



**HAL**  
open science

# Notions basiques de logique modale propositionnelle

Shahid Rahman

► **To cite this version:**

Shahid Rahman. Notions basiques de logique modale propositionnelle. Licence. France. 2015. cel-01226092

**HAL Id: cel-01226092**

**<https://shs.hal.science/cel-01226092>**

Submitted on 9 Nov 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## A1. Notions basiques de logique modale propositionnelle

Shahid Rahman

(the text is short overview and is based on several introductory books)

Le langage modal propositionnel est une extension du langage propositionnel classique, auquel sont ajoutés deux nouveaux connecteurs unaires  $\Box$  et  $\Diamond$ , qui sont respectivement les opérateurs modaux de nécessité et de possibilité. Dans la logique modale basique  $\Box$  et  $\Diamond$  sont interdéfinissables comme suit :

$$\Box\varphi \text{ ssi } \neg\Diamond\neg\varphi$$

$$\Diamond\varphi \text{ ssi } \neg\Box\neg\varphi$$

A la différence des connecteurs de la logique classique,  $\Box$  et  $\Diamond$  n'ont pas d'interprétation fixe. En fait, différentes lectures de ces connecteurs suggèrent différentes sémantiques et différents systèmes de preuve. e. g. :

$\Box$ :

On sait que  $\varphi$

Il est nécessaire que  $\varphi$

Il sera toujours vraie que  $\varphi$

Il fut toujours vrai que  $\varphi$

$\varphi$  est obligatoire

$\varphi$  est prouvable

$\Diamond$ :

$\neg\varphi$ : on ne sait pas que  $\varphi$

Il est possible que  $\varphi$

Il sera quelques fois vraie que  $\varphi$

Il fut quelques fois vraie que  $\varphi$

$\varphi$  est permisible

$\varphi$  est consistant (relativement à un système arithmétique donné)

Dans ces interprétations (des opérateurs modaux), il serait clair, du moins à partir des quatre premières paires de la liste, qu'ils soient compris comme des types de quantificateurs qui portent sur des informations d'états (ou scénarios), des mondes possibles, ou sur des contextes temporels. Les langages modaux ont aussi été utilisés pour analyser le

comportement des programmes cybernétiques et les transitions d'états des automates finis. De plus, certains langages modaux tels que les langages temporels, combinent les différentes lectures des opérateurs modaux.

La logique modale occupa d'ailleurs un large espace dans l'*Organon* d'Aristote. En fait, les deux tiers des *Premiers Analytiques* traitent de logique modale. Mais en dépit des quelques développements que réalisèrent les Stoïciens et les intenses discussions qui eurent lieu au Moyen-âge, la Syllogistique modale eut beaucoup moins d'influence que la Syllogistique assertorique. Peut-être que cela fut ainsi en raison du nombre et de la difficulté des problèmes logiques et philosophiques que cela impliquait. Ce qui est intéressant c'est que dans le Bouddhisme et le Jaïnisme, et dans la tradition indienne en général, la logique modale a occupé le centre des réflexions philosophiques, et cela semble être aussi le cas de la tradition arabe (ce qui se voit spécialement dans les travaux d'Avicenne), mais ces traditions étaient, soit difficilement accessibles, ou bien ont été parfois oubliées et parfois perdues.

Les premiers développements et applications de la logique modale furent donc philosophiques et en relation avec les diverses notions philosophiques de « nécessité » (quelque fois identifiée à l'interprétation temporelle de  $\Box$ ). La première tentative de formalisation de la logique modale à la fin du 19<sup>e</sup> siècle par le logicien français d'origine écossaise Hugh MacColl (1837-1909) fut reprise et axiomatisée par Clarence Irving Lewis en 1918. Aussitôt en 1946 Rudolph Carnap explora l'idée d'analyser la modalité comme une quantification sur les « mondes possibles », mais il ne disposait pas de la « *relation d'accessibilité* » qui définit la sémantique des mondes possibles. La sémantique actuelle des mondes possibles de la logique modale naquit de la confluence de l'approche modèle-théorique à la sémantique formelle de la tradition polonaise et de l'axiomatique de Lewis et autres. En réalité, il y avait un autre lien moins visible mais très important, notamment le lien entre l'algèbre de la logique et l'approche modèle-théorique à la sémantique de la logique modale. Ce lien est un résultat de Stephen Kanger obtenu dans ses séminaires à l'université de Stockholm en 1955 et publié en 1957 par cette université sous le titre *Provability in Logic*, et de Richard Montague. Effectivement, dans un cours magistral de 1955 à UCLA Montague donna une interprétation modèle-théorique complète de la logique modale propositionnelle. Kanger référa dans une note de bas de page (1957c, 39) au travail de Jónsson et Tarski (1951), à partir duquel son usage du dispositif relationnel semble avoir été dérivé. Comme écrit Copeland (2006, 392), « *rétrospectivement, ces théorèmes peuvent être vus en effet comme un traitement de tous les axiomes modaux de base et des propriétés correspondantes de la relation d'accessibilité* ». Maintenant, dans les travaux de Kanger et ceux de Montague, la

notion de relation utilisée était telle qu'une relation entre les modèles et non entre les mondes possibles. L'approche standard de la logique modale basique actuelle fut développée indépendamment par divers logiciens entre 1955 et 1959, particulièrement par les travaux de Carew Meredith, Arthur Prior, Jaakko Hintikka et Saul Kripke. Jack Copeland (2006) donne la priorité au travail conjoint de Meredith et Prior en 1956. En fait, le travail de Jaakko Hintikka et Saul Kripke fut la version la mieux connue de la sémantique des mondes possibles. Tandis que le premier cherchait dans une interprétation épistémique de l'opérateur de nécessité, le second étudiait une interprétation ontologique (leibnizienne) de la nécessité. De plus, dans son travail de jeunesse Hintikka appelait la relation une « *relation d'alternativité* » entre les états de choses possibles. Dans le contexte de la logique déontique, Hintikka (1957) appelle la relation une « *relation de copermissibilité* ». Richard Montague initia aux environs de 1975, une application systématique des langages modaux pour la formalisation du langage naturel. Arthur Prior (1962) après une suggestion de Peter Geach (1960), la dénomma « *relation d'accessibilité* », qui est maintenant le nom standard pour la relation binaire entre les mondes possibles. Hans Kamp élargît ce qui est appelé « les grammaires de Montague » à la **Théorie de la Représentation du Discours (DRT)** qui est maintenant le paradigme le plus influent pour la formalisation du langage naturel avec applications dans des champs variés tels que, la linguistique cybernétique, l'intelligence artificielle et la philosophie. À travers le travail de Johan Van Benthem, la logique modale est comprise comme un langage formel pour l'étude des structures. Ceci ayant été combiné, d'une part, avec l'approche DRT, et d'autre part avec la théorie sémantique des jeux (GTS).

Le succès de l'approche sémantique de la logique modale telle que développée par Hintikka et Kripke est partiellement dû au fait que dans cette approche modèle théorique, la plupart des logiques modales standards pourraient être caractérisées en mettant les conditions mathématiques simples sur les structures. Il importe de remarquer ceci : les conditions portent sur les **structures** (ou « cadres »). Bien que les modèles soient ce sur quoi nous travaillons, les cadres jouent un rôle central.

**DÉFINITION:** *Modèle, Cadre, Vérité.*

• Un modèle  $\langle W, R, v \rangle$  pour la logique modale propositionnelle consiste en:

- 1 /. Un ensemble  $W$  non vide de « mondes possibles » (contextes ou scénarios, tels que les états temporels, les états d'information etc...)
- 2/. Une relation binaire  $R$  définie sur  $W$ , qu'on appelle « une relation d'accessibilité »

3/. Une fonction de valuation qui assigne une valeur de vérité  $v(a)$  à chaque lettre propositionnelle du langage propositionnel dans chaque monde possible.

- Un ensemble de « mondes possibles »  $W$ , avec une relation d'accessibilité, est appelé un *cadre* ou une *structure*. Ainsi, étant donné un cadre  $\langle W, R \rangle$ , nous pouvons le transformer en un modèle par adjonction d'une fonction de valuation  $v$ . De plus, n'importe quel cadre peut être transformé en une variété de modèles, chacun dépendant de la fonction de valuation qui lui est adjointe. Une structure établit seulement les mondes dont nous nous occupons et stipule que ces derniers sont accessibles à partir du monde réel. Une valuation est nécessaire pour établir ce qu'il en est dans chacun des mondes possibles (ou contextes modaux) et en général il y aura plusieurs manières de le faire. Chacune de ces façons est un modèle stipulant les conditions factuelles sous lesquelles nos explorations logiques auront lieu. La structure produira les bases de n'importe quelle variété de telles conditions factuelles.

- La définition de la vérité de la logique modale nous dit quelles formules sont vraies dans quel  $w_i$  (monde possible) d'un modèle donné. La fonction de valuation nous donne les valeurs des lettres propositionnelles et la définition de la vérité étend cette valuation aux formules complexes. La différence de cette définition de la vérité d'avec la définition classique est que, ici la vérité est déterminée relativement à un monde possible du modèle en question. En outre, la valuation est aussi dépendante des relations entre les mondes possibles donnés. Plus précisément :

**DÉFINITION** : Si  $M$  est un modèle  $\langle W, R, v \rangle$ , alors  $v_{M,w}(\varphi)$  \_ c'est-à-dire la valeur de  $\varphi$  dans un contexte donné  $w$  du modèle  $M$  \_ est définie de la manière suivante :

$v_{M,w}(p) = v_{M,w}(p)$  pour toutes les lettres propositionnelles «  $p$  »

$v_{M,w}(\neg\varphi) = 1$  ssi  $v_{M,w}(\varphi) = 0$

$v_{M,w}(\varphi \rightarrow \psi) = 1$  ssi  $v_{M,w}(\varphi) = 0$  ou  $v_{M,w}(\psi) = 1$

$v_{M,w}(\varphi \vee \psi) = 1$  ssi  $v_{M,w}(\varphi) = 1$  ou  $v_{M,w}(\psi) = 1$

$v_{Mw}(\varphi \wedge \psi) = 1$  ssi  $v_{Mw}(\varphi) = 1$  et  $v_{Mw}(\psi) = 1$

$v_{Mw}(\diamond\varphi) = 1$  ssi, pour au moins un monde possible  $w' \in W$  tel que  $w R w'$ :  $v_{Mw'}(\varphi) = 1$

$v_{Mw}(\Box\varphi) = 1$  ssi, pour tous les mondes possibles  $w' \in W$  tels que  $w R w'$ :  $v_{Mw'}(\varphi) = 1$

**DÉFINITION** : **L**-Valide

Nous disons que le modèle  $\langle W, R, v \rangle$  est basé sur le cadre  $\langle W, R \rangle$

- Une formule  $\varphi$  est *valide dans un modèle*  $\langle W, R, v \rangle$ , si elle est vraie à tous les contextes de  $W$ .
- Une formule  $\varphi$  est *valide sur une structure*  $\langle W, R \rangle$  si elle est vraie dans tous les mondes de tous les modèles basés sur cette structure. Autrement dit : une formule  $\varphi$  est *valide sur une structure* si elle est valide dans tous les modèles basés sur cette structure.
- Si  $\mathbf{L}$  est une collection de structures,  $\varphi$  est «  $\mathbf{L}$ -valide » si  $\varphi$  est valide dans tout cadre de  $\mathbf{L}$

Différentes logiques modales sont sémantiquement caractérisées comme des formules  $\mathbf{L}$ -valide, pour des classes particulières de structures. Pour donner un premier exemple, le système nommé  $\mathbf{T}$  est caractérisé par la classe de structures ayant la propriété que « chaque monde est accessible à partir de lui-même » (ce qui revient à supposer que la relation  $R$  est réflexive).

**DÉFINITION** : Propriétés d'une structure. Nous disons qu'une structure  $\langle W, R \rangle$  est :

- *réflexive* si  $w_i R w_i$  ; pour tout  $w_i$  de  $W$
- *symétrique* si  $w_i R w_j$  implique  $w_j R w_i$ , pour tout  $w_i$  et  $w_j$  de  $W$
- *transitive* si  $w_i R w_j$  et  $w_j R w_k$  impliquent ensemble  $w_i R w_k$ , pour tout  $w_i, w_j$  et  $w_k$  de  $W$
- *sérielle* si pour chaque  $w_i$  de  $W$  il y a au moins un  $w_j$  de  $W$  tel que  $w_i R w_j$
- *linéaire* si pour tout  $w_i$  et  $w_j$  de  $W$  soit  $w_i R w_j$  ou  $w_j R w_i$ .

Ces définitions fournissent la caractérisation de la structure des systèmes de logique modale qui ont la meilleure réputation, notamment: **K, D, T, B, K4, S4, S4.3, S5**.

LOGIQUE	CONDITIONS DE LA STRUCTURE
<b>K</b>	aucune condition n'est imposée sur la structure
<b>D</b>	sérielle
<b>T</b>	réflexive
<b>B</b>	réflexive, symétrique
<b>K4</b>	transitive
<b>S4</b>	réflexive, transitive

<b>S4.3</b>	réflexive, transitive, linéaire
<b>S5.</b>	réflexive, symétrique, transitive.

Ceci nous conduit à l'une des principales préoccupations des logiciens, qui est de dévoiler les relations entre la validité des formules et les propriétés des cadres. En effet, la validité des formules suivantes caractérise les structures précédemment mentionnées, dans le sens qu'elles sont valides *si et seulement si* les conditions en question sont remplies:

FORMULE	CONDITIONS DU CADRE
1. $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$	aucune condition
2. $\Box A \rightarrow \Diamond A$	sériel
3. $\Box A \rightarrow A$	réflexivité
4. $A \rightarrow \Box \Diamond A$	symétrique
5. $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$	symétrique et transitif
6. $\Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vee \Box(\Box B \rightarrow \Box A)$	linéaire
7. $\Box A \rightarrow \Box \Box A$	transitivité
8. $\Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A$	réflexif et transitif

**Remarque:** Il est important de remarquer que l'équivalence montrée dans la table ci-dessus est valable pour les cadres (ou structures) ; c'est-à-dire pour n'importe quel modèle basé sur le cadre correspondant. Non pas pour tout modèle. Autrement dit, ce n'est pas le cas que, par exemple, *tout modèle* pour la formule  $\Box A \rightarrow A$  est réflexif. De manière effective, considérons un modèle avec seulement un monde non réflexif où  $A$  est vraie. Dans un tel modèle, la formule est vraie mais, par supposition, est non réflexif.

## A2. Notions basiques de logique temporelle propositionnelle<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Extrait de LTF GAMUT, *Intensional Logic and Logical Grammar*, Vol. II, pp32-35, The University of Chicago Press, Chicago and London, 1991.

Techniquement parlant, la logique temporelle est fermement liée à la logique modale. Dans la logique temporelle, les mondes possibles (ou contextes modaux) deviennent des contextes temporels (qui peuvent être, soit des instants, soit des intervalles de temps, selon l'option sémantique choisie).

La logique temporelle s'origine dans l'observation selon laquelle, les temps verbaux affichent un comportement régulier qui se prête à la formalisation. Deux opérateurs furent alors introduits, **G** et **H**, comme des analogues à l'opérateur  $\Box$  de la logique modale. L'opérateur **G** est interprété comme « *ce sera toujours le cas que...* », tandis que l'opérateur **H** signifie « *il a toujours été le cas que ...* ». Maintenant, en tant que tels, **G** et **H** doivent presque pas être décrits comme des temps ordinaires, mais de même que  $\Box$  est complété par  $\Diamond$ , **G** et **H** ont leurs propres compléments, **P** et **F**, qui doivent être lus respectivement comme : « *ce fut le cas que... à une étape du passé* » et « *ce sera le cas que ... à une étape du futur* ». Ainsi, l'opérateur **F** sert de pendant formel à, au moins quelques formes du Futur, tandis que **P** joue un rôle similaire pour le Passé. Les quatre opérateurs temporels usuels ont été résumés comme suit :

**G** $\varphi$  : ce sera toujours le cas que  $\varphi$

**H** $\varphi$  : il a toujours été le cas que  $\varphi$

**F** $\varphi$  : à une étape du futur ce sera le cas que  $\varphi$

**P** $\varphi$  : à une certaine étape du passé, ce fut le cas que  $\varphi$

En ajoutant ces quatre opérateurs à la logique propositionnelle standard, nous obtenons la logique propositionnelle temporelle. Si maintenant la lettre propositionnelle « *p* » est interprétée comme voulant dire : « *Marie est en train de chanter* », par exemple, alors le tableau ci-après nous montre comment certains temps verbaux peuvent être représentés en logique temporelle propositionnelle.

**Fp** Marie *chantera*

**Pp** Marie *a chanté*

**PPp** Marie *avait chanté*

**FPp** Marie *aura chanté*

**PFp** Marie *chanterait*



Il apparaît évident que toute combinaison des ces opérateurs **F** et **P** ne correspond pas forcément à un temps occurrent dans le langage naturel. Il n'est pas non plus possible d'exprimer tous les temps verbaux au moyen de ces opérateurs.

Disons maintenant qu'un modèle  $M$  pour la logique temporelle propositionnelle consiste en un ensemble  $T$  non vide de moments du temps, une *relation*  $R$  d'*antériorité*, et une valuation  $V$ , qui assigne à chaque lettre propositionnelle  $p$  et à chaque moment  $t$ , une valeur de vérité  $V_t(p)$ . Comme dans la logique modale,  $T$  et  $R$  forment ensemble une structure qui, dans la logique temporelle, est quelque fois référée comme un *axe du Temps*. Ainsi pose-t-on les conditions de vérité, relatives aux opérateurs intensionnels de temporalité :

### DÉFINITION.

Soit  $M$  un modèle qui a  $T$  comme son ensemble de moments du temps et  $R$  comme sa *relation d'antériorité*; alors  $V_{M,t}(\varphi)$  est définie comme suit :

- (i)  $V_{M,t}(\mathbf{G}\varphi) = 1$  ssi pour tout  $t' \in T$  tel que  $tRt'$  :  $V_{M,t'}(\varphi) = 1$
- (ii)  $V_{M,t}(\mathbf{F}\varphi) = 1$  ssi pour au moins un  $t' \in T$  tel que  $tRt'$  :  $V_{M,t'}(\varphi) = 1$
- (iii)  $V_{M,t}(\mathbf{H}\varphi) = 1$  ssi pour tout  $t' \in T$ , tel que  $t'Rt$  :  $V_{M,t'}(\varphi) = 1$
- (iv)  $V_{M,t}(\mathbf{P}\varphi) = 1$  ssi pour au moins un  $t' \in T$ , tel que  $t'Rt$  :  $V_{M,t'}(\varphi) = 1$

Une ligne d'investigation dans la logique temporelle a été de concevoir des principes logiques temporels et ainsi, d'essayer de découvrir quels réquisits doivent être placés sur l'axe du temps afin de sauvegarder la validité de ces principes. Une autre approche complémentaire a été de trouver quels principes deviennent valides étant données des restrictions particulières sur l'axe du temps. Comme avec la logique modale, la notion de *validité sur une structure* y a joué un rôle important.

Nous allons maintenant discuter quelques principes logiques temporels intuitivement plausibles, et voir quelles sont les propriétés de l'axe temporel ils expriment. Visiblement :

$$(1) \mathbf{G} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\mathbf{G}\varphi \rightarrow \mathbf{G}\psi)$$

$$(2) \mathbf{H} (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\mathbf{H}\varphi \rightarrow \mathbf{H}\psi)$$

seront valides sur n'importe quel axe temporel, avec  $G$  et  $H$  pris comme des versions de l'opérateur  $\Box$ , et le principe modal correspondant est valide indépendamment des relations

d'accessibilité. Par ailleurs, il devrait être remarqué que les principes logiques temporels (3) et (4) correspondant au principe modal  $\Box\varphi \rightarrow \varphi$  n'ont pas la plausibilité de ce dernier :

$$(3) \mathbf{G}\varphi \rightarrow \varphi$$

$$(4) \mathbf{H}\varphi \rightarrow \varphi$$

Si R est requise d'être irréflexive, ce qui est un réquisit très raisonnable, dès lors que cela signifie qu'aucun moment du temps ne peut être antérieur à lui-même, (3) et (4) deviennent invalides. Mais, comme dans la logique, ce réquisit d'irréflexivité ne peut être exprimé au moyen d'une formule. En plus de (1) et (2), il y a les principes intuitivement cohérents suivants :

$$(5) \varphi \rightarrow \mathbf{HF}\varphi$$

$$(6) \varphi \rightarrow \mathbf{GP}\varphi$$

$$(7) \mathbf{P}\varphi \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{F}\varphi \vee \varphi \vee \mathbf{P}\varphi)$$

$$(8) \mathbf{F}\varphi \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{P}\varphi \vee \varphi \vee \mathbf{F}\varphi)$$

$$(9) \mathbf{P}\varphi \rightarrow \mathbf{GP}\varphi$$

$$(10) \mathbf{F}\varphi \rightarrow \mathbf{HF}\varphi$$

Une différence notoire entre la logique modale et la logique temporelle, c'est que pour cette dernière, il semble plus raisonnable de commencer par choisir une sémantique. Au contraire de nos intuitions à propos des modalités, qui concernent plus la validité des divers principes que les relations entre les mondes possibles, nos intuitions temporelles semblent porter sur la structure du temps. Ainsi, avec la logique temporelle il semble judicieux d'approcher les choses en essayant premièrement de formuler ces intuitions et ensuite d'essayer de trouver les principes syntactiques que ces dernières font apparaître.

Disons par ailleurs qu'il existe d'autres modèles de logique temporelle où, par exemple, il est envisagé de travailler avec une quantification spécifique qui porterait sur les moments du temps. Cependant, pour la parcimonie de notre propos, nous laissons de côté toutes ces considérations.