Note sur le paradoxe du conducteur distrait (The Absent-Minded Driver)

Léo Gerville-Réache

Le paradoxe (?) du conducteur distrait

Léo Gerville-Réache

IMB - UMR 5251 - Université de Bordeaux

Résumé : Le paradoxe du conducteur distrait (Absent-Minded Driver Paradox) est un jeune paradoxe, apparu officiellement en 1997 [Piccione], il n'a produit jusqu'ici que relativement peu de littérature. En réalité, il semble qu'il se soit rapidement scindé en deux. D'une part, le paradoxe original posant la question de l'inconstance d'une stratégie a priori optimale qui, au moment d'être mise en œuvre, ne le serait plus. D'autre part, la question de l'établissement d'un degré de croyance rationnelle dans une expérience de pensée avec incident cognitif (incarné par le prolifique paradoxe de la Belle au bois dormant [Delabre]). Cet article, le premier en langue française, se propose de revenir sur un paradoxe.

Le paradoxe du conducteur distrait est un paradoxe de théorie des jeux récent. Proposé par Piccione et Rubinstein dans un document de travail en 1994, il est publié dans un numéro spécial de la revue *Games and economic behavior* en 1997. Dans le même journal, une dizaine d'articles sur le sujet sont publiés dont deux écrits par Aumann, Hart et Perry, tentant de clore le débat [Aumann]. En fin de revue, Piccione et Rubinstein répondent aux différentes analyses proposées en rappelant d'abord leurs intentions : *"Les questions que nous avons soulevées peuvent être résumées comme suit:*

1. Quelles décisions peuvent être prises? En particulier, un agent peut-il décider du moment où prendre une décision?

2. Quel est le déroulement temporel des décisions? Y a-t-il une planification possible ou bien les décisions sont prises uniquement au moment où les actions sont exécutées?

3. Un agent peut-il changer sa stratégie au long de son exécution? Et, s'il change sa stratégie, peut-il en changer à nouveau?

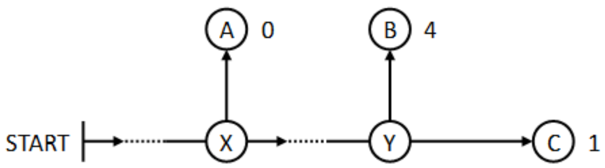
4. Un agent peut-il utiliser des dispositifs aléatoires?

Les auteurs résument leur regard sur les arguments des uns et des autres en une phrase: "*Malgré tout ce qui a été dit, nous sommes encore confus à propos de sa résolution"*. Ils terminent par ces mots : "*Les problèmes de décision tels que l'exemple de conducteur peuvent être analysés raisonnablement de plusieurs façons. En tant que théoriciens, nous pouvons tout au plus préciser la part de logique de ces façons"*.

Depuis 1997, et encore très récemment (2014), plusieurs chercheurs (par exemple : Baratgin et Walliser, Binmore, Landsburg, Schwarz,...) poursuivent les tentatives de résolution. Consignés essentiellement dans des documents de travail, leurs travaux nous laissent, aujourd'hui encore, sans réponse consensuelle. Il semble que ce paradoxe pose des questions bien délicates. Certaines font penser au paradoxe de Newcomb [Gilboa, Schwarz] alors que d'autres font l'objet du paradoxe de la Belle au bois dormant (En particulier, Baratgin et Walliser, Schwarz). Cet article présente le paradoxe et brièvement les questions qu'il soulève. Enfin, est développé un point de vue original sur une possible erreur dans la formulation de l'espérance de gain "au carrefour".

Le paradoxe

Après une soirée arrosée, vous devez rentrer chez vous. A la sortie du Bar (Start), vous savez que votre maison est à la deuxième intersection à gauche (B). Vu votre état, vous savez qu'une fois arrivé à un carrefour, vous serez incapable de vous situer, c'est à dire que vous ne saurez pas si vous êtes au premier ou au deuxième carrefour...



Si au premier carrefour (X), vous tournez à gauche, vous arriverez en (A) et gagnerez zéro, si vous allez jusqu'au deuxième carrefour (Y) et que vous tournez à gauche, vous arrivez en (B) et gagnerez 4. Enfin, si vous allez toujours tout droit, vous arriverez en (C) et gagnerez 1.

Quelle stratégie maximisera votre espérance de gain? Cette stratégie, conçue à la sortie du bar sera-t-elle encore adéquate une fois arrivé à un carrefour?

A la sortie du bar, vous cherchez une stratégie. Celle-ci devra nécessairement être la même à chaque carrefour que vous atteindrez effectivement. En effet, ne pouvant distinguer les carrefours, vous ne pourrez pas adapter votre stratégie en fonction du carrefour. Aussi, vous cherchez une stratégie du type : "A chaque carrefour, je continue avec probabilité p et je tourne à gauche avec probabilité 1-p". Aussi votre espérance de gain à la sortie du bar vaut :

$$E_{bar} = (1-p).0+p.[(1-p).4+p.1] = p.(4-3.p).$$

Cette espérance est maximale pour p=2/3 et vaut alors 4/3. Aussi, avant de partir du bar, vous planifiez qu'à chaque carrefour vous lancerez un dé équilibré à 6 faces. S'il tombe sur 1 ou 2, vous tournez à gauche, sinon, vous continuez tout droit. Soit...

Maintenant vous êtes à un carrefour, incapable de savoir si ce carrefour est le premier (X) ou le deuxième (Y). Vous vous préparez à lancer votre dé mais vous vous dites :

"Je ne sais pas si je suis en X ou en Y mais je ne peux pas être certain d'être en X.

- Si je suis en X, mon espérance de gain est :

$$E_X=(1-p).0+p.(1-p).4+p^2.1= p.(4-3.p).$$

- Si je suis en Y, mon espérance de gain est :

$$E_Y=(1-p).4+p.1= 4-3.p.$$

En notant q la probabilité (croyance), étant à un carrefour, d'être au premier carrefour (X), et 1-q probabilité (croyance), étant à un carrefour, d'être au deuxième carrefour (Y), mon espérance de gain "au carrefour" est donc :

$$E_{carrefour} = q.p.(4-3.p) + (1-q).(4-3.p).$$

Mais pour p=2/3, $E_{carrefour}$ =2-2.q/3 et, sauf pour q=1, $E_{carrefour}$ est strictement supérieure à 4/3. Aussi, il n'est plus optimal de prendre mon dé et d'appliquer la stratégie que j'avais mise au point à la sortie du bar. Etant à ce carrefour, soit je crois avec probabilité q=1 que je suis en X et je dois appliquer la stratégie p=2/3, soit je crois qu'il est possible que je sois déjà en Y (probabilité 1-q>0) et il faut que je reconsidère ma stratégie car sinon je ne maximise plus, ici et maintenant, mon espérance de gain!".

Alors... une fois au carrefour, que devez-vous croire, que devez-vous faire?

Première analyse

Le point particulièrement délicat du raisonnement fait au carrefour est que la probabilité q d'être au carrefour X dépend de la probabilité p de la stratégie établie à la sortie du bar. Pour bien voir cela, on peut regarder la probabilité 1-q que le carrefour où je me trouve au moment de mon raisonnement soit Y. Pour être en Y, il faut avoir été en X et qu'en X j'ai appliqué une stratégie qui m'a conduit à Y avec une certaine probabilité strictement positive. Aussi, 1-q dépend nécessairement d'une stratégie déjà mise en place et utilisée en X. Mais alors, comment est-il possible d'appliquer en Y une autre stratégie que celle que j'ai déjà appliquée en X? En effet, nous avons convenu précédemment que, comme les carrefours sont indiscernables, la stratégie ne peut être différente d'un carrefour à "l'autre".

L'équation de l'espérance de gain au carrefour n'a pas de solution. Elle produit une sorte d'autoréférence temporelle comme si on revenait possiblement dans le passé. On peut voir le paradoxe comme un problème de type Newcomb [Gilboa]. En effet, une fois à un carrefour, je suis contraint d'admettre qu'une stratégie a peut-être déjà été utilisée et que c'est alors nécessairement la même que je dois réitérer maintenant. Laquelle, si ce n'est celle que j'ai planifiée à la sortie du bar? Aussi, je n'ai en réalité plus le choix. Je dois m'en tenir à ma stratégie initiale car c'est la seule qui est rationalisable et constante d'un carrefour à "l'autre".

Imaginer, une fois au carrefour, que l'on a la possibilité de changer de stratégie et de ne pas appliquer p=2/3, c'est rendre impossible l'établissement d'une croyance rationnelle d'être en X comme d'être en Y. L'espérance au carrefour ($E_{carrefour} = q.p.(4-3.p) + (1-q).(4-3.p)$), n'a pas de solution optimale rationalisable. On est alors dans un dilemme rationnel qui nous oblige à agir au carrefour comme on l'avait défini à la sortie du bar alors même que l'on ne considère plus cette stratégie comme optimale au moment précis de la mettre en œuvre.

Deuxième analyse

Peut-on alors raisonner, à la sortie du bar, en intégrant le fait que l'on pourrait se retrouver dans un dilemme rationnel au moment d'agir au carrefour? "Je sais déjà que je ne considérerai plus comme optimale la solution p=2/3, une fois arrivé à un carrefour. Je sais également que je ne pourrai appliquer que la stratégie que je vais mettre en place maintenant (à la sortie du bar) car aucune modification une fois au carrefour ne sera rationalisable. Enfin, cette stratégie est nécessairement la même quel que soit le carrefour où je me trouverai. Puis-je alors tenir compte de tout cela dans la stratégie que je vais mettre en place à la sortie du bar?"

Il semble qu'un tel raisonnement soit possible. A la sortie du bar, il ne faut pas maximiser $E_{bar} = p.(4-3.p)$ mais maximiser :

$$E_{carrefour} = q.p.(4-3.p) + (1-q).(4-3.p).$$

Mais attention, le problème est alors d'exprimer précisément q en fonction de p. En effet, q et p sont intimement liés. Deux thèses s'affrontent alors : ce sont en réalité les thèses tiériste et demiste du paradoxe de la Belle au dois dormant [Schwarz] :

- les tiéristes diront que q=1/(1+p),
- les demistes diront que q=1-p/2.

Cela produira alors deux stratégies distinctes :

- Pour un tiériste, le maximum de $E_{carrefour}$ est alors atteint pour p=0,53 (précisément p=racine(336)/12-1) ; la croyance d'être en X vaut alors q=0,65 ; l'espérance de gain à la sortie du bar vaut E_{bar} =1,28 ; l'espérance de gain au carrefour vaut $E_{carrefour}$ = 1,67.

- Pour un demiste, le maximum de $E_{carrefour}$ est atteint pour p=0,58 ; la croyance d'être en X vaut alors q=0,71 ; l'espérance de gain à la sortie du bar vaut E_{bar} =1,31 ; l'espérance de gain au carrefour vaut $E_{carrefour}$ =1,59.

Aussi, que l'on soit demiste ou tiériste, il existe une stratégie qui, à chaque moment où elle sera appliquée, laissera le conducteur distrait dans un état de croyance en accord avec l'apparente optimalité de sa stratégie. En partant du bar, il sait que cette stratégie n'est pas optimale mais il sait qu'il la croira optimale au moment de la mettre en œuvre.

N'est-ce-pas cela la rationalité de l'action ; l'action est rationnelle si elle est rationalisable au moment de l'action?

Il est cependant important de préciser le sens de l'espérance au carrefour ($E_{carrefour}$) par rapport à celle au bar (E_{bar}). En faisant appel à l'argument de la répétition de l'expérience, l'espérance au bar exprime bien le fait "qu'en moyenne" je gagnerai E_{bar}. En revanche, l'espérance au carrefour ne signifie aucunement "qu'en moyenne", en cas ce répétition, je gagnerai $E_{carrefour}$. Cette dernière espérance est épistémique, pas ontique. Elle est issue d'une croyance (demiste ou tiériste) d'être en X ou en Y utilisée dans l'équation générique de l'espérance de gain au carrefour.

Mais alors, que doit-on faire? Peut-on suivre une stratégie, issue d'une croyance au carrefour, qui produira une espérance de gain épistémique supérieure à 4/3, alors même que l'espérance de gain ontique ("en moyenne") sera inférieure à ce même 4/3?

Et si la solution était ailleurs?

Reprenons l'expression à l'origine du paradoxe :

$$E_{carrefour} = q.p.(4\text{-}3.p) + (1\text{-}q).(4\text{-}3.p).$$

On considère que l'on est ici en capacité de calculer l'espérance de gain au carrefour comme la somme du produit des croyances d'être en X (resp. en Y) par les espérances de gain conditionnelles aux hypothèses d'être en X (resp. en Y). Il est clair qu'au carrefour, soit je suis en X, soit en Y. Il est également clair que ma croyance d'être en X ajoutée à celle d'être en Y doit faire 1 (peu importe que l'on soit ici tiériste ou demiste). Cependant, pour "être en Y", il aura fallu, auparavant, "être en X". Aussi, il semble qu'une part de cette espérance soit possiblement redondante ou encore, inadmissible.

Est-il possible que la formule proposée soit fausse? Avant explorer cette question, tentons dans un premier temps de raisonner conditionnellement à l'hypothèse de se trouver au carrefour final.

- Soit le carrefour où je me trouve est X et c'est le carrefour final, cela se produit avec probabilité 1-p (avec un gain de 0) et donc :

$$E_{Xfinal} = 0.$$

- Soit le carrefour où je me trouve est Y et c'est le carrefour final, cela se produit avec probabilité p, avec un gain espéré de :

$$E_{Yfinal} = (1\text{-}p).4 + p.1= 4\text{-}3.p$$

L'espérance de gain au carrefour serait alors :

$$E_{final} = (1\text{-}p).0 + p.(4\text{-}3.p)$$

On se demande alors où est passé la possibilité que le carrefour où je me trouve soit X et que ce carrefour ne soit pas le carrefour final. Mais cette possibilité consiste à dire que l'on arrivera effectivement en Y. C'est donc la même alternative que celle qui consiste à dire que

Y est le carrefour final (alternative E_{Yfinal}). Aussi, la question ne serait pas de savoir dans quelle mesure je dois croire que je suis en X ou en Y; il est même possible qu'aucune croyance rationnelle ne soit possible (c'est tout le problème du paradoxe de la Belle au bois dormant). La question serait de savoir dans quelle mesure je dois croire que je suis au carrefour final X ou Y.

L'espérance de gain au carrefour, peut se décomposer aisément conditionnellement au carrefour final. Cette espérance, est alors celle à la sortie du bar. L'action optimale au carrefour est alors bien de continuer tout droit avec probabilité p=2/3. Il n'y aurait donc aucun dilemme rationnel et seulement une écriture erronée de l'espérance de gain au carrefour. L'espérance de gain au carrefour décomposée via les croyances en X et en Y, telle que proposée par Piccione et Rubinstein, serait finalement erronée, voir inadmissible.

Pour autant, on resterait sur notre fin en admettant une sorte d'impossibilité à décomposer l'espérance de gain au bar en une somme pondérée d'espérances conditionnelles aux hypothèses d'être en X ou en Y. Revenons donc sur l'équation originale.

$$E_{carrefour} = q.p.(4-3.p) + (1-q).(4-3.p)$$

Il est clair que l'espérance conditionnelle à l'hypothèse d'être en X vaut $p.(4-3.p)$. Il est également clair que l'espérance conditionnelle à l'hypothèse d'être en Y vaut $(4-3.p)$. La question est donc de comprendre dans quelle mesure on peut regrouper ces deux espérances conditionnelles pour en faire "l'espérance au carrefour". Même s'il semble délicat de mettre en relation q avec p (demiste VS tiériste), il est légitime de considérer qu'au carrefour, on puisse avoir une croyance en X et en Y. Pour autant, avec probabilité 1-p, on aura durant le parcours, l'occasion d'une croyance unique (en X) et avec probabilité p, on aura l'occasion d'avoir deux croyances : l'une en X et l'autre en Y. En pondérant simplement les espérances conditionnelles par les croyances et en faisant la somme, on ignore cette possibilité de "double occasion" de croyance. Tout est calculé comme si, soit on allait avoir une unique croyance, soit étant en X, soit étant en Y. Aussi, la définition de $E_{carrefour}$ est une sommation, en l'état inadmissible, et il semble bien délicat de proposer une équation de l'espérance qui dépendrait des croyances d'être en X et en Y. On peut seulement constater que l'écart entre ce calcul erroné et l'espérance au "carrefour final" (qui est également celle au bar) est ici de : $(1-p).(1-q).(4-3.p)$...

Conclusion

Le paradoxe du conducteur distrait semble être un problème similaire à celui de Newcomb en lui ajoutant un problème d'auto-localisation repris depuis par le paradoxe de la Belle au bois dormant. C'est possible, et en matière de paradoxe, il convient d'être prudent. Pourtant, il semble également possible que le problème vienne finalement d'une erreur, dans l'écriture de l'espérance de gain au carrefour. Les arguments développés en fin de cet article ne seront peut-être pas suffisamment convaincants pour résoudre le paradoxe, mais il pose une question originale. Et si l'expression originale de l'espérance de gain au carrefour, origine du paradoxe, était finalement erronée?

Bibliographie

[1] Aumann, R.J., Hart, S., and Perry, M. (1997a). *The Absent-Minded Driver*, Games Econ. Behav. 20, 102-116.

[2] Aumann, R. J., Hart, S., and Perry, M. (1997b). *The Forgetful Passenger*, Games and Econ. Behav. 20, 117-120.

[3] Baratgin J., Walliser B. (2009). *Sleeping Beauty and the absent-minded driver*, http://www.pse.ens.fr/users/walliser/pdf/BW.pdf

[4] Board O. (2003) *The not-so-absent-minded driver*, Research in Economics 57, 189–200.

[5] Delabre L. (2015) Un jeune paradoxe : *la Belle au bois dormant*. Implications Philosophiques.

[6] Gilboa I. (1997) *A Comment on the Absent-Minded Driver Paradox*, Games and Econ. Behav. 20, 25-30.

[7] Piccione, M., and Rubinstein, A. (1997). *On the Interpretation of Decision Problems with Imperfect Recall*, Games and Econ. Behav. 20, 3-24.

[8] Piccione, M., (1997). *The Absent-Minded Driver's Paradox: Synthesis and Responses*, Games and Econ. Behav. 20, 121-130

[9] Schwarz W. (2014) *Lost memories and useless coins: Revisiting the absentminded driver*, http://fitelson.org/few/few_12/schwarz_paper.pdf