussions, Bhāskara, en fait, étend la situation proposée par Āryabhaṭa dans le vers.

En ce qui concerne le terme *bhujā*, Bhāskara commence par nous en fournir une liste de synonymes, que nous avons déjà donnée en exemple, plus haut (p. 55, lignes 1-2) :

bhujā bāhuḥ pārśvam iti paryāyāḥ/

Bhujā, bāhu et *pārśva* sont des synonymes.

Plus tard dans le commentaire général il explique comment ce terme, qui signifie généralement cōté (comme dans *tri-bhujā*, trilatère; *catur-bhujā* quadrilatère), doit être compris ici dans un sens plus restreint (p. 55, lignes 10-13) :

athātra bhujāśabdena bhujā bāhuḥ pārśvam iti sāmānyena trayāṇāṃ pārśvāṇāṃ pratipattau prasaktāyāṃ viśiṣṭā eva bhujā pariḡrhyate, bhujāsamjñitā/■sāmānyacodanās ca viśeṣe 'vatīṣṭhanta' iti /

Maintenant, dans ce cas, bien qu'il soit possible d'accepter, au moyen du mot *bhujā*, les trois cĀtés (*pārśva*) en général, puisqu'«il a été précisé que» *bhujā*, *bāhu* et *pārśva* sont «des synonymes», seulement un cĀté (*bhujā*) spécifique est choisi. Il est appelé *bhujā*. «Il a été dit»

■Ce qui mène à la généralité repose dans la particularité”.

Le dernier aphorisme cité est à entendre, dans ce cas, comme justifiant l'attribution d'un sens plus restreint pour *bhujā*. En effet, si dans un triangle équilatéral, n'importe quel cĀté peut être pris pour base, dans le cas plus général d'un triangle quelconque, il faut arbitrairement fixer l'un des cĀtés, que l'on nommera ■base■. Ainsi cette construction d'un nouveau sens pour *bhujā* participe à une extension de la portée du vers d'*Āryabhaṭa*.

Bhāskara consolide cette justification en ayant recours à une argumentation grammaticale (lignes 13-15) :

atra gaṇite bhujāśabdaḥ auṇādikāḥ pratipattavyaḥ, anyathā hi ■bhujānyubjau pāṇy-upatāpayoḥ” [aṣṭādhyāyī, 7. 3. 61] iti bhujāśabdasya pāṇāv arthe nipātitattvāt kṣetrapārśve na labhyate/

Ici, en mathématiques, le mot *bhujā* doit être accepté comme un *Uṇādī*⁴⁸.

Car sinon, «selon le vers de Pāṇini»

■«Les mots» *bhujā* et *nyubja* utilisés dans les sens de bras et de maladie «ont des formes irrégulières”
Aṣṭādhyāyī, 7. 3. 61.

Puisque le mot *bhujā* «pris» dans le sens de ■bras” est donné «sans analyse comme une forme irrégulière par Pāṇini» (*nipātitattvāt*), il n'est pas accepté «avec le sens» de cĀté.

Si nous avons bien compris ce passage un peu obscur, le terme *bhujā* est cité dans la grammaire de Pāṇini avec le sens de ■bras■⁴⁹. Ce terme, par ailleurs, a une acception technique et générale en mathématique, celui du cĀté d'un champ. Cette signification n'est pas mentionnée par Pāṇini, ni

⁴⁸Un mot dont l'étymologie ne peut pas se comprendre par la grammaire de Pāṇini.

⁴⁹Pāṇini précise qu'il faut accepter la forme de ce mot sans en chercher une dérivation étymologique. Toutefois ce n'est pas ce point qui intéresse Bhāskara ici.

celle plus spécifique de la base d'un triangle. On doit donc inclure ces deux sens dans la liste des termes qui ne peuvent être expliqués avec l'*Aṣṭādhyāyī*. Il s'agit peut-être ici d'une simple remarque érudite du commentateur.

La signification du terme *sama-dala-koṭī* est élaborée par le biais d'une discussion sur l'analyse du composé. En effet, littéralement le composé désigne une médiatrice et, en ce sens, le calcul décrit dans le vers se réduit alors aux triangle équilatéraux et isocèles (p. 55, lignes 5-7) :

*atra kecit– same dale yasyāḥ seyaṃ samadalā, samadalā cāsau
koṭī ca samadalakoṭīti varṇayante/ teṣāṃ samadvisamtryaśrakṣetrayor
eva phalasiddhiḥ na viṣamatryaśrakṣetrasya/*

Sur ce point certains expliquent–

'*sama-dala* (égale-partie) est un *bahuvrīhī* (signifiant : ce dont les deux parties sont égales ou ■médiante■). *Sama-dala-koṭī* est un *karmadhāraya* (signifiant : ce dont les deux parties sont égales, ■médiante■ et qui est un cŕté érigé ou une ■perpendiculaire■).'

Pour ceux-là l'aire est établie seulement pour ces champs trilatères qui sont soit équi-(latéraux) soit isocèles, non pas pour des champs trilatères inégaux.

Ainsi par une glose grammaticale, ce composé se comprend comme désignant la médiatrice (ce qui est à la fois une médiane et une perpendiculaire), ce qui restreint le champ d'application de la règle.

Pour permettre l'extension de la procédure à un cas quelconque, Bhāskara propose de comprendre que le composé signifie, par convention, perpendiculaire⁵⁰ (lignes 7-8) :

*asmākaṃ punaḥ samadalakoṭīty anenāvalambakavyutpattiyā bruvā-
vatām trayāṇām api phalānayanam siddham/*

En revanche, pour nous qui expliquons (l'expression) ■*samadalakoṭī*■ par l'acception courante (*vyutpatti*) (de ce mot) en tant que ■perpendiculaire■, le calcul des aires des trois (types de champ) est établi.

Pour défendre cette option il a recours à un argument grammatical :

⁵⁰Précisons que Bhāskara emploie le terme perpendiculaire (*avalambaka*) et non pas le terme hauteur (*āyāma*). Ce dernier mot est utilisé en revanche pour désigner les hauteurs du trapèze par Āryabhaṭa. Il signifie étymologiquement "longueur" et est utilisé ainsi pour qualifier la longueur d'un rectangle. Se rapporter au glossaire à la fin de la traduction.

*athavā ye vyutpattiṃ kurvanti teṣāṃ api trayāṇāṃ tryaśrakṣetrāṇāṃ
phalānayanam siddham eva/ kutaḥ ? ‘rūḍheṣu kriyā vyutpat-
tikarmārthā nārthakriyā’ iti/*

Et également pour ceux qui produisent une dérivation grammat-
icale (*vyutpatti*) le calcul de l’aire des trois champs trilatères est
précisément établi.

Pourquoi ?

‘rūḍheṣu kriyā vyutpattikarmārthā nārthakriyā’ iti/

■ Dans ⟨les cas de⟩ sens conventionnels, l’action dont
le but est d’effectuer une dérivation grammaticale est
inutile”.

En d’autres termes, faire l’analyse grammaticale pour dériver le sens
d’un mot, lorsque celui-ci a été attribué par convention, n’as pas de sens.
Cet usage du terme *vyutpatti*⁵¹ avec deux sens différents a été analysé par
P.-S. Filliozat dans [p. 43; Filliozat-Mazars1985] :

Cette affirmation d’une non-correspondance entre sens étymologique
et sens conventionnel est courante. Il est intéressant de noter
que Bhāskara la fait dans un vocabulaire inhabituel pour son
époque. Il emploie, en effet, le mot *vyutpatti*. Ce mot a deux
sens, celui de *saṃskāra* ■ apprêt d’un mot par les règles de gram-
maire ■ et *śaktijñāna*, ■ connaissance du pouvoir d’expression des
mots ■, c’est-à-dire connaissance qu’un locuteur a de la langue
qu’il parle. L’emploi de *vyutpatti* dans ces deux sens, ici, c’est-
à-dire au début du VIIe siècle, est peut-être un des plus anciens
que nous connaissons.

Dans ce passage, de nouveau, nous avons vu comment les différentes
étapes du processus de définition impliquent de :

- Donner des synonymes;
- Discuter du nom que porte un objet spécifique;
- Accepter un sens conventionnel et non pas un sens étymologique;
- Donner un sens technique, soit en restreignant la portée d’un nom,
soit en l’élargissant.

⁵¹Ce terme est distinct de celui employé afin de rendre compte de l’étymologie d’un mot,
nirukta.

3 Analyser des mots et catégoriser

Nous avons jusqu'à présent examiné des cas spécifiques où Bhāskara s'écarte du sens premier d'un mot. Mais ce n'est pas toujours le cas.

Des discussions sur la signification d'un mot peuvent servir de point d'appui à une définition, sans pour autant nécessiter une restriction ou un élargissement de son sens. Ainsi sont décrites dans le commentaire de la première moitié du vers 7, deux analyses du composé *sama-pariṇāha*. Selon Bhāskara, la première moitié du vers 7 calcule l'aire d'un ■cercle uniforme■ (*sama-vṛtta* à distinguer du ■cercle allongé■ (*āyata-vṛtta* l'ellipse) : c'est le produit de la moitié de la circonférence uniforme (*sama-pariṇāha*) et du rayon. Bhāskara donne une interprétation du composé puis critique une autre analyse de celui-ci (p. 60; lignes 6-9) :

samaś cāsau pariṇāhaś ca samapariṇāhaḥ, tasyārdhaṃ/ anye punar anyathā vighrahaṃ kurvanti— samaḥ pariṇāho yasya kṣtrasya tat samapariṇāhaṃ, tasyārdham iti/ teṣāṃ kṣetraphalārdhasya grahaṇaṃ prāpnoti, anyapādārdhena samapariṇāhaśabdena kṣetrābhidhānāt/
Sama-pariṇāha est un *karmadhāraya* (signifiant ce qui est une circonférence et est uniforme). Sa moitié. D'autres, toutefois, analysent le composé d'une autre manière- '*Sama-pariṇāha* est un *bahuvrīhi* auquel le mot champ devrait être suppléé (signifiant ainsi : un ⟨champ⟩ ayant une circonférence uniforme). Sa moitié.'

Pour ceux-là (à tort, de l'expression ■moitié■) suit la connaissance de la moitié de l'aire, parce qu'avec l'autre moitié du quart de vers, c'est-à-dire avec le mot *sama-pariṇāha*, ils nomment un champ.

La critique de cette analyse grammaticale du composé *sama-pariṇāha* renvoi à une définition du cercle distingué du disque. En effet, pour Bhāskara, un arc de cercle peut délimiter une figure géométrique autre que le cercle : c'est le cas d'une figure que nous décrirons plus tard, le champ formé d'un arc et de ses flèches (*dhanuḥ-kṣetra*). La circonférence doit ainsi pouvoir être distinguée du champ qu'elle délimite. Dans ce passage, de nouveau, l'analyse du composé décrit en même temps l'objet qu'il nomme : établir sa nature grammaticale revient à définir l'objet. Toutefois, Bhāskara dans ce cas n'a pas besoin d'avoir recours à un élargissement ou à une restriction du sens premier du composé. Il n'a pas besoin de justifier l'acception technique qu'il donne de ce mot.

De manière générale, une définition passe toujours par une catégorisation, qui vise à distinguer entre eux tous les objets appelés d'un même nom.

Dans son commentaire de la première moitié du vers 6 Bhāskara justifie l'usage du terme trilatère au singulier (*tribhuja*), et définit ainsi des sous-catégories de triangles (p. 55, lignes 2-3) :

*tatra trīṇi kṣetrāṇi samadvīsamaviṣamāni/ tribhujasyeti tribhujakṣetrajaṭim
aṅgīkṛtyaikavacanānirdeśaḥ*

Dans ce cas-ci il y a trois (sortes de) champs : les équi-(latères), les isocèles et les inéqui-(latères). (En ce qui concerne) 'D'un trilatère', (il faut comprendre) : lorsqu'une catégorie de champ trilatère a été choisie, l'expression se fait au singulier.

Il est courant en sanskrit d'utiliser un singulier pour caractériser la généralité.

Un travail de plus longue haleine se construit tout au long du commentaire du *gaṇita-pāda* (chapitre sur les mathématiques). Il fait partie de l'activité mathématique propre au commentaire. Il consiste à distinguer, peu à peu, les objets manipulés entre-eux. Ainsi non seulement des carrés sont distingués des losanges, mais également des rectangles et des trapèzes; parmi les trapèzes, caractérisés par le fait que leurs hauteurs ont toujours la même longueur, Bhāskara distingue ceux qui ont trois côtés égaux, les trapèzes isocèles, et les trapèzes quelconques. Ces derniers sont distingués explicitement des quadrilatères quelconques. Ainsi au final, le commentateur élabore un ensemble de quadrilatères constitué de sous-catégories. De même entiers, fractions et entiers augmentés ou diminués d'une fraction, etc. sont peu à peu distingués et dessinent un ensemble qui forme le nom générique des quantités (*rāśis*) dans le commentaire.

4 Conclusion

Ainsi l'élaboration d'une définition passe le plus souvent par une analyse grammaticale. Cette activité pourrait être propre aux commentaires sanskrit en général. Les différentes étapes par lesquelles une définition se construit sont :

- (1) donner des synonymes;
- (2) analyser la formation du mot/du composé;
- (3) expliciter à partir de cela un sens premier;
- (4) argumenter pour un sens qui s'écarterait de ce dernier.

Cette élaboration est accompagnée par une justification du caractère technique de la terminologie .

D'autre part, nous constatons un travail mathématique. En effet, lorsque le sens premier d'un mot est donné, Bhāskara commence par décrire la catégorie des objets mathématiques qu'un tel mot désigne. Si le sens du mot doit être restreint, il caractérise l'objet qu'il cherche à définir par rapport à ce groupe, et établit ainsi cette restriction. Si le sens du mot doit être élargi il explicite la propriété particulière qu'il va englober en élargissant le sens de ce terme.

Rappelons ici l'importance du mot comme ce qui souligne une propriété mathématique et appelle une procédure : cette importance va de pair avec l'élaboration d'un vocabulaire technique précisément défini.

1.8 Explications, vérifications, preuves et réfutations

L'une des fonctions du commentaire, qui n'est pas explicite mais reste très apparente, consiste à défendre et justifier le traité.

1 Justifier et défendre

Les dialogues fictifs du ■commentaire général■ présentent, souvent sous forme d'objection, des interprétations du vers que le commentateur juge erronées, et qu'il s'emploie à corriger. Bhāskara, ce faisant, justifie sa vision de l'*Āryabhaṭīya*.

Nous avons ainsi vu que le commentateur n'hésitait pas à employer divers arguments complémentaires qu'il juxtaposait⁵². Ceux-ci sont énumérés dans une série de phrases liées par la conjonction *athavā* ■ou bien■. Il ressort de ces raisonnements, que le commentateur s'efforce, au moyen d'arguments divers, d'emporter l'adhésion de son lecteur.

Le plus souvent, la discussion est linguistique ou sémantique, et n'est pas à proprement parler mathématique. Mais Bhāskara tente quelquefois de justifier mathématiquement la procédure qu'énonce un vers. A cet effet il utilise un ensemble de raisonnements dont certains portent des noms spécifiques : il y a des explications, des vérifications et des preuves. Parfois, le raisonnement glisse vers une défense de la rectitude des procédures du traité confrontées à des méthodes d'écoles concurrentes. Notons à ce propos que l'œuvre de Brahmagupta, un contemporain de Bhāskara, est connue pour sa critique virulente de certains des vers de l'*Āryabhaṭīya*. Par ailleurs, le texte

⁵²Voir la section 1.2.

laisse parfois échapper une ironie de laquelle nous pouvons déduire que les querelles d'écoles devaient être assez vives. Ainsi, dans un cas, le commentateur entreprend-il une réfutation d'une théorie extérieure au traité.

Avant d'examiner les modes de raisonnement au moyen desquels Bhāskara explique ou justifie une procédure, nous allons brièvement examiner les indications du commentaire concernant ce qu'il considère être un raisonnement ou une interprétation corrects d'un vers.

2 Arguments valides et invalides

Nous n'allons pas exposer ici de théorie de la validité d'une procédure ou, plus généralement, d'une argumentation selon Bhāskara. Nous allons simplement noter des éléments épars du commentaire qui renvoient à une réflexion sur ces thèmes sans que leur ensemble ne forme un tout cohérent.

La justification des propos d'un vers peut relever d'arguments qui ne sont pas mathématiques.

Nous avons vu comment Bhāskara se reposait de temps à autre sur la tradition. De manière générale, la citation d'un vers, à lui seul, fait autorité lorsqu'il s'agit d'étendre l'application d'une procédure.

Ainsi dans le commentaire de la première moitié du vers 6, l'évaluation de la hauteur dans les triangles équilatéraux et isocèles repose à la fois sur le ■Théorème de Pythagore■ et sur un vers, dont on ne connaît pas l'origine, qui explique que cette hauteur est une médiatrice.

Cependant la tradition ne semble pas être un argument valide pour ceux qu'il réfute . Dans le commentaire du vers 10, Bhāskara répond ainsi à une objection (p. 72; lignes 15-19) :

atrāpi evāgamaḥ naivopapatīḥ . . . cetad api sādhyam eva

Dans ce cas également, il ne s'agit que d'une tradition (*āgama*) et non pas d'une preuve (*upapatti*) (...) Mais cela également doit être établi (*sādhyā*).

Dans un cas seulement, celui de la règle d'extraction de la racine cubique, Bhāskara s'appuie sur le texte du traité pour justifier le fondement d'une catégorisation. En effet, comme nous l'avons noté plus haut, celle-ci repose sur une classification des places de la numération positionnelle, distinguant les places ■cubiques■ c'est-à-dire celles qui correspondent à des puissances de 10 multiples de trois et les autres, qui sont non-cubiques. Il y a donc dans un triplet de places consécutives, deux places non-cubiques et une place cubique. Bhāskara met en scène le dialogue suivant (p. 53; lignes 15-18) :

atra gaṇite ghana ekaḥ, dvāv aghanau/ kuta etat ghana ekaḥ dvāv aghanav ity ucyate- vargas tripūrvagūṇitaḥ śodhyaḥ prathamād ghanād ādīti prathamāghanasiddhiḥ, aghanād bhajed dvitīyād iti dvitīyāghanasiddhiḥ/ ghanāḥ punar eka eva, dvitīyasyāśravaṇāt/
 Dans ce calcul il y a une ⟨place⟩ cubique et deux ⟨places⟩ non-cubiques.

Pourquoi est-il ⟨dit⟩ : ■il y a une ⟨place⟩ cubique et deux ⟨places⟩ non-cubique■ ?

Il a dit- ■Lorsqu'on a soustrait le carré ⟨du quotient⟩ multiplié par trois et par la ⟨quantité⟩ précédente, de la première ⟨place⟩”, la première place non-cubique est établie (*siddhi*); ⟨il a dit⟩ ■On doit diviser la seconde ⟨place⟩ non-cubique”, la seconde place est établie. Par contre il n’y a qu’une seule ⟨place⟩ cubique, parce qu’une seconde n’a pas été entendue.

Pour établir ce fait Bhāskara ne s’en tient qu’au texte : il cite des passages du vers. Comme celui-ci ordonne les places non-cubiques, et distingue la première de la seconde, le commentateur ■établit■ qu’il en existe deux. Ici, assez scholastiquement, Bhāskara colle au texte en tant que porteur de vérité. C’est un cas exceptionnel.

Par ailleurs, au début de la section 1.2 nous avons noté deux réfutations qui disqualifient la perception directe (*pratyakṣa*) comme moyen d’évaluer une mesure.

Parmi les modes d’argumentation mis en valeur, la logique apparaît une fois dans un sens très spécial (p. 72; lignes 8-10) :

yadi vyāvahārikāsanno vyāvahārikād api pāpīyān paridhiḥ, na kaścit pāpataraṃ prayāsaṃ karoti, tena sūkṣmāsanno iti nyāyasiddham/
 S’il s’agissait de l’approximation d’une ⟨valeur⟩ pratique, alors la circonférence serait encore pire que ⟨cette valeur⟩ pratique . Personne ne ferait un effort ⟨menant à quelque chose de⟩ pire. Par conséquent, il a été établi par la logique (*nyāyasiddham*) qu’il s’agit de l’approximation d’une ⟨valeur⟩ exacte.

Il se peut qu’il s’agisse ici d’une figure habituelle de raisonnement, un peu comme le syllogisme, que nous ignorons.

De manière générale, les règles avancées doivent être établies (*sādhya, siddha*). Nous allons à présent analyser les manières dont Bhāskara ■établit■

mathématiquement les procédures qu'il lit dans les vers d'Āryabhaṭa. Il existe plusieurs formes de justification mathématique, distinguées par l'emploi d'un vocabulaire spécifique : l'explication (de la procédure), la vérification (du résultat d'une procédure), la preuve (d'une propriété mathématique, probablement), et finalement la réfutation (d'une proposition mathématique). Nous allons commencer par examiner les trois premiers modes de raisonnements, avant de nous tourner vers la réfutation. Auparavant nous examinerons une forme de raisonnement qui ne porte pas de nom particulier, mais que nous avons trouvée significative : la relecture d'une procédure par une autre.

3 Réinterpréter des procédures

Le commentaire du vers 15 présente un cas simple de réinterprétation d'une procédure par une Règle de Trois.

Le vers 15 décrit le calcul suivant :

*śāṅkuguṇaṃ śāṅkubhujāvivaraṃ śāṅkubhujayor viśeṣaḥṛtam|
yal labdham sā chāyā jñeyā śāṅkoḥ svamūlāt hi||*

Ab.2.15. La distance entre le gnomon et la base, ayant la (hauteur du) gnomon pour multiplicateur, est divisée par la différence des ⟨hauteurs⟩ du gnomon et de la base.|

Ce qui est obtenu doit être connu comme étant l'ombre du gnomon ⟨mesurée⟩ en effet, à partir de son origine.||

le tableau 1.5 explique brièvement la situation géométrique décrite par ce vers.

Ce calcul consiste en une multiplication suivie d'une division.

Bhāskara conclut lors de la résolution d'un exemple d'application (p. 92; lignes 1-3) :

*etat karma trairāsīkam/ katham ? śāṅkuto 'dhikāyā uparibhujāyā
yadi śāṅkubhujāntarālapramāṇaṃ chāyā labhyate tadā śāṅkunā
keti chāyā labhyate/*

Ce calcul est une Règle de Trois. Comment ? Si avec le sommet de la base qui est plus grande que le gnomon, la taille de l'espace entre le gnomon et la base, qui est une ombre, est obtenue, alors, qu'est-ce qui est ⟨obtenu⟩ avec le gnomon ? l'ombre est obtenue.

La procédure décrite dans le vers 15 apparaît comme une liste arbitraire d'opérations. Une Règle de Trois, quant à elle, repose sur des proportions. Toutes deux consistent arithmétiquement en une multiplication suivie d'une division. En relisant donc la procédure du vers 15 au moyen de cette règle, Bhāskara semble en donner une explication mathématique : la formulation de la question-type requiert de souligner quelles sont les données proportionnelles sur lesquelles la Règle de Trois repose. Elle explique que deux triangles sont semblables (les triangles ABE et DEC de la Table 1.5), et de cette manière réinvestit la liste des opérations d'un sens mathématique.

Nous allons maintenant examiner une procédure élaborée par Bhāskara. Le commentateur y présente deux manières de calculer un même résultat. L'une repose uniquement sur une Règle de Trois. L'autre sur une Règle de Trois et ■le Théorème de Pythagore■. Comme nous le verrons dans la section 2.5, l'extension que propose Bhāskara de la règle donnée dans le vers 14 repose sur deux triangles semblables, l'un formé par un gnomon et son ombre, l'autre par le Rsinus ($R \times \text{sinus}$) de l'altitude et celui de la distance zénithale⁵³. Ces deux triangles sont rectangles. Bhāskara, dans le premier exemple du commentaire du vers 14, effectue le calcul suivant (p. 90; lignes 4-5) :

*akṣajyā “nāyane trairāśīkathāpanā- 13/ 5/ 3438/ labdham akṣajyā
1322/ eṣā bhujā, vyāsārdhaṃ karṇaḥ, bhujākarṇavargaviśeṣamūlam
avalambakaḥ 3174/*

En calculant le Rsinus de la latitude (*akṣa-jyā*) une Règle de Trois est disposée-13, 5, 3438. Ce qui est obtenu est le Rsinus de la latitude, 1322. Ceci est la base (*bhujā*), le semi-diamètre est l'hypoténuse (*karṇa*); la racine de la différence des carrés de la base et de l'hypoténuse est le Rsinus de la colatitude (*avalambaka*), 3174.

Le commentateur utilise donc ici à la fois le fait que ces triangles sont semblables et rectangles. Puis il enchaîne sur un autre calcul (lignes 5-6) :

trairāśīkenāpi 13/ 12/ 3438/ labdham avalambakaḥ 3174/

Avec une Règle de Trois également 13, 12, 3438; ce qui est obtenu est le Rsinus de la colatitude, 3174.

⁵³On pourra également se reporter à l'annexe de BAB.2.14. et à l'appendice consacré à l'astronomie hindoue.

Bhāskara semble donc effectuer ici une vérification, ou du moins montrer que l'on peut arriver au même résultat par deux algorithmes différents. Dans les deux cas, le sens mathématique est souligné dans un cadre général immédiatement après (lignes 7-8) :

*trairāsīkena vāco yuktiḥ—yady asya svavṛttaviṣkambhārdhasya chāyātulyā
bhujā śaṅkutulyo 'valambakas tadā 'sya golavyāsārdhasya kau bhujāvalambāv
iti/ chāyayā gaṭikānayanane, madhyāhne chāyayā ca sūryānayanane
svavṛttaviṣkambhārdhasyāyam eva vidhiḥ/*

La formulation verbale de la Règle de Trois est—■ Si pour le semi-diamètre de son propre cercle, la base est égale à l'ombre, la perpendiculaire à (la hauteur du) gnomon, alors, que sont le semi-diamètre et la perpendiculaire pour le semi-diamètre de la sphère (céleste)■ ?

Dans ce passage se superposent trois situations. Une Règle de Trois et un triangle rectangle décrivent en filigrane un contexte dans lequel un gnomon et son ombre sont liés à la sphère céleste. Les deux premières situations, abstraites, sont évoquées par des biais linguistiques dont nous avons décrit la teneur dans la section 1.5. La Règle de Trois est appelée au moyen d'une question-type. Le triangle rectangle est évoqué par le nom de deux de ces cĀtés, la base (*bhujā*) et la perpendiculaire (*avalambaka*). Ces deux références, comme nous l'avons souligné dans notre analyse, semblent indiquer tout à la fois une propriété mathématique de la situation évoquée et la liste d'opérations à effectuer.

Ces deux exemples nous auront permis de mettre en valeur un mode de raisonnement que nous retrouverons dans les explications, vérifications et preuves. Celui-ci cherche à trouver un même résultat par deux biais indépendants. La forme la plus généralement employée est la relecture d'une procédure par une ou plusieurs autres procédures. Les procédures qui relisent un algorithme donné ne sont pas quelconques : il s'agit soit d'une Règle de Trois, soit du ■Théorème de Pythagore■. Bien que cela ne soit nulle part explicité par Bhāskara, nous comprenons ces relectures comme des justifications mathématiques. En effet, la Règle de Trois et le ■Théorème de Pythagore■, chacun à leur manière, énoncent des propriétés mathématiques (une proportion, l'existence d'un triangle rectangle). Lorsqu'un algorithme est donné, il est constitué d'une liste d'opérations sans signification. En le relisant au moyen de ces deux règles-là, nous avons le sentiment que le commentateur en fournit un fondement mathématique.

Ayant mis en évidence ce raisonnement, nous allons nous tourner vers

ce que Bhāskara nomme ■une explication■.

4 Explications

Deux termes employés par le commentaire peuvent être sommairement traduits par ■explication■⁵⁴. Il n'est pas certain que les modes de raisonnement qu'ils désignent diffèrent l'un de l'autre. Mais afin de nous en assurer, nous les distinguerons ici.

4.a Un premier type d'explication

Le premier mot que nous allons considérer est *pradarśana*. Il est dérivé du verbe ■voir■. Il signifie littéralement ■l'acte de montrer■. Son sens n'est pas toujours aussi fort que le mot français qui évoque en nous l'idée de démonstration. Par exemple, il est utilisé, ■a et là, dans la phrase qui introduit un vers commenté. Pour amener la première moitié du vers 3, Bhāskara utilise ce terme (p. 47; ligne 16) :

vargaparikarmapradarśanāyāryāpūrvārdham āha-

Afin de montrer/d'expliquer les opérations sur les carrés il a dit la première moitié d'un *ārya*

Ce mot peut également prendre, à la manière du terme ■explication■ en français, le sens d'éclaircir un sens ou une idée. Dans le commentaire de la deuxième moitié du vers 3, la procédure qui permet de calculer le volume du cube ferait, en quelque sorte, voir le bord de ce cube qui s'appuie sur une base dont la surface est carrée. Bhāskara précise dans la suite (p. 51; ligne 5) :

aśrayo yasya mṛdānyena vā pradarśayitavyāḥ /

ses bords doivent être montrés/expliqués au moyen de terre ou de quelque chose d'autre.

Mais *pradarśana* apparaît aussi directement associé aux termes utilisés pour désigner une procédure, une méthode ou un calcul. Ainsi, dans le commentaire de la seconde moitié du vers 6, il est écrit (p. 58; lignes 7-8) :

śāstre tadānayanopāyapradarśanāt /;

parce que dans un traité une méthode de calcul de cela est montrée/expliquée. . .

⁵⁴Nous mettons ici de côté le mot *vyākhyāna*, dont nous avons montré qu'il désignait le commentaire, en tant que lieu d'explication.

Ou dans le vers 11 (p. 79; ligne 5) :

evamālikhite kṣetre sarvaṃ pradarśayitavyam /

Dans un champ dessiné de cette manière tout doit être montré/expliqué.

Nous allons analyser un exemple de raisonnement qualifié par ce terme. La seconde moitié du vers 17, comme nous le verrons dans la section 2.3, lie le carré de la demi-corde, dans un cercle, au produit de ses deux ■flèches■. Bhāskara propose une extension de cette procédure, afin de l'appliquer à un problème type : celui du rat et du faucon. Nous renvoyons à l'annexe de BAB.2.17 et à la traduction de ce vers, pour un compte rendu détaillé du raisonnement que Bhāskara poursuit. Nous allons ici en dégager les grandes lignes.

1. Bhāskara commence par souligner l'existence d'un triangle rectangle à l'intérieur d'un cercle, où une demi-corde et sa flèche sont considérées (p. 98; lignes 3-4) :

*atraiva śyenamūśikoddeśān vyāvarṇayanti / tad yathā-
ardhajyā bhujā, ardhajyāmaṇḍalakendrāntarālaṃ koṭiḥ, tad-
vargayogamūlaṃ karṇo maṇḍalavyāsārdham /*

Dans ce cas précisément, on raconte les exemples de ■faucons et de rats■. Il en est ainsi— la demi-corde est la base (*bhujā*), l'espace entre le centre du cercle et la demi-corde est le c^zté érigé (*koṭi*), le semi-diamètre du cercle qui est l'hypoténuse est la racine de la somme de leur carrés.

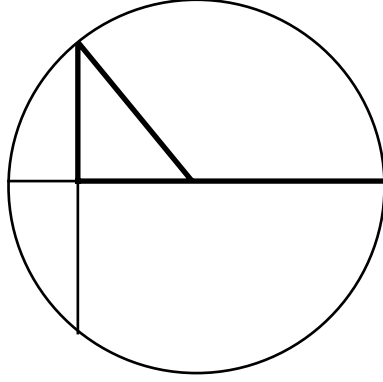
Un triangle rectangle est dégagé, au moyen d'une méthode que nous avons examinée dans la section 1.5 : par un transfert de nom. Tout en soulignant l'existence d'un tel triangle, le commentateur prépare l'usage du ■Théorème de Pythagore■. Ce dernier permet le calcul du semi-diamètre du cercle.

2. Bhāskara poursuit, immédiatement après, en annon■ant une explication ponctuée d'un dessin (lignes 4-6) :

tat tu pradarśayate- nyāsaḥ-

Mais ceci est montré/expliqué— disposition⁵⁵-

⁵⁵Ce dessin est une reproduction de celui présent dans l'édition du texte.



3. Il rapporte la situation que décrit la seconde moitié du vers 17, à celle décrite dans les problèmes de ■faucons et de rats■, où un faucon, sur une colonne, tue (au centre du cercle, en se déplaçant le long de l'hypoténuse) un rat qui s'étant éloigné (vers la circonférence) de son trou (qui se trouve au point de l'angle droit dans le triangle), se précipite vers ce dernier (lignes 11-12) :

*iyam ardhajyā śyenasthānocchrāyaḥ, ardhajyāparidhyantarālaṃ
mūṣikapracārabhūmiḥ, viśkambhārdhaṃ karṇaḥ śyenamārgaḥ/
maṇḍalakendraṃ mūṣikavadhapradeśaḥ/*

Cette demi-corde est la hauteur du lieu où se tient le faucon, l'espace entre la demi-corde et la circonférence du cercle est la terre où le rat erre, le semi-diamètre qui est l'hypoténuse est la trajectoire du faucon. Le centre du cercle est le lieu de massacre du rat.

Les deux situations abstraites, car elles renvoient à des situations géométriques générales et non pas au cas ■concret■ de la course entre un rat et un faucon, à partir desquelles le problème prend sens sont ici superposées : l'une, prédominante, est la situation que décrit la seconde moitié du vers 17, l'autre, simplement suggérée par le terme hypoténuse (*karṇa*), est le triangle rectangle décrit plus haut. Cette double situation se comprend en relation avec le diagramme.

4. Ayant posé ce contexte abstrait, Bhāskara décrit une suite de calculs (lignes 9-12) :

*tatra śyenasthānocchrāyo 'rdhajyā iti tadvargo, mūṣikaprācārabhūmiḥ
 śara iti tena vibhajyate, labdhaṃ dvitīyaḥ śaraḥ/ tena antarayuktaṃ
 hīnaṃ [Ab.2.24] ityetaṃ kṛtvā labdhaṃ mūṣikāvāsaprāpyabhūmiḥ
 śyena[gati]karṇapramāṇaṃ ca /*

Ici, puisque la hauteur du lieu où se tient le faucon est la demi-corde, et puisqu'une flèche est la terre où erre le rat, le carré de cette <demi-corde> est divisé par cette <flèche>; ce qui est obtenu est la seconde flèche. Lorsque cette <règle> : ■diminué et augmenté par la différence < et divisé par deux>■ est appliquée à cette dernière, ce qui est obtenu est la terre s'étendant <du lieu du massacre> jusqu'au lieu de résidence du rat et la mesure de l'hypoténuse, qui est [la trajectoire] du faucon.

L'explication de Bhāskara, en somme, investit les problèmes de Rats et de Faucon de deux situations mathématiques plus abstraites et générales. Ces deux situations sont celles requises pour appliquer les deux procédures décrites dans le vers 17 : le ■Théorème de Pythagore■ et le rapport de deux ■flèches■ à leur cordes.

Le raisonnement dans ce passage expose les propriétés mathématiques sur lesquelles le problème repose avant d'avancer les différentes étapes de la procédure. Nous pouvons, toutefois, remarquer que le terme même d'■explication■ n'intervient qu'à un seul moment : celui où un diagramme est introduit. Nous ne savons pas si l'explication est orale et intervient dans le diagramme ou si elle comprend le diagramme et le raisonnement qui le suit. Nous retrouverons cette ambigüité à plusieurs reprises.

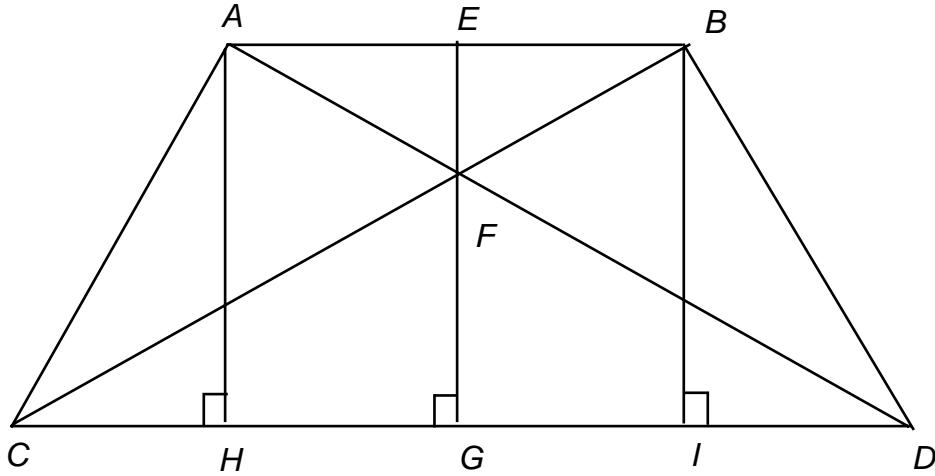
Ainsi une explication, au sens de *pradarśita*, semblerait impliquer l'allocation d'une situation mathématique abstraite à un problème donné. Cette situation abstraite serait le fondement à partir duquel la liste d'opérations dont est constituée une procédure est justifiée. Comme nous l'avons décrit dans la section 1.5, en appelant une procédure par une allocation de nom, le commentateur à la fois énonce une propriété mathématique et rend l'application de cette procédure possible.

4.b Un deuxième type d'explication

Le deuxième mot que nous avons traduit par ■explication■ est le terme *pratipādana*, et parfois la forme conjuguée du verbe *prati-pad*. Nous allons examiner un cas où le raisonnement que ce verbe désigne est mis en œuvre.

Le vers 8 décrit deux calculs dans un trapèze. Le premier évalue la longueur des deux segments de la hauteur délimités par le point d'intersection des diagonales. Ceux-ci sont nommés par Āryabhaṭa *sva-pāta-lekhā*⁵⁶; ils sont illustrés dans la figure 1.2.

Figure 1.2: Segments et figures internes dans un trapèze.



EF et FG sont les deux segments dont la longueur est calculée. La procédure se résume à une multiplication suivie d'une division⁵⁷. Bhāskara ajoute à la fin de son ■commentaire général■ (p. 63; lignes 17-19) :

*samyagādiṣṭena ālikhite kṣetre svapātalekhāpramaṇaṃ trairāsīkagaṇitena
pratipādayitavyam/ tathā trairāsīkenaivobhaya pārśve karṇāvalambakasampātānayanam/*

La taille des ■lignes sur leur propre tombées■ doit être expliquée (*pratipādayitavya*) au moyen du calcul d'une Règle de Trois, dans un champ dessiné par une personne proprement instruite. Alors, au moyen de cette Règle de Trois, uniquement, ⟨avec⟩ les deux cōtés (du trapèze), le calcul ⟨des segments dont le sommet est⟩ le point d'intersection des diagonales et de la perpendiculaire ⟨sera effectué⟩.

L'explication, par un procédé qui nous est dorénavant familier, consiste en une relecture au moyen d'une Règle de Trois. Le raisonnement se fait

⁵⁶Voir à ce sujet le glossaire.

⁵⁷Se reporter à la traduction du commentaire du vers 8 et à l'annexe de BAB.2.8.

en deux temps. Premièrement, une explication est effectuée dont le lieu se trouve dans un diagramme. Elle est suivie d'un calcul. Il nous semble que ces deux temps, soulignent la double lecture que l'on peut faire d'une Règle de Trois. Dans un diagramme le rapport de proportionnalité qu'elle énonce pourrait être vu. Le calcul, quant à lui, serait la relecture arithmétique d'une procédure. Celle-ci, auparavant, pouvait sembler dénuée de sens. Une fois expliquée, elle est investie d'un sens mathématique.

Le deuxième calcul évalue l'aire du trapèze. Bhāskara ajoute à la suite de la phrase citée ci-dessus (lignes 19 -20) :

*pūrvasūtreṇātra dviṣamaviṣamatryaśrakṣetrāphalaṃ darśayitavyam/ vakṣyamāṇasūtreṇāntarāyatacaturaśrakṣetrāphalānayanam
(...) vā*

Dans ce cas, au moyen d'une aire précédente, l'aire de triangles isocèles et quelconques devra être montrée (*darśayitavyam*). Ou, au moyen d'une règle qui sera dite, le calcul de l'aire du champ rectangulaire interne (doit être montré).

Comme illustré dans la Figure 1.2, l'aire du trapèze peut-être vue comme la somme des aires de divers triangles ou de l'aire du rectangle interne, et de deux triangles. Ici donc, bien que cela ne soit pas entièrement explicité, nous comprenons que Bhāskara semble calculer l'aire du trapèze au moyen d'une autre procédure. Mais ce calcul se fait avec un dessin sous les yeux : il semble être investi de ce fait d'un sens mathématique là où auparavant il n'était qu'une procédure dont le sens restait à éclaircir.

Le raisonnement que nous avons observé dans ce passage semble donc être la relecture d'une procédure au moyen d'une autre procédure qui, tout en permettant d'obtenir le même résultat, lui confère un sens mathématique. L'explication elle-même semble avoir lieu, ici encore, dans un diagramme. Elle est alors suivie d'un calcul qui confirme ou vérifie le raisonnement vu.

Nous avons souligné dans la section 1.6 comment les exemples prolongeaient la procédure, la déclinaient. Ce sont aussi des lieux où des procédures peuvent être expliquées (*prati-pad*).

Par exemple, dans son commentaire du vers 14, Bhāskara écrit (p. 88, ligne 19) :

uddeśakeṣv etat pratipādayiṣyāmaḥ/

Nous expliquerons cela dans des exemples.

On retrouve la même remarque dans le vers 19 (p. 105; lignes 17-18) :

tāni yathā krameṇoddeśakeṣv eva pratipādayiṣyāmaḥ/

Nous expliquerons ceux-ci dans l'ordre, dans des exemples.

Nous allons à présent nous tourner vers un autre raisonnement présenté par Bhāskara : la vérification.

5 Vérifications

La vérification semble distinguée de l'explication et de la preuve car elle a son propre nom : *pratyaya-karaṇa*, lit. ■ce qui conduit à la conviction■. L'étymologie de ce terme et le raisonnement qu'il recouvre ne correspondent pas à notre conception habituelle de la vérification. Toutefois, les historiens des mathématiques se sont tous accordés pour comprendre ainsi ce terme. Nous avons choisi de ne pas modifier sa traduction usuelle.

Pratiquement, le raisonnement que nous observons sous ce nom ressemble à celui nommé sous le terme d'explication : il s'agit toujours d'une relecture d'une procédure par une autre procédure qui semble, pour nous, investir la liste d'opérations dont elle est constituée d'un sens mathématique. Bhāskara semble, de plus, insister sur le fait qu'il s'agit de deux procédures indépendantes menant au même résultat.

Cependant, les deux cas où une ■vérification■ est entreprise présentent des difficultés. Nous allons, ci-dessous, effectuer une analyse détaillée du raisonnement en fournissant des hypothèses de compréhension. Ce sont des conclusions provisoires.

Nous avons indiqué plus haut que la première moitié du vers 9 était interprétée par Bhāskara comme un moyen de procéder à la vérification des procédures données dans l'*Āryabhaṭīya* pour calculer des aires de figures particulières. Le vers 9 s'énonce ainsi (p. 63, lignes 4-5) :

sarveṣāṃ kṣetrāṇāṃ prasādhyā pārśve phalaṃ tadabhyāsaḥ|

Pour tous les champs, lorsqu'on a acquis les deux c^{ôtés}, l'aire est leur produit |

Si l'on regarde pratiquement comment se déroule le raisonnement auquel est conféré le nom ■vérification■⁵⁸, deux moments peuvent y être distingués, chacun ponctué par un dessin.

La première partie du raisonnement dessine la figure particulière dont on cherche à ■vérifier■ l'aire. Elle identifie la ■longueur■ et la ■largeur■ du

⁵⁸Nous renvoyons ici à la traduction de ce commentaire de vers, et à l'annexe de BAB.2.9.

rectangle recherché de manière générale. Par exemple, le rectangle ayant même aire qu'un triangle donné a pour longueur la hauteur du triangle et pour largeur la moitié de sa base. On reconnaît dans ces ■longueurs■ et dans ces ■largeurs■ des quantités qui intervenaient dans la procédure donnée par Āryabhaṭa pour le calcul de cette aire particulière. Ainsi, l'aire du triangle donnée dans la première moitié du vers 6 est le produit de la moitié de la base et de la hauteur.

Le second moment du raisonnement dessine le rectangle de même aire et effectue le produit.

Comment comprendre ce raisonnement ?

Une première hypothèse consisterait à y voir une réinterprétation des procédures à ■vérifier■.

Cette relecture, dans un premier temps, réduirait la procédure du calcul d'aire, formellement, à un produit de deux quantités. Puis, dans un second temps, réinterpréterait géométriquement ces deux quantités comme la longueur et la largeur d'un rectangle ayant la même aire que la figure dont on ■vérifie l'aire■. De cette manière, Bhāskara ■trouverait■, comme la méthode du vers 9 le lui demande, les deux segments par lesquels un tel rectangle est obtenu. La teneur arithmétique du calcul d'une aire serait relue sous la forme du produit de deux quantités. Ce produit serait alors investi d'une signification géométrique : le calcul d'une aire de rectangle.

Une seconde hypothèse pourrait considérer que cette ■vérification■ *exhibe* pour une figure particulière un rectangle qui a la même aire qu'elle. Elle reposerait alors sur une conception implicite des figures planes : toutes auraient un rectangle de même aire qu'elles.

Le raisonnement effectué pourrait alors se comprendre de cette manière : lorsqu'on peut, à partir d'une figure donnée, exhiber un rectangle qui a la même aire, on ■vérifie■ que l'aire trouvée est numériquement exacte. Il s'agirait seulement de savoir déterminer numériquement la longueur de ses côtés, afin d'admettre l'existence d'un tel rectangle.

Une troisième interprétation, que les parties ■disposition■ suggèrent, serait de considérer qu'il s'agit de ■vérifier■ si à partir d'une figure donnée on peut *construire* un rectangle ayant même aire qu'elle.

Ainsi, dans le deuxième moment de la vérification de l'aire du triangle, Bhāskara précise que les côtés d'un tel triangle, lorsqu'ils sont dispersés (*vyasta*), produisent le rectangle qu'il dessine ensuite (p. 68; ligne 7)⁵⁹.

⁵⁹C'est ainsi que nous comprenons l'expression, au singulier. Cette dernière semble désigner le triangle lui-même, plutôt que ses côtés si on considère son sens littéral.

La construction du rectangle à partir de la figure d'origine n'est pas décrite dans le commentaire de Bhāskara. Certaines figures semblent tourner les rectangles obtenus de quatre-vingt dix degrés. Ces passages d'une figure à une autre en conservant l'aire est typique des problèmes abordés dans les *Śulba-sūtras*.

Il serait possible, à partir des constructions de figures que Bhāskara décrit dans le commentaire du vers 13 (p.86; lignes 6- 10; p. 87; ligne 1), de construire un rectangle ayant une longueur et une largeur données. Cependant une telle construction nécessiterait au préalable le calcul d'une valeur (approximative ?) des diagonales.

En résumé, tout se passe comme si l'on savait construire un rectangle de même aire à partir d'une figure donnée. La **■vérification■** serait alors de s'assurer qu'un rectangle ainsi construit a la même aire que celle de la figure initiale. Bhāskara expliciterait dans son raisonnement, non pas une telle construction, mais le rapport arithmétique qui lie les longueurs des segments de la figure initiale à celles du rectangle.

Nous pourrions unir ces trois interprétations de la **■vérification■** en la comprenant ainsi : elle serait à la fois arithmétique et géométrique. Géométriquement, Bhāskara chercherait à exhiber, pour une figure donnée, un rectangle de même aire. Ceci impliquerait à la fois de savoir construire un tel rectangle et de connaître la longueur de ses côtés. La construction, **■évidente■** ne serait pas précisée, mais les longueurs des côtés du rectangle seraient explicitées. Arithmétiquement, il s'agirait, en calculant l'aire de ce rectangle de réinterpréter la procédure particulière donnée par Āryabhaṭa pour cette figure. En faisant la **■vérification■** arithmétique le commentateur fournirait par la même occasion une explication de la **■vérification■** géométrique, car il expliciterait le rapport entre les côtés considérés dans la figure initiale avec la longueur et la largeur du rectangle de même aire.

Ainsi le raisonnement nommé **■vérification■** contiendrait la relecture d'une procédure par une autre qui l'investit d'un sens mathématique.

Une seconde **■vérification■** nous est donnée dans le commentaire du vers 25⁶⁰. Celle-ci présente les mêmes difficultés de compréhension.

La **■vérification■** de Bhāskara part du résultat obtenu par la procédure donnée dans le vers 25 et obtient, au moyen d'une Règle de Cinq et d'une addition, l'une des données du problème initial. Par ailleurs, une technique d'inversion des procédures est donnée dans le vers 28. Dans ce cas, la **■vérification■** serait une manière indépendante, non pas d'arriver au même

⁶⁰Voir à ce sujet l'annexe de BAB.2.25.

résultat, mais d'inverser.

Cependant, si l'on essaye d'inverser la procédure dérivée du vers 25, pas à pas, les calculs requis par une Règle de Cinq sont effectués. L'introduction de la Règle de Cinq dans la ■vérification■ semble, par ailleurs, expliciter les rapports de proportions à la base du problème. Cette ■vérification■, de ce fait, ne semble plus être une manière indépendante d'arriver au même résultat, mais une explication de la règle inverse du vers 25, et par conséquent de la règle elle-même. En effet, le vers 25 lui-même peut être interprété comme un cas particulier d'inversion de la Règle de Cinq.

En somme une ■vérification■ formellement semble être le raisonnement suivant : s'assurer arithmétiquement, par un autre biais, que les résultats obtenus sont correctes. L'indépendance de deux procédures qui permettent d'obtenir un même résultat est ainsi valorisée.

Pourtant, dans les deux ■vérifications■ que nous avons observées, les procédures qui relisent celle que l'on ■vérifie■ semblent toujours souligner implicitement le fondement mathématique par lequel ces procédures peuvent se comprendre.

6 Preuve

Le terme sanskrit *upapatti*, habituellement traduit par ■preuve■, est utilisé dans un seul cas, au sein du commentaire de la seconde moitié du vers 6.

Il est employé pour justifier du raisonnement par lequel, connaissant la longueur de ses côtés, la hauteur d'un tétraèdre régulier est obtenue. Nous renvoyons, pour une explicitation des différentes étapes de ce raisonnement, à la traduction de ce commentaire de vers et à l'annexe de BAB.2.6. Comme pour la ■vérification■, il est difficile de voir comment ce raisonnement se caractérise. Pour une part, la teneur du raisonnement n'est pas explicitée : la preuve elle-même prend pour support un diagramme, dont il est précisé qu'il est le lieu où la preuve est expliquée. D'autre part, le raisonnement suivi dans ce cas repose sur le même type de raisonnement que nous avons observé auparavant. Il utilise une Règle de Trois et le ■Théorème de Pythagore■. Ces deux procédures semblent à la fois donner la trame du calcul arithmétique à suivre et le fondement géométrique de la procédure employée.

7 Justifier et expliquer au moyen de procédures : conclusions provisoires

Les interprétations que nous avons proposées ici sont délicates, car elles ne reposent sur aucune affirmation explicite du commentateur. Il nous semble qu'il existe des procédures qui sont plus abstraites et plus générales que d'autres. Ainsi la Règle de Trois et le ■Théorème de Pythagore■ peuvent rendre compte de procédures appliquées dans des situations variées (celles regroupant des gnomons et leurs ombres, décrivant les mouvements de rats et de faucons, etc.), mais elles sont énoncées dans des cas abstraits : des rapports de quantités ou le cadre d'un triangle rectangle. En relisant des listes d'opérations au moyen de telles procédures, il se pourrait que Bhāskara cherche à investir ces listes d'un sens mathématique. La Règle de Trois peut ainsi relire toute procédure où une multiplication est suivie d'une division, en soulignant les rapports de proportion sur laquelle la procédure repose. Le ■Théorème de Pythagore■ permet le calcul du carré d'un côté, en indiquant le triangle rectangle dans lequel ce côté s'insère.

Nous avons, au-delà de ces remarques, eu du mal à distinguer entre elles explications, vérifications et preuves. Par conséquent, nous n'avons pas pu proposer de critères qui différencieraient ces raisonnements. Cette difficulté pourrait naître, en partie, du fait que les explications semblent se faire oralement, dans un diagramme⁶¹. Le texte écrit, silencieux, n'expliquerait pas alors le raisonnement entier. En tant que lecteur/lectrice contemporain(e), il se peut que nous y investissions alors nos propres interprétations.

Nous avons donc tenté de décrire comment le commentateur justifiait les procédures qu'il lisait dans les vers d'Āryabhaṭa. Nous allons à présent examiner comment il les défend.

⁶¹Notons que le commentaire du vers 11, à la traduction duquel nous renvoyons, fait également une remarque que nous pouvons interpréter dans ce sens, en utilisant le terme *vyākhyāna* (p. 78; lignes 9-11) :

*athavā jyotpattau yatkaraṇaṃ tatsarvaṃ chedyakaviṣayaṃ, chedyakaṃ ca
vyākhyānagamyam iti [na] pratipāditam/*

Ou alors, toutes les procédures concernant la production des cordes sont dans le domaine d'un diagramme, et puisqu'un diagramme n'est intelligible qu'avec une explication (*vyākhyāna*), (ceci) [n']a [pas] été expliqué (*pratipādita*) (par Āryabhaṭa dans l'*Āryabhaṭīya*).

8 Réfutations

Le terme que nous avons traduit par ■réfutation■ correspond au sanskrit *parihāra*. Comme nous l'avons souligné au début de ce chapitre, Bhāskara indique qu'il est nécessaire de donner une interprétation répondant aux doutes soulevés par une règle. Nous avons suggéré que de mauvaises interprétations appelaient, quant à elles, une réfutation. Par exemple, dans son commentaire du vers 14, Bhāskara clŽt sa réponse à une objection par la remarque suivante :

prasakte ca doṣaparihāro vā vidhīyate/

Et lorsque cela est possible, une réfutation (*parihāra*) de l'erreur est prescrite.

Le terme que nous avons traduit par ■erreur■ (*doṣa*) fait sans doute référence à un défaut d'interprétation.

En effet, lorsqu'une objection est mise en scène, le plus souvent, Bhāskara s'efforce de souligner qu'elle n'a pas lieu d'être. L'erreur ne naît pas en général d'une alternative mathématique à discuter, mais d'une incompréhension de la règle énoncée. Bhāskara commence toujours sa réplique, de manière standardisée, par l'expression : *naiṣaḥ doṣaḥ* (ceci n'est pas une erreur).

A deux reprises toutefois, ayant mis en scène une objection qui ne résulte pas d'une incompréhension mais bien d'un désaccord, le commentateur entreprend une réfutation en élaborant un raisonnement mathématique.

La première réfutation de ce type se trouve dans l'introduction du chapitre sur les mathématiques. Il s'agit de montrer que les multiplications de fractions ne sont pas des ■diminutions■ mais des ■augmentations■, contrairement à ce qu'affirme une objection fournie par un contre-exemple. Nous avons examiné le raisonnement de Bhāskara en détail dans la section 2.4. Comme nous l'avons montré, le commentateur relit le contre-exemple dans un autre cadre. Il investit le terme d'■accroissement■ d'un nouveau sens, en ne le comprenant plus arithmétiquement mais géométriquement. La multiplication devient une opération d'extension qui permet de passer de la considération de la longueur à celle de l'aire.

La seconde réfutation entreprise par Bhāskara se trouve dans le commentaire du vers 10. Il s'agit d'écarter en tant qu'approximation pour π la valeur ■des *karaṇīs* de dix■ (i.e. $\sqrt{10}$). Celle-ci est avancée bien qu'il reconnaisse que la valeur donnée par Āryabhaṭa est également une approximation. Le commentateur veut montrer, premièrement, que $\sqrt{10}$ est une

valeur approchée du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre et, deuxièmement, que cette approximation est mauvaise. En montrant que cette valeur n'est pas exacte, il entend affirmer qu'il n'existe pas de méthode par laquelle on puisse trouver une valeur exacte de ce rapport. En montrant qu'elle n'est pas une bonne approximation de ce rapport, il justifie l'approximation, meilleure, qu'en donne Āryabhaṭa.

Le raisonnement qu'il entreprend, bien qu'on puisse en comprendre les étapes, demeure obscur. Pour les détails mathématiques, nous renvoyons le lecteur à notre traduction du vers 10 et à l'annexe de BAB.2.10. Nous allons esquisser ici ses les différentes étapes et discuter tant la forme, que les principes sur lesquelles le raisonnement repose.

La réfutation porte précisément sur l'affirmation que la circonférence d'un cercle est exactement égale à la racine carrée de dix fois le carré du diamètre. Elle se fait en deux étapes.

8..1 Première étape

1. Bhāskara énonce le raisonnement qu'il va suivre (p. 72; lignes 20-22) :

*vṛttakṣetre catvāri dhanuḥkṣetrāṇi, ekam āyatacaturaśrakṣetram/
teṣāṃ phalasaṃāsena vṛttakṣetraphalena bhavitavyam/ tāni
phalāni saṃyojyamānāni na vṛttakṣetraphalatulyāni bhavanti/*

Dans un champ circulaire, il y a quatre champs d'arcs et de flèches⁶² et un champ rectangulaire. La somme de leurs aires doit être égale à l'aire du champ circulaire. Ces aires (lorsqu'elles sont calculées avec les *karaṇīs* de dix et) sommées ne sont pas égales à l'aire du champ circulaire.

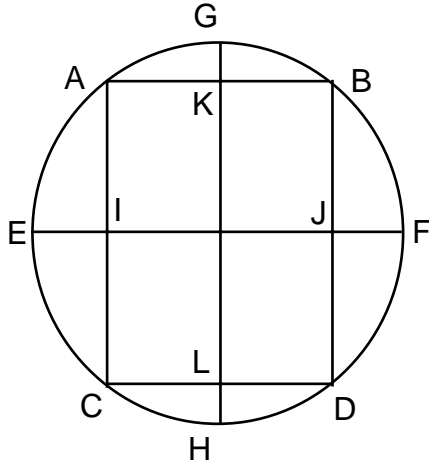
La figure 1.3 présente un cercle avec ces ■champs d' arcs et de flèches■ et un rectangle interne.

2. Bhāskara donne un exemple ■afin de mettre cela en avant/de l'expliquer■ (*pratipādana*). Il considère un cercle, dont on connaît le diamètre (EF), les flèches ($GK = LH$ et $EI = JF$) et les cordes ($AB = CD$ et $AC = BD$) d'un ensemble de quatres champs d'arcs et de flèches.

⁶²L'expression *dhanus* en sanskrit, comme en anglais, où elle est traduite par ■bow■, ne présente pas d'ambiguïté. En fran■ais, l'arc en tant qu'instrument de chasse et l'arc d'un cercle peuvent être confondus. Ici, l'expression a été traduite par la périphrase ■arc et flèche■. Pour plus de détail concernant cette figure, on pourra se reporter à la section 2.3.

Figure 1.3: Figures à l'intérieur d'un cercle : un diagramme considéré par Bhāskara dans une réfutation

L'ensemble formé d'un arc de cercle (AGB), de la corde qui le soutend (AB) et d'une flèche (GK) est une figure d'arc et de flèches



3. Il cite un premier vers en *prākṛta* qui à partir d'un diamètre (EF) et de la longueur d'une flèche (GK) calcule la longueur de la corde du ■champ d'arc et de flèche■ correspondant (AB). Cette règle ne fait pas intervenir $\sqrt{10}$. Il n'utilisera ce vers que dans la seconde étape de son raisonnement.
4. Il ■dispose■ le champ particulier que l'exemple décrit.
5. Il cite un second vers en *prākṛta* qui à partir d'une corde (AB), de sa flèche (GK) et de $\sqrt{10}$ calcule l'aire du ■champ d'arc et de flèche■ correspondant (le secteur délimité par la corde et l'arc AB).
6. Il obtient la valeur de deux aires sous la forme de *karaṇīs* et désire les additoner.
7. Il cite un troisième vers en *prākṛta* pour ajouter deux *karaṇīs*. Celui-ci, en fait, donne un moyen de sommer la racine carrée de deux nombres qui divisés par dix formeraient des carrés parfaits. Si ce n'est pas le cas, la procédure ne marche pas.
8. Comme l'une des valeurs qu'il cherche à ajouter n'est pas dix fois un carré parfait, il ne peut effectuer la somme de ces *karaṇīs* par la

méthode employée.

Bhāskara interrompt là son raisonnement, sans vraiment expliciter pourquoi. Implicitement, une absurdité a été trouvée. Il se peut qu'il considère que l'expression de la valeur obtenue par la somme de différents *karaṇīs* est différente de celle que l'on obtiendrait en calculant directement l'aire du cercle. On ne sait rien de leurs valeurs, mais puisque dans la forme elles diffèrent, cela suffirait à clore la réfutation. Pour nous, rien ne dit qu'on ne pourrait sommer ces racines autrement, ni que leurs valeurs diffèrent. Nous avons donc du mal à comprendre cette étape du raisonnement.

8..2 Seconde étape

1. Il affirme que par l'usage de $\sqrt{10}$, on ne peut pas calculer la longueur de l'arc d'un ■champ d'arc et de flèche■ dans tous les cas.
2. Il cite un quatrième vers en *prākṛta*. Celui-ci calcule à partir d'une flèche (GK), une corde (AB) et $\sqrt{10}$ la longueur de l'arc (AB) du ■champ d'arc et de flèche■.
3. Il donne un exemple d'un cercle dont on connaît une flèche (GK) et le diamètre (EF).
4. A partir du premier vers cité il déduit la corde du champ d'arc correspondant (AB). A partir du quatrième vers il en déduit la valeur de l'arc (AB). Celle-ci apparaît plus petite que la corde obtenue.

Il en conclut ironiquement (p. 75; lignes 2-4) :

*ḡyāyasā ḡyātaḥ pṛṣṭhena bhavitavyam/ tad etadvicāryamāṇam
atyantasūkṣmavādināṃ ḡyātaḥ pṛṣṭham alpīyamānam āpatitam
ato 'syai avicāritamanoharāyai namo 'stu daśakaraṇyai/*

Le dos (d'un ■champ d'arc et de flèche■) doit être plus grand que la corde. Lorsque sont examinés divers aspects (de cette théorie) qui a (des procédures) extrêmement exactes, le dos (d'un ■champ d'arc et de flèche■) apparaît avec une mesure plus petite que la corde, par conséquent nous rendons hommage aux *karaṇīs* de dix, qui sont attirants mais sont mal con■us.

5. Il donne un exemple du même type que précédemment avec d'autres valeurs numériques, et arrive au même type d'absurdité.

6. Il affirme en conclusion (p. 75; lignes 9-10) :

*evam idam ālocyamānam atyantasthūlatām āpannam iti/
tasmāt sa upāya eva nāstīti sūktam/*

Vu de cette manière (les *karaṇīs* de dix) apparaissent extrêmement frustes (*atyanta-sthūlata*). Par conséquent il a été dit correctement (plus haut qu') il n'y a pas de telle méthode (qui donne une valeur exacte du rapport de la circonférence à un diamètre.)

Bhāskara indique dans ce passage ce qu'il considère avoir montré : (1) la valeur des ■*karaṇīs* de dix■ est une mauvaise approximation du rapport de la circonférence à son diamètre, (2) par conséquent (?), il n'existe pas de méthode par laquelle une valeur exacte de ce rapport puisse être trouvée.

Pour effectuer son raisonnement Bhāskara cite quatre règles. Celles-ci, implicitement, appartiennent à l'arsenal théorique qu'il tente de réfuter. Ainsi, elles sont toutes *prākṛta* – comme le vers qu'il entend réfuter (celui qui présente la circonférence du cercle comme la racine de dix fois son diamètre). Seulement deux sur quatre d'entre-elles utilisent les ■*karaṇīs* de 10■ dans le calcul qu'elles décrivent. Au moyen de toutes ces procédures prises ensemble, Bhāskara produit des résultats qu'il juge absurdes. Que réfute-t-il alors ? Est-ce l'ensemble de l'arsenal théorique utilisé ou seulement la valeur adoptée pour π ?

Bhāskara ne critique à aucun moment les règles elles-mêmes. La remarque ironique qui clot la résolution du premier exemple de la seconde étape porte uniquement sur la valeur des ■*karaṇīs* de dix■. Nous pouvons donc supposer que les procédures employées lui semblent, dans leur généralité, valables. Il en est de même lorsque Bhāskara conclut à la fin de la réfutation que la valeur de $\sqrt{10}$ est ■fruste■ : il ne remet pas en question d'autres aspects du calcul énoncés par ces vers.

Notons ensuite que si la discussion porte sur une procédure concernant le calcul de la circonférence du cercle, Bhāskara pour la réfuter effectue un transfert et s'attache à la procédure de calcul de l'aire du cercle. Le commentateur affirme clairement entre son commentaire du vers 7 et celui du vers 10 que si le résultat obtenu pour l'aire du cercle est approché, ce n'est pas à cause de la procédure mais à cause des valeurs qui y sont insérées.

Le raisonnement de Bhāskara nous est difficile à suivre.

Ainsi, les vers ne sont pas énoncés dans l'ordre dans lequel ils seront utilisés. Bhāskara ne fait aucune remarque à cet effet. Ce n'est que dans la seconde étape de sa réfutation qu'il utilise le premier vers en *prākṛta* cité.

De même, l'absurdité obtenue à la fin de la première partie de la réfutation, pour nous, semble naître, non pas des procédures employées pour évaluer l'aire des champs d'arc ou du cercle, mais de celle utilisée pour sommer les *karaṇīs*.

Dans la seconde étape de la réfutation, la procédure employée pour mesurer la longueur de l'arc des champs d'arc pourrait être en cause. La réfutation pourrait tout aussi bien concerner la méthode employée, que la valeur de $\sqrt{10}$.

Pour nous, la conclusion générale de Bhāskara semble omettre une étape logique. En effet, de la réfutation de l'approximation de la valeur des *karaṇīs* de dix il conclut qu'il n'existe pas de méthode pour trouver une valeur exacte de ce rapport. Tout se passe comme si, à défaut d'en présenter une, on admettra que son affirmation est juste.

La première étape de la réfutation semble numérique : c'est parce que la forme des nombres obtenus si l'on calcule l'aire du cercle est différente de celle que l'on obtiendrait si l'on ajoutait les aires qui la constituent, qu'il y a incohérence. La seconde étape serait géométrique, car c'est une absurdité géométrique de trouver une corde plus grande que l'arc qu'elle sous-tend.

Le principe général sur lequel repose la première étape de la réfutation de Bhāskara, celle par laquelle il énonce le raisonnement qu'il va entreprendre est la cohérence. En effet, la valeur adoptée pour le rapport d'une circonférence à son diamètre doit permettre de trouver le même résultat par deux méthodes indépendantes. Inversement, un ou plusieurs contre-exemples suffisent à montrer l'incohérence de la théorie avancée.

Ainsi la réfutation repose sur des contre-exemples qui montrent le manque de cohésion de ce qui est avancé. Dans un cas nous voyons Bhāskara considérer une incohérence apparente et la relire géométriquement pour la surmonter. Dans le second cas, il effectue lui-même cette réfutation. Implicitement la cohérence d'un ensemble théorique, implique que deux procédures menant au même résultat offrent les mêmes valeurs à la fin du calcul. La seconde partie de la règle montre une absurdité. Là où un exemple serait un modèle d'une catégorie parmi les d'applications d'une règle, précise une méthode globale, inversement le contre-exemple (et ses accumulations) suffit à réfuter.

9 Quelques modes de raisonnement

Nous avons donc vu comment certaines procédures pouvaient investir d'un sens mathématique d'autres procédures. C'est à partir de ce fait, en ponctuant le raisonnement géométrique par un diagramme qui serait le support d'une explication orale, que Bhāskara justifierait des procédures mathématiques.

Par ailleurs, les réfutations mathématiques du commentaire semblent reposer sur des contre-exemples qui mettent en lumière l'incohérence ou les absurdités pouvant découler de la théorie rejetée. Une réfutation pourrait avoir deux aspects : l'une arithmétique, l'autre géométrique.

1.9 Conclusion

Notre conclusion a plusieurs volets correspondant aux diverses perspectives qui nous ont intéressées au cours de ce chapitre. Après avoir résumé ce que nous avons appris du commentaire, des pratiques mathématiques qu'il développe imbriquées dans l'exégèse et de la lecture qu'il offre des vers d'Āryabhaṭa, nous nous tournerons vers le traité pour résumer ce que le *bhāṣya* de Bhāskara nous en apprend. Brièvement, nous tenterons de rattacher l'*Āryabhaṭīya* à la tradition des traités en sanskrit. Nous essayerons également d'évaluer de quelle manière le commentaire de Bhāskara s'insère dans le paysage des commentaires en sanskrit du sous-continent indien.

1 La lecture du traité qu'offre le commentaire

Dans ce chapitre nous avons examiné le plus précisément possible le travail qu'effectue le commentaire au niveau microscopique d'une glose de vers. Ayant résumé ce que nos analyses nous ont montré, nous allons essayer de prendre un peu de hauteur et de dégager, rapidement, d'autres grands traits caractérisant ce texte.

2 Fonction des différentes activités du commentaire

Nous avons décrit dans la section 1.3 l'aspect composite du commentaire, et nous nous sommes posés la question de savoir comment ces divers aspects s'articulaient pour en faire un texte cohérent.

Au cours de dialogues qui semblent fictifs, Bhāskara met en évidence la manière dont le vers énonce les différentes étapes d'une procédure. Ceux-ci soulignent également les ajouts propres au commentateur. Ils sont également utilisés afin de mettre en scène des objections et leurs réfutations.

Les analyses grammaticales permettent à la fois de lever des ambiguïtés syntaxiques et de justifier une interprétation du vers. C'est à travers elles, que sont élaborées des définitions d'objet mathématiques, et que le commentateur argumente en faveur d'une terminologie technique propre au traité.

Les citations extérieures au traité, lorsqu'elles ne sont pas l'objet d'une réfutation, consolident l'autorité du raisonnement effectué. Bhāskara y a recours, en particulier, lorsqu'il introduit des procédures qui ne sont pas données dans le traité. Elles font rarement l'objet d'une glose particulière.

Les suites d'exemples résolus complètent l'explicitation de la procédure donnée dans le vers, laquelle est construite en partie dans le ■commentaire général■. Elles reflètent en partie l'étendue des applications d'une ■règle

caractérisante■. Elles étirent son application tant en termes de contexte que de types d'objets employés et obtenus.

L'interprétation de Bhāskara, nous l'avons souligné, s'insère à chacun des niveaux de lecture du traité. A à chaque moment, il explicite ce qu'il croit lire⁶³ dans le vers : que ce soit dans la finesse de l'analyse syntaxique d'un composé ou dans la lecture avec connections et omissions des mots du vers, que ce soit en suppléant des éléments de procédures ou le contexte d'application. Par conséquent, c'est uniquement sa lecture des vers d'Āryabhaṭa que nous lisons.

2.a Cohérence du Traité

L'un des objectifs du commentaire semble être de mettre en lumière la cohérence du *gaṇita-pāda* et probablement du traité dans son ensemble.

La liaison des vers entre eux est soulignée en premier lieu par les unités thématiques que le commentateur dessine.

Ainsi, Bhāskara commente ensemble le vers 26 qui porte sur la Règle de Trois et la première moitié du vers 27. Ce lien entre deux vers successifs est développé par un jeu de questions-réponses. Ayant discuté la procédure donnée dans le vers 26 un dialogue vient expliquer que la première moitié du vers 27 concerne la Règle de Trois avec quantités non-entières (p.116; lines 19-20) :

*yadā punaḥ rāśayaḥ sacchedāḥ syus tadā katham kartavyam ity
āha-*

Ab.2.27.ab.chedāḥ parasparahatā bhavanti guṇakārabhāgahārāṇām/

⟨Question⟩

Quand, toutefois, les quantités ont des dénominateurs, alors que doit-on faire ?

Il a dit-

Ab.2.27.ab. Les dénominateurs des multiplicateurs et
des diviseurs sont mutuellement multipliés|

Ici, la première moitié du vers 27 est introduite de la même manière que diverses portions du vers citées dans le ■commentaire général■.

⁶³Précisons ici que cette expression n'exclut pas une lecture dénuée de support écrit.

De manière plus globale, l'utilisation de procédures du traité dans les résolutions d'exemples tisse des liens entre les divers sujets. Elle souligne également jusqu'à quel point le traité fournit les éléments nécessaires pour traiter tous les thèmes qu'il aborde.

L'ordre dans lequel les sujets sont agencés vers à vers semble ainsi thématique et progressive⁶⁴. Nous ne sommes malheureusement pas en mesure de préciser comment Bhāskara comprend et met en lumière la cohérence du traité dans son ensemble et plus précisément le rapport que le *gaṇita-pāda* entretient avec les autres parties du traité.

Le commentaire tente également de délimiter la sphère d'action du traité. Nous avons de cette manière observé que Bhāskara, en justifiant l'usage d'un vocabulaire technique, explicitait les liens unissant les sens d'un mot dans le traité d'une part et ■dans le monde■, d'autre part. De manière plus générale, Bhāskara semble vouloir décrire les rapports qu'entretiennent les objets définis dans le traité avec ceux de la vie quotidienne. Parfois ces réflexions sont drŽles, tel que ce passage concernant le pouvoir de chaque place dans la numération positionnelle décimale (p. 47; lignes 8-10) :

*kaiṣāṃ sthānānāṃ śaktiḥ, yadekaṃ rūpaṃ daśa śataṃ sahasraṃ
ca bhavati/ satyāṃ caitasyāṃ sthānaśaktau krāyakā viśeṣeṣṭakrayyabhājanāḥ
syuh/ krayyaṃ ca vivakṣāto 'lpaṃ bahu ca syāt/ evaṃ ca sati
lokavyavahārānyathābhāva prasaṅgaḥ/*

Quel est ce pouvoir des places avec lequel une unité devient dix, cent, et mille, à quelles places appartient-il ? Et en vérité, si ce pouvoir des places existait, les détaillants auraient diverses marchandises désirables. Et selon ⟨leur propre⟩ vœux, ce qui serait acheté pourrait être abondant ou rare. Puisqu'il en est ainsi, il est possible ⟨que ce pouvoir des places⟩ ait un statut différent dans les affaires du monde.

Mettre en lumière la cohérence du traité pourrait faire partie d'une entreprise de plus grande envergure de Bhāskara. Nous avons montré, en effet, dans la section 1.8 que le commentaire cherche à justifier et défendre le traité. Un aspect de cette défense du traité pourrait consister à délimiter précisément sa sphère d'action, tout en soulignant comment il est auto-suffisant au sein de cette sphère.

⁶⁴Les sujets traités dans le *gaṇita-pāda* et leur rapports sont étudiés dans le prochain chapitre.

3 Récapitulons

Résumons les étapes de la lecture que le commentateur effectue sur les vers du chapitre sur les mathématiques, en soulignant ce qu'il supplée aux informations qu'ils contiennent.

Bhāskara explicite et complète, pour une part, les étapes générales des procédures dans le ■commentaire général■. Mais l'essentiel du travail consistant à fournir le contexte d'application et la manière dont la procédure se transforme dans des cas particuliers relève des exemples résolus. Ceux-ci sont fournis par le commentateur.

Bhāskara élabore des définitions des objets mathématiques manipulés. Il fournit également, à l'occasion, des explications, des vérifications, voire des preuves des procédures mathématiques exposées. Il se lance parfois dans des réfutations de procédures alternatives. Au delà de ce travail, il semble que le commentateur souligne sans cesse la cohérence générale du traité et le justifie. Il met souvent en lumière les rapports que la discipline technique que le traité enseigne entretient avec le monde (*loka*).

Ainsi le commentaire donne une lecture qui investit et interprète tous les aspects du traité.

4 Le traité

La lecture que fait Bhāskara du traité met en lumière la conception que le commentateur a de la rédaction des *sūtras*.

Nous avons noté au préalable même de notre analyse, que les vers du traité, en particulier du chapitre sur les mathématiques, étaient à la fois aussi généraux et concis que possible. Nous avons pu constater que la concision était souvent la clef de leur généralité, l'ellipse permettant d'éviter de distinguer des cas qu'une explicitation nécessiterait. Ainsi, certains composés ou mots techniques désignent volontairement des situations multiples permettant aux vers de prendre des sens différents suivant les situations examinées (Ab.2.19). Ou encore, en omettant de préciser la situation à partir de laquelle on applique une procédure, plusieurs cas de figures sont envisageables, qui eux-mêmes entraîneront des grilles de lectures différentes des vers (Ab.2.32-33). Cette concision, parce qu'elle met parfois en jeu des lectures techniques précises, suggère que la rédaction des *sūtras* pouvait utiliser des techniques standard. Ainsi, une partie qui a été mentionnée auparavant peut être omise d'un vers (Ab.2.21). Un vers peut être littéralement faux ou dénué de sens, indiquant ainsi qu'il doit être lu en connectant et omettant certains de ses mots (Ab.2.19). Nous avons également mis en évidence une

pratique de rédaction liée aux mathématiques, celle du jeu par les mots qui suggérerait des propriétés mathématiques (Ab.2.4-5).

Les *sūtras* n'indiquent souvent que la clef significative d'un processus ou d'une définition : dans le choix même de ce qui est dit, il y a en germe un raisonnement qui choisit ce qu'il importe de retenir de la procédure, ce qui la fonde. De cette manière, formellement et sémantiquement, les vers en même temps qu'ils énoncent elliptiquement une règle semblent en donner des éléments d'explication.

De tout cela il ressort qu'effectivement un traité est rédigé pour être interprété, commenté, débattu, exploré.

Jusqu'à quel point ces caractéristiques du traité d'Āryabhaṭa appartiennent-elles à l'interprétation qu'en donne Bhāskara ? jusqu'à quel point étaient-elles voulues par l'auteur du traité ? Un élément de réponse pourrait naître de la comparaison de l'*Āryabhaṭīya* avec d'autres traités.

5 *l'Āryabhaṭīya* et les traités sanskrits en vers

Le vocabulaire et le thème de l'*Āryabhaṭīya* sont techniques. Toutefois, les caractéristiques que nous avons relevées semblent, pour une part, s'inscrire plus largement dans le genre des textes en vers sanskrits.

Ainsi, Jan E. M. Houben dans une brève étude synthétique ([Houben 1995]) a noté que les hymnes védiques font souvent des jeux par les mots étymologiques, ou qu'ils donnent jusqu'à un certain point des indications pour l'interprétation des mots et passages difficiles (p. 29). L. Renou dans un article déjà cité ([Renou 1963]), distingue deux types de *sūtras*. Le premier, qu'il appelle ■*sūtra* A■, correspond tout à fait aux types de vers qu'utilise Āryabhaṭa. Parmi les traits qu'il note pour caractériser de tels *sūtras* certains aspects se rapportent aux vers d'Āryabhaṭa : ils sont descriptifs (§13); utilisent l'optatif (§23) et leur lecture requiert une technique appelée *anuvṛtti*, qui consiste à extraire du contexte antérieur un terme (§23). Cette technique de lecture est précisément celle adoptée par Bhāskara lorsqu'il utilise des ■*connections*■. Louis Renou indique qu'un vers de ce type doit toujours être concis et nécessite des ajouts.

S'agissant d'un texte particulier, Jan E.M. Houben a répertorié, en analysant le commentaire de Bartṛhari (sans doute un contemporain d'Āryabhaṭa) au *Mahābhāṣya* de Patañjali ([Houben 1997]), des remarques émanant du commentateur (2.4) sur les vers de Pāṇini. Ces derniers sont dénommés, entre autres, *lakṣaṇa* et *paribhāṣā* (2.5). Jan Houben écrit ainsi une phrase qui pourrait rendre compte de la manière dont Bhāskara comprend les vers

d'Āryabhaṭa :

Another basic aspect of a sūtra, in addition to and closely connected with its brevity, general applicability and descriptive exactness, is its authoritativeness.

Notons ici que les traités d'astronomie ont postérieurement à Āryabhaṭa pris des formes moins concises. Ils ont souvent intégré des listes d'exemples résolus.

Ces notes sont loin d'être exhaustives. Elles amorcent l'étude d'une question à approfondir : quelle est la caractéristique spécifique des traités d'astronomie ou de mathématiques dans le paysage des traités savants en sanskrit ? Ainsi en mathématique (mais il semble que cela puisse être vrai d'autres domaines) le style des traités sanskrits est varié. Certains se caractérisent par l'usage de vers concis et aussi généraux que possible. Ils utilisent alors des techniques de rédaction qui, pour une part, se retrouvent quel que soit le sujet dont ils traitent. D'autre part, il se peut que les similitudes qui apparaissent dans la conception que les commentateurs ont des vers qu'ils glosent soient spécifiques de l'époque à laquelle ils ont été rédigés.

Nous nous proposons à présent de tirer les conséquences de la lecture indirecte que nous avons du traité.

6 Plaidoyer pour de nouvelles lectures de l'*Āryabhaṭīya*

Nous avons remarqué que le commentateur ne sépare jamais les intentions d'Āryabhaṭa de sa propre interprétation. Cela ne l'empêche pas pour autant de critiquer d'autres interprètes (Prabhākara). Jusqu'à présent les historiens des mathématiques lecteurs d'Āryabhaṭa, tout en reconnaissant qu'ils s'appuyaient sur de tels commentaires, n'ont que rarement prêté attention à la manière dont leur lecture et celle du commentateur dont ils épousaient l'interprétation se construisaient. Ils ont en quelque sorte perpétué cette tradition de lecture des textes. Ainsi toutes les traductions qui existent reposent sur des lectures du traité à travers les yeux d'un ou de plusieurs commentateurs. De plus, ces lectures ont souvent eu un aspect retrospectif, les résultats mathématiques étant mesurés à l'aune de nos connaissances contemporaines. Divers types d'interprétations se sont ainsi mêlés, si bien qu'il est quasiment impossible de faire rétrospectivement la part dans de telles traductions des lectures relevant du sanskrit, de l'interprétation d'un commentateur ou de celles dérivant de connaissances mathématiques contemporaines. A titre d'exemple, la traduction qui fait autorité du traité, celle de K.V. Sarma et K.S. Shukla ([Sharma-Shukla 1976]), repose plus ou

moins sur les 18 commentaires de l'*Āryabhaṭṭya* qui sont parvenus jusqu'à nous. Des lectures divergentes sont ainsi de temps en temps notées, mais ces éditeurs n'ont pas expliqué pourquoi ils ont adopté une interprétation plutôt qu'une autre.

Il est souvent considéré que le plus ancien commentaire est le plus fidèle au traité. Ceci n'est pas toujours le cas. A titre d'exemple, un article de T. Hayashi ([Hayashi 1997]) a proposé une réinterprétation du vers 12 du chapitre sur les mathématiques en s'appuyant sur un commentaire de Nīlakaṇṭha qui date du XVI^{ème} siècle. Dans cet article il souligne comment les historiens des mathématiques, tributaires de la lecture qu'en fait Bhāskara, ont été induits en erreur sur la probable teneur originale du vers.

Il faut bien s'y résoudre : tout se passe comme si nous ne pourrions lire les *sūtras* qu'à travers leurs commentateurs. Mais en observant comment les commentateurs les lisent, nous recevons en retour des informations sur la rédaction des vers eux-mêmes. C'est en comparant tous les commentaires que la richesse des interprétations possibles du traité apparaîtra.

7 Diversité des types de commentaires mathématiques sanskrits

Comme nous l'avons souligné dans notre introduction, peu d'historiens se sont attachés à décrire des commentaires mathématiques indiens. La tradition des commentaires sanskrits classiques postérieurs à Bhāskara s'étend jusqu'à la fin du XV^{ème} siècle environ, date à partir de laquelle la présence perse et arabe dans le sous-continent indien fait sentir son influence en mathématiques. Comme Bhāskara, les commentateurs –mathématiciens ou astronomes– postérieurs à celui-ci sont souvent aussi des rédacteurs de traités⁶⁵.

Nous ne sommes malheureusement pas en mesure d'entreprendre ici un historique des commentaires mathématiques en langue sanskrite. Nous nous contenterons de faire quelques remarques qui suggèrent une direction d'étude, que nous appelons de nos vœux.

Nous pouvons estimer qu'il existait diverses formes de commentaires mathématiques. L'une, moins élaborée que celle de Bhāskara, se contenterait d'élucider les rapports syntaxiques des mots du vers, et de donner les calculs intermédiaires d'exemples inclus dans le traité, comme c'est par exemple le cas du commentaire de Mahīdhara au *Līlāvati* de Bhāskara II. D'autres, se rapprocheraient formellement du commentaire de Bhāskara, en

⁶⁵[p. 31; Srinivas 1990].

intégrant des preuves systématiques. Ainsi le *Sūryaparakāśa* de Sūryadāsa (1507-1588), un commentaire du *Bījagaṇita* de Bhāskara II, entrerait dans ce cadre⁶⁶. L'organisation formelle du texte ressemble à celle de Bhāskara⁶⁷. Le commentaire commence par une prière auspiciouse (*maṅgala-ācaraṇa*) puis, après une phrase introductive, cite le vers qu'il entend gloser. Chaque exégèse de vers se divise alors en trois parties. La première s'appuie sur la correction syntaxique des mots du vers. Elle s'achève sur l'expression stéréotypée *iti sambandhaḥ* ou *ity anvayaḥ*. La seconde, s'attache au sens du vers et se termine par l'expression *ity arthaḥ*, que Bhāskara I emploie dans son ■commentaire général■. La troisième consiste, selon P.K. Jain, en une preuve et se clôt par l'expression *ity upapannam*. Notons la parenté étymologique du terme *upapanna* avec le terme employé par Bhāskara pour la preuve, *upapatti*. Le commentaire de Sūryadāsa comprend de nombreuses citations extérieures au traité, celles-ci ne sont pas toujours glosées. Le *Bījagaṇita* contient des exemples résolus. Ceux-ci suivent un vers général. Leur présence dans le traité explique leur absence dans le commentaire. Nous pouvons ainsi voir dans ce texte de Sūryadāsa, un commentaire dans la continuité du commentaire de Bhāskara.

Le *Buddhivilāsinī* de Gaṇeśa Daivajña, un commentaire du *Līlāvatī* et celui de Kṛṣṇa Daivajña seraient également de ce type⁶⁸. Ils auraient pour modèle le commentaire de Bhāskara II à ses propres œuvres⁶⁹. Chez ces trois auteurs, le terme utilisé pour la ■preuve■ est *upapatti*. Selon Srinivas la tradition des preuves systématiques dans les commentaires serait plus ancienne que celle que nous connaissons pour Bhāskara II⁷⁰.

Ainsi il existe divers types de commentaires mathématiques. Ceux-ci doivent sans aucun doute varier suivant le type de traité dont ils font l'exégèse. Certains des commentaires ont une parenté de structure avec celui de Bhāskara. S'agit-il d'une évolution, dont celui de Bhāskara serait un sorte de modèle archaïque ? Il est difficile de mesurer jusqu'à quel point il existait des formes fixes de commentaires ou s'il y avait des modèles dominant pour ceux-ci. Des réponses pourraient nous être fournies en regardant, à un niveau plus général, la tradition des commentaires en sanskrit.

⁶⁶P.K. Jain a dans sa thèse soutenue en 1995 proposé une édition critique et une traduction en anglais de trois chapitres de ce commentaire, [Jain 1995].

⁶⁷*op. cit.* p. 10-11.

⁶⁸[p.34; Srinivas1990].

⁶⁹*op. cit.* p. 35-36.

⁷⁰*op. cit.* p. 36.

8 Traditions de commentaires en sanskrit

Bien que l'étude des commentaires et de leur formes particulières reste pour l'essentiel à faire, certains chercheurs leur ont déjà consacré des travaux. Johannes Bronkhorst, dans deux articles publiés en 1990 et 1991⁷¹ propose de distinguer deux types de commentaires à l'époque classique, précisément l'époque qui nous intéresse. D'un côté il y aurait ce qu'il appelle le style *bhāṣya*, dans lequel on pourrait inclure le *Tattvārthādhigama-bhāṣya* de Umāsvāti⁷², et qui se caractériserait par une appropriation du traité par le commentateur. Celui-ci citerait les vers qu'il commente comme étant les siens et ne discuterait pas d'interprétations divergentes d'un même vers. De l'autre il y aurait ce que Johannes Bronkhorst appelle le style *vārttika*, du nom de ces vers ou phrases des commentaires grammaticaux, qui sont internes aux commentaires et font eux-mêmes objets de commentaires. Le modèle de tels commentaires serait le *Mahābhāṣya* de Patañjali, texte cité à plusieurs reprises par Bhāskara. Ce type de commentaire se caractériserait par la distinction entre l'auteur du texte commenté, souvent appelé *guru* ou *ācārya*, et le commentateur. Il présenterait des interprétations divergentes d'un même vers et incluerait des *vārttikas* en son sein. On peut reconnaître dans cette description le *bhāṣya* de Bhāskara. Toutefois, nous pouvons remarquer que Bhāskara ne commente que rarement les vers qu'il cite. Il ne semble, de plus, y avoir aucune ambiguïté sur le fait qu'il n'est pas l'auteur des vers qu'il énonce.

Le commentaire de Bhāskara ressemble au type de commentaire que Bronkhorst appelle *vārttika*, à cela près qu'il fait un usage extrêmement rare des *vārttikas* eux-même.

Ce bref aperçu de la diversité des formes de commentaires mathématiques et non-mathématiques souligne le manque criant d'analyses plus approfondies de ce genre. Elles seraient nécessaires pour rendre leur comparaison possible. Certaines similitudes de style apparaissent entre ces textes de sujets et d'époques divers. Mais il n'est pas certain que les distinctions que nous effectuons à présent soit suffisamment fines pour rendre compte de la diversité des types de commentaires. Il est probable que ceux-ci, le détail de leur forme par exemple, ont varié de matière à matière.

Nous avons ainsi souligné le travail interprétatif que Bhāskara effectue

⁷¹[Bronkhorst 1990] et [Bronkhorst 1991].

⁷²Ce texte du canon Jain est évoqué dans l'annexe au commentaire du vers 10 du chapitre sur les Mathématiques de l'*Āryabhaṭīya* comme l'une des possibles sources des vers cités par Bhāskara.

dans sa lecture des vers d'Āryabhaṭa. Nous allons maintenant nous tourner vers la pratique mathématique qu'il présente dans ce commentaire.

Chapter 2

Pratiques et Concepts mathématiques

Ayant examiné les définitions et distinctions données par Bhāskara au sujet des mathématiques, nous nous attacherons simultanément à observer comment celles-ci opèrent concrètement, tout en décrivant certaines pratiques mathématiques du commentaire.

2.1 Qu'est-ce que *gaṇita* ?

Peu d'études ont été conduites jusqu'à présent avec l'objectif de déterminer précisément ce que désigne le mot sanskrit *gaṇita*, ■mathématiques■. En revanche, les recoupements de ce sujet avec d'autres tel la métrique ou l'architecture ont parfois retenu l'attention¹. Le problème de savoir si *gaṇita* désigne une discipline séparée de l'astronomie reste entier. En effet, de nombreux textes mathématiques, y compris celui que nous étudions ici, sont des chapitres de traités d'astronomie².

Depuis les travaux de Datta et Singh³, il ne semble pas y avoir eu de réflexion approfondie sur les différentes subdivisions de cette discipline. Celles-ci varient suivant les auteurs et les époques. De nombreuses questions restent en suspens.

¹Voir à titre d'exemple, les remarques de J. Bronkhorst sur un article de S.R. Sharma portant sur l'usage du zéro dans un commentaire de Piṅgala, [Bronkhorst 1994].

²Cette question est brièvement soulevée dans [p. 33; Srinivas 1990].

³[p. 2-9; Datta-Singh 1938]. Notons tous de même les remarques de [p.32-34; Srinivas 1990] citant les différentes distinctions opérées par plusieurs commentateurs de Bhāskara II, postérieurs au XV^{ème} siècle.

Bhāskara, par exemple, donne une liste de sujets mathématiques, les huit *vyavahāras*. Est-ce que la même classification se trouve aussi chez d'autres auteurs ? Et si c'est le cas, rassemble-t-elle les mêmes sujets ?

D'autre part, le sens du mot *gaṇita* lui-même pose problème. Dans le commentaire de Bhāskara ce mot prend des sens divers : il signifie ■calcul■ et par extension ■ce qui a été calculé■. Ainsi est-il employé dans le sens de ■somme■, ■aire■, ■volume■. En outre, le commentateur utilise également d'autres mots signifiant ■calcul■, ■opération■, ■méthode■ ou ■procédure :■ *kriyā, karman, viddhi, karaṇa*, etc. Ceux-ci font partie du vocabulaire mathématique courant; ils ne sont pas particuliers à ce commentaire. Comment ces différents termes se distinguent-ils sémantiquement entre eux ? Sont-ils toujours employés avec la même signification suivant les auteurs ? Plus précisément, nous y reviendrons, la question se pose de savoir si le terme *gaṇita* est un mot générique pour désigner toute procédure dont on rend compte abstraitement ou s'il s'agit d'une discipline particulière qui utilise des procédures abstraites.

Ainsi l'étude sémantique du mot *gaṇita*, dans un cadre historique, reste à faire. De même, l'étude des processus recouverts par d'autres termes au sens similaire serait souhaitable.

Nous voudrions étudier la conception et la pratique des mathématiques présentes dans ce commentaire du *gaṇita-pāda*. Nous ne pourrions dresser ici de portrait synthétique des mathématiques selon cet auteur par manque de temps, de recul et de connaissances. Une étude pertinente de *gaṇita* et de ce que ce mot signifie ici demanderait, de plus, une lecture complète des œuvres de Bhāskara. Nous allons donc nous efforcer de tracer un premier croquis pour qu'il serve de base à une future réflexion plus approfondie sur la manière dont ce terme se comprend chez cet auteur et chez d'autres.

Ces précautions prises, nous allons à présent examiner les différentes définitions de ce mot, telles qu'elles apparaissent dans la partie du commentaire de Bhāskara que nous avons lue.

Le commentateur effectue de nombreuses classifications de ce sujet. Elles se recourent parfois. Nous tenterons de déterminer comment elles s'articulent entre elles sans en tirer de conclusions définitives pour autant.

Bhāskara définit *gaṇita* de trois manières différentes :

1. En considérant ses procédures : en ce sens *gaṇita* peut être une liste de sujets (tels les huit *vyavahāras*) ou un ensemble subdivisé par fonctions (mathématiques spécialisées/ mathématiques générales).

Table 2.1: La liste de sujets énumérés par Bhāskara et les vers du chapitre sur les mathématiques

Champs	vers 3-13; 17-18
Ombres	14-16
Séries	19-22; 29
équations	30
Pulvérisateur	32-33

2. En considérant les opérations utilisées et leurs effets sur les objets qu'elles emploient : il différencie les mathématiques ■pratiques■ des mathématiques ■précises■ d'une part, les opérations d'augmentation des opérations de diminution d'autre part.
3. En considérant le type d'objets employés dans une procédure : il en découle la partition de *gaṇita* en arithmétique et géométrie.

Nous allons à présent examiner les parties du texte où ces manières de définir *gaṇita* apparaissent.

1 Un ensemble de sujets

Le premier commentaire du mot *gaṇita* se trouve au tout début du texte de Bhāskara : c'est une glose du terme employé dans le premier vers du premier chapitre de l'*Āryabhaṭṭya*⁴.

1.a Les sujets du *gaṇita-pāda*

Cette exégèse (p. 5, ligne 18) commence par donner une énumération des sujets du *gaṇita-pāda*. Elle correspond plus ou moins à leur ordre d'apparition dans le chapitre, comme le montre la confrontation de cette citation avec le tableau 2.1 (p. 5; lignes 18-19) :

gaṇitaṃ, kṣetrachāyāśredhī samakaraṇakuṭṭākārādikam

■les Mathématiques■ sont les Champs, les Ombres, les Suites,
les équations, le Pulvérisateur, etc.

⁴Cette glose est entièrement traduite, en anglais, dans l'appendice B à la fin de ce chapitre.

Nous avons compris cette liste de sujets de la manière suivante.

Le statut des procédures d'extraction de racines (Ab.2.4-5) est problématique car leur rapports aux autres sujets abordés dans le *gaṇita-pāda* ne fait l'objet d'aucune remarque. Nous pensons qu'elles doivent être comprises dans un cadre géométrique. Elles sont situées entre un vers qui traite du carré et du cube (Ab.2.3) et un vers sur les triangles et les tétraèdres (Ab.2.6). De plus, les mesures d'aires et de longueurs sont souvent obtenues sous la forme de carrés dont il faut alors extraire la racine.

Une autre difficulté naît du statut à conférer aux vers 11-12 qui donnent des procédures pour produire des demi-cordes (*ardha-ḥyā*; i.e. Rsinus). Ils ont un rapport avec les calculs liés aux ombres de gnomons (ils sont trigonométriques), mais ce lien n'est pas explicite. Le vers 11 utilise une méthode géométrique pour dériver des demi-cordes, le vers 12 une méthode arithmétique.

Enfin, le vers 13 énumère des instruments pour la construction de diagrammes et de figures tri-dimensionnelles.

Nous avons inclus, un peu arbitrairement, ces trois vers dans les ■Champs■ plutôt qu'avec les ■Ombres■.

Le vers 29 présente également des difficultés : l'éditeur, K.S. Shukla le comprend comme une procédure permettant de résoudre une équation du premier degré à plusieurs inconnues⁵. Toutefois, selon nous, le vocabulaire et l'interprétation qu'en donne Bhāskara l'apparente aux séries.

D'autre part, cette liste ne semble pas rendre compte des procédures données dans les vers 23 à 28, ni de celles données dans le vers 2 et le vers 31⁶. Nous ne les avons donc pas incluses dans le tableau. Il s'agit soit de règles d'arithmétique (allant de la notation des nombres jusqu'à des problèmes commerciaux en passant par la Règle de Trois, i.e les vers 2, 23-28), ou d'une règle d'astronomie mathématique (vers 31). Toutefois, Bhāskara note dans le même commentaire de vers, plus bas (p.6, lignes 10-11) :

*yathā kṣetragaṇitaṃ bravīti, evaṃ grahagaṇitam api; grahagaṇitasya
ca kṣetraādyaḥvyatiraktatvāt/*

Lorsqu'il (Āryabhaṭa) dit la géométrie (il dit) également les mathématiques des planètes, parce que les mathématiques des planètes ont l'état de n'être pas distinguées des champs, etc.

Nous pourrions donc inclure le vers 31 en géométrie.

⁵Se reporter à la traduction du vers 29.

⁶Le lecteur/la lectrice peut se reporter à le tableau 2 de l'Introduction. Cette dernière résume vers-à-vers le contenu du Chapitre sur les Mathématiques.

1.b Les huit *vyavahāras*

Dans le même commentaire de Ab.1.1., Bhāskara donne une liste de sujets définissant le terme *gaṇita*, pris ici dans un sens plus large que celui qui lui est conféré dans le chapitre sur les mathématiques. Nous reviendrons à cet aspect de la définition du terme. Retenons pour le moment que ce mot est encore défini par une liste de sujets :

*anyathā hi mahad gaṇitavastu, aṣṭau vyavahārā miśrakaśredhīkṣetrakhātacitikrākacikarāśicchāyābhi
(...) iti vyavahāragāṇitasyaṣṭābhīdhāyinaś catvāri bījāni prathamad-
vitīyatṛtīyacaturthāni yāvattāvadvargāvargaghanāghanaviṣamāṇi/*

D'un autre point de vue, toutefois, le sujet des mathématiques est vaste, il y a huit *vyavahāras* appelés : Mixtures (*miśraka*), Suites (*średhī*), Champs (*kṣetra*), Excavations (*khāta*), Empilements de briques (*citi*), Sciages (*krākacika*), Empilements de grains (*rāśi*), Ombres (*chāyā*).

(...)

Les huit noms des calculs-*vyavahāras* ont quatre graines (*bīja*), la première, la seconde, la troisième et la quatrième, qui sont respectivement, *yāvattāvat* (lit. ■autant que■, cette expression désigne les équations simples), *vargāvarga* (lit. ■carré et non-carré■, cette expression désigne les équation quadratiques), *ghanāghana* (lit. ■cubes et non-cubes■, i.e. les équations cubiques) et *viṣama* (lit. ■différent■, cette expression désigne les équations avec plusieurs inconnues).

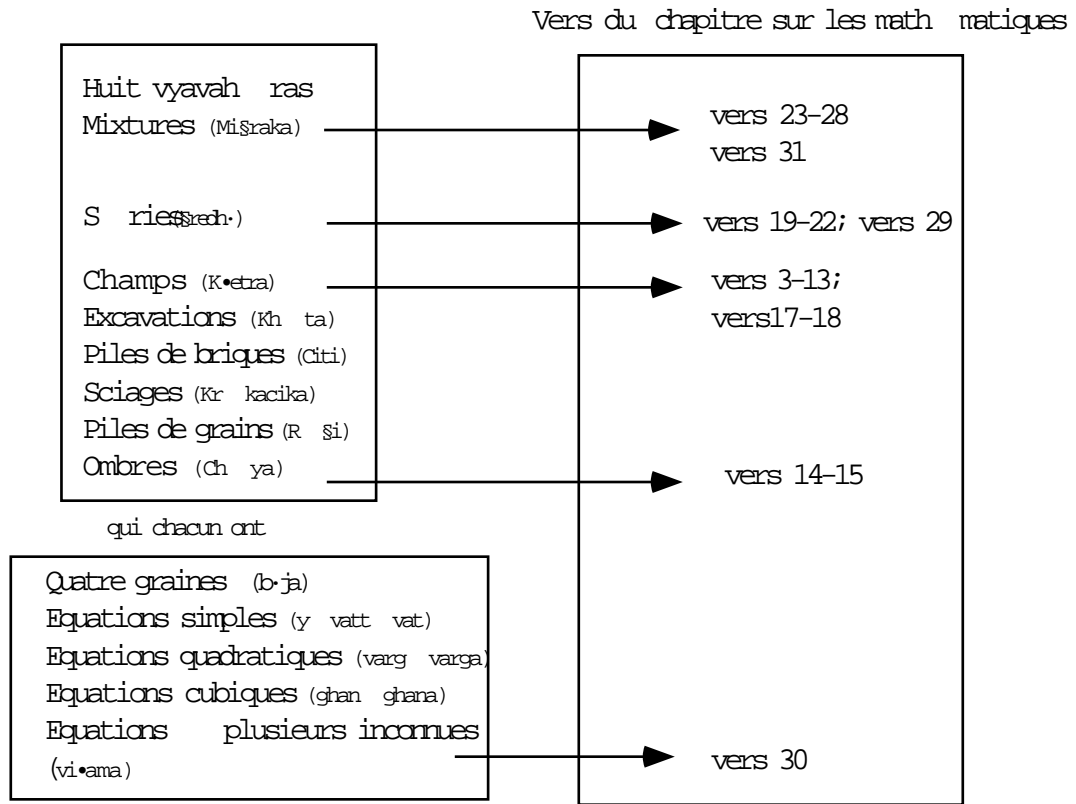
La manière dont cette classification semble s'articuler avec les sujets abordés dans le chapitre sur les mathématiques est illustrée dans la Figure 2.1.

Nous n'avons pas repris ici la définition de chacun des sujets des huit *vyavahāras*, que l'on retrouvera dans la traduction donnée en annexe de ce chapitre. Au sein de cette classification, trois des sujets énumérés par Bhāskara dans sa première glose de *gaṇita* apparaissent : les Séries, les Champs et les Ombres.

Les Champs sont définis de la manière suivante (p. 6; ligne 20; p. 7; ligne 1) :

kṣetram iti anekāśrikṣetrāphalāy anayatīy arthaḥ/

Figure 2.1: Le rapport que les 8 *vyavahāras* et les quatre *bījas* entretiennent avec les sujets abordés dans le *gaṇita-pāda*



Les vers qui n'entrent pas dans ces catégories sont: le vers 2 (qui définit la numération positionnelle décimale) et les vers 32-33 qui décrivent le pulvérisateur.

Les Champs sont les calculs d'aires de champs ayant de nombreux rebords.

Nous avons de nouveau choisi de comprendre que les vers 11, 12 et 13 relevaient de la géométrie (la discipline des champs).

Les Séries, dont nous noterons plus tard le caractère géométrique selon Bhāskara, sont définies de la manière suivante (p. 6, ligne 20) :

śreḍhī iti ādyuttarapracita ity arthaḥ /

Les Séries sont des empilements avec un premier terme et une augmentation ⟨constante⟩.

Comme nous le verrons dans la section 2.4, une double lecture des procédures qui forment cette discipline est possible. Elle est esquissée dans cette définition : d'un côté ce sont des empilements d'objets qui ont des caractéristiques géométriques; de l'autre les propriétés de cet empilement (le nombre d'éléments qui le forment, la méthode par laquelle l'empilement est effectué) sont de nature arithmétique.

La définition du sujet nommé ■Ombres■ est la suivante :

chāyā iti śāṅkṡvādicchāyāpramāṇena kālaṃ kathayatīty arthaḥ/

Les Ombres disent l'heure en utilisant la taille de l'ombre d'un gnomon, etc.

Elle ne correspond qu'indirectement aux procédures énoncées dans les vers 14-16. En effet, aucune méthode explicite pour dériver l'heure de l'ombre d'un gnomon n'est proposée ni dans ces vers ni dans leurs commentaires.

Nous allons à présent nous tourner vers les ■quatre graines■ énumérées par Bhāskara.

Nous avons vu le terme (*bīja*) signifier le résumé elliptique d'une règle énoncée par un vers⁷. Après Bhāskara, ce terme pourra désigner l'inconnue dans une équation. Dans l'énumération des sujets qui forment *gaṇita* nous voyons ce mot endosser le sens générique ■d'équations■. La distinction entre les huit *vyavahāras* et les quatre ■graines■ demeure obscure. Chacun des sujets formant les huit *vyāvahāras* est associé aux quatre types d'équations sans que leur lien ne soit explicité. Ce rapport rappelle la distinction, plus tardive, entre *vyakta-gaṇita* (arithmétique ou ■mathématiques des ⟨quantités⟩ déterminées) et *avyakta-gaṇita* (algèbre ou ■mathématiques

⁷Se reporter à la section 1.2.

des ⟨quantités⟩ indéterminées). Dans sa première glose de *gaṇita* Bhāskara regroupe les équations sous le terme *sama-karaṇa* (rendre égal). Ce mot ne désigne que la procédure du vers 30. Les équations quadratiques et cubiques ne sont pas abordées dans le traité⁸.

Les procédures commerciales et arithmétiques données dans les vers 23-28, ne semblent pas être incluses dans les huit *vyavahāras*. Le vers 31, qui traite de l'instant de ■rencontre■ de deux planètes, lui non plus ne semble pas figurer dans cette classification. Or, dans le *Pāṭī-gaṇita* de Śrīdhāra (ca. VIII^e siècle), les Mixtures comprennent des problèmes commerciaux, et ■la rencontre de deux voyageurs■. Bhāskara, définissant les Mixtures écrit (p. 6; lignes 19-20) :

miśraka iti sakalagaṇitavastusaṃmiśrakaḥ saṃsparśaka ity arthaḥ/

Les Mixtures sont la mise en contact et le mélange de tous les sujets des mathématiques.

A défaut de connaître les problèmes qui traditionnellement forment ce sujet, on peut le considérer comme une catégorie ■fourre-tout■. Celle-ci pourrait alors accueillir les vers inclassables ailleurs. En particulier, elle pourrait contenir les vers que nous avons repertoriés plus haut (28; 31; 32-33).

le tableau 2.2 présente quelques éléments sur la postérité des huit *vyavahāras*.

⁸La procédure du vers 25 semble dériver d'une équation quadratique, mais elle ne propose pas directement de méthode de résolution de celle-ci. Nous avons également noté que le vers 29 pouvait être interprété comme une équation à plusieurs inconnues, mais il n'est pas lu de cette façon par Bhāskara.

Table 2.2: Présence des *vyavahāra* après Bhāskara

A la manière de cette table des matières d'une encyclopédie chinoise inventée par Borges et analysée par Foucault au début des *Mots et des Choses*, la liste des *vyavahāras*, à première lecture, avec son regroupement de sujets divers, redondants, comme réunis par hasard, souligne que nous sommes en présence d'une culture dont les classifications nous échappent.

Dans le tableau ci-dessous, qui en aucun cas n'est exhaustif, sont présentés certains textes postérieurs au commentaire de Bhāskara. Nous y avons notés les sujets appelés *vyavahāra* dans l'ordre où ils apparaissent dans ces textes. Les *vyavahāras* dans ces traités forment un ensemble de chapitres dont chacun a pour titre le nom noté dans la liste présentée ci-dessous. Chaque chapitre énonce plusieurs procédures.

BAB=*Āryabhaṭīya-bhaṣya* (629 AD); BSS=*Brāhma-sphuṭa-siddhānta* (628); PG=*Pāṭī-gaṇita* (ca. 750); Lī=*Līlāvātī* (1150); GK=*Gaṇita-kaumudī* (1356)

BAB	BSS	PG	Lī	GK
-	-	-	-	<i>prakīrṇaka</i>
Mixtures (<i>miśraka</i>)	idem	idem	idem	idem
Séries (<i>średdhī</i>)	idem	idem	idem	idem
Champs (<i>kṣetra</i>)	idem	idem	idem	idem
Excavations (<i>khāta</i>)	idem	manuscrit interrompu	idem	idem
Piles de briques (<i>citi</i>)	idem	-	regroupé	idem
Sciages (<i>krākacika</i>)	idem	-	regroupé	idem
Piles de grains (<i>rāśī</i>)	idem	-	regroupé	idem
Ombres (<i>chāyā</i>)	idem	-	idem	idem
-	-	-	-	<i>kuṭṭāka</i>

En examinant la postérité de cette classification, nous pouvons être frappés par la préservation des huit *vyavahāras*. Nous ne savons pas de quelle manière les problèmes et les procédures que de telles catégories nomment ont évolué. Mis à part le texte du *Līlāvātī* dans lequel trois sujets sont énumérés sous un même chapitre, les textes ont tous gardés les noms et l'ordre de la liste. Notons que le *Gaṇita-kaumudī* étend le nombre de ces sujets, y ajoutant par exemple le pulvériseur (*kuṭṭāka*).

Ce tableau ne montre pas que dans la classification générale des mathématiques la place de cette liste change. A titre d'exemple, la plupart des auteurs postérieurs à Bhāskara I considèrent un certain nombre d'opérations élémentaires regroupés sous le titre *parikarman*. Chacun des *parikarman* présente des règles pour multiplier et diviser des entiers, des fractions, zéro, etc. Ce mot apparaît dans le texte de Bhāskara, mais nous semble désigner des opérations qui ont une lecture à la fois géométrique et arithmétique. En général, le traitement des *vyavahāras* vient après celui des *parikarman*.

Nous pouvons retenir de ces analyses que le mot *gaṇita* peut-être défini comme une somme de sujets spécialisés. Nous ne sommes pas certains de la manière dont l'ensemble des vers du *gaṇita-pāda* se rapportent à la liste des sujets énumérés par le commentateur.

D'autres caractérisation de *gaṇita* sont fournies par Bhāskara.

2 Un ensemble d'opérations

Deux classifications des opérations qui composent *gaṇita* sont données dans la partie du commentaire que nous avons lue : l'une en terme d'augmentation et de diminution, l'autre en terme de précis et de pratique.

2.a Augmentation et Diminution

Bhāskara affirme qu'il existe une partition de *gaṇita* en terme d'■augmentation■ (*vṛddhi*) et de ■diminution■ (*apacaya*). Elle concerne l'ensemble des mathématiques. Cette distinction apparaît uniquement dans la partie introductive du deuxième chapitre (p. 43, lignes 13-15) :

*yad etadgaṇitam tad dvividhaṃ (...)/ vṛddhir hy apacayaś ceti
dvividham/ vṛddhiḥ samyogaḥ, apacayo hrāsaḥ/etābhyāṃ bhedābhyāṃ
aśeṣagaṇitam vyāptam/*

Ce que sont ces mathématiques est double (...). Double, en effet : augmentation et diminution. L'augmentation signifiant l'addition; la diminution signifiant la soustraction. Ces deux parties recouvrent l'ensemble des mathématiques.

Ce passage reprend implicitement la glose du mot *gaṇita* qu'Āryabhaṭa emploie au début de son traité afin de désigner le contenu du deuxième chapitre. L'expression ■ces mathématiques■ (*etad-gaṇitam*) renvoie donc au sens du mot *gaṇita* dans le traité.

L'■augmentation■ et la ■diminution■ évoquent l'action qu'une procédure ou une opération produisent sur les objets qu'elles manipulent.

Le statut en terme d'augmentation et de diminution de tous les algorithmes donnés dans le *gaṇita-pāda* est, selon Bhāskara, ambivalent. Ayant cité un vers qui réaffirme cette subdivision, le commentateur en effectue une exégèse. Alors qu'il commente le terme ■et■ employé dans cette citation il écrit (p. 44, lignes 2-7) :

*'śuddheś ca' ity atra yogārthaṃ cakāraḥ paṭhyate/ tena średdhīkuṭṭākārādiṣu
loke cāniyatasvarūpavṛddhiḥ (Mss E. aniyatasvarūpā vṛddhiḥ) sā*

*ca parigrhātā bhavati/ śuddheś ca bhāgo gatamūlam uktam/ (...)
atrāpi średdhikuttākārādi[ṣu] loke ca aniyatasvarūpo 'pacayaḥ ca
kārād eva parigrhyate/ evaṃ śāstre loke ca na so 'sti gaṇitaparakāraḥ
yo 'yam vṛddhyātmako 'pacayātmako vā na bhavati/*

⟨En ce qui concerne⟩ ■et ⟨des variétés⟩ de soustractions■.
Dans ce cas, le mot ■et■ est lu pour l'union. Ainsi, la compréhension de l'augmentation en tant que c'est ce dont la propre forme n'est pas fixée dans les suites, les pulvérisateurs et dans le monde, est produite, et il a été dit ■et (des variétés) de soustractions sont la division et l'évolution■. (...) Dans ce cas également, uniquement à partir du mot ■et■, la diminution en tant que c'est ce dont la propre forme n'est pas fixée dans les suites, les pulvérisateurs et le monde, est comprise. C'est ainsi dans le traité et dans le monde, il n'y a pas de genre de calcul (*gaṇita*) qui ne soit fait d'augmentation ou de diminution.

La compréhension de ce passage est difficile. Il souligne probablement qu'en ce qui concerne les procédures portant sur les séries et le pulvérisateur, certaines des opérations sont des ■augmentations■ tandis que d'autres sont des ■diminutions■. Par conséquent, si l'on distingue des moments qui suivent l'une ou l'autre transformation, l'ensemble n'a pas ■de forme fixée■ suivant ces classifications⁹.

Le mot sanskrit signifiant ■ou”, *vā*, n'est pas exclusif¹⁰. Ainsi peut-on comprendre, d'après la dernière phrase de ce passage, que tous les calculs peuvent relever soit de l'augmentation seule, soit de la diminution seule, soit de l'augmentation et de la diminution ensemble.

L'■augmentation■ et la ■diminution■ concerne non seulement des quantités mais aussi des entités géométriques. Dans le paragraphe qui suit, Bhāskara explique que la diminution apparente d'une multiplication de deux fractions correspond géométriquement à la considération d'une aire produite à partir de deux longueurs. Cette multiplication peut donc se comprendre géométriquement comme une ■augmentation■¹¹. Cette analyse repose sur

⁹Une autre interprétation se superposerait à celle-ci : le commentateur lierait cette idée mathématique d'augmentation et de diminution aux affaires du monde (*loka*), en précisant de la même manière que si l'on peut distinguer des formes d'augmentation et de diminution dans le monde, en général, le statut des transformations à un niveau plus général est ambigu.

¹⁰Voir [§382.B; Renou 1984].

¹¹Nous reviendrons aux rapports entre opérations géométriques et arithmétiques dans la section 2.4.

une autre classification de *gaṇita* : celle qui distingue l'arithmétique de la géométrie.

Remarquons que la distinction augmentation/diminution est typique d'une tradition qui considère les mathématiques comme un ensemble d'algorithmes. Cette classification n'est pas reprise ou commentée ailleurs dans le traité.

2.b Procédures précises et pratiques

La distinction entre procédures précises (*sūkṣma*) et procédures pratiques (*vyāvahāra*) traverse tous les commentaires se rapportant aux calculs dans un cercle. Elle ne se rapporte pas explicitement aux mathématiques dans leur ensemble. Nous nous contenterons de souligner que cette distinction est expressément formulée par le commentateur. Comme la distinction entre ■augmentation■ et ■diminution■, elle rend compte des transformations que des processus font subir aux objets qu'ils emploient. Nous réservons une analyse approfondie de cette classification à une étude ultérieure.

Nous allons à présent examiner ce que Bhāskara nous dit des objets dont *gaṇita* est formé.

3 Un ensemble d'objets

L'introduction du chapitre sur les mathématiques présente une autre partition de *gaṇita*. Celle-ci catégorise les objets qui forment les mathématiques (p. 44; lignes 15-19) :

*apara āha-gaṇitaṃ rāśikṣetraṃ (tous les manuscrits lisent : kālakṣetraṃ)
dviddhā' / (...) gaṇitaṃ dviprakāramrāśigaṇitaṃ kṣetragaṇitaṃ/
anupātakuttākārādayo gaṇitaviśeṣaḥ rāśigaṇite 'bhihitāḥ, średdhīcchāyādayaḥ
kṣetragaṇite / tad evaṃ rāśyaśritaṃ kṣetrāśritaṃ vā aśeṣaṃ gaṇitaṃ/
yadetadkaraṇīparikarma tat kṣetragaṇita eva/*

Un autre a dit- ■Les mathématiques sont doubles : les quantités et les champs■. (...)

Les mathématiques sont doubles : la géométrie et l'arithmétique. Les proportions, les pulvérisateurs, etc. qui sont des mathématiques spécifiques, sont nommés en arithmétique; les suites, les ombres, etc. sont en géométrie. Ainsi, de cette manière, l'ensemble des mathématiques repose sur l'arithmétique ou la géométrie.

De même que la particule ■ou■ n'est pas exclusive, le ■et■ (*ca*) sanskrit, n'exclut pas qu'un calcul puisse être à la fois arithmétique et géométrique.

Par exemple, comme nous l'avons souligné précédemment, un calcul sur des fractions peut, dans certains cas, être interprété arithmétiquement et géométriquement.

Comme la citation ci-dessus le montre, cette subdivision nécessite que l'on précise quels sont les objets que chaque procédure emploie.

Or cette nouvelle classification des procédures, selon les objets qu'elles emploient ou selon les transformations qu'elles font subir aux objets, n'est pas simple à expliciter.

4 Relier ces distinctions entre-elles

Quels sont les rapports des vers du *gaṇita-pāda* avec les distinctions que nous avons relevées des mathématiques en termes d'augmentation et de diminutions ou d'arithmétique et de géométrie ?

Nous avons résumé ce que la lecture de l'introduction du chapitre sur les mathématiques nous indique dans la Figure 2.2.

Nous renvoyons le lecteur à notre traduction de ce passage. Une analyse de ce que désigne le terme *karaṇī* se trouve dans la section 2.4.

Nous avons observé que certains sujets abordés dans le traité appartiennent à des subdivisions traditionnelles de *gaṇita*. Nous allons à présent examiner ce que Bhāskara nous dit de *gaṇita* dans son sens restreint au traité, en le distinguant d'une autre idée de *gaṇita* qui existe par ailleurs. Nous verrons que le commentateur, en outre, tente d'articuler les mathématiques aux autres sujets de l'*Āryabhaṭīya*.

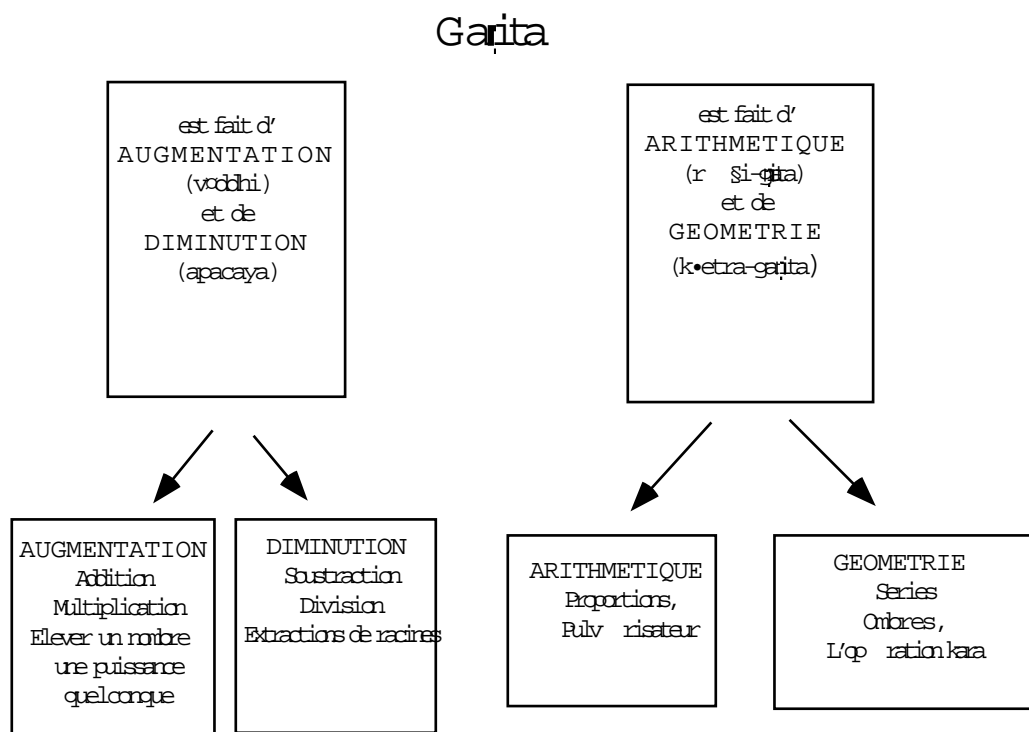
5 *gaṇita* dans et hors du traité

Dans le commentaire du premier vers du premier chapitre de l'*Āryabhaṭīya*, Bhāskara discute du rapport que les autres sujets traités dans l'*Āryabhaṭīya*, le Mesure du Temps (*kālakriyā*) et la Sphère (*gola*), entretiennent avec les mathématiques (*gaṇita*). Cette discussion nous montre une acception très large du mot *gaṇita*, lorsqu'il n'est pas restreint au traité (p. 6; lignes 9-15) :

*atrāyaṃ gaṇitaśabdo 'śeṣagaṇitābhidhāyī, tasmād aśeṣagaṇitābhidhāyitvāt
(...) gaṇitaṃ nigadatīty (...) anyathā aśeṣagaṇitābhidhāyigaṇitaśabdenaiva
siddhatvāt kālakriyayāgolayoḥ pṛthaggrahaṇam anāvaśyakam syāt*

Dans ce cas, le mot *gaṇita* désigne l'ensemble des mathématiques. Ainsi, parce qu'il a l'état de désigner l'ensemble des

Figure 2.2: Opérations et procédures relevant de l'augmentation ou de la diminution, de l'arithmétique ou de la géométrie, selon Bhāskara



Les pulvrisateurs, les séries, etc. n'ont pas de forme définie en termes d'augmentation et de diminution

mathématiques- (...) les mathématiques sont dites (dans l'ensemble du traité. Il ne faut donc pas comprendre *gaṇita* dans ce sens). (...) Car sinon, (si) la Mesure du Temps et la Sphère avaient été établies uniquement au moyen de ce mot, *gaṇita*, qui désigne l'ensemble des mathématiques, une mention séparée (de ces deux sujets) ne serait pas nécessaire.

Dans ce passage *gaṇita* semble pouvoir désigner toute procédure : c'est pourquoi l'ensemble du contenu du traité pourrait être dénommé par ce terme. En effet, lorsque *gaṇita* prend ce sens il n'est défini ni par un ensemble de sujets ni par le type d'objets qu'il emploie. Dans cette acception du mot, il serait un processus, un calcul qui peut tout aussi bien porter sur l'évaluation d'une durée que sur le mouvement des planètes.

Afin de distinguer cette acception très large du sens du terme dans le traité, Bhāskara définit des mathématiques générales (*sāmānya-gaṇita*), dont les objets sont abstraits. Il différencie cet ensemble de celui des mathématiques spécifiques (*viśeṣa-gaṇita*) qui incluent les sujets des deux derniers chapitres de l'*Āryabhaṭīya* (p. 6; lignes 12-17) :

*etāvad eva siddhe kālakriyāgolagrahaṇaṃ kurvann ācārya jñāpayati-
kṣetracchāyāśreddhīsamakaraṇakuttākāraādikaṃ sāmānyagaṇitaṃ
kiñcid vakṣye, viśeṣagaṇite punaḥ kālakriyā golena tātparyam
iti/ (...) tathā ca, ācāryeṇa gaṇitapāde gaṇitavastu dīnīmātram
evābhihitam, kālakriyāyāgolayoḥ kālakriyāgola [vastu] viśeṣeṇa/
avaśyam ayam artho 'bhyupagantavyaḥ- kiñcid gaṇitam iti/*

Il en est ainsi, jusqu'à ce point : une fois que (cette compréhension du mot *gaṇita*) a été établie, lorsque le maître (*ācārya*) emploie l'expression "la Mesure du Temps et la Sphère" (dans le vers 1) il fait connaître (ce qui suit)– ■Je vais dire ■Les Champs, les Ombres, les Suites, les équations, le Pulvérisateur, etc.■, ce qui est quelque mathématiques générales (*sāmānya-gaṇita*). Toutefois l'objectif ce sont des mathématiques spécifiques (*viśeṣa-gaṇita*), au moyen de la Mesure du Temps et la Sphère■. (...) Et ainsi, dans le chapitre sur les mathématiques, juste une allusion au sujet des mathématiques (générales) est dite ici par le maître, dans les (chapitres sur) la Mesure du Temps et la Sphère, les [sujets] de la Mesure du Temps et de la Sphère (sont dites) avec une spécification (*viśeṣana*) (du sujet des mathématiques). Nécessairement, cette signification doit faire l'objet d'un consensus (en ce qui concerne l'emploi de *gaṇita*)- quelques mathématiques.

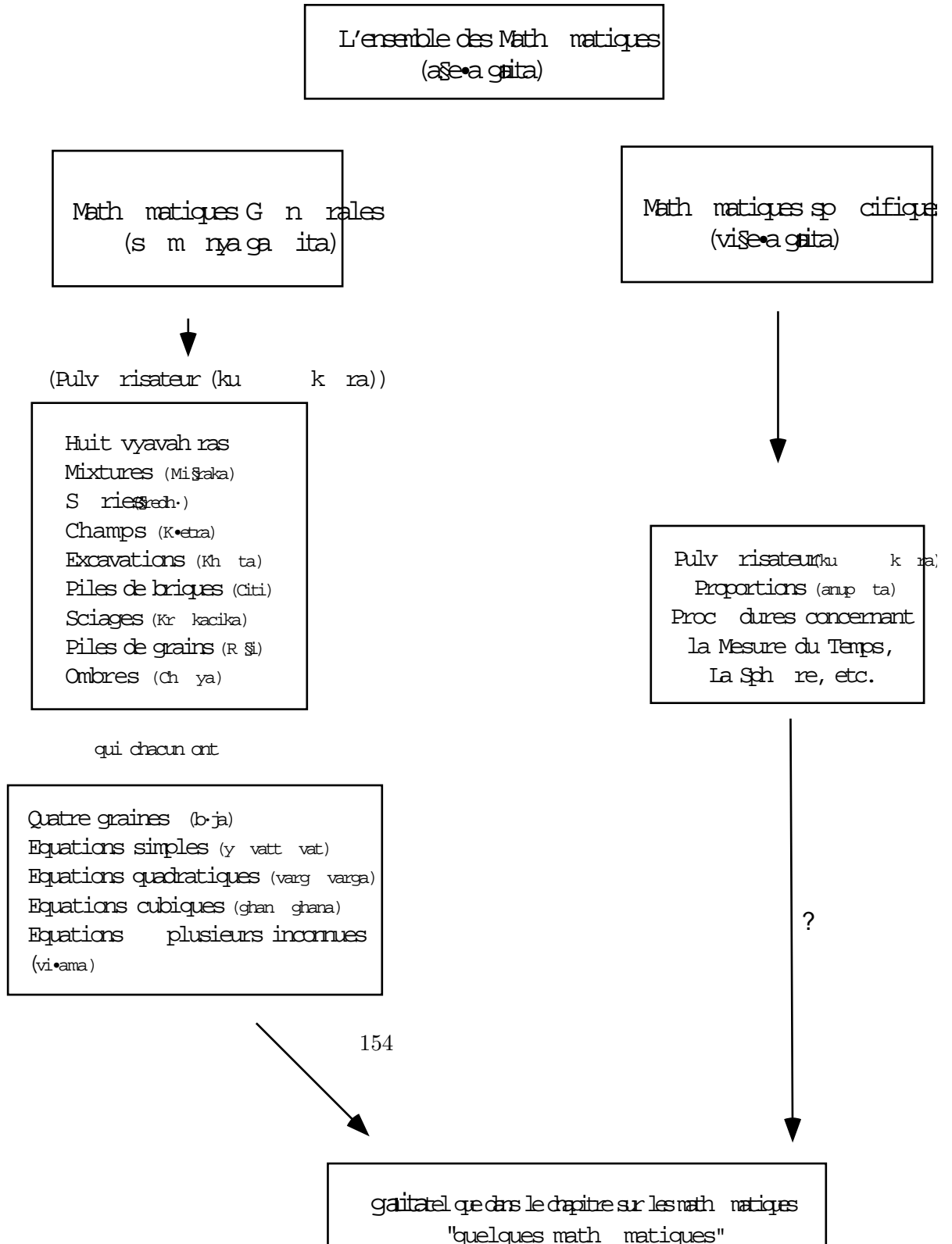
La toute dernière phrase de ce paragraphe fait écho à l'expression ■quelques mathématiques générales■ (*sāmānya-gaṇitaṃ kiñcid*¹²) employée plus haut dans ce même passage. Elle indique qu'une partie seulement des mathématiques ■générales■ est traitée dans le chapitre sur les mathématiques de l'*Āryabhaṭīya*. La manière dont nous comprenons ce paragraphe est illustré dans la Figure 2.3.

Nous pouvons en déduire que les mathématiques ■générales■ sont abstraites tandis que les calculs portant sur le temps ou les mouvements de planètes sont des applications de celles-ci. Les mathématiques dans leur globalité sont également distinguées des mathématiques générales et spécifiques. Les mathématiques traitées dans le *gaṇita-pāda* ne sont qu'une partie des mathématiques générales.

¹²Le terme *kiñcid* devrait en principe se trouver avant l'expression *sāmānya-gaṇitaṃ* s'il la qualifie et non après. Nous n'avons pas trouvé d'autre interprétation de ce terme ici. Il n'est pas rare de voir Bhāskara inverser l'ordre du nom et de son adjectif qualificatif par rapport à celui que nous attendons d'une phrase sanskrite courante.

Figure 2.3: Les différents types de mathématiques

Dans le passage que nous avons cité plus haut, qui décrit la distinction entre arithmétique et géométrie, les proportions et le pulvérisateur sont nommés en tant qu'appartenant aux ■mathématiques spécifiques■.



6 Conclusion

Nous avons ainsi vu *gaṇita* osciller entre deux significations : un ensemble de procédures abstraites d'un cĀté et un ensemble de sujets de l'autre. Les catégorisations de *gaṇita* en tant qu'augmentation et diminution, pratique et précise ou bien faite de quantités ou de champs semblent qualifier un ensemble d'algorithmes. Il en va de même lorsque *gaṇita* semble pouvoir désigner l'ensemble du traité. Il est alors nécessaire, selon le commentateur, de restreindre sa signification.

Retenons de ce véritable entrelacs de distinctions qu'ils se démêleraient sans doute si une étude historique analysait les matières traitées sous le nom de ■*gaṇita*■. L'obscurité des passages où ce terme est glosé provient également du fait que Bhāskara décrit simultanément des liaisons et des distinctions : ainsi certaines opérations arithmétiques semblent pouvoir se lire géométriquement et vice-versa. De même, les mathématiques des planètes sont assimilées à la géométrie. Nous tenterons d'explicitier ces rapports par la suite.

Examinons, en prenant un peu de distance, la manière dont Bhāskara glose *gaṇita*. Nous le voyons décrire ce qui forme *gaṇita* et ce qui le distingue d'autres sujets. Il argumente pour une acception restreinte du sens de ce mot au sein du traité. Nous reconnaissons ici la manière dont ce commentaire élabore des définitions¹³. Pourtant, ces réflexions parsèment le commentaire, et se répondent rarement. Si Bhāskara définit le sujet qu'il aborde dans le chapitre sur les mathématiques, il le fait par petites touches sans insister sur la cohérence de ce qu'il avance.

Notre analyse de certaines pratiques mathématiques présentes dans le commentaire aura plusieurs axes : nous tenterons de creuser le problème de l'articulation des divers sujets abordés dans le *gaṇita-pāda* et nous nous poserons la question de leur fonction au sein de ce traité d'astronomie. Par la suite, nous tenterons de comprendre comment sont liées et distinguées l'arithmétique et la géométrie (dans la section 2.4), puis les mathématiques et l'astronomie (dans la section 2.5). Nous observerons également ce qui n'est pas contenu dans ces distinctions : cette partie de la pratique mathématique qui est évidente pour le commentateur et qu'il n'explicité pas.

Nous ne dépeindrons pas un paysage des mathématiques tel que le con■oit Bhāskara ni tel qu'il s'insère dans son époque par manque de recul, de temps et de connaissances.

¹³Se reporter à la section 1.7.

2.2 Arithmétique

Nous allons à présent décrire certaines des pratiques et conceptions qui appartiennent à ce que Bhāskara nomme *rāśi-gaṇita* (■mathématiques des quantités■ ou arithmétique). Dans un premier temps, nous décrirons la manière dont les quantités sont nommées et notées dans le commentaire. Ensuite nous nous tournerons vers leur manipulation dans les procédures arithmétiques.

1 Dire et écrire les nombres

1.a Les entiers

Le sanskrit emploie des expressions variées pour désigner la valeur d'un nombre. S'il existe des noms courants pour ces derniers, des locutions plus complexes peuvent également être utilisées. Il n'est pas rare d'exprimer une valeur par une opération dont elle est le résultat, à la manière de notre expression ■quatre-vingt■. Ainsi dans l'exemple 9 du commentaire des vers 32-33, vingt et un (*eka-viṃśati*) est nommé *tri-sapta*, trois (fois) sept. Dix-neuf (*nava-daśa*) est à plusieurs reprises désigné par le composé *eka-ūna-viṃśati* (vingt moins un). Parfois l'opération est plus élaborée. Elle peut être le carré d'un nombre ou son cube. Ainsi *pañca-varga* (le carré de cinq) désigne ■vingt-cinq■ dont le nom courant en sanskrit est pourtant *pañca-viṃśati*. Cent vingt cinq, dont le nom courant serait *pañca-viṃśati-śata*, est nommé dans l'exemple 3 du commentaire du vers 5 *pañca-ghana* (le cube de cinq). Comme ces exemples le soulignent, ces manières de nommer une valeur utilisent peu de mots. Ce système alternatif a probablement été développé afin de respecter la double exigence de la métrique et de la concision.

Une autre manière d'énoncer chiffres et nombre consiste à les nommer par une métaphore évocatrice. Ainsi l'unité peut être désignée au moyen des divers noms en sanskrit de la lune. D'autres renvoient spécifiquement à des éléments de la culture indienne¹⁴. Nous illustrons ceci plus bas. Il est difficile de savoir si ces noms étaient immédiatement reconnus par ceux qui les entendaient et les employaient. Par exemple, lorsque nous disons ou entendons ■quatre-vingt dix■ nous n'effectuons pas le calcul qui y est décrit.

La notation des nombres sur la surface de travail, quant à elle, utilise la

¹⁴Toutes les métaphores utilisées pour désigner des nombre, ainsi que certaines des ■opérations■ qui les nomment, ont été répertoriées dans la section consacrée aux noms de nombres du Glossaire.

numération positionnelle décimale qui est ainsi définie dans le vers 2 (p. 46, lignes 6-9) :

*ekaṃ ca daśa ca śataṃ ca sahasraṃ tvayutanīyute tathā prayutam|
koṭyārbudaṃ ca vṛndaṃ sthānāt sthānaṃ daśaguṇaṃ syāt||*

Ab.2.2. Un et dix et cent et mille et dix mille et cent mille, puis un million|

Dix millions, cent millions et mille millions. Une place doit être dix fois la place ⟨qui la précède immédiatement⟩ ||

La première moitié du vers pourrait avoir pour fonction de fixer les noms des grands nombre. Comme Takao Hayashi l'a montré¹⁵, ceux-ci ont varié au cours du temps. Elle pourrait aussi être lue comme une énumération des noms des neuf premières places de la numération positionnelle décimale¹⁶. La seconde moitié du vers donne la règle d'écriture.

Dans son commentaire, Bhāskara explique l'intérêt de cette notation : elle est simple et facilite les calculs. Il note également qu'un pouvoir (*śakti*) est conféré aux places déterminées de cette manière, ce qui fait qu'une unité peut devenir une dizaine, une centaine, etc.

Enfin, il semblerait qu'avant de noter les chiffres qui forment un nombre, les places étaient représentées sur la surface de travail par de petits ronds (*bīndus*), à la manière d'un zéro.

Le zéro en tant que nombre, dans ce texte et contrairement au traité de son contemporain, Brahmagupta, ne fait pas l'objet de règles de calcul particulières. Il est nommé *sūnya*, *kha* ou *viśvavāda*, autant de termes signifiant ■vide■ ou ■ciel■ (i.e. ce qui est vide). Ce terme pourrait avoir pris son nom de la désignation d'une place vide dans la numération positionnelle décimale. De même, le signe utilisé pour noter le zéro pourrait provenir de celui employé pour inscrire les places des chiffres sur la surface de travail. Nous retrouverons ce signe, plus bas, dans la disposition tabulaire des données d'un problème d'arithmétique, désignant la place vide où la quantité recherchée devait probablement se placer.

Des mots distinguent les unités (*rūpas*, lit. forme) dont l'accumulation produit des chiffres (*aṅka*) et des nombre (*saṅkhyā*). Le terme *aṅka*, signifie à l'origine un signe ou une marque. Il renverrait au chiffre tel qu'il est noté plutôt qu'à une valeur plus petite que dix. Toutefois, ces distinctions

¹⁵[I.6.3, p.64-70; Hayashi 1995].

¹⁶Nous avons vu, dans la section 1.2, que cette interprétation était débattue dans le commentaire de Bhāskara.

n'opèrent que rarement; le mot ■nombre■ (*saṅkhyā*) désigne souvent des chiffres.

Le système utilisé lorsqu'il s'agit de nommer des nombre astronomiques (littéralement et figurativement) utilise indirectement la notation positionnelle décimale. Il consiste, en effet, à énumérer les chiffres qui le forment dans un *dvandva*¹⁷ dans l'ordre croissant des puissances de 10 auxquels ils sont assignés (i.e. dans l'ordre inverse dans lequel ils sont écrits dans la numération positionnelle décimale, lorsqu'on la lit de gauche à droite) . Souvent les chiffres sont nommés, comme nous l'avons décrit plus haut, à l'aide de métaphores. Par exemple dans le second problème versifié du commentaire du vers 5, un nombre est donné ainsi (p. 54, lignes 11-12) :

uddeśakaḥ-

kr̥tayamavasurandhrarasābdirūparandhrāśvināgasāṅkhyasya|
mūlaṃ ghanasya samyak vada bhāṭaśāstrānusāreṇa||

nyāsaḥ-8291469824/

2. Dis, correctement, selon le traité d'Ārya)bhāṭa|

La racine du cube dont la valeur (*saṅkhyā*) est quatre (*kr̥ta*)-deux (*yama*)-huit (*vasu*)-neuf (*randhra*)-six (*rasa*)-quatre (*abdhi*)-un (*rūpa*)-neuf (*randhra*)-deux (*aśvin*)-huit (*nāga*).||

Disposition-8291469824.

Les métaphores utilisées pour les chiffres dans cet exemple font pour la plupart référence à la mythologie et à la cosmologie indienne. Ainsi les *vasu* sont une classe de huit déités (représentant les vents) et dénomment le chiffre huit. Dans la géographie terrestre des *purāṇas*, il y a quatre océans. *Abdhi*, océan, désigne le chiffre quatre.

La disposition des nombres, nous le voyons, nécessite un travail de traduction de la manière dont le nombre est dit en sanskrit vers la manière dont il est noté pour entrer dans les calculs. De plus, là où le sanskrit se lit de gauche à droite, les nombres semblent être notés de droite à gauche. En effet, dans le composé, comme nous l'avons remarqué plus haut, de gauche à droite, les chiffres sont donnés par puissances de dix croissantes, tandis qu'ils sont notés suivant des puissances de dix décroissantes.

¹⁷Un type de composé; ceux-ci sont repertoriés dans l'introduction de la traduction.

Ce travail de transposition s'effectue le plus souvent, au sein de la liste d'exemples résolus, entre les données énoncées dans un problème versifié et la ■disposition■ qui le suit¹⁸. Parfois elle est présente au sein du texte discursif. Ainsi, dans le commentaire des vers 32-33 de très grands nombres sont obtenus, et sont dits de cette double manière. Voici par exemple, comment le résultat d'un problème est énoncé (p. 151, lignes 17-18) :

*dvicchedāgraṃ saṃjātaṃ śarādriguṇānavābdhidviviyādbhūtaśararasābdhinetrāṇi,
aṅkair api nyāsaḥ 246550249375/*

... ce qui est produit est ⟨la quantité qui à de telles⟩ restes pour deux diviseurs, cinq (śara)-sept (adri)-trois (guṇa)-neuf-quatre (abdhī)-deux-zéro (vīyat)-cinq (bhūta)-cinq (śara)-six (rasa)-quatre (abdhī)-deux (netra); disposition au moyen des chiffres (aṅka) également, 246550249375.

Ce passage illustre comment la double formulation, d'abord par des mots, chiffre à chiffre, puis à l'aide de la numération positionnelle décimale, permet de s'assurer que le résultat obtenu n'est pas déformé lorsqu'il est énoncé. Si cette pratique est frappante avec les grands nombres, on la trouve également dans les parties ■résolutions■ où le résultat obtenu, même s'il est petit, est énoncé verbalement avant d'être noté.

Nous voyons dans la diversité et la complexité des moyens de dire les nombres en sanskrit d'une part, et la manière dont ils sont notés d'autre part, un travail mathématique de transposition du texte en forme exploitable sur la surface de travail. En retour, ce travail semble avoir influencé la manière de les énoncer.

1.b Fractions

Le commentaire de Bhāskara distingue parmi les fractions deux types de quantités. Celles que nous appellerons ■quantités fractionnaires■ sont des nombres entiers augmentés ou diminués d'une fraction. Les ■fractions■ seront des quantités composées d'un numérateur et d'un dénominateur. Parmi les fractions nous distinguerons les valeurs énoncées par des mots de la notation dans des calculs intermédiaires d'un numérateur sur un dénominateur.

Les fractions contenues dans des quantités fractionnaires sont la plupart du temps appelées *aṃśā*. Lorsqu'il s'agit de nommer la valeur d'une fraction,

¹⁸Se reporter à ce propos aux sections 1.3 et 1.6.

ce terme est utilisé en tant que suffixe se rapportant soit aux dénominateurs soit aux numérateurs¹⁹. Ce mot peut également désigner de manière générale le numérateur d'une fraction. Son sens générique est ■part■.

Les dénominateurs lorsqu'ils sont désignés de manière générale sont appelés *cheda*. Ce terme signifie également ■part■. Si la forme des quantités fractionnaires est distinguée de celle des fractions, il n'existe pas de nom propre à l'une ou l'autre forme. Ainsi *sa-ccheda* (■avec dénominateur■) est un terme employé par Āryabhaṭa, que Bhāskara attribue tant aux nombre fractionnaires qu'aux fractions. De même *bhinna* (différent, part) se rapporte à l'une ou l'autre forme.

Pour énoncer leur valeurs, les mêmes métaphores et jeux de calculs employés pour les entiers sont utilisés pour les fractions comme pour les quantités fractionnaires. Ainsi, dans le troisième exemple du commentaire du vers 5, Bhāskara nomme le nombre $13 + \frac{103}{125}$ avec l'expression sanskrite suivante (p. 54, ligne 15) :

trayodaśanānām pañcaghanāṃśais trisūnyarūpākhyaiḥ adhikānām
treize augmenté par ce qui est appelé trois-zéro (*śūnya*)-un (*rūpa*)
dont la part (*aṃśa*) est le cube de cinq

Les fractions sont notées sur la surface de travail en colonne, le numérateur étant au-dessus du dénominateur; aucune barre horizontale ne sépare l'un de l'autre. Ainsi la disposition de $\frac{a}{b}$ est $\begin{array}{c} a \\ b \end{array}$.

Les quantités fractionnaires sont également notées en colonne, le nombre entier étant placé au-dessus du couple formé par le numérateur et le dénominateur. Dans cette édition,²⁰ si la fraction est soustraite au nombre entier, le numérateur ou le dénominateur porte un petit rond en exposant.

En d'autres termes, la disposition de $c - \frac{a}{b}$ serait $\begin{array}{c} c \\ a^\circ \\ b \end{array}$.

Nous allons à présent examiner les règles de calcul sur les quantités fractionnaires et les fractions fournies par le traité et le commentaire.

A deux reprises, dans les commentaires des vers 3 et 4, une règle est donnée pour transformer les quantités fractionnaires en fraction. La règle

¹⁹Voir à ce sujet l'entrée pour *aṃśa* du Glossaire.

²⁰Il est nécessaire de garder à l'esprit qu'il s'agit là d'un procédé de l'édition. Il est possible que K.S. Shukla suive à certains des manuscrits, ce qui reste à vérifier. D'autre part, ce qui est propre aux manuscrits ne l'est pas forcément de la pratique en cours à l'époque et dans la région de Bhāskara.

du commentaire du vers 3 est un abrégé du vers cité dans le commentaire du vers 4. Nous reproduisons ce dernier ici (p. 53; ligne 4) :

chedoparirāśyor abhyāsaṃ kṛtvā aṃśaṃ prakṣipet/

Ayant effectué le produit de la quantité au-dessus par le dénominateur, on doit ajouter le numérateur.

Épousant la notation des quantités fractionnaires, l'entier est appelée ■la quantité au-dessus■ (*upari-rāśi*). Le dénominateur est nommé *cheda* et le

numérateur *aṃśa*. Le calcul décrit transforme le nombre $c + \frac{a}{b}$, noté $\frac{c}{a}$, en $\frac{cb + a}{b}$.

Nous pouvons remarquer que le positionnement des quantités fractionnaires et des fractions s'associe à une catégorisation des quantités : celle d'un numérateur que l'on place au dessus d'un dénominateur, ou celle d'une quantité entière accompagnée d'une fraction que l'on soustrait ou ajoute.

Dans son commentaire de la première moitié du vers 3, Bhāskara énonce une règle pour élever au carré des fractions (p. 50, lignes 2-3) :

bhinnavargo 'pyevameva/ kintu sadṛśīkṛtayoś chedāṃśarāśyoḥ pṛthak pṛthag vargaṃ kṛtvā chedarāśivargeṇāṃśarāśivargasya bhāgalabdhaṃ bhinnavargaḥ/

Le carré des fractions (*bhinna*) est également exactement de cette manière. Toutefois, ayant effectué le carré du dénominateur et du numérateur, qui ont été faits du même genre, le résultat de la division du carré de la quantité-numérateur par la quantité-dénominateur est le carré de la fraction.

Ici l'expression ■les numérateurs et les dénominateurs sont faits du même genre (*sadṛśīkṛta*)■ désigne la transformation de la quantité fractionnaire en fraction. La dernière opération, une division, de nouveau, transforme la fraction en quantité fractionnaire.

La seconde moitié du vers 27 est une définition de quantités ■avec dénominateur■ (*sacchedha*) ayant ■l'état d'avoir la même catégorie■ (*savarṇatva*) (p. 122; ligne 30) :

chedaguṇaṃ sacchedaṃ parasparaṃ tat svarṇatvam||

Ab.2.27.cd L'une et l'autre (quantité) avec un dénominateur a pour multiplicateur le dénominateur. Ceci est l'état d'avoir la même catégorie||

Plusieurs difficultés de cette règle ne sont pas levées par le commentaire de Bhāskara.

La première concerne ce que désigne l'expression de quantités ■avec dénominateur■ (*saccheda*). S'agit-il de quantités fractionnaires ? La glose qu'en fait Bhāskara le suggère (p. 123; lignes 1-2) :

saha chedena vartata iti sacchedam/ kiṃ tat ? rāsīrūpam/

■(quantité) avec un dénominateur■ (*saccheda*), c'est-à-dire qu'elle apparaît avec un dénominateur. Qu'est ce que cela (qui a un dénominateur) ? la (partie) entière de la quantité (*rāsīrūpa*).

L'expression *saccheda* et sa glose *saha chedena vartate*, signifieraient donc ■(une quantité entière) à laquelle un dénominateur/une part est ajouté■. Nous avons vu auparavant, que la transformation d'une quantité fractionnaire en fraction pouvait être qualifiée de ■faire du même genre■. Le mot *sadrśa* (du même genre) serait donc à comprendre comme un synonyme de *savarṇa* (de la même catégorie). Or, le commentaire de la première moitié du vers 27 cite, au cours de la résolution d'un exemple, la seconde moitié du vers 27. Cette citation vient à l'appui d'un calcul transformant des quantités fractionnaires en fractions. Les exemples résolus de ce même commentaire de vers ont deux parties ■disposition■ lorsqu'ils utilisent des quantités fractionnaires. La première, nommée *nyāsa*, note les quantités telles qu'elles sont énoncées. La seconde, intitulée *savarṇitasthāpana* ■disposition avec la même catégorie■, les note sous forme de fractions²¹. Nous pouvons donc considérer que la seconde moitié du vers 27, selon Bhāskara, décrit la transformation de quantités fractionnaires en fractions.

Cette interprétation pose un second problème : celui de l'interprétation de l'expression *paraspara*, que nous avons traduit par ■l'une et l'autre (quantité)■.

La transformation d'une quantité fractionnaire en fraction possède plusieurs étapes. Considérons $a \pm \frac{b}{c}$. La quantité entière, a , est d'abord multipliée par le dénominateur, c . Puis elle est ajoutée ou soustraite au numérateur b . Le résultat obtenu est alors $\frac{ac \pm b}{c}$. Or le calcul décrit dans le vers 27 n'expliciterait qu'une seule étape de ce calcul, la multiplication de l'entier

²¹Nous ne le voyons pas transformer des quantités fractionnaires directement en fraction au même dénominateur.

par le dénominateur. L'expression « l'une et l'autre (quantité) » serait alors dénuée de sens. Ensuite, l'addition de ce produit avec le numérateur serait omis par le vers et non suppléé par le commentateur.

De plus, cette interprétation serait surprenante dans la mesure où Bhāskara cite une autre règle, que nous avons examinée plus haut, décrivant les opérations nécessaires pour cette transformation.

Une autre lecture du vers semble simultanément donnée par le commentateur. En effet, dans le commentaire de la seconde partie du vers 27, précisément celle qui énonce la règle que nous discutons, les problèmes résolus ne concernent que des fractions— des fractions plus petites que 1. L'expression « avoir la même catégorie » désigne leur réduction au même dénominateur.

Il faudrait alors donner une autre interprétation de la glose de *sacchedha*. La quantité entière accompagnant le dénominateur serait le numérateur (dans la fraction $\frac{a}{b}$, a serait « la quantité entière »).

Le calcul de la seconde moitié du vers 27, rappelons-le, s'énonce ainsi :

L'une et l'autre (quantité) avec un dénominateur a pour multiplicateur le dénominateur.

En d'autres termes, si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont deux fractions, le calcul décrit dans la règle serait la multiplication de a par d et de c par b . Pour que les fractions soient réduites au même dénominateur ($\frac{ad}{bd}$ et $\frac{cb}{bd}$), il faudrait encore multiplier les dénominateurs entre eux. Ceci n'est explicité ni par le vers ni par le commentateur.

Ces deux significations sont probablement adoptées par Bhāskara. Comme nous l'avons souligné dans la section 1.1, la lecture non linéaire du traité et sa compréhension thématique peuvent expliquer cette apparente contradiction. La lecture du vers pour les quantités fractionnaires ayant été amplement illustrée dans le commentaire du vers 26 avec la première moitié du vers 27, elle ne serait pas reprise dans les exemples du commentaire de la seconde moitié du vers 27. Ce vers devrait donc être compris comme une règle concernant à la fois la transformation de quantités fractionnaires en fraction et comme une règle de réduction de fractions au même dénominateur.

De manière générale, la quantité fractionnaire semble être la manière usuelle d'exprimer une quantité rationnelle, la fraction étant une forme propre aux calculs intermédiaires.

Dans les problèmes versifiés énonçant des quantités fractionnaires, ces dernières sont transformées en fractions lors de leur disposition sur la surface de travail. Lorsque le résultat d'un calcul est une fraction, le quotient est

divisé afin qu'il se présente comme une quantité fractionnaire. L'exemple 2 du commentaire de la première moitié du vers 3 (p.50; lignes 4-12), propose d'élever au carré, parmi d'autres, le nombre $6 + 1/4$. Celui-ci est transformé en fraction, $25/4$, puis carré, $625/16$, enfin la division est effectuée, et $39 + 1/16$ est obtenu comme résultat.

De manière significative, dans l'exemple 2 du commentaire au vers 25 le résultat, quatre cinquièmes, est noté $4 \frac{0}{5}$ et non pas $\frac{4}{5}$.

Le zéro semble de cette manière, à la fois marquer une place vide et indiquer que la valeur du nombre entier est zéro²². Dans le premier exemple du commentaire portant sur la Règle de Trois, la première valeur obtenue est une fraction. Des conversions en différentes unités, permettent de l'énoncer comme une suite d'entiers, augmentée d'une fraction.

Si lors de ces transformations apparaissent des formes ressemblant à des fractions plus grandes que 1, jamais leur valeur n'est exprimée. Les valeurs des fractions plus petites que 1 sont les seules à être énoncées.

La quantité fractionnaire semble être considérée comme un nombre dont on ne peut donner la mesure en tant que nombre entier, faute d'unité de mesure assez fine. Ceci apparaît très clairement dans les exemples résolus du commentaire aux vers 26-27ab qui font un abondant usage des conversions. Par le jeu des différentes unités de mesures, la quantité obtenue est présentée autant que possible comme une suite d'entiers dont le dernier terme est une quantité fractionnaire.

Résumons ce que nous avons appris des rapports entre quantités fractionnaire et fractions : une fraction serait une forme intermédiaires employée dans les calculs. Des méthodes pour transformer d'un côté une quantité fractionnaire en fraction, de l'autre une fraction en quantité fractionnaire sont ainsi fournies par le commentaire. A aucun moment la valeur d'une fraction plus grande que 1 n'est énoncée. Par contre, de telles fractions sont abondamment notées.

Parce qu'il n'existe pas de terme spécifique désignant l'une ou l'autre forme, il est par moment difficile de les distinguer. Cette ambivalence existe dans le traité; elle est entretenue par Bhāskara. Elle pourrait, à la manière des jeux par les mots qui tout à la fois introduisent des confusions et soulignent des propriétés mathématiques, être une manière de préciser que ces

²²Rappelons de nouveau qu'il s'agit d'un procédé de l'édition. Il faudrait vérifier ce que les manuscrits contiennent.

deux formes pour exprimer de quantités rationnelles ne notent qu’une seule valeur. Tout se passe comme si cette dernière devait de préférence s’énoncer en tant qu’une suite d’entiers pour laquelle une part demeure, faute d’unité assez fine.

2 Valeurs approchées

Bhāskara dans le commentaire du vers 10 distingue entre des mesures approchées (*āsanna*) et mesures exactes (*sphuṭa*) de la circonférence d’un cercle. Cette distinction recoupe celle concernant des calculs pratiques (*vyāvahārika*) et précis (*sūkṣma*). D’autre part, dans un passage du commentaire du vers 12 il explique comment il arrondit les résultats qu’il obtient. D’autres calculs du commentaire utilisent des valeurs arrondies, sans que cela soit explicitement précisé par le commentateur. Nous n’analyserons pas ces distinctions et ces pratiques que nous réservons pour une étude ultérieure.

2.a Dettes et avoirs

Dans le commentaire du vers 30, un vers en *prākṛta* donne des règles de calcul sur les ■dettes■ et les ■avoirs■. Ceux-ci ont été interprétés comme le signe que des calculs sur les nombre négatifs étaient connus de Bhāskara²³. Nous proposons une autre analyse de cette distinction sur laquelle nous reviendrons lorsque sera examinée la manière dont les quantités sont manipulées dans les équations. Le lecteur/la lectrice peut également se reporter à la traduction de ce commentaire de vers et à l’annexe de BAB.2.30.

3 Qu’est-ce qu’une quantité ?

L’analyse que nous avons conduite jusqu’à présent nous a montré que les quantités pouvaient prendre plusieurs formes. Elles ont ainsi une forme lorsqu’elles sont dites, quand elles sont notées, puis quand elles sont manipulées.

Dans le commentaire de Bhāskara, le terme de quantité (*rāśi*) est distinct de celui de nombre/valeur (*saṅkhyā*).

Il nous semble, quoique cette hypothèse est peut-être un peu hardie, que pour Bhāskara une valeur (*saṅkhyā*) est toujours entière. La quantité (*rāśi*) pourrait prendre des formes différentes et être manipulée par des opérations

²³Voir [Introduction, p.lxxii; Shukla 1976].

qui rendraient impossible l'expression directe de sa valeur. Ainsi une quantité fractionnaire serait une forme imparfaite, faute de mesure assez fine, pour exprimer un nombre entier.

4 Manipulation des quantités dans les procédures arithmétiques

Nous n'allons pas examiner dans le détail les procédures arithmétiques décrites par Bhāskara. Celles-ci sont explicitées dans les annexes qui ponctuent chaque commentaire de vers. Elles sont également résumées dans le tableau 2.3.

Nous étudierons dans cette section la manière dont les étapes d'une procédure arithmétique sont pratiquées sur la surface de travail. Comme nous l'avons souligné dans le chapitre 1, ces descriptions s'appuient sur le travail mathématique qu'élabore le commentaire.

Nous avons montré dans la section 1.5 que l'application d'une procédure pouvait reposer sur une catégorisation des quantités qu'elle emploie. Nous allons voir que cette catégorisation est associée, en arithmétique, à une disposition des quantités sur la surface de travail. La procédure elle-même prend parfois directement appui sur cette disposition. Cette dernière varie donc de procédure à procédure; elle est locale. Nous proposons également une interprétation des abréviations et signes qui y sont parfois notés.

4.a Utilisation de la numération positionnelle décimale

Dès que la notation décimale positionnelle est définie, il semblerait naturel qu'elle soit le cadre d'une activité arithmétique positionnelle. Elle n'est pourtant que marginale dans les pratiques décrites dans le commentaire. Elle ne semble employée que dans les opérations arithmétiques élémentaires. Or, l'addition, la soustraction, la multiplication et la division ne sont présentées ni dans le traité ni dans le commentaire. Quatre algorithmes utilisent cette notation explicitement dans leur déroulement, ceux pour élever des grands nombres au carré et au cube, puis ceux pour extraire les racines carrées et cubiques. Les deux premiers sont fournis par le biais d'une citation d'origine inconnue. Par exemple le vers suivant décrit la procédure pour élever un nombre au carré (p. 49; lignes 17-18) :

*antypadasya ca vargaṃ kṛtvā dviguṇaṃ tad eva cāntypadam|
śeṣapadair āhanyād utsāryotsārya vargavidhau||*

Table 2.3: Les procédures arithmétiques et algébriques données par Bhāskara

Ce tableau ne reprend pas la classification élaborée par Bhāskara pour laquelle on se reportera à la section 2.1.

Commentaire de vers	Procédures
Vers 2	Numération positionnelle décimale.
Vers 3	Carrés et cubes des grands nombre.
Vers 4	Extraction de la racine carrée.
Vers 5	Extraction de la racine cubique.
Vers 12	Méthode numérique pour dériver des différences de sinus.
Vers 19	Evaluation de la somme des termes d'une suite arithmétique finie (deux procédures différentes), de sa moyenne, de la valeurs de chacun de ses termes, de la valeur d'une somme finie quelconque de termes consécutifs, de la moyenne de cette somme.
Vers 20	Nombre de termes d'une suite arithmétique, connaissant leur somme, le premier terme et la raison.
Vers 21	Valeur des termes de la série des sommes progressives d'entiers naturels (deux procédures).
Vers 22	Valeur des termes de la série des carrés et des cube d'entiers naturels.
Vers 23	Produit de deux nombres connaissant la somme de leurs carrés et le carré de leur somme.
Vers 24	Deux nombres dont on connaît le produit et la différence.
Vers 25	Calculs d'intérêts.
Vers 26-27ab	Règle de Trois, de Cinq, de Sept, etc. avec quantités entières et fractionnaires.
Vers 27cd	Réduction au même dénominateur.
Vers 29	Termes d'une série, et d'une suite particulière.
Vers 30	équation du premier degré.
Vers 32-33	Procédures du pulvérisateur avec et sans reste.

Lorsqu'on a fait le carré du dernier terme, on doit multiplier
deux fois ce même dernier terme|
(Séparément) par tous les termes restants, en se déplaçant encore
et encore, dans l'opération pour les carrés||

Cette procédure s'appuie sur une suite finie de chiffres sur une ligne. Elle utilise cette notation, puisque le dernier élément de cette suite est particularisé puis employé dans un calcul. Une seconde opération utilise ensuite ce terme et tous les autres. Les procédures d'extraction de racines reposent sur la numération positionnelle décimale et sur une catégorisation des places de celles-ci²⁴. Ainsi la procédure pour extraire une racine carrée effectue une classification en distinguant des places carrées des autres. Cette catégorisation est locale; elle n'est pas utilisée dans une autre procédure.

4.b Proportions

Nous allons à présent examiner les dispositions requises afin de mettre en œuvre les règles de proportions. Nous décrirons également les manipulations de quantités que le commentaire décrit dans l'exécution de ces procédures.

Le commentaire de la Règle de Trois est particulier à plusieurs titres. Il s'agit de la seule partie du commentaire où un vers est cité afin de préciser de quelle manière la catégorisation instaurée par la procédure est associée à un positionnement sur la surface de travail. La catégorisation de la Règle de Trois est décrite dans la section 1.5, ainsi que dans l'Annexe de BAB.2.26-27ab. La citation est la suivante (p. 117; lignes 4-7) :

*tatra yathā krameṇa sthāpanā/ uktaṃ ca-
ādyantayos tu sadṛśau vijñeyau sthāpanāsu rāśīnām|
asadṛśarāśir madhye trairāśika-sādhanāya budhaiḥ||
iti/*

Dans ce cas, une disposition (*sthāpanā*) en bon ordre (doit être effectuée). Et il a été dit :

Les deux mêmes quantités connues sont disposées à
l'avant et à l'arrière|
La quantité différente au milieu par les ingénieurs afin
de produire une Règle de Trois||

Une Règle de Trois lie une quantité mesure (*pramāṇa*, *m*) à une quantité fruit (*phala*, *p*), une quantité du désir (*icchā*, *i*) qui est aussi une mesure,

²⁴Se reporter à l'annexe de BAB.2.4-5.

à un fruit du désir (*icchā-phala, i*). La disposition se fait le long d'une ligne horizontale. Les deux mêmes quantités sont les deux quantités ■mesures■ de la Règle de Trois, dont le fruit est au milieu. Elle est donc la suivante :

$$\begin{array}{ccc} \text{quantité mesure} & \text{quantité fruit} & \text{quantité du désir} \\ \hline m & p & i \end{array}$$

Lorsque les quantités sont fractionnaires cette disposition est préservée mais chaque place devient une colonne à trois lignes où les quantités sont écrites. Cette notation suffit à indiquer de quelle manière la Règle de Trois sera effectuée. En effet, la liste d'opérations énoncée part de la catégorisation sur laquelle le placement des quantités repose : il s'agit de diviser le produit de la quantité fruit et de la quantité du désir par la quantité mesure.

Les Règles de Cinq et les suivantes utilisent quant à elles une seconde catégorisation. Elles distinguent les multiplicateurs des diviseurs. Tous les diviseurs sont alignés en colonne sur la gauche, tandis que les multiplicateurs qui leur sont associés sont alignés en vis à vis sur la droite. Nous avons montré ailleurs²⁵ comment il suffit d'ajouter une ligne à cette disposition pour obtenir une nouvelle règle de proportion que l'on saura appliquer. Une règle de $2n + 1$ quantités lie n quantités mesures (m_1, \dots, m_n) qui ensemble produisent une quantité fruit p . L'on connaît n quantités du désir (i_1, \dots, i_n) et l'on cherche le fruit du désir. Les quantités mesures et leur fruit sont nommées ■diviseurs■ par le commentateur, les quantités du désir sont des ■multiplicateurs■. Ainsi une Règle de $2n + 1$ quantités sera disposée de la manière suivante :

$$\begin{array}{cc} m_1 & i_1 \\ m_2 & i_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ m_n & i_n \\ p & \end{array}$$

Lorsque des quantités fractionnaires sont employées, elles sont disposées à la manière des entiers, les places s'agrandissant afin que l'on puisse les y noter en colonne.

Le commentaire de ces vers décrit plusieurs étapes de cette disposition.

En effet, avant d'effectuer la procédure, les quantités fractionnaires sont transformées en fractions. Puis, comme nous l'avons montré dans [Keller 1995], des quantités sont déplacées. Les dénominateurs des multiplicateurs

²⁵[Keller 1995].

sont déplacés dans la colonne des diviseurs. De même les dénominateurs de quantités diviseurs se déplacent dans la colonne des multiplicateurs. Ce n'est qu'alors que le produit des uns et des autres est effectué, avant qu'ils ne soient divisés. Bhāskara souligne dans son commentaire comment ces déplacements de quantités signifient un changement de leur état ou nature (*dharma*). Les dénominateurs des multiplicateurs, dans le calcul, seront des diviseurs. Inversement, les dénominateurs des diviseurs seront des multiplicateurs.

La disposition des quantités sur la surface de travail, dans ce cas, indique l'opération dans laquelle les quantités seront employées.

Il n'est pas sûr qu'au cours de l'exécution de la procédure, les nombres aient été effacés et remplacés par des résultats intermédiaires.

En effet, la disposition des Règles de 5 et des suivantes est déséquilibrée dans sa dernière ligne : dans la colonne de droite une place est vide. Or, à plusieurs reprises (dans les exemples 11, 12 et 13), cette place vide, qui semble correspondre au résultat à obtenir, est marquée dans ce tableau par un rond. Ce rond est semblable au signe qui note le zéro.

La règle énoncée par le vers 25 peut se comprendre comme une Règle de Cinq inversée²⁶. Dans la partie ■disposition■ des exemples, un rond marque une place vide. Après une vérification de cette procédure dans un cas particulier, ce rond est remplacé par la valeur obtenue.

Il est difficile de savoir si cette notation de l'espace vide dans le tableau relève de cet aspect de la ■partie disposition■ des exemples résolus qui résume le problème en indiquant ce qui est recherché²⁷. Il se pourrait également que cela soit une indication du lieu où le résultat obtenu doit être noté. Dans ce cas, les déplacements et opérations que nous avons décrits se feraient ailleurs sur la surface de travail. A l'encontre de cette hypothèse, nous pouvons remarquer que les résultats obtenus par Bhāskara sont donnés seuls, et non pas dans cet environnement tabulaire.

Les ronds marquant des places vides appartiennent à l'édition du commentaire. Aucune note ne vient préciser si elle reflète un ou plusieurs manuscrits. En supposant qu'il en est ainsi, cette disposition confirme que ce signe est utilisé pour marquer une place vide, que ce soit dans la notation positionnelle décimale ou dans les notations locales propres à chaque procédure.

²⁶Voir l'Annexe de BAB.2.25 et la section 1.8.

²⁷Voir la section 1.6.

4.c Equations

Le cas des équations du premier degré (traité dans le vers 30) souligne de nouveau comment un problème arithmétique est résumé par sa disposition initiale au moyen d'une catégorisation des quantités énoncées. Elle illustre également comment des sous-catégorisations introduites par le commentateur permettent de préciser les différentes étapes de la procédure. Ces sous-catégorisations sont également marquées sur la surface de travail.

Le vers 30 donne une règle pour résoudre le problème suivant : deux personnes ont la même richesse (*dhana*). Le premier à a ■perles■ (*gulikā*)²⁸ et c pièces d'argent (*rūpakas*), le second b ■perles■ et d pièces. On cherche le prix d'une perle. Nous pouvons en nommant x le prix d'une perle, résumer le problème par l'expression suivante :

$$ax + c = bx + d.$$

La disposition d'un tel problème, dans le commentaire, se fait dans un tableau :

	Perles	Pièces
Personne 1	a	c
Personne 2	b	d

Ce dernier prend donc appui sur la catégorisation des quantités en termes de perles et de pièce pour résumer le problème. La procédure suivie par la suite, selon Bhāskara, prend appui sur ce tableau.

En écartant pour le moment les problèmes de signes, considérons que $a > b$ et $d > c$. Alors, Āryabhaṭa explique que le prix trouvé est le quotient :

$$x = \frac{d - c}{a - b}.$$

Bhāskara précise que la différence des perles se fait ■au-dessus■ (*upari*) et celle des pièces ■en-dessous■ (*adhas*). La disposition des calculs telle qu'elle est décrite, car aucune étape intermédiaire n'est présente dans le texte, se ferait donc de la manière suivante :

Perles	a-b
Pièces	d-c

²⁸Bhāskara explique que l'on peut également nommer cette quantité *yāvattāvat* (autant que). Ce nom souligne l'aspect abstrait qu'une telle résolution peut prendre. Le mot *yāvattāvat* pris dans ce sens aura une postérité dans l'histoire des mathématiques indiennes.

Dans ce cas le diviseur est placé au dessus du dividende. Lorsque des fractions sont notées (nous avons montré qu'à la fin du calcul le numérateur est divisé par le dénominateur) le diviseur/dénominateur est placé en dessous du dividende/numérateur. On peut également comparer cette disposition aux multiplicateurs et diviseurs mis face à face dans les Règles de $2n + 1$ quantités. Pour disposer des quantités qui effectueront une même opération, une division dans cet exemple, plusieurs configurations sur la surface de travail existent. Elles varient suivant la procédure dans laquelle cette opération est insérée. Les dispositions relatives des quantités les unes par rapport aux autres sont donc locales.

Dans un premier temps, nous avons mis de côté les problèmes de signes. Bhāskara dans son commentaire du vers 30 les examine partiellement.

Notre commentateur propose une sous-catégorisation du nombre de pièces appartenant à l'une ou l'autre personne (c et d) : elles peuvent être soit des dettes (*ṛṇa*), soit des avoirs (*dhana*). Les notions de dettes et d'avoir doivent être comprises comme les qualités de la quantité d'argent que possède une personne. Ces notions affectent la catégorisation de la quantité, mais pas le nombre en lui-même.

Si l'on étend cette catégorisation à la richesse de chaque personne ($ax + c$ et $bx + d$), pour tous les problèmes considérés dans le commentaire, ces valeurs sont toujours des ■avoirs■. En d'autres termes, les avoirs totaux des deux personnes en comptant leurs éventuelles dettes sont égales. Aucun autre cas n'est envisagé (la dette de l'un est égal à l'avoir de l'autre, etc). Par conséquent, mathématiquement, les problèmes exigent que le quotient ($\frac{d-c}{a-b}$) soit positif.

Ainsi, dans deux exemples, toutes les quantités sont positives et $b < a$, $c < d$. Dans ce cas, la procédure est effectuée comme nous l'avons décrit plus haut. Dans deux autres exemples, $a < b$ et $d < c$. Dans ce cas, les calculs considèrent les différences $b - a$ et $c - d$ avant de prendre le quotient.

Enfin, des règles opératoires que nous avons exposées dans l'annexe de BAB.2.30., sont données suivant les qualités de c et d en termes de dettes et d'avoir. Si dans le déroulement de la procédure telle qu'elle est décrite par Āryabhaṭa, des calculs s'énoncent comme ■une dette soustraite par une dette■ ($(-d) - (c)$), ■une dette soustraite à un avoir■ ($d - (-c)$), etc. Un vers cité par Bhāskara indique quelles opérations doivent alors être effectuées. Par exemple, si ■une dette est soustraite par une dette■, l'opération $c - d$ est effectuée, si ■une dette soustraite à un avoir■, l'opération $c + d$ est effectuée. Si une quantité est une dette, cela aura pour effet de transformer la procédure à appliquer. Le nombre considéré sera quant à lui toujours

positif. Nous interprétons les règles données par ce vers *prākṛta* comme des règles opératoires : elles indiqueraient quels sont les calculs à faire sur des quantités, suivant leur genre. C’est pourquoi nous ne pensons pas que dans ce commentaire sont considérés des ■nombres négatifs■ et des ■nombres positifs■.

La catégorisation en termes d’■avoirs■ et de ■dettes■ permet donc de comprendre concrètement chacun des calculs effectués suivant la situation de départ considérée. Elle explicite des étapes de la procédure qu’Āryabhaṭa dans sa généralité a effacé en ne considérant, dans le vers 30, que des ■différences■ (*viśeṣa, antara*).

Dans l’exemple 5 (le seul employant une telle catégorisation), le nombre représentant une dette, à la manière des fractions que l’on soustrait d’un entier dans une quantité fractionnaire, porte en exposant un petit cercle. Nous interprétons ce cercle comme étant la trace, sur la surface de travail, de cette sous-catégorisation. Ce serait une marque opératoire.

4.d Disposition du pulvérisateur

La procédure du pulvérisateur²⁹, dans la formulation qu’en donne Āryabhaṭa lui-même (vers 32-22) prend appui sur une disposition des quantités sur la surface de travail.

En effet, quelle que soit l’interprétation adoptée par Bhāskara pour ces vers³⁰, le premier quart du vers 33 fait apparaître une disposition en colonnes (p.132, ligne 9) :

adhopariṅṅitam

33a. L’au-dessus est multiplié par l’en-dessous, ...

Bhāskara interprète de quelle manière les quantités sont disposées sur la surface de travail (p. 132, lignes 20-21) :

*evaṃ paraspareṇa labdhāni padāny avasthāpya, matiś cādhaḥ,
paścimalabdhaṃ ca matyādhaḥ /*

Ayant placé de cette manière les termes obtenus par ⟨une division⟩ réciproque, la quantité maligne est ⟨placée⟩ en-dessous, et le dernier obtenu en-dessous de la quantité maligne.

²⁹Ce nom est ambigu, car dans le texte de Bhāskara il peut à la fois désigner le problème que la procédure résoud, la procédure et l’un des résultats obtenus dans le cas d’un ■pulvérisateur sans reste■.

³⁰Voir à ce sujet l’annexe de BAB.2.32-33 et la section 1.5.

Cette description suppose de noter le ■reste■ d'une division obtenu après deux divisions successives. Ensuite, les restes obtenus aux fur et à mesure d'une suite de divisions sont disposés en dessous de celui-ci, en colonne. Une fois cette procédure achevée, la quantité maligne puis le quotient dont elle fait partie sont disposés également.

La partie de l'algorithme où Āryabhaṭa prend appui sur cette disposition décrit un calcul qui remonte le long de cette colonne. Peu-à-peu des quantités sont effacées jusqu'à ce qu'un seul couple demeure. Ces termes sont parfois appelés ■le reste au-dessus■ et ■le reste en-dessous■.

Le nom de pulvérisateur pourrait ainsi provenir de la représentation visuelle de cet algorithme qui d'un ensemble de trois ou quatre nombres produit une colonne de chiffres, puis reconstruit d'abord deux nombres à partir de cet ensemble, puis un seul³¹. Nous avons donc ici l'exemple d'un cas, assez particulier, où la formulation même de l'algorithme inclut le travail effectué sur la surface de travail.

L'exemple 8 de BAB.2.32-33 nous présente la disposition d'un calcul intermédiaire. A la fin de cette suite de divisions, appelée ■division réciproque■, les restes sont disposés en colonne :

$$\begin{array}{r} 1 \\ 'śeṣaparaspārabhaktam'iti jātam \quad \frac{1}{1} / \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

■La division réciproque des restes (est continuellement effectuée)■,

$$\begin{array}{r} 1 \\ \text{ce qui est produit est} \quad \frac{1}{1} \\ 1 \\ 1 \end{array}$$

Ayant obtenu en dernier reste la fraction $\frac{1}{2}$, Bhāskara décrit une suite d'opérations dont les étapes successives sont disposées comme suit :

$$\begin{array}{r} \text{paraspārabhaktāśeṣam} \quad \frac{1}{2} / (\dots) \text{ matyā guṇitaṃ jātam} \quad \frac{2}{2} / \\ \text{etat śadrūpayutam} \quad \frac{8}{2} / \text{ labdham rūpacatuṣkam} \quad 4 / \end{array}$$

³¹[Jain 1995] propose d'autres interprétations de l'origine de ce nom.

Le reste de la division mutuelle est $\frac{1}{2}$. (...) ⟨un⟩ est multiplié
 par la ⟨quantité⟩ maligne (2), ce qui est produit est $\frac{2}{2}$. Ceci,
 augmenté de six unités est $\frac{8}{2}$. Le quotient est quatre unités, 4.

Ce passage décrit un calcul intermédiaire. On y voit que les opérations sont effectuées sur le numérateur en laissant le dénominateur inchangé. Le résultat du calcul est noté à la place des quantités qui y étaient employées. Ensuite seulement la ■simplification■ de la fraction est effectuée.

Bhāskara conclut, 2 étant la quantité maligne obtenue et 4 le quotient qui lui est associé :

1
 1
etat sarvaṃ yathā kramaṇa 1
 1
 2
 4

1
 1
 1
 1 .
 2
 4

L'ensemble de ceux-ci, en bon ordre est

Ce calcul intermédiaire semble avoir été effectué ailleurs sur la surface de travail. Son résultat est ensuite noté dans les dernières lignes de la colonne.

Il semble donc que plusieurs espaces coexistent sur la surface de travail. Sur l'un, des quantités sont disposées tabulairement suivant un schéma prédéfini, sur l'autre des calculs intermédiaires sont effectués. Dans les deux cas, des quantités peuvent être effacées et remplacées par de nouveaux résultats. Le premier est utilisé par la procédure : la disposition des quantités dans le bon ordre est une étape de cette dernière. Le second est créé puis effacé le temps d'effectuer quelques opérations.

4.e Abréviations

Nous allons ici décrire l'aspect mécanique des listes d'opérations qui forment une procédure. Nous soulignerons également comment celles-ci sont parfois

représentées par des abréviations sur la surface de travail.

Les calculs sur positions dans les règles de proportions (Règles à $2n + 1$ quantités, etc.) ainsi que dans certaines sous-procédures du pulvérisateur ont un aspect mécanique, appuyé par leur caractère itératif³². Le commentaire du vers 28 semble prendre en considération cet aspect des opérations élémentaires qui forment une procédure. Ce vers énonce une règle pour inverser un algorithme, opération par opération (p. 124; lignes 7-8) :

*guṇakārā bhāgaharā bhāgaharās te bhavanti guṇakārāḥ|
yaḥ kṣepaḥ so'pacayo'pacayaḥ kṣepās ca viparīte||*

Dans l'inversion, les multiplicateurs sont des diviseurs, et les diviseurs des multiplicateurs|

Ce qui est additif est soustractif, et ce qui est soustractif additif||

On y retrouve une catégorisation des quantités reposant sur les opérations dans lesquelles elles sont employées. Dans les procédures arithmétiques que nous avons analysées jusqu'à présent, les places, et leurs positions relatives les unes aux autres dans un tableau, indiquaient dans quelle opération un nombre serait employé. L'ordre dans laquelle les opérations devaient être exécutées n'y était pas inscrit. Or, dans ce commentaire, toutes les quantités, disposées dans leur ordre d'apparition dans le vers, sont accompagnées d'une abréviation. Cette dernière indique en raccourci l'opération dans laquelle une quantité est utilisée.

Le second exemple de ce commentaire s'énonce puis se dispose de la manière suivante (p. 125; lignes 5-9) :

*uddeśakaḥ-
triguṇaṃ rūpavihīnaṃ dalitaṃ dvābhyāṃ samanvitaṃ bhūyaḥ|
bhaktaṃ tribhis tu tasmād dvikahīnaṃ kiṃ bhaved rūpaṃ||
nyāsaḥ 3 gu, 1 ū, 2 hā, 2 kṣe, 3 hā, 2 ū, labdhaṃ rūpaṃ 1*

Un exemple-

Trois fois ⟨une quantité⟩, diminuée par un, dont on prend la moitié, accrue de deux et ensuite|

Divisée par trois, et puis décrue par deux est un. Qu'y avait-il ⟨auparavant⟩ ?||

Disposition- 3 gu; 1 ū; 2 hā; 2 kṣe; 3 hā; 2 ū; ce qui est obtenu est 1.

³²Voir [Keller 1995].

gu est une abréviation de *guṇa*, multiplicateur; *ū* une abréviation de *ūna*, diminution; *hā* de *hāra*, diviseur; *kṣe* de *kṣepa*, augmentation. Les abréviations qui accompagnent chaque nombre peuvent donc être interprétées comme des indications opératoires.

Notons que chaque syllabe dans les scripts du sous-continent indien est notée avec une seule ■lettre■.

Pour mettre en application la procédure d'inversion, la liste donnée dans la disposition est lue en sens inverse, de droite à gauche. L'indication des opérations appelle son inverse de manière mécanique. Lorsque chacune des opérations inverses est effectuée, le résultat obtenu semble pouvoir s'écrire en bout de ligne. Ainsi, l'ordre dans lequel les nombres sont notés indique l'ordre dans lequel les opérations doivent être exécutées.

5 Conclusions

Nous avons remarqué que la notation des nombres sur une surface de travail supposait un travail de traduction du texte dans lequel il était énoncé. Ce travail de transposition se retrouve dans la partie ■disposition■ de la liste des exemples résolus du commentaire. Elle traduit l'énoncé du problème sur la surface de travail.

Nous avons observé que les procédures arithmétiques utilisent toutes des dispositions locales des quantités sur la surface de travail. Ainsi un diviseur peut être noté au-dessus d'un dividende (vers 30), mais ils peuvent aussi être disposés l'un en face de l'autre, le diviseur à gauche, le multiplicateur à droite (vers 26-27).

Cette disposition est tabulaire, elle utilise des lignes et des colonnes. Elle définit de cette manière les positions relatives des nombres les uns par rapport aux autres. Celles-ci reflètent les opérations dans lesquelles ils seront employés, ainsi que leur fonction au sein de ces opérations. Ainsi la partie ■disposition■ reflète une analyse mathématique de la situation posée par un problème tout en se préparant à l'exécution d'un algorithme. La procédure appliquée utilise parfois explicitement le positionnement relatif des places sur la surface de travail. Leur disposition et d'éventuels déplacements sont des étapes d'exécution de celles-ci.

Ainsi, les dispositions semblent parfois permettre une création mécanique de nouvelles procédures. Toutefois, contrairement à l'hypothèse que nous avons formulée dans notre mémoire de DEA ³³ d'un ■calcul algébrique sur position■, nous nuancions à présent notre analyse. En premier lieu, nous

³³[Keller 1995].

ne pensons plus qu'une nouvelle règle est générée à partir de la disposition des quantités. Il se peut que cette disposition ne fasse que refléter cette génération systématique. D'autre part, le positionnement des quantités est aussi particulier que l'est la procédure considérée.

Certains calculs sont effectués dans un emplacement donné. Ils supposent qu'on efface de celui-ci le nombre qui y figurait précédemment.

De manière générale, les calculs élémentaires de sommer, soustraire, multiplier et diviser semblent ainsi être posés puis effacés.

Par exemple l'étymologie de l'expression pour sommer *ekatra* ((placer) dans un seul endroit) suggère une telle pratique.

Lorsqu'il est spécifié que des quantités ne doivent pas être effacées, on peut penser que d'habitude elles sont ■détruites■ lors du calcul. Ainsi, la procédure décrite dans le vers 29, considère les termes d'une série obtenus par un processus appelé ■la méthode de diminution par une quantité■ (*rāśy-ūna-nyāya*). Ils seront ensuite sommés. Bhāskara précise (p. 125; lignes 17-18) :

*piṇḍitam ekatra kṛtam/ pṛthaktveneti rāśyūnakramalabdhapadānām
avinaṣṭasthāpanām pradarśayati/*

Sommer c'est à dire faire en un seul endroit. (Avec l'expression) ■séparément■ il explique qu'il y a une disposition indestructible pour les termes obtenus au moyen de la méthode de diminution par une quantité.

On peut supposer que les places où ces quantités sont notées sont habituellement effacées. Lorsqu'il s'agit de les conserver, afin qu'elles puissent être utilisées dans d'autres calculs, Bhāskara doit alors préciser que leur disposition est indestructible (*avinaṣṭa-sthāpanā*).

Les manipulations et dispositions de quantités sur la surface de travail au cour de la résolution d'une procédure sont ainsi extrêmement variées. Certaines procédures semblent employer simultanément plusieurs espaces de travail, l'un où des quantités sont notées formellement comme le requiert la procédure, l'autre –utile pour des calculs intermédiaire– où des nombres sont inscrits puis effacés.

Nous avons donc décrit comment au sein d'une procédure une quantité peut être qualifiée par l'opération dans laquelle elle est utilisée. Le plus souvent cette qualification est signifiée par le placement relatif des quantités les unes par rapport aux autres. Mais elle peut également être explicitée sur la surface de travail par des marques associées aux nombres notés. Cette

marque peut prendre la forme d'un petit cercle indiquant qu'une quantité est soustractive. Elle peut être une abréviation. Ces marques doivent donc être comprises comme des signes opératoires. Par ailleurs, un signe similaire à celui qui note le chiffre zéro marquerait une place vide sur la surface de travail. Dans une disposition tabulaire, il désignerait la place où le résultat est écrit.

2.3 Géométrie

Bhāskara inclut la géométrie dans plusieurs de ses catégorisations. Ainsi, au sein des huit *vyavahāras*, la géométrie est ■le calcul des figures ayant plus d'un cĀtē■. Elle est également la partie complémentaire de l'arithmétique, ce couple formant à lui seul une partition des mathématiques. Elle est également considérée comme indistincte des ■mathématiques des planètes■³⁴.

Dans les sections qui suivent nous examinerons les rapports qu'entretiennent arithmétique et géométrie d'une part (2.4), mathématiques et astronomie d'autre part (2.5). Ici, nous décrirons la géométrie telle qu'elle apparaît dans le deuxième chapitre de l'*Āryabhaṭīya* en tant que ■calcul des figures ayant plus d'un cĀtē■. Le contenu géométrique du *gaṇita-pāda* est présenté dans le tableau 2.4.

Parmi les objets décrits, un en particulier retiendra notre attention : le sinus. Nous examinerons le cadre géométrique dans lequel il apparaît, et les différents calculs qui s'ordonnent autour de lui.

1 Figures planes

Les figures planes de manière générale sont désignées par le terme *kṣetra* (champ).

1.a Quadrilatères

Un quadrilatère se nomme *catur-aśra* ou *catur-bhuja* ((champ) ayant quatre bords ou quatre cĀtēs)). Un carré est un ■équi-quadrilatère■ (*sama-catur-aśra*). Il est distingué des losanges par le fait que ces diagonales (*karṇa*) ont même longueur. De la même manière un trapèze est défini à partir des segments qui le délimitent : la terre (*bhū*) parallèle au visage (*mukha*), puis ses cĀtēs latéraux appelés par Āryabhaṭa *pārśva* (flancs) et par Bhāskara

³⁴Se reporter à la section 2.1.

Table 2.4: Les procédures géométriques données par Bhāskara

Nous ne respecterons pas dans ce tableau la classification élaborée par Bhāskara, pour laquelle on se reportera à la section 2.1.

Commentaire de vers	Procédures
Vers 3	Aire du carré.
Vers 6	Aires des triangles équilatéraux, isocèles et quelconques. Volume d'un tétraèdre régulier.
Vers 7	Aire du Cercle. Volume de la sphère.
Vers 8	Segments de la hauteur et aire d'un trapèze.
Vers 9	Aires des rectangles. Vérifications des aires déjà données. Aire de figures en formes de tambour et de corne.
Vers 10	Valeur approchée de la circonférence d'un cercle de diamètre donné.
Vers 11	Méthode géométrique pour dériver des Rsinus.
Vers 13	Techniques de constructions de triangles, quadrilatères, d'obtention de la verticalité et de l'horizontalité.
Vers 17	Théorème de Pythagore. Relation liant flèches et demi-cordes.
Vers 18	Intersection de deux cercles.

oreilles ou diagonales (*karṇa*). Il se distingue également d'un quadrilatère quelconque par le fait que ses hauteurs (*āyāma*) sont égales.

Le composé sanskrit que nous avons traduit par rectangle en décrit la forme : *āyata-catur-aśra* (littéralement ■quadrilatère allongé■). Il est déterminé par ses deux cōtés appelés dans le commentaire *pārśva* (les flancs). Ce même terme est utilisé par Āryabhaṭa pour désigner les cōtés de n'importe quelle figure. Les deux noms spécifiques que portent les cōtés du rectangle chez Bhāskara sont peut-être une manière d'exprimer l'orthogonalité : la largeur (*vistāra*) et la longueur (*āyāma*).

L'ensemble de ces quadrilatères avec les noms de leurs cōtés est présenté dans la Figure 2.4.

D'après l'interprétation que Bhāskara fait de la première moitié du vers 9³⁵, toute figure plane peut se transformer en un rectangle de même aire. Le rectangle serait donc une figure fondamentale de la géométrie plane. C'est par le biais de cette propriété que les aires des figures seraient soit trouvées soit vérifiées. Cette affirmation se rapporte également à une construction géométrique; elle affirme que, pratiquement, on peut découper la figure initiale pour en faire un rectangle de même aire. La construction des quadrilatères est décrite dans le commentaire au vers 13. Elle se fait à partir de leurs diagonales.

Remarquons que les segments internes (les diagonales, *karṇa*, et les perpendiculaires, *avalambaka*) sont les éléments à partir desquels les quadrilatères sont distingués entre eux.

³⁵Nous l'analysons en détail dans la section 1.8.

Figure 2.4: Quadrilatères considérés dans le commentaire de Bhāskara et le noms de leurs cōtés.

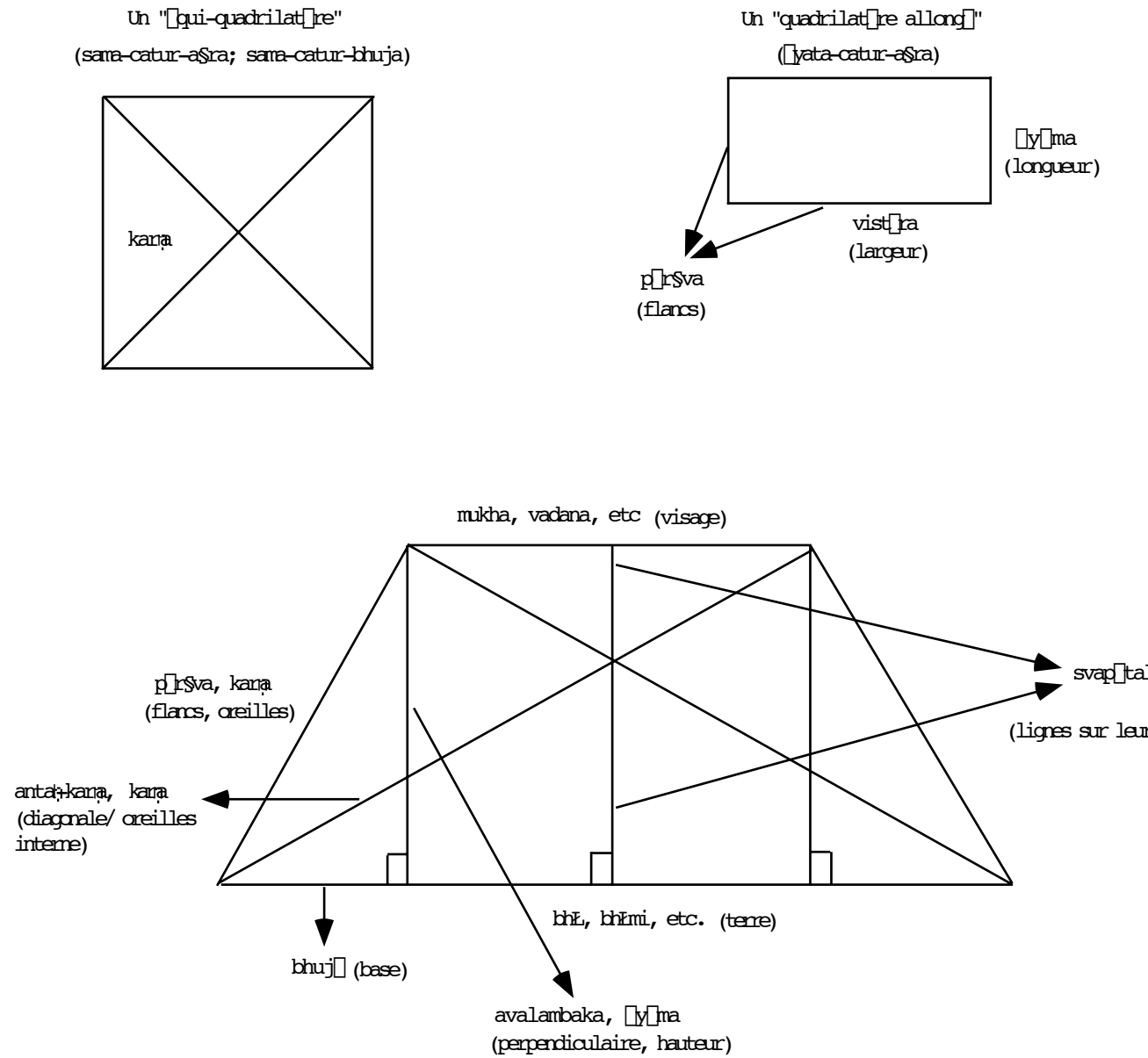
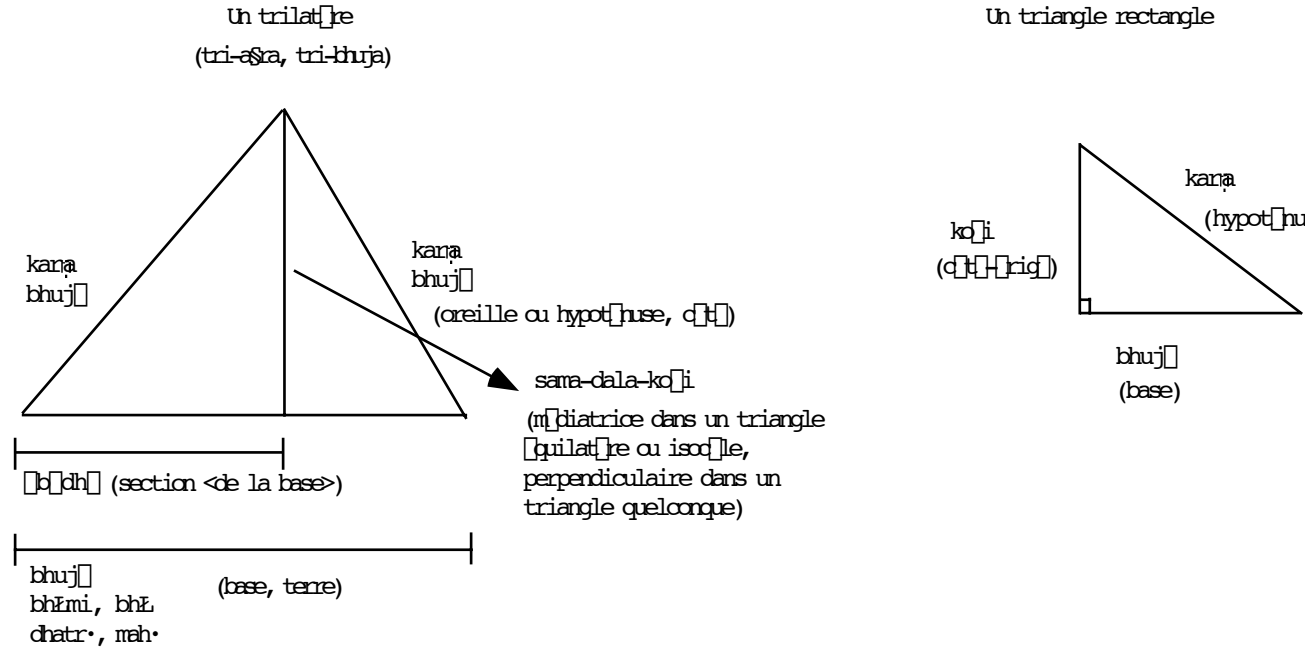


Figure 2.5: Noms des segments attachés aux triangles dans le commentaire de Bhāskara



1.b Trilatères

A la manière des quadrilatères, les triangles sont appelés *tri-aśra* ou *tri-bhuja* ((champ) ayant trois bords ou trois c[ôtés]). L'ensemble des triangles se subdivise en trois classes, les équilatéraux (*sama-tri-aśra*), les isocèles (*dvi-sama-tri-aśra*) et les quelconques (*viśama-tri-aśra*). La base (*bhujā*) ou terre (*bhū*) est habituellement distinguée des deux autres c[ôtés] (*pārśva* ou *karṇa*), comme le segment sur lequel tombe la hauteur (*avalambaka*). Dans le vers 13, la construction d'un triangle est décrite à partir d'une hauteur et de la base correspondante, appelées au départ *karṇa* (diagonale).

Le triangle rectangle dans ce cadre est une figure spécialisée. Pour le nommer on énumère ses c[ôtés] : une hypoténuse (*karṇa*) et ses deux c[ôtés] perpendiculaires, *bhujā* (la base) et *koṭī* (le ■c[ôté] érigé■). Il est mis en lumière dès que le ■Théorème de Pythagore■ est employé.

Ces figures géométriques sont illustrées dans la Figure 2.5.

1.c Cercles

Un cercle est généralement nommé dans le traité *sama-vṛtta*, ■cercle uniforme■, probablement pour le distinguer de l'*āyata-vṛtta*, ■cercle allongé■, qui désigne l'ellipse. Il est défini par sa circonférence *sama-pariṇāha* ou *sama-paridhi* et son semi-diamètre *vyāsārdha* ou *viškambha-ardha*. À partir d'une analyse du composé *sama-pariṇāha* employé par Āryabhaṭa, Bhāskara prend beaucoup de soin à distinguer la circonférence d'un cercle, du disque qu'elle délimite³⁶.

Un arc de cercle est généralement appelé *pr̥ṣṭha* (dos). Des subdivisions uniforme d'une circonférence sont des unités de mesures d'un arc. Le *rāsī* correspond ainsi à un douzième de la circonférence. Le vers 11 considère des subdivisions paires de *rāsīs* (un vingt-quatrième, un quarante-huitième etc. de la circonférence).

Dans la seconde partie du vers 9, Bhāskara introduit des noms de figures à l'intérieur d'un cercle. D'autres sont présentées dans les vers 11 et 18. La plus importante d'entre-elles est la figure de l'arc et de la flèche (*dhanuḥ-kṣetra*). Celle-ci (Figure 2.6) se distingue par un dos, une corde et une flèche. Bhāskara évoque également l'hexagone régulier. Le vers 11 s'intéresse aux quadrilatères et triangles rectangles dans une figure particulière qui apparaît en tra■ant les cordes qui sous-tendent des subdivisions paires de *rāsīs*.

2 Les demi-cordes

Le sinus, qui vient d'Inde, intervient dans le traité comme la demi-corde d'un arc. Le contexte dans lequel il apparaît souligne les avantages que procurent la considération de ce segment plutôt que la corde entière.

L'*Āryabhaṭīya* comporte trois vers trigonométriques : le vers 12 du premier chapitre énonce une table de différences de sinus. Le vers 11 du deuxième chapitre donne une procédure géométrique pour calculer des Rsinus. Le vers 12 du même chapitre fournit une procédure arithmétique pour dériver des différences de sinus. D'autres procédures font directement ou indirectement intervenir des sinus : il s'agit des règles de la deuxième moitié du vers 17 et du vers 18. Par ailleurs, dans son commentaire du vers 10, Bhāskara cite des vers en *prākṛta* qui sont eux aussi reliés indirectement aux demi-cordes.

³⁶Pour une analyse du sens courant de certains des noms de segments dans l'*Āryabhaṭīya* et le commentaire de Bhāskara se reporter à [p. 257-258; Filliozat 1988].

Figure 2.6: Noms des segments et figures internes à un cercle

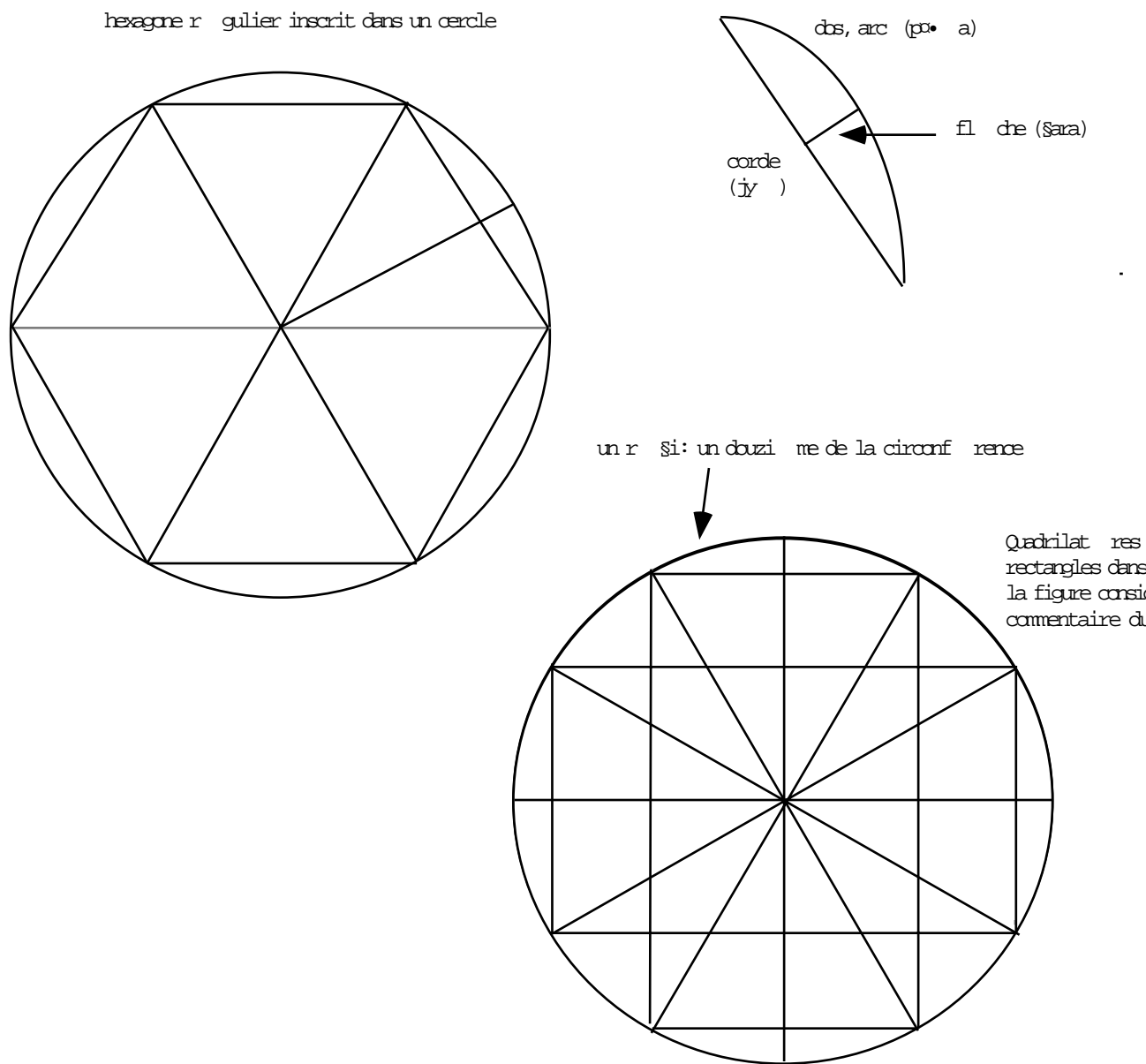
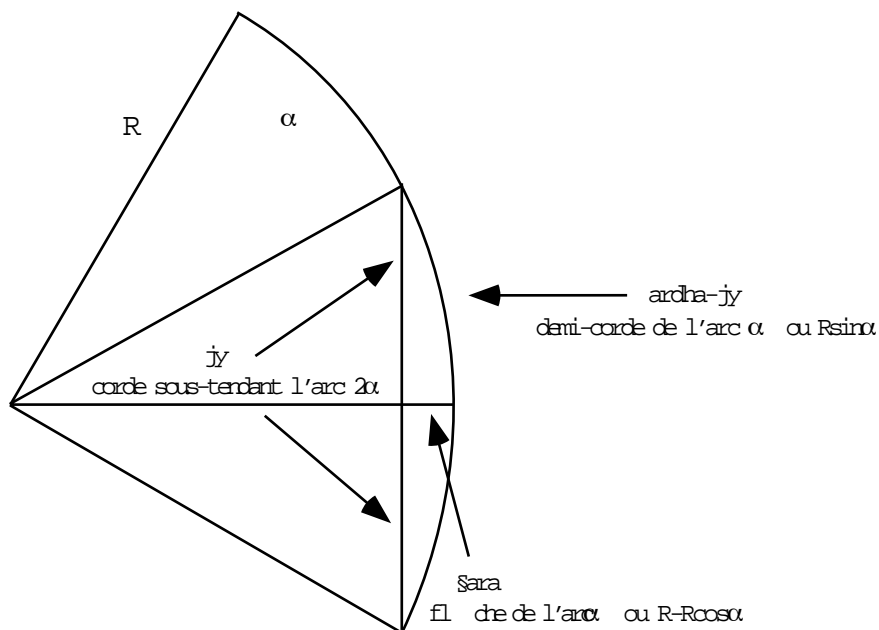


Figure 2.7: Arcs, cordes, demi-cordes et flèches



Précisons en premier lieu la définition de la demi-corde³⁷ : la moitié de la corde sous-tendant l'arc 2α s'appelle la demi-corde de l'arc α (Figure 2.7).

La confusion causée par la référence aux demi-cordes d'une moitié d'arc est accrue parce que Bhāskara lui-même omet souvent le mot *ardha* (moitié) lorsqu'il nomme la demi-corde (*ardha-jyā*) : il l'appelle simplement *jyā*, la corde. Il s'agit peut-être du moment où ce terme perd peu à peu son sens original de ■corde■ et prend l'acception technique de ■sinus■.

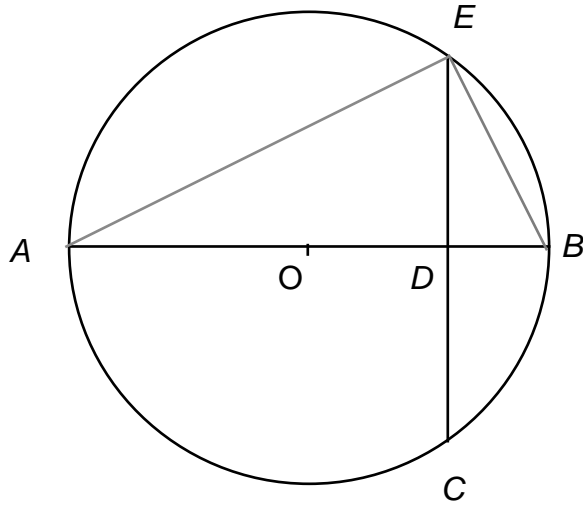
Le segment ainsi défini correspond à $R \times \sin \alpha$, que l'on note $R \sin \alpha$. En général les cercles considérés n'ont jamais un rayon égal à un.

La figure de l'arc et de la flèche est étroitement liée aux demi-cordes. La flèche de cette figure, de la même manière que la demi-corde, se rapporte en général à la moitié de l'arc que sous-tend la corde. Elle est donc appelée ■la flèche de l'arc α ■. Elle correspond pour nous à $R - R \times \cos \alpha$. Le cosinus n'est pas particularisé dans ce commentaire. Il est lui-même lu comme un sinus : Bhāskara l'appelle le $R \sin(90 - \alpha)$. La flèche est parfois appelée *utkrama-jyā*

³⁷Tout ceci est exposé, en anglais, avec plus de détails dans les Annexes de BAB.2.9.cd, BAB.2.11, BAB.2.12, BAB.2.17 et BAB.2.18.

Figure 2.8: Deux flèches et leur cordes

Le calcul qu'énonce la seconde moitié du vers 17 lie le carré de la demi-corde (DE^2) au produit des deux flèches de l'arc \widehat{CE} (AD et DB).



et rapportée à ce segment comme la différence $R - R\sin(90 - \alpha)$.

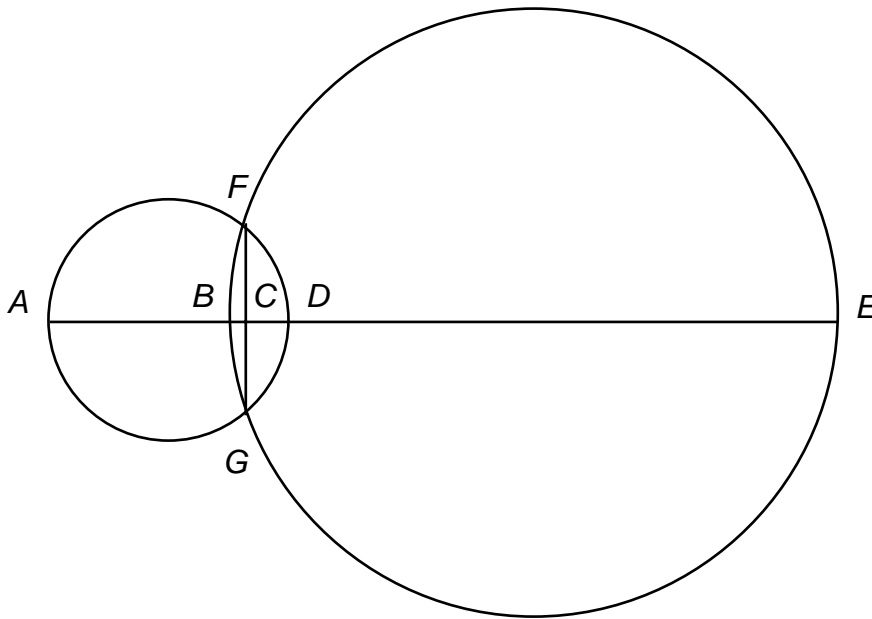
Le vers 11 donne une procédure diagrammatique afin de dériver des tables de $R\sin$. Pour interpréter ce vers, Bhāskara s'appuie sur le diagramme que nous avons représentée dans la Figure 2.6. Les demi-cordes et leurs flèches sont dérivées à partir du ■Théorème de Pythagore■, en utilisant les triangles rectangles qu'ils dessinent avec le rayon du cercle. Ceci rend les demi-cordes plus faciles à considérer que les cordes entières. Les demi-cordes sont reliées à des mesures d'arc : Bhāskara cite, dans le vers 10, une procédure permettant à partir d'un corde de retrouver l'arc correspondant.

La seconde moitié du vers 17 esquisse un calcul qui emploie cordes et flèches dans un cercle. La situation décrite dans ce vers selon le commentateur est illustrée dans la Figure 2.8.

Le vers 18, dans l'interprétation qu'en fait le commentateur, intègre indirectement des figures d'arcs et de flèches. En effet, l'intersection de deux cercles y est considérée. Le calcul effectué est illustré dans la Figure 2.9.

D'autres figures de ce type apparaissent dans la réfutation entreprise dans le vers 10. Nous renvoyons à l'annexe de ce commentaire pour plus de précisions.

Figure 2.9: Flèches de l'intersection de deux cercles
 Le vers 18 lie les ■deux flèches de la rencontre■ (BC et CD) au quotient
 du produit des flèches de l'arc \widehat{FG} ($AB \times BD$ et $DE \times DB$) par la somme
 $AB + DE$.



Ainsi autour de la demi-corde de nombreuses procédures géométriques sont mises en place. Elle apparaît toujours au sein d'un cercle. Le terme ■trigonométrie■ rappelle que nous avons l'habitude de considérer sinus et cosinus au sein d'un triangle rectangle. Dans ce texte de Bhāskara, si l'évaluation de la mesure d'un Rsinus repose souvent sur une application du ■Théorème de Pythagore■, la figure ■trigonométrique■ est celle, nommée *dhanuḥ-kṣetra*, qui représente un arc et des flèches.

Nous reviendrons plus tard (2.5) sur la manière dont les demi-cordes sont utilisées en astronomie.

3 Aires, volumes et procédures descriptives

3.a Aires

La première moitié du vers 9 semble indiquer une méthode pour trouver l'aire de n'importe quelle figure plane (p. 63, lignes 4-5) :

sarveṣāṃ kṣetrāṇāṃ prasādhyā pārśve phalaṃ tadabhyāsaḥ

Pour tous les champs, lorsqu'on a acquis les deux c^htés, l'aire est leur produit |

Bhāskara précise en quoi consiste cette méthode : pour toute figure plane, il faut trouver les c^htés du rectangle ayant même aire qu'elle. La caractéristique, selon le commentateur, des c^htés du rectangle issu de la figure d'origine est malheureusement restée obscure.

Il y a apparemment trois possibilités d'interprétation :

- Soit la caractéristique des c^htés est d'avoir des mesures de longueur telles que leur produit donne la même aire que celle de la figure de départ.
- Soit la caractéristique des c^htés est leur perpendicularité. C'est le cas dans toutes les figures considérées. Le cas du cercle est un peu particulier, mais les triangles rectangles internes considérés dans des calculs de demi-cordes laissent à supposer que cette propriété lui était attribuée également.
- Soit elle réunit les deux propriétés.

Le vers 9, tel qu'il est commenté, peut tout d'abord se comprendre comme une opération géométrique : on peut transformer un triangle en un rectangle de même aire. Si l'on explicite arithmétiquement cette transformation, alors on obtient une procédure de calcul de l'aire de cette figure.

3.b Volumes et procédures descriptives

Si l'on met de c^hté les empilements que représentent les séries, trois figures solides sont décrites dans l'*Āryabhaṭīya* : le cube, la sphère et le tétraèdre régulier. Le terme utilisé pour solide est *ghana*. Il désigne également le cube dans ses dimensions géométriques et arithmétiques. Le cube apparaît ainsi comme la figure solide par excellence.

La seconde moitié du vers 3 définit le cube arithmétiquement et géométriquement. Il donne implicitement la procédure pour calculer son volume (p. 50, ligne 15) :

sadrśatrayasaṃvargo ghanastathā dvādāśriḥ syāt||

Un cube devrait être le produit des trois mêmes ainsi qu'un
⟨solide⟩ à douze bords||

Nous avons analysé le jeu par les mots qui préside à la rédaction de la première moitié du vers 3 où l'aire du carré est le carré de son cĀté³⁸. De même, le commentateur lit dans ce vers que le volume du cube est le cube de la longueur. Bhāskara en expliquant cette formul semble considérer que la procédure par laquelle le volume est calculé, fait voir le cube en lui-même (p. 51; lignes 1-3) :

*sadrśatrayasaṃvarga ity anena samacaturaśrakṣetraphalasya
tatkṣetrabāhusadrśam evocchrāyam ācaṣṭe, yasmāt kṣetraphalam
ucchrāyagūṇitaṃ ghanaphalam/*

Avec l'expression ■le produit des trois même", ⟨Āryabhaṭa⟩ pour l'aire (*phala*) d'un champ équi-quadrilatère, désigne une hauteur qui est égale au cĀté de ce champ (équi-quadrilatère), parce que le volume (*phala*) d'un cube est l'aire du champ multiplié par la hauteur.

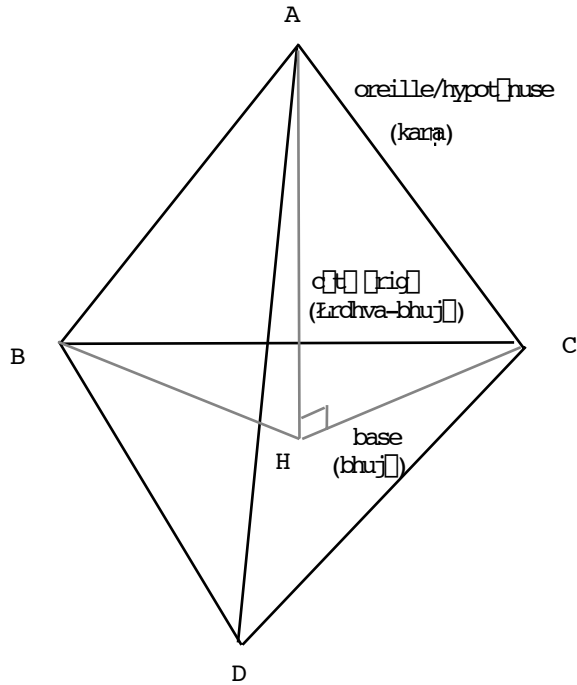
Le calcul du volume est interprété dans ce passage visuellement. Le cube semble se construire à partir d'une surface carrée sur laquelle une hauteur est posée. Cette visualisation semble également expliquer le calcul, en le réinterprétant : le cube de la longueur est décomposé comme le produit de l'aire du carré par la hauteur.

Dans son commentaire du vers donnant le volume, par ailleurs faux, du tétraèdre régulier, Bhāskara glose le terme ■coté érigé■ (*ūrdhva-bhujā*), qui désigne la hauteur issue d'un sommet de la manière suivante (p. 58, lignes 8-10) :

*ūrdhvbhujā hi nāma kṣetramadhya ucchrāya iti pratyakṣam/
sa ca tiryag avasthitasya śrṅgāṭakakṣetrabāhoḥ karṇavadavasthitasya
koṭiḥ, bhujā karṇamūlakṣetrakendraantarālam/*

³⁸Se reporter à la section 1.5.

Figure 2.10: Un tétraèdre et son ■cĀté érigé■



Que ce qui se nomme ■coté érigé■ (*ūrdhva-bhujā*) soit une hauteur au milieu d'un champ, est directement perceptible (*pratyakṣa*). Et ceci est le coté érigé (*koṭī*) pour le cĀté (*bāhu*) d'un champ *śṛṅgāṭaka* qui se situe à l'oblique (*tiryak*) comme une oreille (*kara*), (tandis) que la base (*bhujā*) est l'espace intermédiaire entre la racine de l'oreille et le centre du champ.

Dans ce passage, que nous avons analysé dans l'annexe de BAB.2.6., non seulement la description d'un triangle rectangle est effectuée, mais la figure du tétraèdre est décrite en relation avec son triangle de base. Le tétraèdre est illustré avec son triangle interne dans la figure 2.10.

Le ■cĀté érigé■ (*AH*) est défini en relation d'abord avec le triangle qui forme la base du tétraèdre (*DBC*). De nouveau, le mot ■cĀté-érigé■ semble donner par lui-même à voir la hauteur du tétraèdre considéré. Puis, afin de définir le triangle rectangle *AHC*, son rapport avec une arête du solide

(AC), et la base du triangle (HC) est décrite.

Ainsi tout se passe comme si la procédure pour calculer le volume d'un solide, décrivait en même temps le solide lui-même. Ces descriptions semblent toutes expliquer que la figure solide est dérivée d'une surface plane sur laquelle une hauteur est posée. Ces descriptions sont également les supports à partir desquels Bhāskara réinterprète la procédure en l'investissant d'un sens mathématique.

Bhāskara semble considérer qu'il y a une continuité entre la figure plane et la figure solide. Cette continuité pourrait servir d'explication aux formules fausses de l'*Āryabhaṭīya*. Ainsi, la lecture du calcul sur le volume du cube repose sur la lecture du vers qui fournit l'aire du carré. Le volume du cube est le produit de l'aire du carré par la hauteur ($V = A \times H$). De même le volume de la sphère est la racine carrée de l'aire multipliée par l'aire ($V = A \times \sqrt{A}$). Le volume de la Sphère semble encore une fois être le produit d'une aire et d'une ■hauteur■ que représente numériquement la racine-carré de l'aire. L'aire d'un triangle équilatéral est le produit de la moitié de la base et d'une hauteur ($A = 1/2B \times H$). Dans la continuité de cette aire, le volume du tétraèdre est donné avec la même pondération : la moitié de l'aire du triangle équilatéral et de la hauteur ($V = 1/2A \times H$).

4 Conclusion

Ainsi avons nous vu une multitude de figures planes. Nous avons examiné la richesse des situations, toujours reliées à la figure d'un arc et des flèches, dans lesquelles le sinus apparaît. De ces figures planes semble dériver une représentation des figures solides correspondantes. Leurs volumes seraient le de l'aire et d'une hauteur. Ces procédures sont analysées par Bhāskara comme décrivant les figures dont elles calculent le volume.

Nous allons à présent nous tourner vers les rapports qu'entretiennent arithmétique et géométrie.

2.4 Arithmétique et Géométrie

1 Est-ce que toute opération arithmétique admet une explication géométrique ?

Bhāskara décrit une partition des mathématiques entre arithmétique et géométrie³⁹. Pourtant il ne cesse d'établir des liens entre ces deux disciplines en interprétant des opérations arithmétiques géométriquement et, inversement, en lisant arithmétiquement des opérations géométriques.

Le passage du commentaire où cette traduction se fait de la manière la plus explicite se situe dans la partie introductive du commentaire au *gaṇita-pāda*. Une objection suivie d'une réponse a pour thème la qualification de la multiplication comme ■augmentation■ et de la division comme ■diminution■ (p. 44, lignes 8-15) :

*yady evam atra katham prakriyā parikalpanīyā ? yatra caturbhāgaḥ
pañcabhāgena guṇito jāto viṃśatibhāgaḥ/ iyaṃ ca guṇanā samyogasya
bheda ucyate/ sa cāyaṃ śuddherbheda āpatitaḥ/ yatra caturbhāgena
viṃśatibhāgasya bhāgaḥ, tatra dṛṣṭaḥ pañcabhāgaḥ/ evam ayaṃ
śuddher bhedaḥ samyogabheda āpatitaḥ/ ubhayatra parihāra ucyate-
[ekāyāmavistāre caturaśrakṣetre viṃśatyāyatacaturaśrakṣetrāṇi/]
(tous les mss lisent : āyatacaturaśrakṣetre catuḥpañcake viṃśati
caturaśrakṣetrāṇi) tatraikasyāyāmaḥ pañca-bhāgaḥ, vistāraś caturbhāgaḥ/
tayoḥ abhyāsaḥ phalaṃ kṣetrasya viṃśatibhāgaḥ/ viṃśatibhāgasya
caturbhāgaḥ pañcabhāga itī na doṣaḥ/ evaṃ kṣetragaṇite parihāraḥ/
rāśi-gaṇite parihārārthaṃ yatnaḥ karaṇīyāḥ/*

⟨Objection⟩

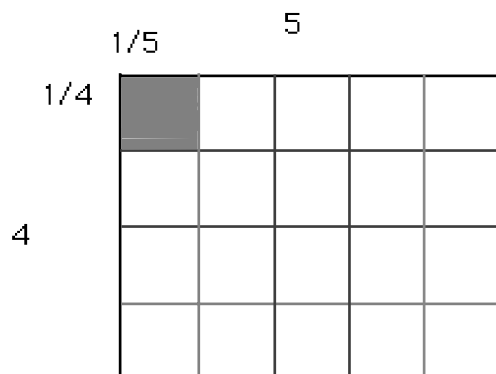
S'il en est ainsi, comment le calcul doit-il être compris, dans ce cas : lorsqu'un quart est multiplié par un cinquième, un vingtième est produit. Et cette multiplication a été appelée un genre d'augmentation. Toutefois elle apparaît, comme un genre de diminution. Lorsqu'on effectue la division de un vingtième par un quart, un cinquième est observé. Ainsi, ce qui est un genre de diminution apparaît comme un genre d'accroissement.

⟨Réponse⟩

³⁹Se reporter à la section 2.1.

Figure 2.11: Interprétation géométrique du produit de deux fractions

La surface du rectangle est subdivisée en 20 petits carrés ayant l'unité pour longueur. Le produit de $1/4$ de la longueur par $1/5$ ème de la largeur correspond à $1/20$ ème de la surface du rectangle.



Dans les deux cas une réfutation est dite <ainsi>-Dans un champ rectangulaire de quatre par cinq il y a vingt champs quadrilatères (i.e carrés). Dans ce cas, la longueur d'un <petit carré> est un cinquième <de la longueur du grand rectangle> et la largeur est un quart <de la largeur du grand rectangle>. Leur produit est l'aire <d'un petit carré>, un vingtième <de l'aire> du champ <rectangulaire>. ■Un quart d'un vingtième est un cinquième■, il n'y a pas de <telle> erreur <lorsqu'on considère les choses ainsi>.

La lecture géométrique que fait ici Bhāskara des multiplications et divisions de fractions est illustrée dans la Figure 2.11.

Au cours de cette réfutation, Bhāskara interprète géométriquement la multiplication : l'opération permet de passer de la considération de deux longueurs à celle d'une aire. Cette transformation est considéré comme un accroissement.

La dernière partie de l'objection critique la division en tant que ■diminution■ : ■Lorsqu'<on effectue> la division de un vingtième par un quart, un cinquième est observé.■ Bhāskara semble répondre au sujet d'une autre opération : celui de la multiplication d'un quart par un cinquième : ■Un quart d'un vingtième est un cinquième■, il n'y a pas de <telle> erreur <lorsqu'on considère les choses ainsi>■.

Il est difficile de déterminer pourquoi une telle réponse est fournie par le

commentateur. Il se pourrait qu'il insiste sur la distinction entre multiplication de fractions et division de celles-ci. Dans ce cas, il expliquerait elliptiquement qu'il ne faut pas confondre l'expression ■un quart d'un vingtième■ qui désigne l'opération $\frac{1}{4} \times \frac{1}{20}$ et l'expression ■un quart divisé par un vingtième■ qui revient à considéré le quotient $\frac{4}{20}$. L'interprétation géométrique de la division serait le passage de la considération d'une aire et d'une longueur à la considération d'une longueur. Arithmétiquement, Āryabhaṭa affirme que la division est l'opération inverse de la multiplication⁴⁰. Toutefois Bhāskara n'explique nulle part cette que cette interprétation se répercute géométriquement.

Qu'il existe ainsi une double lecture des opérations élémentaires à la fois en arithmétique et en géométrie est souligné par la phrase qui clôt cette réponse du commentateur (p. 44; lignes 14-15) :

*evaṃ kṣetragaṇite parihāraḥ/ rāśigaṇite parihārārthaṃ yatnaḥ
karaṇīyaḥ/*

De cette manière une réfutation en géométrie (a été conduite).
En arithmétique, une tentative ayant pour objectif une réfutation doit être faite.

Notons que l'on voit mal comment une telle réfutation arithmétique pourrait être conduite !

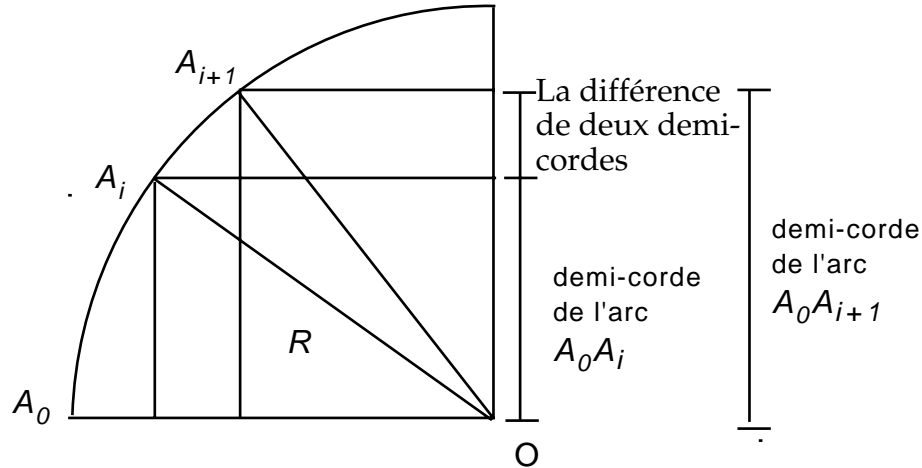
Dans un autre passage une opération arithmétique élémentaire est interprétée géométriquement. Dans le commentaire du vers 12, la différence de deux demi-cordes consécutives est interprété comme ■une demi-corde partitionnée■, c'est-à-dire qu'elle est un segment de la plus grande des deux demi-cordes. Ceci est représenté dans la Figure 2.12.

Comme nous l'avons déjà remarqué, le vers 3 de l'*Āryabhaṭīya* crée explicitement un lien entre opération arithmétique et figure géométrique. En effet celui-ci définit ensemble carré arithmétique et géométrique, cube arithmétique et géométrique tout en précisant le lien qui unit chacun de ces deux objets : la mesure de l'aire et du volume.

Dans son commentaire de la première moitié du vers 3 Bhāskara utilise l'expression *varga-karman* (opération d'élever au carré). Comme nous l'avons analysé dans l'Annexe de BAB.2.3., cette opération est à comprendre d'une double manière : il s'agit à la fois de considérer le carré arithmétique de la longueur d'une hypoténuse ou d'une diagonale et de construire géométrique-

⁴⁰Voir Ab.2.28, p. 124, ligne 7.

Figure 2.12: La différence de deux demi-cordes consécutives est un segment



ment le carré ayant cette longueur pour côté. Cette signification renvoie à celle donnée à l'opération *karaṇī*, que nous examinerons plus bas.

Nous avons examiné l'interprétation des calculs en géométrie. Nous allons à présent considérer la place de ceux-ci dans cette discipline.

Souvent les termes de «calcul» et d'«opération» sont employés en géométrie par Bhāskara. Celui-ci évoque le «calcul d'une figure» pour signifier que l'aire ou la longueur de ses côtés sont évalués. Par exemple, pour introduire la première partie du vers 10, qui permet d'évaluer soit la circonférence, soit le diamètre d'un cercle, Bhāskara écrit (p. 71; ligne 18) :

trairāsīkena samavṛttānayanārtham āha-

Pour calculer un (champ) uniformément circulaire, avec une Règle de Trois, il a dit-

Le même mot est employé aussi pour introduire les deux moitiés du vers 3, qui sont explicitement de cette double nature.

Le terme *parikarman* du commentaire désignerait ainsi des opérations qui sont à la fois géométriques et arithmétiques. Ce mot aura une autre postérité dans les textes mathématiques : il désignera les calculs élémentaires sur les entiers, les fractions, zéro, etc.

Ainsi les opérations élémentaires semblent avoir des interprétations géométriques. Lorsque des procédures arithmétiques plus complexes sont mises en œuvre

cette double lecture n'a pas toujours lieu. Nous avons distingué deux procédures arithmétiques utilisées dans un cadre géométrique : la Règle de Trois et le calcul nommé *saṃkramaṇa*. Nous allons à présent examiner de quelles manières ces deux procédures sont lues géométriquement.

2 La Règle de Trois

La Règle de Trois est utilisée par le commentateur pour indiquer des proportionnalités. Elle sert également de grille explicative pour un algorithme formé d'une multiplication et d'une division.

Dans le commentaire de la seconde partie du vers 6, une Règle de Trois est énoncée par le commentateur alors qu'il supplée une étape au processus donné par Āryabhaṭa. Elle calcule une longueur tout en formulant un rapport de proportionnalité entre deux triangles rectangles (p. 58; lignes 10-12) :

*tadānāyane trairāsīkam- yadi tribhujakṣetrāvalambakena
tribhujakṣetrabāhur labhyate tadā tasyaiva
tribhujakṣetrabāhudala-saṅkhyakasyāvalambakasya
kiyān bāhur iti*

En calculant cette ⟨base⟩, une Règle de Trois- ‘Si le c^zté d'un champ trilatère est obtenu avec la perpendiculaire de ce champ, alors pour la perpendiculaire dont la valeur est la moitié du c^zté du champ trilatère initial, de combien est le c^zté ?’

Les deux triangles proportionnels que la Règle de Trois met en lumière sont illustrés dans la Figure 2.13.

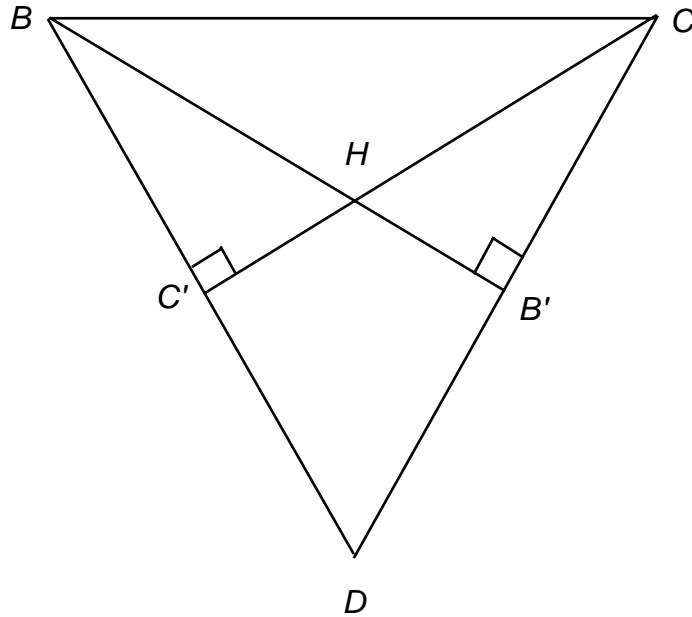
Le c^zté CD est obtenu à partir de la perpendiculaire CC' du triangle $CC'D$. On recherche CH . La Règle de Trois indique la proportionnalité suivante (en raison de la similitude des triangles $CC'D$ et $CB'H$) :

$$\frac{CH}{CB'} = \frac{CD}{CC'}$$

Elle formule également le calcul du ■fruit du désir■, CH :

$$CH = \frac{CD \times CB'}{CC'}$$

Figure 2.13: Deux triangles proportionnels



La Règle de Trois énonce une proportion explicative tout en permettant le calcul de la longueur d'un cĀtė. Le fondement et le rėsultat du calcul ont ainsi une signification gėomėtrique.

D'autre part, certaines procėdures formėes d'une multiplication suivie d'une division sont relues en tant que Rėgle de Trois. Ainsi le vers 15, tel qu'il est ėnoncė, est une multiplication suivie d'une division. Bhāskara en le relisant par une Rėgle de Trois lui donne un sens mathėmatique, en explicitant les triangles semblables sur laquelle cette rėgle repose ⁴¹.

3 *Samkramaṇa*

Une autre procėdure arithmėtique est souvent utilisėe comme outil dans des calculs gėomėtriques : le *saṃkramaṇa*, donnė dans le vers 24, indique comment trouver deux nombre dont on connaīt le produit et la diffėrence. En pratique, ce qui porte le nom *saṃkramaṇa* en dehors du vers, est la partie de cette procėdure qui, à une quantitė donnėe, ajoute ou retranche un nombre puis prend la moitiė du rėsultat.

⁴¹Nous analysons ce raisonnement dans la section 1.8.

L'opération *saṃkramaṇa* est utilisée dans les applications de la seconde moitié du vers 17⁴². Dans cet exemple, chaque pas de la procédure peut avoir une double lecture arithmétique et géométrique, car l'addition et la soustraction des longueurs correspond au fait de raccorder ou d'enlever des segments d'une même portion de droite.

Chaque étape de ce calcul n'est pas systématiquement porteur d'un sens géométrique. On pourra se reporter à titre d'exemple au calcul effectué dans le commentaire de la seconde moitié du vers 6 et exliqué dans l'Annexe de BAB.2.6.

La Règle de Trois à la fois énonce des proportions et propose le calcul de l'une des quantités, dans un ensemble de quatre quantités proportionnelles. Ainsi peut-elle s'appuyer sur des figures ayant cette qualité pour mesurer la longueur d'un cōté donné. Le *saṃkramaṇa*, tel qu'il est compris hors du vers 24, repose sur le fait qu'additionner, soustraire, élever au carré, et prendre la moitié de segments sont des opérations qui peuvent avoir un sens géométrique.

Nous allons à présent nous tourner vers les séries.

4 Séries

Nous allons examiner comment si Bhāskara, en suivant Āryabhaṭa, inclut les séries (*średhā*) en géométrie, il en donne néanmoins une interprétation arithmétique.

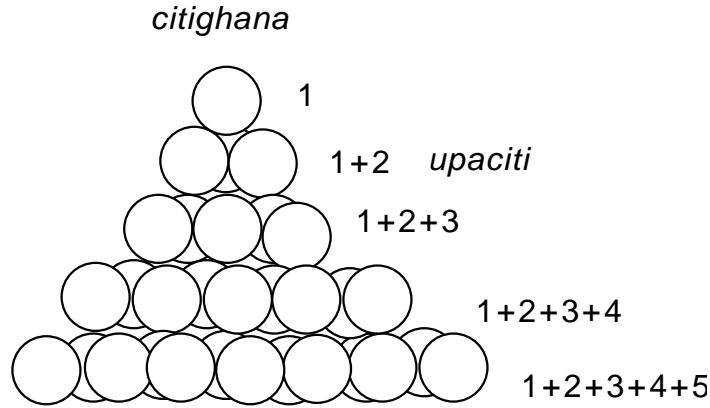
Précisons auparavant qu'une série est définie par nos deux auteurs à partir de la suite, dont chacun des termes de la série est une somme de termes consécutifs. Par exemple, si l'on considère la suite formée des entiers naturels ne comprenant pas zéro. Son premier terme est un, et sa raison est également un. La série formée de la somme progressive des entiers naturels $(1, 1 + 2, 1 + 2 + 3, \dots)$ est définie par Bhāskara comme ■la série ayant pour premier terme (*mukha*) et raison (*uttara*) un■.

En effet, le vocabulaire utilisé par Āryabhaṭa a une teneur géométrique. Les séries décrivent des empilements d'objets.

Ainsi *citi-ghana* (le solide qui est une pile) est le nom d'un empilement pyramidal, dont le sommet est constitué d'un objet, le rang suivant de trois objets, celui qui suit de six objets, etc. Cet empilement est illustré dans la Figure 2.14.

⁴²Se reporter à l'Annexe de BAB.2.17.

Figure 2.14: Empilements d'objets représentant des séries



Chacun des rangs de cette pile est appelé *upa-citi*, sous-pile. Le nombre d'objets par rang constitue le terme de la série formée de la somme progressive des entiers naturels. Le nombre d'objets dans une pile est un terme de la série des sommes progressives des termes de l'*upaciti*. Ces termes sont du type : $1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \dots$

Bhāskara souligne que ces procédures sont géométriques dans les parties ■disposition■ des listes d'exemples résolus : des diagrammes et non pas des nombres y sont placés⁴³.

De même, la série formée de sommes de carrés d'entiers naturels est appelée par Āryabhaṭa, *varga-citi-ghana* (le solide qui est une pile de carrés). Ce solide est représenté graphiquement par Bhāskara comme une pile de surfaces carrées. La série formée de sommes de cubes d'entiers naturels est appelée par Āryabhaṭa, *ghana-citi-ghana* (le solide qui est une pile de cubes). Elle est représentée graphiquement par Bhāskara comme un empilement de briques cubiques.

Toutefois, Bhāskara en substituant dans son commentaire ses propres termes à ceux d'Āryabhaṭa donne une lecture arithmétique de ces vers. Ainsi le terme *upa-citi* est glosé par le terme *saṅkalanā* (somme; p. 109, ligne 18), *citi-ghana* par *saṅkalanā-saṅkalanā* (somme de la somme; idem; lignes 21-22), le terme *varga-citi-ghana* par *varga-saṅkalana* (p. 110, ligne 18). De même, si dans les exemples, le nombre total d'objets (*dravya*) d'une pile, définie par son nombre de rangs (*stara*), est demandé, dans le commentaire

⁴³On pourra se reporter aux traductions des vers 21 et 22 qui reproduisent ces dessins.

général ce nombre s'appelle la valeur (*dhana*)⁴⁴ des termes (*pada*), où il est entendu que les termes sont ceux de la série.

Le commentateur donne donc une double lecture des vers sur les séries : l'une arithmétique, l'autre géométrique. La situation géométrique est traduite en termes arithmétiques, et la situation arithmétique est expliquée géométriquement : le va et vient est permanent, comme s'il s'agissait simplement de deux modes d'expression d'une même réalité.

Nous allons à présent nous tourner vers un objet problématique du texte de Bhāskara, le *karaṇī*. Ce dernier possède tout à la fois une dimension arithmétique et géométrique.

5 *Karaṇīs*

L'objet mathématique portant le nom *karaṇī* est présent dans toute la littérature mathématique en sanskrit⁴⁵.

Dans la littérature secondaire, ce mot est souvent traduit par le terme anglais ■surd■ qui désigne une racine irrationnelle.

Nous allons ici examiner le double aspect que revêt ce terme chez Bhāskara : si d'un côté il s'apparente à une racine carrée (plutôt qu'à un nombre irrationnel), de l'autre il est associé à une opération géométrique. Il lui arrive également d'accompagner des résultats numériques, comme une mesure. Comment comprendre ce terme de façon à rendre compte de tous ces emplois ?

5.a Les *karaṇīs* et les nombres

Le mot *karaṇī* est parfois employé pour qualifier un résultat numérique. Nous allons présenter la manière dont nous comprenons ce terme dans ce cas, puis nous argumenterons cette interprétation.

Nous pensons qu'il désigne une racine carrée. Plus précisément, lorsque le mot *karaṇī* est employé de concert avec un résultat numérique, il se comprendrait au moyen de la périphrase ■le nombre dont le carré est ■. Par

⁴⁴Notons ici que ce terme désigne également le capital accumulé, le bénéfice des marchands, que ce soit dans des problèmes explicitement marchands (Ab.2.25) ou dans les applications de la Règle de Cinq. D'autre part, le calcul du vers 22, qui donne le nombre de termes d'une série, ressemble étrangement à celui du vers 24, à teneur simplement arithmétique. Il s'agit ici peut-être de signes soulignant d'éventuels liens entre ces procédures, liens que nous n'avons pas approfondis.

⁴⁵Voir [Vol. I. p. 170; Datta-Singh 1938], [p. 96-102; Bag 1976], [Hayashi 1995], [Jain 1995].

exemple, l'expression ■dix *karaṇīs*■ (*daśa-karaṇyah*), pourrait se traduire par ■le nombre dont le carré est dix■. Elle désigne donc la valeur $\sqrt{10}$. De la même manière que lorsque nous utilisons le symbole $\sqrt{\quad}$, la valeur du nombre accompagné du mot *karaṇī* est exprimée par son carré alors que nous considérons sa racine. Le *karaṇī* ne se restreindrait donc pas aux racines irrationnelles. Il faut également soigneusement le distinguer dans ce cas du carré arithmétique.

En effet, le terme *karaṇī* est cité par Bhāskara parmi les synonymes du terme *varga* (carré) dans le commentaire de la première moitié du vers 3 (p. 47, ligne 18) :

*vargaḥ karaṇī kṛtiḥ vargaṇā yāvakaraṇam iti paryāyāḥ/
Varga, karaṇī, kṛti, vargaṇā, yāvakaraṇa* sont synonymes.

Le mot ■synonyme■ (*paryāya*), comme nous l'avons souligné dans la section 1.3, doit être entendu ici localement : le mot *karaṇī* peut, dans certains contextes, avoir ce sens mais ne se restreint pas à celui-ci.

Or il est souvent difficile de dissocier le sens de ■nombre au carré■ de celui ■d'une racine carrée■. Par exemple, dans le commentaire de la seconde moitié du vers 7, qui donne une règle pour calculer le volume d'une sphère, une aire est obtenue sous la forme d'un carré. Bhāskara écrit (p. 61; lignes 20-21) :

*tat punaḥ kṣetraphalaṃ mūlakriyamāṇaṃ karaṇitvaṃ prati-
padyate, yasmāt karaṇīnāṃ mūla[m apekṣitam]*

Toutefois, cette aire (obtenue en tant que carré) a l'état d'être un *karaṇī* lorsqu'on calcule sa racine, parce qu'une racine est [requisite] d'un carré/d'un *karaṇī*.

Tout se passe comme si dans la première partie de la phrase, ce terme désignait une racine carrée : l'aire au carré (A^2), lorsqu'on considère sa racine (on considère $\sqrt{A^2}$), deviendrait un *karaṇī*. Dans la seconde partie de la phrase en revanche il serait employé comme un simple synonyme de *varga* (carré). Ce passage préciserait que prendre la racine, c'est considérer que le nombre représente un carré.

Pourtant la seconde partie de la phrase pourrait également être lue comme une définition du terme *karaṇī* tel que nous le comprenons lorsqu'il est associé à un nombre : ce passage expliquerait alors que l'on considère la racine lorsqu'on manipule un carré sous le nom de *karaṇī*.

La relation qui lie le *karaṇī* à la racine carrée est précisée dans le même commentaire du vers 7 (p. 62, ligne 11) :

*tasya mūlam etad eva karaṇīgatam aśuddhakṛtīvāt pratipat-
tavyam/*

...précisément cette ⟨valeur⟩, qui appartient à un *karaṇī*, doit être considérée comme sa racine ⟨carrée⟩, parce qu'elle a l'état de ne pas être un carré pur.

Cette phrase semble corroborer notre manière d'interpréter le mot *karaṇī* : la valeur exprimée qui a ■l'état d'être un *karaṇī*■ est un nombre au carré. Pourtant, l'on *doit* considérer sa racine carrée. Celle-ci ne peut-être exprimée, car son ■carré est impur■.

Dans ce passage le terme *karaṇī* désigne un nombre irrationnel. L'irrationalité étant définie par l'expression ■état de ne pas être un carré pur■ (*aśuddhakṛtīva*).

Bhāskara énonce des règles opératoires sur les *karaṇīs*.

5.a.1 Le produit des *karaṇīs* Selon la seconde moitié du vers 7, le volume de la sphère est égal au produit de l'aire d'un grand cercle avec la racine-carrée de cette aire⁴⁶. En d'autres termes si A est l'aire d'un grand cercle, alors le volume serait égal à $A\sqrt{A}$. Bhāskara écrit (idem, lignes 21-22) :

*tataḥ punar api karaṇīnām akaraṇībhiḥ saṅvargo nāstīti kṣetraphalaṃ
karaṇyate /*

Toutefois, également, comme le produit d'un *karaṇī* par un non-*karaṇī* n'existe pas, l'aire du champ est transformée en un *karaṇī*/l'aire du champ est carrée (*karaṇyate*).

On pourrait retranscrire le calcul décrit dans ce passage de la manière suivante :

$$A\sqrt{A} = \sqrt{A.A^2}.$$

Mais ce calcul est exprimé par le commentateur dans toute sa généralité. Nous pourrions donc admettre que Bhāskara précise en fait :

$$a\sqrt{b} = \sqrt{b.a^2}.$$

Dans ce passage le sens du verbe *karaṇyate* pourrait sembler difficile à cerner. Il est dérivé du nom *karaṇī*. En employant le verbe ■carrer■, nous soulignons la transformation que subit le nombre. En le traduisant par

⁴⁶Cette formule est fautive, voir la traduction de ce commentaire et l'Annexe de BAB.2.7.

l'expression ■est transformée en *karaṇī*■, nous insisterions sur le fait qu'il est transformé de manière à pouvoir opérer avec un autre nombre de ce genre.

Une variation de ce calcul se trouve dans la résolution d'un exemple du commentaire de la seconde moitié du vers 6⁴⁷. On cherche à multiplier l'aire d'un triangle équilatéral par la moitié de la hauteur (appelé ■cZté érigé■) d'un tétraèdre régulier. L'aire du triangle est un *karaṇī*, c'est-à-dire qu'on exprime sa valeur comme racine d'un carré; le ■cZté érigé■ également. Bhāskara décrit le calcul suivant (p. 59, lignes 26-29) :

*kṣetraphalaṃ karaṇyaḥ 3888. etāsām kṣetraphalākaraṇīnām ūrdhvaḥkaraṇīnām
ca saṃvargārdhaṃ ghano bhavati/ ardhama ity atra karaṇitvād
dvayoḥ karaṇībhiś caturbhir bhāgo hriyate/ labdhaṃ ghanaphalaṃ
karaṇyaḥ 93312/*

L'aire du champ est 3888 [*karaṇīs*]. La moitié du produit de ces *karaṇīs* de l'aire du champ avec les *karaṇīs* du coté érigé devient le volume. (Le vers utilise l'expression) 'la moitié', mais ici parce que (le produit) a l'état d'être *karaṇī*, il est divisé par quatre, qui est le *karaṇī*/le carré de deux. Le volume est 93312 *karaṇīs*.

Ici afin de conduire le calcul correctement, l'on doit également considérer le carré de 1/2 : lui aussi doit être transformé en *karaṇī*, de la même manière qu'on ■passe un nombre sous la racine■. Le calcul peut donc se comprendre de manière générale comme :

$$\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$$

5.a.2 Sommer des *karaṇīs* Une règle est donnée dans le commentaire du vers 10. Elle fait partie du système que Bhāskara tente de réfuter⁴⁸. Sa critique ne porte pas sur les procédures elles-mêmes mais sur l'adoption de la valeur $\sqrt{10}$ en tant qu'approximation de π . Notons que ce vers est quelque peu obscur (p. 74; lignes 1-4) :

*auvatti a dassakeṇa i mūla-samāsasamothavat/
auvattāṇāyagunīyam karaṇī-samāsaṃ tu nāa(?)vvam//*
49

⁴⁷Pour plus de détail nous renvoyons à la traduction de ce commentaire de vers et à l'Annexe de BAB.2.6.

⁴⁸On se reportera, pour la réfutation à la section 1.8. Pour la teneur du calcul, on pourra lire la traduction de ce commentaire de vers et à l'Annexe de BAB.2.10.

⁴⁹Cette règle est en *prakrit*, l'éditeur en a donné une traduction en sanskrit entre crochets.

[*apavartya ca daśakena hi mūla-samāsaḥ sama-utthaṃ yat/ apavar-tanāṅka-guṇitaṃ karaṇi-samāsaṃ tu jñātavyam//*]

Lorsqu'on a réduit ⟨les deux *karaṇīs* à sommer⟩ par dix, alors, la somme des racines ⟨des résultats est prise⟩. Ce qui naît de la même ⟨somme⟩ (i.e. lorsque la somme est élevée au carré) est|

Multiplié par les chiffres du reducteur (i.e. dix), ⟨le résultat est un *karaṇī*; de cette manière⟩ la somme de ⟨deux⟩ *karaṇīs* doit être connue.||

K.S. Shukla comprend de la manière suivante cette règle :⁵⁰ :

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{10 \left(\sqrt{\frac{a}{10}} + \sqrt{\frac{b}{10}} \right)^2}$$

Ainsi, lorsque le terme *karaṇī* qualifie un nombre ou désigne son état, il semble pouvoir désigner séparément un carré, un carré dont on voudrait extraire la racine, le carré d'un nombre dont la racine est irrationnelle. Tous ces sens semblent s'unir si l'on considère que l'expression les ■*karaṇīs* de *a*■, signifie ■le nombre dont le carré est *a*■, i.e. \sqrt{a} .

5.a.3 Expressions avec *karaṇīs* Lorsque le terme *karaṇī* accompagne un calcul, il apparaît souvent dans un composé ou transformé phonétiquement.

Dans le commentaire de la deuxième partie du vers 7, le mot *karaṇika*, qui signifie ■dont le/les *karaṇīs* sont■ (une valeur donnée) est utilisé. Dans la première moitié du vers 7 se trouve le composé *karaṇī-gata* ■devient un *karaṇī*■. Finalement, dans les commentaires aux secondes moitiés des vers 6 et 7 apparaît l'expression *karaṇitva* ■qui a l'état d'être un *karaṇī*■⁵¹. Notons que le *karaṇī* n'est jamais qualifié par le terme ■quantité■ (*rāśi*). Il n'est jamais associé au mot ■nombre■ (*saṅkhyā*).

Toutes ces expressions font de *karaṇī* une qualité ou un attribut d'une quantité. Elles soulignent également une transformation : un nombre, lorsqu'il est considéré sous l'angle de sa racine carrée, *devient* un *karaṇī*.

⁵⁰[introduction p.lvi; Shukla 1976]

⁵¹Toutes ces transformations phonétiques font tomber le *i* long (*ī*) du mot *karaṇī*. Le mot *karaṇi* seul n'apparaît pas en dehors des vers en *prākṛta* cités dans le commentaire du vers 10.

Dans le commentaire du vers 10, les résultats numériques obtenus sous cette forme sont précédés de l'abréviation ■ka.■. A la manière des abréviations utilisées en arithmétique, cette notation pourrait être interprétée comme un signe opératoire indiquant que cette valeur correspond à un carré dont on voudrait la racine.

Si un nombre obtenu dans un calcul est qualifié de *karaṇī*, le terme *karaṇī* le précède toujours, au pluriel.

Dans le commentaire du vers 10, l'expression *karaṇī* est utilisée au génitif pluriel et précède l'expression numérique d'une valeur (90), signifiant ainsi ■quatre-vingt dix en *karaṇīs*■. Cette manière dont le mot est accordé avec le nombre et le précède est comparable à celle des unités qui accompagnent une valeur numérique. Par exemple, dans la seconde moitié du vers 6 le résultat obtenu est présenté de la manière suivante (p. 59; lignes 28-29) :

labdham ghanaphalam karaṇyaḥ 93312 /

Le volume obtenu est 93312 *karaṇīs*.

Des expressions similaires, utilisant des unités de mesure, se trouvent dans le commentaire des vers 26-27. Par exemple, p. 122; ligne 27, Bhāskara écrit :

labdham piṭakāḥ 14/

Le résultat est 14 *piṭakas*.

Le commentateur explique que la mesure précise des *karaṇīs* est impossible (p. 72; lignes 16-17) :

*atha manyate pratyakṣeṇaiva pramāyamāṇo rūpaviṣkamba-kṣetrasya
paridhīr daśa-karaṇya iti/ naitat, aparibhāṣitapramāṇatvāt karaṇīnām/*
<Objection>

Maintenant, certains pensent que la circonférence d'un champ ayant un diamètre-unité, lorsqu'il est mesuré par perception directe, est les *karaṇīs* de dix.

<Réponse>

Il n'en n'est pas ainsi car la taille (*pramāṇatva*) des *karaṇīs* ne peut être dite.

Donc, lorsque l'expression *karaṇī* est associée à un nombre, elle semble le qualifier à la manière d'une mesure. Toutefois sa mesure est indicible.

5.b Le *karaṇī* en tant qu'opération géométrique

Le mot *karaṇī* apparaît pour la première fois dans le commentaire de Bhāskara à travers un composé, *karaṇī-parikarman* (opération-*karaṇī*). Ce dernier désigne, selon le commentateur, une opération géométrique (p. 44; lignes 16-21) :

evaṃ karaṇīparikarma-
karṇabhujayoḥ samatvaṃ karoti yasmāt tataḥ karaṇī/
 (...) *yadetadkaraṇīparikarma tat kṣetragaṇitaiva/*

Comme dans l'opération (*parikarman*) *karaṇī* -

Un *karaṇī* est ⟨ainsi nommé⟩ parce qu'il rend l'hypoténuse égale aux c^ztés⁵²

(...) Cette opération *karaṇī* existe uniquement en géométrie.

Selon T. Hayashi, ce vers est une glose étymologique du mot *karaṇī*. Ce dernier est dérivé du verbe *kr-*, qui signifie ■faire, fabriquer■. Le mot *karaṇī* désigne donc une fabrication.

Selon cette interprétation, Bhāskara expliquerait dans ce vers que le *karaṇī* est la fabrication, i.e. la construction, du carré dont le c^zté est l'hypoténuse d'un triangle rectangle. Ce carré a une qualité particulière à cause du ■Théorème de Pythagore■. Il est tel que son aire est égale à la somme des aires des carrés ayant pour c^zté les deux autres c^ztés du triangle rectangle. Puisque ces aires correspondent chacune aux carrés arithmétiques de leurs c^ztés, ce vers rend également compte de la dimension arithmétique du Théorème de Pythagore.

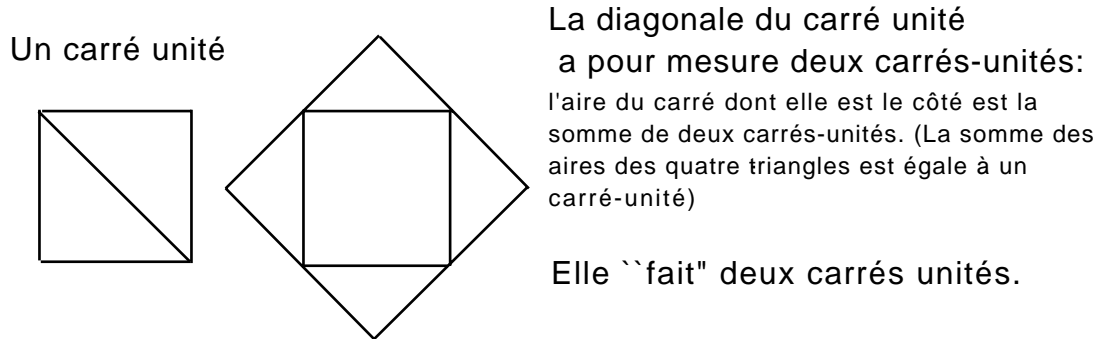
L'opération *karaṇī* désignerait donc à la fois le fait de considérer le carré d'une mesure, et de construire le carré ayant un c^zté de cette mesure.

L'interprétation du mot *karaṇī* comme ■fabrication■, renvoie à la signification de ce terme dans les *śulba-sūtras*⁵³. Dans ces textes, une corde (*rajju*) est tendue le long de la diagonale d'un rectangle. La longueur d'une telle corde est mesurée par l'aire du carré dont elle est le c^zté. Cette aire se mesure en nombre de carrés-unités. Ainsi, la corde placée le long de la diagonale d'un carré-unité, ■fait deux■ (*dvi-karaṇī*), i.e. correspond au c^ztés d'un carré ayant pour aire deux carrés-unités. Ceci est illustré dans la Figure 2.15.

⁵²Ce vers est traduit et interprété dans [I.6.2, p.62; Hayashi 1995].

⁵³[p.20; Sarasvati 1979]. Notons qu'un autre terme, synonyme de carré, *kr̥ti* a probablement la même dérivation.

Figure 2.15: La manière dont une diagonale **fait** des carrés unités dans les *śulba-sūtras*



Le terme *karaṇī* désigne le nombre de carrés unités **fabriqués** par la corde. Il désigne la mesure de cette corde, tout en interprétant géométriquement cette mesure.

En résumé, selon Bhāskara, l'opération *karaṇī* est donc le carré de la longueur; cette expression peut avoir deux sens : d'un côté il s'agit du carré arithmétique d'une longueur, de l'autre il s'agit du carré géométrique construit à partir de cette longueur.

L'opération *karaṇī* possède de cette manière une double lecture. Mais, selon Bhāskara, en ce sens, elle est fondamentalement géométrique.

5.c Unir des conceptions diverses

Le terme *karaṇī*, bien que traduit par un seul terme, a généralement été perçu dans la littérature secondaire comme prenant des sens épars. Par exemple, les significations de ce terme dans le commentaire de Bhāskara ont été énumérées de la manière suivante par T. Hayashi ([Hayashi 1995]) : il désignerait le carré d'un nombre, la racine carrée (d'un nombre quelconque ou d'un carré), un nombre, carré ou non, dont on veut la racine carrée. Toutes sont réunies si nous adoptons notre lecture des *karaṇīs* de *a* signifiant **le nombre dont le carré est a** (\sqrt{a}). L'idée de fabriquer un carré étant assigné, par cet auteur, aux *śulba-sūtras*.

Comment cette acception géométrique du terme rejoint-elle son acception arithmétique ?

Si nous examinons le contexte dans lequel les *karaṇīs* qualifient des résultats numériques, nous les voyons toujours associés à une longueur. Celle-ci

est obtenue, à partir du ■Théorème de Pythagore■, sous la forme d'un carré dont on ne peut extraire une racine entière par la règle donnée dans le vers 4. Le cas du cercle déroge à cette règle : des *karaṇīs* expriment le rapport du semi-diamètre à une circonférence. Ils désignent également la racine-carrée de l'aire du cercle.

Tout se passe comme si le mot *karaṇī*, lorsqu'il est associé à un nombre, était l'expression de la mesure d'une entité géométrique. Cette mesure serait caractérisée par le fait qu'on ne peut exprimer sa valeur qu'en désignant son carré.

Nous voyons alors comment cette acception rejoint l'opération *karaṇī* : le carré arithmétique du cĀté d'un triangle rectangle serait un cas particulier de résultat numérique qualifié de *karaṇī*. Sa racine carrée, en fait, serait considérée. Inversement, toute mesure exprimée par un *karaṇī* pourrait être représentée géométriquement comme le cĀté d'un carré ayant pour aire la valeur exprimée.

6 Conclusion

Il n'y a pas de partition radicale entre calculs arithmétiques et opérations géométriques; bien au contraire il existe de nombreux liens entre ces deux disciplines.

Ainsi les opérations arithmétiques élémentaires peuvent toutes être investies de significations géométriques par le commentateur. On peut ajouter et soustraire des segments sur une même droite. En divisant par deux on prend la moitié d'un segment. La multiplication apparaît comme un moyen de passer de la considération de deux longueurs à une aire, de la considération d'une longueur et d'une aire à un volume. Le *saṃkramaṇa* est être utilisé en géométrie au moyen de cette interprétation des opérations élémentaires. La Règle de Trois quant à elle exprime des proportions; elle sert ainsi à désigner des triangles semblables.

Le *karaṇī* serait la manière détournée d'exprimer une mesure, par son carré. Cet objet complexe soulignerait ainsi les difficultés rencontrées par Bhāskara dans l'expression de ces liens.

Ces passerelles naissent de l'opération de mesure. Cette activité n'est pas analysée ou soulignée dans le commentaire de Bhāskara. Si de temps à autre des noms dérivés du verbe *mā* (mesurer) sont utilisés, le plus souvent les mesures sont exprimées dans des composés ayant en dernier terme *saṅkhyā* (nombre, valeur) ou *pramāṇa* (évaluation, mesure ?). Ceux-ci apparaissent ainsi dans des périphrases du type ■pour le cĀté dont le nombre est ■ ou

■ pour le cŹté dans l'évaluation est ■.

En géométrie, lorsque des figures abstraites sont considérées, comme des triangles, des cercles, des trapèzes, etc., aucune unité de mesure n'est utilisée. Elles apparaissent dans des situations ■concrètes■, où des êtres vivants (fleurs, animaux, humains) se déplacent (i.e dans les exemples des commentaires de la seconde moitié du vers 17, et dans l'exemple du serpent dans le commentaire du vers 26 et de la première moitié du vers 27). Elles sont également omniprésentes dans les problèmes de gnomons.

Le cas des séries est différent : elles sont arithmétisées par le dénombrement des objets qui forment une pile.

Les procédures arithmétiques qui n'ont pas d'usage géométrique sont : les procédures du pulvérisateur, les procédures commerciales (traitées dans le vers 25, et les Règles dérivées de la Règle de Trois) et un vers arithmétique qui donne la valeur d'un produit de deux quantités connaissant la somme de leurs carrés et le carré de leur somme (il s'agit du vers 23). Remarquons que ce dernier pourrait avoir, à la manière du *saṃkramaṇa*, une application géométrique qui n'apparaît pas dans la partie du commentaire que nous avons lue. Nous reviendrons dans la conclusion de ce chapitre, sur les relations qui lient les procédures entre elles et sur les fonctions que celles-ci semblent avoir dans le traité.

Nous allons à présent examiner les indications du commentaire concernant l'application des procédures du chapitre sur les mathématiques à l'astronomie.

2.5 Mathématiques et Astronomie

Bhāskara explique au début de son commentaire que les procédures données par Āryabhaṭa dans le *gaṇita-pāda* ont pour fonction d'être appliquées à l'astronomie, plus précisément aux problèmes abordés dans les deux chapitres suivants de l'*Āryabhaṭīya*, la Mesure du Temps et la Sphère⁵⁴. Très peu de procédures du deuxième chapitre font l'objet de réflexions liées à l'astronomie. Les commentaires où ceux-ci apparaissent sont données dans le Tableau 2.5.

Nous pouvons distinguer deux cadres d'interprétations liés à l'astronomie dans le commentaire du chapitre sur les mathématiques. Il s'agit soit d'applications qui ne sont pas traitées ailleurs dans l'*Āryabhaṭīya* soit de procédures qui rencontrent les chapitres suivant du traité, la Mesure du Temps et la Sphère. Dans le premier cas ces interprétations concernent les informations déduites

⁵⁴Se reporter à la section 2.1.

Table 2.5: Les procédures liées à l’astronomie données par Bhāskara dans le *gaṇita-pāda*

Commentaire de vers	Procédures
Vers 14	Construction de gnomons, interprétations astronomiques de l’ombre à midi.
Vers 15	Etude des rapports qui lient une source de lumière, un gnomon et son ombre.
Vers 16	Etude des rapports qui lient une source de lumière, deux gnomons et leurs ombres. Discussion de l’application des procédures données dans les vers 15 et 16 à l’astronomie.
Vers 18	Intersection de deux cercles. Calcul de l’étendue d’une éclipse.
Vers 26-27ab	Application de la Règle inversée de Trois aux mouvements d’une planète.
Vers 28	Application de la règle d’inversion d’une procédure afin de déterminer l’heure en <i>ghatis</i> à partir du Rsinus de l’altitude.
Vers 31	Instant où deux planètes se rencontrent.
Vers 32-33	Applications des procédures du pulvérisateur à l’astronomie : essentiellement détermination de la longitude d’un astre à un moment donné et du nombre de jours écoulés depuis le début du <i>Kali-yuga</i> .

à partir de l'ombre d'un gnomon. Dans le second, elles concernent les planètes. Ainsi, certaines rendent compte du mouvement des planètes, d'autres des attributs temporels de leur mouvements (combien de temps s'est-il écoulé depuis le début du *yuga* lorsque telle planète possède telle longitude, à quel moment une éclipse a-t-elle eu, ou aura-t-elle lieu, etc.).

1 Gnomons

Le vers 14 introduit le calcul sur les ombres de gnomons. Bhāskara donne une extension de ce calcul, en soulignant un rapport de proportion entre deux triangles du plan du Meridien céleste, exprimé par une Règle de Trois⁵⁵ (p. 89; lignes 14-16) :

*atra ca svavṛttaviṣkambhārdhagrahaṇaṃ trairāśīkaprasiddhyartham-
yady asya svavṛttaviṣkambhārdhasya ete śaṅkucchāye tadā golaviṣkambhārdhasya
ke iti śaṅkucchāye labhyete tāv eva viṣuvati avalambakākṣajye ity
ucyete/*

Et dans ce cas, la mention du semi-diamètre de son propre cercle est ⟨faite⟩ de manière à établir une Règle de Trois-‘ Si pour le semi-diamètre de son propre cercle, le gnomon (*śaṅku*) et l'ombre (*chāyā*) ⟨sont obtenues⟩, alors pour le semi-diamètre de la Sphère ⟨céleste⟩, quelles sont les deux ⟨quantités obtenues⟩ ?’ De cette manière le Rsinus de l'altitude (*śaṅku*) et le Rsinus de la distance zénithale (*chāyā*) sont obtenus. Précisément, le jour d'un équinoxe, ces deux ⟨quantités⟩ là sont nommées le Rsinus de la colatitude (*avalambaka*) et le Rsinus de la latitude (*akṣa-jyā*).

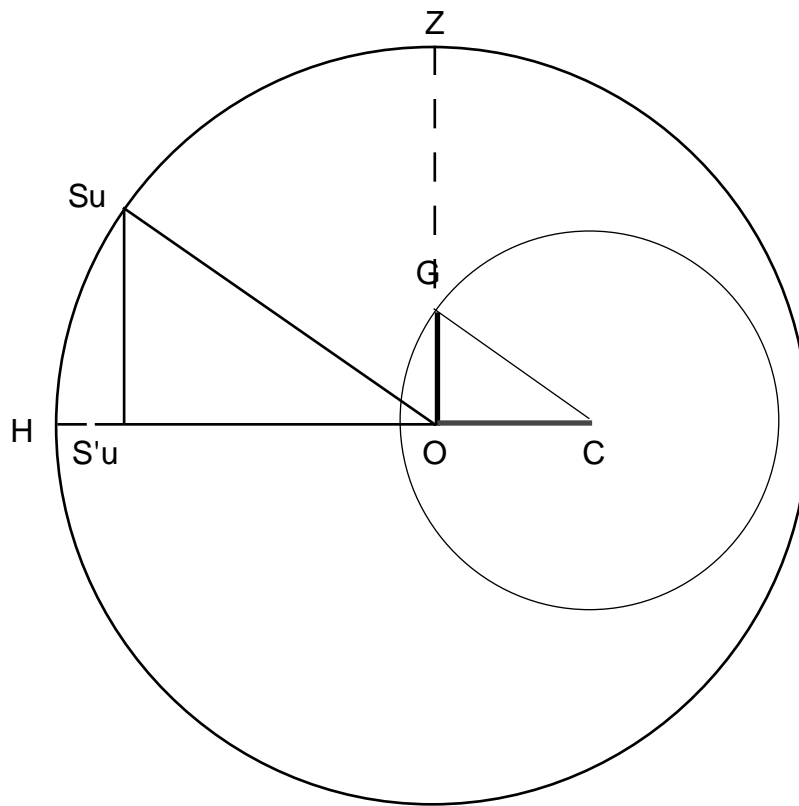
Bhāskara utilise ici une technique que nous avons déjà relevée dans le chapitre 1 : des segments proportionnels sont mis en lumière par des jeux de noms qui soulignent une propriété mathématique. Nous allons examiner précisément comment.

La situation géométrique évoquée dans ce passage est illustrée dans la Figure 2.16.

Le cercle de Rayon *OSu* représente le méridien céleste. Son rayon est donc égal au rayon de la Sphère céleste. A la mi-journée le soleil se trouve toujours sur le méridien. Le cercle de rayon *CG* représente ■son propre

⁵⁵Pour des explications, voir l'Annexe de BAB.2.14. et l'appendice consacré à l'astronomie à la fin de notre traduction.

Figure 2.16: Un gnomon et la sphère céleste



cercle■. Le gnomon est le segment GO et l'ombre projetée par le soleil à la mi-journée est le segment OC .

L'extension de la procédure donnée dans le vers 14 utilise des techniques mises en œuvre en géométrie : une Règle de Trois souligne un rapport de proportion, qu'un double jeu par les mots souligne. Le ■rayon de son propre cercle■, un cercle imaginaire, est lié à celui de la sphère céleste. Le nom de gnomon (*śaṅku*) est donné au Rsinus de l'altitude, et celui de l'ombre (*chāyā*) au Rsinus de la distance zénithale.

En observant cette figure on comprend pourquoi des cercles sont introduits dans cette configuration. En effet, ceux-ci mettent en parallèle le ■rayon de son propre cercle■ et celui de la sphère céleste; surtout ils soulignent l'existence de demi-cordes (les Rsinus) et les arcs qui leurs sont associés. En effet, l'arc SuH représente la distance du soleil à l'horizon, c'est à dire son altitude. Le segment $SuS'u$ est donc pour reprendre des expressions utilisées par Bhāskara, la demi-corde de cet arc, i.e le Rsinus de l'altitude. Il est proportionnel à la longueur du gnomon. De même l'arc SuZ représente la distance zénithale du soleil, et donc le segment $S'uO$ le Rsinus de la distance zénithale; celui-ci est proportionnel à l'ombre du gnomon à la mi-journée.

La demi-corde est le biais par lequel les coordonnées sont évaluées en astronomie.

Si la configuration du gnomon et de son ombre offre des prolongements à l'astronomie, toutes les procédures données dans ce cadre n'en ont pas. Le commentaire du vers 16, dont beaucoup de remarques sont restées obscures faute de connaître les procédures auxquelles Bhāskara fait référence, a pour objet de rejeter les interprétations de cet ordre lorsqu'elles sont attribuées aux vers 15 et 16. Par contre, il souligne les données géographiques qu'on peut en tirer⁵⁶.

Les problèmes de gnomons sont donc à la frontière entre des problèmes de géométrie (ils s'expliquent par le ■Théorème de Pythagore■ et utilisent des Rsinus) et d'astronomie.

2 Planètes

Le vers 18 tel qu'il est énoncé par Āryabhaṭa est une règle de mathématiques⁵⁷. Elle se rapporte à l'intersection de deux cercles. La largeur de cette intersection est mesurée par la longueur d'un segment appelée *grāsa*. Ce terme signifie ■une bouchée■. Il est illustré par le segment BD dans la

⁵⁶Voir la traduction de ces vers, et l'Annexe de BAB.2.16.

⁵⁷Se reporter à la traduction de ce vers, et à l'Annexe de BAB.2.18.

Figure 2.9.

L'image de ■la bouchée■ peut se comprendre en rapport avec l'image développée en astronomie pour rendre compte de l'éclipse de Lune. En effet, une éclipse est considérée traditionnellement comme étant provoquée par un démon, *Rāhu*, également appelé ■celui fait d'obscurité■ (*tamo-maya*), qui avalerait la Lune.

Ainsi, en appelant le segment ■la bouchée■, Āryabhaṭa invite peut-être à une lecture de ce vers en terme d'éclipses. Bhāskara accentue cette interprétation. Il particularise un peu plus les noms employés, en glosant le terme utilisé pour désigner les deux cercles dans le vers (*vr̥tte*), par deux termes qui les distinguent l'un de l'autre : le saisi (*grāhya*) et le saisisseur (*grāhaka*). L'unique exemple associé à ce vers achève cette particularisation, car la situation décrite y est précisément celle d'une éclipse de Lune. Dans ce cas précis aucune extension de la règle donnée dans le vers n'est mise en œuvre. Il s'agit simplement de mettre en valeur le cas particulier, lié à l'astronomie, où celle-ci peut-être appliquée.

La règle énoncée dans le vers 18 calcule les deux ■flèches (*śarau*) de la rencontre■ (BC et CD). Se superpose ainsi à la lecture astronomique de ce vers, une lecture plus trigonométrique au sens où nous l'avons défini plus haut : pour rendre compte de cette intersection, on considère les deux figures d'un arc et des flèches produites par chacun des cercles et la corde FG .

Les vers 32-33 que l'on pourrait qualifier d'arithmétiques, en ce que leurs objets sont des nombres, ont des prolongements à l'astronomie. Ceux-ci sont longuement explicités dans l'Annexe de BAB.2.32-33, à laquelle nous vous invitons à vous reporter.

3 Conclusion

Ainsi les règles de proportions, le ■Théorème de Pythagore■ et les règles portant sur la figure de l'arc et de la flèche (ainsi que les évaluations de demi-cordes qui en dérivent) ont des applications à l'astronomie. De même le pulvérisateur semble avoir été développé pour permettre la résolution des problèmes que fournit le commentaire de Bhāskara. Toutefois, si des applications à l'astronomie ont été mises en valeur par le commentateur celles-ci sont également considérées dans un cadre plus général et abstrait : la procédure du pulvérisateur est aussi un problème de ■théorie des nombre■, l'extension d'une éclipse également un problème d'intersections de cercle, etc.

Cette continuité des méthodes entre astronomie et géométrie souligne

l'uniformité de l'espace céleste tel que le considèrent ensemble Āryabhaṭa et Bhāskara. Elle explique également le sens large conféré au terme *gaṇita* : à la seule lumière des applications que nous avons observées dans le chapitre sur les mathématiques, les situations astronomiques semblent des cas particuliers de procédures ayant une portée plus générale.

2.6 Conclusions

Nous nous proposons ici de revenir sur les définitions et distinctions théoriques de *gaṇita* élaborées par Bhāskara, que nous avons exposées dans la section 2.1. Selon le commentateur, les vers du chapitre sur les mathématiques sont des règles générales qui seront spécifiées en astronomie, en particulier elles seront appliquées aux problèmes soulevés par la mesure du temps et le mouvement des planètes.

Les procédures mathématiques sont ainsi parfois lues à travers les problèmes d'astronomie qu'elles résolvent. De cette manière la demi-corde (ou sinus) que l'on trouve dans des situations géométriques variées sert à évaluer des coordonnées en astronomie. Or la géométrie, précise Bhāskara, est indistincte des mathématiques des planètes (*graha-gaṇita*). La procédure du pulvérisateur mise à part, ce sont en effet les procédures géométriques qui dans le commentaire du *gaṇita-pāda* sont appliquées à l'astronomie.

Par ailleurs le commentateur affirme que le couple formé de l'arithmétique et de la géométrie recouvre l'ensemble des mathématiques. Les liens tracés entre ces deux disciplines sont investies d'un sens spécifique lorsqu'on les ramène à l'objectif des applications en astronomie. En effet, les procédures arithmétiques sont lues géométriquement, le procédé se fait rarement dans le sens inverse.

En fait, les procédures arithmétiques qui ne font pas l'objet de lectures géométriques ou astronomiques sont celles dont la fonction dans le traité reste problématique. Deux vers en particulier peuvent sembler singuliers : il s'agit du vers 23 qui trouve deux quantités connaissant la somme et la différence de leur carrés; et du vers 25, une règle commerciale. D'autre part les vers concernant les séries (les vers 19-22, puis le vers 29) sont lues arithmétiquement par le commentateur alors qu'elles semblent avoir une teneur géométrique. Leurs éventuelles applications à l'astronomie ne sont pas explicitées.

Or ces deux ensembles de vers sont reliés par un vocabulaire technique commun, qui fait également appel à la Règle de Cinq dans sa dimension marchande. Ainsi dans l'exemple 6 du commentaire de Bhāskara au vers

26-27, qui traite de la Règle de Cinq, un exemple d'investissement par un groupe de marchands est donné. Dans ce problème, les investissements initiaux de chaque marchand s'appelle *dhana* ou *mūla-dhana*. En sanskrit courant ce terme signifie ■argent■, ■valeur■. Ce mot est également investi d'une signification technique, la ■somme d'une suite finie de termes■. Or ici l'investissement initial de chaque marchand est donné par une suite arithmétique (de raison et premier terme 1, i.e. la suite des entiers naturels). La somme des investissements de chaque marchand correspond au capital total initialement investi. La Règle de Cinq semble ainsi se rapprocher de certains calculs sur les séries. Par ailleurs, le vers 25 peut être lu comme un cas particulier de Règle de Cinq inversée.

Donc d'une part les vers sans fonction apparente du chapitre sur les mathématiques semblent reliés entre eux, quoique l'explicitation de leur rapport reste à faire. D'autre part leur usage dans l'*Āryabhaṭīya* demande à être étudié de façon plus extensive.

Un problème central de l'activité mathématique semble être liée à l'opération de mesure. Nous avons noté dans la section 1.2 l'étrangeté des situations dans lesquelles le mot *pratyakṣa* (perception directe) est associé à cet acte. De même l'expression des quantités nous laisse penser que des quantités fractionnaires apparaissent par insuffisance des unités de mesures employées.

Les liens unissant arithmétique et géométrie semblent pour l'essentiel naître au moyen de cet acte. En effet, La Règle de Trois et le *saṅkramaṇa* sont employés en géométrie parce qu'il existe des nombre associés à des segments. Le *karaṇī* serait une manière détournée d'exprimer une mesure.

De même les applications des procédures du pulvérisateur à l'astronomie sont liées à des problèmes d'unités. Elles ont toutes pour objet l'expression, par une suite d'entiers, du temps écoulé depuis le début du *Kali-yuga*. Elles peuvent également chercher à exprimer, de nouveau par une suite d'entiers, la longitude d'une planète à un instant donné en terme de degrés, minutes, etc.

Nous pouvons ainsi émettre une hypothèse quant à l'usage des séries. Les huit *vyavahāras* contiennent deux sujets aux titres évocateurs : les empilements de briques et les empilements de grains. Or les séries sont à la fois nommées par le traité au moyen du terme empilement (*citi*) et celui désignant un solide (*ghana*). Il se pourrait donc qu'elles aient pour objet l'évaluation de volumes particuliers.

En regardant de plus près l'activité arithmétique du commentaire, nous avons pu observer que si les procédures telles qu'elles sont énoncées par le traité sont abstraites et générales, concrètement leur exécution requiert une

surface de travail où certaines opérations intermédiaires sont effectuées. Les quantités y sont notées tabulairement; l'application d'un algorithme requiert des dispositions et des déplacements précis. Qu'en est-il en géométrie ? Les objets disposés sur la surface de travail sont alors des diagrammes. Nous allons à présent nous tourner vers ces derniers.

B Une partie du commentaire de Bhāskara au vers 1 du *Gītika-pāda* (en anglais)

Ab.1.1⁵⁸ Having bowed to Ka who is one and many, who is the true god, the supreme Brahman|
Āryabhaṭa tells three : Mathematics (*gaṇita*), Time-reckoning (*kāla-kriyā*), and the Sphere (*gola*) ||

⟨As for⟩‘Mathematics, Time-reckoning, and the Sphere’.

p.5.line 18

‘Mathematics’ is Fields (*kṣetra*), Shadows (*chāyā*), Series (*średhī*), Equations (*sama-karaṇa*, litt. making the same), Pulverisers (*kuttākāra*), etc.

...

p.6.line 9

In this case, this word ‘*gaṇita*’ denotes Mathematics as a whole (*aśeṣa-gaṇita*). Thus, because it has the state of denoting Mathematics as a whole – for instance, when he tells geometry (*kṣetra-gaṇita*), ⟨he⟩ also ⟨tells⟩ planetary Mathematics (*graha-gaṇita*) because planetary Mathematics has the state of not being distinguished from geometry, etc.– and because Time-reckoning and the Sphere have the state of not being distinguished from Mathematics, ⟨therefore⟩ Mathematics is told ⟨throughout the treatise⟩. It is so to this extent : once ⟨this understanding of *gaṇita*⟩ is established (*śiddha*), when the teacher is mentioning Time-reckoning and the Sphere he is making ⟨the following⟩ known– ‘I will say ‘Fields, Shadows, Series, Equations, Pulverisers, etc.’ which is some ⟨part of⟩ general Mathematics (*sāmānya-gaṇita*). However the aim ⟨of that chapter on Mathematics ? of the treatise ?⟩ is specific Mathematics (*viśeṣa-gaṇita*), with Time-reckoning and the Sphere.’ Otherwise, because Time-reckoning and the Sphere have been established with just that word ‘*gaṇita*’ which denotes Mathematics as a whole, a separate mentioning would not be necessary. And then, in the chapter on Mathematics only a mere hint of the subject of Mathematics is told by the teacher; in the ⟨chapters on⟩ Time-reckoning and the Sphere, the [subjects] of Time-reckoning and the Sphere ⟨are told⟩ with a specification (*viśeṣaṇa*) ⟨of the subject of Mathematics⟩. Necessarily, this meaning should be agreed upon ⟨for the word *gaṇita*⟩– some Mathematics (*kiñcid gaṇita*).

15

From a different perspective (*anyathā*), however, the subject (*vastu*) of

⁵⁸[p.5; 6-7; Shukla 1976]

Mathematics is vast; there are eight *vyavahāras* called Mixtures (*miśraka*), Series (*średhī*), Fields (*kṣetra*), Excavations (*khāta*), Piling with bricks (*citi*), Sawing (*krākacika*), Piling with grains (*rāśi*), Shadows (*chāyā*).

Mixtures is the bringing into contact and mingling of all the objects (*vastu*) of Mathematics. Series is piling with a first term (*ādī*) and a common difference (*uttara*). Fields is the computing of the areas of fields with many edges (*aneka-aśri-kṣetra*). Excavations (*khāta*) is indicating the amount of what one has excavated (*khanya*). Piling with bricks (*citi*) is making known the size of objects piled (*nicita*) above using the size of bricks. Sawing (*krākacika*) : *krakaca* (a saw) is the name of what cuts wood, *krākacika* is (derived from *krakaca*, and explained as) objects related to that saw, the size of those objects is taught. Piling with grains is producing the size of those objects which are piled objects having the form of *dhānyas* (rice, grain, corn..), etc. Shadows tell time using the size of the shadow of a gnomon (*śaṅku*), etc.

The eight names of the *vyavahāra* Mathematics have four seeds, the first, the second, the third and the fourth which are respectively *yāvattāvat* (lit. ■as much as■ a name for simple equations), *vargāvarga* (lit. ■square and non-square■, a name for quadratic equations), *ghanāghana* (lit. ■cube and non-cube■ a name for cubic equations), *viśama* (lit. ■different■, a name for equations with several unknowns). For each one of these, a book with characterisations and examples (*lakṣaṇa-lakṣya*)⁵⁹ has been composed⁶⁰ by the teachers Maskari, Pūraṇa, Mudgala, and others.

How can that (i.e. Mathematics as a whole) be told by this teacher (Āryabhaṭa) with this small book ?

This has been well told by us : some Mathematics and (its) specificities concerning Time and the Sphere.

⁵⁹For the understanding of *lakṣaṇa*, please see 1.2. As for *lakṣya* it means, litt. ■ what has been characterised■; it is difficult to understand. It is not known to mean ■example■, but it is the only meaning that seems to make sense here. In BAB.2.2. (p. 47, lines 3-4), the couple *lakṣaṇa-udāhṛta* is used with the meaning ■characterisation-illustrated”.

⁶⁰The expression used here is the following (underlined by us) :

etad ekaikasya granthalakṣaṇalakṣyaṃ
maskaripūraṇamudgalaprabhṛtibhir ācāryair nibaddhaṃ kṛtaṃ

The use of both *kṛtaṃ* and *nibaddhaṃ* is either redundant (■made and composed”) or, as Shukla has interpreted it ([intro,p.liv; Shukla 1976]), may mean ■compiled■.

Chapter 3

Diagrammes

Tout au long de cette analyse, l'expression ■figure géométrique■ désignera l'idée abstraite d'objets géométriques tels que des carrés, des pyramides etc., et le terme ■diagramme■ nommera un dessin, quel qu'il soit, présent dans le texte.

3.1 Introduction : Pourquoi parler des diagrammes ?

Dans la mesure où un diagramme n'est pas uniquement un ensemble de mots, a un statut particulier dans un texte discursif. En Inde, la tradition savante serait orale¹. Une part de cette tradition nous échapperait donc lorsque nous examinons un texte écrit. Le diagramme, parce qu'il est souvent explicitement le sujet d'une explication orale dont il est en quelque sorte la trace dans un texte écrit, pourrait être une fenêtre sur ce savoir transmis oralement.

C'est de plus un objet géométrique. Par son statut particulier, il pourrait être un outil pour essayer de cerner ■des pratiques mathématiques■ du commentaire qui ne font l'objet d'aucun discours.

Comme nous l'avons précisé dans notre Introduction, il existe très peu de manuscrits du commentaire de Bhāskara. Nous n'avons pas pu les consulter tous. De plus, la plupart sont en sanskrit mais retranscrits avec un autre script². Notons toutefois que le nombre de diagrammes qu'ils contiennent

¹Voir section 1.1 du chapitre 1.

²Le sanskrit est habituellement noté en utilisant des caractères appelés *devanāgarī* qui servent également aujourd'hui à transcrire le hindi. Mais d'autres caractères sont utilisés

est variable.

En janvier 1998, j'ai obtenu une copie photographique du manuscrit D de l'édition de Shukla. Il tombe en morceaux. Le script qu'il utilise est le malayalam. Le scribe (monsieur P. L. Shaji³) de la bibliothèque orientale de l'Université du Kerala, sur les critères des types de feuilles de palmiers utilisés, de style d'écriture et de l'état de préservation, a estimé que le manuscrit avait été copié il y a 500-600 ans. De tous les manuscrits, c'est celui qui contenait le plus grand nombre de diagrammes encore visibles⁴

Il serait nécessaire de recenser systématiquement tous les diagrammes présents dans chaque manuscrit, afin d'évaluer de manière plus rigoureuse quels sont ceux qui y sont systématiquement dessinés et ceux qui ne le sont pas. Une étude plus précise de chaque manuscrit, en particulier de leur datation, pourrait déboucher sur une étude historique de la présence des diagrammes dans les manuscrits, qui serait riche d'enseignements.

Dans la suite, nous nous appuyerons sur les diagrammes présentés dans l'édition du texte en prenant comme contrepoint certaines des photos du manuscrit D. Ces photos nous permettent de garder à l'esprit que nous ne savons pas si ce que nous analysons en tant qu'élément du diagramme n'est qu'une innovation éditoriale. Lorsqu'il n'y a pas de photo de manuscrit accompagnant un diagramme de l'édition, c'est simplement parce que à ce point là, le manuscrit est cassé, comme dans la Figure 3.1.

dans les manuscrits, tels le malayalam, le grantha...Je ne les lis malheureusement pas.

³Qu'il soit remercié ici de la bienveillance qu'il m'a témoigné et des informations qu'il m'a transmis.

⁴Le manuscrit supplémentaire repertorié par D. Pingree est si noir qu'il est à présent difficile de distinguer ce qui y a été tracé. Il contenait un grand nombre de diagrammes.

Figure 3.1: Feuilles de manuscrit émettées

Kerala Co 1712 Folio 45b/46a

3.2 Présentation des diagrammes du texte

Nous allons à présent étudier la manière dont les diagrammes sont distribués dans le texte.

1 Diversité

En feuilletant le commentaire nous pouvons distinguer divers types de diagrammes. Il y a ceux qui représentent des figures géométriques simples. Ils sont accompagnés de nombres donnant la longueur des segments. C'est le cas des Figures 3.2 et 1.2.

D'autres, plus complexes, ont des tracés internes. Ils ne comportent aucune valeur dans le manuscrit (Figures 3.4 et 3.5).

Il y a des diagrammes auxquels l'édition associe des lettres, ce qui n'est pas le cas dans le manuscrit (Figures 3.6, 3.4 et 3.7).

Certains représentent des objets tri-dimensionnelles (Figure 3.8).

D'autres, représentent des situations concrètes (voir les Figures 3.9, 3.7).

Figure 3.2: Diagrammes de la première moitié du vers 6 (aire du triangle)

Kerala Co 1712 Folio 36 recto

Figure 3.3: Diagrammes du 8 (aire et segments d'un trapèze)

Figure 3.4: Diagramme du vers 11 (dérivation de demi-cordes)

Figure 3.5: Diagramme de la première moitié du vers 3 (aire d'un carré)

Kerala Co 1712 Folio 38 recto

Figure 3.6: Diagramme du vers 10 : un cercle, ses champs d'arcs et son rectangle interne

Kerala Co 1712 Folios 44/45b

Figure 3.7: Diagrammes de la seconde moitié du vers 17 : Problèmes de Lotus immergés et de Grues et de Poissons

Figure 3.8: Diagrammes du vers 22 : empilements de carrés et de cubes

Figure 3.9: Diagrammes du vers 16 (deux gnomons, leurs ombres et une source de lumière)

Kerala Co 1712 Folios 56 recto

2 Insertion des diagrammes dans le texte

Tous les diagrammes appartiennent au commentaire, et non au traité. En tout, l'édition du texte contient 58 diagrammes; le manuscrit en a 48 mais de nombreux folios sont brisés et incomplets. Tous les diagrammes se trouvent dans le chapitre sur les mathématiques : ni l'édition ni les manuscrits que j'ai consultés n'en ont dans d'autres chapitres. Donc, dans le cadre de ce texte, les diagrammes sont un objet mathématique⁵. Tous les diagrammes appartiennent à des commentaires de vers portant sur la géométrie, au sens où cette discipline est comprise par Bhāskara⁶.

78% des diagrammes de l'édition sont dans la partie ■disposition■ des exemples; 7% appartiennent à la partie ■résolution■ des exemples, et 16% se trouvent dans le ■commentaire général■.

Notons certains aspects formels mais frappants de ces diagrammes dans leur ensemble.

Ils ne possèdent pas de lettres désignant leur sommets. Ensuite certains portent des nombres, d'autres pas. Dans le manuscrit, les diagrammes des exemples résolus sont accompagnés de chiffres; ceux de la partie du commentaire général n'en ont pas, à deux exceptions près que nous examinerons plus tard. Nous reviendrons à cette distribution des diagrammes dans le texte lorsque nous examinerons les fonctions du diagramme en géométrie. Enfin, les diagrammes du manuscrit sont dessinés schématiquement, sans le souci d'être exacts.

Ayant observé comment les diagrammes étaient distribués dans le texte, nous allons à présent examiner ce qui nous en est dit.

3.3 Les diagrammes en mots

1 Vocabulaire

Le terme sanskrit du commentaire traduit par ■diagramme■ est *chedyaka*. Il signifie étymologiquement ■ce qui doit/peut être découpé■. Il est employé dans le commentaire de la première moitié du vers 11 pour désigner un dessin particulier (voir Figure 3.4). Il est utilisé par le même auteur dans l'un de

⁵Le *Mahābhāskarīya*, un traité d'astronomie rédigé par notre commentateur, fait référence à des diagrammes représentant des éclipses. Les diagrammes étaient certainement d'usage courant en astronomie. Nous sommes donc en présence d'un trait particulier de ce commentaire.

⁶Se reporter à la section 2.1. Ceci inclut les problèmes de gnomons.

ses deux traités d’astronomie (Mbh.5.60). Nous pouvons donc considérer qu’il ne désigne pas cette figure spécifique mais les diagrammes en général.

Un autre terme est utilisé une seule fois : *ālekhyā*. Il signifie ■ce qui doit-être tra■é/dessiné■ et partant ■un dessin■.

De manière générale, un diagramme est désigné par le biais d’une périphrase ■un champ (*kṣetra*) dessiné■ où le verbe employé pour ■dessiner■ (*likh-*) est le même que celui pour ■écrire■. Le sens original du verbe est ■creuser, gratter■- une référence peut-être au mode d’écriture sur des feuilles de palmier.

Rappelons que les figures géométriques sont définies, à la fois par leur forme générale, et par le nom des segments qui les délimitent⁷. Ces noms de cĀtés définissent, en quelque sorte, des rapports spatiaux entre eux. Ainsi, les cĀtés parallèles du trapèze s’appellent le visage (*mukha*) et la terre (*bhū*), tandis que les autres sont des flancs (*pārśva*) ou des oreilles (*karṇa*). De la même manière imagée, la figure du ■champ d’arc et de flèche■ (*dhanuskṣetra*), avec sa flèche (*śara*) et sa corde (*jyā*), semble être à la fois définie et décrite par les termes renvoyant aux segments qui la forment. Le triangle rectangle est nommé par la suite des noms de ses cĀtés. De même, dans la section 2.3 nous avons souligné comment les procédures portant sur les volumes des solides semblent être lues par le commentateur comme des descriptions de ces figures.

On pourrait ainsi se demander si une figure géométrique est définie en prenant pour support un diagramme ou si les mots représentent en quelque sorte un diagramme virtuel. Il nous semble que la forme d’une figure est imaginable par la manière dont ses éléments sont nommées, ou plutôt que lorsqu’une figure est connue, on ”voit” la manière dont les noms de segments s’y placent .

2 Orientation

Certains diagrammes sont orientés dans l’édition. Ce sont ceux qui portent des lettres, tels ceux reproduits dans les Figures 3.6, 3.4 et 2.8. Dans ces cas le texte les décrit au moyen des points cardinaux.

En sanskrit, l’est (*pūrva*) signifie ■devant■, l’ouest, ■derrière■ (*paścāt, apara*), le nord, ■la gauche■ (*uttara*), le sud ■la droite■ (*dakṣiṇa*). Dans le diagramme tiré de la seconde moitié du vers 17 (Figure 2.8) l’ordre traditionnel des points cardinaux est bouleversé : l’est est représenté à droite, le nord au sommet, etc. Il se peut qu’il s’agisse là d’un artefact dû à l’édition.

⁷Se reporter à la section 2.3.

Le terme ■terre■ (*bhū*, *dhātrī*, etc.) désigne la base d'un triangle ou d'un trapèze. Il désigne toujours un cĀté qui sera horizontal et le plus bas dans une figure donnée. Il suggère de cette manière une orientation du diagramme.

Inversement, la première moitié du vers 9 étudie l'aire d'un quadrilatère, qui ressemble à un trapèze couché⁸. Les deux cĀtés parallèles s'appellent alors la bouche (*mukha*) et la para-bouche (*para-mukha*) et non plus la bouche et la terre comme dans le trapèze habituel. Dans les vers 15 et 16, la source de lumière en hauteur est la base (*bhujā*) d'un triangle rectangle. Mais les segments du cĀté érigé sont décrits avec le terme ■terre■. Par exemple, dans le dessin de le tableau 1.5, le segment *BE* est la ■terre■.

Par conséquent, dans une certaine mesure, les noms donnés à leur segments et l'utilisation de points cardinaux peuvent conférer aux diagrammes une orientation. Mais cela signifie également que les deux diagrammes de la Figure 3.10⁹ représentent la même figure.

Remarquons que ce texte s'intéresse uniquement aux mesures d'aires et de longueurs. Une inversion de diagrammes par une symétrie axiale, les laisse inchangés.

⁸Nous renvoyons à notre traduction de ce commentaire de vers qui reproduit le diagramme de l'édition.

⁹Malheureusement, nous ne disposons pas du diagramme du manuscrit là où l'aire de ce triangle est ■vériée■ dans le commentaire du vers 9.

Figure 3.10: Deux triangles représentant une même figure

3 Outils pour la construction

Le commentaire contient des constructions de certains diagrammes. Afin d'en rendre compte, nous allons commencer par examiner les instruments explicitement mentionnés pour les dessiner. Puis nous nous tournerons brièvement vers les techniques de constructions décrites. Enfin, nous analyserons le cas de deux diagrammes particuliers dont la construction est décrite dans le texte.

Le vers 13 du chapitre consacré aux mathématiques donne brièvement des outils et des techniques de construction de diagrammes et d'objets tridimensionnels (p. 85; lignes 15-16) :

*vṛttaṃ bhramaṇa sādhyam tribhujam ca caturbhujam ca karṇābhyām|
sādhyā jalena samabhūr adha ūrdhvam lambakena eva ||*

Ab.2.13. Un cercle est produit au moyen d'un compas, et un trilatère et quadrilatère au moyen de diagonales|

Un sol uniforme est produit au moyen d'eau et ⟨la direction⟩ du bas vers le haut (i.e. la verticalité) au moyen uniquement d'un fil à plomb.||

Bhāskara commente le terme *bhrama*, utilisé pour désigner le compas, de la manière suivante (lignes 5-6) :

*bhramaśabdena karkaṭakas pariḡṛhyate/ tena karkaṭakena samavṛttaṃ
kṣetraṃ parilekhāpramāṇena parimūyate/*

Avec le mot *bhrama* un compas (*karkaṭaka*) est entendu. Au moyen de ce compas un champ circulaire uniforme est mesuré par la taille de sa ligne périphérique (*pari-lekhā*, i.e. sa circonférence).

Le terme employé par Āryabhaṭa pour le compas, *bhrama*, est dérivé du verbe *bhram*, rouler. Le mot employé par Bhāskara, *karkaṭa* ou *karkaṭaka* signifie littéralement ■crabe■. Dans ce passage, Bhāskara n'ajoute rien au sujet de cet instrument. Ailleurs, il est légèrement plus prolix.

Ainsi dans le commentaire de la seconde moitié du vers 9, il écrit (p. 71; lignes 10-11) :

*asmiṃś ca viracitamukhadeśasitavartyaṅkurakarkaṭaṇālikhite
chedyake...*

Et dans ce diagramme, dessiné au moyen d'un compas ayant un bâton pointu (*varty-aṅkura*) et sécurisé (*sita*) attaché à son point bouche (*mukha-deśa*)...

Le vocabulaire employé se prête à plusieurs interprétations. Le terme *vartī* pourrait désigner un pinceau, et le terme *sita* la couleur blanche. Une autre lecture de ce passage serait alors :

*asmiṃś ca viracitamukhadeśasitavartyaṅkurakarkaṭaṇālikhite
chedyake...*

Et dans ce diagramme, dessiné au moyen d'un compas ayant un pinceau effilé (*varty-aṅkura*) ⟨avec de la couleur⟩ blanche (*sita*) attaché à son point bouche (*mukha-deśa*)...

Ou encore :

*asmiṃś ca viracitamukhadeśasitavartyaṅkurakarkaṭaṇālikhite
chedyake...*

Et dans ce diagramme, dessiné au moyen d'un compas ayant une craie pointue (*varty-anikura*) et blanche (*sita*) attachée à son point bouche (*mukha-deśa*) ...

De même, dans le commentaire du vers 11, Bhāskara écrit (p. 78, ligne 21) :

yāvattāvatpramāṇaparicchinnaviṣkambhārdhatulyena karkaṭakena maṇḍalam ālikhya tad dvādaśadhā vibhajet

Ayant dessiné au moyen d'un compas (dont l'ouverture est égale) au semi-diamètre déterminé par une mesure aussi grande (que désirée), l'on doit diviser ce (cercle) en douze parties.

Puis (p. 79; ligne 4) :

tathā ca paridhiniṣpannam kṣetraṃ karkaṭakena viracitavartikāmukhena likhyate

Alors un champ produit par une circonférence est dessiné au moyen d'un compas ayant un bâton attaché à sa bouche (i.e. ouverture).

Le point-bouche (*mukha-deśa*) représenterait l'ouverture du compas.

L'interprétation que nous avons adoptée repose sur la description faite par Parameśvara (XIV^{ème} siècle) du même instrument. Cette description est traduite à la fin de ce chapitre. Elle est accompagnée d'une illustration du compas ainsi décrit (voir les Appendices et la Figure 12).

Dans son commentaire du vers 13, Bhāskara décrit des constructions de quadrilatères et de trilatères au moyens de fils (*sūtra*). En ce qui concerne ces méthodes, nous renvoyons à la traduction de ce commentaire de vers. Notons que l'usage de fils ou de cordes pour construire des figures est l'une des caractéristiques des *śulba-sūtras*¹⁰. Dans quelle mesure la construction décrite par Bhāskara se situe-t-elle dans la continuité de cette tradition ?

Si des techniques sont décrites pour construire des figures planes d'autres font allusion à des objets tridimensionnels. Verticalité et horizontalité sont ainsi extrêmement importantes pour les gnomons, dont différents types sont décrits dans le commentaire du vers 14¹¹. Les solides sont représentés dans

¹⁰Que ces constructions aient elles-mêmes été effectivement mises en œuvre est sujet à débat, puisque certaines procédures recommandent de plier des cordes en 32 parties égales, etc..

¹¹Se reporter à notre traduction de ce commentaire de vers et à la brève discussion de l'annexe de BAB.2.14.

les diagrammes par des figures planes. Mais, Bhāskara décrivant un cube, ajoute (p. 51; ligne 5) :

aśrayo yasya mṛdānyena vā pradarsāyitavyāḥ/

ou son bord doit être montré/expliqué au moyen de terre ou de quelque chose d'autre.

De même concernant la hauteur d'un tétraèdre régulier, il écrit dans la seconde moitié du vers 6 (p. 59; lignes 25-26) :

tatra ūrdhvabhujā sūtrakaiḥ śalākādibhir vā pradarsāyitavyā/

Dans ce cas, l'on doit expliquer le ■cĶté érigé■ avec des fils, des bâtons, etc.

Aucune trace archéologique d'instruments¹² de cette époque n'est à ma connaissance connue.

La construction de deux diagrammes particuliers est décrite dans le commentaire de Bhāskara.

La première construction appartient au commentaire de la première partie du vers 3. Le diagramme est reproduit dans la Figure 3.5. La seule technique de construction à laquelle Bhāskara renvoie dans ce passage est le ■découpage en huit■ du carré initial¹³. Comme indiqué dans une note de l'Annexe de BAB.2.3, ce découpage pourrait renvoyer au nombre de segments internes du grand carré. Il pourrait également désigner la dimension de ces cĶtés, comme le pense probablement l'éditeur qui a représenté ce diagramme en y associant le chiffre 8.

La seconde construction de diagramme précisément décrite appartient au commentaire du vers 11 (Figure 3.4). Les remarques de construction technique y sont également succinctes. Elles sont réduites aux deux citations sur le compas provenant de ce commentaire que nous avons données plus haut. Ainsi nous ne savons pas quelle technique est employée pour subdiviser la circonférence en douze parties égales.

De manière générale, les méthodes de construction au moyen de fils du vers 13 ne transparaissent pas dans ces descriptions. Il est par conséquent difficile de savoir si elles étaient effectivement mises en œuvre.

L'expertise nécessaire à la construction de figures est parfois soulignée. Ainsi dans le commentaire du vers 8 il est écrit (p. 63; ligne 17) :

¹²Notons aussi à plusieurs reprises, en évoquant une propriété supposée des cordes d'un petit arc, une référence à une boule de fer pour désigner une sphère. . . .

¹³Voir la traduction de ce commentaire de vers.

*samyagādiṣṭena ālikhite kṣetre svapāta-lekhāpramāṇaṃ trairāśīkagaṇitena
pratipādayitavyam/*

La taille des ■lignes sur leur propre tombées■ (*sva-pāta-lekhā*¹⁴) doit être expliquée au moyen du calcul d'une Règle de Trois, dans un champ dessiné par une personne proprement instruite.

Mais à la fin de la description du diagramme de la seconde moitié du vers 3, Bhāskara écrit (p. 48; ligne 16) :

durvidagdhapratyāyanāya ca kṣetram ālikhyate

Et afin de persuader ceux qui sont lents d'esprits, un champ est dessiné

Le plus souvent les diagrammes sont dessinés sans que leur construction ne soit explicitée. Un seul diagramme est mentionné sans être dessiné (dans le commentaire de la seconde moitié du vers 9, p. 71; lignes 10-15).

Nous sommes donc confrontés à des éléments souvent contradictoires du commentaire et des manuscrits en ce qui concerne la manière concrète dont les diagrammes étaient dessinés. Nous nous contenterons de récapituler, en distinguant quatre aspects :

(1) le manuscrit représente les diagrammes de manière schématique (il s'agit peut-être la d'un écart entre la pratique en cours à l'époque du manuscrit et celle de l'époque de Bhāskara);

(2) le texte consacre une courte partie à la constructions de quadrilatères et de trilatères mais ces techniques n'apparaissent pas dans les descriptions de la construction de deux diagrammes particuliers, les seules détaillées par le commentaire;

(3) le statut du diagramme comme objet d'expertise est ambigu;

(4) la construction de la plupart des diagrammes du texte n'est pas décrite.

Nous allons à présent examiner les fonctions des diagrammes en géométrie.

3.4 Fonction des diagrammes

La plupart des diagrammes se trouvent dans la partie disposition des ■exemples■. Leur usage n'y est, par conséquent, pas explicité. Ce sont des objet acquis de l'activité mathématique.

¹⁴Pour une explication de ce terme, se reporter à la section 2.3 et au Glossaire.

Nous allons à présent montrer comment deux fonctions peuvent être attribuées aux diagrammes du commentaire. L'une consiste à représenter une figure géométrique. Un diagramme est alors le lieu où l'on peut voir et comprendre une procédure. L'autre est d'être le support d'un travail mathématique. Le diagramme est alors un lieu où l'on applique une procédure ou celui où elle est expliquée.

C'est par une analyse des raisonnements où les diagrammes s'insèrent, que nous allons essayer de les ■faire parler■.

1 Explicitation d'une définition

Nous avons remarqué qu'il y avait des dessins de triangles, de trapèzes, etc. : est-ce que certains diagrammes sont des représentations de figures géométriques ? Comment les diagrammes s'articulent-ils aux définitions de ces figures ?

Pour tenter de répondre à ces questions nous allons brièvement rappeler comment les définitions sont élaborées par le commentaire.

Les définitions appartiennent au ■commentaire général■. Les figures géométriques s'y définissent par rapport au nom qui est employé dans le traité pour les désigner¹⁵. Une définition s'élabore ainsi autour de la question de savoir si le ■bon mot■ est employé à leur propos. Souvent tous les objets qu'un tel mot peut nommer sont dissociés les uns des autres.

Le carré (BAB.2.3.ab) est la seule figure où la définition s'élabore accompagnée de diagrammes. Ceux-ci sont des contre-exemples. En effet, afin de souligner qu'il ne suffit pas pour le définir, de dire d'un carré qu'il a quatre c^htés égaux, Bhāskara exhibe des ■équi-quadrilatères■ qui ne sont pas des carrés. Ces diagrammes sont reproduits dans la Figure 3.11.

Il s'agit des deux seuls diagrammes qui, dans la partie générale du commentaire, présentent des nombres. Ces derniers font immédiatement voir qu'il s'agit de figures ayant quatre c^htés égaux.

Dans la première moitié du vers 6, le terme *sama-dala-koṭī* signifie littéralement ■médiatrice■. Pour Bhāskara ce mot renvoie à toute hauteur, quel que soit le triangle considéré. Le commentaire s'écarte ainsi de la représentation que le nom peut donner du segment qu'il désigne. Les parties ■disposition■ du manuscrit contiennent successivement des diagrammes de triangles équilatéraux, isocèles et quelconques avec leurs hauteurs. Ceux-ci montrent à chaque fois le segment qu'un tel mot nomme.

¹⁵Pour plus de précisions se reporter à la section 1.7.

Figure 3.11: Deux ■équi-quadrilatères■ qui ne sont pas des carrés

Un diagramme aurait bien pour fonction, en partie, de représenter une figure géométrique connue de manière abstraite. La définition de cette dernière se construirait aussi en prenant appui sur un diagramme qui préciserait (et infirmerait quelquefois) les représentations que les mots peuvent suggérer.

2 Illustration

La majorité des diagrammes appartiennent à la partie **■disposition■** des exemples résolus. Ils sont toujours porteurs de nombres indiquant la longueur des segments. Comme nous l'avons analysé dans la section 1.6, les exemples sont ce lieu où ce qui est énoncé de manière abstraite et générale dans le vers et dans le **■commentaire général■** prend un sens plus spécifique. Ainsi, dans un premier temps, les diagrammes de la partie **■disposition■** peuvent confirmer la représentation que l'on se fait d'une figure et des différents côtés qui la forment. Mais elle est aussi le lieu où les données d'un problème sont disposées de manière à être employées. On peut y voir ce qui sera calculé.

Regardons la figure 3.2. Celle-ci représente la partie disposition d'un problème qui cherche à calculer l'aire de trois triangles connaissant la longueur de leurs côtés. Ce qui est connu est représenté par des nombres. Le calcul de l'aire d'un triangle utilise la longueur de la hauteur. Les manuscrits la dessinent. La disposition du trilatère **■représente■** ce que l'on cherche et ce que l'on possède simultanément. Elle résume le problème et on peut s'y référer à chaque étape du raisonnement. C'est une illustration du problème et de la résolution qui sera mise en œuvre.

De la même manière, les parties **■disposition■** des exemples du commentaire du vers 15 (reproduits dans la Figure 3.9) illustrent tous les cas où une source de lumière en hauteur illumine un gnomon qui projette une ombre. L'observation de tous les diagrammes suffit à indiquer les différents cas de figures que les exemples envisagent. Nous les avons résumés, ailleurs, dans le tableau 1.5.

Le terme d'illustration est ambigu. Le diagramme ainsi qualifié serait un lieu secondaire du raisonnement pourtant il est également l'endroit où tout peut être vu et donc compris.

Dans certains cas, les diagrammes de la partie **■disposition■** tout en illustrant un problème semblent simultanément en fournir une explication. Ainsi, les dispositions des problèmes du vers 22 (voir la figure 3.8) nous expliquent l'aspect géométrique conféré à une somme de carrés et de cubes.

En analysant les vérifications des aires des figures effectuées dans le vers

9, nous avons souligné que chaque étape était ponctuée par un diagramme¹⁶. Replongeons l'un de ces diagrammes dans son contexte. Le triangle dont il s'agit de vérifier l'aire est quelconque. Ces cĀtés sont respectivement, 13, 15, 14. Il s'agit du triangle illustré dans la Figure 3.10. Bhāskara, donne deux moyens de vérifier l'aire de cette figure. En ce qui concerne la seconde il écrit : (p. 69; lignes 3-7) :

athavā āyatacaturaśra-kṣetrāyor ardhakṣetrāphalasaṃyogo 'sya phalam/ taylor dvayoḥ pañcavistārasya dvādaśāyāmasyaikasya, dvitīyasyāpi navavistārasya dvādaśāyāmasyārdhakṣetrāphalasaṃyogo 'sya phalam/ taylor dvayoḥ pañcavistārasya dvādaśāyāmasyaikasya dvitīyasyāpi navavistārasya dvādaśāyāmasya nyāsaḥ-

Ou alors, la somme de la moitié des aires de deux champs rectangulaires est son aire. Pour ces deux ⟨rectangles⟩ celui dont la largeur est cinq et la longueur douze, et pour le second également, dont la largeur est neuf et la longueur douze, la somme de la moitié des aires est l'aire de ce ⟨trilatère⟩. Disposition de ces deux champs, du premier dont la largeur est cinq et la longueur douze, et également du second dont la largeur est neuf et la longueur douze-

La disposition ici donne à voir- elle explique donc- la procédure qui sera mise en œuvre. Ce diagramme résume un problème : il donne les dimensions des cĀtés que l'on connaît. Il montre les rectangles dont on calculera l'aire.

¹⁶Voir la section1.8.

Mais il indique également comment la moitié de l'aire de chacun de ces deux rectangles se superposent dans l'aire du triangle¹⁷.

Un diagramme dans la partie ■disposition■, s'il a en partie pour fonction de représenter la figure géométrique et le problème qu'il s'agit de résoudre, peut également être le lieu d'une compréhension d'un raisonnement d'un point de vue plus général.

3 Explications et Preuves

Dans la section 1.8 nous avons souligné comment chaque explication comprend une étape où des propriétés mathématiques sont montrées dans un diagramme. Ainsi l'explication (*pradarśana*) des problèmes de Rats et de Faucons (p. 98, lignes 4-6) commence par un diagramme :

tat tu pradarśyate- nyāsaḥ-

Mais ceci est montré/expliqué- disposition- (d'un diagramme¹⁸)

De même dans le vers 8, l'explication (*pratipādana*) se fait dans un diagramme (p. 63; lignes 17-19) :

*samyagādiṣṭena ālikhite kṣetre svapātalekhā-pramāṇaṃ trairāśīkagaṇitena
pratipādayitavyam/*

La taille des ■lignes sur leurs propres tombées■ doit être expliquée (*pratipādayitavya*) au moyen du calcul d'une règle de trois, dans un champ dessiné par une personne proprement instruite.

La seconde partie du vers neuf présente également le cas d'un diagramme, ici non dessiné, où une explication pourrait se faire (p. 71; lignes 12-13) :

*etām eva ṣaḍbhāgaḥ pratipādayiṣatā vṛttakṣetre ṣaṭ samatryaśrīkṣetrāṇi
prasaṅgena pradarśitāni/*

De cette manière, incidemment, un champ avec six équi-trilatères est montré par quelqu'un qui souhaite expliquer la corde de la sixième partie (de la circonférence) dans un champ circulaire.

¹⁷Bhāskara, dans la résolution qui suit (ligne 10) utilise l'expression *anupraviṣṭa*; i.e. les aire *entrent* dans le triangle.

¹⁸Celui-ci est reproduit dans la section 1.8. On le trouve également dans la traduction de ce commentaire de vers.

Enfin, la seule phrase comprenant le mot preuve (*upapatti*) renvoie à un diagramme où cette dernière serait effectuée (p. 59; ligne 3) :

trairāśīkopapattipradarśanārtham kṣetranyāsaḥ

Afin de montrer/d'expliquer la preuve de la règle de trois, disposition d'un champ-

Le diagramme dont la construction est décrite dans le commentaire de la première moitié du vers 3 semble être le seul où tout à la fois un raisonnement est élaboré et montré. Nous renvoyons à l'Annexe de BAB.2.3.ab et à la traduction de ce passage.

Nous sommes ici dans l'incapacité d'en dire plus. Comme nous l'avons souligné auparavant, tout se passe comme si le moment crucial, pour nous, de l'explication en géométrie était oral. L'explication s'appuie sur un diagramme qui est ainsi la seule trace que nous avons dans le texte écrit de ce raisonnement. La fonction explicatrice du diagramme pourrait être à l'origine du fait que, dans les manuscrits, l'exactitude formelle des dessins ne soit pas prise en compte.

4 Lieu d'application d'une procédure

Dans le diagramme du commentaire du vers 11 (reproduit dans la Figure 3.4) une procédure est appliquée. Nous renvoyons à notre traduction du commentaire de ce vers 11 et à l'annexe de BAB.2.11. afin d'examiner comment elle s'inscrit dans un diagramme. Notons ici que ce dessin ne représente pas exactement les calculs effectués. En effet, des *rāśīs* entiers y sont représentés, or tous les calculs utilisent des subdivisions paires de *rāśīs*. Tout se passe comme si ce diagramme était, à la manière de la règle qui ne donne que l'essentiel, la graine à partir de laquelle tout peut être compris et expliqué, mais qu'il reste à décliner dans chaque cas particulier.

3.5 Conclusion

Pour en revenir aux questions soulevées au début de ce chapitre, comment fait-on "parler" des diagrammes ?

Lorsqu'on examine ce qu'il nous en est dit en terme de construction, on peut apercevoir une apparente contradiction entre des règles de construction précises (BAB.2.13) et la manière dont elles sont effectivement mises en

œuvre. En vérité, le commentaire est si peu explicite que l'on ne peut rien affirmer avec certitude.

D'autre part la manière dont les figures géométriques sont définies est elle-même très visuelle. Le nom apparaît autant que possible comme ce qui permet de décrire l'objet qu'il désigne. Puisque ce n'est pas toujours le cas, la compréhension qu'il faut lui attribuer est sujette à discussion. Il y a donc une tension entre le diagramme comme lieu où s'explicite une définition de figure géométrique et le mot qui par lui-même la représenterait abstraitement.

Une description formelle de leur répartition dans le texte nous a montré que la plupart des diagrammes appartiennent à la partie ■disposition■ des exemples résolus. Ce sont donc des objets usuels de la pratique mathématique, dont la fonction n'est pas explicitée dans le texte. De manière générale, s'il est essentiellement une illustration d'un problème ou d'une figure, c'est aussi le lieu où l'on voit (où l'on peut expliquer et comprendre) un raisonnement géométrique.

Comme nous l'avons explicité au début, le diagramme semble être un objet, présent dans le texte écrit mais support d'une explication orale. Il est comme la trace d'une activité mathématique que l'on ne peut que partiellement reconstruire.

Parameśvara's commentary to verse 13 of the *Gaṇita-pāda*

Ab.2.13¹⁹ A circle should be brought about with a pair of compasses and a trilateral and a quadrilateral each with two diagonals |

Flat ground should be brought about with water, verticality with just a plumb-line ||

vṛttaṃ bhramaṇa sādhyam tribhujam ca caturbhujam
ca karṇābhyām|

sādhyā jalena samabhūr adha ūrdhvaṃ lambakenaiva||

With a *bhrama*, that is, with an instrument (*yantra*) called a *karkaṭa* a circle should be brought about. This is what has been said :

Having acquired any straight stick (*yāṣṭī*), having bound it, firmly, with a cord on its upper-part at the throat-spot (*kaṇṭha-pradeśa*), having also split (it, vertically) from the lower tip to the throat, (and thus) having made two sticks (*śalākā*), one should make their two tips sharp ones. In this way is produced a *karkaṭa* instrument having an under mouth (or opening *adhomukham*). Having further fixed a stick in the space between the (previous) 5 two sticks one should make a pair of compasses having a revolving opening (*vivṛta-āśya*). Having made the *karkaṭa*'s opening equal to the semi-diameter of the desired circle by moving up and down the stick which lies in the intermediate space, having laid the tip of one stick on the central spot of the circle to be brought about, having laid the other tip on the spot on circumference of the circle one should turn the *karkaṭa*. That produces the desired circle.

Parameśvara's supercommentary of Govindasvāmin's commentary of verse I of chapter three of the *Mahābhāskarīya*

Mbh.3.1.²⁰ After having tested the level of the ground by means of water, draw a neat circle with a pair of

¹⁹[p.32; Kern 1874].

²⁰This is the translation adopted by K.S. Shukla in [p. 56; Shukla 1960]. The edition of the commentary is [Sastri 1957].

compasses. (At the center of that, set up a vertical gnomon.) The gnomon should be large, cylindric, massive, and tested for its perpendicularity by means of four threads with plumbs tied to them.

With the word *karkaṭa* an instrument fit for bringing about the out-line (*parilekhā*, i.e. the circumference) of a circle is meant. In this case, having acquired any evenly circular stick, having bound ⟨it⟩ firmly above its middle at the throat spot (*kaṇṭha- pradeśa*) with a string (*rajju*), etc... , having furthermore split ⟨it⟩ at its root (*mūla*), one should make it in such a way that below the throat (*ākaṇṭha*) there are two equal sticks. Afterwards one should make the tip of ⟨each⟩ stick a sharp tip. This is called a ‘*karkaṭaka*’.

The intermediate space between is called the “the compasses’ mouth (or opening)” (*karkaṭa-āśya*). Afterwards, having taken another stick whose width is bigger than the compasses’ sticks, and whose length is several *aṅgulas*, having cut its two tips, with a knife (*śastra*), one should make a revolving opening (*vivṛta-āśya*). In this way, a stick having a mouth (*mukha*) at its two ⟨tips⟩ is called a *vartikāṅkura* (a sharp stick).

Furthermore, having made a revolving-opening-pair of compasses, having placed transversally the sharp stick in its opening, one should place the two sticks of the compasses on the two mouths (*āśya*) of the sharp stick. In this way, having acquired an instrument called a *karkaṭa* adorned with a sharp stick placed at ⟨its⟩ mouth (*mukha*), one should draw a circle with it. Having made the compasses’ opening equal to the semi-diameter by moving the sharp stick up and down, having fixed one stick (*śṛṅga*, litt. horn) in the middle of the circle one should turn the other one all around. When ⟨this⟩ has been made in this way, the desired circle is produced.

Or else, with the word *vartikāṅkura* another instrument is meant. When one has placed two iron sticks on the tips of the two sticks of a pair of compasses, that is *vartikāṅkura*. A line is made with that. This is what was intended.

A tentative representation of such a pair of compasses may be seen in Figure 12.

Figure 12: Une paire de compas telle qu'elle est décrite par Parameśvara

Conclusions et perspectives

Nous allons, dans un premier temps, tenter de récapituler ce que nous avons appris des mathématiques telles qu'elles sont connues et pratiquées par notre commentateur. Dans un second temps, nous reviendrons sur les perspectives que cette étude ouvre en histoire des mathématiques.

1 Un premier portrait de *gaṇita* selon Bhāskara

Les mathématiques telles qu'elles sont apparues au fil de nos analyses du commentaire ont plusieurs dimensions.

Elles sont une activité savante.

C'est une discipline transmise, en partie, par le biais de textes techniques. L'*Āryabhaṭīya*, formellement, s'inscrit dans la tradition des traités en *sūtras*. Le commentateur effectue une lecture technique de chaque portion de vers. Interprétations mathématiques et gloses grammaticales y sont étroitement imbriquées.

Elle utilise des termes techniques, fait références à d'autres textes ou à diverses interprétations d'un même texte. C'est une discipline intellectuelle avec ses *gurus* et ses querelles d'écoles.

Les vers du traité sont perçus par Bhāskara comme des règles générales et elliptiques. Cette généralité à deux aspects.

Elle est solidaire de la concision des vers, car la règle semble connue de manière à énoncer en une seule formule une procédure qui pourra s'appliquer de diverses manières. La connaissance de cette règle générale, caractérisante (*lakṣaṇa*), nécessite des exemples ou indications (*uddeśaka*) qui expliqueront les divers contextes où elle s'applique. Ainsi, les listes d'exemples résolus participent pleinement à l'explicitation du contenu d'un vers. Nous voyons ici une pratique de l'exemple qui ne se restreint pas à l'illustration. Elle pourrait contribuer à l'étude de la fonction des exemples dans un texte mathématique.

Les vers du *gaṇita-pāda* sont également, selon les mots du commentateur, ■quelques mathématiques■ (*kiñcid-gaṇita*) appartenant aux ■mathématiques générales■ (*sāmānya-gaṇita*). Ils sont énoncés dans le but d'être appliqués (spécifiés, *viśeṣaṇa*) à l'astronomie. Les vers manipulent le plus souvent des objets abstraits, des ■quantités■ (*rāśi*) et des ■champs■ (*kṣetra*). Ceux-ci englobent, généralisent donc, des objets dont la teneur peut être astronomique. Ainsi un cercle peut représenter une planète, une orbite ou la sphère céleste. Des quantités peuvent désigner des intervalles de temps ou des longitudes. Dans ce cadre, le commentateur semble distinguer certaines procédures plus générales que d'autres. La Règle de Trois (vers 26) et le ■Théorème de Pythagore■ (première moitié du vers 17) servent à relire des procédures dont le sujet peut sembler plus spécifique.

Pourtant les mathématiques apparaissent également comme une somme de sujets spécialisés.

Chacun d'entre-eux requiert un savoir-faire particulier. Une part de cette pratique est transmise explicitement par l'ensemble formé du commentaire et des vers qu'il glose. Une autre reste extérieure au texte discursif. Les parties ■disposition■ des exemples résolus ouvrent partiellement une fenêtre sur ces manières de ■faire des mathématiques■. Elles nous montrent l'existence d'une surface de travail où diagrammes et nombres sont disposés selon des règles précises. Concrètement une procédure est exécutée sur cette surface : des calculs intermédiaires peuvent y être notés, effacés; des figures se découper et se transformer. Parfois, les procédures prennent explicitement appui sur les configurations qui y sont tracées.

Les mathématiques possèdent également des règles de validation de leurs procédures.

Bhāskara distingue entre des raisonnements qui sont valides et d'autres qui ne le sont pas. Les algorithmes sont vérifiés, expliqués voire prouvés. Nous n'avons pas pu distinguer entre ces divers types de raisonnements. Toutefois, ils semblent tous avoir pour point commun la relecture de la procédure étudiée par une autre. Cette dernière permet d'arriver au même résultat indépendamment de la première, tout en investissant les opérations qui la constituent d'un sens mathématique. Les explications en géométrie seraient orales et prendraient appui sur un diagramme. Des règles concurrentes, de mauvaises interprétations font également l'objet de réfutations.

Achevons ce portrait de *gaṇita* par les zones d'ombre qu'il comporte.

Notons, en premier lieu, que ces savoir-faires et explications orales nous font toucher les limites de ce qu'un texte écrit transmet de la pratique effec-

tive des mathématiques, en particulier dans le contexte indien.

Par ailleurs, le commentaire pratique de nombreuses activités mathématiques qui n'ont pas été analysées. Trois, en particulier, ont éveillé notre curiosité.

Des quantités approchées sont manipulées et théorisées par le commentateur. Elles sont également pensées en relation avec des procédures ■précises■ et ■pratiques■.

D'autre part, l'itération semble un outil employé souvent et de nombreuses manières.

Des procédures arithmétiques (pour élever au carré et au cube, extraire des racines, mais également dériver des différences de sinus) et géométriques (la procédure du vers 11 pour dériver un table de sinus) sont lues comme des procédures itératives par le commentateur s'appuyant sur le traité. Bhāskara introduit de lui-même une procédure pour dériver itérativement des Règles de $2n + 1$ quantités à partir de la Règle de Trois. Un objet du traité, les séries, est défini de manière itérative.

Comme toujours dans ce commentaire, ce travail est associé à une pratique textuelle particulière. L'itération s'exprime par la répétition. Elle pourrait être perçue comme une manière d'exprimer avec concision une procédure par le fait de donner la clef générale qui la fonde.

Cette activité du commentaire reste à être approfondie.

L'itération pourrait être liée à une activité mathématique plus générale qui consiste à manipuler inventivement les procédures entre-elles. En effet, certaines procédures sont enchassées dans d'autres. Des manipulations méta-procédurales permettent d'inverser une procédure. Parfois, des listes d'opérations sont détournées et considérées partiellement. Le travail consistant en une relecture de procédures par d'autres pourrait ainsi s'inscrire dans cette pratique spécifique sur les algorithmes.

Nous allons à présent nous tourner vers les questions d'histoire des mathématiques que cette esquisse de *ganīta* soulève .

2 De nouvelles questions

En ce qui concerne l'histoire des mathématiques en Inde, si nous nous tournons vers les *śulba-sūtras*, il serait particulièrement intéressant d'observer les constructions de figures géométriques qui y sont décrites.

En particulier la question se pose de savoir quel parallèle peut exister entre les procédures utilisées pour transformer une figure en une autre de même aire et la ■vérification■ que nous avons observée dans le commentaire

du vers 9. En s'appuyant sur les commentaires contemporains de Bhāskara à ces textes, nous pourrions y évaluer les continuités et ruptures sur ce thème précis entre ces deux traditions mathématiques. Nous pouvons également nous demander si la figure du *dhanuḥ-kṣetra* (de l'arc et de la flèche) est présente dans ces textes ou leur commentaires.

La trigonométrie offre d'autres perspectives d'investigation. En effet, la procédure décrite dans le vers 11 pour dériver dans un diagramme des demi-cordes a un pendant similaire dans le *Pañca-siddhāntikā*. On peut se demander quelles sont les parentés et différences de ces procédures et quelle fut leur postérité.

La procédure du pulvérisateur est une constante des textes mathématiques de l'époque classique. Si l'évolution de la procédure elle-même a souvent été étudiée, la manière dont elle fut, à diverses époques, appliquée à l'astronomie demeure inconnue.

De manière plus générale, il serait intéressant de savoir si l'activité mathématique positionnelle en arithmétique et le rĀle spécifique dévolu aux diagrammes comme lieu d'explication et d'élaboration d'une procédure, sont des pratiques mathématiques propres à Bhāskara ou s'il s'agit d'un trait que l'on retrouve à d'autres époques, chez d'autres auteurs du sous-continent.

Plus généralement encore, si nous examinons les définitions attribuées à *gaṇita* nous voudrions savoir quels sont les autres recoupements par sujets que cette discipline a connus. Comment ont été par la suite articulées les relations entre arithmétique et géométrie, mathématique et astronomie ? Nous savons que les textes postérieurs à celui de Bhāskara ont accordé un rĀle plus important à l'algèbre liée à l'arithmétique. Mais ces relations demeurent également à être explicitées suivant les auteurs.

Nous avons remarqué qu'il existait plusieurs types de commentaires mathématiques en sanskrit dont les caractères restent à préciser. En particulier, il serait intéressant de savoir si les pratiques mathématiques auxquelles Bhāskara se livre dans des pratiques textuelles se retrouvent dans ces commentaires : joue-t-on encore sur les mots pour souligner des propriétés mathématiques ? Passe-t-on par des formulations de questions-types pour les énoncer et préparer l'application d'une procédure ? Est-ce que d'autres commentaires s'efforcent de définir et caractériser des objets mathématiques du traité ?

L'existence de commentaires postérieurs accordant semble-t-il une grande place aux démonstrations des procédures ouvre la perspective d'une étude de la pratique de la preuve en Inde. Quel est le rĀle, dans ce cadre, des

relectures de procédures par d'autres ? Comment cette pratique est-elle théorisée ?

En élargissant le champs géographique de nos investigations, l'échange continué avec Karine Chemla nous a amené à remarquer de nombreuses similitudes entre les mathématiques pratiquées par Bhāskara et le commentaire de Liu Hui aux *Neufs Chapitres*. Il existe, en premier lieu, une parenté des problèmes et algorithmes considérés : Règle de Trois, problèmes des ■bambous cassés■ et ■lotus immergés■, rencontres de deux corps, problèmes du pulvérisateur, tous ont leur équivalent dans les textes chinois, quoiqu'il existe d'évidentes différences dans leurs traitements. La numération positionnelle décimale et les procédures qui utilisent cette numération, les transferts de noms, le rôle dévolu aux exemples, l'existence d'une catégorisation des quantités, etc., toutes ces activités se retrouvent dans les textes chinois, mais sont pratiquées différemment. Il s'agit là d'un pan entier de l'histoire internationale des mathématiques qui reste pour l'essentiel inexploré.

Ces quelques centaines de pages, explicatives et analytiques, ont pour objet de faciliter l'approche et la lecture du texte de Bhāskara. Nous espérons qu'elles ont éveillées la curiosité du lecteur. Cette étude a soulevée de nombreuses questions, qu'il nous reste à approfondir.

BIBLIOGRAPHIE

Sources Primaires

Āryabhaṭa

[Clark 1930] E. C. Clark. *The Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa*. University of Chicago Press, 1930.

[Kern 1874] H. Kern. *The Āryabhaṭīya, with the commentary Bhaṭadīpikā of Parameśvara*. Reprint from Eastern Book Linkers, 1874.

[Sengupta 1927] P. C. Sengupta. *The Āryabhaṭīyam*, translation. In *Journal of the Departments of Letters of the University of Calcutta*, XVI: 1-56, 1927.

[Sharma-Shukla 1976] K. V. Sharma and K. S. Shukla. *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa, critically edited with translation*. Indian National Science Academy, New-Dehli, 1976.

[Pillai & Sastri 1957] S. K. Pillai and S. Sastri. *The Āryabhaṭīya with the Bhāṣya of Nīlakaṇṭha Somastuvan*. Trivandrum Sanskrit Series, 101 (1930), 110 (1931) and 185 (1957).

Bakhshālī Manuscript

[Hayashi 1995] Takao Hayashi. *The Bakhshālī Manuscript, An ancient Indian mathematical treatise*. Egbert Forsten. Groningen, 1995.

Brahmagupta

[**Chatterjee 1970**] Bina Chatterjee. *The Khaṇḍakhāyaka of Brahmagupta with the Commentary of Bhaṭṭotpala* (2 volumes). Dehli: Motilal, 1970.

[**Dvivedi 1902**] S. Dvivedi. *The Brāhmasphuṭasiddhānta of Brahmagupta*. The Pandit, 1902.

Bhāskara I

[**Apaṭe 1946**] M. C. Apaṭe. *The Laghubhāskarīya, with the Commentary of Parameśvara*. Anandāśrama, Skt. series no. 128, Poona, 1946.

[**Sastri 1957**] K. Sastri. *Mahābhāskarīya of Bhāskarācārya with the Bhāṣya of Govindasvāmin and Supercommentary Siddhāntadīpikā of Parameśvara*. Madras Govt. Oriental Series, no. cxxx, 1957.

[**Shukla 1960**] K. S. Shukla. *Mahā-bhāskarīya, Edited and Translated into English, with Explanatory and Critical Notes, and Comments, etc.*. Department of Mathematics, Lucknow University, 1960.

[**Shukla 1963**] K. S. Shukla. *Laghubhāskarīya, Edited and Translated into English, with Explanatory and Critical Notes, and Comments, etc.*, Department of Mathematics and Astronomy, Lucknow University, 1963.

[**Shukla 1976**] K. S. Shukla. *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa, with the commentary of Bhāskara I and Someśvara*. Indian National Science Academy, New-Dehli, 1976.

Varāhamihira

[**Neugebauer and Pingree 1971**] O. Neugebauer and David Pingree. *The Pañcasiddhāntikā of Varāhamihira*. Copenhagen, 1971.

Sources Secondaires

[**Ahmad 1981**] Afzal Ahmad. "On the π of Āryabhaṭa I" in *Gaṇita-Bhāratī* 3 (3-4): 83-85, 1981.

- [**Apte 1957**] V.S. Apte. *The practical Sanskrit-English Dictionary*. Poona, 1957.
- [**Bag 1976**] A. K. Bag. *Mathematics in Ancient and Medieval India*. Chukhambha Orientalia, 1976.
- [**Bhattacharya 1991**] Ramkrishna Bhattacharya. "The case of Āryabhaṭa and his detractors" in *The Indian Historical Review*, XVII (1-2): 35-47, July 1990-January 1991.
- [**Biardeau 1981**] Madeleine Biardeau. *L'HINDOUISME, Anthropologie d'une civilisation*. Flammarion, 1981. Nouvelle version remaniée et augmentée de *Clefs pour la pensée hindoue* paru aux éditions Seghers en 1972.
- [**Billard 1971**] André Billard. *L'Astronomie Indienne*, EFEO, 1971.
- [**Billard 1977**] André Billard. "Āryabhaṭa and Indian Astronomy" in *Indian Journal of History of Science*, 12(2): 207-224, 1977.
- [**Bronkhorst 1990**] Johannes Bronkhorst. "Vārttika" in *Wiener Zeitschrift fuer die Kunde Suedasiens*, 34:123-146, 1990.
- [**Bronkhorst 1991**] Johannes Bronkhorst. "Two litterary conventions of Classical India" in *Asiatische Studien/ Études Asiatiques*, 45 (2): 210-227, 1991.
- [**Bronkhorst 1994**] Johannes Bronkhorst. "Two litterary conventions of Classical India" in *Asiatische Studien/ Études Asiatiques*, XLVII (4): 10-39, 1994.
- [**CESS**] *Census of the Exact Sciences in Sanskrit, Series A, 5 volumes*, David Pingree. American Philosophical Society, 1970-1995.
- [**Chemla 1992**] Karine Chemla. "Résonances entre démonstration et procédure. Remarques sur le commentaire de Liu Hui (IIIème siècle) aux Neuf Chapitres sur les Procédures Mathématiques (Ier siècle)" in *Extrême Orient, Extrême Occident*, 14: 91-129, 1992.
- [**Chemla 1994**] Karine Chemla. "Similarities between Chinese and Arabic mathematical writings: (I) root extractions" in *Arabic Sciences and Philosophy*, 4: 207-266, 1994.
- [**Chemla 1995**] Karine Chemla. "Histoire des Sciences et Matérialité des textes, proposition d'enquête" in *Enquête*, 1: 167-180, 1995.

- [**Chemla 1996**] Karine Chemla. "What is the content of this book? a plea for developing History of Science and History of Text conjointly" in *Philosophy and the History of Science*, 1996.
- [**Chemla 1997**] Karine Chemla. "Qu'est-ce qu'un problème dans la tradition mathématique de la Chine ancienne?" in *Extrême Orient, Extrême Occident*, 19: 91-126, 1997.
- [**Coward & Raja 1990**] Harold G. Coward and K. Kunjuni Raja. *Encyclopedia of Indian Philosophies, Volume V : The Philosophy of the Grammarians*. Motilal Banarsidas, 1990.
- [**Datta & Singh 1938**] B. Datta and S. N. Singh. *History of Hindu Mathematics*, Asia Publishing House, 1938.
- [**Datta & Singh 1980**] B. Datta and S. N. Singh ; revised by K. S. Shukla "Hindu Geometry" in *Indian Journal History of Science*, 15 (2) : 121-187, 1980.
- [**Datta & Singh 1983**] B. Datta and S. N. Singh ; revised by K. S. Shukla. "Hindu Trigonometry" in *Indian Journal History of Science*, 18 (1) : 309-108, 1983.
- [**Datta 1926**] B. Datta. "Hindu Values of π " in *Journal of the Asiatic Society of Bengal, New Series*, 22:25-42, 1926.
- [**Datta 1930**] B. Datta. The two Bhāskaras. *Indian Historical Quarterly*, VI (4) : 727-736, 1930.
- [**Datta 1932**] B. Datta. "The Elder Āryabhaṭa's rule for the solution of indeterminate equations of the first degree" in *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, XVIV (1) : 19-36, 1932.
- [**Doniger 1975**] Wendy Doniger O'Flaherty. *Hindu Myths*. Penguin, 1975.
- [**Filliozat & Mazars 1985**] P. -S. Filliozat and Guy Mazars. "Observations sur la formule du Volume de la Pyramide et de la Sphère chez Āryabhaṭa" in *Bulletin des Études Indiennes*, 3:37-48, 1985]
- [**Filliozat & Renou 1949**] Jean Filliozat et Louis Renou. *L'Inde Classique, manuel des études indiennes*. Payot, 1949. Le tome I a été réédité en 1985 par la Librairie d'Amérique et d'Orient ; le tome II par l'EFEO en 1996.

- [**Filliozat 1988a**] Pierre-Sylvain Filiozat. "Calculs de demi-cordes d'arcs par Āryabhaṭa et Bhāskara I" in *Bulletin des Études Indiennes*, 6 : 255-274, 1988.
- [**Filliozat 1988b**] Pierre-Sylvain Filiozat. *Grammaire Sanskrite Pāṇinéenne*. Picard, 1988
- [**Filliozat 1990**] Pierre-Sylvain Filiozat. "Yukti le quatrième *pramāṇa* des médecins" in *Journal of the European Ayurvedic Society*, 1: 33-46, 1990.
- [**Ganguli 1932**] S. Ganguli. "India's contribution to the Theory of Indeterminate Equations of the First Degree" in *Journal of the Indian Mathematical Society / New Quarterly*, 19 : 110-168, 1931/32.
- [**Gareth & Jones 1998**] J. Mary Gareth and A. Jones. *Elementary Number Theory*. Springer, 1998.
- [**Gupta 1977**] R. C. Gupta. "On some mathematical rules from the *Āryabhaṭīya* in *Indian Journal of History of Science*, 12 (2) : 200-206, 1977.
- [**Hayashi, Kusuba & Yano 1989**] Takao Hayashi, Takanori Kusuba and Mishio Yano. "Indian values of π derived from Āryabhaṭa's value" in *Historia Scientiarum*, 42 : 33-44, 1989.
- [**Hayashi 1997a**] Takao Hayashi. "Āryabhaṭa's rule and table for sine-differences" in *Historia Mathematica*, 24 : 396-406, 1997.
- [**Hayashi 1997b**] Takao Hayashi. "Calculations of the Surface of a Sphere in India. *The Science and Engineering Review of Doshisha University*, 37 (4) : 194-238, 1997.
- [**Houben 1995**] Jan E. M. Houben. "Landmarks in the History of Sanskrit Semantics" in *IAS Yearbook 1995* pp. 26-41, 1995.
- [**Houben 1997**] Jan E. M. Houben. "*Sūtra* and *bhāṣyasūtra* in Bhartṛhari's Mahābhāṣya dīpikā: on the theory and practice of a scientific and philosophical genre" in *India and Beyond, Aspects of Literature, Meaning, Ritual and Thought, Essays in honour of Frits Staal*, Dick van der Meij editor, Kegan Paul International, Chapter XV, pp. 271-305, 1997.
- [**Houben 1999**] Jan E. M. Houben. "“Verschriftlichung” and the relation between the *pramāṇas* in the history of *Sāṃkhya*" in *Proceedings of the Seminar "Rationality in Asia"*, Leiden, June 4-5, 1999.

- [**Jain 1995**] Pushpa Kumari Jain. *A Critical edition, english translation and commentary of the Upodghāta Śaḍvidhaprakaraṇa and Kuṭṭakādhikāra of the Sūryaparakāsa of Sūryadāsa*. PhD Thesis, Simon Fraser University, 1995.
- [**Kale 1972**] M. R. Kale. *A Higher Sanskrit Grammar*. Motilal Babrsidas, 1972.
- [**Kaye 1908**] G. R. Kaye. "Notes on Indian Mathematics. no. 2. - Āryabhaṭa" in *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, IV (3) : 111-141, 1908.
- [**Keller 1995**] Agathe Keller. *Fractions et Règles de Trois en Inde au Vèmes et VIIèmes siècles, deux vers de l'Āryabhaṭīya d'Āryabhaṭa, accompagnés du commentaire de Bhāskara*. Mémoire de DEA, Université Paris VII, 1995.
- [**Kumudamani & Kuppuram 1990**] K. Kumudamani and G. Kuppuram (eds.). *History of Science and Technology in India; Vol. I, Mathematics and Astronomy*. Sundeep Prakashan, Dehli, 1990.
- [**Lloyd 1997**] Geoffrey Lloyd. "Exempli gratia : to make an example of the greeks" in *Extrême Orient-Extrême Occident*, 19 : 139-152, 1997.
- [**Maiti 1994**] N. L. Maiti. "Notes on Broken Bamboo Problems" in *Gaṇita Bhāratī*, 16 (1-4) : 25-36, 1994.
- [**Maiti 1996**] N. L. Maiti. "Antiquity of Trairāśika in India" in *Gaṇita Bhāratī*, 18 (1-4) : 1-8, 1996.
- [**Markel 1995**] Stephen Markel. *Origins of the Indian Planetary Deities*. Studies in Asian Thought and Religion. Volume 16. Edwin Mellen Press, 1995.
- [**Mishra & Singh 1996**] V. Mishra and S. L. Singh. "Height and Distance Problems in Ancient Indian Mathematics" in *Gaṇita Bhāratī*, 18 (1-4) : 25-30, 1996.
- [**Ōhashi 1994**] Yukio Ōhashi . "Astronomical Instruments in Classical Siddhāntas" in *Indian Journal of History of Science*, 29 (2) : 155-313, 1994.
- [**Pingree 1981**] David Pingree. *JYOTIḤŚĀSTRA, Astral and Mathematical Literature*. Otto Harowitz, 1981.

- [**Pingree 1993**] David Pingree. "Āryabhaṭa, the *Paitāmahasiddhānta*, and Greek astronomy" in *Studies in the History of Medicine & Science, New Series* XII (1-2) : 69-79, 1993.
- [**Renou 1963**] Louis Renou. "Sur le genre du sūtra dans la littérature sanskrite" in *Journal Asiatique*, 251, 1963.
- [**Renou 1984**] Louis Renou. *Grammaire Sanskrite*. J. Maisonneuve, 1984.
- [**Sarasvati 1979**] T. A. Sarasvati Amma. *Geometry in Ancient and Medieval India*. Motilal Banarsidas, 1979.
- [**Sarma 1977**] K. V. Sarma. "Tradition of *Āryabhaṭīya* in Kerala : revision of planetary parameters" in *Indian Journal of History of Science*, 12 (2) : 194-199, 1972.
- [**Shukla 1972**] K. S. Shukla. "Hindu Mathematics in the Seventh Century as found in Bhāskara I's commentary of the *Āryabhaṭīya* (IV)" in *Gaṇita*, 23 (2) : 41-50, 1972.
- [**Srinivas 1990**] M. D. Srinivas. "The Methodology of Indian Mathematics and its contemporary relevance" in *History of Science and Technology in India; Vol. I, Mathematics and Astronomy*, Sundeep Prakashan, pp. 28-86, 1990.
- [**Thapar 1966**] Romila Thapar. *A History of India, Volume I*. Penguin, 1966.
- [**Yano 1977**] Michio Yano. "Three types of Hindu Sine Tables" in *Indian Journal of History of Science*, 12 (2) : 83-89, 1977.
- [**Yano 1978**] Michio Yano. "Someśvara on the *Āryabhaṭīya*" in *Indian and Buddhist studies*, XXVI (II) : 38-41, 1978.
- [**Yano 1980**] Michio Yano. "Āryabhaṭa's possible rebuttal to objections to his Theory of the Rotation of the Earth" in *Historia Scientiarum*, 19 : 101-105, 1980.