Reconstruire l'exécution des opérations élémentaires dans les sources sanskrites médiévales: des tableaux numériques éphémères?

Agathe Keller

Reconstruire l'exécution des opérations élémentaires dans les sources sanskrites médiévales: des tableaux numériques éphémères?

Agathe Keller
kellera@univ-paris-diderot.fr

L'évocation des opérations élémentaires au moyen de la notation positionnelle décimale, est souvent incomplète et fragmentaire dans les sources sanskrites médiévales. Nous verrons sur quelques exemples comment reconstruire leur exécution. Faut-il considérer ces exécutions comme des tableaux éphémères à intégrer dans une histoire plus globale des tables numériques? Notre étude reposera nottamment sur les règles de multiplication données par Brahmagupta (628 CE) et interprétées par son commentateur Pṛthūdaka (ca. 860).

1. Introduction: Quelques questions

Une version sommaire de l'histoire des notations de nombres, présente souvent les avantages ergonomiques de la numération positionnelle décimale: puisqu'elle permet des calculs facilités, il est naturel qu'elle ait en quelque sorte conquis la terre. Regardons ici d'un peu plus près ce que signifiait pratiquer la numération positionnelle en arithmétique, dans les premiers textes sanskrits qui l'évoquent.

1.1.Des tables numériques

Lorsqu'on exécute, sans s'aider des machines qui nous accompagnent au quotidien, des opérations élémentaires au moyen de la numération positionnelle décimale, lorsqu'on pose ces opérations, on utilise ce qui peut-être vu comme un tableau numérique éphémère: on écrit des nombres souvent sur deux rangs puis on opère chiffre à chiffre de gauche à droite ou de droite à gauche des opérations itératives qui peuvent nous faire écrire encore quelques lignes et construire les colonnes.
On sait que la numération positionnelle apparaît dans les textes savants du sous-continent indien avant le 5ème siècle de notre ère.
Peut on qualifier les opérations décrites dans ces textes comme opérant sur tableaux?[1]

Définissons ici une table numérique par le fait qu'elle est une représentation d'une fonction à deux variables: c'est à dire qu'elle doit nous donner les informations suivantes: deux incréments autonomes et non liées, qui produisent un ou plusieurs résultats. Nous la distingueront de la forme du tableau, faite de lignes et de colonnes: certains tableaux pouvant ne pas être des tables numériques, et certaines tables numériques n'étant pas représentées dans des tableaux.
Est ce que les tableaux qui se forment lorsqu'on exécute une opération élémentaire par exemple, font cependant partie d'une histoire des tables numériques?
Est ce que les lignes et les colonnes qui s'y dessinent définissent des tableaux?
D'autres questions sont soulevées au passage: comment pose t on des opérations dans le cadre de la notation positionnelle décimale dans les sources Sanskrites? De quelle manière les ressources de cette notation sont elles mobilisées? Par ailleurs, si l'on considère l'exécution d'une opération comme un cas particulier de l'exécution d'un algorithme arithmétique, peut-on concevoir des algorithmes qui utiliseraient des tables numériques comme une manière d'exposer l'algorithme? Existe-t-il dans les sources sanskrites une sorte de cartographie tabulaire d'un algorithme?

Ces questions serviront de fil à la discussion qui va suivre.

1 Les questions soulevées ici et les définitions de tables et tableaux qui s'y trouvent ont été élaborées dans le cadre de l'ANR Histoire des Tables Numériques, dirigée par D. Tournes. J'emprunte beaucoup ici aux concepts qui y ont été forgés collectivement, plus particulièrement par D. Tournes, K. Chemla et M. Husson. On trouvera dans [Tournes à parraitre] ces idées développées avec plus d'ampleur.

1.2. Sources

Est ce que le systeme que l'on utilise aujourd'hui pour noter les nombres, la numération positionnelle décimale, vient du sous-continent indien? Il s'agit là d'une question qui a fait couler beaucoup d'encre et qui encore aujourd'hui est sujet à polémique[2]. Si les plus anciennes traces de la numération positionnelle en base 10 se trouvent dans des textes en chinois et se confondent avec un outil, les batons de calculs, dans le sous-continent indien il y a un décalage entre la tradition mathématique savante, qui donne des définitions de cette écriture des nombres à partir du 5ème siècle, et les attestations épigraphiques, dont les plus anciennes se trouvent... au Cambodge et datent du 9ème siècle[3]. Ce qui est sûr c'est que nos 'chiffres arabes' sont appelées par les mathématiciens de langue arabe 'des chiffres indiens', et que donc l'arithmétique que nous pratiquons aujourd'hui, qui est du point de vu de ses origines hybride, contient des éléments qui viennent du sous-continent indien[4].

Les premiers textes mathématiques en sanskrit datent du premier millénaire avant notre ère. Ils concernent pour l'essentiel la géométrie des autels védiques (ce sont les *śulba-sūtra*s d'auteurs divers, dont le plus ancien datte d'environ 600 avt. J. -C.) et une science astrale liée aux calendriers sans que le mouvement des planètes n'y soit mathématisé (le *Jyotiṣa-vedāṅga* d'environ 400 avant J. -C.). Ces premiers textes sont suivis par un silence. Il faut ensuite attendre le 5ème siècle pour que des textes compilés nous transmettent, entres autres, une science astrale qui porte le témoignage d'une influence mésopotamienne et hellenistique, et pour ce qui nous intéresse ici, une définition de la numération positionnelle décimale, au milieu de nombreux algorithmes arithmétiques (*rāśi-gaṇita*), algèbriques *(bīja-gaṇita*), ou géométriques (*kṣetragaṇita*).

De manière générale, les textes qui nous ont été transmis, nous l'ont été en abondance, pour les traités. Les commentaires, les sont généralement de manière plus fragmentaire. Par ailleurs, les textes de sciences astrales (*jyotiṣa*) ont plus souvents été copiés que ceux qui n'étaient que concernés avec les mathématiques (*gaṇita*). La langue de transmission des sources introduit un biais également: le sanskrit est une langue brahmanique (eg de haute case hindoue) à ses débuts, et englobe ensuite une culture cosmopolite savante jusqu'à la fin du 19ème siècle. Pour ce qui est des traditions vernaculaires, il faut attendre le 17ème siècle pour qu'apparaissent des sources substantielles[5]. Si nous sommes en fait submergés par les manuscrits (des centaines de milliers[6]), ceux-ci sont très tardifs par rapport aux texte eux mêmes. Nous n'avons pas de manuscrits autographes pour les périodes anciennes.

Les textes savants en Sanskrit ont une forme particulière: les traités sont écrits au moyen d'aphorismes (*sūtra*) qui pour être compris ont besoin de commentaires[7]. Les commentaires mathématiques ont en général une forme standard: elles commentent les vers (pas toujours dans l'ordre, mais le plus souvent en le respectant), en commençant par une phrase introductive, une citation du texte commenté, une analyse syntaxique et générale, et une liste d'exemples résolus en lien avec la règle. Les exemples résolus ont eux aussi une forme standard: ils sont appelés ('un exemple', *uddeśaka*, *udāharaṇa*), énnoncés, puis une 'disposition' (*nyāsa, sthāpana*), fait voir ce qu'on peut supposer être la représentation d'une surface de travail dans le texte, avant la résolution (*karaṇa*). Ces dispositions seront cruciaux pour nous ici, même si nous nous intéresserons aussi à ce que les textes peuvent nous dire, toujours de manière très allusive et fragmentaire, au sujet de la disposition et de l'exécution.

2 Une partie de ces controverses est racontée dans [Keller 2011]. [Datta Singh 1935] en témoignent, leur publication a clot pour l'essentiel le débat du coté du sous-continent indien.

3 [Salomon 1998]. Les premières traces savantes de la numération positionnelle décimale ont avancé dans le temps, depuis la remise en question par Bill Mak de la datation du *Yavanajātaka* [Mak 2013].

4 Voir les travaux de C. Burnett pour une documentation de cette histoire.

5 Celles-ci demandent à être étudiées, je ne les évoquerais pas ici.

6 [Pingree 1981]. CESS en témoigne.

7 Pour une histoire des mathémaitques en Inde on pourra se référer à [Datta Singh 1938], et [Plofker 2008]. Pour l'histoire des sciences astrales en Inde à [Pingree 1981]

Quel était le vocabulaire des tableaux en sanskrit?
Outre la référence à des positons (*sthāna*) les textes peuvent faire référence à une ligne (*paṅkti*), une colonne (*vallī*, lit. plante grimpante), des éléments placés en dessous (*adhas*) ou au dessus (*upari*).
Des algorithmes sont ainsi parfois executés en sens direct (*anuloma*) ou sens indirect (*viloma*) quoique lorsque cela concerne la numération positionelle décimale, nous ne sommes pas toujours d'accord sur à quoi correspondent ces sens. Par ailleurs, plus tardivement, apparait une littérature de tables (*sāraṇī*, *koṣṭaka*- tous les deux au sens de lieu ou stocker le grain) .
Dans la suite nous nous concentrons sur les plus anciennes sources dont nous disposons pour l'usage savant de la numération positionnelle décimale: le traité d'Āryabhaṭa l'*Āryabhaṭīya* (499) et son commentaire par Bhāskara (629)[8] et le traité de Brahmagupta le *Brahmasphuṭasiddhānta* (628) et son commentaire par Pṛthūdaka (fl. 860)[9]. Nous évoquerons également le traité de Śrīdhara le *Pāṭīgaṇita* (ca. 850)[10] et son commentaire anonyme non daté, ainsi que la *Līlavatī* de Bhāskara (1121)[11].

2. Exemple d' arithmétique et d'algèbre 'sur positions''?

Avant de regarder des règles pour multiplier ou extraire une racine carrée, soulignons comment il faut sans doute comprendre l'exécution des opérations élémentaires tels qu'ils nous parviennent dans des textes médiévaux sanskrits, dans un cadre plus global de calcul sur positions, qui fait intervenir parfois des tableaux numériques que nous n'hésiterons pas à reconnaître comme tel.
Nous allons revenir aux définitions de la numération positionnelle décimale, mais notons ici que les fractions dans les calculs intermédiaires sont de la forme

A A est le numérateur, B le dénominateur

B

On énonce et note les fractions en résultat et dans les énoncés sous la forme a +/- b/c de la manière suivante, le ° représentant une quantité soustractive:

a	a
b	b°
c	c

2.1.Règles de proportions

Les règles de proportions sont parmi les plus anciennes procédures arithmétiques attestées dans le sous-continent: on trouve la règle de trois (*trairāśika*) dans le *Jyotiṣa-vedāṅga*. De multiples règles et dispositions dans les textes nous montrent que pour exécuter ces algorithmes, des nombres sont disposés sur une surface de travail. Ils sont placés en ligne, en colonne, ou dans un dispositif tabulaire. Leur emplacement indique le type d'opération dans lesquels ils vont entrer. Par exemple chez Āryabhaṭa la règle de trois s'énnonce ainsi:

> Ab.2.26 À présent, lorsqu'on a multiplié la quantité fruit de la Règle de trois par la quantité désir.
> Ce qui est obtenu lorsque cela est divisé par la mesure est le fruit du désir.
> *trairāśikaphalarāśim tam atha icchārāśinā hatam kṛtvā |*
> *labdham pramāṇabhajitam tasmāt icchāphalam idam syāt || 26 ||*

8 [Sukla & Sarma 1976] et [Shukla 1976].

9 [Colebrooke 1817], [Dvivedi 1902]. Je suis en train d'éditer et traduire le commentaire de Pṛthūdhāka.

10 [Shukla 1959].

11 Tradiuit dans [Colebrooke 1817]

On peut l'expliciter de la manière suivante:

La mesure M produit le fruit F, si j'ai le désir D qu'est-ce que j'obtiens? Le fruit du désir R
La proportionnalité qu'il s'agit d'exprimer est F/M = R/D, et la règle exprime un algorithme permettant le calcul de R, R= (FxD)/M
Le commentateur d'Āryabhaṭa, Bhāskara précise qu'il existe une règle pour disposer les quantités qui entrent dans une règle de trois:

> Pour accomplir une règle de trois, les sages savent que lorsqu'on les place, les quantités semblables sont au début et à la fin, les dissemblables au milieu.
> *ādyantayoḥ tu sadṛśau vijñeyau sthāpanāsu rāśīnām|*
> *asadṛśarāśair madhye trairāikasādhanāya budhaih||*

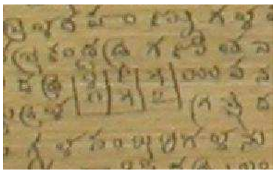
Il existe plusieurs traditions de dispositions de la règle de trois dans les manuscrits. Les manuscrits consultés du commentaire de Bhāskara, les disposent ainsi:

M F D

En effet, la désir est une forme de "mesure", ils sont donc du même genre, par opposition au fruit, qui est différent.

D'autres traditions de disposition de la Règle de Trois sont connues dans le sous-continent indien:

M	et	M	F
F		D	
D			



Disposition d'une règle de trois avec fractions
dans le commentaire de Bhāskara à l'*Āryabhaṭīya;*
Manuscrit de la collection Burnell, Indian Office

La règle de trois est la première d'une série de règle de proporitions à 2n+1 quantités. On trouve ceci explicité notamment dans le traité de Brahmagupta:

> BSS.12.10
> Dans la règle de trois, il y a la mesure (*pramāṇa*), le fruit (*phala*) et le désir (*icchā*). Le premier et le dernier sont de même genre. Le désir multiplié par le fruit, divisé par la mesure produit le fruit [du désir]||
> *trairāśike pramāṇa-phalam-icchādyantayoḥ sadṛśarāśiḥ|*
> *icchā phalena guṇitā pramāṇa-bhaktā phalaṃ bhavati*
>
> BSS.12.11cd-BSS.12.12
> Dans le cas des règles impaires, de la règle de trois à la règle de onze, les fruits sont en transition (*saṅkramaṇa*) de chaque coté (*ubhayata*), le produit des quantités les plus nombreuses divisé par le produit des moindres est connu. Dans le cas où [les quantités] ont des parts, de la même manière, pour les fractions des deux cotés, il y a transposition des dénominateurs.
> *trairāśikādiṣu phalam viṣameṣv ekādaśānteṣu||*
> *phalasaṅkramaṇam ubhayato bahurāśivadho 'lpavadha-hṛto jñeyam|*
> *sakaleṣv evam bhinneṣūbhayataś cheda-saṅkramaṇam||*

La règle ici énonce un calcul dans lequel un dispositif graphique est sous jascent, même s'il n'est pas décrit. L'algorithme inclut un mouvement, donné par l'expression de la transposition, (*saṅkramaṇa*)

Dans une règle de 2n+1 quantités n quantités mesure (M1, M2,…Mn) ensemble produisent une quantité fruit F. L'on connaît n quantités désir (D1, D2 … Dn) et l'on cherche le fruit du désir (R). L'algorithme permet le calcul de R,

R = (Fx D1 x D2 x …x Dn) / (M1 x M2 x …x Mn)

Disposition d'une règle de 2n+1 quantités, attestée dans les manuscrits :

M1	D1	.	.
.	.		
.	.		
Mn	Dn		
F			

La "transpositon du fruit" inclus un déplacement de F dans la colonne des désirs; ce déplacement indique qu'il sera multiplié par les nombres notés dans cette colonne.

M1	D1	.	.
.	.		
.	.		
Mn	Dn		
	F		

Une telle disposition n'est pas attestée dans les manuscrits: en effet, il s'agit d'un étape intermédiaire d'un calcul sur une surface de travail dont les étapes au fur et à mesure transforment le dispositif. On peut imaginer du sable, de la terre battue, une planche à poussière ou une lauze avec une craie. Peut-être aussi que les nombres pouvaient être figurés par des jetons et déplacés (ou remplacés) en conséquence.

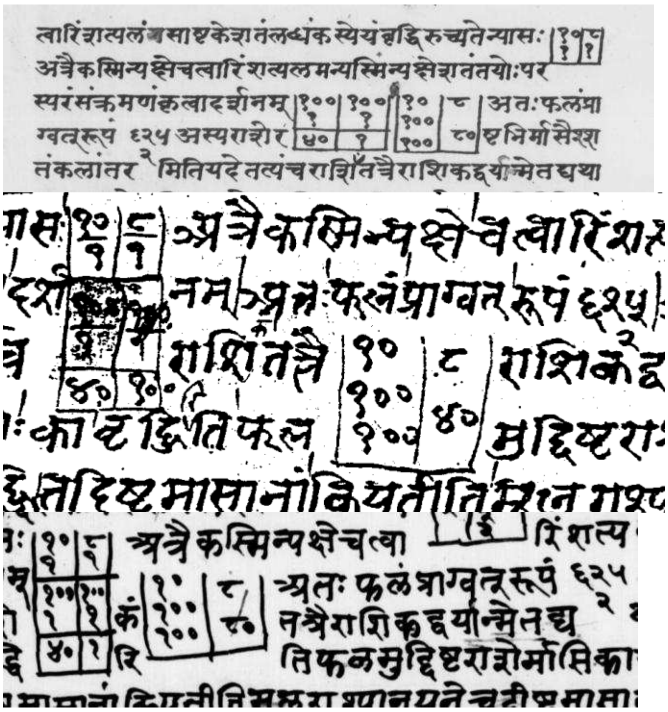
S'il y a des fractions dans ce cadre, les dénominateurs sont amenés aussi à être transposés.

Dans le cas des fractions, la transposition des dénominateurs, revient à effectuer des multiplications de fractions: le mouvement d'un nombre fait office d'opération, comme lorsqu'on inverse une fraction en la mettant sur sa tête.

Sans rentrer dans les détails, examinons la manière dont dans les manuscrits du commentaire de Pṛthūdaka au traité de Brahmagupta est disposé une règle de cinq:

> PBSS.12.12 Example: L'intérêt de cent durant dix mois est de quarante. Cent a été gagné en huit mois. Quelle était la somme initiale?
>
> Disposition:
>
> | | |
> |---|---|
> | 10 | 8 |
> | 1 | 1 |
> | 100 | 100 |
> | 1 | 1 |
> | 40 | 1 |
>
> Transposition des fruits, quarante d'un coté, cent de l'autre, la disposition est:
>
> | | |
> |---|---|
> | 10 | 8 |
> | 100 | |
> | 100 | 40 |
>
> En procédant comme auparavant, le résultat obtenu est 625
> 2

Les quantités dans l'énoncé sont données sous la forme d'une fraction composite. Elles sont placées suivant une disposition en Règle de Cinq. Une première étape les modifie pour leur permettre d'netrer dans le calcul sous la forme d'une fraction simple.



Disposition de la Règle de Cinq dans le commentaire de Pṛthūdhaka dans les trois manuscrits connus de ce commentaire (mss Colebrooke, mss Dvivedi, et copie de l'Indian Office)

2.2.Retour sur tables et tableaux

Peut-on parler ici donc de tableau? De table numérique? Les tableaux éphémères pour la résolution d'une Règle de cinq par exemple, ont quelque chose d'ambigu: à chaque moment, comme figé, ils indiquent les rapports algorithmiques que les nombres entretiennent entre eux. A chaque moment cette relation change. Les données de l'algorithme y sont stockés, tandis que la position indique soit le type d'opération dont un nombre est le résultat, soit le type d'opération dans laquelle un nombre sera effectué. Ce sont sans doute des tableaux et en même temps des choses plus complexes que des tables numériques au sens défini plus haut, car l'explicitation des rapports qui lient les quantités les unes aux autres dans ce cadre est plus complexe que le simple incrément-produit d'une fonction à deux variables.

Bien que ces règles soient très standards, que la manière dont on dispose les quantités au début du calcul soit très clairement donnés. La manière dont pratiquement les étapes intermédiaires ont été conduites et conçues sont souvent des reconstitutions, à partir de notations fragmentaires. Ainsi dans le dispositif qui met face à face deux colonnes de nombres avant les produits qui donneront et diviseurs et dividende, y a t il simplification préalable? Un tel dispositif rend de telles simplifications probables, mais elles ne sont pas attestées pour le moment. Si l'on a des références à des positions (*sthāna, sthāpana*), à des déplacements, on n'a pas de référence explicite à un tableau.

Si les règles de proportion sont un exemple standard de ces 'calculs sur positions', on pourrait cependant en multiplier les exemples. Il existe d'autres algorithmes qui soit explicitement dans les règles, soit par ce que les manuscrits nous laissent voir de leur disposition, utilisent des sortes de tableaux. Ceux-ci ont cependant beaucoup moins été exploré par la littérature secondaire.

Dans ce cadre, en quelques sortes, des opérations qui utiliseraient les ressources de la numération Est ce que l'exécution d'opérations élémentaires constituent une pratique parmis d'autres d'algorithmes sur tableaux?

3. Diverses manières d'exécuter une multiplication sur des entiers

Brahmagupta énonce la règle suivant concernant la multiplication d'entiers:

> BSS.12.55. Le multiplicande (*guṇya*), fait en «zigzag» (*gomūtrika*), egal en portions (*khaṇḍa*) au multiplicateur (*guṇkāra*) ,multiplié, [et] ajouté [aux produits partiels] ,est le produit (*pratyutpanna*), ou [le multiplicatnde] est egal en parties (*bheda*) au multiplicateur.

On voit que cette règle de multiplication sur des entiers n'est pas vraiment la prescription d'un algorithme. Il s'agit plutot de l'énumération d'une configuration, avec deux opérateurs: un multiplicateur et un multiplicande dont les roles dans l'éxecution de la multiplication ne sont pas symétriques. Brahmagupta distingue deux manières de découper le multiplicateur, qu'il nomme au moyen de termes similaires: le multiplicateur est en 'parties' ou en 'portions'. Nous avons besoin d'un commentaire, pour pouvoir avoir une idée de comment cette multiplication était exécutée. Si on se repose sur le commentateur Pṛthūdhaka et les dispositifs graphiques donnés par les manuscrits dont nous disposons pour ce commentaire, la multiplication au moyen d'un multiplicateur subdivisé en 'parties' n'utilise pas les ressources de la numération positionnelle. Pṛthūdaka comprend ce terme comme désignant une subdivision du multiplicateur en parties additives et multiplicatives. Dans l'exemple numérique qu'il prend, 235 est multiplié par 288. Une multiplication par parties additives repose sur la distributivité de la multiplication sur l'addition:

$$235 \times 288 =$$
$$235 \times (9 + 8 + 151 + 120)$$
$$= (235 \times 9) + (235 \times 8) + (235 \times 151) + (235 \times 120)$$

Tandis qu'une multiplication par parties multiplicatives repose sur l'associativité de cette opération:

$$235 \times 288 = 235 \times (9 \times 8 \times 4)$$
$$= (235 \times 9) \times 8 \times 4 = (2995 \times 8) \times 4 = 16920 \times 4 = 67860$$

On notera que le choix des valeurs pour ces exemples numériques nous montrent que ces exemples n'ont pas pour objectif de montrer comment ces exécutions permettent des calculs rapides, faciles ou simplifiés. La résolution des exemples numériques pour un multiplicateur subdivisé en 'parties', tel qu'il apparait dans les manuscrits dont nous disposons pour ce commentaire, se fait depuis le texte. Il ne figure pas une surface de travail requérant un dispositif graphique particulier.

3.1 Une multiplication pour un multiplicateur subdivisé en portions

Ce n'est pas le cas d'une multiplication pour un multiplicateur subdivisé en 'portions'. Ici, le multiplicateur est subdivisé en portions, grâce à la numération en base 10 et à l'associativité de la multiplication, par les parties additives de ses puissances de dix. Soit dans l'exemple proposé par Pṛthūdaka:

$$235 \times 288 = 235 \times (2.10^2 + 8.10^1 + 8.10^0)$$
$$= (235 \times 2.10^2) + (235 \times 8.10^1) + (235 \times 8.10^0)$$
$$= 470 + 1880 + 1880$$
$$= 67680$$

Plus précisement on reconstruit, en s'appuyant sur les manuscrits et le texte du commentaire, l'execution comme suit[12]:

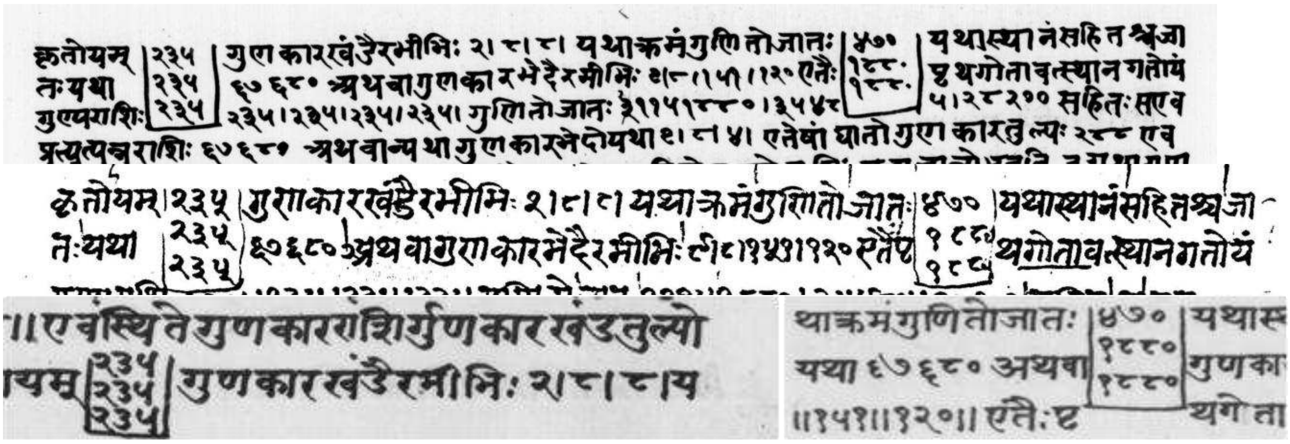
1. on subdivise 288 par ses chiffres: 2|8|8

12 Voir [Keller&Singh (à parraitre)]

2. Puisque le multiplicateur est subdivisé en 3 portions on répète trois fois le multiplicande en le disposant en colonne:
235
235
235
(ce qu'indiquent les manuscrits)
ou peut-être
235
  235
    235
(si l'on admet que c'est là le sens d'un multiplicande fait en "zig zag").
L'on fait le produit ligne à ligne des multiplicande avec respectivement chacun des chiffres du multiplicateur, on obtient les produits partiels:
470
1880
  1880
que l'on peut sommer pour obtenir le résultat, 67 680
La résolution ici repose sur deux ressources de la numération positionnelle décimale. La première utilise le fait les chiffres qui forment un nombre, nous en donnent immédiatement, par leur apposition, une décomposition par partie additive de ses puissance par dix. Ainsi, le multiplicateur 288 est subdivisé en 2|8|8, et non en 200|80|8. La seconde est l'usage de la position pour sommer les produits partiels obtenus. En effet, le commentateur écrit que ceux si sont:

yathā sthānāṃ sahitaḥ, yathā-sthāna-sahitaś
ajouté(s) selon la position

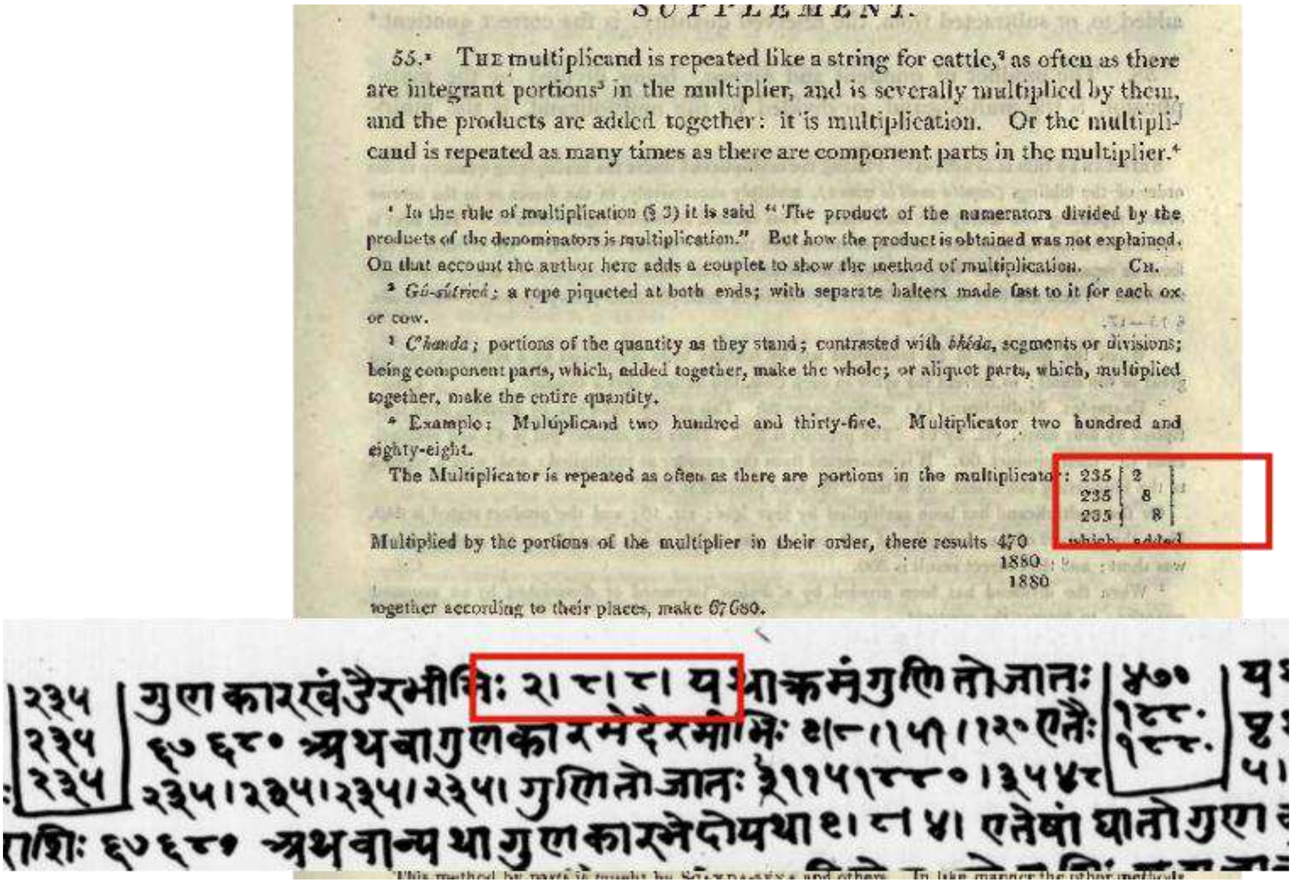
La manière dont se faisait cette disposition est un point aveugle de l'exécution. La disposition répétée dans une colonne du multiplicande, dans une surface de travail, nommée 'zig-zag', semble faire office de tableau ou une telle somme pourrait se faire. La lecture des manuscrits, tardifs (car ils ont été copiés entre la fin du 18ème et le début du 20ème siècle) par rapport au commentaire du 9ème siècle, est difficile sur ce point. En effet, ceux ci ne semblent pas figurer de diagonale représentant les valeurs implicites des chiffres du multiplicateur. Ceci est le cas pour le multiplicande, tel qu'il est disposé au moment de l'exécution, mais aussi une fois les produits partiels obtenus[13], plutot représentés ainsi:
470
1880
1880



Disposition d'une multiplication par subdivision du multiplicateur en portions dans le commentaire de Pṛthūdhaka dans les trois manuscrits connus de ce commentaire (mss Colebrooke, mss Dvivedi, et copie de l'Indian Office)

13 Une discussion détaillée notamment de l'épigraphie et de la possibilié de lire les manuscrits comme portant trace d'une diagonale estompée par les recopies successives, [Keller, Singh à parraitre]/

La seule différence avec le dispositif qui représenterait en colonnes les valeurs relatives des nombres étant le décalage de la dernière ligne. On peut, bien entendu, imaginer qu'il est possible d'additionner en prenant en compte les valeurs relatives des produits partiels, mais il faut sans doute admettre que c'est surtout la grande distance entre les manuscrits et le texte qui brouille les piste.
Notons cependant que la littérature secondaire, a tenu à combler cette ambiguité en insistant sur la dimension tabulaire du dispositif, probablement parceque ce dispositif tabulaire est considéré comme la marque du calcul avec des notations positionelles.


SUPPLEMENT.

55.[1] The multiplicand is repeated like a string for cattle,[2] as often as there are integrant portions[3] in the multiplier, and is severally multiplied by them, and the products are added together: it is multiplication. Or the multiplicand is repeated as many times as there are component parts in the multiplier.[4]

[1] In the rule of multiplication (§ 3) it is said "The product of the numerators divided by the products of the denominators is multiplication." But how the product is obtained was not explained. On that account the author here adds a couplet to show the method of multiplication. CH.

[2] *Gó-sútricá*; a rope piqueted at both ends; with separate halters made fast to it for each ox or cow.

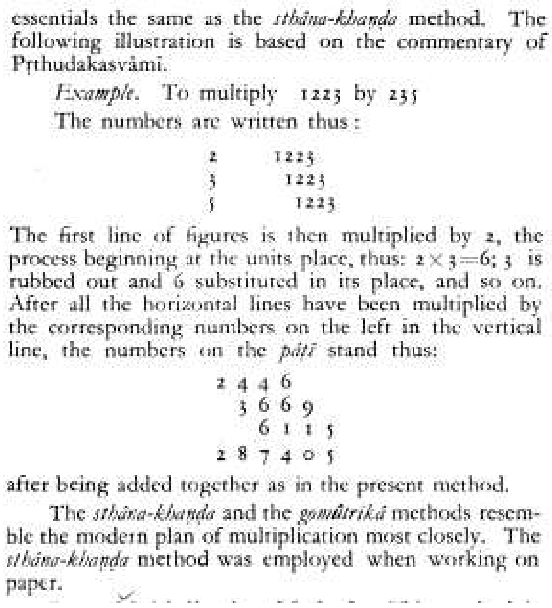
[3] *C'handa*; portions of the quantity as they stand; contrasted with *bhéda*, segments or divisions; being component parts, which, added together, make the whole; or aliquot parts, which, multiplied together, make the entire quantity.

[4] Example: Multiplicand two hundred and thirty-five. Multiplicator two hundred and eighty-eight.

The Multiplicator is repeated as often as there are portions in the multiplicator: 235 | 2 ; 235 | 8 ; 235 | 8

Multiplied by the portions of the multiplier in their order, there results 470 / 1880 / 1880 which, added together according to their places, make 67680.

Représentation de la multiplication avec un multiplicateur subdivisé en portions dans la traduction de H. T. Colebrooke, en contraste avec ce qui existe dans les manuscrits.


essentials the same as the *sthâna-khaṇḍa* method. The following illustration is based on the commentary of Pṛthudakasvâmi.

Example. To multiply 1223 by 235

The numbers are written thus:

```
2  1223
3   1223
5    1223
```

The first line of figures is then multiplied by 2, the process beginning at the units place, thus: 2×3=6; 3 is rubbed out and 6 substituted in its place, and so on. After all the horizontal lines have been multiplied by the corresponding numbers on the left in the vertical line, the numbers on the *pâṭî* stand thus:

```
2 4 4 6
  3 6 6 9
    6 1 1 5
2 8 7 4 0 5
```

after being added together as in the present method.

The *sthâna-khaṇḍa* and the *gomûtrikâ* methods resemble the modern plan of multiplication most closely. The *sthâna-khaṇḍa* method was employed when working on paper.

Représentation de la multiplication avec un multiplicateur subdivisé en portions dans Datta& Singh

Pṛthūdaka evoque d’autres «modes de multiplication» (*guṇā.prakāra*) à la fin de son commentaire:

> de cette manière des modes de multiplication comme «se tenant ici» (*tat.stha*), «vantaux de la porte» (*kapāṭa.sandhī*) ou d’autres doivent être utilisé par des étudiants (*adhiyā*)
>
> *evaṃ tatstha.kapāṭasandhy.ānayāḥ guṇā.prakāras tv ādhiyā.yojyā*

La plus célèbre dans la littérature secondaire est celle des 'vantaux de la porte'. La reconstruction du processus est souvent faite à partir du *Pāṭīgaṇita* (ca. 850) de Śrīdhara et son commentaire anonyme non daté. Cette resonstruction utilise aussi des ressources tabulaires de la numération positionnelle, ce qui explique sa populartié dans les livres d'histoire des mathématiques. Cependant, dans ce cas aussi, la littérature secondaire dans son ensemble semble n'avoir pas réalisé que la plus part des dispositions tabulaires présentes dans le texte du commentaire tel qu'il est publié sont des interpolations de l'éditeur du texte[14].

3.2 Alors, est ce une table numérique, un tableau?

La colonne (le 'zig-zag') de la multiplication avec un multiplieur subdivisé en portions n'est pas nommée dans le texte du commentaire juste figurée dans les manuscrits. Il s'agit d'un lieu où l'on stock les étapes intermédiaires du calcul. Nous ne sommes pas sûrs que cette colonne soit en fait subdivisée par les colonnes de la notation positionnelle, même si c'est probable. Les différents rangs de la colonne sont liés par le fait qu'ils doivent être ajoutés de manière appropriée pour former le nombre résultat: le tableau éphémère renvoi a la table numérique par sa dimension de stockage et par le fait que les différentes données qui y sont placées sont liées entre elles par une opération (elles sont toutes produites par une multiplication, et doivent toutes entrées dans une addition).
Tableau éphémère à une colonne pour sûr, cette colonne est plus délicate à définir dans le cadre d'une table numérique vue comme déployant les valeurs d'une fonction.

En ce qui concerne l'execution de la multiplipcaion au 9 ème siècle, il est ainsi frappant d enoter qu'on pouvait multiplier sans utiliser les ressources des positions décimales, et qu'en utilisant ces ressources il n'est pas sur que ce soit la dimension tabulaire qui ait été privilégiée.
La numération positionnelle, n'était donc pas conçue comme permettant d'opérer dans des tableaux?

4. La notation positionnelle: une ligne ordonnée de positions ?

4.1.Une définition

La numération positionnelle décimale est définie au cours du 5ème siècle, dans des textes savants.
L'une des premières définitions, est celle donnée par Āryabhaṭa en 499 dans l'*Āryabhaṭīya*.
Elle court ainsi:

> Ab.2.2. Un et dix et cent et mille, et maintenant dix mille et cent mille, et de la même manière un million dix millions, cent millions, et mille millions. Une position devrait être dix fois la position précédente.
> *ekaṃ ca daśa ca śataṃ ca sahasraṃ tv ayutaniyute tathā prayutam*
> *koṭyarbudaṃ ca vṛndaṃ sthānāt sthānaṃ daśaguṇaṃ syāt*

Ce vers à une drole de structure: une liste de noms de nombres est suivi par un petit algorithme concernant des positions (*sthāna*).
Cette structure paradoxale pour un *sūtra* est cependant gardé avec une étonnante stabilité jusque très tardivement dans la littérature sanskrite.
La numération positionnelle décimale chez Śridhāra (ca 850) est ainsi définie:

> *PG.7-8*

14 Voir [Keller&Singh (à parraitre)].

ekaṃ daśaśataṃ asmāt sahasraṃ ayutaṃ tataḥ paraṃ lakṣam/
arbudam abjaṃ kharvaṃ nikharvaṃ ca //7//
tasmān mahāsarojaṃ śaṅkuṃ saritām patiṃ tatas tv antyam /
madhyaṃ parārddham āhur yathottaraṃ daśaguṇaṃ tajjñāḥ//8//
Ceux qui savent, on dit: Un, Dix, Cent, et de là, Mille, Dix mille, puis Cent mille, puis un Million/
Dix millions, Cent millions, Mille millions, et Dix mille millions //7//
Et de là Cent mille millions, un Milliard, Dix milliards, Cent milliards, Mille milliards//
Dix mille milliards, Cent mille milliards ainsi on va croissant par décuple//8//

La numération positionnelle décimale chez Bhāskara (1121) de la manière suivante:
Lī. 10-11 ekaṃ daśaśatasahasrāyutalakṣaprayutakoṭayaḥ kramaśaḥ/
prayutaṃ koṭim athārbudam abjakharvanikharvam ahāpadmśaṅkavas tasmāt//10//
jaladhiś ca antyaṃ madhyaṃ parārddham iti daśaguṇaṃ uttaraṃ saṃjñāḥ/
saṃkhyāyāḥ sthānānāṃ vyavahārārthaṃ kṛtāḥ pūrvaiḥ//11//

Un, Dix, Cent, Mille, Dix mille, Cent mille, un Million, dix Millions, successivement/
Cent millions, Mille millions, Dix mille millions, Cent mille millions, un Milliard, Dix milliards//10//
Et de là Cent milliards, Mille milliards, Dix mille milliards, Cent mille milliards, tels sont les noms des positions des
nombres, croissant par décuple, élaborés par les anciens pour l'usage courrant.//11//

Plus étonnant encore, ce vers est presque toujours commenté de la même manière: on explique que la première place est la position des unités, la seconde, celle des centaines etc. Ainsi, le commentaire de Bhāskara sur Āryabhaṭa précise-t-il:

Un et dix et cent et mille. Ce sont respectivement pour ceux ci, pour un, dix, cent et mille les première, deuxièmes, troisièmes et quatrièmes positions. (…) Pour dix mille, la cinquième position (etc...)

Parfois, précise t on comment on note les chiffres et les positions (avec des petits ronds pour figurer les places vides et donc zéro). Très peu de personnes ont analysé ces commentaires, qui semblent un peu trop transparents. Cependant ils sont importants, si l'on veut comprendre comment les positions dessinées par la numération positionnelle décimale sont compris. De tels commentaires s'efforcent de montrer que tout est dans le lien qui existe entre la première et la seconde partie de la règle. Ces positions portent des puissances de dix mais elles sont ordonnées. Elles sont donc liées les unes aux autres, et font ainsi système.

4.2.L'extraction des racines carrées et cubiques

Si les règles pour l'addition, la soustraction, la multiplication et la division des entiers sont très rares et très peu explicites, probablement parce qu'ils appartenaient à une culture plus populaire, les règles pour extraire des racines carrées et cubiques, ont plus souvent été décrits dans la littérature Sanskrite. Or de manière très systématique, ici les algorithmes utilisent comme ressources de la numération positionelle décimale, les positions décrites comme faisant 'colonne'. En effet l'algorithme qui doit identifier des places "carrées" ou "cubiques" du nombre dont on doit extraire la racine mobilise les positions des chiffres au moyen d'un maillage dans lequel l'algorithme se dépoloie [15]. Dans ces cas aussi, les dispositifs représentés dans les manuscrits sont rares et il serait difficile d'expliciter si de tels tableaux forment aussi des tables, en ce qu'ils montrent non pas une fonction mais un algorithme.

5. Conclusion

Nous avons vu qu'en arithmétique on pouvait utiliser des tableaux éphémères en tant qu'outils de calcul. Dans ce cadre, la numération positionnelle est un moment parmi d'autres d'une pratique plus large d'un travail qui met en adéquation des opérations arithmétiques (ou algébriques) et des déplacements et modifications sur une surface de travail. Il est très difficile de reconstituer les étapes essentielles de ces pratiques car elles ne nous arrivent que par bribe.

15 [Keller 2006 a] et [Keller 2010].

En tout cas, les ressources de la numération positionnelle décimales sont plurielles: elles peuvent servir pour obtenir immédiatement une décomposition en partie additives d'un nombre pour opérer sur elles séparemment sans nécessairement travailler dans un tableau. Le type de tableau que peut dessiner dans des opérations élémentaires est lui même très diversifié
L'alignement tabulaire n'est pas utilisé dans les exemples que nous avons examinés ici pour noter de l'information à caractère tabulaire, si cette information est restreinte à un sens fonctionnel, c'est à lire pour lier des couples ou un nombre plus important de nombres. Il s'agit plutot d'une notation cartographiant l'exécution d'un algorithme: des nombres notés ensemble seront soit amenés à être transformés ensemble par une opération élémentaire (addition, soustraction, division ou multiplication), soit l'un est le résultat d'une opération ou l'autre sera En bref, pour répondre à la question soulevée au début de l'article, si les tableaux éphémères de calculs appartiennent à une histoire des tables numériques, c'est à la marge, en servant de révélateur à ce qu'est une information tabulaire, et en mettant en lumière une structure formelle, le tableau, qui a pu servir par la suite, dans le sous-continent, à l'élaboration d'une autre littérature, celle des tables astronomiques.

Pour finir, une devinette recoltée par S. Babu en Inde du Sud, illustre les rapports complexes entre langue, algorithme et dispositif tabulaire:

> « Un marchand présente 49 pierres précieuses à un roi. Le roi s'enquiert de leur prix. La première pierre vaut 1 roupie, la seconde pierre 2 roupies, la troisième 3 roupies, et la quatrième aussi... Le prix de la 49^e pierre est de 49 roupies. Le roi demande au marchand de distribuer ces pierres précieuses entre ces sept ministres de manière à ce que leur nombre et leur valeur totale soit la même pour chaque ministre. Comment s'y prend-il ? »

Réponse: Leur valeur totale de chacune des sept pierres est de 175 roupies et leur répartition est la suivante.

1) 30, 38, 46, 5, 13, 21, 22
2) 39, 47, 6, 14, 15, 23, 31
3) 48, 7, 8, 16, 24, 32, 40
4) 1, 9, 17, 25, 33, 41, 49
5) 10, 18, 26, 34, 42, 43, 2
6) 19, 27, 35, 36, 44, 3, 11
7) 28, 29, 37, 45, 4, 12, 20

Avez-vous une idée de comment ce résultat a été trouvé ? Il s'agit d'un carré magique. Les mots et la manière dont sont notées le résultat pourraient nous l'avoir fait disparaître. Comme le tableau numérique qui cartographie un algorithme, le carré magique est aussi une forme qui joue avec l'idée de table numérique: ici les relations qui lient les cellules ne proviennent pas d'une relation extérieure au tableau, mais sont conditionnées par des liens internes. Le carré magique, c'est un peu une méta-table numérique, avec le coté ludique en sus. Une bonne manière de caractériser les arithmétiques des textes sanskrits dans leur rapports aux tables!

Bibliographie:

Colebrooke, H. T. *Algebra, with Arithmetic and Mensuration, from the Sanscrit of Brahmegupta and Bhàscara.* London: John Murray, (1817).

Datta, B. & Singh, N. *A history of Hindu Mathematics*. Lahore, Motilal Banarsidass (1935).

Dvivedi, S. *The Brahmaspuṭasiddhānta of Brahmagupta*, in The Pandit, Beanres (1902)

Keller, A. 'Comment on a écrit les nombres dans le sous- continent indien, histoires et enjeux.' dans *Comptes rendus de l'Académie des Belles Lettres et Société Asiatique, Scéance du 17 Novembre 2006, Hommage rendu à Jean Filliozat,*(2006 a).

Keller, A. *Expounding the mathematical seed , Bhāskara and the mathematical chapter of the Āryabhaṭīya* (Vol. 2 volumes). Basel: Birkhauser, (2006b).

Keller, A. On Sanskrit commentaries dealing with mathematics (fifth-twelfth century), dans *Looking at it from Asia: the Processes that Shaped the Sources of History of Science,* ed. F. Bretelle-Establet, Boston Studies, (2010).

Keller, A. 'George Peacock's Arithmetic in the Changing Landscape of the History of Mathematics in India' in Indian Journal of History of Science, 46 (2): 205-234. (2011).

Keller, A. & Singh, C. 'Multiplying Integers: on the diverse practices of medieval Sanskrit authors' in *Cultures of quantification and computation in the ancient world*, Chemla, Keller, Proust (ed.), Pickering, (à parraître).

Mak, B. 'The Date and Nature of Sphujidhvaja's *Yavanajātaka* reconsidered in the light of some newly discovered materials. *History of Science in South Asia* 1 (2013):1-20.

Pingree, D. *Census of the Exact Sciences in Sanskrit* (CESS) (Vol. 5 volumes). American Philosophical Society (1970-1995).

Pingree, D. *Jyotiḥśāstra : astral and mathematical literature.* Wiesbaden:Harrassowitz, (1981).

Plofker, K. *Mathematics in India.* Princeton University Press, (2009).

Salomon, R. *Indian Epigraphy, A guide to the study of inscription in Sanskrit, prakrit, and the other indo-aryan languages*. Dehli: Munishram Manorhal, (1998).

Sarma, KV. and Shukla, K.S. *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa , critically edited with translation*. New-Delhi: Indian National Science Academy, (1976).

Shukla, K. S. *Āryabhaṭīya of Āryabhaṭa, with the commentary of Bhāskara I and Someśvara*. New-Dehli: Indian National Science Academy, (1976).

Shukla, K. S. *Pāṭīgaṇita of Śrīdharācarya*, Lucknow University, (1959).

Tournes, D. (ed.) *A History of Numerical Tables*. Springer. (à parraitre)