Une étude comparative des principes de la projection de la sphère : Ptolémée, al-Farghani, al-Quhi

Philippe Abgrall

UNE ÉTUDE COMPARATIVE DES PRINCIPES DE LA PROJECTION DE LA SPHÈRE : PTOLÉMÉE, AL-FARGHĀNĪ, AL-QŪHĪ.

P. Abgrall

9 janvier 2014

CEPERC, UMR 7304, CNRS - Aix Marseille Université

La projection stéréographique est une projection conique de la sphère à partir de l'un de ses pôles, sur le plan de son équateur [1]. Cette projection est à la base de la construction des astrolabes sous une forme qui s'est le plus répandue de la fin de l'antiquité jusqu'au XII^{e} siècle.
Si l'étude de la construction de l'astrolabe a débuté dans l'antiquité, elle n'a fait l'objet d'une théorie qu'à partir du X^{e} siècle, où les géomètres étendirent la projection stéréographique à d'autres types de projections : des projections coniques dont le pôle n'est plus situé à la surface de la sphère, et des projections cylindriques, orthographiques ou non, des plus générales qui soient [2].

Pour commencer, rappelons brièvement certains principes de la projection stéréographique, tels que nous les connaissons aujourd'hui. Si l'on choisit de projeter la sphère à partir du pôle sud S, sur son plan équatorial (P), alors l'image d'un cercle $\mathscr{C}$ de la sphère est l'intersection du cône de sommet S et de base ce cercle $\mathscr{C}$, avec le plan (P). C'est le cercle $\mathscr{C}'$, si $\mathscr{C}$ ne passe pas

1. La projection stéréographique générale est une projection conique de la sphère sur un plan passant par son centre, à partir de l'un des pôles du cercle que ce plan découpe dans la sphère. La projection stéréographique que nous étudions ici est un cas particulier pour lequel le plan de projection est le plan de l'équateur. On qualifie alors cette projection de *polaire* (voir [1], p. 51-53).

2. Voir [2] p. 489-534.

par le pôle S[3].

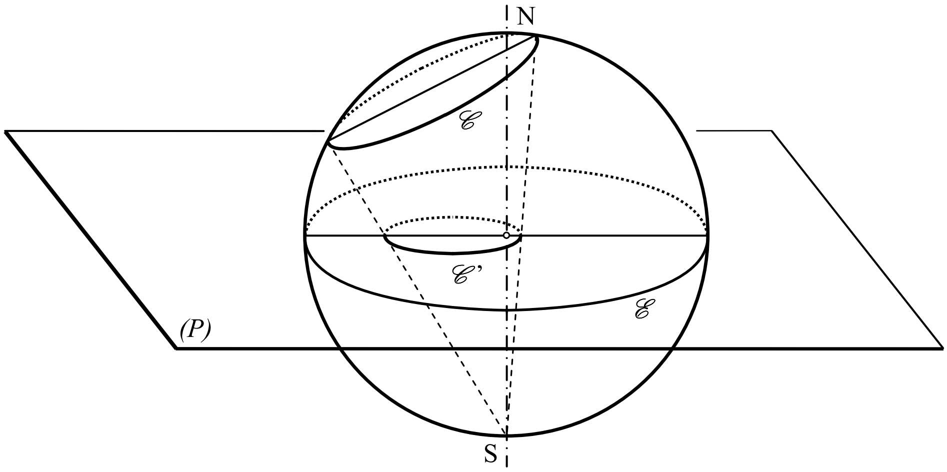


Figure 1

Par cette transformation, l'équateur $\mathscr{E}$ est invariant point par point, le tropique du Cancer se projette en un cercle intérieur à l'équateur, et le tropique du Capricorne, en un cercle extérieur. Les trois cercles obtenus dans le plan (P) sont concentriques, comme le sont les projetés de tous les cercles parallèles à l'équateur. Outre ces trois cercles, le tracé d'un astrolabe reposant sur une telle projection consiste avant tout à construire les projetés des cercles parallèles et des cercles orthogonaux à un horizon donné, sur le plan (P). Considérons le méridien $NASB$ d'un lieu donné et l'horizon de ce lieu, de diamètre HH' dans le plan du méridien(voir Figure 2)[4]. Si P et P' sont les pôles de l'horizon, alors nous pouvons placer leurs projetés P_1 et P_1' sur la ligne méridienne qui représente, dans le plan équatorial rabattu, le méridien projeté[5]. Le projeté d'un cercle de la sphère, dont le plan est orthogonal à celui du méridien, est centré sur la ligne méridienne[6]. C'est le cas de l'horizon, qui se projette selon le cercle de diamètre H_1H_1', dont les extrémités sont les projetés des points H et H'.

3. En effet, la projection stéréographique transforme les cercles de la sphère en cercles ou droites du plan équatorial. Nous reviendrons sur cette propriété tout au long de cet article.

4. Cette figure est inspirée de celle que l'on trouve dans [3] p. CXIII.

5. Il suffit pour cela de tracer les droites SP et SP', et de rabattre leur intersection avec la droite AB.

6. A condition, bien entendu, qu'il ne passe pas par le pôle S.

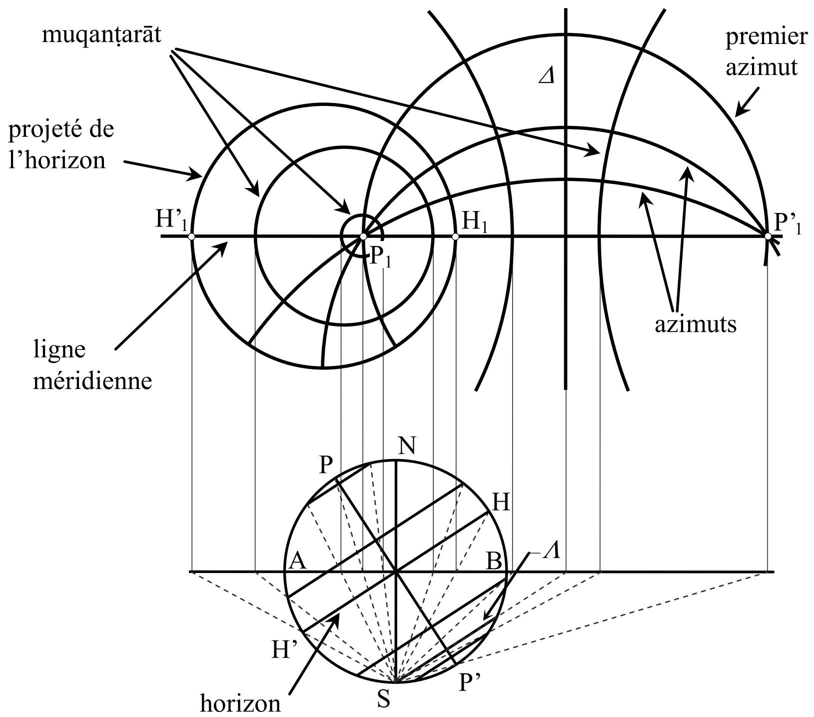


Figure 2

Les projetés des cercles parallèles à l'horizon, qu'on appelle les *muqanṭarāt*, forment un faisceau de cercles à points limites P_1 et P_1'. Le cercle $\mathit{\Gamma}$ parallèle à l'horizon et passant par le pôle S, se projette selon une droite $\mathit{\Delta}$, perpendiculaire à la ligne méridienne. Tous les autres cercles parallèles à l'horizon se projettent, comme l'horizon lui-même, selon des cercles centrés sur la ligne méridienne. Les projetés de tous ceux qui sont situés entre Λ et le pôle P, auront leur convexité tournée vers P_1 et les projetés de tous ceux qui sont situés entre Λ et le pôle P', vers P_1'. Les grands cercles perpendiculaires à l'horizon, appelés cercles de hauteur, se projettent, quant à eux, selon un faisceau de cercles à points de base P_1 et P_1',[7] les azimuts (*sumūt*). Ainsi, tout point de la sphère peut être placé sur l'astrolabe en transférant ses coordonnées horizontales sur ce nouveau réseau de cercles, formé par les deux faisceaux conjugués.

7. L'un de ces cercles a son centre sur la droite méridienne, c'est le projeté du premier cercle de hauteur, perpendiculaire au méridien. Il est appelé en général premier azimut.

Depuis les travaux d'O. Neugebauer [8] , on peut conjecturer qu'Hipparque de Nicée, astronome du II^e siècle avant le début de l'ère chrétienne (*ca* -160/-125), connaissait la projection stéréographique, et que ses recherches ont pu constituer une source pour Ptolémée dans son *Planisphère*, mais cette affirmation reste controversée [9]. Cela ne nous permet pas de situer précisément l'origine de cette projection, mais nous ne chercherons pas ici à traiter cette question. Ce qui nous occupe est plutôt de comprendre comment les Anciens s'y prenaient pour reporter sur un plan la géométrie de la sphère, en nous plaçant du point de vue conceptuel. Pour cela, nous nous proposons de mettre en évidence et d'analyser les principes qui étaient à la base des procédés géométriques qu'ils ont employés, afin de mieux comprendre le contexte mathématique dans lequel chacun d'eux se plaçait et d'apporter certains éléments de réponse à des questions telles que : Que signifie concevoir la projection stéréographique, ou connaître une telle projection ? Est-ce équivalent de concevoir une telle projection et d'en écrire la théorie ? Comment cette théorie a-t-elle évoluée au cours de l'histoire ?
L'exposé et la discussion que nous voulons mener ici, se feront exclusivement à partir des textes dont on dispose aujourd'hui, à commencer par le plus ancien d'entre eux, *Le Planisphère* de Ptolémée. Cet ouvrage, que l'astronome alexandrin rédigea au cours du II^e siècle de l'ère chrétienne, est perdu en grec. Il nous est parvenu dans une traduction arabe [10] ainsi que dans une traduction latine faite sur une version arabe qui présente des différences avec celle que l'on possède [11].

8. Voir en particulier [4], p. 246, et [5], p. 857-858 et 868-869.

9. Dans son article sur l'origine de l'astrolabe, O. Neugebauer fait reposer cette affirmation sur deux arguments : le premier s'appuie sur l'analyse qu'il fait du texte de Ptolémée, *Le Planisphère*, dont le but principal, selon lui, est de démontrer comment il est possible de résoudre des problèmes de trigonométrie sphérique au seul moyen de la trigonométrie plane. Il est donc plausible, toujours selon O. Neugebauer, qu'Hipparque ait utilisé la projection stéréographique, puisque sans disposer de trigonométrie sphérique, il a pu résoudre de tels problèmes. Le second argument consiste en un témoignage contenu dans une lettre de Synesius de Cyrene, datant du IV^e siècle (*ca* 373-414) et affirmant qu'Hipparque fut le premier à étudier la projection de la sphère sur un plan (voir [6], p. 194-205). Néanmoins, C. Anagnostakis a relevé dans sa thèse que Neugebauer lui-même a reconnu qu'Hipparque aurait pu recourir à d'autres méthodes (voir [7], p. 10 et [5], p. 302-304).

10. Notre commentaire se fera à partir de la traduction arabe telle qu'elle se présente dans l'édition publiée par N. Sidoli et J. L. Berggren ([8], p. 37-139).

11. Cette traduction latine a été faite par Hermann de Carinthie, en 1143. P. Kunitzsch a trouvé des traces d'une traduction latine antérieure, qui remonterait à la fin du X^e siècle (voir [9] p. 98-99). Il compare le texte arabe des deux manuscrits qui ont servi à l'édition de N. Sidoli et J. L. Berggren à celui de la traduction latine de 1143, et conclut que si certaines différences entre les deux textes peuvent être attribuées au caractère parfois libre de la traduction de Hermann, on doit reconnaître l'existence de deux familles différentes

1 Ptolémée

Dans l'introduction de son texte sur *Le Planisphère*, Ptolémée expose brièvement le but de son ouvrage, et certains des principes qui président à son étude. Il veut reproduire sur un plan, les différents cercles de la sphère solide. Il a voulu écrire « un livre d'une manière abrégée, dans lequel [il] montre par quelle voie il est possible de tracer l'écliptique, les cercles parallèles à l'équateur et les cercles connus comme les méridiens » (§1, p. 55, *l.* 6-7, *trad.* p. 82) [12], et que tout ce qui sera fait dans le plan sera « conforme à ce qui apparaît dans la sphère solide » (§1, p. 55, *l.* 8, *trad.* p. 82). En fait, il étudiera également la position relative des trois grands cercles de la sphère : l'équateur, l'écliptique et l'horizon d'un lieu (§2 et §3), et le tracé des cercles parallèles et perpendiculaires à l'écliptique (§16 à 19), ce qu'il n'annonce pas ici.
L'une des propriétés fondamentales de la projection stéréographique est qu'elle conserve la forme des cercles, exception faite des cercles de la sphère qui passent par le pôle de projection et dont les projetés sont alors des droites. Cette propriété est traitée par Ptolémée comme un postulat implicite : jamais il ne l'énonce en tant que telle, et encore moins ne la démontre [13].
Dans ce texte, ou tout du moins dans la version arabe que l'on peut considérer comme la plus proche de l'original du *Planisphère* parmi les versions que l'on peut lire, on trouve différents termes pour désigner la relation entre un cercle de la sphère et la ligne, cercle ou droite, qui lui est associée sur le plan. Deux d'entre eux ont à peu près le même sens et signifient que la ligne du plan *prend la place* du cercle de la sphère [14]. Un autre terme employé à plusieurs

([10] p. 85-86). Quant à la traduction arabe, dont on ne connaît ni la date, ni l'auteur, P. Kunitzsch affirme qu'elle remonte au début du X^e^ siècle, voire à la fin du IX^e^, en s'appuyant sur la citation que l'on trouve dans le texte sur l'astrolabe attribué à Ibn Sinān (voir [9] p. 97, [10] p. 84 et surtout [11] p. 152). Néanmoins l'argument principal de cette affirmation présente une faiblesse, dans la mesure où l'authenticité de ce traité n'est toujours pas établie avec certitude.

12. Les références renvoient à l'édition et la traduction de N. Sidoli et J. L. Berggren [8]. Nous indiquons le découpage en 20 sections du texte, que les éditeurs ont adopté et qu'ils ont repris de la traduction latine d'Hermann, éditée par J. L. Heiberg (Claudii Ptolemaei Opera, vol. II, Opera astronomica minora, Leipzig, 1907).

13. Signalons une seule exception que l'on trouve à la fin du texte, au §19, dans lequel l'auteur montre que le cercle parallèle à l'écliptique et passant par le pôle sud de la sphère, devient une droite dans le plan(voir *infra* note 43 page 16.) Nous ne partageons pas l'hypothèse formulée par N. Sidoli et J. L. Berggren : « Ptolemy knew a simple proof of circle preservation and assumed his readers would be familiar with this » ([8], p. 112).

14. Le terme le plus employé est *makān*, qui signifie *la place* ou *le lieu* : « nous avons utilisé des droites à la place (*makāna*) des méridiens » (§1, p. 55, *l.* 9-10, *trad.* p. 82) ; on trouve parfois, également, le terme *badal* : « nous traçons deux diamètres perpendiculaires

reprises, est le terme *naẓīr*, que l'on peut traduire par *correspondant*[15]. Nous exprimerons indifféremment ces propos trouvés dans *Le Planisphère*, par les tournures suivantes : *un cercle de la sphère est* remplacé *par un cercle ou une droite sur le plan* ou *un cercle du plan est* le correspondant *d'un cercle de la sphère*[16]. Ptolémée ne définit pas ce plan dans lequel il trace les cercles. Une des difficultés de ce texte, pour comprendre les raisonnements de son auteur et éviter les erreurs d'interprétation, réside dans l'ambiguïté de la relation géométrique entre la construction dans le plan et ce que l'on observe à la surface de la sphère solide. Du début du texte jusqu'au §15 inclus, Ptolémée pose un cercle $ABCD$ pour l'équateur[17]. Celui-ci n'est jamais remplacé par

qui tiennent lieu (*badala*) de méridiens » (§14, p. 73, *l.* 403-404, *trad.* p. 102) ; on trouve aussi une fois l'expression *qāma maqāma*, qui peut être traduite par *se tenir à la place de* : « Ces cercles tracés sont ceux qui se tiennent à la place (*taqūmu maqāma*) des grands cercles perpendiculaires à l'écliptique » (§15, p. 75, *l.* 435-436, *trad.* p. 103). Les traducteurs emploient *representing* pour traduire les deux premiers termes, et *to stand in for* pour la dernière expression ([8] p. 48).

15. Ce terme signifie aussi *semblable* ou *placé en vis-à-vis* : « Je dis que ces deux cercles sont les correspondants (*naẓīratā*) de deux des cercles qui sont sur la sphère solide »(§1, p. 55, *l.* 23, *trad.* p. 82). On retrouve ce mot dans plusieurs traités écrits en arabe au Xᵉ siècle, notamment celui d'al-Qūhī, où il prendra un sens mathématique en spécifiant systématiquement la relation d'un point ou d'un cercle de la sphère à son projeté sur le plan (*cf. infra*, p. 29). On le traduit alors par *homologue*.

16. On pourrait faire à ce choix le reproche de gommer les nuances du texte. Mais l'analyse des termes relevés ici dans *Le Planisphère*, révèle que l'auteur ne fait pas usage systématique d'un terme plutôt qu'un autre, en fonction de la situation. Par exemple, si le mot *makān* est employé le plus souvent pour désigner les droites qui sont à la place des méridiens, il est également employé deux fois pour des cercles. Quant au mot *badal*, qu'on lit deux fois dans le texte, la première occurrence concerne les droites qui remplacent les méridiens, et la seconde, un cercle correspondant à un cercle de la sphère, parallèle à l'écliptique. De la même manière, le terme *naẓīr* est employé pour différentes situations (droites, cercles, points). A plusieurs reprises, Ptolémée emploie simplement le verbe *tracer* (*rasama*) pour désigner la correspondance : « le cercle dont le diamètre est la droite GI (un cercle de la sphère) est tracé (*tursamu*) autour du diamètre MN (un cercle du plan) » (§16, p. 76, *l.* 445, *trad.* p. 104) ; parfois même, il ne précise plus la différence entre les deux cercles, celui de la sphère et son correspondant dans le plan, quand, par exemple, il pose « l'écliptique, le cercle $GBHD$ (un cercle du plan) » (§2, p. 57, *l.* 54-55, *trad.* p. 84). Nous devons souligner que cette analyse repose sur des bases qui ne sont peut-être pas totalement infaillibles, étant donné qu'on ne dispose que d'une version dont on ne peut affirmer la parfaite authenticité.

17. Il faut signaler une exception au §14. L'auteur débute cette section en expliquant que l'on peut placer les astres fixes à partir de tout ce qui précède : l'étude du tracé des cercles parallèles à l'équateur, le calcul des rayons de ces cercles qui passent par le début des signes, le calcul des diamètres de l'écliptique et de l'horizon à la latitude de Rhodes et la position de leurs centres, ainsi que les ascensions des signes (ascensions droites et obliques à la latitude de Rhodes). Il considère alors le plan dans lequel on veut tracer les cercles définis à partir de l'écliptique, qu'il appellera ensuite le tympan, et pose le cercle $ABCD$

un cercle du plan, et l'on peut penser que le plan est celui de l'équateur. Dans toute la suite du texte, il pose dans le plan, au début des constructions, le cercle $ABCD$ pour le colure des solstices, et deux diamètres perpendiculaires de ce cercle pour l'axe et le diamètre de l'équateur [18].

Revenons aux principes sur lesquels Ptolémée fait reposer son étude. Parmi ces principes, certains sont explicités en introduction, mais d'autres restent sous-entendus. L'auteur admet que les cercles parallèles à l'équateur sont remplacés, dans le plan, par des cercles concentriques, sans l'énoncer ainsi [19]. En revanche, il précise que les méridiens sont remplacés par des droites [20]. Dès les premières lignes du texte, on comprend donc que l'auteur base son étude sur les cercles de la sphère définis à partir de l'équateur : les parallèles et les méridiens. Et l'on peut penser que sa réflexion a débuté, elle aussi, par cela, étant donné le caractère fondamental, pour un astronome, de ces cercles qui définissent la déclinaison et l'ascension droite. Mais quelle connaissance pouvait-il avoir de la forme que prennent ces cercles dans le plan ? Une connaissance intuitive pourrait expliquer que les cercles parallèles à l'équateur "se projettent" selon des cercles concentriques et les méridiens,

---

comme « le cercle qui est extérieur à tous les cercles et qui en est le plus grand » (§14, p. 73, *l.* 403, *trad.* p. 101-102). Cela signifie qu'on décide de la taille du cercle qui borde toute la construction dans le plan. Il montre alors comment tracer l'équateur à partir de ce cercle $ABCD$, et le contexte géométrique reste semblable à ce qui précède.

18. C'est le cas pour toutes les constructions du §16 au §19. L'axe est l'axe de la sphère. Cette fois, il semble bien qu'il adopte le point de vue d'une projection orthographique de la sphère sur le colure des solstices. On peut interpréter, comme le font N. Sidoli et J. L. Berggren, que dès le §1, le plan de la figure est formée du plan de l'équateur et du colure des solstices, comme superposés ([8] p. 113). C'est une façon de comprendre le raisonnement de Ptolémée, mais ce dernier n'explicite jamais que ces deux plans sont comme superposés.

19. Ptolémée écrit dans l'introduction : « nous avons disposé les cercles parallèles à l'équateur selon un agencement par lequel il a d'abord été possible que les grands cercles tracés à partir des cercles inclinés tangents aux cercles parallèles à l'équateur, <situés> de part et d'autre de lui, à la même distance, coupent toujours l'équateur en deux moitiés » (§1, p. 55, *l.* 10-12, *trad.* p. 82) en précisant seulement, quelques lignes plus loin, que de tels cercles situés sur la sphère au nord de l'équateur ou au sud de celui-ci, se trouveront, dans le plan, respectivement à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle $ABCD$, tenant lieu d'équateur (§1, p. 55, *l.* 18-20, *trad.* p. 82). A la toute fin du texte, au §20 qui tient lieu de conclusion, il revient sur ce fait et signale que le centre de l'équateur est aussi le centre pour tous les cercles parallèles à lui (§20, p. 80, *l.* 509-510, *trad.* p. 108). Tout au long du traité, cette propriété est passée sous silence, bien qu'employée comme une évidence.

20. On peut lire, juste après l'exposé de son projet : « nous avons utilisé des droites à la place des méridiens » (§1, p. 55, *l.* 9-10, *trad.* p. 82). Il ajoutera plus tard que ces droites passent par le pôle nord, qui est aussi le centre de l'équateur, dans le plan : « toutes les droites qui traversent le pôle E sont à la place des méridiens » (§1, p. 57, *l.* 48-49, *trad.* p. 84).

selon des droites passant par le centre de l'équateur, où vient se superposer le pôle nord. Elle pourrait se fonder sur la vision de la sphère que l'on peut imaginer à partir du pôle sud, selon un cône droit dont l'axe est l'axe de la sphère, sans induire pour autant une théorie mathématique des coniques, telle qu'on peut la trouver dans l'œuvre d'Apollonius, ou même chez l'un de ses prédécesseurs. Mais elle pourrait aussi résulter des recherches sur les cadrans solaires, problèmes traités par ailleurs par Ptolémée, et qui, alors, induirait une réflexion sur les coniques, comme nous incitent à le penser les travaux de Neugebauer [21]. Néanmoins, on ne trouve aucune trace d'une théorie des coniques dans le texte de Ptolémée.

Celui-ci construit dans le plan, le correspondant d'un grand cercle incliné Γ, en utilisant les deux cercles parallèles à l'équateur, auquel Γ est tangent sur la sphère. Si l'on note Z et T, les extrémités du diamètre de Γ dans le plan du colure des solstices, les deux cercles parallèles définissent la déclinaison des points Z et T et Ptolémée les caractérise comme « des cercles parallèles à l'équateur, situés de part et d'autre de celui-ci, à la même distance » (§1, p. 55, *l.* 11-12, *trad.* p. 82), car évidemment les arcs de déclinaison $\overset{\frown}{ZC}$ et $\overset{\frown}{CZ'}$ sont égaux. Il trace le cercle $IBMD$, correspondant de Γ dans le plan, à partir du point I et du point M, qui se trouvent sur le diamètre AC de l'équateur, perpendiculaire à l'autre diamètre BD, et respectivement sur les droites SZ et SM.

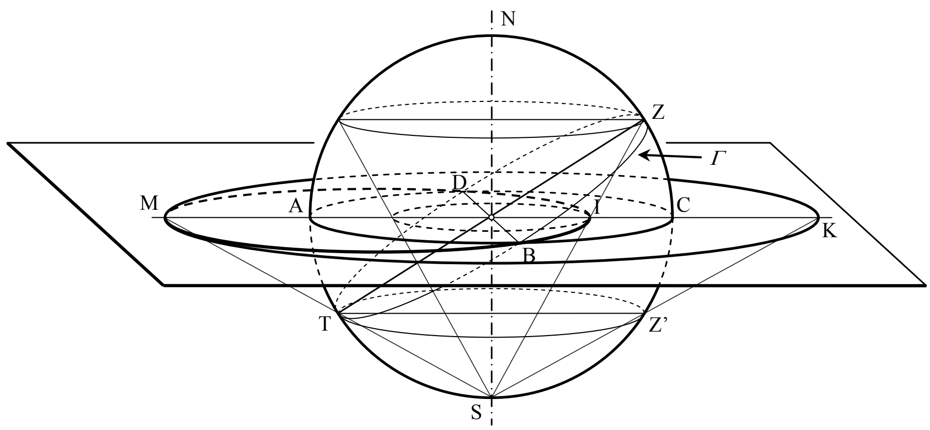


Figure 3

Mais nous avons quelque peu modernisé la construction de Ptolémée, il ne procède pas exactement de cette façon. Après avoir tracé le cercle $ABCD$

21. Notamment [5] p. 857-872.

de centre E, pour l'équateur, puis les deux diamètres perpendiculaires, AC et BD, à la place des méridiens, il explique que le point E est aussi un pôle de l'équateur, et qu'il est préférable de choisir le pôle nord car c'est le pôle toujours visible dans les contrées que l'on habite [22]. Il découpe ensuite sur le cercle $ABCD$ à partir du point C, deux arcs égaux $\overset{\frown}{CG}$ et $\overset{\frown}{CH}$, et mène les droites joignant le point D à chacun des deux points G et H. Ces deux droites coupent AC respectivement en I et K. Il trace alors les cercles de centre E et passant respectivement par I et K, et affirme qu'ils sont « les correspondants de deux des cercles qui sont sur la sphère solide, de part et d'autre de l'équateur, à la même distance » (§1, p. 55, *l.* 23-24, *trad.* p. 82). Il conclut en énonçant que le cercle dont le centre est le milieu de IM, est

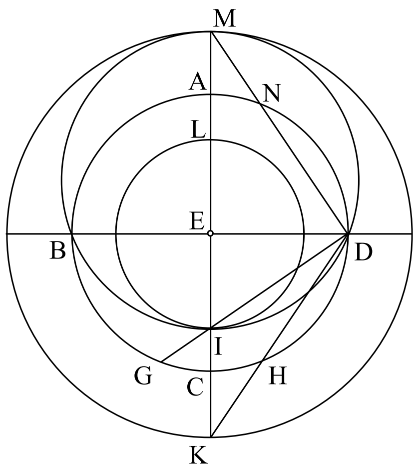


Figure 4

alors tangent aux deux cercles précédents en I et en M, et coupe l'équateur

22. « Que le point E soit le pôle nord, parce qu'on ne peut placer l'autre pôle sur la surface plane, car sa surface s'étend à l'infini, comme nous le montrerons par la suite » (§1, p. 55, *l.* 15-16, *trad.* p. 82). Puisque les cercles parallèles sont remplacés par des cercles concentriques, il est naturel que l'un des pôles de l'équateur sur la sphère se retrouve au centre de tous ces cercles dans le plan. La précision de l'auteur concernant l'autre pôle est intéressante. Que ce soit le sommet d'un cône, si telle est la conception de Ptolémée, ou le point depuis lequel on regarde la sphère, il n'a pas de correspondant sur le plan. On ne trouve pas d'explication de cela dans la suite du texte, mais lorsqu'il commencera par placer le cercle $ABCD$ pour le colure des solstices, au §16, il désignera le point D comme étant « le pôle caché » (§16, p. 76, *l.* 441, *trad.* p. 104). Cela signifie-t-il que D, du point de vue projectif, ne peut pas être représenté ? ou simplement qu'il n'est pas visible, car situé au-dessous de l'horizon ?

$ABCD$ en deux moitiés, aux points B et D[23]. Il démontre uniquement cette dernière propriété.
Pour cela, il mène la droite DM, place le point N là où elle coupe le cercle $ABCD$, affirme que les arcs $\widehat{AN}$ et $\widehat{CH}$ sont égaux[24], et en déduit que les points N et G sont diamétralement opposés sur l'équateur[25]. Ainsi l'angle $\widehat{MDI}$ est droit et le cercle de diamètre IM passe par D.
Revenons sur sa construction des points I et M. Il est clair que l'on voit le point D (Figure 4) à la place du point S (Figure 3), et les points G, H, N à la place des points Z, Z', T, respectivement. Donc on pourrait conclure qu'il superpose le plan du colure des solstices au plan de la figure. Mais il ne procède pas explicitement ainsi[26]. C'est-à-dire qu'il imagine probablement la trace du cône de sommet S et de base le cercle parallèle passant par Z, ou par Z', dans le plan du colure des solstices, mais il transpose cela dans le plan de la figure qui reproduit ce qui se passe dans le plan de l'équateur, par une construction auxiliaire où les points D, I, G et C sont disposés comme le sont les points S, I, Z et C dans la sphère. La donnée essentielle est celle de la déclinaison de Z.
Cette démonstration est la toute première du traité. Elle revient à démontrer que le cercle correspondant à tout grand cercle incliné de la sphère, dans le plan, coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, propriété observée sur la sphère. Au cours de sa construction, Ptolémée a employé un autre principe que ceux que nous avons déjà relevés, et qu'il n'a pas formulé : un grand cercle incliné de la sphère, tangent à deux cercles parallèles à l'équateur et disposés symétriquement par rapport à lui, est remplacé, dans le plan, par un cercle également tangent aux deux cercles qui remplacent les deux cercles parallèles. Pourquoi ? S'il avait seulement voulu tracer le cercle correspondant du grand cercle incliné, il lui aurait suffi de placer les points

23. On trouve littéralement dans le texte : « l'écliptique qui est tracé à partir d'un centre qui coupe la droite IM en deux moitiés, de sorte qu'il est tangent à ces deux cercles au point I et au point M, divise le cercle $ABCD$ en deux moitiés, je veux dire qu'il passe par le point B et le point D » (§1, p. 55-56, *l.* 24-26, *trad.* p. 83). Il sous entend même que l'écliptique est tracé selon un cercle, ne précisant que son centre. Si l'on se fie au texte, on comprend que Ptolémée a en tête l'écliptique comme exemple de grand cercle incliné, mais que sa construction est générale. C'est en tout cas le sens des hypothèses de sa construction. Après la démonstration, il insiste sur le fait que cette construction est un modèle pour toutes les paires de cercles parallèles symétriques par rapport à l'équateur ; puis il explique que si l'on donne aux arcs $\widehat{CG}$ et $\widehat{CH}$ la valeur de l'inclinaison de l'écliptique, 23°51′, alors on obtient, dans le plan, les tropiques et l'écliptique.

24. Pour des raisons évidentes de symétrie, qu'il n'évoque pas.

25. Puisque l'arc $\widehat{CG}$ est égal à l'arc $\widehat{CH}$.

26. Au §16, Ptolémée posera explicitement le cercle $ABCD$ comme le colure des solstices, et ce ne sera plus l'équateur, comme nous le verrons. Ce n'est qu'à partir de là qu'il appellera D le pôle caché (voir *supra* note 22, p. 9).

I et M, extrémités de son diamètre. Il avait les moyens de le faire à partir du point D, à condition qu'il conçoive de placer les points de la sphère isolément sur le plan [27]. Or, ce n'est pas ainsi qu'il procède, comme on l'a vu [28]. C'est comme si le point G n'était pas un point particulier du cercle parallèle septentrional, mais qu'il jouait le rôle d'un point quelconque de ce cercle, dont la seule donnée importante est la déclinaison. C'est comme si l'auteur concevait avant tout le tracé dans le plan, du cercle d'égale déclinaison tout entier. De plus, la conservation de la tangence du cercle incliné avec les cercles parallèles, de la sphère au plan, principe qui relève de la même intuition que celle que nous avons évoquée précédemment à propos des méridiens et des parallèles, est aussi un principe qui assure à IM d'être le diamètre du cercle qu'il trace dans le plan. Ainsi, la manière dont il définit un cercle incliné par les déclinaisons extrêmes de ses points, c'est-à-dire les deux cercles parallèles tangents, associée au principe de la disposition des cercles parallèles dans le plan, prend tout son sens.

Deux questions demeurent au sujet de cette construction et de cette démonstration : Pourquoi le correspondant d'un grand cercle incliné de la sphère, comme l'écliptique, est-il un cercle ? Pourquoi Ptolémée démontre-t-il que ce cercle coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés ?

Raisonnons sur l'exemple de l'écliptique. Dans la sphère, ce cercle passe par les quatre points caractéristiques : les deux points équinoxiaux et les deux points solsticiaux. Donc on doit retrouver ce même fait dans le plan : la ligne qui remplace l'écliptique passe par les correspondants de ces quatre points [29]. Ou plus exactement, l'écliptique est remplacé par une ligne, dont a priori on ne connaît pas la nature mais dont on peut penser qu'elle appartient à la famille des coniques ; une ligne qui passe par les points I et M de manière à être tangente aux deux cercles correspondants, et qui passe par les points

27. Les seules fois où il place dans le plan des points isolés, cela concerne le pôle de l'équateur (§1, voir *supra* note 22 p. 9) et le pôle de l'écliptique. Le premier est le seul point de la sphère qui a pour déclinaison 90°, il peut donc être conçu comme un cercle parallèle réduit à un point. Le second, étudié au §15, constitue la seule exception. Ptolémée emploie précisément la construction à partir du point D comme on vient de le voir pour les points I et M dans la première proposition démontrée. Cette étude précède le tracé des cercles parallèles à l'écliptique, dont il s'occupera dans les quatre paragraphes suivants, les derniers avant la conclusion du §20.

28. Il aurait commencé par placer les points G et N sur le cercle $ABCD$, de sorte que l'arc $\widehat{CG}$ soit égal à l'arc $\widehat{AN}$, puis il aurait construit directement I et M.

29. Ptolémée écrit : « le cercle tracé sur le point M, le point B, le point I et le point D, qui est le cercle passant au milieu des signes (l'écliptique), est tangent aux deux tropiques, au point I, le solstice d'été, et au point M, le solstice d'hiver, et divise l'équateur en deux moitiés aux points B et D. Le point B est le point vernal et le point D, le point automnal » (§1, p. 56, *l.* 39-42, *trad.* p. 84).

B et D, les points équinoxiaux. En démontrant que ces quatre points sont sur un cercle, ou plus exactement que le cercle de diamètre IM passe par les points B et D, Ptolémée ne démontre pas que la ligne qui passe par B, I, D et M est nécessairement un cercle [30], mais il s'assure qu'en prenant ce cercle pour remplacer l'écliptique dans le plan, il ne contredit pas le fait que ce qu'il trace dans le plan est conforme à ce que l'on constate sur la sphère. Ce cercle est effectivement le projeté de l'écliptique selon la projection stéréographique, mais l'aspect projectif n'apparaît pas dans le raisonnement de Ptolémée. Il emploie la propriété selon laquelle l'écliptique, ou tout autre grand cercle de la sphère, coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, dans le plan, comme un principe de cohérence. S'il avait eu la preuve, ou la connaissance certaine, que l'écliptique est remplacé par un cercle, il n'aurait pas eu besoin de démontrer cela.
Il généralise ensuite cette propriété à deux grands cercles quelconques de la sphère, en démontrant que « tous les horizons, que l'on trace d'une manière semblable à celle par laquelle on a tracé l'écliptique, divisent non seulement l'équateur en deux moitiés, mais ils divisent également en puissance, l'écliptique en deux moitiés » (§2, p. 57, *l.* 51-52, *trad.* p. 84) [31]. Sa démonstration repose sur la caractérisation de deux points diamétralement opposés sur un grand cercle de la sphère : ils sont à la fois sur un même méridien et sur deux cercles parallèles à l'équateur et symétriquement disposés par rapport à lui. En s'appuyant sur sa première proposition et sur les principes concernant les cercles parallèles et les méridiens que nous avons mis en évidence, Ptolémée

30. Si l'on considère une conique, on peut montrer que si IM est un axe pour cette conique, condition due au principe de tangence conservée, et qu'elle passe par les points B et D, alors elle est nécessairement un cercle. Mais rien dans le texte ne permet d'affirmer que c'est ce que Ptolémée a en tête et, en tout état de cause, il ne démontre pas que l'écliptique est remplacé par un cercle. Ptolémée développe le même raisonnement, à partir des mêmes principes, au §16, lorsqu'il étudie les cercles parallèles à l'écliptique (voir *infra* p. 13-15). Le commentaire de C. Anagnostakis laisse à penser que Ptolémée *démontre*, au §16, que le cercle se projette selon un cercle ([7] p 133). Pour sa part, R. Lorch estime que cette démonstration peut être considérée comme une preuve symbolique du fait que le cercle de diamètre IM est la représentation du grand cercle de la sphère ([12] p. 273, et en particulier p. 277 pour le §16).

31. Les horizons représentent les grands cercles de la sphère, dont l'écliptique est un exemple. Donc cet énoncé peut parfaitement s'appliquer à deux grands cercles quelconques. Mais ce n'est pas le souci de Ptolémée, dont le but reste de tracer sur le plan les cercles de la sphère qui sont utiles à l'astronome. Par ailleurs, les points auxquels un horizon coupe l'écliptique ne sont pas réellement diamétralement opposés sur le cercle qui remplace l'écliptique dans le plan. C'est pourquoi il a recours à l'expression « en puissance », qui signifie pour lui que les points *correspondent* à des points diamétralement opposés sur la sphère solide. Cette proposition, qui occupe le §2 et le §3, repose sur le principe qu'une droite passant par le centre E dans le plan, remplace un méridien.

montre que cette caractérisation s'applique à la situation dans le plan. Si un cercle du plan coupe l'équateur en deux points diamétralement opposés, cela suffit à ce qu'il soit le correspondant d'un grand cercle de la sphère et une droite passant par le centre E de l'équateur, coupe ce cercle en deux points qui sont sur des cercles parallèles symétriques par rapport à l'équateur. Les deux points où se coupent deux cercles du plan, correspondants de deux grands cercles de la sphère, sont sur une droite passant par E. L'auteur montre en fait la cohérence de son système de principes avec la situation sur la sphère, c'est ce qu'il entend par « être conforme à ce qui apparaît sur la sphère solide ».

On retrouve, au §16, le procédé que Ptolémée a employé au §1, mais pour tracer dans le plan, cette fois, un cercle Γ parallèle à l'écliptique. En effet, il considère :

- les deux cercles parallèles à l'équateur et tangents à Γ,
- les points d'intersection de Γ avec les deux colures, obtenant ainsi quatre points, dont il montre qu'ils sont sur un même cercle [32].

On constate un changement de point de vue [33]. Cette fois, Ptolémée pose « le méridien qui passe par les deux pôles, le cercle $ABCD$ autour du centre E [34]. Que l'axe soit BED. Imaginons le point D le pôle caché, le diamètre de l'équateur AEC et le diamètre de l'un des cercles parallèles à l'écliptique, la droite GHI » (§16, p. 76, *l.* 440-442, *trad.* p. 104) [35]. Ptolémée considère le

32. Le choix qu'il fait pour les deux colures n'est pas dû au hasard. Il est facile de placer ces deux méridiens dans le plan. Par ailleurs, à aucun endroit de son texte Ptolémée n'explique comment tracer un méridien en particulier, autre que l'un des colures. Il indique seulement les principes du tracé : un méridien est une droite passant par E. Ces cercles ne lui servent qu'à garantir que deux points sont diamétralement opposés sur un grand cercle.

33. L'auteur débute son étude des cercles parallèles et perpendiculaires à l'écliptique, au paragraphe précédent. Il annonce clairement son intention au début du §15 : « Pour accomplir notre but, nous devons également montrer comment tracer les cercles qui sont disposés par rapport à l'écliptique comme le sont les cercles que nous avons déjà mentionnés, par rapport à l'équateur » (§15, p. 75, *l.* 424-425, *trad.* p. 103). Cette étude l'occupera jusqu'à la fin du texte. Dans ce §15, il commence par expliquer comment tracer dans le plan le correspondant du pôle de l'écliptique, en gardant le même point de vue que dans ce qui précède, c'est-à-dire qu'il commence par poser le cercle $ABCD$ comme l'équateur.

34. C'est-à-dire le colure des solstices, qui passe à la fois par les pôles de l'équateur et par ceux de l'écliptique.

35. A partir de ce paragraphe, et dans toute la suite du texte, Ptolémée pose le cercle $ABCD$ pour le méridien de l'écliptique, autrement dit le colure des solstices (nous avons déjà signalé ce fait, voir *supra* p. 7 et note 18). Ptolémée adopte le point de vue d'une projection orthographique dans le plan de ce méridien. Nous pensons qu'ici, le plan de l'équateur, ceux du cercle Γ et de tous les cercles parallèles à l'équateur, sont considérés comme perpendiculaires au plan de la figure. Comme le sera le plan du méridien, colure des

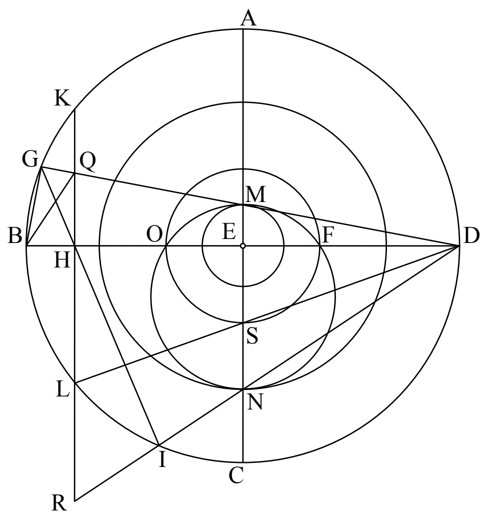


Figure 5

diamètre de Γ dans le plan du colure des solstices, GI. Ces deux points sont les points de tangence avec les cercles parallèles à l'équateur, donc les points d'extrême déclinaison sur Γ. Il trace alors les cercles d'égale déclinaison pour les deux points G et I, les cercles de centre E, passant respectivement par M et N. Il affirme que Γ est tracé dans le plan selon le cercle de diamètre MN, tangent aux deux cercles précédemment tracés. Mais il ne s'arrête pas là, il doit vérifier que ce cercle présente dans le plan la même propriété que sur la sphère, à savoir que Γ divise l'un des cercles parallèles à l'équateur en deux moitiés. Cela confirme, comme à la lecture du §1, que Ptolémée n'a pas de preuve que Γ est remplacé par un cercle dans le plan. Au §1, quand il a étudié l'écliptique, ce cercle parallèle était l'équateur lui-même. Dans le cas présent, au §16, c'est le cercle parallèle à l'équateur que Γ rencontre dans le plan du colure des équinoxes. Les deux points de Γ qui se situent sur ce méridien ont la même déclinaison, et ce méridien, comme tous les méridiens, divise tous les cercles parallèles à l'équateur en deux moitiés. Le cercle parallèle à l'équateur a pour diamètre KL, droite qui passe par le point H, intersection de GI et de BD, parallèlement au diamètre de l'équateur, AC. Il écrit : « le cercle parallèle à l'écliptique, dont le diamètre est la droite GI, divise

équinoxes, que Ptolémée introduira quelques lignes plus loin (*cf.* note 36). Donc Ptolémée ne superpose pas ces plans. En tout état de cause, il ne le formule pas, et ne le conçoit pas géométriquement.

le cercle parallèle à l'équateur dont le diamètre est LK, en deux moitiés sur le méridien dont le diamètre est la droite BD » (§16, p. 76, *l.* 448-449, *trad.* p. 104)[36]. Le cercle de diamètre KL, est tracé dans le plan selon le cercle SOF, à l'aide de la droite DSL. Ptolémée démontre donc que le cercle de diamètre MN passe par les points O et F[37]. Il commence par établir que les points B, G, Q, H sont cocycliques[38], d'où il déduit que $\widehat{BQR} = \widehat{BGI}$. D'autre part $\widehat{BGI} = \widehat{BDR}$[39], d'où $\widehat{BQR} = \widehat{BDR}$, donc les points B, Q, D, R sont cocycliques. Ptolémée en déduit que $QH \times HR = BH \times HD$, puis que $QH \times HR = HL^2$.[40] Donc, par similitude des figures triangulaires $DQHLR$ et $DMESN$, il obtient $ME \times EN = ES^2$, ou encore $ME \times EN = FE \times EO$[41]. Cela prouve que les quatre points M, O, N et F sont sur le cercle de diamètre MN.

Quelle place occupe ce texte du *Planisphère* dans l'histoire de la projection stéréographique ? Pour étayer l'interprétation que l'on peut faire du texte, nous avons commenté les parties où Ptolémée développe sa méthode de représentation de la sphère sur un plan, car il s'agit plus d'une méthode que d'une théorie. Différentes interprétations ont été formulées pour comprendre le sens de ce texte, mais elles nous paraissent soit trop fortes à propos de la conception de la projection stéréographique par Ptolémée, soit insuffisamment développées[42]. S'il est clair que Ptolémée avait l'idée d'un principe

36. Le méridien est considéré perpendiculairement au plan de la figure (*cf.* note 35).

37. Ces deux points sont à l'intersection du cercle SOF, de centre E, et de la droite BD qui passe par le centre E, donc ils sont évidemment diamétralement opposés sur le cercle. On retrouve la cohérence entre le principe selon lequel un cercle parallèle à l'équateur est remplacé par un cercle de centre E, et celui qui fait qu'un méridien est remplacé par une droite passant par ce même point E. On constate la mise en œuvre de ces deux principes dans les procédés que Ptolémée développe au §1, pour tracer l'écliptique, et ici même au §16, pour tracer les cercles parallèles à l'écliptique. La ressemblance entre ces deux procédés est frappante. La seule proposition que Ptolémée démontre dans les deux cas est que le cercle qu'il pose dans le plan, pour remplacer le cercle de la sphère, en le définissant à partir du diamètre formé par les deux points de tangence avec deux cercles parallèles à l'équateur, partage en deux moitiés un autre cercle parallèle à l'équateur et correctement choisi. Sa démonstration repose sur les propositions 21, 31 et 35 que l'on trouve au livre III des *Éléments* d'Euclide et que Ptolémée ne cite pas.

38. Dans le cercle $ABCD$, l'angle $\widehat{BGQ}$ est droit, car BD est un diamètre, et d'autre part l'angle $\widehat{BHQ}$ a été posé comme droit.

39. Puisque les points B, G, D, I sont sur le cercle $ABCD$.

40. En effet, $BH \times HD = HL^2$ parce que les points B, K, D, L sont sur le cercle $ABCD$ et que $KH = HL$.

41. Parce que les points S, O, F sont sur un cercle de centre E.

42. Pour C. Anagnostakis : « In the *Planisphaerium* Ptolemy describes the stereographic projection of the celestial sphere from its south pole onto the plane through the equator »([7] p. 112) ; R. Lorch écrit : « In the stereographic projection treated by Pto-

originel à sa représentation, il est le même que celui de la projection stéréographique, mais il est tout aussi clair que Ptolémée ne définit pas la projection en tant que telle. Il adopte des principes qui lui permettent, sans concevoir mathématiquement la projection, de tracer selon des cercles et des droites, les cercles de la sphère dont il a besoin pour résoudre les problèmes d'astronomie qui l'intéressent. Ce n'est pas seulement parce qu'on ne trouve aucun terme désignant cette projection que nous pouvons dire qu'il ne la conçoit pas. C'est surtout parce qu'il n'établit pas géométriquement la relation entre un cercle de la sphère et ce qui lui correspond dans le plan. C'est précisément parce qu'il ne conçoit pas la projection, qu'il doit s'appuyer sur des propriétés que possèdent notamment les grands cercles de la sphère, et vérifier celles qui leur correspondent dans le plan. Ces propriétés, qui concernent notamment deux points diamétralement opposés sur la sphère, deviennent évidentes lorsqu'on traduit mathématiquement que tous les points de la sphère se placent dans le plan de l'équateur à l'endroit où il est coupé par la droite qui joint chacun d'eux au pôle. Ce n'est pas ce qu'il fait lorsqu'il place l'un des points qui lui permet de tracer le correspondant d'un cercle parallèle. Même s'il a l'idée de joindre le point D à l'extrémité de l'arc de déclinaison, il n'en donne pas les raisons, ne l'explique pas, et ne s'intéresse qu'au cercle qu'il obtient. Il n'y a pas de principe général qui lui permettrait d'établir cette relation entre un point et son projeté [43].

C'est pour ces raisons que nous pouvons dire que Ptolémée n'écrit pas une théorie de la projection stéréographique. Les principes sur lesquels il

---

lemy in the *Planisphaerium*, the celestial sphere is mapped onto the plane of the equator by projection from the south pole. »([12] p. 271) ; dans l'article le plus récent, celui de N. Sidoli et J. L. Berggren, on peut lire : « Ptolemy's reader is assumed to have a good grasp of the principles of ancient spherical astronomy and [⋯] also assumed to already have some familiarity with the ancient geometry methods used for producing a plan diagram of the sphere that is mathematically equivalent to that produced by stereographic projection. Ptolemy, however, often proceeds in a way that is unexpected from the perspective of projective geometry. Hence, in reading this text, it is often more useful to situate his methods in the context of ancient solid geometry than in that of projective geometry as it was developed by medieval and early modern mathematicians. Hence in our commentary, we generally describe these aspects of Ptolemy's procedures in terms of conic theory, solid geometry and the methods of ancient analemma. »([8] p. 111).

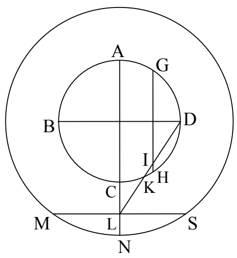
43. Il reste un passage du texte qui va à l'encontre de notre analyse. Au §19, Ptolémée étudie le cercle parallèle à l'écliptique et passant par le point D qu'il a appelé le « pôle caché ». Il affirme que c'est une droite, qu'il place sur la figure, et justifie : « Cela parce que toutes les droites qui sont menées par le point D et qui passent par ce cercle, sont dans un seul plan, qui est le plan du cercle, et l'intersection de ce plan et du plan de l'équateur est la droite MLS, car le plan du méridien, qui contient également la droite AC, est perpendiculaire à chacun de ces deux plans que nous avons mentionnés » (§19, p. 80, *l.* 501-505, *trad.* p. 108).

s'appuie sont des propriétés vraies pour la projection stéréographique, l'idée qu'il a pour représenter la sphère dans le plan est la même qui est à l'origine de la projection stéréographique, mais il a le point du vue de l'astronome et non du géomètre. Il s'intéresse aux avantages que cette manière d'aplanir la sphère procure aux astronomes dans leurs calculs.

On trouve une formulation explicite de la relation géométrique entre sphère et plan, définie mathématiquement, dans un traité de sept siècles postérieur au *Planisphère* de Ptolémée. Cette fois le point de vue projectif ne fait aucun doute, basé sur la définition du cône qui a pour sommet le pôle de la sphère, et pour base le cercle de la sphère considéré, et assuré par le mouvement de la droite qui définit la surface conique.

2 Al-Farghānī

Le traité sur la construction de l'astrolabe écrit par al-Farghānī[44] au IX^{e} siècle, est connu pour contenir la forme la plus ancienne qui nous soit parvenue d'une démonstration de la conservation de la forme des cercles par la projection stéréographique. Mais c'est surtout les principes sur lesquels al-Farghānī va construire son étude qui nous intéressent ici. Dans l'introduction de son ouvrage[45], l'auteur fait état de la cohérence entre les constructions



Le style de ce passage est complètement différent. C'est la seule fois où Ptolémée raisonne à partir de la droite passant par le pôle et un point quelconque du cercle, en adoptant alors le point de vue projectif. Pourquoi Ptolémée ne procède-t-il pas ainsi au §1 pour justifier le tracé des méridiens ? La seule hypothèse que nous pouvons formuler pour le moment est une corruption tardive du texte.

44. L'astronome mathématicien Aḥmad b. Muḥammad b. Kathīr al-Farghānī a travaillé à Bagdad dans la première moitié du IX^{e} siècle. Il est mort après 861.

45. Pour notre commentaire, nous avons utilisé l'édition publiée par Richard Lorch dans [13]. Le texte principal de cette édition ne porte pas de titre. Pourtant, parmi les neuf copies manuscrites utilisées pour l'édition, l'une porte le titre suivant : *al-Kāmil fi ṣanʿat al-asṭurlāb al-shimālī waʾl-janūbī waʾl-ʿilalihimā biʾl-handasa waʾl-ḥisāb* (*L'Art complet de l'astrolabe méridional et de l'astrolabe septentrional et de leur justification par la géométrie et le calcul*, voir [13] p. 388-389) et une autre présente une variante de l'introduction dans

effectuées par les Anciens pour donner à l'astrolabe sa forme et ce qui peut être observé, mais il affirme qu'il n'existe aucune démonstration de son exactitude ni aucune preuve de la cause de cette exactitude. C'est pour y remédier, précise-t-il, qu'il a rédigé ce livre [46].

Au deuxième chapitre de son livre, il montre comment construire tous les cercles de la sphère sur le plan de l'astrolabe, en précisant dès le début du chapitre que ces cercles « prennent la forme de cercles dans le plan de l'astrolabe, excepté les grands cercles qui se coupent dans la sphère céleste aux deux pôles [47], et qui prennent la forme de droites » [48]. Il commence par expliquer quelle partie de la sphère se retrouvera sur l'astrolabe, en supposant que la circonférence du tympan de celui-ci correspond à un cercle de la sphère, parallèle à l'équateur [49]. Alors, tout ce qui est situé entre ce cercle parallèle et le pôle nord, sur la sphère, se retrouvera sur le tympan de l'astrolabe. Il ajoute que les cercles de la sphère, entièrement situés sur cette partie comprise entre le cercle parallèle désigné et le pôle nord, prennent la forme de cercles entiers sur le plan de l'astrolabe, et que les cercles de la sphère découpés par le cercle parallèle désigné sur la sphère, seront découpés dans le plan de l'astrolabe par le cercle qui délimite le tympan.

Pour démontrer cela, il représente géométriquement le cercle méridien $ABCD$ de centre E, le pôle nord D, le pôle sud B, et le diamètre de l'équateur AC. Il se place dans le plan du méridien et ne fait pas intervenir de sphère dans ses démonstrations. Au passage, il définit géométriquement le plan de l'as-

laquelle l'auteur intitule simplement son traité *al-Kāmil* (*Le Complet*, [13] p. 380-381). Ce titre est celui qu'utilisent les successeurs d'al-Farghānī, comme par exemple al-Bīrūnī, dans son ouvrage sur *La projection des constellations et l'aplanissement des sphères*, (voir [14] p. 13 pour le texte arabe et [15] p. 52, pour la traduction anglaise).

46. voir [13] p. 24, *l.* 2 et 22-26.

47. Il désigne ainsi les méridiens, sans doute pour les caractériser géométriquement.

48. Voir [13] p. 40, *l.* 5-7. Nous avons traduit le verbe *tashakkala* employé par al-Farghānī, par *prendre la forme*. Celui-ci n'emploie pas d'expression qui désigne un déplacement, une transformation géométrique, comme ce sera le cas au siècle suivant. Il emploie le même verbe pour parler des figures qui prennent la forme de cercles sur la sphère et celles qui leur sont associées par les surfaces coniques dans le plan de l'astrolabe, et qui prennent également la forme de cercles (ou de droites dans certains cas). Après lui, le verbe *saṭṭaḥa* désignera l'action de projeter, et le nom verbal *tasṭīḥ*, la projection. C'est ce mot qui donnera l'expression *ʿilm al-tasṭīḥ* pour désigner la nouvelle « science des projections »(voir [16] notamment p. 287 et 293 *sqq*).

49. Ce passage, situé au début du chapitre 2, s'expliquera par la démonstration géométrique qui va suivre. Elle nous fera comprendre que c'est à partir des limites de la représentation sur le plan de l'astrolabe, la circonférence du tympan (la plaque sur laquelle on grave les cercles ou arcs de cercles), qu'il détermine le cercle de la sphère, parallèle à l'équateur, qui correspond à ces limites. Nous insistons sur le fait qu'al-Farghānī n'a pas de terminologie établie pour désigner la relation entre un cercle de la sphère et le cercle tracé sur l'astrolabe, son projeté.

trolabe : c'est le cercle de centre D, de rayon DH tracé perpendiculairement au cercle $ABCD$[50]. Al-Farghānī montre d'abord que les méridiens prennent

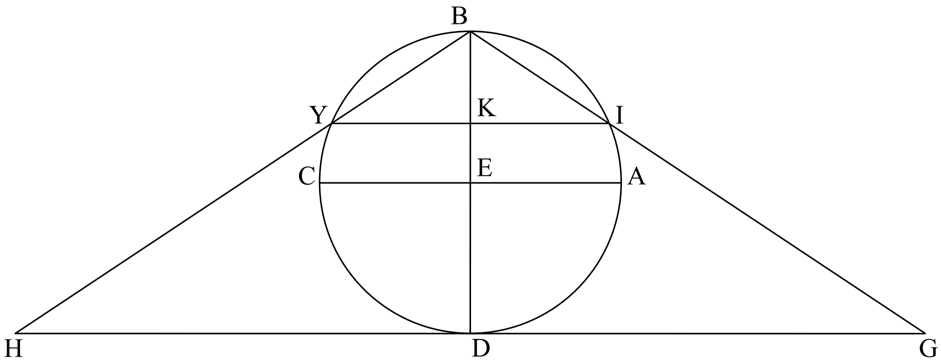


Figure 6

la forme de droites qui passent toutes par le point D dans le plan de l'astrolabe, résultat qu'il avait annoncé précédemment. Pour cela, il applique deux raisonnements différents pour construire le méridien $ABCD$ dans le plan de l'astrolabe. Le premier repose sur le principe de la définition de la surface conique[51] à partir du point B et du cercle $ABCD$. C'est donc le mouvement de la droite BD, dont le point B est fixe et dont le point D décrit en fait le cercle $ABCD$, qui lui permet de conclure que le prolongement de cette droite jusqu'au plan de l'astrolabe décrit la droite HG. Le second, plus classique, repose sur l'intersection du plan $ABCD$ et du plan de l'astrolabe. Dans les deux cas, il obtient pour ligne méridienne la droite GH.
Ensuite, il détermine la droite IY, diamètre d'un cercle parallèle à l'équateur, à partir des points G et H, en menant les droites BG et BH. On comprend que GH, de milieu D, est un diamètre du tympan de l'astrolabe, dont la

50. Il n'écrit pas que c'est le plan tangent à la sphère au pôle nord.

51. Le cône de sommet B et de base $ABCD$ est dégénéré, c'est pourquoi al-Farghānī n'emploie évidemment pas le mot de cône ici ; nous le faisons pour traduire son expression du mouvement de la droite qui tourne autour du cercle, à partir d'un point fixe. Ce principe, qui prendra tout son sens dans la suite du texte, est exactement celui sur lequel repose la définition de la surface conique que l'on trouve au tout début du livre I des Coniques d'Apollonius, ce dernier précisant bien évidemment que le cercle et le point fixe ne se trouvent pas dans un même plan (voir [17] p. 252-255, pour la version arabe et sa traduction, et [18] p. 6-7, pour la version grecque et sa traduction). Al-Farghānī ne cite pas les Coniques d'Apollonius, mais il est très possible qu'il ait pu lire des passages du texte dont la traduction était menée à Bagdad à son époque (voir [2] p. 514).

circonférence est donnée. Il montre ensuite que si l'on prolonge la surface du cône de sommet B et de base le cercle de diamètre IY jusqu'au plan de l'astrolabe, alors elle le coupe selon un cercle de centre D, qui n'est autre que le cercle entourant le tympan, dont il est parti. Il ajoute un raisonnement pour démontrer cela, en reprenant le mouvement de la droite BG suivant le contour du cercle de diamètre IY, le point B étant fixe. On voit ici le rôle essentiel du cône inscrit dans la sphère, de sommet le pôle sud B et de base un cercle situé sur la surface de cette sphère, cône sur lequel repose sa conceptualisation géométrique de la projection et que l'on trouve dans les données de la proposition fondamentale qu'il énonce et démontre au chapitre 1 et que nous examinerons plus bas. La démonstration s'appuie, comme précédemment, sur le mouvement de la droite qui engendre la surface conique.
Il emploie le même raisonnement, exactement, pour démontrer comment tracer l'écliptique dans le plan de l'astrolabe, à partir de la donnée de son inclinaison sur l'équateur qu'il reporte selon l'arc $\widehat{AI}$. Il mène IK le diamètre de

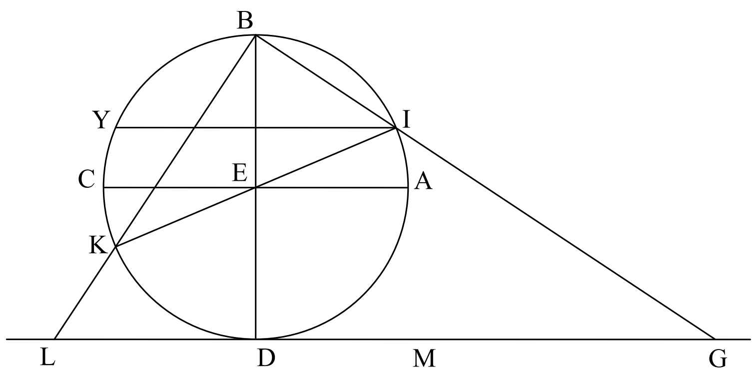


Figure 7

l'écliptique, puis les droites BK et BI qu'il prolonge jusqu'à la droite GH, et démontre que l'écliptique prend forme selon le cercle de diamètre GL sur le tympan, en introduisant le cône de sommet B et de base l'écliptique et en s'appuyant sur les principes du chapitre 1. Il ajoute que le centre de ce cercle, M, milieu de GL, n'est pas au centre D du tympan, car l'écliptique (sur la sphère) n'est pas parallèle au tympan[52].
Dans la suite du chapitre 2, al-Farghānī détermine géométriquement, dans

52. Ce résultat découle également des principes du chapitre 1. Dans sa démonstration, l'auteur ne renvoie pas explicitement au chapitre précédent.

le plan de l'astrolabe, le cercle de l'horizon d'un lieu de la Terre, caractérisé par sa latitude, puis les cercles parallèles à cet horizon. Il démontre que tous ces cercles ont leur centre sur la ligne méridienne, et après avoir placé sur cette ligne le point correspondant au zénith, c'est-à-dire à l'un des pôles de l'horizon, il montre que plus le cercle parallèle à l'horizon est éloigné du zénith, plus son centre sera éloigné du point du zénith sur le tympan, par un raisonnement géométrique détaillé. Il poursuit par l'étude géométrique des autres cercles qui apparaissent sur le tympan de l'astrolabe : les cercles azimuts pour un horizon et les cercles qui divisent inégalement les ascensions des signes du zodiaque. Nous insistons sur le fait que ce chapitre 2, consacré à la détermination de tous les cercles que l'on trace sur le plan de l'astrolabe, repose sur des démonstrations géométriques [53]. De plus, tout au long de ce chapitre, l'auteur utilise la propriété fondamentale selon laquelle un cercle de la sphère prend la forme d'un cercle (ou d'une droite) sur le plan de l'astrolabe. Cette propriété est précisément démontrée dans le premier chapitre de son ouvrage, où il expose, sous la forme d'un lemme et de deux théorèmes, les principes de pure géométrie, sans aucune référence à l'astrolabe [54].

Au chapitre 1, al-Farghānī démontre tout d'abord qu'étant donnés une corde quelconque BH d'un cercle $ABCD$, et les points I et K, intersections des droites CB et CH avec la droite EG tangente au cercle en A, diamétralement opposé à C, les triangles CKI et CHB sont semblables. En effet, les triangles ABL et LBC sont semblables puisque BL est perpendiculaire à AQ [55], donc les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{LBC}$ sont égaux. On en déduit que l'angle $\widehat{AKC}$ est égal à l'angle $\widehat{BAC}$, lui-même égal à l'angle $\widehat{BHC}$. Possédant un angle commun en C, les deux triangles CKI et CHB sont donc semblables. La deuxième proposition du premier chapitre concerne précisément la propriété fondamentale de la projection stéréographique. Étant donné un cône de sommet A et de base un cercle BCD, inscrit dans une sphère $ABGHE$, si l'on trace le diamètre AG de la sphère et le plan tangent IQY, et si la surface du cône est prolongée jusqu'à ce plan, alors leur intersection sera le cercle $KLIN$. Pour démontrer ce résultat, al-Farghānī considère la ligne $KLIN$, intersection de la surface du cône et du plan. Il construit le milieu M du

53. Il n'effectue pas le tracé de ces cercles ici, il y consacrera la suite de son ouvrage, en calculant la position des centres et les rayons des différents cercles. Al-Farghānī sépare sciemment l'étude géométrique de l'astrolabe du calcul permettant sa construction effective.

54. A l'exception près du titre du chapitre : *Introduction des propositions géométriques par lesquelles on déduit la cause de la forme de l'astrolabe* (voir [13] p. 26).

55. Al-Farghānī emploie pour cela un raisonnement semblable à celui d'Euclide dans la proposition VI, 8 des *Éléments*.

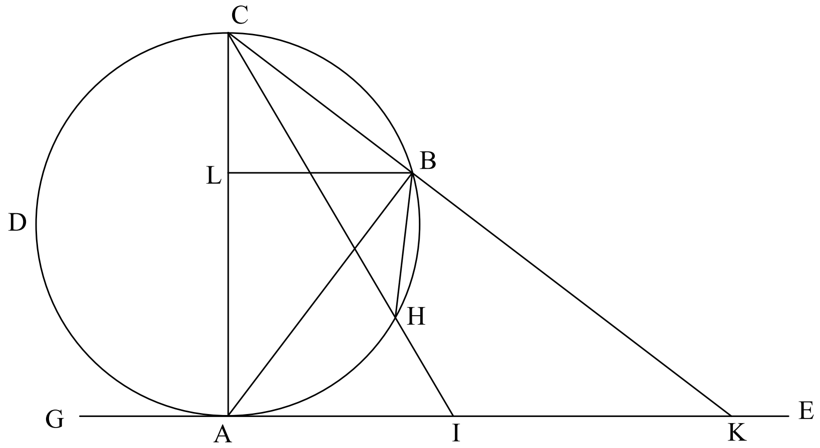


Figure 8

segment IK et trace la droite ML depuis un point quelconque L de cette ligne $KLIN$. Il veut prouver que $ML = KM$. Il considère le plan parallèle au cercle BCD, coupant la surface du cône et le plan $KLIN$ en L. La ligne SLO, intersection de ce plan et du cône est un cercle [56]. La droite SO, diamètre du cercle SLO [57], est l'intersection de ce cercle et du plan AGI ; elle coupe la droite KI au point F et LF est perpendiculaire au plan AGI [58]. Alors les deux triangles SFK et FIO sont semblables [59]. Donc $KF \times FI = SF \times FO$, mais $SF \times FO = LF^2$, puisque la droite LF est perpendiculaire à la droite

56. Al-Farghānī renvoie au livre sur la sphère de Muḥammad ibn Mūsā, l'aîné des Banū Mūsā. L'ouvrage en question s'intitule *Pour connaître l'aire des figures planes et sphériques*, et la proposition utilisée ici est la proposition 10 (voir [19] p. 96-99).

57. Sur la figure 8, ce n'est pas le cas. Nous avons préféré reproduire la figure telle qu'elle se présente dans l'édition "avec son erreur". L'auteur représente les deux cercles $KLIN$ et SLO dans le plan de la figure, c'est-à-dire le plan AGI. On pourrait penser qu'il procède à deux rabattements, le premier autour de (KI) et le second autour de (SO), ce qui aurait pour effet de dédoubler le point L. Ainsi, les deux cercles rabattus ne devraient pas se couper en L. En fait, la figure est une sorte de représentation en perspective dont les règles de déformation des cercles ne seraient pas suivies, elle n'est qu'un support de la réflexion (voir [13] p. 31). Nous donnons ci-dessous une représentation en perspective (voir Figure 9 bis).

58. En effet, la droite LF est l'intersection de deux plans perpendiculaires au plan AGI, les plans des deux cercles $KLIN$ et SLO.

59. En appliquant le résultat de la première proposition, il montre que l'angle $\widehat{ASO} = \widehat{GIA}$, puisqu'ils sont tous deux égaux à l'angle $\widehat{ADB}$. Mais $\widehat{KFS} = \widehat{IFO}$, et il reste $\widehat{IOF} = \widehat{SKF}$, donc les deux triangles SFK et FIO sont semblables.

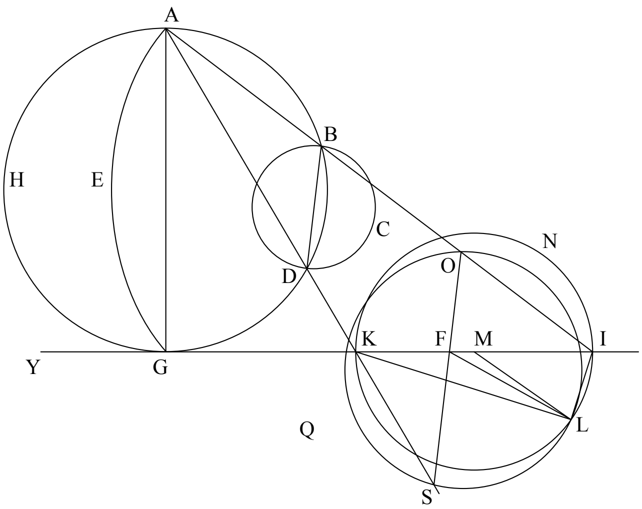


Figure 9

SO et que SO est le diamètre du cercle SLO. Donc $KF \times FI = LF^2$. Donc il est clair que l'angle $\widehat{KLI}$ est droit. Mais le diamètre KI a été coupé en deux moitiés au point M et on a mené du point M la droite ML, donc la droite ML est égale à chacune des deux droites KM, MI. Par cette même voie, il est clair que toute droite menée du point M à n'importe quel endroit de la ligne $KLIN$ est égale à chacune des deux droites KM, MI. Donc la ligne $KLIN$ est la circonférence d'un cercle de diamètre KI et de centre M [60].

Pour clore ce chapitre, al-Farghānī démontre que le sommet du cône, le centre de sa base et le centre de l'intersection avec le plan tangent à la sphère, ne sont pas alignés. Il effectue cela en précisant la position du centre de ce dernier cercle. En changeant les notations et appelant D le centre du cercle de diamètre BC, base du cône, le centre du cercle de diamètre KI, que l'on obtient dans le plan tangent est le point L tel que $\widehat{LAI} = \widehat{DAC}$ [61]. Al-Farghānī a volontairement isolé et démontré au début de son traité, les propositions géo-

60. Le rapprochement entre cette démonstration et la proposition I, 5 des *Coniques* d'Apollonius, qui sera la référence explicite pour les successeurs d'al-Farghānī, s'impose. L'auteur, dont la proposition peut apparaître comme un cas d'application de la proposition I, 5 d'Apollonius à un cône inscrit dans une sphère, reprend le même cheminement que ce dernier. Mais il ne renvoie pas à Apollonius. Cela suffit-il à dire qu'il n'a pas lu *Les Coniques* ? Nous pensons au contraire qu'il a pu avoir accès au texte du géomètre grec, même sous une forme incomplète. En effet, al-Farghānī était actif à Bagdad, au moment où Muḥammad ibn Mūsā s'occupait, avec ses frères, de la traduction du traité d'Apollonius

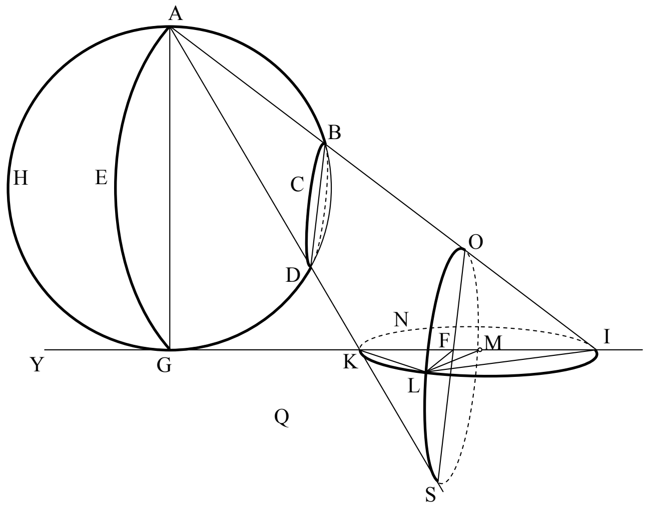


Figure 9 bis

métriques sur lesquelles repose son étude de la construction des cercles tracés sur l'astrolabe. C'est la première fois, il le dit, que l'on démontre cette propriété fondamentale des cercles. Les objets qu'il utilise relèvent du domaine des coniques [62], mais il se place dans un contexte clairement projectif, caractérisé par l'usage qu'il fait de la définition d'une surface conique, telle qu'on la trouve dans l'ouvrage d'Apollonius [63]. L'introduction du cône et l'usage qu'il fait du mouvement de la droite qui définit la surface conique marquent nettement la rupture avec la méthode de Ptolémée que nous avons commentée plus haut. Les principes employés et les objets mathématiques introduits pour établir la relation entre sphère et plan, diffèrent totalement [64]. Même

(voir [20] p. 1-2 et 12-13, ainsi que [17] p. 25-30).

61. Il montre, pour cela, que les triangles ALI et ADC sont semblables, et reprend le premier résultat de ce chapitre, à savoir que les triangles AKI et ABC sont également semblables. Puisque DC est la moitié de BC, alors LI est la moitié de KI, donc L est le centre du cercle KHI. Or la droite AD rencontre la droite GI en E, et les points E et L sont distincts car l'arc $\widehat{CM}$ est plus petit que l'arc $\widehat{MB}$.

62. Dans le commentaire qui précède, nous avons en particulier souligné l'importance du cône inscrit dans la sphère, qui lui sert à traduire les problèmes du chapitre 2 dans les termes de la proposition fondamentale du chapitre 1.

63. L'impact que le traité des *Coniques* d'Apollonius a pu avoir sur le travail d'al-Farghānī ne fait pas de doute. Il est également raisonnable de supposer qu'il était impliqué dans les réflexions que la réception de l'ouvrage a suscitées au sein de la Maison de la Sagesse au milieu du IX^{e} siècle (voir [2] p. 512-517, les idées de cette partie sont reprises de [16]).

64. En revanche, la comparaison attentive des deux textes révèle une similitude frap-

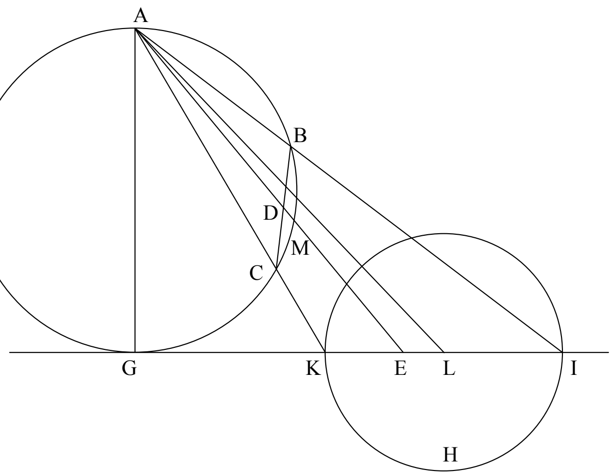


Figure 10

s'il n'introduit pas de nouveaux termes propres à fonder un nouveau chapitre sur les projections, la manière dont il sépare nettement les deux domaines de la géométrie et de l'astronomie mathématique, en appliquant la première à la seconde, marque l'apparition d'une nouvelle théorie en tant que telle, construite solidement sur ses bases[65]. Cette nouvelle théorie trouvera une

pante de leurs structures et des questions traitées. Même si le texte d'al-Farghānī est beaucoup plus homogène et mieux organisé, donc plus simple à comprendre, que celui du *Planisphère*, il suit un plan très proche de celui-ci. Après avoir posé les principes géométriques, al-Farghānī délimite le tympan sur lequel on doit tracer les cercles de la sphère, en déterminant le cercle extérieur, comme le fait Ptolémée. Il place les méridiens et les cercles parallèles à l'équateur, puis l'écliptique. Pour ce dernier, il reporte l'arc de déclinaison sur le cercle du méridien (voir *supra* p. 20). On a vu l'importance de ce procédé chez Ptolémée (voir *supra* p. 10). Au chapitre 3, al-Farghānī calcule les rayons des cercles parallèles à l'équateur, puis le rayon de l'écliptique et la position de son centre par le calcul de la distance qui le sépare du centre de l'équateur, questions que Ptolémée a traité dans son livre (§4 à 6), puis ceux des cercles parallèles à l'horizon d'un lieu de latitude 30° (Ptolémée choisit la latitude de Rhodes, 36°). Ainsi de suite, les calculs des ascensions des signes et des lignes d'heures. Ce dernier problème n'apparaît pas dans la version que nous avons lue du *Planisphère*, mais O. Neugebauer suppose que cette version est incomplète, car Ptolémée a effectivement étudié cette question d'après un témoignage de Philopon (voir [5] p. 871-872). Bien sûr tous ces problèmes étaient classiques dans le domaine des études sur l'astrolabe, mais la question des sources d'al-Farghānī se pose clairement et n'a pas encore été traitée, à notre connaissance.

65. Comme nous l'avons dit (voir *supra* note 48, p. 18), al-Farghānī ne parle pas de projection, n'emploie pas le mot qui sera reconnu ensuite, *al-tasṭīḥ*. Mais l'usage systématique qu'il fait du mouvement d'une droite passant par un point fixe et décrivant la circonférence d'un cercle pour engendrer une surface conique marque sa volonté de traiter

ampleur sans précédent un siècle plus tard.

3 Al-Qūhī et Ibn Sahl

Dans le *Traité sur l'art de l'astrolabe par la démonstration*, rédigé par Abū Sahl al-Qūhī dans la seconde moitié du X^{e} siècle, on trouve une théorie générale de la projection locale de la sphère, la première dans l'histoire. Ce traité, composé en deux livres, a pour objet la projection de la sphère, et rompt avec toutes les études antérieures consacrées à l'astrolabe. Si son auteur ne s'intéresse pas à l'histoire des recherches sur l'astrolabe, s'il ne cite aucun des auteurs d'ouvrages sur ce sujet, c'est parce que son projet est bien différent. S'il présente en introduction les principes de l'instrument, son étude ne porte pas sur l'astrolabe en tant qu'instrument d'astronomie. Dans cet ouvrage, complété de manière décisive par le commentaire qu'en a rédigé Ibn Sahl à la même époque [66], la projection stéréographique apparaît comme un cas faisant partie d'une théorie générale.
Au premier chapitre de son traité, al-Qūhī expose une théorie de la projection d'une sphère, dans toute sa généralité et cet exposé sera complété en détail par Ibn Sahl. Al-Qūhī introduit tous les types de projections coniques et cylindriques, sur tous les types de surfaces compatibles avec le mouvement de l'astrolabe [67] :
« La sphère se projette sur des surfaces de genres différents à partir de positions diverses, mais l'une des deux surfaces ne se meut sur l'autre par le mouvement de la sphère que si elle est une des surfaces coniques ou cylindriques ou une de leurs analogues - qui ont un axe et dont l'axe est celui de la sphère - ou si elle est une surface plane à laquelle l'axe de la sphère est perpendiculaire. Dans le cas des surfaces coniques ou cylindriques, les projections des cercles de la sphère sont des sections communes à des surfaces, l'une conique et l'autre cylindrique, ou à deux surfaces coniques ou à deux surfaces cylindriques, car la projection de la sphère se sépare en deux : l'une cylindrique et l'autre conique » [68].
Auparavant, al-Qūhī a expliqué que l'astrolabe est formé de deux surfaces, l'une fixe, le tympan, et l'autre mobile, l'araignée sur laquelle on place l'éclip-

géométriquement et rigoureusement de la projection, qui devient ici un concept même s'il ne peut pas encore la nommer, même si elle n'est pas encore constituée comme objet.

66. Voir l'édition, la traduction et le commentaire de ces deux textes par R. Rashed, dans [3] p. CIII-CXXII, p. 65-82 et p. 190-230, ainsi qu'un commentaire complémentaire dans [21] p. 29-76.

67. Cela montre une certaine dépendance de l'exposé à l'égard de l'instrument, mais ne réduit pas la démarche de généralité qu'a suivie son auteur.

68. Voir [3] p. 191, *l.* 13-19.

tique et les astres que l'on peut observer. Le mouvement de l'une sur l'autre représente le mouvement de rotation de la sphère céleste, vu par un observateur. Pour que la projection soit compatible avec l'instrument, il faut que les deux surfaces sur lesquelles on projette la sphère, puisse tourner l'une sur l'autre. Cette condition porte à la fois sur la nature des surfaces, comme on vient de le voir, mais aussi sur la nature de la projection. Elle amène l'auteur à ne conserver que certaines projections : les projections cylindriques d'axe parallèle à celui de la sphère, ou coniques dont le sommet est sur l'axe. Al-Qūhī précise la nature des projetés des cercles de la sphère pour les projections retenues : « Si la projection de la sphère est cylindrique d'axe parallèle à celui de la sphère, ou conique dont le sommet est sur l'axe, sans être sur un pôle de la sphère, alors [...] les cercles de la sphère, autres que les cercles auxquels l'axe de la sphère est perpendiculaire, ne se projettent pas [...] comme des cercles mais comme des sections de cône » [69] ; cela si la surface sur laquelle se fait la projection est un plan. Il poursuit plus loin : « si la projection est conique dont le sommet est sur un pôle de la sphère et que la projection se fait sur un plan auquel l'axe de la sphère est perpendiculaire, [...] les cercles de la sphère sur cette surface ne seront pas des sections coniques, mais bien des cercles ou des droites si la projection est à partir des cercles qui passent par ce même pôle » [70].
Ainsi, la projection stéréographique est définie comme un cas particulier des projections coniques de la sphère, celle qui conserve la forme des cercles de la sphère. Toute la suite de l'ouvrage sera consacrée à l'étude complète de cette transformation.

La première proposition que l'auteur démontre, concerne la propriété qu'il vient d'énoncer, la propriété fondamentale de la projection stéréographique, qui occupe la place première, comme dans l'ouvrage d'al-Farghānī. Il considère un cercle qui passe par l'axe AD de la sphère, le cercle $ABCD$ et veut projeter le cercle de diamètre BC et dont le pôle est sur le cercle $ABCD$ [71]. Il définit le cône de sommet A et de base le cercle de diamètre BC, et montre que l'intersection du cône avec le plan P, perpendiculaire à l'axe AD mais placé où l'on veut, est le cercle de diamètre EG. Sa démonstration repose sur la proposition I, 5 des *Coniques* d'Apollonius [72], qu'al-Qūhī cite explici-

69. Voir [3] p. 192, *l.* 8-13.
70. Voir [3] p. 192, *l.* 17 - p. 193, *l.* 2.
71. Le cercle $ABCD$ est le méridien du cercle de diamètre BC.
72. Voir [17] p. 270-275, pour la version arabe et sa traduction, et [18] p. 20-25, pour la version grecque et sa traduction. On trouve la même référence à Apollonius, dans un autre texte que nous avons évoqué plus haut, consacré à l'astrolabe et attribué à Ibn Sinān. Ibrāhīm Ibn Sinān, mort en 946, est le petit-fils de Thābit ibn Qurra (voir sa notice

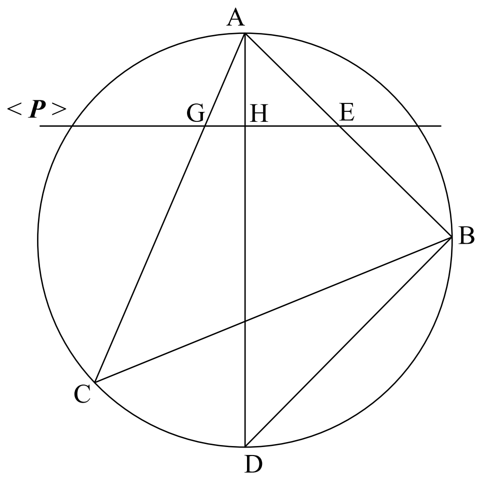


Figure 11

tement. Il montre la similitude des triangles AGE et ABC, en commençant par les triangles rectangles AEH et ADB. Puisque ces deux derniers ont un angle commun en A, ils sont semblables donc les angles $\widehat{AEH}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux. Or $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$, donc $\widehat{AEG} = \widehat{ACB}$. Puisque par ailleurs les triangles AGE et ABC ont un angle commun en A, ils sont semblables. Ensuite, al-Qūhī montre que la configuration des plans est la même que dans la proposition des *Coniques* : le plan du triangle ABC, le triangle passant par

biographique et son autobiographie dans [22] p. 1-19). A. Saʿīdan a publié en arabe ce texte intitulé : “Risāla Ibrāhīm Ibn Sinān ilā Abū Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā’īl fī al-Asṭurlāb”, titre que l’on peut traduire par : *Épitre d’Ibrāhīm Ibn Sinān à Abū Yūsuf al-Ḥasan ibn Isrā’īl sur l’astrolabe*, voir [23] p. 309-317. La question de l’authenticité de ce texte se pose car il n’est signalé par aucun biobibliographe ancien (voir [19] p. 677). Ce texte, que l’on ne peut situer avec certitude, contient une citation du début du *Planisphère* de Ptolémée (voir [23] p. 312). Si l’on compare ce passage à celui du texte de Ptolémée tel qu’édité par N. Sidoli et J. L. Berggren ([8] p. 55), les différences sont nombreuses, et il est difficile de conclure. Certaines phrases sont identiques, d’autres ont le même sens, mais écrites différemment et ordonnées différemment, laissant supposer qu’il pourrait s’agir d’une autre version du même texte. P. Kunitzsch explique ces différences par le fait que l’auteur cite Ptolémée de mémoire (voir [11] p. 152). L’auteur de ce texte donne également les noms de Pappus, qui a rédigé un commentaire au *Planisphère* (*Ibid.*), et al-Farghānī. Il démontre la propriété selon laquelle les cercles de la sphère sont projetés selon des cercles sur un plan perpendiculaire à l’axe de la sphère, ici tangent à la sphère comme al-Farghānī, et renvoie explicitement au livre I des Coniques d’Apollonius (voir [23] p. 312). En fait, sa démonstration est moins générale que celle d’al-Qūhī, car il la rédige dans le cas de l’écliptique, qu’il généralise ensuite en se contentant d’affirmer que ce qui vient d’être fait pour l’écliptique, se fait de même pour les autres cercles.

l'axe du cône, est perpendiculaire au plan de sa base et au plan sécant, P. Cela lui permet d'appliquer le résultat de la proposition d'Apollonius. Donc le projeté du cercle de diamètre BC sur la sphère est le cercle de diamètre EG dans le plan P. On retrouve dans cette démonstration les mêmes arguments que dans celle d'al-Farghānī, mais elle est exposée de manière beaucoup plus concise et elle est surtout plus générale notamment dans l'emploi d'un plan de projection quelconque.

Il consacre ensuite le chapitre 2 de son traité, à la définition de : « la terminologie nécessaire pour construire l'astrolabe » [73]. En particulier, il définit le terme « homologue », *naẓīr*, que l'on a déjà rencontré dans la version arabe du *Planisphère* de Ptolémée [74]. Mais ici, ce mot acquiert un sens mathématique précis qui désigne un cercle ou un point de la sphère par rapport à son projeté [75]. Par ailleurs, le mot *projeté*, ou *projection* (*tasṭīḥ*), prend également un sens mathématique, par l'usage systématique que l'auteur fera de lui. Ainsi la relation entre un élément de la sphère et son image dans le plan, est désignée par deux termes différents, employés systématiquement dans les mêmes situations, avec un sens précis, qui permettent de distinguer deux sens réciproques dans cette relation. Ce fait est tout à fait nouveau, et ne se trouve dans aucun autre texte consulté jusqu'à maintenant.
La suite de son étude est purement géométrique ; il termine le livre I de son traité par l'étude du tracé des cercles parallèles et des cercles perpendiculaires d'un horizon, c'est-à-dire du tracé des *muqanṭarāt* et des azimuts. Mais ce qui fait de cet ouvrage un témoin incontournable de l'histoire de la projection stéréographique, en dehors des faits que nous venons d'analyser, apparaît au livre II, dans lequel la projection stéréographique devient un objet mathématique à part entière. Al-Qūhī étudie la projection en tant que transformation géométrique. C'est même une étude "réciproque" de la projection, en quelque sorte, qui est entreprise.

Les problèmes du second livre sont destinés à retrouver les éléments qui définissent la sphère projetée, son centre et son rayon, à partir de la donnée

73. Voir [3] p. 194, *l.* 13.
74. *cf. supra* p. 6.
75. Al-Qūhī définit au début du chapitre : « les cercles, les lignes et les points qui sont sur la sphère, sont appelés les homologues (*naẓāʾir*) des cercles, lignes et points qui sont sur cette surface [de l'astrolabe], les uns par rapport aux autres. »(voir [3] p. 194, *l.* 14-16). On peut relever qu'il emploie ce terme "dans le sens inverse" de Ptolémée, l'objet de la sphère est, ici, l'homologue de son projeté sur le plan. Notons tout de même une exception, car une seule fois, il désigne par homologues les projetés de trois points (voir [21] note 114 p. 40).

du plan et de trois éléments particuliers qu'il va considérer de manière systématique parmi les données possibles de l'ensemble sphère-plan. C'est ainsi dans les trois chapitres conservés : le 1, le 2 et le 6, et on peut supposer qu'il en était de même dans les chapitres perdus [76]. La structure des chapitres 1 et 2 est absolument similaire. Tous les deux comportent six problèmes dont al-Qūhī rédige la synthèse. Donnons pour exemple le chapitre 1 du second livre, où sont regroupés les problèmes pour lesquels l'auteur se donne un point image dans le plan de l'astrolabe et la distance angulaire de son homologue au pôle de la sphère [77]. La donnée de la distance angulaire de cet homologue au pôle de la sphère, revient à donner sa latitude, donc à le situer sur un cercle parallèle à l'équateur de la sphère. La troisième donnée est alors prise, successivement au cours des six problèmes, parmi les suivantes :

1. le pôle de la sphère,
2. le centre de la sphère, qui est aussi celui de l'astrolabe,
3. le rayon de la sphère,
4. la distance, sur le plan de l'astrolabe, du pôle à un point dont l'homologue est à une distance angulaire connue de ce pôle,
5. la distance, sur le plan de l'astrolabe, du centre de la sphère à un point dont l'homologue est à une distance angulaire connue du pôle de la sphère,
6. un autre point image et la distance angulaire de son homologue au pôle de la sphère [78].

Bien que se plaçant dans le cadre de l'astrolabe avec cet ouvrage, al-Qūhī étudie en fait, tout au long de son traité, la structure mathématique sous-jacente de l'instrument, c'est-à-dire la projection stéréographique d'une sphère, définie par son centre et son rayon, sur son plan équatorial. La question de la conception de la projection stéréographique ne se pose plus, car sous la plume d'al-Qūhī, elle est devenue l'objet, à part entière, d'une théorie mathématique.

76. Le livre II présente une importante lacune qui nous prive des chapitres 3, 4 et 5 (voir [3] p. CXXXVIII).
77. On peut comprendre ici le sens que l'auteur a donné au mot *homologue*.
78. Voir le détail de l'analyse de tous ces problèmes dans [21] p. 46-71.

Références

[1] R. D'Hollander, *L'Astrolabe - Histoire, théorie et pratique.* Paris : Institut Océanographique, 1999.

[2] R. Rashed and P. Abgrall, "Les traditions des coniques et le début de la recherche sur les projections," in *D'Al-Khwārizmī à Descartes - Études sur l'histoire des mathématiques classiques* (R. Rashed, ed.), pp. 489–534, Paris : Hermann, 2011.

[3] R. Rashed, *Géométrie et Dioptrique au X^e^siècle - Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham.* Paris : Les Belles Lettres, 1993.

[4] O. Neugebauer, "The early history of the astrolabe," *Isis*, vol. 40, no. 3, pp. 240–256, 1949.

[5] O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, vol. II. Berlin : Springer Verlag, 1975.

[6] D. R. Dicks, *The Geographical Fragments of Hipparchus.* Londres : The Athlone Press, 1960.

[7] C. Anagnostakis, *The Arabic Version of Ptolemy's Planisphaerium.* PhD thesis, Yale University, 1984.

[8] N. Sidoli and J. L. Berggren, "The arabic version of ptolemy's *Planisphere* or *Flattening the Surface of the Sphere* : Text, translation, commentary," *SCIAMVS*, vol. 8, pp. 37–139, 2007.

[9] P. Kunitzsch, "Fragments of ptolemy's *Planisphaerium* in an early latin translation," *Centaurus*, vol. 36, pp. 97–101, 1993.

[10] P. Kunitzsch, "The second arabic manuscript of ptolemy's *Planisphaerium*," *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 9, pp. 83–89, 1994.

[11] P. Kunitzsch, "The role of al-andalus in the transmission of ptolemy's *Planisphaerium* and *Almagest*," *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften*, vol. 10, pp. 147–155, 1995.

[12] R. Lorch, "Ptolemy and maslama on the transformation of circles into circles in stereographic projection," *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 49, no. 3, pp. 271–284, 1995.

[13] Al-Farghānī, *On The Astrolabe,* Arabic Text Edited with Translation and Commentary by R. Lorch. Stuttgart : Franz Steiner Verlag, 2005.

[14] A. Sa'ī dān, "Kitāb tasṭīḥ al-ṣuwar wa tabṭīḥ al-kuwar li-abī'l-rayḥān al-bīrūnī," *Dirāsāt al-'ulūm al-ṭabī'iyya*, vol. 4, no. 1&2, pp. 7–22, 1974-77.

[15] J. L. Berggren, "Al-bīrūnī, on plane maps of the sphere," *Journal for the Histroy of Arabic Sciences*, vol. 6, no. 1&2, pp. 47–112, 1982.

[16] R. Rashed, "Les mathématiques de la terre," in *Ratio et superstitio,* Essays in Honor of Graziella Federici Vescovini (G. Marchetti, O. Rignani, and V. Sorge, eds.), vol. 24 of *Textes et études du Moyen Age*, pp. 285–318, 2003.

[17] Apollonius, *Coniques,* R. Rashed (*dir.*), Commentaire historique et mathématique, Livre I : édition et traduction du texte arabe par R. Rashed, vol. 1.1. Berlin : Walter de Gruyter, 2008.

[18] Apollonius, *Coniques,* R. Rashed (*dir.*), Livre I : édition et traduction du texte grec par M. Decorps-Foulquier et M. Federspiel, vol. 1.2. Berlin : Walter de Gruyter, 2008.

[19] R. Rashed, *Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle - Fondateurs et commentateurs*, vol. I. Londres : Fondation Al-Furqan, 1996.

[20] R. Rashed, *Les Mathématiques Infinitésimales du IXe au XIe siècle - Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, vol. III. Londres : Fondation Al-Furqan, 2000.

[21] P. Abgrall, "La géométrie de l'astrolabe au xe siècle," *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 10, no. 1, pp. 29–76, 2000.

[22] R. Rashed and H. Bellosta, *Ibrāhīm Ibn Sinān - Logique et géométrie au Xe siècle.* Leiden : Brill, 2000.

[23] A. Saʿī dān, *Rasāʾil Ibn Sinān.* 1983.