Les mesures globales d'un réseau

César Ducruet, CNRS, UMR Géographie-cités
ducruet<at>parisgeo.cnrs.fr

Version 1 - Novembre 2010

groupe f.m.r.

Introduction

Un certain nombre de mesures permettent de résumer de façon relativement simple la structure d'un réseau donné. Bien que la plupart des manuels de géographie des transports (voir par exemple Rodrigue *et al.*, 2009 [10]), s'arrêtent aux mesures « classiques » proposées par la théorie des graphes, nous essaierons ici d'en offrir une liste plus complète. Des synthèses déjà réalisées nous y aideront, comme celle de H. Béguin et I. Thomas (1997[4]), mais la recherche s'appuie avant tout sur le passage en revue d'une littérature éparpillée entre plusieurs disciplines (voir fmr1[3]).

Une fois les différentes mesures classées en catégories, chacune est expliquée à l'aide *a*) de sa formule de référence, *b*) d'une illustration quand cela est possible, et enfin *c*) d'exemples concrets tirés de la littérature. On pourra aussi discuter de la pertinence de certaines mesures par rapport à d'autres mais surtout par rapport au type de réseau rencontré : certaines mesures ne s'appliquent qu'à des graphes planaires ou non planaires, peuvent ou non prendre en compte l'orientation du graphe ou bien les valeurs qui lui sont associées, etc.

1 Pourquoi et comment mesurer la structure d'un réseau ?

Selon son organisation morphologique, un réseau donné est plus ou moins capable de faire circuler quelque chose, par rapport à un idéal de fluidité totale (informations, marchandises, personnes, capitaux...) et/ou en fonction de contraintes qui sont celles du réseau lui-même (ex : qualité des liens et des nœuds) ainsi que du milieu traversé.

Les mesures existantes sont très diverses car chacune décrit une partie seulement de la structure d'ensemble. Une seule ne suffit donc pas à conclure sur la nature d'un réseau donné. Lesquelles faut-il choisir ? Si certaines mesures vont de soi, comme celles décrivant la taille du réseau, d'autres font l'objet de critiques. Nous le verrons, les mesures de la théorie des graphes sont parfois jugées « non robustes » car étant basées uniquement sur le nombre de nœuds et de liens, elles peuvent fournir des résultats identiques à partir de deux graphes de même taille mais dont la morphologie diffère voire s'oppose.

Cela explique sans doute que ces mesures ne soient quasiment pas utilisées par les physiciens, qui tentent par tous les moyens d'en proposer des nouvelles, que nous présenterons également. Une autre alternative aux mesures traditionnelles est de ne pas prendre en compte le poids ou la longueur des liens (voir Barrat *et al.*, 2004[2]). Or, les mesures issues de la théorie des graphes gardent leur intérêt, notamment pour l'étude de l'évolution spatio-temporelle d'un réseau.

2 Les propriétés du graphe

On peut tenter de classer les mesures globales selon une gradation des plus simples aux plus élaborées ou aux plus robustes. Tout d'abord, il est important de connaître la taille du réseau ainsi que sa répartition (2.1), ce qui permet de décrire sa structure (2.2 et 2.3).

2.1 Taille et répartition

La taille d'un réseau se mesure en nombre de sommets et de liens, ainsi que par le diamètre et le nombre de composants connexes (voir tableau 1). Dans le cas d'un réseau valué, et selon les informations disponibles, la longueur (ex : distance kilométrique) et le poids (ex : trafic) des liens peuvent être additionnés pour renseigner la taille du réseau. L'évolution de ces mesures permet dans un premier temps de comprendre si le réseau est en phase de croissance (addition successive de sommets et de liens, allongement de la distance totale) ou bien si son utilisation progresse (croissance du trafic). Il est nécessaire d'opérer des rapports entre ces mesures « brutes » pour mieux comprendre l'organisation du réseau (voir tableau 2) ainsi que sa structure.

De façon globale, quelques mesures simples permettent d'envisager la façon dont le réseau est bâti. L'indice de détour est le ratio entre la distance totale du graphe (distance à vol d'oiseau entre les sommets) et la distance totale « réelle » du réseau. Il révèle le degré de simplification du premier par rapport au second, notamment en rapport avec la topographie (ex : relief) dans le cas des réseaux spatiaux ou spatialisés (*spatial networks*). La densité du réseau par rapport à une surface donnée (État, région, ville) est également une mesure utile, bien qu'elle soit souvent sujette à des erreurs d'interprétation : le réseau de transport algérien est fortement concentré sur

Tableau 1 – La taille du réseau

Mesure	Traduction	Description	Notation
Nombre de sommets	Number of vertices		v
Nombre de liens	Number of edges		e
Composants	Components		p
Diamètre	Diameter		D
Longueur totale	Total length	Somme des longueurs des liens	$L(G)$
Trafic total	Total trafic	Somme des trafics des liens	$Q(G)$

Tableau 2 – L'organisation du réseau

Mesure	Traduction	Description	Formule
Indice de détour	Detour index	Longueur du graphe rapportée à la longueur du réseau	$DI = \frac{DD}{TD}$
Densité	Density	Longueur du graphe rapportée à la surface de l'espace étudié	$ND = \frac{L}{S}$
Indice π	Pi index	Longueur du graphe rapportée à la longueur du diamètre	$\pi = \frac{L(G)}{D(d)}$
Indice η	Eta index	Longueur du graphe rapportée au nombre de liens	$\eta = \frac{L(G)}{e}$
Indice Θ	Theta index	Trafic total rapporté au nombre de sommets	$\Theta = \frac{Q(G)}{v}$

le littoral mais il n'a qu'une faible densité par rapport à la surface totale de l'Algérie. La longueur moyenne des liens dans le graphe (indice η) permet de saisir d'emblée un phénomène d'expansion géographique des connections ou au contraire leur contraction, comme dans le cas d'une firme multinationale déployant son réseau à l'étranger. Le même calcul est possible à partir du trafic, rapporté au nombre de sommets (indice Θ) mais aussi au nombre de liens (i.e. poids moyen d'un lien). Le poids moyen peut varier dans le temps en fonction de l'évolution du réseau et de son degré d'activité.

2.2 Structure : mathématiques et théorie des graphes

Ces premières mesures de la structure du graphe sont dites « classiques » car provenant essentiellement de la théorie des graphes (Kansky, 1963[7] ; Parlebas, 1972[9]). On les retrouve dans la plupart des manuels de géographie des transports, par exemple. Elles ont été pensées par rapport aux graphes planaires mais s'appliquent à tout graphe moyennant quelques modifications

Tableau 3 – Mesures de la structure (théorie des graphes)

Mesure	Traduction	Description	Formule
Nombre cyclomatique	Cyclomatic number	Nombre maximum de cycles indépendants	$u = e - v + p$
Indice α	Alpha index (lattice degree)	Nombre de cycles sur nombre maximum de cycles possibles	$\alpha = \frac{u}{2v-5}$
Indice β	Beta index (complexity)	Nombre de liens sur nombre de sommets	$\beta = \frac{e}{v}$
Indice γ	Gamma index (connectivity)	Nombre de liens sur nombre maximum de liens possibles	$\gamma = \frac{e}{3(v-2)}$
Centralité	Centrality	Somme des centralités individuelles* des nœuds	$C(G) = \sum_{i=1}^{i=N} C(X_i)$

**Centralité individuelle = rapport entre la somme des écarts entre les nœuds du réseau et la somme des écarts d'un nœud du réseau.*

pour certaines[1]. Régulièrement remises en question, ces mesures n'en sont pas moins utilisées dans nombre de recherches récentes. Leurs limites sont réelles lorsqu'il s'agit de comparer deux réseaux entre eux.

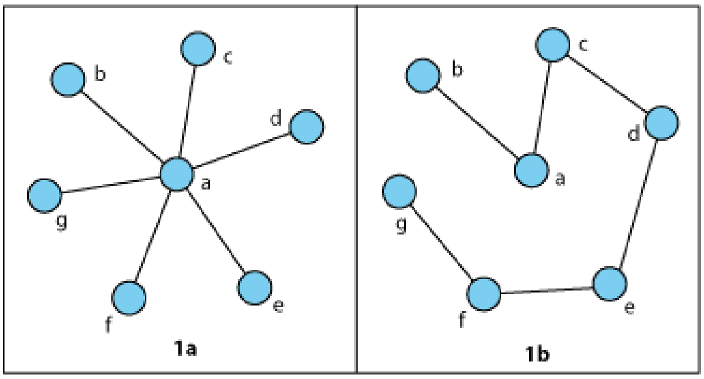
Pour s'en rendre compte, il suffit de comparer les deux graphes de la figure 1 pour lesquels les indices α (0), β (0,86) et γ (0,46) sont identiques puisqu'ils sont de même taille (nombre identique de liens et de sommets). Pourtant, leur morphologie est fondamentalement différente :

- Le graphe 1a est organisé en étoile donc très polarisé (star, hub) d'où un passage obligé par le sommet a pour se rendre d'un sommet à un autre dans le graphe. Le graphe est très vulnérable puisque la disparition du sommet a entraînerait l'effacement de tous les liens.
- Le graphe 1b, organisé en chaîne, montre une bien moindre polarisation puisque la conséquence de la disparition du même sommet a n'aboutirait qu'à effacer deux liens (ab et ac), isolant par là le sommet b et rendant le graphe non connexe.

L'application de ces mesures au réseau ferré chinois (voir figure 2) permet de souligner plus précisément la teneur de certaines dynamiques. Bien que la taille du réseau ait constamment augmentée, la structure de celui-ci est restée relativement stable de 1949 à 1974, montrant par là l'influence des régimes politiques d'une période à une autre en termes de planification et de logique d'aménagement. La stabilité des mesures de structure correspond à l'émergence et à l'expansion du réseau (1906-1925 création du réseau ; 1949-1974 front pionnier et repli vers l'Ouest) tandis que leur accroissement rapide signifie sa consolidation et sa concentration (1925-1949 influences extérieures ; 1974-2000 concentration orientale après l'ouverture et les réformes). Les me-

1. pour un graphe non planaire, l'indice α se calcule ainsi : $\alpha = \frac{e-v}{\frac{v(v-1)}{2}-(v-1)}$ et l'indice γ est égal à $\gamma = \frac{e}{\frac{v(v-1)}{2}}$ (voir Kanski, 1989[8])

Figure 1 – Différence de morphologie entre deux graphes de taille identique



sures classiques de structure montrent donc bien quelque chose de plus que les seules mesures de taille du réseau ; à condition de savoir les relier au contexte politico-économique changeant.

Cependant l'effet de taille contribue au manque de robustesse de ces mesures puisque les indice β et γ, par exemple, restent constants lorsque le réseau s'étend ou se réduit, par croissance allométrique (Bon, 1979[5]).

2.3 Structure : sciences physiques et de la complexité

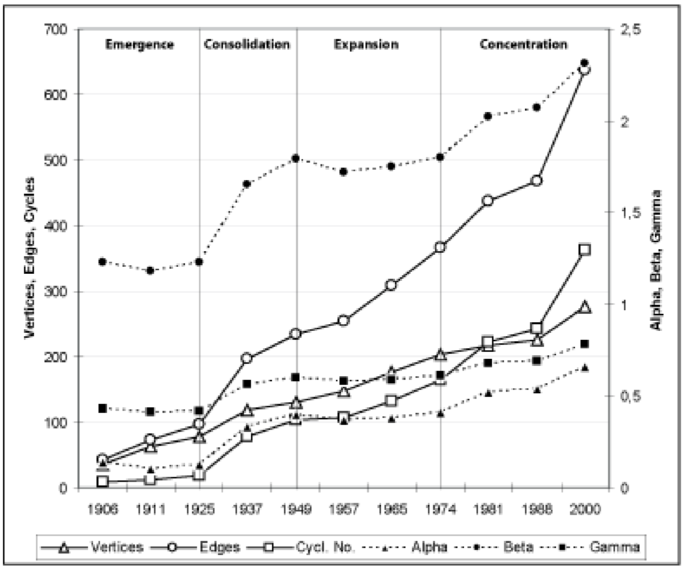
Des mesures jugées plus robustes, car ne dépendant pas (uniquement) de la taille du graphe (liens et sommets) ont été récemment proposées par les physiciens, bien que celles-ci aient été d'une certaine façon redécouvertes et non pas créées. Non seulement ces mesures correspondent à un souci de mieux caractériser la structure des réseaux, mais aussi de prédire leur évolution. Ces mesures sont supposées mieux décrire les réseaux de grande taille ou « complexes »(référence à la théorie de la complexité).

Par exemple, D.J. Watts et S.H. Strogatz (1998)[12] proposent le concept de « réseau petit monde »(*small-world network*) qui diffère d'un réseau aléatoire (*random graph*) par un court diamètre et une forte transitivité, reflétant par là la forte probabilité pour ce type de réseau d'abriter des groupes de sommets fortement connectés entre eux (*neighborhoods*, *communities*[2]) mais faiblement reliés aux autres groupes, notamment par des liens nommés « isthmes »(*isthmus*) et des sommets nommés « ponts »(*bridges*).

L'autre pendant de la réflexion récente sur les réseaux complexes vient de A.L. Barabási et R. Albert (1999)[1] qui identifient le « réseau invariant d'échelle » (*scale-free network*). On part du principe que si la distribution des degrés des sommets suit une loi de puissance, alors le réseau est dit *scale-free*.

2. Ces termes sont propres aux physiciens, les praticiens de la SNA utilisent plutôt le terme de clique, voire de cluster.

FIGURE 2 – Evolution de la taille et de la structure du réseau ferroviaire chinois



Source : adapté d'après Wang et al. (2009)[11]

Il en découle une structure très polarisée où un faible nombre de sommets possède un fort degré tandis que de nombreux sommets ont un degré faible. Les auteurs en concluent que les dynamiques au sein de ce réseau tendent à renforcer la structure hiérarchique en vertu du processus d'attachement préférentiel (*preferential attachment*) par lequel tout nouveau sommet ajouté au réseau connaîtra la forte probabilité d'être d'abord connecté à un sommet ayant déjà un degré élevé.

Outre la distribution des degrés et la transitivité, la troisième mesure robuste est la longueur moyenne des plus courts chemins (*average shortest path length*). C'est une mesure d'efficacité du réseau : plus cette longueur est courte, plus l'efficacité à faire transiter le flux au sein du réseau est grande. C'est le nombre moyen de liens devant être franchis pour passer d'un sommet à un autre dans le graphe. Un graphe planaire, comme un réseau routier ou électrique, aura un diamètre et une longueur moyenne des plus courts chemins importants, en raison du passage obligé par de nombreux sommets d'un bout à l'autre du graphe, par opposition aux réseaux complexes où ces cheminements sont plus rapides.

Enfin, d'autres mesures viennent compléter ces trois principales. La littérature propose par exemple de pondérer la transitivité (globale ou locale moyenne) par la valeur des liens (*weighted network*). Cela va dans le sens de l'indice oligopolistique (*rich-club coefficient*), qui est un simple dérivé de

Tableau 4 – Mesures de la structure (complexité)

Mesure	Traduction	Formule
Indice de hiérarchie	Scale-free	$y = ax^b$
Transitivité (1)	Transitivity (clustering coefficient)	$C_i = \frac{\lambda_G(v)}{\tau_G(v)}$
Transitivité (2)	Transitivity (average clustering coefficient)	$\overline{C} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_i$
Longueur moyenne des plus courts chemins	Average shortest path length	$l_G = \frac{1}{n*(n-1)*\sum_{i,j} d(v_i,v_j)}$
Indice oligopolistique	Rich-club coefficient	$\phi(k) = \frac{2E_{>k}}{N_{>k}(N_{>k}-1)}$

Définitions : l'indice de hiérarchie fournit la pente (b) de la courbe de puissance associée à la répartition bi-logarithmique des degrés des sommets (en abscisses) par rapport au nombre cumulé de sommets (en ordonnées). Le clustering coefficient donne le nombre de triangles (triades complètes) présents sur le nombre de triangles incomplets d'un sommet v. Sa moyenne fournit la transitivité 2. Enfin, l'indice oligopolistique est un indice β calculé au-delà d'un certain seuil de degré des nœuds (ex : nœuds de degré 10 et plus) prenant en compte uniquement les liens entre ces nœuds.

l'indice β appliqué à partir d'un seuil donné de degré. Ces deux mesures permettent de conclure à l'association plus ou moins forte entre sommets connectés par des liens de niveau de flux équivalent.

La plupart des autres approches de la structure des réseaux complexes consiste à comparer la distribution statistique de mesures locales prises deux à deux : centralité-degré et strength, strength-in et strength-out, in-degree et out-degree, centralité-degré et centralité d'intermédiarité... Selon les cas, les régressions soulignent certaines propriétés remarquables. Par exemple pour les réseaux de transport, il est fréquent que le strength augmente plus vite que le degré-centralité, puisque les sommets ayant beaucoup de connections ont une position forte vis-à-vis de leurs voisins en termes d'attraction de trafic (Hu et Zhu, 2009[6]).

La plupart de ces mesures sont appliquées de façon rigoureusement identique dans nombre d'articles récents sur les réseaux complexes. Or plusieurs problèmes restent posés :

– le seuil à partir duquel un réseau peut être dit scale-free ou small-world ;
– la superposition possible des concepts, puisqu'il existe des réseaux scale-free / small-world.

Conclusion provisoire

Même si la présente synthèse n'est pas exhaustive, la liste des mesures globales récurrentes dans la littérature scientifique n'est pas extrêmement longue. Ces mesures suffisent-elles à tout dire sur la structure d'un réseau ? Cela dépend des questions posées et des buts à atteindre. Le physicien se contente bien souvent de vérifier empiriquement la conformité du réseau à quelques modèles généraux ainsi qu'aux grandes problématiques du « monde réel »(*real world*), tandis que le géographe s'intéresse davantage aux relations à l'œuvre entre la structure (spatiale) du réseau, les caractéristiques socio-économiques changeantes des territoires connectés, et les stratégies des acteurs des réseaux et des territoires. Il semble qu'il faille aller plus loin dans les recherches sur la spatialité des réseaux, en termes de mesures et d'interprétations.

Références

[1] A.L. Barabási et R. Albert : Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.

[2] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras et A. Vespignani : The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(11):3747–3752, 2004.

[3] L. Beauguitte : Graphes, réseaux, réseaux sociaux : vocabulaire et notation. *Groupe fmr*, 7p., 2010.

[4] H. Béguin et I. Thomas : Morphologie du réseau de communication et localisations optimales d'activités. Quelle mesure pour exprimer la forme d'un réseau ? . *Cybergeo : Revue Européenne de Géographie*, 26, 1997 (http ://cybergeo.revues.org/index2189.html).

[5] R. Bon : Allometry in topological structure of transportation networks. *Quality and Quantity*, 13(4):307–326, 1979.

[6] Y. Hu et D. Zhu : Empirical analysis of the worldwide maritime transportation network. *Physica A*, 388:2061–2071, 2009.

[7] K.J. Kansky : *Structure of transportation networks : Relationship between network geometry and regional characteristics.* University of Chicago, 1963.

[8] K.J. Kansky : Measures of network structure. *Flux*, 5:89–121, 1989.

[9] P. Parlebas : Centralité et compacité d'un graphe. *Mathématiques et Sciences Humaines*, 39:5–26, 1972.

[10] J.P. Rodrigue, C. Comtois et B. Slack : *The geography of transport systems.* Routledge, Taylor and Francis Books, 2009.

[11] J. Wang, H. Mo, F. Jin et F. Wang : Spatiotemporal evolution of China's railway network in the 20th century : An accessibility approach. *Transportation Research Part A*, 43:765–778, 2009.

[12] D.J. Watts et S. Strogatz : Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.

Table des matières