UN LIEN GEOMETRIQUE ENTRE LE CERCLE ET LE SYSTEME SEXAGESIMAL

Jaime Vladimir Torres-Heredia Julca

UN LIEN GEOMETRIQUE ENTRE LE CERCLE ET LE SYSTEME SEXAGESIMAL

Par

Jaime Vladimir TORRES-HEREDIA JULCA
(Université de Genève, Suisse)

1.- RESUME

Cet article présente un fait géométrique simple qui pourrait concerner l'histoire des mathématiques et de l'astronomie. Ce fait montre un lien naturel entre le cercle et les multiples de 6 et il permet d'obtenir une représentation simple des 12 mois de l'année, des 24 heures du jour, des 30 jours (nombre moyen) du mois et des 360 jours (nombre approximatif) de l'année, ce qui nous rapproche de la division sexagésimale du temps. Cette représentation rappelle d'ailleurs le mouvement des planètes autour d'un centre.

A l'aide de ce fait on pourra aussi trouver géométriquement les diviseurs principaux du nombre 60, représenter des nombres en base 60 avec une sorte d'abaque ou table de calcul et effectuer une division du cercle en 6 et 12 parties égales. Après on pourra obtenir une division en 360 parties inégales mais relativement proches les unes des autres, le but n'étant pas d'obtenir une division optimale du cercle en 360 parties égales mais de montrer que l'idée de partager le cercle en 360 parties égales par la suite peut être suggérée par ces faits géométriques exposés.

Dans cet article l'auteur ne répondra pas aux questions suivantes:

a) Quelle est l'origine du système sexagésimal ?
b) Par quel chemin pourrait-on arriver à adopter le système sexagésimal à partir de la connaissance des faits exposés dans cet article et à partir de la connaissance des données astronomiques ?

Ces questions pourraient être traitées, à l'aide des informations de cet article, par les lecteurs ou ultérieurement par l'auteur.

2.- INTRODUCTION

La division sexagésimale du temps est largement utilisée tout comme la division sexagésimale du cercle pour mesurer les angles. Or, on se demande souvent pourquoi on a adopté ces divisions. En fait, il est assez clair que l'adoption de ce système est liée, entre autres, au besoin de représenter des données astronomiques comme la durée de l'année (à peu près 360 jours).

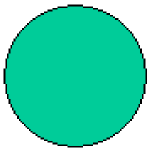
Cependant, comme cet article le montrera, la division sexagésimale du cercle et du temps a des liens étroits avec un fait géométrique simple qui concerne le cercle et qui est indépendant des données astronomiques.

Si ce fait géométrique n'a peut-être pas, avec le besoin de représenter les 365 jours de l'année, contribué à faire adopter le système sexagésimal employé pour diviser le cercle et représenter le temps, au moins il peut servir à montrer un lien géométrique naturel entre le cercle et la division sexagésimale.

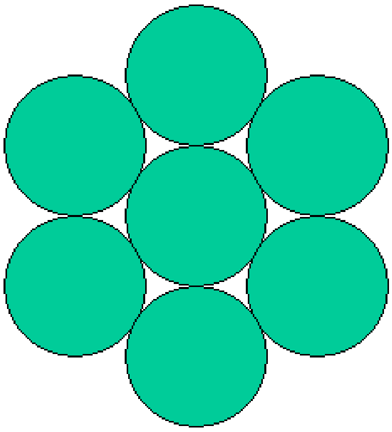
3.- UN LIEN NATUREL ENTRE LE CERCLE ET LES NOMBRES 6, 12, 24, 30, 60 et 360

Un lien naturel entre le cercle et les nombres 12, 24, 30, 60 et 360 apparaît clairement lorsqu’on observe comment un disque donné est entouré par d’autres disques de même rayon successivement, en construisant des orbites juxtaposées autour du disque de départ.

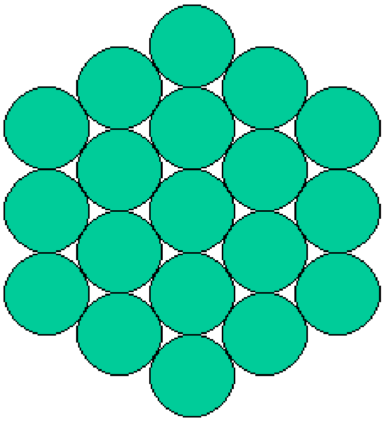
Voici le disque de départ :



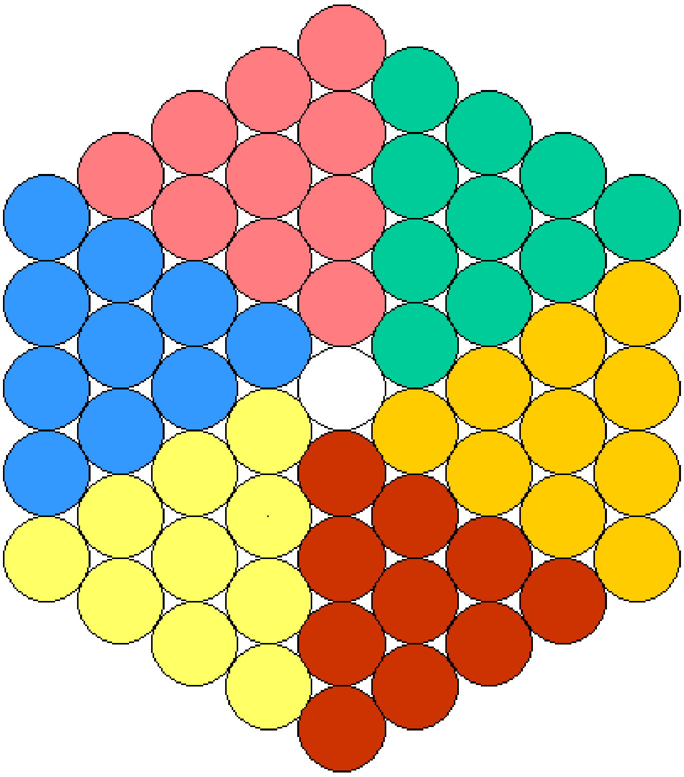
On entoure ce premier disque avec 6 disques de même rayon. Les 6 nouveaux disques vont constituer une « orbite » :



On répète le processus et une deuxième orbite de 12 disques s’ajoute autour de la première orbite:



On peut remarquer que lorsqu'on rajoute des orbites de disques de même rayon autour de celui de départ, des « triangles équilatéraux » formés de disques se constituent autour du centre. Ces triangles sont distingués ci-dessous par des couleurs différentes :



Plus il y a d'orbites, plus les 6 « triangles équilatéraux » formés par des disques deviennent grands. Et on remarque aussi qu'on peut trouver le nombre de disques d'une orbite donnée en fonction du rang de l'orbite. Si l'on pose que r désigne le rang d'une orbite et que r = 1 pour la première orbite, c'est-à-dire pour les premiers 6 disques autour du disque de départ, alors le nombre N de disques pour une orbite donnée est :

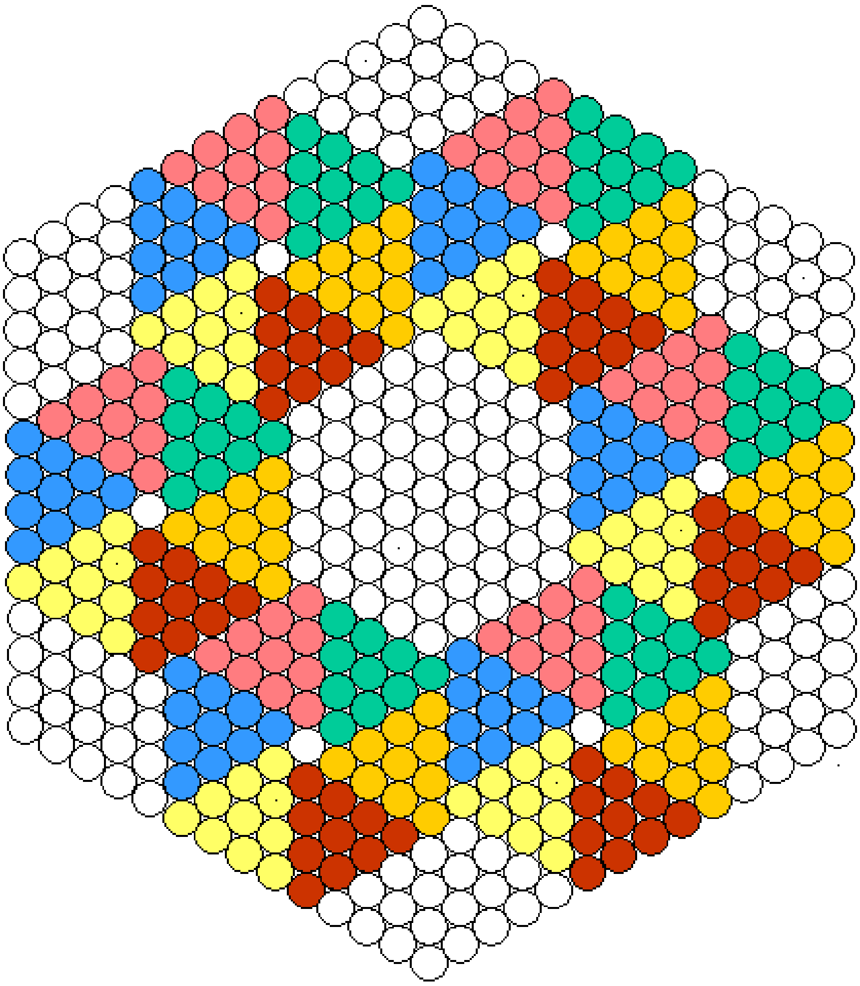
$$N = 6xr$$

Le nombre de disques d'une orbite est donc un multiple de 6. Et si cette formule est correcte, l'orbite de rang 60 aura 60x6 disques, c'est-à-dire 360.

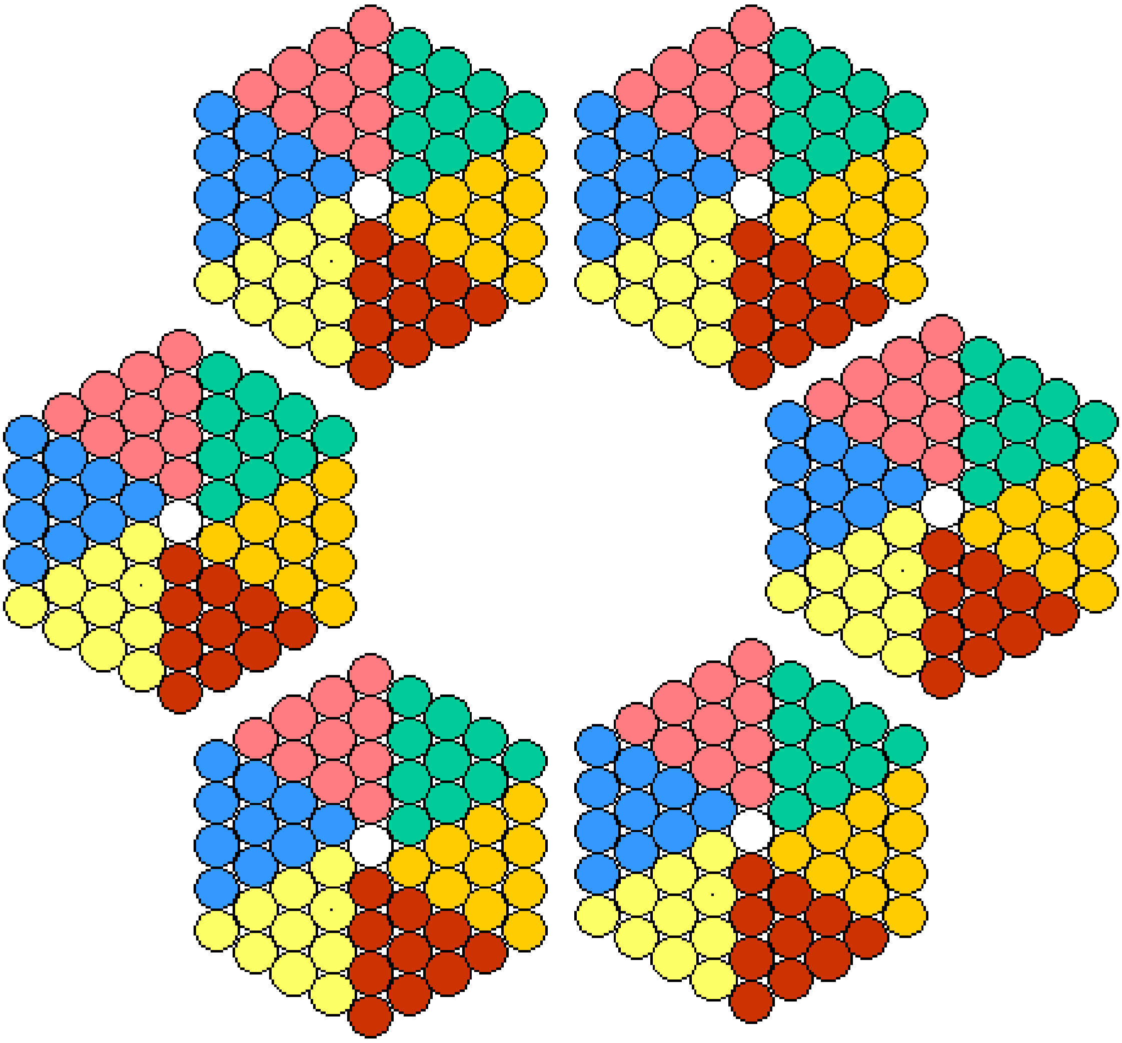
Cette constatation nous montre que les nombres 6, 12, 24, 30, 60 et 360 sont déjà liés de façon naturelle au disque et au cercle parce que si on entoure un disque donné de la manière proposée, on aura, à un moment donné 6, 12, 24, 30, 60 et 360 disques autour du cercle de départ.

Il est clair qu'il y une infinité d'orbites possibles puisqu'il y a une infinité de multiples de 6. Et l'on peut choisir le 60ème rang comme représentation des jours de l'année car l'avantage du nombre 360 est qu'il est aussi multiple de 5 et de 10.

Par ailleurs, si l'on compte les disques qui se trouvent dans les triangles colorés de la figure précédente, on aura un total de 60, chaque « triangle équilatéral » ayant 10 disques. Donc il y a non seulement 60 disques mais encore la représentation de 6x10 = 60. Et les symétries de cette figure permettent aussi de la diviser en 2 et 3 parties égales. Et comme chacun des 6 « triangles équilatéraux » peut être divisé en 2 et 5 parties égales (parce qu'ils contiennent 10 disques), on peut dire que le nombre 60 est divisible par 2, 3 et 5 et aussi par 4. Autrement dit, cette figure montre les diviseurs principaux du nombre 60. Et grâce à elle on peut aussi obtenir une autre représentation géométrique du nombre 360 avec le total des disques colorés ci-dessous:

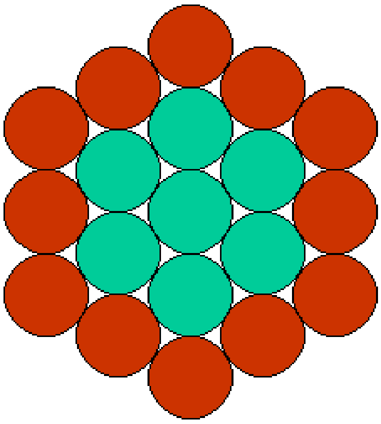


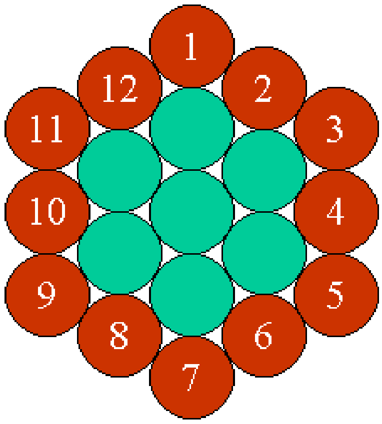
On peut aussi représenter le nombre 360 comme ça, toujours avec le total des disques colorés:



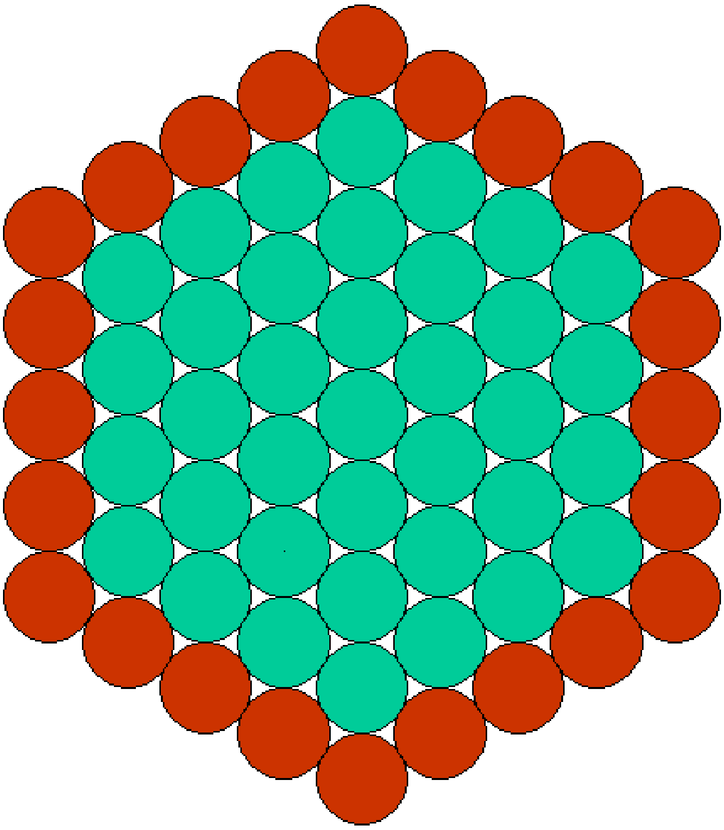
De plus, si l'on choisit le système sexagésimal pour mesurer le temps, on pourra représenter le nombre de mois d'une année avec une orbite de 12 disques, le nombre d'heures d'une journée avec une orbite de 24 disques, et le nombre moyen de jours d'un mois avec une orbite de 30 disques, le tout d'une façon qui rappelle le mouvement des planètes autour d'un centre.

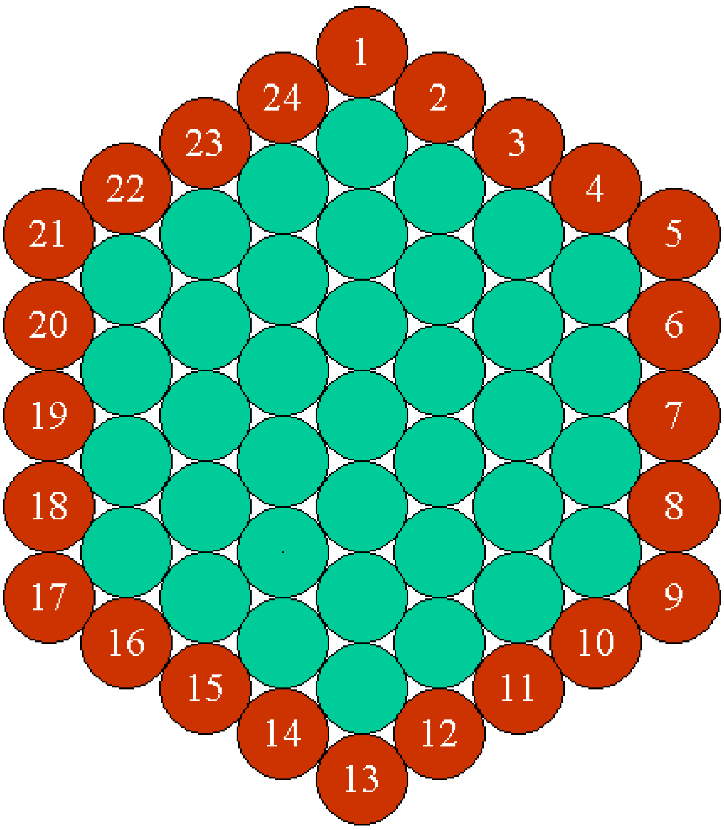
Voici une représentation des douze mois de l'année avec des disques de couleur marron:



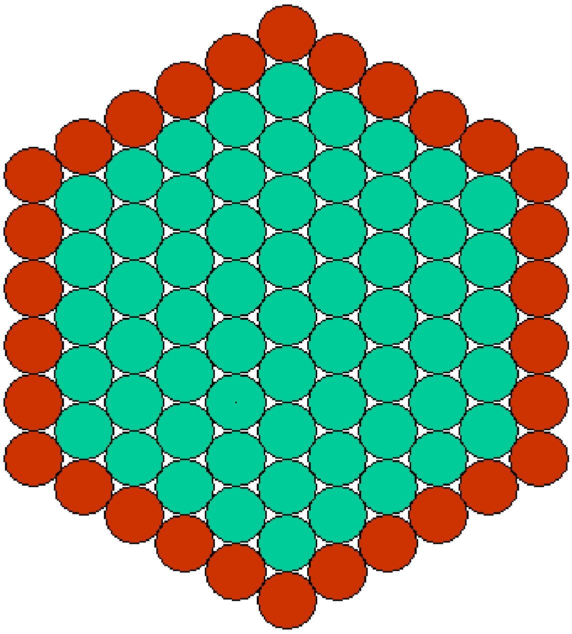


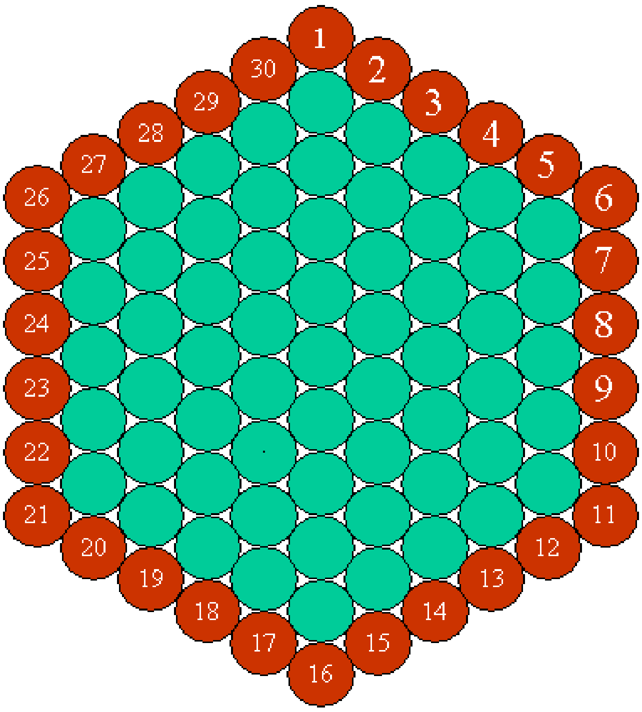
Les 24 heures du jour avec des disques de couleur marron:




1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24

Les 30 jours d'un mois (nombre moyen) :





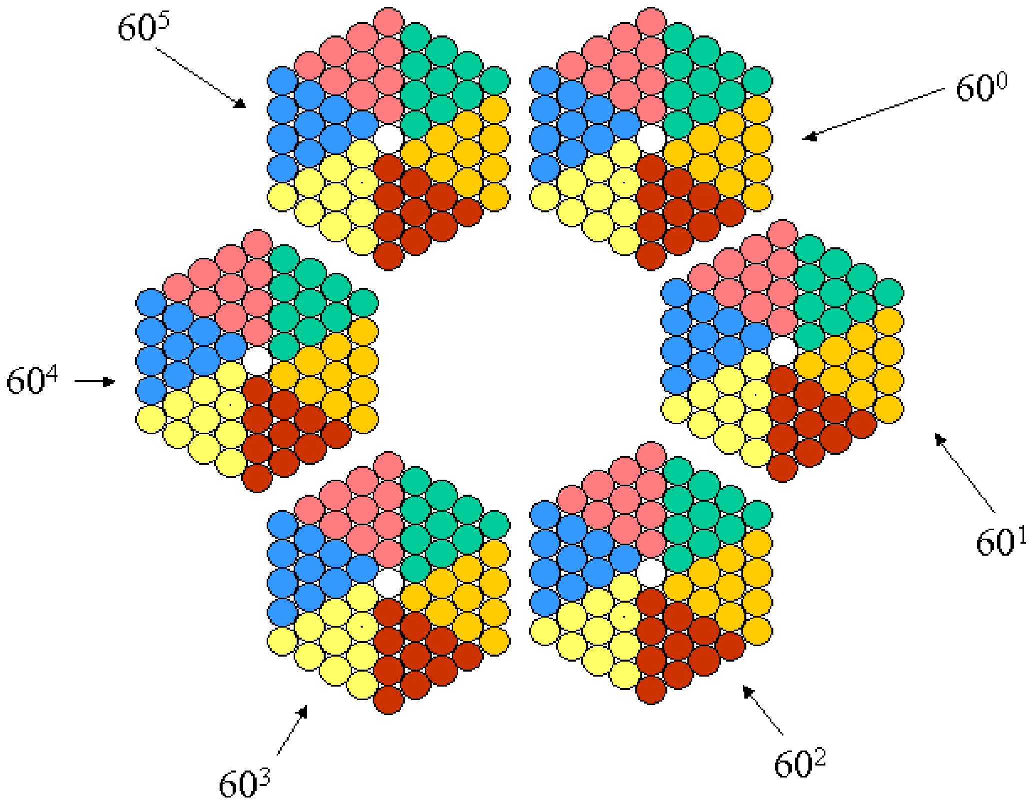
On pourrait aussi représenter de cette façon le nombre approximatif de jours de l'année, i.e. 360.

Cette façon d'entourer les cercles nous permet d'entrevoir une division du cercle en 360 parties du fait que le nombre 360 est lié de façon naturelle, comme on l'a vu, au disque et au cercle.

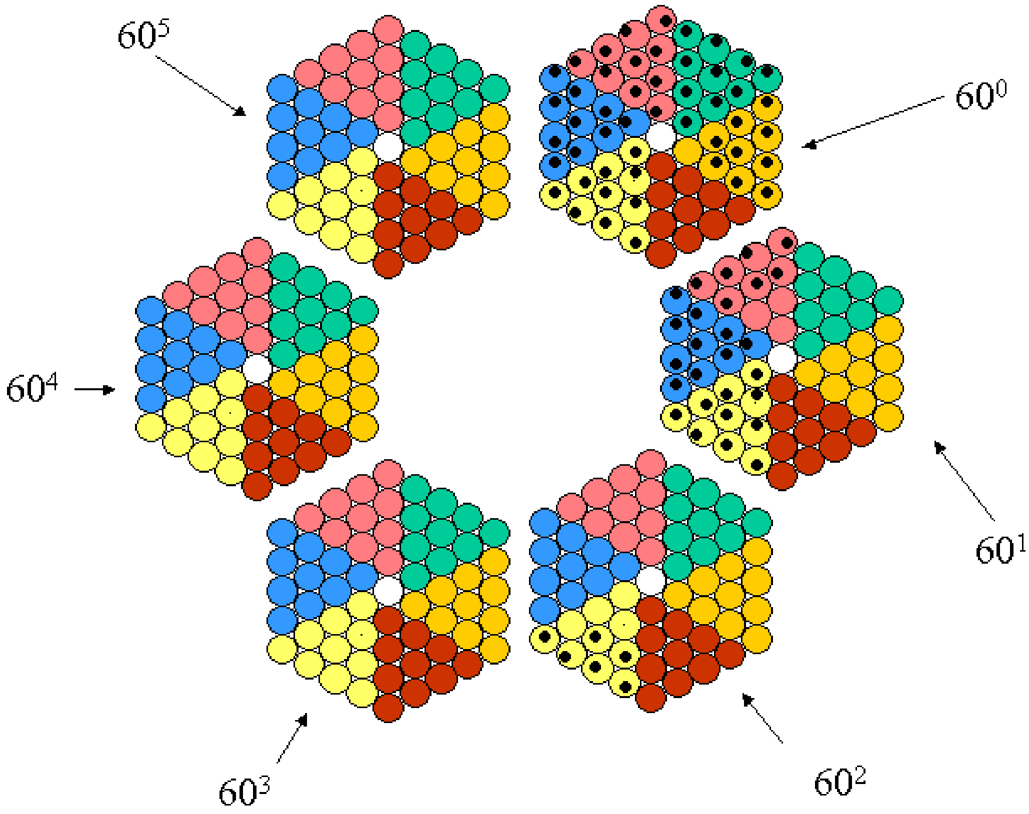
4.- ABAQUE OU TABLE DE CALCUL EN BASE 60

Du fait qu'on peut représenter le nombre 60 comme on l'a vu précédemment, on peut construire une sorte de table de calcul ou abaque qui permettra de représenter les nombres en base 60.

Voici le principe de cette table :



Le schéma ci-dessus montre le poids qu'auraient des pièces comme des cailloux ou des jetons placés sur les 6 « hexagones ». Et voici une représentation du nombre 6''' 27'' 49' (en base 60):



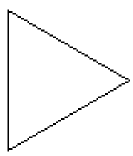
En base décimale ce nombre sera équivalent à :

$6x60^2 + 27x60^1 + 49x60^0 = 23269$

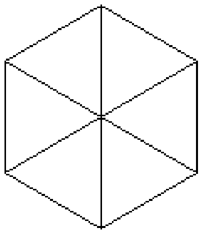
Il est clair qu'avec cette table on peut effectuer des sommes en réduisant les pièces d'un hexagone rempli par une pièce de l'hexagone suivant comme on fait avec les abaques de base décimale.

5.- DIVISION DU CERCLE EN 6 ET 12 PARTIES EGALES :

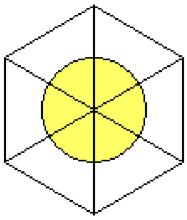
On dessine d'abord un triangle équilatéral.



On juxtapose ensuite 5 autres triangles équilatéraux de même taille comme on le voit ci-dessous :

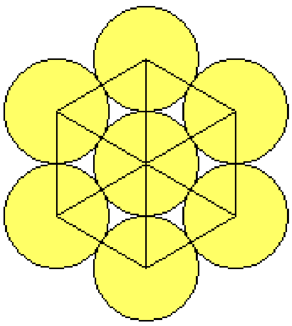


De la sorte on obtient un hexagone. Puis, autour du centre de cet hexagone on va dessiner un cercle ayant comme rayon la moitié de la longueur des côtés des triangles équilatéraux.

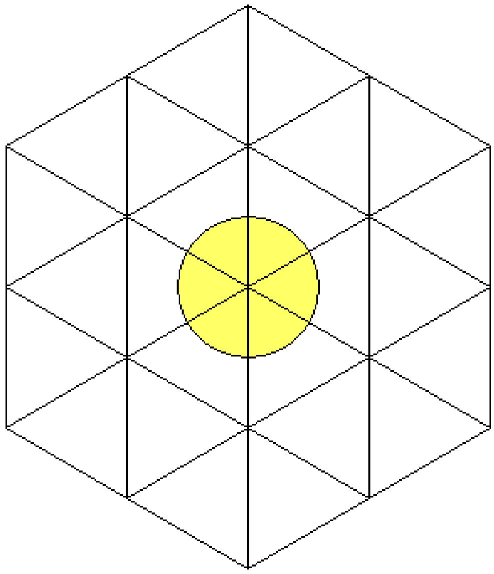


Il est clair maintenant que le cercle est divisé en 6 parties égales, chaque partie étant délimitée par l'un des rayons de l'hexagone. Ceci détermine aussi 6 angles égaux dont le sommet est le centre du cercle.

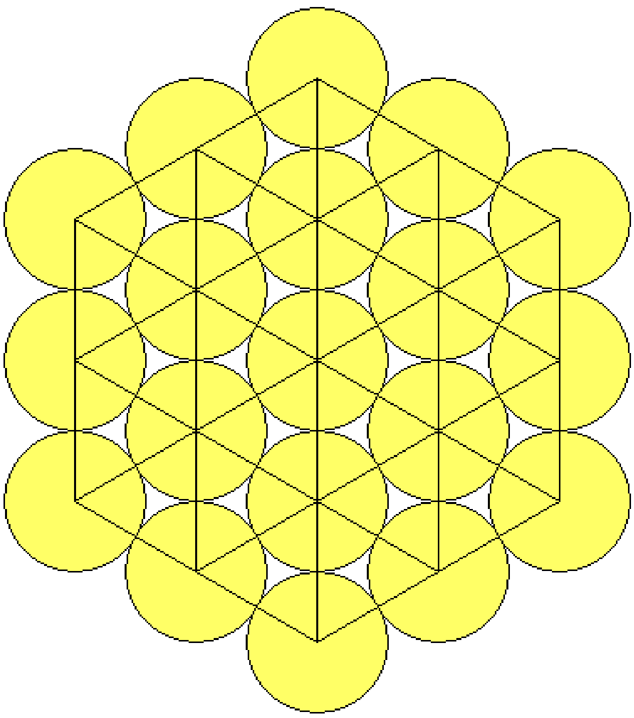
Si l'on dessine d'autres cercles de même rayon que le premier autour des sommets de l'hexagone, on obtiendra la figure suivante, ce qu'on a vu plus haut, au point 3 :



Ensuite on peut rajouter des triangles équilatéraux de même taille que les premiers de la façon suivante :

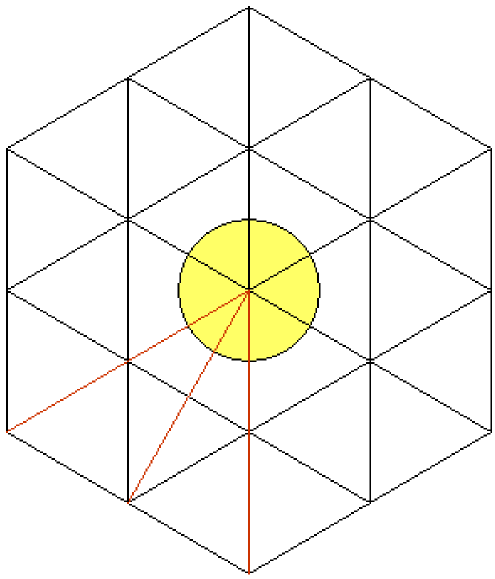


Comme auparavant, si on dessine des cercles autour des sommets des triangles équilatéraux comme on le montre ci-dessous, on obtient de nouveau la figure vue au point 3 de cet article :

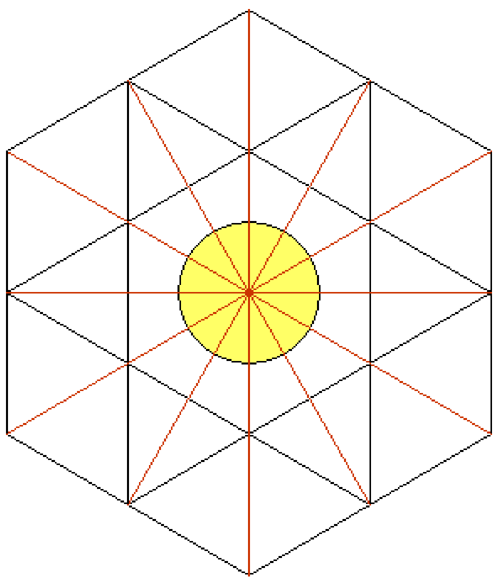


Ceci montre que cette construction avec les triangles équilatéraux est liée à l'opération qui consiste à ajouter des orbites de disques comme nous l'avons vu plus haut.

Maintenant, si l'on trace trois rayons de couleur marron comme indiqué ci-dessous, on observe que l'angle du cercle trouvé auparavant sera divisé en deux parties égales à son tour. Ceci s'explique à l'aide des symétries et des propriétés des triangles équilatéraux.

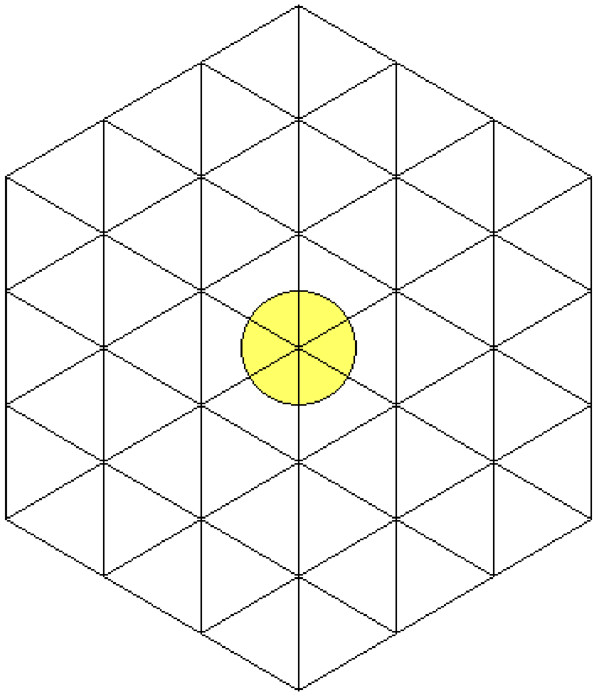


Comme ce processus peut être appliqué au reste du grand hexagone, on peut affirmer qu'on a divisé le cercle du centre en 12 parties égales et qu'on a trouvé 12 angles égaux :

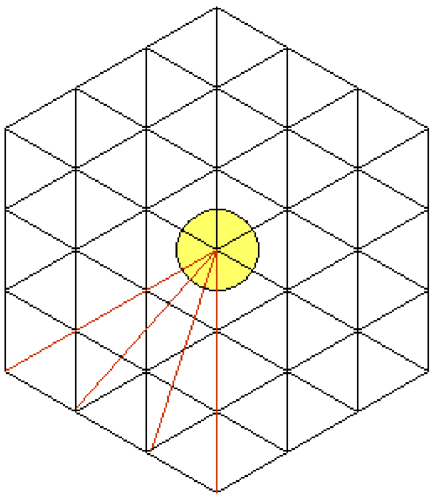


6.- DIVISION DU CERCLE EN 360 PARTIES INEGALES MAIS RELATIVEMENT PROCHES LES UNES DES AUTRES

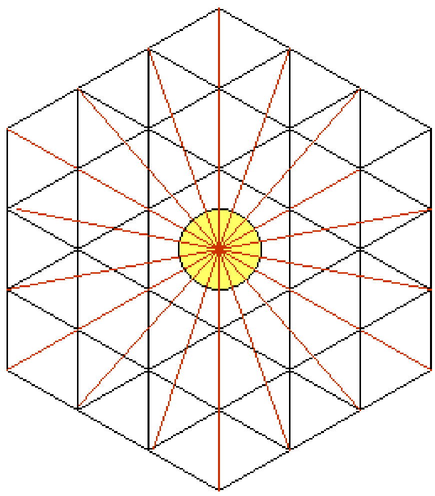
On peut évidemment encore rajouter des triangles équilatéraux, comme on l'a fait jusqu'à présent, autour de ceux qu'on a déjà dessinés :



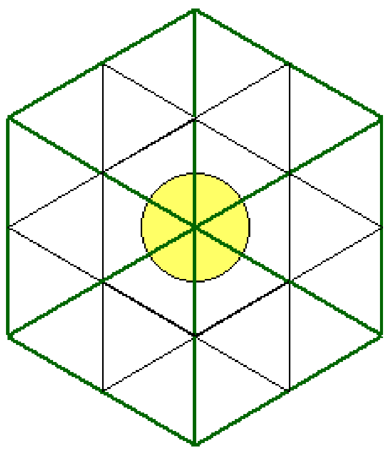
Et encore une fois on peut diviser les 6 angles de départ du cercle en d'autres parties, inégales cette fois, comme on peut le constater ci-dessous :



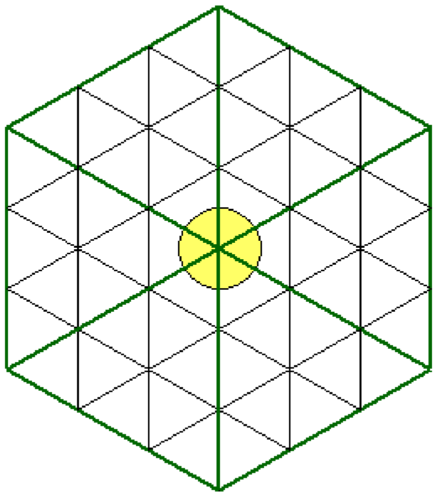
Cette fois-ci on observe que l'angle de départ a été divisé en 3 parties. Comme au départ il y avait 6 angles, on peut affirmer qu'on a divisé le cercle en 3x6=18 parties et qu’on a trouvé aussi 18 angles mais inégaux.



On peut continuer à rajouter des triangles équilatéraux autour du dernier hexagone comme on la fait jusqu’à présent mais on a pu déjà constater qu’il y avait toujours 6 grands triangles équilatéraux composés de sous-triangles, équilatéraux eux aussi, autour du centre du cercle. Voici les 6 grands triangles distingués par des traits verts :

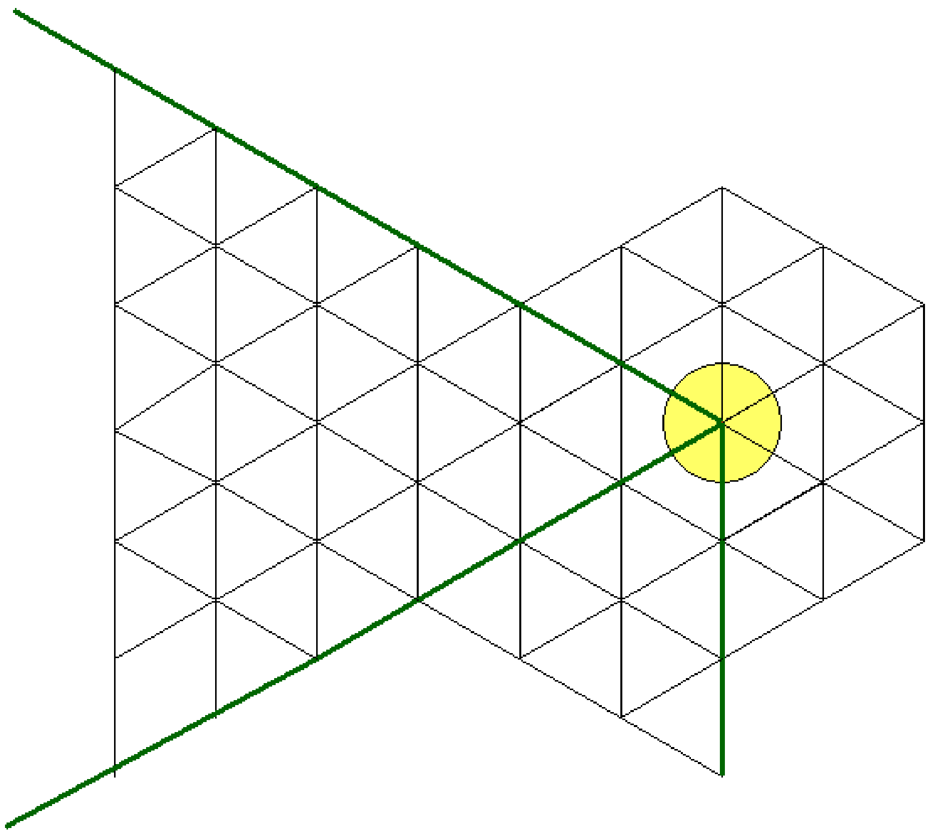


Voici les grands triangles avec davantage de sous-triangles autour du cercle:

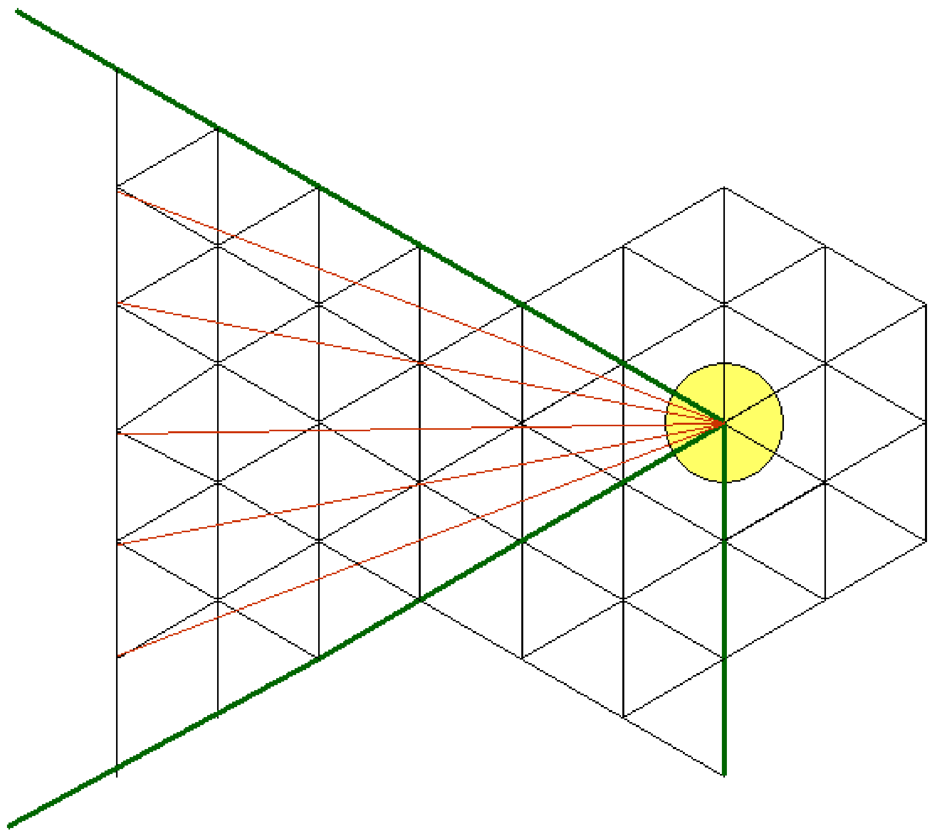


Le fait que les sous-triangles équilatéraux, disposés comme on l'a proposé, se retrouvent à l'intérieur d'autres triangles équilatéraux s'explique aisément grâce encore une fois aux symétries et aux propriétés des triangles équilatéraux.

On peut donc se concentrer sur l'un des grands triangles équilatéraux afin de voir ce qui se passe par la suite :



Comme on le remarque ci-dessus, à chaque nouvel ajout de sous-triangles équilatéraux, selon la méthode proposée, les 6 grands triangles délimités par les traits verts augmentent d'un nombre impair de triangles. Et aussi, à chaque étape, on peut diviser l'angle de départ en 2 parties, puis en 3, puis en 4, puis en 5, puis en 6… :

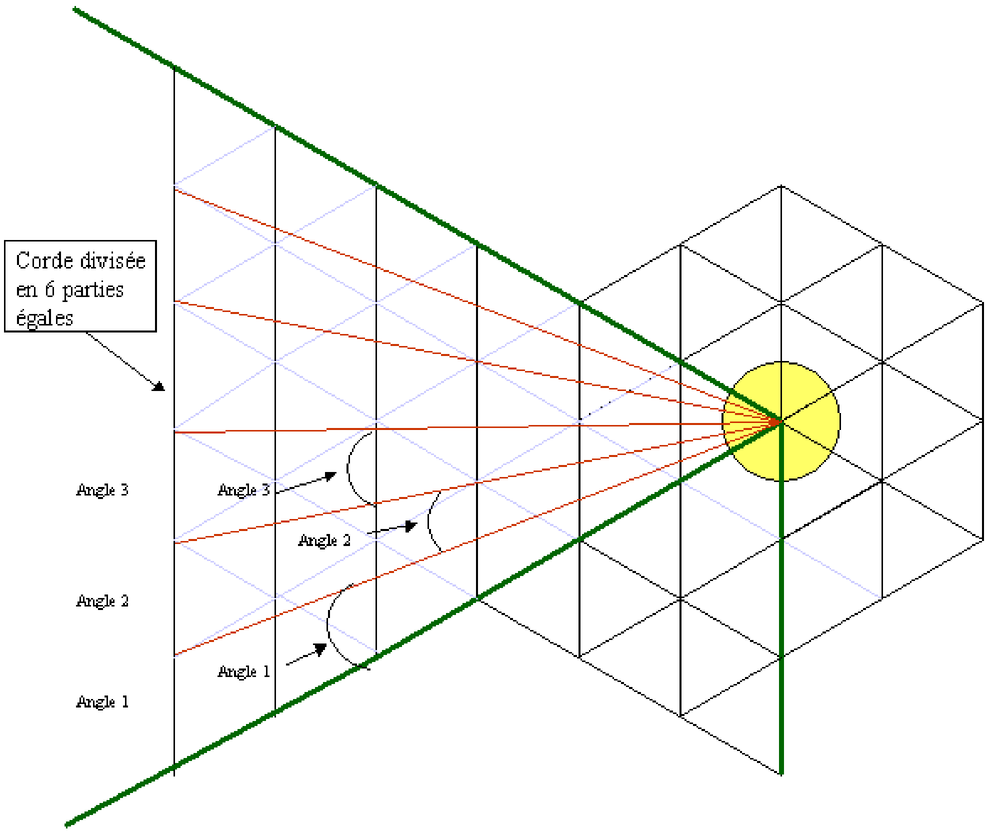


Ci-dessus il est montré clairement que l'angle de départ a été divisé en 6 parties. Comme il y avait au départ six angles égaux, on peut dire qu'on a trouvé de cette manière 6x6=36 angles inégaux. D'ailleurs, on peut conclure que le nombre de parties qu'on obtient est un multiple de 6.

Si l'on poursuit le processus, il est désormais clair qu'on arrivera à diviser l'angle de départ en 60 parties. Comme il y avait 6 angles égaux au départ, on aura divisé le cercle en 60x6=360 parties inégales. De cette manière nous avons réussi à partager le cercle en 360 parties de façon purement géométrique. Et il est clair désormais que même si l'on n'obtient pas de parties égales, le partage du cercle en 360 parties est toutefois lié aux propriétés de base du cercle et du triangle équilatéral. A partir de cette idée on peut essayer d'obtenir un partage en 360 égales comme ont essayé de faire les anciens Grecs.

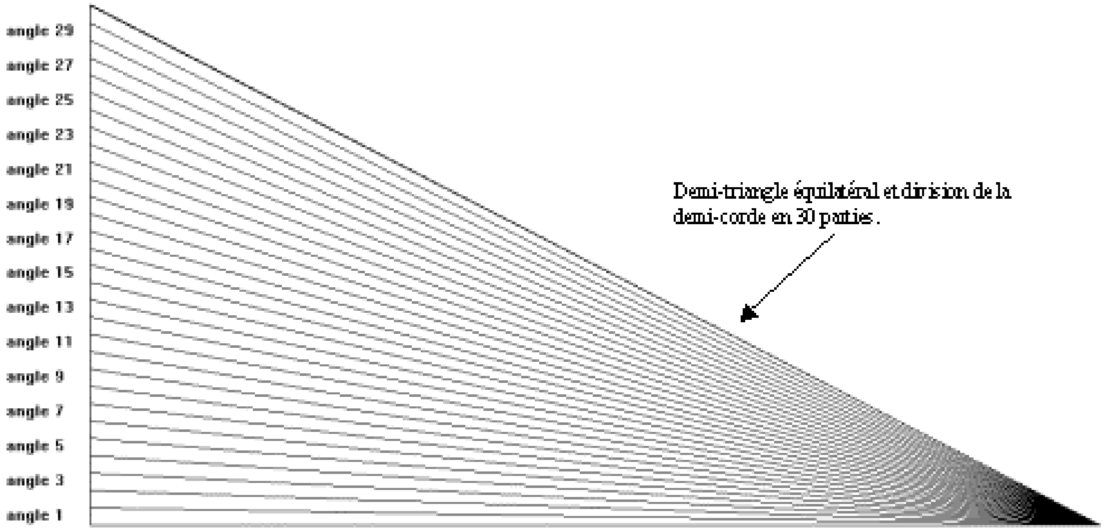
Or, il faut remarquer que même si les 360 angles obtenus précédemment sont inégaux, ils sont quand même relativement proches des valeurs des angles égaux qui correspondent chacun à la 360ème partie du cercle. En effet, on obtient lesdits angles inégaux par divisions égales des 6 cordes correspondant aux 6 angles obtenus lors du premier partage du cercle. En fait, la valeur de chacun des ces 360 angles inégaux obtenus avec cette méthode varie entre à peu près 0.833883984 degrés et à peu près 1.10252169 degrés.

Pour mieux observer cela, notons les angles obtenus par la manière décrite de la façon suivante :



Le schéma ci-dessus montre à quoi font référence les notations « Angle 1 », « Angle 2 », etc. qui se trouvent à gauche du dessin. Ces notations font référence aux angles signalés par les flèches et qui sont donc obtenus en reliant le centre du disque jaune aux différents points de la corde qui a été divisée en 6 parties égales.

Ainsi qu'on l'a compris plus haut, diviser des angles avec la méthode proposée revient à diviser une corde correspondant à la 6ème partie d'un cercle en n parties égales et ensuite relier au centre du cercle central chacun des points qui délimitent les parties de la corde divisée. Or, afin de diviser le cercle en 360 parties, il faut diviser une corde couvrant la 6ème partie en 60 parties. Mais on peut aussi d'abord travailler avec la moitié du triangle équilatéral et diviser la demi-corde en 30 parties. De cette façon on obtiendra les angles suivants :



Et maintenant nous pouvons voir les valeurs de ces angles qui sont numérotés. Sur le tableau ci-dessous l'erreur absolue correspond à la différence entre l'angle obtenu et l'angle théorique de 1 degré. L'angle parcouru correspond à l'angle obtenu en superposant 60 fois chaque petit angle :

Angle	Valeur en degrés	Erreur absolue	Erreur relative	Arc parcouru
1	1.10252169	0.10252169	9.299%	66.1513014
2	1.101705813	0.101705813	9.232%	66.1023488
3	1.100077676	0.100077676	9.097%	66.0046606
4	1.097644472	0.097644472	8.896%	65.8586683
5	1.094416892	0.094416892	8.627%	65.6650135
6	1.090409009	0.090409009	8.291%	65.4245405
7	1.085638123	0.085638123	7.888%	65.1382874
8	1.08012458	0.08012458	7.418%	64.8074748
9	1.073891559	0.073891559	6.881%	64.4334935
10	1.066964833	0.066964833	6.276%	64.01789
11	1.059372514	0.059372514	5.604%	63.5623509
12	1.051144779	0.051144779	4.866%	63.0686868
13	1.042313587	0.042313587	4.060%	62.5388152
14	1.032912388	0.032912388	3.186%	61.9747433
15	1.022975834	0.022975834	2.246%	61.3785501
16	1.01253949	0.01253949	1.238%	60.7523694
17	1.001639548	0.001639548	0.164%	60.0983729
18	0.990312561	0.009687439	0.978%	59.4187537
19	0.978595178	0.021404822	2.187%	58.7157107
20	0.966523906	0.033476094	3.464%	57.9914344
21	0.95413488	0.04586512	4.807%	57.2480928
22	0.941463658	0.058536342	6.218%	56.4878195
23	0.928545037	0.071454963	7.695%	55.7127022
24	0.915412887	0.084587113	9.240%	54.9247732

25	0.902100007	0.097899993	10.852%	54.1260004
26	0.888638004	0.111361996	12.532%	53.3182802
27	0.875057188	0.124942812	14.278%	52.5034313
28	0.861386496	0.138613504	16.092%	51.6831897
29	0.847653424	0.152346576	17.973%	50.8592054
30	0.833883984	0.166116016	19.921%	50.0330391

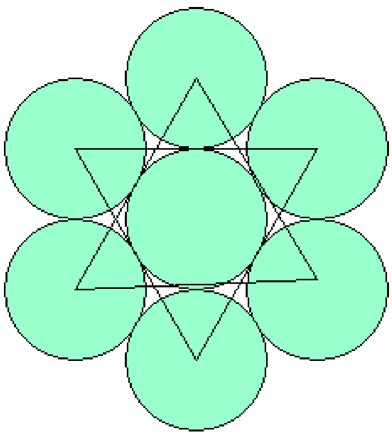
Evidemment, plus on est proche de 1 degré, plus cet arc parcouru sera proche de 60 degrés. Cette superposition peut aider à trouver l'angle le plus proche de 1 degré. Et nous observons ainsi que le 16ème et 17ème angles sont très proches de 1 degré.

La méthode présentée dans cet article permet de diviser le cercle en 6 et 12 parties égales. Par division simple en 2 avec le compas on peut encore diviser le cercle en 24, 48, 96, 192 et 384 parties égales.

Pour pourvoir atteindre une division en 360 parties égales il faudrait d'abord diviser le cercle en 24 et ensuite pouvoir diviser les angles en 3 et 5 parties car 360=24*3*5. Cela suppose donc une méthode pour diviser en 3 ou en 5 l'angle correspondant à la 24ème partie du cercle, c'est-à-dire 15 degrés. Si l'on s'arrête à 12 angles au départ, il faudrait d'abord diviser un angle de 30 degrés en 3 parties et ensuite en 5 parties. Or, on ne peut pas, à l'aide de la règle et du compas, partager la plupart du temps un angle en 3 et 5 parties.

7.- L'étoile de David :

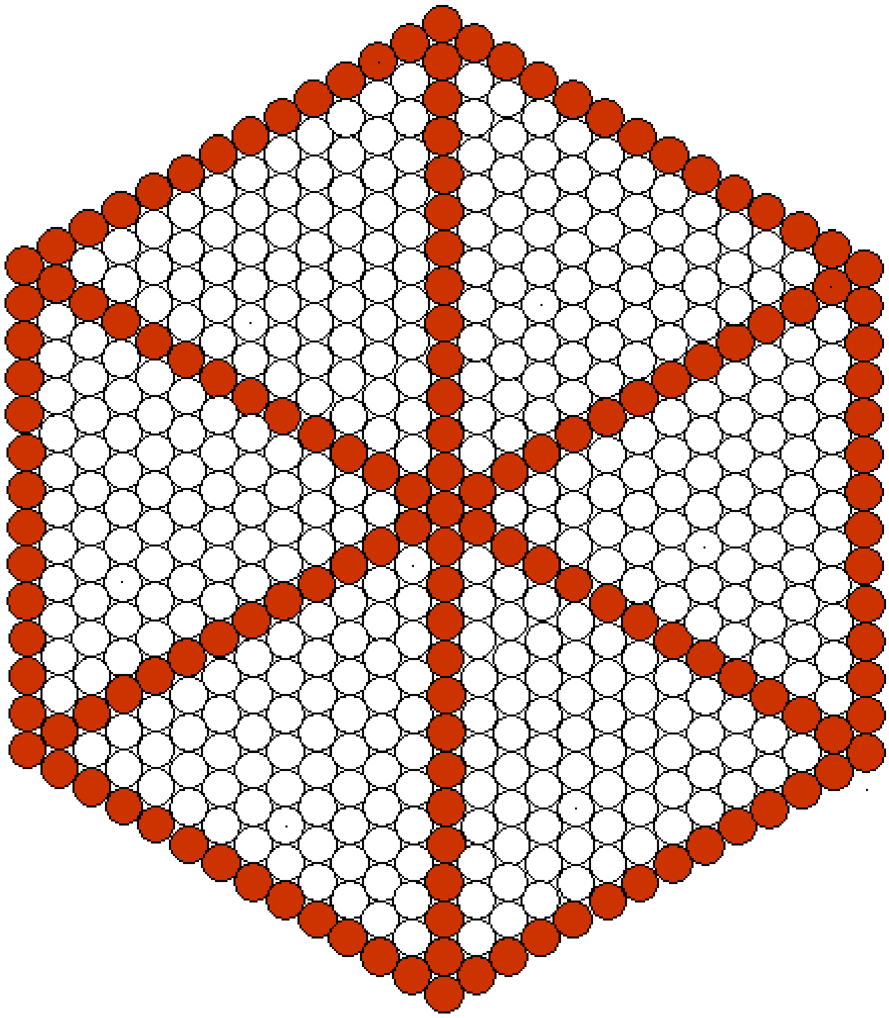
La façon d'entourer un cercle par d'autres cercles comme on l'a vu au départ permet de dessiner l'étoile de David :



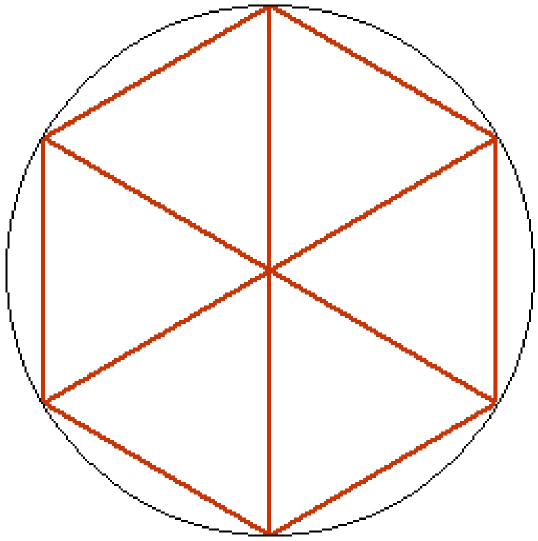
Pour cela il suffit de joindre convenablement les centres des 6 cercles de la première orbite.

8.- Propriétés infinitésimales :

On a vu au point 3 que plus on rajoutait d'orbites, plus on se rapprochait d'un hexagone formé de disques de même rayon. On peut remarquer cela plus clairement grâce au schéma ci-dessous :



Cela veut dire que si l'on continue à rajouter des orbites indéfiniment tout en réduisant la taille des disques afin que l'hexagone formé des disques soit inscrit dans un cercle de rayon 1, on obtiendra cette forme « limite » :



Autrement dit, on obtient un hexagone à partir d'une infinité de disques disposés de la façon indiquée. Et cet hexagone-limite sera lui-même inscrit dans un cercle avec lequel on pourra construire d'autres hexagones et ainsi de suite…

9.- Conclusions

Comme on l'a vu, ces faits géométriques montrent qu'il y a un lien géométrique entre le cercle et le système sexagésimal et que la division du cercle en 360 parties égales, ce qui correspond à 360 angles égaux ou degrés, n'est pas un choix totalement indépendant de la géométrie car cette division peut être suggérée par les propriétés de base des cercles et des triangles équilatéraux. En outre les faits géométriques exposés permettent de représenter des données astronomiques d'une façon qui rappelle le mouvement des planètes autour d'un centre. Et on a pu aussi représenter des nombres en base 60 grâce à ces propriétés du cercle et trouver géométriquement les diviseurs principaux du nombre 60.

Il se peut que la façon de représenter le temps, le partage tenté en 360 parties plus ou moins égales et la représentation des nombres en base 60 exposés dans cet article aient joué un rôle lors de l'adoption du système sexagésimal pour représenter les nombres, diviser le cercle et représenter le temps.

10.- Commentaires

Cet article est la troisième version de la présentation de ces faits géométriques. L'auteur prépare en ce moment une autre version plus complète avec des calculs et avec des précisions demandées par les lecteurs de cette version.

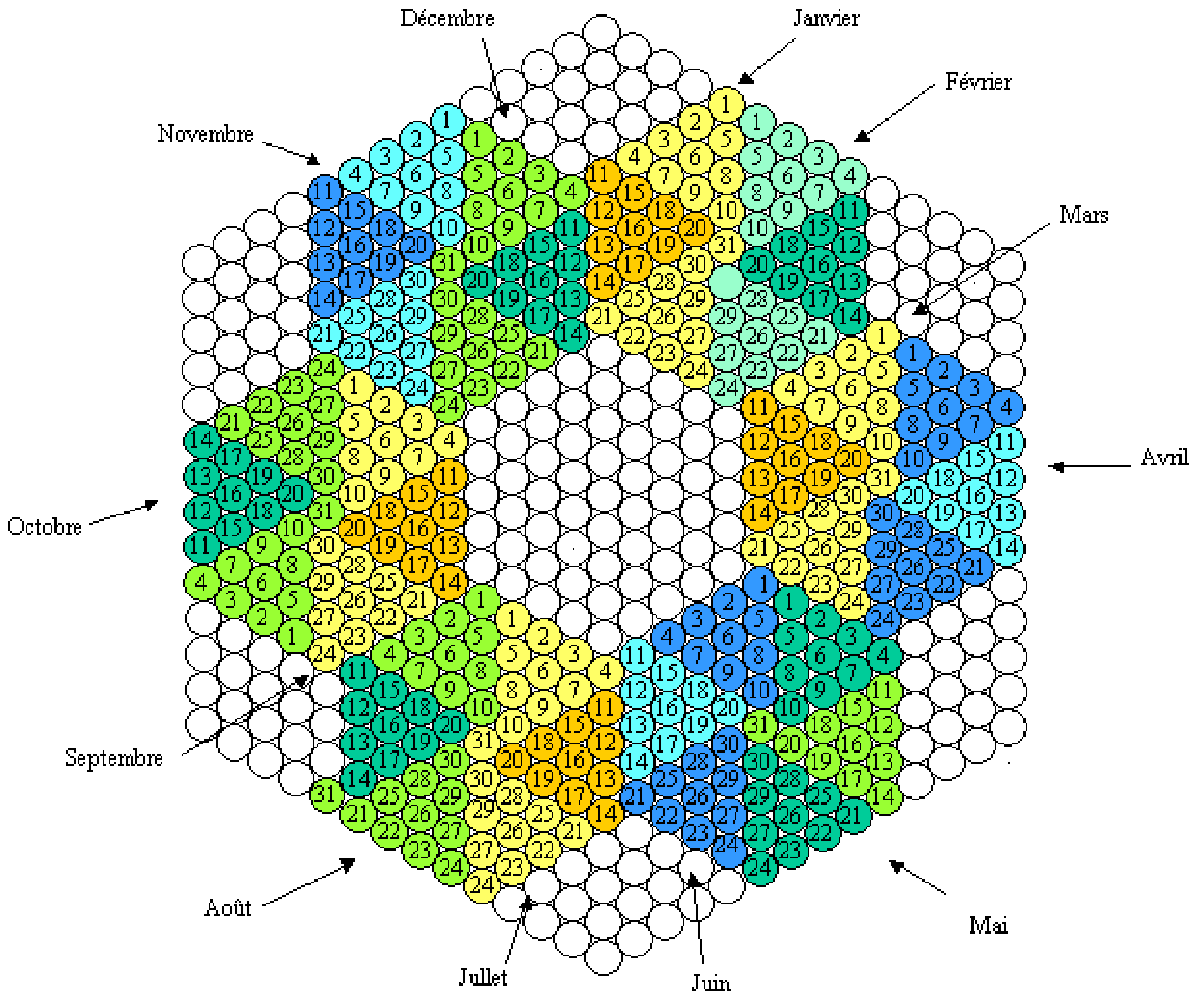
Version 3 du texte intitulé « UNE METHODE NATURELLE POUR DIVISER LE CERCLE EN 360 PARTIES EGALES, CE QUI CORRESPOND A DES DEGRES », écrit en janvier 2005.

Auteur: Jaime Vladimir TORRES-HEREDIA JULCA

Juillet 2005

Notes complémentaires au texte intitulé « Un lien géométrique entre le cercle et le système sexagésimal » écrit par Jaime Vladimir TORRES-HEREDIA JULCA :

1.- A l'aide des orbites vues au point 3 on peut construire des « hexagones » formés de cercles de même rayon de telle sorte qu'avec six hexagones on aura 360 disques colorés (on ne compte pas les cercles du milieu). Avec cela on peut construire donc un calendrier comme on le voit ci-dessous :



Le mois sont distingués par les couleurs jaune, vert et bleu de telle sorte qu'on distingue les groupes de 10 jours pour chaque mois.