Russells und Whiteheads Logizismus

Christoph Kann, Dennis Sölch, Sébastien Gandon

Russells und Whiteheads Logizismus[1]

Sébastien Gandon (Clermont-Auvergne, Frankreich)

I. Einleitung

Die *Principia Mathematica* wurden sowohl von Russell als auch von Whitehead verfasst. Oft heißt es, Russell sei für die philosophische Arbeit verantwortlich gewesen, während Whitehead sich um die technischen Parts kümmern musste. Dass es in der Phase vor der Veröffentlichung der *Principia* tatsächlich eine Arbeitsteilung gab, ist sicherlich wahr: Russell war für die ersten Teile der *Principia* verantwortlich, jene, die der Logik und der finiten Arithmetik gewidmet sind, während Whitehead für die späteren, mathematischeren Teile zuständig war, die sich der Quantität, der Theorie der reellen Zahlen und der Geometrie widmen. Allerdings zeigt ein Blick auf die Korrespondenz zwischen den beiden Autoren, dass auch wenn der erste Impuls stets entweder von Russell oder von Whitehead ausging, kein Teil der *Principia* ohne Überarbeitung oder Korrektur durch den jeweils anderen blieb. Whitehead erörtert detailliert Russells unterschiedliche Versionen der Typentheorie und bestätigt, dass er Russells Kommentare zu seinem eigenen Manuskript über Quantität und Raum erhalten habe. Die *Principia Mathematica* waren also von Anfang an bis zum (veröffentlichten) Ende eine Gemeinschaftsarbeit. Jene Darstellung, die den Philosophen Russell dem Techniker Whitehead gegenüberstellt, lässt weder Russells technischer Expertise noch Whiteheads philosophischen Beiträgen gebührende Anerkennung zuteilwerden.

Der Hauptgrund für die Kritik an dieser Darstellung liegt jedoch an anderer Stelle. Russell war, wie bereits gesagt, bei den ersten Teilen der *Principia* federführend, Whitehead bei den späteren Teilen. Tatsächlich sind nur die ‚Russell'schen' Teile der Bücher viel gelesen und im 20. Jahrhundert entsprechend zur Kenntnis genommen worden, während die weitergehenden ‚Whitehead'schen' Abschnitte (über Reihen und Quantität) vollständig in Vergessenheit geraten sind. Russell gestand, er kenne lediglich sechs Leute, die die späteren Teile der *Principia* gelesen hätten.[2] Und er hatte Recht: Ich bin gerne bereit zu wetten, dass das Exemplar der *Principia Mathematica*, das Sie, liebe Leserin bzw. lieber Leser, besitzen, (wenn Sie denn eines besitzen), das gleiche ist wie meines, nämlich die *Principia* bis Abschnitt 56! Diese halbseitige Rezeption der *Principia,* d.h. diese Verdunklung der Whitehead'schen Teile, verdankt sich teilweise der Tatsache, dass potentielle Leserinnen und Leser der *Principia* meinen, die philosophisch relevanten Abschnitte des Buches seien die

---

[11] Eine frühe Version dieses Aufsatzes erschien unter dem Titel „Russell and the Neo-Logicists" in den *Annals of the Japan Association for Philosophy of Science,* Vol.25, 2017, S. 1-21.

[2] Vgl. Russell (1988), S. 87.

ersten – jene, für die Russell verantwortlich war – und der Rest bestehe bloß aus technischen Details, die jeglicher philosophischen Bedeutsamkeit entbehren. Der vorliegende Aufsatz zielt wesentlich darauf ab, dieser Darstellung zu widersprechen. Man kann, wie ich zeigen werde, nicht davon ausgehen, Russells und Whiteheads philosophisches Projekt verstehen zu können, ohne das philosophische Problem zu berücksichtigen, um das es in den weiter fortgeschrittenen Teilen des Werkes geht. Philosophie steckt überall in den *Principia* – am Anfang, aber auch in den entlegeneren Whitehead'schen Teilen des Buches.

Wenn ich von Russells und Whiteheads Logizismus spreche, dann möchte ich nicht implizieren, dass Russell und Whitehead unterschiedliche Vorstellungen davon gehabt hätten, was Logizismus ist. Natürlich waren Russell und Whitehead sich nicht in allen Dingen einig, aber diese Differenzen hielten sie nicht davon ab, eine breite und kohärente Basis gemeinsamer Ansprüche und Ziele zu teilen. Genau diese große Menge geteilter Überzeugungen, die ihre gemeinsamen Ansichten über Mathematik prägen, werden mich im Folgenden besonders interessieren.

Im vorliegenden Artikel werde ich außerdem ein zweites, verwandtes Ziel verfolgen. In der heutigen Philosophie der Mathematik stehen die von Benacerraf formulierten Probleme bezüglich der Natur mathematischer Objekte und mathematischen Wissens im Mittelpunkt. Gegenwärtige Versionen des Logizismus stellen Versuche dar, diese Art von Problem zu lösen. Nun sind zuletzt Stimmen laut geworden, die sich gegen die Dominanz solcher Fragestellungen, wie der von Benacerraf diskutierten, im Mainstream der Philosophie der Mathematik aussprechen, weil sie der Auffassung sind, dass diese Art von Unterfangen den philosophischen Blick von den weiter fortgeschrittenen Teilen der Mathematik ablenke.[3] Diese Position möchte ich verteidigen, indem ich nahelege, dass die Whitehead'schen Teile der *Principia* sich mit einem Thema befassen, das mit der inneren Organisation mathematischen Wissens zusammenhängt – ein Thema, das sich nicht mit Benacerrafs Problemstellung überschneidet und das heutzutage im Mainstream der Philosophie der Mathematik vernachlässigt wird.

Im zweiten Abschnitt ziehe ich einen Vergleich zwischen dem Neo-Logizismus einerseits und der Version Russells und Whiteheads andererseits. Genauer gesagt lege ich dar,

[3] Mancosu (2008), S. 1: „Das von Benacerrafs Schriften vorgegebene Programm für die Philosophie der Mathematik bestand darin zu erklären, wie wir, wenn es abstrakte Objekte gibt, Zugang zu ihnen haben könnten. [Eine Konsequenz] der Art und Weise, wie die Diskussion geführt worden ist, lautet, dass es von Seiten eines Epistemologen der Mathematik keines besonderen Augenmerks auf die mathematische Praxis zu bedürfen schien. Letzten Endes begegnet uns das Thema abstrakter Objekte bereits auf den elementarsten Ebenen der Arithmetik, der Geometrie und der Mengenlehre. Man könnte leicht den Eindruck gewinnen, dass es für die Lösung der zentralen Probleme des Faches irrelevant ist, den anderen Zweigen der Mathematik Beachtung zu schenken. Daraus resultierte eine äußerst beschränkte Auffassung von der mathematischen Epistemologie innerhalb des Mainstreams der Epistemologie innerhalb der Philosophie der Mathematik."

warum Heck, eine der bedeutendsten Stimmen unter den Neo-Fregeanischen Logizisten, behauptet, dass Freges Theorie der Quantität sowie Russells gesamter Ansatz vernachlässigt werden können. Im dritten bis fünften Abschnitt mache ich einen historischen Exkurs und erläutere einige Hintergrundaspekte der entlegeneren Teile von Russells *Principles of Mathematics* sowie von den *Principia Mathematic*a, die uns ein besseres Verständnis des von Russell und Whitehead durchgeführten Projektes erlauben. Besonderen Wert lege ich auf die Tatsache, dass Russell und Whitehead keine Verfechter der Arithmetisierung der Mathematik waren. Im sechsten Abschnitt komme ich schließlich auf Hecks Argument zurück und erkläre, in welchem Maße Russells und Whiteheads Ansatz auch heute noch relevant ist.

II. Hecks Diagnose

Dass die Philosophiegeschichte nützlich sein und zu gegenwärtigen Debatten beitragen kann, versteht sich keineswegs von selbst. Richard Hecks letztes Buch über Freges *Grundgesetze* ist in dieser Hinsicht interessant, weil Heck explizit behauptet, dass man die entlegeneren Teile von Freges Werk (Freges Theorie der reellen Zahlen) überspringen sollte.[4] Genauer gesagt vertritt Heck die Ansicht, dass wenn Freges Definition natürlicher Zahlen noch eine philosophische Bedeutung zukommt, dies nicht für Freges Analyse reeller Zahlen gelte, die in Teil III der *Grundgesetze der Arithmetik* erörtert wird[5]. Heck erweitert seine Diagnose auf die Russell'sche Version des Logizismus. Ich hege Sympathie für Hecks mangelnde Ehrerbietung. Ich glaube, wie er, dass Historiker erklären müssen, warum sie es für lohnenswert halten, ihre Zeit mit dem Kommentieren alter Bücher zu verbringen. Ich glaube jedoch, dass wir auch heute etwas über die Bedeutung und die Begrenzung unserer eigenen Konzeption des Logizismus lernen können, wenn wir den Whitehead'schen Teilen der *Principia* (ebenso wie den weiter fortgeschrittenen Teilen der *Principles of Mathematics* und Freges Theorie der reellen Zahlen – wobei ich für den letzten Punkt dieser Aufzählung hier nicht direkt argumentieren werde) Beachtung schenken.

Lassen Sie mich Hecks Position etwas genauer erläutern. Heck erklärt, dass Freges reelle Zahlen als lineare Transformationen eines zugrundeliegenden eindimensionalen metrischen Raumes verstanden werden können. Der wichtige Punkt hier ist, dass die Struktur

---

[4] Heck (2012), S. 13: „Bevor wir fortfahren, möchte ich eine Entschuldigung aussprechen […]. Wir werden die *Grundgesetze* nicht in Gänze betrachten. Ich werde nur sehr wenig über Teil III zu sagen haben, der sich mit den reellen Zahlen befasst […]. Das liegt nicht daran, dass der Stoff uninteressant wäre […], also bin ich eine Erklärung schuldig, warum ich ihn nicht behandle."

[5] Vgl. Frege (1998, Orig. 1893 und 1903), Teil III.

R von einer zugrundeliegenden Struktur abgeleitet wird, von der sie ihre Eigenschaften erbt.[6] Darin liegt die Quelle einer philosophischen Schwierigkeit:

> Die offensichtlichere Frage lautet, woher man diesen zugrundeliegenden Raum nehmen soll, und die Frage wird umso drängender, sobald man feststellt, dass wenn die Gruppe linearer Transformationen wie reelle Zahlen aussehen wird, die Struktur bereits isomorph zu den reellen Zahlen sein muss.[7]

So muss man beispielsweise, um die richtige Art von Kontinuität für die Gruppe linearer Transformationen (das heißt, für die reellen Zahlen) zu erhalten, die richtige Art von Kontinuität mit dem zugrundeliegenden Raum (im quantitativen Bereich) postulieren. Wenn der eindimensionale Raum mit der richtigen Art von Eigenschaften ausgestattet wird, dann ist die Definition formal korrekt. Aber Heck moniert, dass damit nichts gewonnen ist, weil das, was man durch die logizistische Definition zu erreichen versucht (nämlich die bekannten Eigenschaften der Struktur R), zu Beginn eingeführt werden sollte (indem die richtigen Bedingungen für den zugrundeliegenden Raum postuliert werden).

Heck zufolge steht dieses Merkmal in scharfem Gegensatz zu dem, was man in Freges Definition natürlicher Zahlen findet. Sicherlich ist Freges historische Konstruktion (auf der Grundlage von Gesetz V) fehlerhaft. Aber Neo-Fregeaner erklären, dass Gesetz V von Frege dazu verwendet wird, um Humes Prinzip (im Folgenden „HP“) herzuleiten, und dass die Herleitung der Gesetze der Arithmetik aus HP korrekt ist.[8] Wright hat Freges Theorem bewiesen: Die Axiome für Peanos Logik[9] können in der Prädikatenlogik zweiter Ordnung von HP abgeleitet werden.[10]

Was Heck am Fall der Arithmetik beeindruckt, ist, dass etwas so unschuldig Scheinendes wie HP uns mit der vollen Kraft der Arithmetik ausstattet. Im Gegensatz zu dem, was bei der Definition der reellen Zahlen passierte, muss man hier nicht die Existenz eines zugrundeliegenden Raumes postulieren, der isomorph zu N ist, um die natürlichen Zahlen zu

---

[6] Für weitere Ausführungen zu Freges Theorie vgl. Hale (2000) und Simons (1987).
[7] Heck (2012), S. 14.
[8] Humes Prinzip besagt, dass die Zahl, die zum Konzept F gehört, identisch mit der Zahl ist, die zu Konzept G gehört, wenn und nur wenn das Konzept F gleichmächtig ist mit dem Konzept G, oder in formaler Anordnung: $Nx : Fx = Nx : Gx \leftrightarrow \forall x(Fx \equiv Gx)$. “Nx : ...x” bezeichnet den abtrakten Operator, der, wenn er auf ein sortales Konzept Fx angewendet wird, die Anzahl der Objekte angibt, die die Eigenschaft F haben. „≡“ bezeichnet die Beziehung der Gleichmächtigkeit.
[9] Heute ist „Peano Arithmetik“ der richtige Name für eine Theorie erster Ordnung der Arithmetik. Ich folge hier den Neo-Logizisten und verwende „Peano Arithmetik“, um eine (Version der) Formalisierung zweiter Ordnung der Arithmetik zu bezeichnen (die der von Peano ausgeführten sehr nahe kommt).
[10] Zum Neo-Logizismus und der Beziehung der neo-logizistischen Interpretation zu Frege vgl. Heck (2011).

erhalten. Insbesondere braucht man kein Unendlichkeitsaxiom zu postulieren.[11] Dieser Punkt ist entscheidend für Heck.

> Frege charakterisiert die Zahlen im Sinne von HP und beweist dann direkt, dass es unendlich viele Zahlen gibt, auch wenn es keine Nicht-Zahlen gibt. Natürlich ist es wesentlich dafür, wie Frege diesen Trick bewerkstelligt, dass Zahlen Objekte sind. Nur dann wird HP endlos neue Zahlen auswerfen: Wir erhalten die Unendlichkeit der Zahlenreihe, indem wir $Nx :(x = 0)$, $Nx :(x = 0) \vee (x = 1)$ und so weiter heranziehen. Das bedeutet, dass 0 und 1 innerhalb des Definitionsbereichs der Variable ‚x' liegen müssen, die eine objekthafte Variable ist.[12]

Die Anwendung der gerade definierten ganzen Zahlen, um ihre Nachfolger zu abstrahieren, ist der Trick, der es Frege erlaubt, ‚endlos neue Zahlen auszuspucken', ohne dabei auf ein Unendlichkeitsaxiom zurückzugreifen.

Heck betont, dass dieses Merkmal Freges Konstruktion von derjenigen Russells abhebt. Im Jahre 1903 geht Russell (fälschlicherweise) davon aus, dass er einen Beweis für die Existenz einer unendlichen Anzahl von Entitäten gefunden habe.[13] 1912 begeht er nicht denselben Fehler, insofern das Unendlichkeitsaxiom nun stets als vorhergehende Bestimmung in einem Konditional auftritt. Beim Umgang mit der finiten Arithmetik vermeidet es Russell, diese Hypothese heranzuziehen, indem er auf eine aufwendige Strategie aufsteigender Typen zurückgreift.[14] Aber sobald er zur reellen Analysis kommt, muss Russell Konditionalsätze einführen. Heck hat somit Recht, wenn er sagt, dass Russell „sich auf ein Axiom berufen muss, das behauptet, es gäbe unendlich viele Dinge, die keine Zahlen sind, um zu beweisen, dass es unendlich viele Dinge gibt, die es sind“[15], und dass dies in markantem Gegensatz zu dem steht, was Frege in den *Grundgesetzen* macht.

Es hat also etwas Besonderes auf sich mit der Neo-Fregeanischen Deduktion natürlicher Zahlen, das man nirgendwo sonst findet. Ontologisch gesprochen ist HP ein schwaches Prinzip in dem Sinne, dass es nicht durch sich selbst eine unendliche Anzahl von Objekten[16] in einem zugrundeliegenden Raum setzt. Darüber hinaus ist HP mit dem Konzept der Abstraktion verbunden, das seit Aristoteles eine Schlüsselrolle in der Erkenntnistheorie

---

[11] Mit „Unendlichkeitsaxiom“ meine ich die „Annahme, die sich wie folgt ausdrücken lässt: ‚Wenn n eine beliebige Kardinalzahl ist, dann gibt es mindestens eine Klasse von Individuen mit n Termen.“ Russell (1919), S. 131. Mit anderen Worten: Das Unendlichkeitsaxiom ist nicht dasselbe wie Zermelos Annahme, dass es eine unendliche Menge gibt.

[12] Heck (2012), S. 14.

[13] Vgl. Russell (1903), §339.

[14] Zu dieser Strategie, vgl. Landini (1998).

[15] Heck (2012), S. 14.

[16] Natürlich impliziert Freges Theorem, dass es eine unendliche Anzahl von Objekten gibt. Aber für sich genommen, losgelöst vom Kontext der Prädikatenlogik zweiter Ordnung, hat HP keine solche Konsequenz.

spielt. Diese beiden Merkmale erklären, warum Freges Herangehensweise, von einer philosophischen Perspektive aus betrachtet, die bessere ist:

> Sicherlich spielt HP im Neo-Logizismus eine wichtige formale Rolle, aber erst seine ontologischen und epistemologischen Rollen machen Freges Theorem zu etwas, das all die philosophische Aufmerksamkeit verdient, die es bekommen hat.[17]

Freges Theorie der Quantität ist ebenso formal korrekt wie Russells Theorie der ganzen Zahlen. Aber beide Grundstrukturen sind ontologisch und epistemologisch wertlos. Der ontologische Mehrwert ist gleich null, weil man zuerst eine Menge von Objekten mit den Eigenschaften (Kontinuität oder Unendlichkeit) ausstatten muss, die man am Ende wieder herausbekommen will. Außerdem gibt es keine epistemologische Geschichte, die erklärt, woher man eigentlich weiß, dass der zugrundeliegende Raum kontinuierlich oder unendlich ist. Aus philosophischer Perspektive ist HP bzw. der Gebrauch, den Frege von ihm in den *Grundgesetzen* macht, konkurrenzlos. So lauter Hecks Argument.

Lassen Sie mich dieses Argument umformulieren. Aus philosophischer Perspektive lässt sich der Neo-Logizismus als einen Versuch verstehen, das Dilemma zu lösen, das von Benacerraf ausführlich dargestellt wird.[18] In seinem bereits erwähnten Artikel über mathematische Wahrheit setzt Benacerraf zwei Ziele, die er für jede Philosophie der Mathematik als zentral ansieht, nämlich erstens den Nachweis der Wahrheit von mathematischen Aussagen[19] und zweitens Rechenschaft über die Erkenntnis jener Wahrheiten.[20] Benacerraf behauptet, dass wir jede dieser Bedingungen nur auf Kosten der jeweils anderen erfüllen können. Um den Nachweis der Wahrheit einer basalen arithmetischen Aussage erbringen zu können, muss man zuerst zugestehen, dass es arithmetische Objekte gibt – aber da diese Objekte nicht wahrnehmbar sind, ist es nicht ganz leicht zu erklären, wie wir überhaupt etwas über sie wissen können. Andererseits bedroht jeder Versuch, eine vernünftige Erklärung für mathematisches Wissen zu geben, die Vorstellung, dass mathematische Aussagen etwas über unabhängige mathematische Tatsachen zum Ausdruck bringen. Heck und den Neo-Logizisten zufolge erklärt HP, wie man sich auf Zahlen beziehen und arithmetisches Wissen erlangen kann, ohne sich auf eine unvernünftige

---

[17] Heck (2012), S. 15.
[18] Vgl. Benacerraf (1973).
[19] Ibid, S. 666: Jede Theorie mathematischer Wahrheit [sollte] in Übereinstimmung mit einer allgemeinen Wahrheitstheorie stehen […], die bezeugt, dass die Eigenschaft von Sätzen, die der Nachweis als ‚Wahrheit' bezeichnet, tatsächlich ‚Wahrheit' ist."
[20] Ibid, S. 667: „Ein zufriedenstellender Nachweis mathematischer Wahrheit […] muss sich in eine Gesamtbetrachtung der Erkenntnis einfügen, und zwar in einer Weise, die verständlich macht, wie wir zu der mathematischen Erkenntnis gelangen, die wir de facto besitzen."

intellektuelle Intuition verlassen zu müssen. Unter dem Titel „Benacerraf's Dilemma Revisited“ haben Hale und Wright den Neo-Logizismus als eine ‚intellektuelle‘ Antwort auf Benacerrafs Dilemma präsentiert.[21] Ihnen zufolge liefert uns HP eine plausible Lösung für Benacerrafs Dilemma, die sowohl einen extremen Platonismus als auch einen Fiktionalismus vermeidet.

Russells Herangehensweise liefert uns nichts dergleichen. In den *Principles of Mathematics* ist Russell ein ausgewachsener Platoniker und verficht eine ziemlich unvernünftige Epistemologie, die auf der Bekanntschaft mit abstrakten Objekten basiert. Zur Zeit der *Principia Mathematica* ist Russells Position jedoch deutlich feiner und präziser, sodass sie durchaus mit Neo-Fregeanischen Ansätzen zur Lösung von Benacerrafs Dilemma konkurrieren könnte. Tatsächlich behauptet Russell dort nicht, dass Zahlen und Klassen *Bona-fide-Objekte* sind, sondern sogenannte ‚unvollständige Symbole‘. Diese Grundlage ließe sich weiter ausarbeiten, um eine nominalistische Antwort auf Benacerrafs Dilemma zu geben. Dies ist der vielversprechende Weg, den jüngst Kevin Klement eingeschlagen hat.[22] Da ich mich auf die ‚Whitehead'schen‘ Abschnitte der *Principia Mathematica* konzentriere, werde ich diesen Weg hier nicht weiter verfolgen. Ich werde mich also an die offizielle, ‚unvernünftige‘ epistemologische Position halten, die Russell 1903 vertreten hat (die er aber um den Zeitraum von 1910 bis 1913 herum im Hinblick auf logische Konstanten und logische Formen noch immer vertrat). In den noch folgenden Kapiteln dieses Aufsatzes werde ich daher Hecks Behauptung folgen, der zufolge der Gebrauch, den Frege von HP macht, uns Grund zur Hoffnung gibt, Benacerrafs Herausforderung ließe sich auf eine Weise meistern, die weder Russells logische Konstruktionen noch Freges Definition reeller Zahlen gelingt. Wenn das aber der Fall ist, dann kommt eine neue Frage auf: Wenn Russells Anliegen nicht von der Art von Interesse motiviert ist, die Heck ‚philosophisch‘ nennt, von welchen Interessen war er dann motiviert? Falls Russell keine interessante Antwort auf Benacerrafs Dilemma anbietet, wie können wir dann philosophische Objekte so umdefinieren, dass es uns möglich wird zu sagen, dass wir das Gesuchte gefunden haben, wenn wir die *Principles of Mathematics* und die *Principa Mathematica* lesen?

---

[21] Hale, Wright (2002), S. 103f.: „Zwei breit gefasste Ansätze scheinen möglich: intuitiv und intellektuell. Man könnte erstens vorschlagen, dass eine Epistemologie der Mathematik auf ein besonderes Vermögen zählen sollte – traditionell die ‚Intuition‘ – die ein Bewusstsein von Systemen abstrakter und insbesondere mathematischer Objekte und ihrer charakteristischen Eigenschaften ermöglichen, ungefähr in der Weise, wie die gewöhnliche Sinneswahrnehmung uns ein Bewusstsein von gewöhnlichen konkreten Objekten und ihren Eigenschaften ermöglicht. Oder man könnte [zweitens] vorschlagen, dass uns der Zugang zu den Objekten der reinen Mathematik durch unsere allgemeinen Vernunft- und Verstandesfähigkeiten eröffnet wird.“ Bei den beiden intellektuellen Herangehensweisen handelt es sich um den Neo-Logizismus und Shapiros Ante-Rem-Strukturalismus.

[22] Vgl Klement (2012) sowie Klement (2015).

Bevor wir uns dieser Frage stellen, lassen Sie mich zwei Anmerkungen zur Neo-Fregeanischen Sichtweise machen:

1. Im Neo-Logizismus spielt die Arithmetik eine zentrale Rolle. Das liegt natürlich zum Teil an HP, aber es ist auch den Arbeiten der Arithmetisierer am Ende des 19. Jahrhunderts geschuldet, die gezeigt haben, dass die Kluft zwischen diskreter und kontinuierlicher Quantität nicht irreduzibel ist. Reelle Analysis und Geometrie, und dann wiederum auch die Mathematik als Ganze, können als das Studium komplizierter Strukturen auf der Grundlage von ganzen Zahlen angesehen werden. Sobald es erfolgreich gelingt, die Natur arithmetischen Wissens zu erklären, kann man die Erklärung auf die anderen Arten (geometrische etc.) mathematischen Wissens ausweiten. Arithmetisches Wissen ist nicht bloß ein Teil der Mathematik, es ist die Grundlage des gesamten Gebäudes. Natürlich möchte ich hier nicht die Tatsache infrage stellen, dass man die Mathematik als eine Ausweitung der Arithmetik darstellen kann. Worauf es mir ankommt, ist lediglich die Tatsache, dass im Neo-Logizismus das mathematische Wissen als Ganzes als eine philosophisch unproblematische Ausweitung arithmetischen Wissens angesehen wird. Jede Frage nach der Art und Weise, wie die Mathematik zu ordnen ist, wie das zu systematisieren ist, was tatsächlich ein vielfältiger und facettenreicher Bereich ist, der aus mehreren verschiedenen Teilen besteht, wird als unwichtiges Detail betrachtet. Ich bin mir bewusst, dass ich die Sachlage etwas zu stark vereinfache: die Neo-Logizisten richten ihre Aufmerksamkeit nicht nur auf ganze Zahlen; es gibt durchaus Versuche, die Mengentheorie oder die Theorie reeller Zahlen herzuleiten.[23] Aber diese Versuche spielen nur eine marginale Rolle in der andauernden Debatte, insofern diese Ausweitungen nicht von allen Neo-Logizisten mitgetragen werden[24] – und auch insofern die Dispute über die Natur von Abstraktionsprinzipien sich zumeist auf HP und den Fall der Arithmetik konzentrieren.

2. Der zweite, verwandte, Punkt ist, dass im Neo-Logizismus die Hauptaufgabe darin besteht, eine Deduktionslinie zu konstruieren, die von der (durch HP erweiterten) Logik bis zur (arithmetischen) Mathematik reicht. Das heißt, die neo-logizistische Behauptung ist vor allem eine Existenzbehauptung: Gibt es einen Weg, um den mathematischen Inhalt aus der schmalen logischen Basis herzuleiten? Freges Theorem zeigt, dass es einen solchen Weg gibt. Das Scheitern des historischen Frege kann als die Entdeckung verstanden werden, dass die erwartete Herleitung tatsächlich nicht existiert hat. Natürlich möchte ich hier nicht bestreiten, dass alle Arten von Logizisten behaupten, es gebe einen deduktiven Pfad, der von der Logik

[23] Shapiro (2003) bietet eine Erörterung der Aussichten, die Mengentheorie auf das Abstraktionsprinzip zurückzuführen. Hale (2000) versucht, Freges Theorie der reellen Zahlen auf Abstraktion zu gründen.
[24] Vgl. Wright (2000).

hin zur Mathematik reicht. Was ich jedoch betonen möchte, ist, dass dieser Fokus auf die Existenz die Frage nach der Einzigkeit in den Hintergrund verbannt. Wenn sich herausstellte, dass mehr als ein Pfad existiert, wie wählt man dann den richtigen aus? Das ist ein Thema, das von den Neo-Logizisten nicht erörtert wird. Ich vereinfache hier wiederum ein wenig zu stark: Es hat durchaus Debatten über die unterschiedlichen Wege gegeben, die Folge natürlicher Zahlen aus Abstraktionsprinzipien herzuleiten.[25] Aber es besteht kein Zweifel, dass das Problem, zwischen verschiedenen legitimen abstraktiven Konstruktionen zu vermitteln, nebensächlich ist im Vergleich mit dem verwandten Thema der Legitimität des Gebrauchs von Abstraktionsprinzipien.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass im Neo-Logizismus das zentrale philosophische Problem in Folgendem besteht: Wie kann HP Benacerrafs Herausforderung meistern? Dies impliziert, dass arithmetisches Wissen und die Definition von ganzen Zahlen in HP im Mittelpunkt stehen. Verglichen mit diesem Thema sind die beiden anderen Fragen unbedeutend, nämlich: Wie ist mathematisches Wissen zu strukturieren? Wie lässt sich eine Definition in einem Kontext auswählen, wenn mehr als eine möglich ist? In Abschnitt 4 werde ich zu zeigen versuchen, dass diese beiden Nebenprobleme genau jene sind, die für Russells Denken in den entlegeneren Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* zentral sind. Vorher aber muss ich erklären, was in diesen wenig bekannten und wenig vertrauten Texten passiert.

III. Russells epistemologischer Fundamentalismus auf den Kopf gestellt: Logizismus und Arithmetisierung

Die Auffassung, dass Russell in den *Principles of Mathematics* und Whitehead in den *Principia Mathematica* das Programm der Arithmetisierung mittrugen, ist weitverbreitet. Anscheinend ist sie das aus gutem Grund. Russell selbst ist der Erste, der seinen Logizismus als eine Ausweitung der reduktivistischen Herangehensweise der Arithmetisierer dargestellt hat. In der Tat findet sich am Beginn von Russells *Einführung in die mathematische Philosophie* folgende Passage:

> Man kann die gesamte herkömmliche reine Mathematik, einschließlich der analytischen Geometrie, als eine Reihe von Sätzen über die natürlichen Zahlen auffassen, d.h. die vorkommenden Ausdrücke lassen sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen definieren. Und ihre Sätze lassen sich aus den Eigenschaften der natürlichen Zahlen unter Hinzunahme der Begriffe und

[25] Vgl. Boolos Vorschlag, die Folge natürlicher Zahlen durch eine Modifikation von Freges Axiom V herzuleiten in Boolos (1989) und die Analyse von Shapiro (1999).

> Sätze der reinen Logik ableiten. Es ist eine ziemlich neue Entdeckung, daß die ganze übliche reine Mathematik sich aus den natürlichen Zahlen ableiten läßt […]. Vorderhand wollen wir die Arithmetisierung der Mathematik hinnehmen, obwohl diese Tat von der größten Wichtigkeit war. Nachdem die gesamte übliche reine Mathematik auf die Theorie der natürlichen Zahlen zurückgeführt worden war, war es die nächste Aufgabe der logischen Analyse, diese Theorie auf die geringste Zahl von Voraussetzungen und undefinierten Ausdrücken zurückzuführen, aus denen sie abgeleitet werden konnte.[26]

Russells Ausgangspunkt ist die Tatsache, dass die Arithmetisierer (Dedekind, Cantor, Weierstrass) die gesamte Mathematik auf die Arithmetik gegründet haben. Von diesem Blickwinkel aus kann die Geometrie auf die Theorie der reellen Zahlen zurückgeführt werden, die wiederum auf die Arithmetik zurückgeführt werden kann:

Geometrie
Theorie der reellen Zahlen
Arithmetik

Russells Logizismus würde noch einen Schritt weiter gehen: Die gesamte Mathematik, einschließlich der Arithmetik, würde auf die Logik gegründet. Das Bild der Mathematik, das Russell zum Ausdruck bringt, sähe also wie folgt aus:

Geometrie
Theorie der reellen Zahlen
Arithmetik
Logik

Tabelle 1: Logizismus und Arithmetisierung

Das würde erklären, warum die Definition von ganzen Zahlen zentral ist: Sobald die Arithmetik aus der Logik hergeleitet worden ist, können die Arbeiten von Cantor, Dedekind und Weierstraß dazu verwendet werden, um den Rest der Mathematik herzuleiten. Dieses Bild, in dem die mathematischen Disziplinen hierarchisch aufeinandergestapelt und allesamt auf die Logik gegründet sind, ist das Standardbild. Bisweilen wird sogar der Logizismus mit diesem Schema gleichgesetzt. Es gilt jedoch zu bedenken, dass sich uns diese vertikale Struktur nicht aufzwingt. Man kann durchaus ein Logizist sein und es gleichzeitig ablehnen,

[26] Russell (2002), S. 8f.

der Arithmetik eine solche Bedeutung zuzusprechen. In der Tat ist die Vorstellung, dass sich die gesamte Mathematik aus der Logik herleiten lässt, vollkommen kompatibel mit einer Situation, in der die verschiedenen mathematischen Bereiche und Teildisziplinen nicht sämtlich auf die Arithmetik zurückgeführt werden können. Entsprechend gibt das folgende Schema, in dem Geometrie und reelle Analysis direkt aus der Logik hergeleitet werden, ohne zuerst auf Arithmetik zurückgeführt zu werden, eine logizistische Sichtweise der Mathematik wieder.

<table>
<tr><td>Arithmetik</td><td>Theorie der reellen Zahlen</td><td>Geometrie</td></tr>
<tr><td colspan="3">Logik</td></tr>
</table>

Tabelle 2: Logizismus ohne Arithmetisierung

In diesem Abschnitt besteht mein Ziel darin zu zeigen, dass dieses Bild genau das ist, das auch von Russell und Whitehead befürwortet wird. Ich möchte demonstrieren, dass Russell und Whitehead – im Gegensatz zu dem, was Russell in der *Einführung in die mathematische Philosophie* nahelegt – kein Arithmetisierungsprogramm befürwortet haben. Dass die Arithmetisierung der Mathematik kritisch beäugt wurde, lässt erstmals ein Brief von Whitehead an Russell erkennen, der auf den 14. September 1909 datiert ist.

> Die Bedeutsamkeit von Quantität wächst, je länger man darüber nachdenkt – Die moderne Arithmetisierung der Mathematik ist durch und durch ein Fehler. […] Betrachtet man [mathematische Entitäten] als die einzigen Entitäten, dann hat das tatsächlich komplizierte Vorstellungen zur Folge, insofern alle möglichen Arten von Irrelevanzen damit einhergehen. – Kurz gesagt, die altmodischen Algebras, in denen von ‚Quantitäten' die Rede ist, hätten Recht gehabt, wenn sie nur gewusst hätten, was ‚Quantitäten' sind – sie wussten es nur nicht.

Whitehead könnte sich kaum deutlicher ausdrücken: Die Arithmetisierung ist ein Fehler. Aber der Absatz stammt nicht von Russell und ist einem unveröffentlichten, privaten Brief entnommen. Sollten wir uns nicht mit Bedacht an das Standardbild halten und diese unorthodoxe Meinung außer Acht lassen?

Tatsächlich stimmt das, was sich in den fortgeschrittenen Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* (die weiter unten kurz beschrieben werden) findet, mit dem überein, was Whitehead in seinem Brief sagt. Russell war derselben Auffassung wie Whitehead. Es sind also die hinlänglich bekannten Beschreibungen aus Russells *Einführung in die mathematische Philosophie*, die ein falsches Bild vom Inhalt der

Principia Mathematica zeichnen, und nicht Whiteheads Behauptung. Die *Einführung in die mathematische Philosophie* sollte ein populärwissenschaftliches Buch werden, in dem Russell seine Position grob vereinfacht. Es ist allerdings bemerkenswert, dass Russell sogar hier bisweilen auf Alternativen zum Arithmetisierungsprogramm anspielt. Nachdem er beispielsweise eine rationale Zahl ‚auf arithmetische Weise' definiert hat (als eine Äquivalenzklasse in N x N), erklärt Russell:

> Man braucht die Brüche […] am offensichtlichsten vielleicht bei Messungen. Mein Freund und Arbeitskollege Dr. A.N. Whitehead hat eine Theorie der Brüche entwickelt, die besonders für Messungen geeignet ist. Sie ist in den Principia Mathematica dargestellt.[27]

In seiner *Einführung in die mathematische Philosophie* hat Russell auf diese nicht-arithmetischen Konstruktionen lediglich angespielt und seine Leser auf die *Principia Mathematica* verwiesen, wo das Thema vollumfänglich behandelt würde.[28] Lassen Sie mich seinem Ratschlag folgen und die *Terra Incognita* betreten. Ich werde mich auf die beiden wichtigen Beispiele der Theorie der reellen Zahlen in den *Principia Mathematica* und der Theorie des Raumes in den *Principles of Mathematics* konzentrieren.[29] In beiden Fällen werden wir sehen, dass Russell und Whitehead sich ‚der modernen Arithmetisierung' widersetzten. Ich werde mich jedoch, aus Platzgründen, kurz fassen und nicht in Entwicklungen vertiefen, die im Detail allzu kompliziert sind.[30]

IV. Reelle Zahlen in den Principia

Wie definieren Russell und Whitehead rationale und reelle Zahlen in den *Principia*? Seinerzeit wurden Standardverfahren genutzt (z.B. Cauchyfolgen oder Dedekind-Schnitte), um die reellen Zahlen vermittels der rationalen Zahlen zu definieren – die wiederum vermittels der ganzen Zahlen definiert wurden. De facto stützten Russell und Whitehead sich im vierten Teil ihres Werkes stark auf die Methode der Dedekind-Schnitte. In Abschnitt ∗275 beweisen die Autoren, nachdem sie eine formale Definition der Folge von Ordnungstyp η (d.h. die Folge, die isomorph zu Q ist) und der Folge von Ordnungstyp θ (d.h. der Folge, die

[27] Russell (2002), S. 75.
[28] Das gilt auch für eine andere Stelle der *Einführung in die mathematische Philosophie*, an der Limites und Stetigkeit von Funktionen für solche Funktionen definiert werden, in denen der Begriff der Zahl nicht vorkommt. Vgl. ibid, S. 121.
[29] Natürlich war Whitehead keineswegs Mitverfasser der *Principles of Mathematics*. Aber Whitehead war zuständig für die Geometrie in den *Principia Mathematica*, und er schrieb 1906 und 1907 zwei Abhandlungen über projektive und darstellende Geometrie, die Russells Theorie des Raumes von 1903 wiederaufgreifen und erweitern.
[30] Vgl. dazu weiterführend Gandon (2012).

isomorph zu R ist) gegeben haben, dass die Folge von Dedekind-Schnitten einer η-Folge eine θ-Folge ist.[31] Dieses Theorem ist eine neue Formulierung von Dedekinds Konstruktion von R als die Menge der Schnitte in Q.

Macht dieser Gebrauch von Dedekinds Verfahren Russell und Whitehead zu Anhängern des Arithmetisierungsprogramms? Keineswegs. Der fünfte Teil der *Principia Mathematica* ist der allgemeinen Theorie der Reihen gewidmet. In diesem Stadtium findet der Begriff der Zahl keine Erwähnung. Nur in Teil IV der *Principia Mathematica* werden rationale und reelle Zahlen definiert. Wie bei Frege werden reelle Zahlen in Teil IV der *Principia Mathematica* mit der Messung von Quantitäten in Verbindung gebracht. Während aber Frege die Definition einer reellen Zahl aus einer sehr spezifischen zugrundeliegenden Struktur abgeleitet hat, unterscheiden Russell und Whitehead zwei Arten von Zahlen, nämlich die ‚reinen' und die ‚angewandten' Zahlen.[32] Angewandte Zahlen ähneln Freges Zahlen in dem Sinne, dass man von ihnen einerseits sagen kann, dass sie Quantitäten messen, und andererseits, dass sie Transformationen (Russell und Whitehead verwenden den Ausdruck ‚relations') zwischen den Elementen eines zugrundeliegenden Raumes sind. Reine Zahlen entsprechend allerdings nichts von dem, was sich bei Frege findet. Sie sind ebenfalls Relationen, aber der Definitionsbereich, in dem sie gelten, ist sehr allgemein und nicht durch Postulate eingeschränkt.

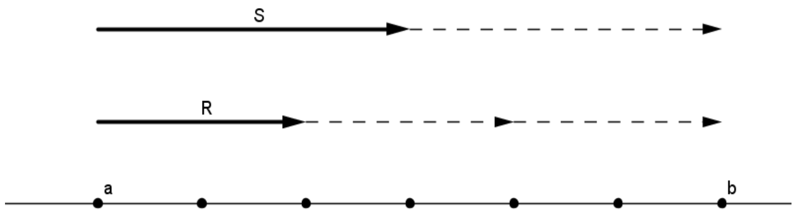
Um die Unterscheidung zwischen reinen und angewandten Zahlen klarer zu machen und um die Einsicht darzulegen, die maßgeblich ist für die Entwicklung Russells und Whiteheads, konzentriere ich mich auf rationale Zahlen. Die reine rationale Zahl m/n, wobei m und n zwei positive ganze Zahlen ($n \neq 0$) sind, wird in ∗303.01 definiert.[33]

$$m/n =_{def} \{(R, S) \mid R^n \cap S^m = \emptyset\}$$

Die Definition greift auf den Begriff des relationalen Produkts zurück: wenn A und A zwei binäre Relationen (desselben Typs) sind, dann ist es möglich, die Relation A|B zu bilden, die derart ist, dass A|B(x, y), wenn und nur wenn es ein solches z gibt, dass A(x, z) und B(z, y). Das relationale Produkt ist also die Erweiterung des vertrauten Begriffs der Verkettung von Funktionen auf binäre Relationen. Nun ist R^n das relationale Produkt von R, n mal mit sich selbst multipliziert. Gemäß ∗303.01 haben zwei binäre Relationen R und S (desselben Typs) das Verhältnis m/n, wenn und nur wenn es mindestens zwei Objekte x und y gibt, derart, dass $R^n(x, y)$ und $S^m(x, y)$.

[31] Vgl. Russell, Whitehead (1910-1913), Bd. 3, ∗275.21.
[32] Vgl. ibid, S. 407.
[33] Vgl. ibid, S. 260.

Um diese Idee zu verstehen, stellen wir uns vor, dass R und S zwei orientierte Vektoren seien, die auf eine euklidische Linie wirken; dann haben R und S das Verhältnis m/n, wenn und nur wenn n Schritte der Länge R von einem Punkt a aus zu exakt demselben Punkt b führen wie m Schritte der Länge S.



Hier haben die Vektoren R und S das Verhältnis 2/3, weil drei Schritte der Länge R von a aus zu exakt demselben Punkt b führen wie zwei Schritte der Länge S. Die Definition ∗303.01 greift die Einsicht hinter der euklidischen Definition eines Verhältnisses auf und verallgemeinert sie. Nachdem sie Addition, Multiplikation und Folge für reine rationale Zahlen eingeführt haben,[34] machen sich Russell und Whitehead (mit Hilfe des Unendlichkeitsaxioms) daran zu beweisen, dass die Menge der Verhältnisse einen dichten archimedischen geordneten Körper hervorbringt. Das bedeutet, dass die reinen Verhältnisse der *Principia Mathematica* exakt dieselben Eigenschaften haben wie unsere gewöhnlichen rationalen Zahlen.

Der Unterschied zu Frege rührt von der Tatsache her, dass die relationale Struktur, auf die reine Verhältnisse angewandt werden, nicht so spezifisch ist wie Freges zugrundeliegender Raum. Von typologischen Beschränkungen einmal abgesehen, unterliegt der Definitionsbereich, zu dem die Relationen R und S gehören, keinerlei Einschränkungen. Dieses Merkmal wird durch das obige Beispiel von Vektoren, die auf die euklidischen Linien wirken, leicht verdeckt. Tatsächlich ist es, anders als das Beispiel suggeriert, so, dass rationale Zahlen gar nichts messen: Zwei Relationen R und S können verschiedene Verhältnisse haben, und ein und dasselbe Verhältnis kann zwischen R und zwei unterschiedlichen Relationen gelten. Als Messung von Relationen betrachtet, sollten dem Definitionsbereich der Relationen, auf den die rationalen Zahlen angewandt werden, ergänzende Einschränkungen auferlegt werden. Das ist der Grund, warum Russell und Whitehead sich in ihrer

[34] Vgl. ibid, ∗304, ∗305, ∗306.

Untersuchung, in Abschnitt B, Teil VI der *Principia Mathematica*, auf Vektorfamilien, d.h. auf spezifischere Mengen von Relationen, konzentrieren, nachdem sie in Abschnitt A die Eigenschaften reiner Relationen dargelegt haben. Die allgemeine Theorie der Messung (bzw. die Theorie angewandter Zahlen), die die Resultate von Abschnitt A über reine Zahlen mit den Ergebnissen von Abschnitt B über Vektorfamilien zusammenführt, wird in Abschnitt C dargelegt. Während Frege von Anfang an mit sehr spezifischen quantitativen Definitionsbereichen (analog zu den Vektorfamilien in den *Principia Mathematica*) beginnt, definieren Russell und Whitehead zuerst einen sehr allgemeinen Begriff der Zahl (der mit all den üblichen arithmetischen Eigenschaften ausgestattet ist), der für jede beliebige relationale Struktur gilt; dann spezifizieren sie den Definitionsbereich der Relationen, um sicherzustellen, dass Zahlen, wenn sie so definiert sind, die Vektoren, auf die sie angewandt werden, messen (in einem Sinn, der zu Beginn von Abschnitt C definiert wird).[35]

Russells und Whiteheads Konstruktion rationaler und reeller Zahlen ist knifflig und komplex,[36] aber es ist, glaube ich, genug gesagt worden, um zu zeigen, dass Whitehead nicht herumfaselte, als er in seinem Brief an Russell konstatierte, dass „die Arithmetisierung der Mathematik durch und durch ein Fehler ist“ und dass „die altmodischen Algebras, in denen von ‚Quantitäten‘ die Rede ist, Recht gehabt [hätten], wenn sie nur gewusst hätten, was ‚Quantitäten‘ sind“. In den *Principia Mathematica* werden rationale und reelle Zahlen nicht als auf ganzen Zahlen basierende mengentheoretische Konstruktionen betrachtet; sie werden vielmehr als Relationen von Relationen angesehen, und sie sind, auf sehr viel flexiblere Weise als bei Frege, mit der Messung von Quantitäten verbunden.

Ich möchte etwas ergänzen. Die Verbindung, die in Teil VI der *Principia Mathematica* zwischen Zahlen und Quantitäten gemacht wird, wurzelt in der Geometrie, insbesondere im Thema der Einführung von Koordinaten in einen geometrischen Raum. Das Problem der Verbindung zwischen synthetischen (euklidischen) und analytischen (cartesischen) Herangehensweisen in der Geometrie nahm in der Mathematik des 19. Jahrhunderts eine zentrale Rolle ein. Eine Art und Weise, mit diesem Thema umzugehen, bestand darin, das Koordinatengitter als Resultat einer geometrischen Konstruktion einzuführen bzw. als das Resultat der Wiederholung einer geometrischen Konstruktion. Möbius konzipierte eine solche Methode, die nach ihm durch von Staudt verallgemeinert und systematisiert wurde. Im zweiten Band ihrer klassischen *Projective Geometry* gründen Veblen und Young die

---

[35] In dieser Hinsicht entgeht Russells und Whiteheads Definition dem Vorwurf, den Heck an Freges Definition reeller Zahlen gerichtet hat: die Autoren der *Principia Mathematica* erlegen dem quantitativen Definitionsbereich keine besonderen Beschränkungen auf, um wieder die vertrauten ordinalen Eigenschaften der rationalen Zahlen zu erhalten.

[36] Für mehr zu dieser faszinierenden Theorie, vgl. Gandon (2012), Kapitel 5.

Klassifikation der verschiedenen projektiven Räume auf die Analyse der Eigenschaften des Möbiusnetzes (d.h. die Koordinatengitter, die durch die Möbiuskonstruktion generiert werden). Russells und Whiteheads Theorie der Messung im sechsten Teil der *Principia Mathematica* ist ausdrücklich ein Versuch, Möbius‘ Verfahren in eine sehr allgemeine Art von (nicht notwendigerweise projektiver) Struktur zu erweitern, die als messbare Vektorfamilie bezeichnet wird. Tatsächlich definieren Russell und Whitehead in den zentralen Abschnitten *352 bis *355, die sich der Messung durch reelle Zahlen widmen, die Minimalbedingungen, die es ihnen erlauben würden, dem Begriff eines Möbiusnetzes Sinn zu verleihen.[37] Anstatt das Möbiusverfahren als ein Werkzeug zur Klassifikation der verschiedenen Arten von projektiven Räumen zu verwenden, beschreiben die *Principia Mathematica* das abstrakte und allgemeine Gerüst, das solch ein Verfahren umgibt. Trotz des Unterschiedes hinsichtlich ihrer Projekte gibt es eine echte Nähe zwischen Russell und Whitehead auf der einen Seite sowie Veblen und Young auf der anderen Seite: Die gemeinsame Inspirationsquelle finden sie in der reinen synthetischen Herangehensweise, die sich auf die geometrische Konstruktion von Koordinaten konzentriert. Das wiederum unterstreicht den Punkt, den ich machen möchte: Weit entfernt davon, in der Arithmetisierung der Analysis verwurzelt zu sein, liegt die Quelle von Russells und Whiteheads Lehre der rationalen und reellen Zahlen in der Tradition der reinen synthetischen Geometrie.

V. Geometrie in den Principia

Vor dem 19. Jahrhundert wurde die Mathematik als Wissenschaft von den Quantitäten definiert. Die Gattung der Quantität selbst wurde wiederum in zwei Arten unterteilt: die kontinuierlichen Quantitäten, deren Eigenschaften in der Geometrie untersucht wurden, und die diskreten Quantitäten, deren Eigenschaften von der Arithmetik studiert wurden. Das Arithmetisierungsprogramm beendete diese Trennung, indem es nachwies, dass geometrische Quantitäten in Form arithmetischer Quantitäten definiert werden können. Hat Russell sich in den *Principles of Mathematics* diese Perspektive zu eigen gemacht? Hat er den Raum als eine numerische Struktur angesehen?

In den *Principles of Mathematics* finden sich mindestens drei Charakterisierungen geometrischer Räume. Zuerst begegnet man einer arithmetischen Definition des Raumes. In §474 wird ein numerisches Modell R^n eines euklidischen n-dimensionalen Raumes entworfen: „Ausgehend von der Existenz von θ [die reelle Gerade als eine auf N basierende Mengenkonstruktion betrachtet] beweisen wir durch die Definition von komplexen Zahlen

[37] Für eine Darlegung der verschiedenen Stadien ihrer Konstruktion, verweise ich auf Gandon (2012), S. 151-153.

[…] die Existenz der Klasse euklidischer Räume jeder beliebigen Zahl von Dimensionen.“[38] Dann konstruiert Russell, unter Verwendung von Standardverfahren, ein numerisches Modell eines projektiven Raumes ebenso wie verschiedene numerische Modelle metrischer Räume mit konstanter Krümmung. Diese Art und Weise, Raum zu definieren, greift die Arithmetisierungssicht auf, der zufolge die Geometrie eine Erweiterung der Arithmetik ist.

Aber dies ist nicht die einzige Definition des Raumes, der man in den *Principles of Mathematics* begegnet – und ebenso wenig ist es die am weitesten entwickelte. Im sechsten Teil des Buches, der sich der Geometrie widmet, erörtert Russell zwei andere Definitionen. In Kapitel 46 wird der Raum als eine rein ordinale Struktur definiert. Hier arbeitet Russell die Konstruktion aus, die in Paschs *Vorlesungen über neuere Geometrie* von 1882 dargelegt wird. Eine nichtmetrische Struktur (die als deskriptiver Raum bezeichnet wird) wird zuerst durch ein axiomatisches System definiert, das zwei nicht-logische Terme enthält: Punkte und die Betweenness-Relation. Sobald die sogenannte deskriptive Theorie entwickelt ist, werden Kongruenzaxiome eingeführt, um die volle Stärke der metrischen Geometrie zurückzugewinnen.[39] In den *Principles of Mathematics* zeigt Russell, wie eine Erklärung für die drei Undefinierbaren (Punkt, Betweenness, Kongruenz) gefunden werden kann, indem Variablen des richtigen Typs für die nicht-logischen Konstanten eingesetzt werden.[40] Diese zweite Definition des Raumes ist logisch (insofern sie keinen nicht-logischen Term enthält), aber sie ist nicht arithmetisch: der Raum wird nicht mit einer numerischen Mannigfaltigkeit gleichgesetzt.

Die letzte Definition des Raumes wird in Kapitel 45 erläutert. Sie basiert auf den Arbeiten von Pieri und beruht auf der Vorstellung, dass der projektive Raum (und im Anschluss daran jede beliebige Art von Raum)[41] grundsätzlich eine Inzidenzstruktur darstellt.

Die Einsicht, dass die reelle projektive Geometrie als die Theorie der Inzidenzbeziehung zwischen Punkten, Geraden und Ebenen aufgefasst werden kann, wurde erstmals von dem deutschen Geometer Georg von Staudt formuliert. Aber beim Beweis des sogenannten Elementartheorems der reellen projektiven Geometrie (welches besagt, dass eine projektive Transformation auf einer Linie fix ist, sobald die projektiven Bilder der drei Punkte fix sind) machte von Staudt einen Fehler, indem er für die reelle Gerade verallgemeinerte,

---

[38] Russell (1903), S. 498.
[39] Vgl. dazu Pasch (1882).
[40] Vgl. Russell (1903), S. 429f.
[41] Russell greift Kleins Ansicht auf, der zufolge die metrische Geometrie innerhalb eines projektiven Settings hergeleitet werden kann.

was ausschließlich für die rationalen Punkte auf der Linie gilt.[42] Klein, der auf diese Unzulänglichkeit erstmals hinwies, ging davon aus, dass sich die Lücken in von Staudts Beweis durch die Einführung von ordinalen Hypothesen füllen lassen würden. Für Klein ging es in der projektiven Geometrie demnach um Inzidenz, aber ebenso auch um Ordnung. Pieri wies 1898 nach, dass Kleins Diagnose voreilig gewesen war. Er vervollständigt von Staudts Konstruktion, ohne zusätzliche, von außen kommende ordinale Annahme einzuführen. Genauer gesagt gelingt es Pieri, eine Trennungsrelation (d.h. eine projektive Ordnung) auf der projektiven Geraden zu definieren, indem er der Art und Weise, wie Geraden sich auf der Ebene schneiden, Beschränkungen auferlegt. Dadurch stellt Pieri von Staudts Konzeption wieder her, der zufolge der projektive Raum eine Inzidenzstruktur ist. Diese schöne Erweiterung der Ansicht von Staudts bildet die Grundlage von Russells Definition der Geometrie als „das Studium von zwei- oder mehrdimensionalen Reihen“[43]. In Kapitel 45 der *Principles of Mathematics* erläutert Russell Pieris formale Theorie und zeigt, wie man, indem man die nicht-logischen Konstanten (Punkte, Geraden, Ebenen und ihre Inzidenzbeziehungen) durch entsprechende Arten von Variablen ersetzt, daraus eine rein logische Definition des projektiven Raumes als Inzidenzstruktur gewinnen kann.

Die Beziehung zwischen Inzidenz und Raum wird von Whitehead betont, der in der Einleitung zu *The Axioms of Projective Geometry* erklärt:

> Geometrie in dem äußerst weiten Sinne, wie er von modernen Mathematikern angelegt wird, ist ein Bereich dessen, was in gewisser Weise die allgemeine Wissenschaft der Klassifikation genannt werden könnte. Diese allgemeine Wissenschaft könnte wie folgt definiert werden: Gegeben sei eine beliebige Klasse von Entitäten K, wobei die Unterklassen von K eine neue Klasse von Klasse bilden, dann ist die Wissenschaft der Klassifikation das Studium der Mengen von Klassen, die so aus dieser neuen Klasse ausgewählt werden, dass sie gewisse ihnen zugeordnete Eigenschaften besitzen.
>
> Beispielsweise müssen im traditionellen aristotelischen Zweig der Klassifikation anhand von Arten und Gattungen die ausgewählten Mengen von der Klasse der Unterklassen von K (1) sich gegenseitig ausschließen, und sie müssen (2) K erschöpfen […]. Die Bedeutsamkeit dieses Prozesses der Klassifikation ist offensichtlich und wird von denjenigen, die über Logik schreiben, hinreichend betont. […]
>
> Die Geometrie ist die Wissenschaft der Kreuzklassifikation. Die fundamentale Klasse K ist die Klasse der Punkte; die ausgewählte Menge aus der Klasse der Unterklassen von K ist die Klasse der (geraden) Linien. Diese Menge der Unterklassen muss derart sein, dass zwei beliebige Punkte auf einer und nur einer Geraden liegen und dass jede beliebige Gerade mindestens drei Punkte

[42] Ich verweise auf Gandon (2012), wo das zweite Kapitel sich ausführlicher mit dieser komplizierten Geschichte befasst.
[43] Russell (1903), §352.

> besitzt. Diese Eigenschaften gerade Linien repräsentieren die Eigenschaften, die allen Zweigen der Wissenschaft gemeinsam sind, die im allgemeinen Sprachgebrauch ‚geometrisch' genannt wird, wenn die modernen Geometrien mit einer endlichen Anzahl von Punkten berücksichtigt werden.[44]

Kreuzklassifikation ist Whiteheads Ausdruck für Inzidenz (Inzidenzaxiome werden von ihm als Kreuzklassifikationsaxiome bezeichnet). Der abstrakte und allgemeine Charakter der Definition und der Kontrast zwischen logischer und geometrischer Klassifikation hilft dabei, Russells Idee zu verstehen: ein Raum ist nichts anderes als eine Klassifikation, in der die Elemente zu mehr als einer Untermenge gehören können. Der abschließende Verweis auf Geometrien endlicher Felder, deren Entwicklung sich in den Arbeiten von Veblen und seinen Mitstreitern abzuzeichnen begann, zeigt, dass Whitehead sich der Reichweite seiner Definition bewusst war. Im endlichen Raum gibt es keine Kontinuität, keine Unendlichkeit, keine Ordnungsrelation – ein endlicher Raum ist ein Raum, weil er eine Inzidenzstruktur ist.

Lassen Sie mich das bisher Gesagte zusammenfassen. Es gibt mindestens drei logische Definitionen des geometrischen Raumes in den *Principles of Mathematics*. Die erste definiert einen Raum als eine numerische Mannigfaltigkeit (Punkte sind n-Tupel reeller Zahlen, n>1). In den anderen beiden wird der Raum als ein Modell einer axiomatischen Theorie verstanden (in der keine nicht-logischen Konstanten vorkommen). In der zweiten wird der Raum als eine ordinale Struktur angesehen, während er in der dritten als eine Inzidenzstruktur betrachtet wird. Welche logische Charakterisierung hat Russell sich letzten Endes zu eigen gemacht? Seine endgültige und feste Überzeugung ist, dass der Raum, trotz der formalen Korrektheit der ersten zwei Herangehensweisen, als eine Inzidenzstruktur definiert werden sollte.[45] Dieser ‚Von Staudt-Pieri-Linie' hat Russell sich letzten Endes angeschlossen. Die Definition des Raumes, die sich in den *Principles of Mathematics* findet, lässt sich mit dem Portrait von Russell als Verfechter des Arithmetisierungsprogramms nicht in Übereinstimmung bringen. Russell hat 1903 zugestanden, dass die Geometrie auf diese Weise auf die Arithmetik ‚reduziert' werden kann. Aber das ist nicht der Weg, für den Russell selbst sich entschieden hat. Im Gegenteil, seine letztliche Auffassung besteht darin, dass die reinen synthetischen Geometer, die die cartesische Sichtweise ablehnten, Recht hatten.

Was können wir von dieser (sehr) kurzen Darstellung der zwei zentralen Theorien lernen, die in den entlegeneren Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* entwickelt werden? Das Bild, das man erhält, ist nicht das übliche, dem zufolge

[44] Whitehead (1906), S. 4f.

[45] Das wird in Kapitel 44 deutlich, dem ersten Kapitel des fünften Teils, wo Russell die Geometrie als das allgemeine „Studium von zwei- oder mehrdimensionalen Reihen" definiert. Russell (1903), §352. Vgl. ebenso §421, wo Russell Pieri das Verdienst zuschreibt, von Staudts Arbeit vollendet zu haben.

der Logizismus eine Fortführung der Arithemetisierung war. Natürlich hielten Russell und Whitehead an der Auffassung fest, dass die gesamte Mathematik auf die Logik zurückführbar sei. Aber diese Behauptung impliziert keineswegs, dass Russell und Whitehead der Meinung waren, dass die gesamte Mathematik zuerst auf die Arithmetik zurückgeführt werden sollte. Ein globaler Reduktionismus ist mit verschiedenen lokalen Anti-Reduktionismen vereinbar. Russells und Whiteheads Logizismus ähnelt der weiter oben angeführten Tabelle 2, nicht jedoch Tabelle 1.

VI. Logizismen – Neue und Alte

In Abschnitt 2 stimmen wir mit Heck überein, dass Russells und Whiteheads Logizismus aus einer von Benacerraf ausgehenden Perspektive keinem Vergleich mit dem Neo-Fregeanischen Logizismus standhält.[46] So taucht einmal mehr die Frage auf: Wenn Russell nicht von einem mit Benacerraf vergleichbaren Ausgangspunkt motiviert wird, von welcher Art von Anliegen ist sein Vorgehen motiviert?

Im Neo-Logizismus wird das mathematische Ziel als ein wohldefiniertes und homogenes verstanden: Arithmetik. Das Hauptproblem besteht darin sicherzustellen, dass zumindest ein Weg von der Logik zur Arithmetik existiert. In den Arbeiten von Russell und Whitehead sieht die Lage anders aus. Wie wir gerade gesehen haben, ist die Mathematik für sie tatsächlich kein homogener Wissensbestand. Die Mathematik verfügt über distinkte Bereiche (mindestens drei: Arithmetik, reelle Analysis und Geometrie)[47] und das Hauptproblem besteht genau darin, die verschiedenen Unterdisziplinen miteinander zu verbinden. Im Fall von Russell und Whitehead beginnt man nicht mit einer vorgefertigten, klaren Aufteilung des mathematischen Feldes. Eine der schwierigsten philosophischen Aufgaben in den weiter fortgeschrittenen Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* beteht, ganz im Gegensatz dazu, gerade darin zu erörtern und zu bestimmen, wie die Mathematik organisiert sein sollte[48] – das zu lösen, was man als das

[46] Man könnte und sollte, einmal mehr Klement folgend, dieser Diagnose auch nicht zustimmen. Aber da wir uns hier auf die *Principles of Mathematics* ebenso wie auf die *Principa Mathematica* konzentrieren, ist das an dieser Stelle für uns keine gangbare Option.

[47] Ich behaupte nicht, dass Russell und Whitehead der Meinung waren, die Mathematik könne auf jene drei Bereiche reduziert werden. Arithmetik, reelle Analysis und Geometrie stellen hier bloß typische Beispiele für distinkte mathematische Disziplinen dar. Es geht mir auch nicht darum zu bestimmen, wie Russell und Whitehead andere Disziplinen, wie etwa Algebra, Funktionentheorie, Topologie etc. reduzieren würden. Ich beschäftige mich lediglich mit den philosophischen Konsequenzen, die sich ergeben, wenn man zugesteht, dass die Mathematik aus verschiedenen Teilen besteht.

[48] Dass das eigentliche Problem nicht darin besteht, die Existenz eines Pfades von der Logik zur Mathematik sicherzustellen, sondern in der Auswahl des ‚adäquateren' Pfades, ist etwas, das der Leser oder die Leserin erfährt, sobald sie einen Blick über Teil II der *Principles of Mathematics* oder Abschnitt 56 der *Principia Mathematica* hinauswerfen.

‚architektonische Problem‘ bezeichnen könnte. Diese Frage führt unmittelbar zum Problem der Einzigkeit. Tatsächlich bedeutet die Auswahl einer Definition unter verschiedenen möglichen Definitionen bereits, eine Strukturierung des mathematischen Feldes gegenüber anderen möglichen vorzuziehen. Mit anderen Worten sind die zwei am Ende von Abschnitt 2 aufgeworfenen Fragen – Wie ist das mathematische Wissen zu strukturieren? Wie ist eine Definition in einem Kontext auszuwählen, in dem viele verschiedene logisch möglich sind? – zwei Seiten derselben Münze: Indem man Letzterem (dem Problem der Einzigkeit) gerecht wird, löst man Ersteres (das architektonische Problem).

Man könnte meinen, dass das architektonische Problem, obwohl es anerkanntermaßen eine wichtige Frage darstellt, kein genuin philosophisches Problem ist. Insofern sich die Analyse auf Benacerrafs Herausforderung stützt, könnte man daher zum dem Schluss kommen, dass Probleme in der Philosophie der Mathematik von dem Platz handeln, den das mathematische Wissen als Ganzes im Korpus des menschlichen Wissens im Allgemeinen einnimmt – dass sie also nicht von der internen Struktur mathematischen Wissens handeln. Darüber hinaus könnte man auf der Tatsache insistieren, dass Mathematiker durchaus über die Struktur mathematischen Wissens sprechen – sie beweisen Vermutungen über die Vereinheitlichung der Mathematik, Sätze der Darstellungstheorie etc. Dies würde Philosophen ein weiteres Argument an die Hand geben, um zu zeigen, dass das architektonische Problem als eine rein mathematische Angelegenheit betrachtet werden könnte und nicht weiter beachtet werden müsste. Dieser Gedankengang ist in den Entwicklungen von Heck in der Tat implizit enthalten: Freges Theorie der reellen Zahlen ist interessant, aber das Problem, auf das sie reagiert, ist vor allen Dingen ein mathematisches und kein philosophisches. Wie kann man auf diese Argumentation antworten?

Mathematiker, soviel ist wahr, sprechen tatsächlich über die Organisation ihrer Wissenschaft, aber sie hören nie auf, unterschiedlicher Meinung zu sein über den Wert der Resultate, die sie zusammengetragen haben. Dabei besteht die Schwierigkeit in dieser Angelegenheit nicht so sehr darin, überhaupt zu Resultaten zu gelangen, sondern vielmehr in der Einschätzung und Bewertung ihrer Relevanz angesichts des architektonischen Problems. Fragen über die Organisation der Mathematik sind nicht wie Fragen darüber, ob die und die Vermutung bewiesen ist. Sie sind eher wie Fragen nach dem besten Beweis für das und das Theorem oder den besten Weg, um den und den Begriff zu definieren. Innerhalb der mathematischen Community herrscht kein Konsens darüber, wie diese Art von Fragestellung zu klären ist. Es gibt auch keine Einigkeit unter Mathematikern hinsichtlich der besten Art und Weise, wie die Mathematik strukturiert werden sollte. Dieser Mangel an Konsens bezüglich der Frage führt dazu, dass Mathematiker (und auch Philosophen der Mathematik) üblicherweise eine von zwei gegensätzlichen Haltungen annehmen: Dogmatismus oder Skeptizismus. Der Dogmatiker hält sich an eine der verfügbaren Optionen und ignoriert dabei die anderen.[49] Im Gegensatz dazu erkennt der Skeptiker den Pluralismus von Herangehensweisen an, bekennt sich aber zu Toleranz und lehnt es entsprechend ab, irgendeine Meinung bezüglich der Architektur der Mathematik zu vertreten.[50]

Das düstere Szenario drängt sich uns jedoch nur dann auf, wenn wir das architektonische Problem als eine rein mathematische Frage abtun, die durch Beweise und Theoreme bewiesen werden kann. Russell und Whitehead waren anderer Ansicht. Sie meinten, gemeinsam mit den Skeptikern, dass man nicht beweisen könne, welche Architektur besser ist als die andere. Aber sie glaubten dennoch, dass Tatsachen und Argumente auf beiden Seiten der architektonischen Kontroverse sorgsam in Betracht gezogen und rational abgewogen werden können, um zu einem fairen und wohldurchdachten Urteil zu gelangen. Russell und Whitehead waren nicht dogmatisch, weil sie aus dem logischen System heraus verschiedene logisch mögliche Organisationsformen des mathematischen Inhaltsbereichs darstellten. Sie waren allerdings ebenso wenig Skeptiker, weil sie sich nicht damit zufriedengaben, die Pluralität der Ansichten darzustellen, sondern innerhalb der Debatte Stellung bezogen. Es ist auffällig, dass in den entlegeneren Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* die Logik und die Theorie der Relationen nicht bloß als Mittel verwendet werden, um die bestehende Mathematik herzuleiten – sie werden als ein Rahmen verwendet, der dazu dient, die verschiedenen Organisationsformen der Mathematik, die von Mathematikern entwickelt wurden, darzustellen und einander gegenüberzustellen. Die logische Rekonstruktion der verschiedenen Perspektiven lieferte Russell und Whitehead eine gemeinsame Basis, von der aus die mathematische und philosophische Debatte über die Vor- und Nachteile der verschiedenen Ansätze fortgeführt werden kann. Letztendlich vertraten Russell und Whitehead eine bestimmte Ansicht bezüglich des architektonischen Problems. Aber ihre Entscheidung basierte auf der Erörterung der Alternativen und wurde keinesfalls als das Ergebnis eines Beweises präsentiert. Der Skeptiker und der Dogmatiker teilen die Überzeugung, dass, jenseits von Beweisen, keine rationalen Argumente verfügbar sind. Im Gegensatz dazu glaubten Russell und Whitehead, dass das architektonische Problem Gegenstand einer rationalen Erörterung sein kann (und sein sollte),

---

[49] Diese Haltung könnte diejenige eines dogmatischen Arithemetisierers sein, der, wie von Whitehead in seinem Brief an Russell skizziert, nichts über den Nutzen von Zahlen in der Geometrie oder bei der Messung von Quantitäten hören möchte.

[50] Als ein Beispiel für eine ‚tolerante' Haltung könnte man auf Vailatis pragmatische Herangehensweise verweisen. Vgl. Arrighi et al. (2010).

die allerdings nicht die Gestalt eines Beweises annehmen dürfe. Kurz gesagt, sie waren der Auffassung, dass das architektonische Problem in den Zuständigkeitsbereich der Philosophie fällt. Was ihnen erlaubte, über Dogmatismus und Skeptizismus hinauszugehen, war die Vorstellung, dass das architektonische Problem ein philosophisches Problem ist, das nicht durch Beweise und Theoreme gelöst werden kann.

Ziehen wir die Theorie des Raumes zur Veranschaulichung heran. Es gibt drei Wege, den Begriff des projektiven Raumes zu definieren – als eine numerische Mannigfaltigkeit eines gewissen Typs, als eine ordinale Struktur eines gewissen Typs und als eine Inzidenzstruktur. Alle diese Definitionen sind formal untadelig; alle drei führen zu einer Reduktion der grundlegenden geometrischen Begriffe auf logische Konstanten. Dieser definitorische Pluralismus spiegelte nun die verschiedenen Arten und Weisen wider, wie Mathematiker sich zu dem damaligen Zeitpunkt die Beziehung zwischen projektiver Geometrie und dem Rest der Mathematik vorstellten. Einige (wie z.B. Klein, Dini, Darboux) betrachteten die Geometrie auf ‚cartesische' Weise, als eine Entwicklung der reellen Analysis oder Funktionentheorie; andere (wie z.B. Pasch und vielleicht auch Hilbert) glaubten, dass die Geometrie eine Wissenschaft der Ordnung ist, während wiederum andere (wie z.B. von Staudt, Pieri) schließlich die Geometrie als eine Theorie der Inzidenz ansahen. Jede dieser Auffassungen, die durch distinkte logische Konstruktionen in Russells System dargestellt werden, wurde von namenhaften Mathematikern verfochten und somit herrschte also innerhalb der mathematischen Community zu der Zeit kein Konsens bezüglich des Themas. Nun entschloss sich Russell (und nach ihm auch Whitehead), den Inzidenzansatz zu stützen. Seine Gründe lauteten im Wesentlichen, dass der projektive Raum das fundamentale geometrische Konzept bildet[51] und dass von Staudts Ansicht die einzige ist, die dem Rechnung trägt, was die Geometrie so besonders macht.[52] Diese Argumente sind natürlich nicht zwingend: Man kann der Meinung sein, dass der projektive Raum ein sehr spezifisches Konzept ist, das früher oder später von topologischen Strukturen abgelöst werden wird,[53] oder man kann argumentieren, dass es der Inzidenztheorie nicht gelingt, das ‚Wesen' des projektiven Raumes zu erfassen, und dass algebraische Ansätze hier größeren Erfolg versprechen.[54] Mit anderen Worten gibt es weder in den *Principles of Mathematics* noch in Whiteheads *The Axioms of Projective Geometry* einen logischen oder mathematischen Beweis

[51] Vgl. Russell (1903), Kapitel 44 und 48.
[52] Vgl. ibid, S. 421.
[53] Das war bereits Poincarés Auffassung. Vgl. Poincaré (1928).
[54] Die Standarddefinition eines projektiven Raumes ist heute algebraischer Natur: Gegeben sei ein Vektorraum V über einem Feld F, dann ist der assoziative projektive Raum P(V) die Struktur $V - \{0\}/\sim$, wo $\sim$ die Äquivalenzbeziehung $u \sim v$ ist, derart, dass $u=\lambda v$, for $u, v \in V - \{0\}$, und $\lambda \in F$.

dafür, dass der projektive Raum eine Inzidenzstruktur ist. Na und? Russell und Whitehead haben niemals behauptet, sie würden beweisen, dass ihre Auffassung von der Geometrie die einzig möglich sei. Sie haben, ganz im Gegenteil, Raum für alternative Auffassungen gelassen. Für sie war das fragliche Problem kein mathematisches, und das ist genau der Grund, warum Russell und Whitehead sowohl von den Skeptikern als auch von den Dogmatikern abwichen. Sieht man Russells und Whiteheads Position als Antwort auf ein philosophisches Problem, dann ist sie zwar nicht unbedingt zwingend, aber nichtsdestoweniger rational, da ihre Argumentation ihren Ausgang von einem sorgfältigen Vergleich der Vorzüge und Defizite der anderen möglichen Hypothesen nimmt.

Die Vorstellung, dass das architektonische Problem, das hinter den Projekten Russells und Whiteheads stand, eine rein mathematische Angelegenheit sei, lässt sich nicht aufrechterhalten. Man könnte in der Tat zu dem Schluss gelangen, dass jeder Versuch, eine trennscharfe Demarkationslinie zwischen philosophischen und mathematischen Problemen zu ziehen, notwendig zum Scheitern verurteilt ist: Probleme bezüglich der internen Organisation der Mathematik betreffen üblicherweise gleichermaßen die Mathematik und die Philosophie. Wie weiter oben bereits gesagt, haben Mathematiker etwas zum architektonischen Problem beizutragen, und es macht wenig Sinn zu hoffen, in dieser Angelegenheit weiterzukommen, wenn man ihre Ergebnisse unberücksichtigt lässt. Aber mehr noch: Mathematiker aus unterschiedlichen Schultraditionen reden oftmals aneinander vorbei und es mangelt an einer Plattform für Diskussionen innerhalb der mathematischen Community. Hier gibt es Spielraum für die Philosophie. In den entlegeneren Teilen der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* verwenden Russell und Whitehead das logischen System als ein Instrument, um die verschiedenen Arten und Weisen, der mathematischen Landschaft Konturen zu verleihen, zu artikulieren und zwischen ihnen zu vermitteln.

VII. Konklusion

Lassen Sie mich die Erörterung kurz zusammenfassen. Benacerrafs Herausforderung nimmt eine zentrale Rolle auf der Agenda der gegenwärtigen Philosophie der Mathematik ein.[55] Der Neo-Logizismus wird häufig als eine attraktive Replik auf dieses Dilemma präsentiert, und in dieser Hinsicht betont Heck zurecht die Kluft zwischen Freges Konstruktion der ganzen Zahlen und dem Rest der alten logizistischen Konstruktionen. Wenn man die Philosophie als eine Antwort auf Benacerrafs Dilemma ansieht, dann scheint den gesamten *Principia Mathematica* und insbesondere dem, was ich einleitend als die entlegeneren Teile der

[55] Vgl. dazu das Vorwort von Mancosu (2008).

Principia bezeichnet habe, nur ein patrimoniales, abgeleitetes Interesse zuzukommen. Ich habe die Sache umgedreht und versucht, aus dem, was Russell und Whitehead entwickelten, neue Antworten auf bekannte Probleme zu extrahieren, und zwar auf Probleme, die heute nicht länger (oder nicht genug) behandelt werden.

Eine sorgfältige Lektüre der mathematischen Teile der *Principles of Mathematics* und der *Principia Mathematica* zeigt, dass der Logizismus nicht als eine Erweiterung der Arithmetisierung verstanden werden sollte. Russell und Whitehead beginnen nicht mit einer vorgefertigten, klaren Auffassung davon, wie die bestehende Mathematik strukturiert ist. Ganz im Gegenteil, das architektonische Problem war ein integraler Bestandteil der logizistischen Aufgabe, und es ist genau dieses Problem (welche Form sollte man dem mathematischen Material geben?), das optional wird, wenn man Benacerrafs Dilemma in die Mitte der philosophischen Bühne stellt. Ist dieses Problem inzwischen obsolet geworden?

Seit den Zeiten von Russell und Whitehead haben sich Logik und Mathematik in vielerlei Hinsicht stark verändert. Das konzeptuelle Instrumentarium und das logische Gerüst, die in den *Principia Mathematica* entworfen wurden, scheinen heute nicht länger relevant zu sein. Aber das architektonische Problem ist nach wie vor ein aktuelles Problem – das, wie es scheint, heute sogar noch größer ist als zu Beginn des letzten Jahrhunderts. In der Tat ist die Mathematik sehr viel heterogener geworden, als sie es damals war: Die Zahl der mathematischen Unterdisziplinen ist förmlich explodiert und durch das Aufkommen neuer Methoden (wie beispielsweise computergestützte Beweise) hat die Fragmentierung des Bereichs mathematischen Wissens zugenommen. Außerdem herrscht heute sogar noch weniger Konsens unter Mathematikern über die Architektur der Mathematik als zur Zeit der Entstehung der *Principia Mathematica*. Russells und Whiteheads Anspruch, ein Mittel für die Mathematik bereitzustellen, um die verschiedenen Arten und Weisen, ihr Material zu systematisieren, zu diskutieren und vergleichen zu können, bleibt auch heute noch ein berechtigtes philosophisches Unterfangen.

Übersetzung von Dennis Sölch

Bibliographie

- Arrighi, Claudia; Cantù, Paola; De Zan, Mauro; Suppes, Patrick (2010), *Logic and Pragmatism: Selected Essays by Giovanni Vailati*, Stanford: CSLI.

- Benacerraf, Paul (1973), „Mathematical Truth“, in: *Journal of Philosophy*, Vol 70/19, S. 661-679.
- Boolos, George (1989), „Iteration Again“, *Philosophical Topics*, Vol. 17/2, S. 2-21.
- Frege, Gottlob (1998, Orig. 1893 und 1903, Grundgesetze der Arithmetik, Hildesheim: Olms.
- Gandon, Sébastien (2012), *Russell's Unknown Logicism. A Study in the History and Philosophy of Mathematics*, Basingstoke: Palgrave McMillan.
- Hale, Bob (2000), „Reals by Abstraction“, in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 8/2, S. 100-123.
- Hale, Bob; Wright, Crispin (2002), „Benacerraf's Dilemma Revisited“, in: European Journal of Philosophy, Vol. 10/1, S. 101-129.
- Heck, Richard G. (2012), *Reading Frege's Grundgesetze*, London: Clarendon Press.
- Heck, Richard G. (2011), *Frege's Theorem*, London: Clarendon Press.
- Klement, Kevin C. (2010), „Neo-Logicism and Russell's Logicism“, in: *Russell*, Vol. 32, S. 127-159.
- Klement, Kevin C. (2015), „A Generic Russellian Elimination of Abstract Objects“, in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 25/1, S. 91-115.
- Landini, Gregory (1998), *Russell's Hidden Substitutional Theory*, New York/Oxford: Oxford University Press.
- Mancosu, Paolo [Hg.] (2008), *The Philosophy of Mathematical Practice*, New York/Oxford: Oxford University Press.
- Pasch, Moritz (1882), *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig: Teubner.
- Pieri, Mario (1898), I Principii della Geometria di Posizione Composti in Sistema Logicao Deduttivo, in: *Memorie della R. Accademia delle Scienze de Torino*, Vol. 48, S. 1-62.
- Poincaré, Henri (1928, Orig. 1902), *Wissenschaft und Hypothese*, Berlin: Xenomos.
- Russell, Bertrand (2002, Orig. 1903), *Einführung in die mathematische Philosophie*, Hamburg: Felix Meiner.
- Russell, Bertrand (1988, Orig. 1959), *Philosophie. Die Entwicklung meines Denkens*, Frankfurt a.M.: Fischer.
- Russell, Bertrand (1903), *The Principles of Mathematic*s, Cambridge: Cambridge University Press.
- Russell, Bertrand; Whitehead, Alfred North (1910-1913), *Principia Mathematica*. 3 Bände, Cambridge: Cambridge University Press.

- Shapiro, Stewart; Weir, Alan (1999), „New V, ZF and Abstraction“, in: *Philosophia Mathematica*, Vol. 7/3, S. 293-321.
- Shapiro, Stewart (2003), „Prolegomenon to any Future Neo-Logicist Set Theory: Extensionality and Indefinite Extensibility“, in: *British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. 54/1, S. 59-91.
- Simons, Peter (1987), „Frege’s Theory of Real Numbers“, in: *History and Philosophy of Logic*, Vol. 8/1, S. 25-44.
- Veblen, Oswald; Young, John Wesley (1918), *Projective Geometry*. 2 Bände, Boston: Ginn and Company.
- Whitehead, Alfred North (1906), *The Axioms of Projective Geometry*, Cambridge: Cambridge University Press.
- Wright, Crispin (1983), *Frege’s Conception of Numbers as Objects*, Aberdeen: Aberdeen University Press.
- Wright, Crispin (2000), „Neo-Fregean Foundations for Real Analysis: Some Reflections on Frege’s Constraint“, in: *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 41/4, S. 317-334.