

## L'idée de mathématiques appliquées chez Comte

Michel Bourdeau

► **To cite this version:**

Michel Bourdeau. L'idée de mathématiques appliquées chez Comte. Mathématiques et Sciences Humaines, Centre de Mathématique Sociale et de statistique, EPHE, 2011, pp.35-44. <halshs-00595495>

**HAL Id: halshs-00595495**

**<https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00595495>**

Submitted on 24 May 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## L'IDÉE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES CHEZ COMTE

Michel BOURDEAU<sup>1</sup>

**RÉSUMÉ** – *L'idée de science appliquée est au cœur de l'épistémologie positiviste : applications pratiques, industrielles, bien sûr, mais aussi applications théoriques. L'ambivalence de Comte à l'égard de la discipline qu'il a longtemps enseignée ajoute toutefois une donnée supplémentaire. L'article commence par rappeler l'embarras de la pensée positive devant l'a priori et la façon dont elle croit trouver la solution dans la distinction abstrait concret. Déjà, l'idée que les mathématiques seraient une science des mesures indirectes fait une place à l'application, puisque c'est l'usage qui en est fait par le physicien qui est pris comme essentiel. Après avoir vu comment Comte tente de répondre à l'objection qu'il se fait à lui-même à ce propos, on développe l'idée que la théorie de l'application des sciences constitue une pièce maîtresse de la philosophie positive des sciences. Les applications théoriques tiennent aux liens de dépendance établis par la classification : il n'y a pas de physique sans mathématiques, et géométrie céleste comme mécanique céleste ne sont que l'application de ces deux branches des mathématiques à une classe particulière de phénomènes. Quant aux applications indues, sur lesquelles Comte croit nécessaire d'attirer l'attention, elles sont traitées sous le nom d'« usurpation » ou de « matérialisme » mathématique. Une dernière partie traite des applications pratiques et des difficultés insurmontables qui ne tardent pas à se présenter et qui invitent également à restreindre de façon stricte le champ d'application effectif de la première des sciences.*

**MOTS-CLÉS** – Classification des sciences, Mesures indirectes, Positivism, Physique mathématique

### **SUMMARY – AUGUSTE COMTE'S IDEA OF APPLIED MATHEMATICS**

*Trained as an engineer, Comte knew that science is mainly valued for its practical applications but, as a philosopher of science, he knew of theoretical applications too. The idea of applied science lies also at the core of his philosophy of science. Positivism is at loss before the a priori and Comte tried to find a way out in the distinction between what is abstract and what is concrete. As to mathematics, he defined it as the science of indirect measures and this already gives a central place to application, as it is the way physicist uses mathematics which is paradigmatic. However, Comte saw the limit of such a definition, and answered some objections. We then show how the very idea of application is central to the positivist philosophy of science. Theoretical applications correspond to the dependencies between sciences as they are established by the classification : for instance, physics needs mathematics, and celestial geometry, as well as celestial mechanics, implies the application of these two branches of mathematics to a particular class of phenomena. Comte paid also a special attention to ill-grounded applications, which he called « usurpations », or mathematical « materialism ». The last section deals with practical applications and the way they quickly encounter so unmanageable difficulties that we have to restrict drastically the domain where mathematics apply de facto.*

**KEYWORDS** – Classification of sciences, applied mathematics, indirect measures, positivism, mathematical physics

---

<sup>1</sup> Institut d'histoire et de philosophie des sciences et des techniques (CNRS-Paris1-ENS), 13 rue du Four, 75006 Paris ; mbbourdeau@gmail.com

## 1. INTRODUCTION

Les rapports de Comte aux mathématiques sont complexes et relèvent presque de la déception amoureuse. Jusqu'à l'instauration du «subside positiviste», c'est de l'enseignement des mathématiques qu'il tirait son gagne-pain, et cet enseignement était dispensé dans cette Mecque des mathématiques d'alors qu'était l'École Polytechnique. Au plan doctrinal, il a toujours présenté la mathématique comme le berceau de la positivité, le lieu où il faut sans cesse revenir pour savoir ce qu'est qu'une science. Mais le même Comte a très vite accablé la communauté mathématique de ses sarcasmes, dénoncé les «usurpations», géométriques ou algébriques, et condamné sans appel les tentatives de ceux qui, comme Condorcet ou Quételet, entreprenaient de développer les mathématiques sociales.

Cette situation ambivalente aide à comprendre le peu d'intérêt suscité par la philosophie des mathématiques de Comte. La rumeur veut que ce soit la partie la plus faible du *Cours*. Ceux qui lisent l'ouvrage passent d'ordinaire rapidement sur le premier volume, et ce qu'on y trouve est d'ailleurs si loin de ce qui se pratique d'ordinaire sous le nom de philosophie des mathématiques que les spécialistes du domaine n'en soufflent mot. Les études remarquables de M. Boudot et de E. Coumet sont les exceptions qui confirment la règle et nous ne pouvons qu'inciter vivement le lecteur à les lire<sup>2</sup>. Mais elles ont en commun de mettre l'accent sur les parties les plus faibles de la philosophie positive des mathématiques, au point qu'après les avoir lues, on en vient à se demander s'il faut avoir la moindre estime pour Comte, ce qui ne semble toutefois pas l'intention de leurs auteurs.

Sans nier un seul instant les faiblesses de cet aspect de la pensée de Comte, il est possible de le présenter sous un jour plus favorable, ou du moins, moins inacceptable. Pour ce faire, je propose de prendre comme fil conducteur l'idée de mathématiques appliquées. Une telle approche présente elle aussi des limites. Elle véhicule une conception instrumentaliste des mathématiques qui ne rend qu'imparfaitement justice à celles-ci. Loin de moi donc de penser que ce serait *la* bonne philosophie des mathématiques, mais cet aspect est tellement négligé d'ordinaire qu'il n'est pas inutile d'en rappeler l'existence. Objecter qu'il ne s'agirait que d'une simple philosophie d'ingénieur serait injuste. Certes, comme le rappelle la formule *science d'où prévoyance, prévoyance d'où action*, l'idée d'application traduit tout d'abord le souci de relier la théorie à la pratique. Ce que l'on voit moins souvent, en revanche, c'est qu'elle possède aussi une dimension directement théorique, que la perspective encyclopédique adoptée dans le *Cours* met particulièrement en valeur, au point qu'on peut dire que la théorie de l'application des sciences constitue une pièce maîtresse de la philosophie positive des sciences. La classification a pour but d'établir entre les sciences des liens de subordination ; or c'est le fait qu'une science trouve à s'appliquer dans une autre qui constitue ce réseau de dépendances dont l'échelle encyclopédique est chargée de rendre compte.

Il ne s'agira ici que de la seule application des mathématiques, ce qui demandera de s'arrêter un temps sur la définition qui en est donnée dans le *Cours* et qui en fait la science des mesures indirectes ; de considérer également les rapports de l'abstrait et du concret, où Comte voit l'objet propre d'une philosophie des mathématiques. Plus

---

<sup>2</sup> Cf. Boudot [1985] et Coumet [2003]. La récente réédition des Presses Universitaires de France (*Premières leçons du Cours de philosophie positive*, 2007) si elle apporte des éclaircissements historiques, néglige à peu près totalement la dimension philosophique des leçons : à preuve, dans la troisième leçon, consacrée à définir l'objet des mathématiques, rien n'y est dit pour souligner l'originalité de la réponse proposée par Comte.

précisément, ce qui suit comprendra trois parties. Tout d'abord, il faudra dire quelques mots de la façon assez surprenante dont les mathématiques sont introduites dans le *Cours*. L'embarras de la philosophie positive devant l'*a priori* y est manifeste et l'oblige à distinguer d'emblée deux sortes de mathématiques, l'une abstraite, l'autre concrète. On verra ensuite comment l'idée de science des mesures indirectes permet de restaurer l'unité de la discipline, ainsi que les objections que Comte s'adresse à ce propos. C'est seulement alors qu'on pourra aborder pour elle-même l'idée d'application, tant dans ses deux dimensions théorique et pratique que dans ses rapports avec le couple abstrait-concret. Il faudra aussi s'interroger sur le champ d'application des mathématiques, sur son étendue, sur ses limites ; c'est dans ce cadre que se situe ce qui touche aussi bien aux « usurpations » mathématiques (Comte dira encore au « matérialisme » mathématique) qu'au refus des mathématiques sociales.

## 2. PREMIÈRE APPROCHE

La fin de la seconde leçon du *Cours* réserve au lecteur une surprise de taille. La classification des sciences, qui en constitue l'objet propre, est comme achevée quand, à la dernière page, l'auteur constate « une lacune immense et capitale » : il a oublié de parler des mathématiques, dont il dira pourtant aussitôt après qu'elle est la science par excellence et le berceau de la positivité.

En réalité, l'oubli n'a rien d'une inadvertance et cet artifice sert à cacher tant bien que mal le réel embarras d'une philosophie mal armée pour penser l'*a priori*. Comme le dit l'*Avant propos* du *Cours*, la philosophie positive, c'est la « philosophie naturelle » parvenue au point où elle peut inclure l'étude des phénomènes sociaux et la philosophie morale. Or depuis Platon et la distinction entre les mondes sensible et intelligible, nous avons pris l'habitude de rattacher les mathématiques à l'intelligible et à la couper de tout lien avec cette expérience sur laquelle reposent les sciences expérimentales.

La solution consistera à conférer à la mathématique un statut équivoque en la scindant en deux parties « dont le caractère est essentiellement distinct » [Comte 1830, 2<sup>e</sup> l., p. 63] : la mathématique abstraite (le calcul) et la mathématique concrète (la géométrie et la mécanique rationnelle). Ces dernières sont de véritables sciences naturelles. Elles nous apportent des connaissances très réelles, et cela parce qu'elles reposent elles aussi sur l'observation. Le calcul y intervient également, de sorte que la mathématique concrète repose sur la mathématique abstraite, qui est donc première. Celle-ci toutefois n'est pas une science à proprement parler. C'est un *organon*, un outil de la science, comme la logique, dont elle ne se distingue que par un pouvoir déductif incomparablement plus riche et plus souple<sup>3</sup>.

Le couple abstrait-concret constitue un des ressorts cachés de l'épistémologie positiviste et avait été introduit un peu plus haut dans la même leçon. Entreprendre de classer la totalité des sciences existantes aurait abouti à un résultat peu utile. Afin de réduire le nombre des sciences à considérer, Comte avait donc commencé par distinguer science abstraite (la biologie) et science concrète (zoologie, botanique), la classification ne portant comme on sait que sur les premières. Signe de l'importance de la distinction, elle *servira* à caractériser

*la vraie philosophie mathématique [...] encore presque entièrement dans l'enfance [...] et] qui consiste dans la relation convenablement organisée de l'abstrait au concret [Comte, 1830, 28<sup>e</sup> l., p. 449].*

<sup>3</sup> Rougier [1921, p. 128] notait déjà que Comte « voyait dans les mathématiques pures une promotion de la logique, étendue à certains ordres de déduction ».

On la retrouvera à diverses reprises dans ce qui suit, aussi faut-il en signaler dès à présent le caractère problématique : Comte, adversaire irréductible de la métaphysique, ne semble en effet pas voir qu'il introduisait de cette façon le loup dans la bergerie, le concept d'abstraction étant un concept éminemment métaphysique<sup>4</sup>.

### 3. LA DÉFINITION

La définition donnée dans la troisième leçon (la première des leçons de mathématique proprement dite) est censée réintroduire l'unité de la première des sciences ; en réalité, elle sert surtout à développer la conception instrumentaliste, l'opposition entre mesure directe et mesure indirecte n'ayant d'autre raison d'être que de mettre en valeur la fonction de la mathématique comme outil de déduction. Voici comment cette définition est introduite :

*C'est ce fait général [l'impossibilité où nous sommes souvent d'effectuer des mesures directes] qui nécessite la formation de la science mathématique, comme nous allons le voir. Car, renonçant, dans presque tous les cas, à la mesure immédiate des grandeurs, l'esprit humain a dû chercher à les déterminer indirectement, et c'est ainsi qu'il a été conduit à la création des mathématiques.*

*La méthode générale qu'on emploie constamment, la seule évidemment qu'on puisse concevoir, pour connaître des grandeurs qui ne comportent point une mesure directe, consiste à les rattacher à d'autres qui soient susceptibles d'être déterminées immédiatement, et d'après lesquelles on parvient à découvrir les premières, au moyen des relations qui existent entre les unes et les autres. Tel est l'objet précis de la science mathématique envisagée dans son ensemble [Comte, 1830, 3<sup>e</sup> l., p. 67-68].*

Ainsi, quand on fait tomber un objet dans un puits ou du haut d'une falaise, il est souvent difficile de mesurer la hauteur de chute. Mais, dès lors que l'on peut entendre le bruit de l'objet heurtant le sol ou le fond du puits, le temps de chute peut être mesuré directement et les lois de la mécanique établissant un rapport constant entre ce temps et la distance parcourue, le calcul permet de déterminer la quantité recherchée. De même, les diverses distances que les astronomes ont réussi à déterminer n'ont pas été mesurées directement, mais déduites par le calcul de mesures faites sur terre.

#### L'OBJECTION ET LA RÉPONSE

Ces exemples, dira-t-on, sont inappropriés : ils appartiennent non à la mathématique proprement dite, mais à la mécanique ou à l'astronomie ; ils montrent que Comte passe complètement à côté de son objet, lequel est pensé non en lui-même mais dans ses seules applications. L'auteur du *Cours*, à sa façon, avait reconnu la difficulté et en traite dans la dixième leçon, qui sert d'introduction au développement consacré à la géométrie.

*Il n'est pas douteux, y remarque-t-il, que la majeure partie des recherches qui constituent notre géométrie actuelle ne paraisse nullement avoir pour objet la mesure de l'étendue [Comte, 1830, 10<sup>e</sup> l., p. 162-163].*

La réponse ne manque pas d'intérêt ; elle montre en particulier la place qu'occupe la question de l'application, et son lien avec celle du rapport de l'abstrait au concret. Comte commence par concéder que, autant sinon plus que la mesure, la géométrie a pour objet l'étude des différentes propriétés des figures. Mais, ajoute-t-il, cette étude n'a

<sup>4</sup> Cf. Bourdeau [2006, p. 98-104].

d'autre raison d'être que d'« organiser, d'une manière rationnelle, la relation de l'abstrait au concret en géométrie » et l'on peut :

*établir, de la manière la plus générale, la relation nécessaire d'une telle étude avec la question de mesure, pour laquelle la connaissance la plus complète possible des propriétés de chaque forme est un préliminaire indispensable.*

*La science géométrique devant considérer, ainsi que je l'ai indiqué ci-dessus, toutes les formes imaginables qui comportent une définition exacte, il en résulte nécessairement, comme nous l'avons remarqué, que les questions relatives aux formes quelconques présentées par la nature, sont toujours implicitement comprises dans cette géométrie abstraite, supposée parvenue à sa perfection. Mais quand il faut passer effectivement à la géométrie concrète, on rencontre constamment une difficulté fondamentale, celle de savoir auxquels des différents types abstraits on doit rapporter, avec une approximation suffisante, les lignes ou les surfaces réelles qu'il s'agit d'étudier. Or, c'est pour établir une telle relation qu'il est particulièrement indispensable de connaître le plus grand nombre possible de propriétés de chaque forme considérée en géométrie.*

*En effet, si l'on se bornait toujours à la seule définition primitive d'une ligne ou d'une surface, en supposant même qu'on pût alors la mesurer (ce qui, d'après le premier genre de considérations, serait le plus souvent impossible), ces connaissances resteraient presque nécessairement stériles dans l'application, puisqu'on ne saurait point ordinairement reconnaître cette forme dans la nature, quand elle s'y présenterait. Il faudrait pour cela que le caractère unique, d'après lequel les géomètres l'auraient conçue, fût précisément celui dont les circonstances extérieures comporteraient la vérification, coïncidence purement fortuite, sur laquelle évidemment on ne doit pas compter, bien qu'elle puisse avoir lieu quelquefois. Ce n'est donc qu'en multipliant autant que possible les propriétés caractéristiques de chaque forme abstraite, que nous pouvons être assurés d'avance de la reconnaître à l'état concret, et d'utiliser ainsi tous nos travaux rationnels, en vérifiant, dans chaque cas, la définition qui est susceptible d'être constatée directement. Cette définition est presque toujours unique dans des circonstances données, et varie, au contraire, pour une même forme, avec des circonstances différentes : double motif de détermination [Comte, 1830, 10<sup>e</sup> l., p. 163-164].*

Kepler aurait-il pu reconnaître la véritable nature de la trajectoire de Mars, s'il s'en était tenu aux propriétés usuelles de l'ellipse (section oblique d'un cône circulaire par un plan, lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante) ? L'unique propriété à s'appliquer est la relation qui existe dans ce cas entre la longueur des distances focales et leur direction, car elle exprime

*la loi qui lie la distance de la planète au soleil au temps écoulé depuis l'origine de sa révolution. Il a donc fallu que les travaux purement spéculatifs des géomètres grecs sur les propriétés des sections coniques eussent préalablement présenté leur génération sous une multitude de points de vue différents, pour que Kepler ait pu passer ainsi de l'abstrait au concret, en choisissant parmi tous ces divers caractères celui qui pouvait le plus facilement être constaté pour les orbites planétaires [Comte, 1830, 10<sup>e</sup> l., p. 165].*

On en dirait autant de la figure de la Terre :

*Si on n'avait jamais connu d'autre propriété de la sphère que son caractère primitif d'avoir tous ses points également distants d'un point intérieur, comment aurait-on pu jamais découvrir que la surface de la terre était sphérique ? Il a été nécessaire pour cela de déduire préalablement de cette définition de la sphère quelques propriétés susceptibles d'être vérifiées par*

*des observations effectuées uniquement à la surface, comme, par exemple, le rapport constant qui existe pour la sphère entre la longueur du chemin parcouru le long d'un méridien quelconque en s'avançant vers un pôle, et la hauteur angulaire de ce pôle sur l'horizon en chaque point. Il en a été évidemment de même, et avec une bien plus longue suite de spéculations préliminaires, pour constater plus tard que la terre n'était point rigoureusement sphérique, mais que sa forme est celle d'un ellipsoïde de révolution [ibid. C'est moi qui souligne].*

#### 4. L'APPLICATION DES MATHÉMATIQUES

*La philosophie des sciences comme philosophie de l'application des sciences.* Après ces préliminaires, il est temps d'aborder en elle-même l'idée de mathématique appliquée. Sur ce point, le positivisme a le mérite de ne pas se restreindre aux seules applications pratiques, auxquelles on s'en tient d'ordinaire, et de mettre en évidence l'existence d'applications théoriques. La perspective encyclopédique adoptée dans le *Cours* fait que la philosophie des sciences se doit de fournir une philosophie de l'application des sciences.

Il existe en effet un rapport étroit entre la classification des sciences et leurs applications. Des mathématiques à la sociologie, nous dit la **deuxième** leçon, on procède du simple au complexe, du général au particulier. On pourrait ajouter : de l'abstrait au concret et, si Comte ne le fait pas, c'est sans doute parce que, comme on l'a vu, il a fallu commencer par exclure les sciences concrètes. L'application peut alors être définie comme le passage d'un de ces termes à l'autre : du simple au complexe, du général au particulier, de l'abstrait au concret, ce qui en ferait comme l'inverse de l'abstraction, et une sorte de « concrétion » [Comte, 1856, p. 7]. Il est même permis de penser que si ce dernier mot n'est pas utilisé dans ce sens, c'est que *application* rend de façon à peu près satisfaisante les mêmes services. En revanche, (c'est la faiblesse signalée au début), un esprit rigoureux aura remarqué que l'équivalence posée entre simple, général et abstrait, fait bon marché des différences existant entre ces concepts **et reprochera à Comte de ne pas distinguer entre l'inclusion et l'appartenance ou, pour parler en logicien**, entre la subordination des concepts et la subsomption d'un objet sous un concept.

L'adoption du point de vue encyclopédique a encore une autre conséquence, moins souvent notée mais non moins remarquable. Avec la théorie des applications théoriques, il nous donne en effet une théorie des applications indues. Si le supérieur dépend de l'inférieur, il n'en résulte pas, et les liens de dépendance que les sciences entretiennent les unes avec les autres peuvent donner lieu à des abus. L'esprit positif ne s'étant développé que peu à peu et par degré, le réductionnisme (Comte préfère parler de *matérialisme*) est « un vice inhérent à l'initiation scientifique [...] chaque science tendant à absorber la suivante au nom d'une positivité plus ancienne et mieux établie » [Comte, 1848, p. 90]. Chaque science nouvelle doit ainsi lutter pour conquérir son autonomie. Dans un vocabulaire juridique, on dira encore qu'elle doit se défendre contre les tentatives d'*usurpation* émanant de celle qui la précède.

#### LES APPLICATIONS THÉORIQUES DES MATHÉMATIQUES

La mathématique fournit le premier et sans doute le plus bel exemple de ces deux phénomènes. Sa position initiale fait qu'elle restera toujours le berceau de la positivité et c'est à « l'unique science qui ne repose sur aucune autre » qu'il faut constamment revenir pour apprendre ce que c'est que la science<sup>5</sup>. À ces mérites intrinsèques

<sup>5</sup> Dans le même passage, Comte lui attribuera même « une haute efficacité religieuse » dans la mesure où

s'ajoutent ceux, tout aussi considérables, qui résultent de son application aux autres branches du savoir. Sans elle, l'astronomie et la physique n'auraient jamais pris leur essor et seraient restées de simples routines. Le seul nom donné aux deux grandes divisions traditionnelles de l'astronomie (géométrie céleste, mécanique céleste) dit bien qu'il s'agit de l'application de deux disciplines mathématiques à l'étude d'une certaine classe de phénomènes.

Mais la rivalité existant entre mathématique et sociologie (toutes deux prétendent à la présidence de l'échelle encyclopédique) fait que Comte est davantage porté à mettre en garde contre l'application inconsidérée de la première. Le fait de ne dépendre d'aucune autre science, qui découle de sa position initiale, explique aussi qu'elle soit devenue « l'unique refuge sérieux de l'esprit absolu », associé d'ordinaire à la seule pensée théologico-métaphysique, et que les usurpations géométriques ou plus précisément algébriques soient les plus tenaces et les plus pernicieuses de toutes :

*L'abus du calcul en mathématique constitue réellement la première phase spéciale du matérialisme systématique [...]. L'usurpation de la physique par les géomètres, de la chimie par les physiciens, de la biologie par les chimistes, deviennent ensuite de simple prolongements successifs d'un vicieux régime, dont le principe est toujours le même [Comte, 1851, I 472].*

De tels abus abondent déjà dans les domaines où les mathématiques s'appliquent pourtant le mieux, à savoir l'astronomie et la physique. Ainsi, les tentatives de Cassini pour construire *a priori* une table des réfractions atmosphériques illustre cette tendance à surestimer le pouvoir du calcul et à demander à des considérations purement rationnelles ce qui relève en dernier ressort de l'observation<sup>6</sup>. La théorie des marées aboutirait à la même conclusion : « l'impérieuse nécessité d'une grande réserve dans l'emploi des déductions »<sup>7</sup>.

*Les applications pratiques.* Si appliquer consiste à passer de l'abstrait au concret, ce passage peut s'effectuer selon deux modalités distinctes : gravir les différents degrés de l'échelle encyclopédique, puisque

*l'abstraction décroît avec l'indépendance et la simplicité [Comte, 1851, IV, p. 172],*

ou passer tout simplement de la théorie à la pratique; et si c'est aux applications pratiques que l'on pense le plus souvent, c'est que « le caractère pleinement concret ne se manifeste que dans les spéculations purement pratiques » [Comte, 1856, 253]. Afin de comprendre ce que les applications pratiques ont de spécifique, il convient donc de s'arrêter tout d'abord un instant sur les deux termes qu'elles sont chargées de relier. La difficulté se résume à ce constat : l'abstraction

« en systématisant le sentiment d'une irrésistible évidence, elle seule fait accepter, aux plus orgueilleux esprits, l'indispensable joug des vraies démonstrations, de façon à déterminer des convictions qui survivent à tous les orages des passions » [Comte, 1851, I 461].

<sup>6</sup> « Toute vraie théorie mathématique des réfractions astronomiques doit donc enfin être **jugée essentiellement impossible** et les diverses tentatives des géomètres à ce sujet ne constituent désormais, aux yeux des bons esprits, que de purs jeux algébriques [...] ces vains exercices mathématiques présentent donc un nouvel exemple des graves abus scientifiques trop souvent inhérents à notre spécialisation dispersive » [Comte, 1844(a), p. 215-216].

<sup>7</sup> [Comte, 1830, 28<sup>e</sup> l., p. 450. Cf. encore 25<sup>e</sup> l., p. 405-406], où le lecteur est invité à « apprécier la profondeur du conseil général donné par Daniel Bernoulli, qui possédait à un degré si éminent le véritable esprit mathématique, consistant surtout dans la relation du concret à l'abstrait. Il recommande prudemment aux géomètres, à cet égard, comme Clairaut, de 'ne point trop presser les conséquences des formules, de peur d'en tirer des conclusions contraires à la vérité' »; cf. le passage parallèle [Comte, 1844(a), p. 454-455] qui met en cause « la puérile affectation d'un degré de précision et de spécialité que [la théorie des marées] ne comporte pas ».



*altère plus ou moins la réalité de nos conceptions théoriques* [Comte, 1851, I, 426].

La seule façon d'obtenir des lois universelles consiste à écarter comme quantité négligeable un certain nombre de faits qui les infirment. Loin d'être une donnée immédiate, l'abstrait résulte d'un travail de simplification, d'idéalisation (Comte réserve ce dernier mot pour le monde de l'art), dont la clause *caeteris paribus* est chargée de rappeler l'existence<sup>8</sup>. Les astronomes ont commencé par ignorer les effets de la parallaxe ou de la réfraction **atmosphérique**, par supposer que la terre était sphérique et ces hypothèses simplificatrices, bien qu'elles aient produit des représentations inadéquates, étaient parfaitement justifiées. Aurait-on découvert les lois de la pesanteur si on avait dès le début voulu tenir compte des effets de la résistance de l'air ou de la latitude ? Appliquer une loi scientifique, c'est alors réintroduire les divers facteurs qui avaient été provisoirement écartés.

Le plus souvent, c'est une science autre que les mathématiques qui est appliquée aux cas concrets, et celle-ci ne l'est en quelque sorte qu'au second degré, en tant que la première (la physique ou l'économie par exemple) a recours à elle. Dans la mesure où elle y joue un rôle capital, il convient toutefois de dire quelques mots de ces applications indirectes. La confrontation avec le réel prend à son tour une double forme. Tout d'abord, les mesures indirectes n'étant que le résultat du calcul, il y a lieu de les comparer aux données de l'observation. Or la nature de l'activité scientifique ne permet de le faire que dans certaines conditions. Le savant, par exemple, a besoin de faire varier certains paramètres et donc d'exercer un contrôle sur les phénomènes. Il a également besoin que rien ne vienne entraver le cours normal du phénomène qu'il se propose d'étudier et doit donc veiller à ce que ne se produise aucune interférence avec d'autres phénomènes. Il est ainsi contraint de continuer à faire abstraction d'un certain nombre de circonstances naturelles et c'est pourquoi ses expériences sont réalisées dans ce milieu hautement artificiel qu'est le laboratoire.

On ne dit d'ailleurs pas du savant qu'il applique les lois, mais plutôt qu'il cherche à vérifier ses hypothèses et, pour trouver les applications pratiques, il faut sortir du laboratoire et se tourner vers l'ingénieur. C'est alors qu'on se rend compte de l'écart considérable qui sépare la théorie de la pratique.

*Alors surgissent d'énormes déceptions, comme celles que le tir effectif des projectiles présente aux orgueilleux calculs des purs géomètres* [Comte, 1851, I p. 426].

D'ordinaire, les résultats des calculs ne correspondent que très approximativement à ce qui se passe dans la réalité. Comme il nous importe de savoir quel écart est tolérable, une bonne théorie de l'application appelle une théorie de l'approximation, aussi nécessaire au savant qu'à l'ingénieur, et qu'on trouve également chez Comte (cf. par exemple [Comte, 1844, p. 70-71]).

#### LES LIMITES DU DOMAINE D'APPLICATION

Ce genre de difficultés rencontrées dans les cas les plus simples invite à s'interroger sur l'étendue réelle du domaine d'application des mathématiques. D'un point de vue purement logique, sa juridiction est universelle : il découle de la définition des

<sup>8</sup> « L'abstraction consiste surtout à écarter d'abord les irrégularités secondaires qui empêcheraient de saisir la loi principale, à laquelle on s'efforce ensuite de rattacher les moindres circonstances du phénomène » ; Comte poursuit en notant que « la réflexion philosophique est indispensable pour ne pas [...] introduire trop tôt une précision inopportune, qui empêcherait d'y saisir aucune loi » [Comte, 1851, I, p. 501].

mathématiques qu'il n'existe en droit aucun phénomène que nous puissions supposer soustrait à un traitement mathématique. **Dans les faits**, toutefois, il en va **bien** autrement. L'application devenant de plus en plus difficile à mesure que les phénomènes deviennent plus complexes, il s'ensuit que nous ne réussissons à appliquer les mathématiques que dans un domaine étroitement limité. La multiplicité des causes agissant indépendamment l'une de l'autre dans un phénomène complexe comme la météorologie fait qu'il ne se produit à peu près jamais deux cas semblables et que nous ne parvenons pas à trouver la loi mathématique qui lui correspondrait. A cette première difficulté s'en ajoute une seconde : à supposer qu'on arrive à trouver cette loi, nous serions le plus souvent incapables de résoudre cette équation, comme le montre un cas aussi simple que le problème des trois corps. Comte entend donc à la fois :

*rendre sensible la rigoureuse universalité logique de la science mathématique [... et] signaler les conditions qui limitent pour nous son extension réelle, afin de ne pas contribuer à écarter l'esprit humain de la véritable direction scientifique dans l'étude des phénomènes les plus compliqués, par la recherche chimérique d'une perfection impossible* [Comte, 1830, 3<sup>e</sup> l., p. 81].

C'est dans ce cadre, qui vient compléter la théorie des usurpations, qu'il faut comprendre le refus de la mathématique sociale proposée par Condorcet,  **sujet dont Ernest Coumet avait si bien parlé dans l'article cité plus haut.**

## 5. CONCLUSION

Telle est, brièvement, l'idée des mathématiques appliquées qu'on trouve dans l'œuvre de Comte. Je ne me suis pas étendu sur ses faiblesses, je n'ai pas non plus cherché à les dissimuler : erreurs patentes, concepts problématiques, pour ne rien dire des sujets passés sous silence. J'espère simplement avoir montré qu'elle n'est pas sans mérite. Elle vient corriger les lacunes tout aussi manifestes d'une philosophie des mathématiques uniquement préoccupée de savoir *de quoi* parle la mathématique. Cette focalisation quasi exclusive sur la nature des objets mathématiques peut légitimement être considérée comme un vestige de métaphysique. Elle tend à faire de la question *comment se fait-il que les mathématiques trouvent à s'appliquer dans la réalité ?* une énigme insoluble, alors que dans bien des cas, et non des moindres (qu'on pense à Newton ou à Fourier), elles ont tout simplement été inventées pour cela !<sup>9</sup>

De Comte, on retiendra d'abord qu'une philosophie des mathématiques ne peut faire l'économie d'une réflexion sur les mathématiques appliquées. La distinction entre applications théoriques et applications pratiques est tout aussi fondamentale. Nancy Cartwright nous invite à distinguer entre tester une théorie et appliquer une théorie<sup>10</sup>. En réalité, la différence n'est pas entre tester et appliquer, mais entre deux sortes d'applications, visant des fins différentes, et effectuées l'une dans ce milieu artificiel qu'est le laboratoire, l'autre en milieu naturel. Les mathématiciens ne sont pas tous restés insensibles aux positions adoptées dans le *Cours*. C'est ainsi que Maurice Fréchet, s'interrogeant sur la raison d'être de la théorie déductive, dont on fait depuis Euclide le cœur de la mathématique, écrivait :

<sup>9</sup> Cf. par exemple [Courant, 1987], qui illustre bien le phénomène d'usurpation décrit par Comte. « Les mathématiques, y lit-on, jouent en physique un rôle souverain » (p. 55). Que les mathématiques jouent un rôle constitutif ne signifie pas qu'elles soient souveraines et, en un autre sens, elles n'exercent qu'une fonction auxiliaire car, si elles sont constitutives de la théorie, celle-ci reste soumise à l'expérience.

<sup>10</sup> Cf. Cartwright [1976, p. 714].

*Dans le développement historique des sciences, ce n'est pas surtout l'utilité d'une coordination entre des faits déjà connus qui a donné naissance à la théorie déductive. Cette coordination satisfait peut-être mieux l'esprit, elle n'accroît pas directement la puissance de l'homme. Ce rôle serait alors réservé à l'expérience si la théorie déductive n'avait pour but que cette coordination. Mais il n'en est rien. Quand un arpenteur veut estimer l'aire d'un terrain, il ne peut songer à la mesurer directement, c'est-à-dire à compter le nombre d'unité d'aire qu'elle contient. En fait, la seule méthode usitée consiste à opérer indirectement, à mesurer non des aires mais des longueurs et des angles et à en tirer la valeur de l'aire grâce aux théorèmes et aux formules obtenus par voie déductive en Géométrie et en Trigonométrie.*

*On voit ici l'avantage essentiel de la méthode déductive. Sans dispenser de l'expérience, elle permet de remplacer des expériences fournissant directement les résultats cherchés mais longues, coûteuses, difficiles, par des expériences indirectes plus faciles dont, grâce aux propositions générales obtenues par la méthode déductive, on tire les résultats cherchés [Fréchet, 1955, p. 14-15].*

Fréchet avait-il lu les leçons mathématiques du *Cours* ? C'est fort possible, mais rien ne permet de l'affirmer et, de toutes façons, ce qui importe, ce n'est pas cela, mais de savoir si l'idée est féconde ou non. Laissons le dernier mot à Comte

*les théorèmes et les formules mathématiques sont rarement susceptibles d'une application complète à l'étude effective des phénomènes naturels, quand on veut dépasser la plus extrême simplicité dans les conditions réelles des problèmes. Mais le véritable esprit mathématique, si distinct de l'esprit algébrique avec lequel on le confond trop souvent, est, au contraire, constamment applicable; et sa connaissance approfondie constitue à mes yeux le plus intéressant résultat que les physiciens puissent retirer d'une étude philosophique de la science mathématique [Comte, 1830, 28<sup>e</sup> l., p. 452-453].*

#### BIBLIOGRAPHIE

- BOUDOT M. (1985), « De l'usurpation géométrique », *Revue philosophique*, p. 287-402
- BOURDEAU, M. (2006), *Les trois états, science, théologie et métaphysique chez Comte*, Paris, éditions du Cerf.
- CARTWRIGHT N. (1976), "How do we apply science?", in R. S. Cohen *et alii* (eds.), *PSA 1974 Proceedings*, Reidel, Dordrecht, p. 713-719.
- COMTE A. (1830-1842), *Cours de philosophie positive* (1830-1842) [cité dans l'édition Hermann, Paris, 1975].
- COMTE A. (1844), *Discours sur l'esprit positif*, 1844 [cité dans l'édition Vrin, Paris, 1995].
- COMTE A. (1844(a)), *Traité philosophique d'astronomie populaire* [cité dans l'édition Fayard, Paris, 1985].
- COMTE A. (1848), *Discours sur l'ensemble du positivisme* [cité dans l'édition GF, Paris, 1998].
- COMTE A. (1851-1854), *Système de politique positive* [cité d'après la réédition procurée par la Société Positiviste, Paris, 1927. « 1851, I, p. 354 » renvoie ainsi à la page 354 du premier volume].
- COMTE A. (1856), *Synthèse subjective*, Paris, V. Dalmont.
- COUMET E. (2003), « Auguste Comte. Le calcul des chances, aberration radicale de l'esprit mathématique », *Mathématiques et Sciences humaines* 162, p. 9-17.
- COURANT R. (1987), « De la très déraisonnable efficacité des mathématiques en physique », *Raison présente*, p. 49-63.

FRECHET M. (1955), « L'origine des notions mathématiques », *Les mathématiques et le concret*, Paris, Presses Universitaires de France.

ROUGIER L. (1921), *La structure des théories déductives*, Paris, Alcan.