



HAL
open science

ERNESTO CESARO E L'ORIGINE DELLA MODERNA TEORIA DELLE SERIE DIVERGENTI

Giovanni Ferraro

► **To cite this version:**

Giovanni Ferraro. ERNESTO CESARO E L'ORIGINE DELLA MODERNA TEORIA DELLE SERIE DIVERGENTI. 2012. halshs-00660065

HAL Id: halshs-00660065

<https://shs.hal.science/halshs-00660065>

Preprint submitted on 17 Jan 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ERNESTO CESARO E L'ORIGINE DELLA MODERNA TEORIA DELLE SERIE DIVERGENTI

Giovanni Ferraro

Via Nazionale, 38 80021 Afragola (Napoli)

1. Introduzione

La moderna teoria delle serie divergenti¹ nasce nel 1890 con la pubblicazione da parte di Ernesto Cesàro,² giovane ma già affermato matematico, di *Sur la multiplication des séries* nel quale viene definita quella che oggi è nota C-sommabilità. Tale nozione è per Cesàro il frutto di una lunga evoluzione che lo conduce dalle ceneri di un vecchio formalismo di gusto settecentesco verso una nuova concezione che è come una tappa significativa del processo di sviluppo verso il nuovo formalismo del Novecento e verso la matematica delle strutture.

Nel sec. XVIII era diffusa una distinzione tra un modo formale e un modo numerico di intendere l'uguaglianza di espressioni analitiche. Nella concezione formalista l'uguaglianza $f(x) = \sum f_n(x)$ indica che $\sum f_n(x)$ è derivata da un'espressione analitica $f(x)$ mediante regole che rappresentano sostanzialmente un'estensione infinitaria delle regole valida per espressioni finite. Nella concezione numerica $f(x) = \sum f_n(x)$ indica un'uguaglianza tra entità numeriche, ossia sostituendo alla variabile un valore numerico qualsiasi i due membri danno luogo allo stesso numero. Tale distinzione, base della famosa definizione di somma di una serie data Euler nel *De seriebus divergentibus*, è chiaramente esplicitata da Daniel

¹ In questo articolo chiamerò divergenti tutte le serie non convergenti.

² Nasce a Torre Annunziata (Na) nel 1859. La famiglia in origine benestante ha gravi difficoltà economiche che assillano Cesàro per tutto la vita. Si reca a studiare a Liegi, anche per abbreviare il lungo corso di studi necessario in Italia per iscriversi all'università. In Belgio finisce con il dedicarsi quasi esclusivamente alla ricerca, sotto l'influenza di Catalan e del suo ambiente. Tornato in Italia nel 1883 egli si iscrive all'università di Roma. Nel 1886 è nominato professore a Palermo e nel 1891 a Napoli. Muore in tragiche circostanze nel 1906, poco prima di trasferirsi a Bologna. Molti dettagli biografici si possono avere dalla lettura delle *Lettere di Catalan a Cesàro*. Per ulteriori notizie si veda Perna [1907].

Bernoulli [1771], il quale parla di somme false *in concreto* (ossia numericamente) ma tuttavia vere *in abstracto* (ossia formalmente), a proposito delle quali propone di usare il termine "ibrido" di somme *incongruenter verae*.

All'inizio dell'Ottocento sulla concezione formalista si abbatte il veto di Cauchy, che nel suo corso di Analisi algebrica, in nome del rigore in matematica, ritiene che la validità di certe formule è sottoposta ad opportune condizioni e che un'uguaglianza $f(x)=g(x)$ verificata per alcuni valori della variabile non può essere estesa indefinitivamente.³ Per Cauchy l'uguaglianza di due espressioni $f(x)$ e $g(x)$ deve essere intesa esclusivamente come uguaglianza numerica e, di conseguenza, egli è costretto ad ammettere proposizioni che a prima vista sembrano "un peu dures", prima fra tutte: "une série divergente n'a pas de somme", per cui "avant d'effectuer la sommation d'aucune séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence" [1821, p.v].

Il programma di Cauchy⁴ fu da molti sentito come eccessivamente restrittivo. Infatti in tutto l'Ottocento sotto vari aspetti permase una notevole tradizione formalista la cui manifestazione più nota è il calcolo degli operatori. Il formalismo ottocentesco assunse un atteggiamento riduttivo e subordinato rispetto alla concezione numerica alla Cauchy. In genere esso insiste sull'aspetto convenzionale dei passaggi formali, rinviando, almeno in linea di principio, a una loro reinterpretazione numerica. La moderna nozione di somma di una serie divergente nasce quando si pone in rilievo l'aspetto convenzionale presente anche

³ "En déterminant ces conditions et ces valeurs, et fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute l'incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution de nombres aux quantités elles-mêmes." [1821, pp.iii-iv]

⁴ Cfr. Laugwitz [1989 p.197]. Lo stesso Cauchy [1847] esaminerà la possibilità di un impiego legittimo delle serie divergenti e non disdegnerà di scrivere intorno al calcolo degli operatori. Ma in ogni caso egli sempre riafferma i principi fondamentali del suo programma e così l'analisi della serie divergenti è effettuato esclusivamente dal punto di vista dell'errore, ossia egli si propone "de fixer les erreurs commises" nell'uso di alcune serie divergenti (principalmente la serie di Stirling) al fine di permettere la valutazione approssimata di alcune funzioni.

nella somma secondo Cauchy,⁵ idea espressa chiaramente da Cesàro nel 1890⁶ e pienamente matura in Borel [1901, p.15], allorché dichiara: "On pourrait d'ailleurs être amené [...] à attribuer plusieurs sommes différentes à une série divergente" e, in nota, aggiunge: "Et aussi à une série convergente."

In quest'articolo viene analizzata l'origine della C-sommabilità attraverso la lenta maturazione di Cesàro. Egli si forma scientificamente in Belgio, ove ha per maestro l'anziano Catalan⁷ e vive in un ambiente culturale non aggiornatissimo.⁸ Catalan in particolare appare, nei suoi ultimi anni di vita, un fedele custode dell'ortodossia di Cauchy ed ostile alle nuove concezioni che si andavano sviluppando soprattutto in Germania.

Ritornato in Italia, nel 1883, conosce le ricerche compiute nell'arretratissimo ambiente accademico napoletano ove non si teneva granché conto neanche dell'insegnamento di Cauchy.

Nella sua giovinezza Cesàro si appassiona allo studio della teoria dei numeri e di varie tecniche formali, quali il calcolo simbolico e il calcolo isobarico, di cui fa un uso spregiudicato, applicandoli anche alle serie divergenti. Sono probabilmente i richiami di Catalan che fanno sentire a Cesàro la necessità di attribuire un significato rigoroso alle serie formali utilizzate come

$$(1.1) \quad 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \dots = \frac{2(2^{p+1} - 1)}{p + 1} B_{p+1}$$

essendo B_{p+1} i numeri di Bernoulli. Nell'ambito dei suoi studi di aritmetica asintotica Cesàro formula, nel 1883, una definizione di somma che esprime in termini asintotici la C-sommabilità.

Tale definizione, dai modi assai arcaici, verrà, in seguito, maturata e rielaborata principalmente a causa dell'influenza dell'impostazione di Weierstrass e della sua scuola, con cui Cesàro si confronta dopo 1886.

⁵ Il riconoscimento che tale nozione è non è "naturale" ma dipende da una definizione che può essere modificata mi sembra un contributo non indifferente alla concezione delle teorie matematiche quali strutture che si sviluppano come logica conseguenza di opportune definizioni.

⁶ "Après tout, n'est-ce pas en vertu d'une convention que les séries convergentes, prises sous leur forme indéfinie, interviennent dans les calculs?" [1890b, p.360].

⁷ Su Eugène-Charles Catalan (1814-1894) si vedano Mansion [1884], Catalan [1892], AA.VV.[1894], Jongmans [1981 e 1986], Butzer-Jongmans [1991].

⁸ Valga su di esso il giudizio lapidario di Cremona in una lettera Cesàro che reca la data del 13 febbraio 1882: "tenete presente che la migliore matematica non si fa nel Belgio. Zitti che non ci oda l'ottimo Catalan."

Egli, tra il 1886 e il 1888, compie un'analisi approfondita e originale delle nozioni di limite e di somma, la quale connettendosi alle ricerche sulla probabilità degli eventi aritmetici lo conducono, dapprima, a formulare una nozione probabilistica di limite e di somma e, infine, nel 1890, alla nozione, completamente moderna, di C-sommabilità.

2. L'analisi degli algoritmi formali: il calcolo simbolico e il calcolo isobarico

Il punto di partenza delle ricerche di Cesàro sono gli studi sul calcolo simbolico oggi noto anche come metodo umbrale. Per Cesàro esso appare come un calcolo analogico il quale, cioè, estende per analogia le proprietà dell'Algebra a degli oggetti puramente simbolici. Il calcolo simbolico è strettamente legato nella metodologia al calcolo degli operatori e differisce da questo in quanto nel primo i simboli designano quantità e non operazioni. Più precisamente nel calcolo simbolico, data una successione numerica b_i , limitata o illimitata, e indicato con b il simbolo rappresentante il generico numero di tale serie, si opera su b con le ordinarie regole dell'Algebra, ad esempio si scrive $b^n b^m = b^{n+m}$, alla fine del calcolo si cambiano gli esponenti con gli indici, ossia ogni b^n viene rimpiazzato con b_n . Espressioni simboliche sono le seguenti:

$$(2.1) \quad (B+1)^n - B^n = n \quad \text{e} \quad (2.2) \quad (E+1)^n + (E-1)^n = 0$$

mediante le quali si possono definire i numeri di Bernoulli e di Euler.⁹

L'interesse di Cesàro verso il calcolo simbolico nasce dalla lettura di *Nouvelle Correspondance Mathématique* edita da Catalan.¹⁰ Rispondendo a varie questioni apparse su *Nouvelle Correspondance*,¹¹ pur ignorando i particolari i numerosi contributi che Lucas ha dedicato al calcolo simbolico e la stessa

⁹ Ad esempio, la (2.1) dà luogo a $B_0=1$, $B_1=1/2$, $B_2=1/6$, ecc. Questa definizione simbolica è dovuta a Cesàro che modifica lievemente quella di Lucas $(B+1)^n - B^n = 0$. Le precedenti definizioni per Cesàro [1883c, p.172] presentano "toutes quelques défaut au point de vue de certaines exigences du calcul symbolique."

¹⁰ L'ambiente di *Nouvelle Correspondance* e di *Mathesis* ha una grande importanza nella formazione di Cesàro. Queste sono riviste di pura cultura matematica, senza finalità applicative, volte principalmente ad elevare il livello culturale dei docenti di matematica. In *Nouvelle Correspondance* Cesàro trova gli stimoli opportuni per iniziare gli studi di calcolo simbolico e sui valori medi.

¹¹ Cfr. Lettere di Catalan a Cesàro.

definizione di numeri di Bernoulli e di Euler, Cesàro riscopre da solo varie formule di calcolo simbolico. I risultati che egli va progressivamente raccogliendo con il metodo ombrale, in parte pubblicati in [1880e], vengono sistemati in [1883a]. Ivi Cesàro si basa sull'osservazione che per una funzione intera $f(x)$ l'uguaglianza

$$(2.3) \quad f[a+(h+x)] = f[(a+h)+x]$$

sussiste quando ogni volta alle potenze della variabile x si sostituiscono numeri arbitrari, ossia la (2.3) dà luogo a una uguaglianza simbolica valida per particolari successioni numeriche. A differenza della prudenza di Lucas, il quale anche nel successivo [1891] tende a limitare le proprie considerazioni a funzioni polinomiali, Cesàro utilizza principalmente i polinomi infiniti, ossia le serie di potenze. In [1883a, p.2] egli effettua una dichiarazione di principio che ricorda quelle di Cauchy circa la necessità di assicurarsi preliminarmente della convergenza delle stesse:

"Dans le cas où $f(x)$ est une fonction telle que les deux membres de (2.3) se développent en séries illimitées, la même proposition subsiste mais il est entendu que les nombres N [ossia la successione di numeri N_i che si sostituiscono alle potenze x^i , n.d.r.] doivent être choisis de telle sorte que les séries soient convergentes."

Concretamente, però, Cesàro non si pone il problema della convergenza delle serie che utilizza e opera in modo formale su funzioni qualsiasi e sui loro sviluppi in serie di Taylor, limitandosi, in nota, prudentemente, a rinviare l'analisi della convergenza a studi successivi¹² che non saranno effettuati.¹³ In effetti egli avverte la convergenza come un fastidioso limite alle sue ricerche. Ad esempio, per ricavare l'identità simbolica fondamentale dei numeri di Bernoulli:

$$(2.4) \quad f[(a+1)+B] - f[a+B] = f'(a+1)$$

egli, assunto implicitamente che $f(x)$ e $f'(x)$ siano analitiche in a , sviluppa in serie di Taylor $f[a+(1+B)]$ ed $f[a+B]$ ottenendo

¹² "Il faudrait prouver que le développement symbolique de e est convergent. Même remarque pour les développements ultérieurs. Pour simplifier, la question de la convergence, spéciale à chaque cas particulier, est réservée à un examen ultérieur" [1883a, p.4].

¹³ Quando Cesaro esporrà alcune delle sue ricerche sul calcolo simbolico, nel suo trattato di *Calcolo infinitesimale* [1905a, p.114], parlando della (2.3) non fa più cenno alla necessità di utilizzare serie convergenti, affermando al contrario: "L'uso di queste successioni frequentemente a serie non convergenti, le quali nonpertanto sono utilizzabili..."

$$f[a + (1 + B)] - f[a + B] = [(B + 1)^0 - B^0]f(a) + [(B + 1)^1 - B^1]f'(a) + [(B + 1)^2 - B^2] \frac{f''(a)}{1 \cdot 2} + \dots$$

Tale espressione, per definizione dei numeri di Bernoulli, è uguale a $f'(a+1)$ [1883a, p.3]. Dalla (2.4) per $a=0, 1, 2, \dots$ Cesàro ricava la formula di Eulero-Maclaurin,

$$(2.5) \quad f'(1)+f'(2)+f'(3)+\dots+f'(n)=f(n+B)-f(B),$$

Nonostante la (2.5) richieda l'analiticità della $f(x)$ nell'origine, Cesàro applica tale formula non solo a

funzioni come $f(x)=\frac{x^{p+1}}{p+1}$, nel qual caso si ottiene la nota formula

$$1^{p-1} - 2^{p-1} + 3^{p-1} - 4^{p-1} + \dots = \frac{(n+B)^p - B^p}{p}$$

ma anche a $1/x$ e a $\log x$, ricavando, rispettivamente

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + \frac{1}{252n^6} + \dots + C$$

con C costante di Euler, e $n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n+g(n)}$, con $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n-1}}$.

In questo modo egli si imbatte in serie divergenti ricavate mediante un'applicazione della (2.4) e della (2.5) che sfugge ad ogni possibile reinterpretazione delle stesse in senso non simbolico.¹⁴

Il punto di vista di Cesàro è decisamente formalista. Ai suoi occhi il calcolo simbolico offre all'analisi un nuovo linguaggio e un potente strumento euristico. Egli appare legato a una vecchia tradizione d'origine illuminista, particolarmente forte tra gli Ideologi e che trovò la sua più nota manifestazione in *La langue des calculs* di Condillac, la quale interpretava l'Analisi come un linguaggio ben fatto.¹⁵ Un illustre e influente seguace di essa fu Laplace [1812, p.7] afferma:

"La langue de l'analyse, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découverte; ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes

¹⁴ In [1886, p.166-167], articolo che costituisce il naturale sviluppo degli studi di calcolo simbolico condotti in [1883a], Cesàro afferma: "permet d'effectuer de très avantageuses transformations de séries, pourvu que l'on ait soin de considérer toujours des fonctions développables par la formule de Taylor, sans quoi on serait souvent conduit à des conclusions paradoxales. L'emploi de la formule (2.5) donne ordinairement lieu à des séries divergentes, qui, cependant, ne perdent leur convergence qu'à partir d'un certain terme, de sorte qu'on peut toujours les utiliser, avec une approximation, les sommes que l'on cherche à transformer".

¹⁵ Cfr. Dhombres [1982-83] e Panza [1992].

des nouveaux calculs, d'une langue bien faite, que ses notions les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes."

Tale tradizione non si era sicuramente persa tra i cultori del calcolo degli operatori e del calcolo simbolico. Ad essa, infatti, si richiama esplicitamente Lucas [1891, cap.XII] anche se l'interpretazione che egli dà del Calcolo simbolico ("une méthode rapide pour l'écriture des formules", "une sténographie des formules de l'Arithmétique e de l'Algèbre") appare decisamente riduttiva per Cesàro.

Lo stesso atteggiamento spregiudicato Cesàro mostra nelle sue incursioni nello studio degli operatori alle differenze. In [1883a, p.8], ad esempio, considerata una successione $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$, e indicata con Δ_p la differenza p-esima, e con ∇^p (gli stessi numeri u_p) la p-esima differenze in avanti, aveva osservato che si può scrivere "moyennant certaines conditions de convergence, difficiles à déterminer d'une manière générale":

$$\frac{1}{1 + \nabla} = \frac{1}{2 + \Delta}$$

ossia la nota trasformazione di Euler, che egli attribuisce a Hutton:¹⁶

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots = \frac{1}{2}u_0 - \frac{1}{4}\Delta u_0 + \frac{1}{8}\Delta^2 u_0 - \frac{1}{16}\Delta^3 u_0 + \dots \quad 17$$

Il riverenziale accenno alle condizioni di convergenza scompare del tutto in [1886h, p.194] dove Cesàro esprime simbolicamente un altro risultato di Euler [1755, parte II, cap.II] coinvolgente l'operatore delle

differenze: data la funzione $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n a_n x^{n+1}$, dove u_n è una successione arbitraria

$$\text{e } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}, \text{ si ha } F(x) = f(u) = f(x + x\Delta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(x) \Delta^n u_0. \quad 18$$

¹⁶ Si noti comunque che Cesàro non conosce l'esatta origine storica di certi risultati, come dimostrano le numerose attribuzione errate che si riscontrano negli articoli di Cesàro, in genere derivate da attribuzione altrettanto errate di Catalan.

¹⁷ Come è sua abitudine generalizza la relazione precedente scrivendo: $f[a + \nabla] = f[a + (1 + \Delta)]$

¹⁸ Il teorema si presta a fornire la somma (simbolica) delle serie: Infatti se $F(x) = 1^p x + 2^p x^2 + 3^p x^3 + 4^p x + \dots$, $f(x) =$

$$\frac{1}{1-x}, \text{ e } u_n = n^p, \text{ si ha } F(x) = \sum_{n=1}^p \Delta^n u_0 \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}, \text{ da cui per } x = -1, \text{ si ha la relazione}$$

É probabile che Cesàro abbia avuto notizia del teorema di Euler leggendo Fergola [1862]. Egli, infatti, quando ritorna dal Belgio in Italia studia i lavori di Nicola Trudi, Emanuele Fergola, Gabriele Torelli,¹⁹ tre matematici napoletani i cui articoli devono essere stati segnalati a Cesàro da Giuseppe Battaglini in preparazione di una tesi sull'Analisi partitiva²⁰ che per altro non fu mai scritta, ma che lo introducono allo studio di un altro algoritmo formale: il calcolo isobarico.

L'ambiente accademico napoletano è, per quanto riguarda l'Analisi, assai poco aggiornato. Non solo non hanno eco, come del resto presso Catalan, le nuove impostazioni che andavano emergendo (il metodo $\varepsilon-\delta$, il concetto di uniformità e le riflessioni sui numeri), ma, al contrario, alcuni dei suoi principali esponenti, a partire da Trudi, appaiono assai poco sensibili alla metodologia di Cauchy e tutt'ora legati ai metodi del formalismo algebrico di origine Settecentesco e, in particolare, euleriano. Trudi nei suoi articoli tiene in scarso conto le condizioni di convergenza: esplicitamente dichiara di voler usare le serie indipendentemente dal loro essere convergenti o divergenti [1862, p.135].

Gli studi dei matematici sopra citati sono sostanzialmente un tardivo sviluppo dell'analisi algebrica, ossia di quella disciplina che aveva vista la sua fondazione nell'*Introductio in analysin infinitorum* di Euler. Essi si ricollegono, almeno concettualmente, agli studi della scuola combinatoria tedesca e alle ricerche del calcolo degli operatori.

I lavori di Trudi offrono comunque un'attenta disamina dei numeri di Bernoulli con una loro generalizzazione e soprattutto tecniche combinatorie che saranno poi utilizzate da Cesàro. In particolare egli è attratto da quello che in seguito [1884e, p.381] chiamerà algoritmo isobarico di una funzione $f(r)$,

che indica con il simbolo $\sum_p^m f(r)$, ossia la somma di tutti i prodotti del tipo $f(r_1)f(r_2)f(r_3)...f(r_m)$, con $r_1+r_2+r_3+...+r_m=p$ e r interi positivi.

$$1^p-2^p+3^p-4^p+...=\sum_{n=1}^p \Delta^n u_0 \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} \text{ (che, introducendo i numeri di Bernoulli, è facile mostrare uguale a } \frac{2(2^{p+1}-1)}{p+1} B_{p+1} \text{)}.$$

¹⁹ In particolare Cesàro ha studiato di Trudi [1865], [1867], (memorie tutt'ora conservate nel Fondo Cesàro) [1879], Fergola [1856], Torelli [1867] una copia della quale si trova chiosata da Cesàro nel detto Fondo.

²⁰ Scrive Battaglini a Cesàro il 22 aprile 1885: "In quanto alla Dissertazione di Laurea, nulla si oppone che prendiate per soggetto "I fondamenti dell'Analisi partitiva ..." (Fondo Cesàro).

Cesàro [1884d], nello studiare l'algoritmo $\sum_p^m f(r)$, determina i numeri di Bernoulli come somme di espressioni isobariche ed osserva che il calcolo isobarico appartiene "allo stesso ordine di idee" del calcolo simbolico e, in particolare, che i risultati di [1883c] e [1884d] fanno parte tutti di una teoria unica, che si propone di esporre in seguito. In effetti egli scrive vari articoli sull'argomento, tra cui [1884e], [1885e]²¹ e [1885f], nei quali i metodi del calcolo simbolico, del calcolo isobarico con sue varie estensioni,²² e del calcolo degli operatori si fondono. Egli ottiene una gran mole di risultati, il cui aspetto più interessante è la loro forma particolarmente compatta. Cesàro spesso utilizza gli algoritmi introdotti come operatori tra funzioni, ma il suo formalismo ancora arcaico e l'assenza della pur minima considerazione topologica testimoniano di una fase di sviluppo anteriore alla nascita dell'analisi

funzionale. Ad esempio in [1885e, pp.420-421], applicando l'algoritmo isobarico alle funzioni $f(r) = \frac{u^{(r)}(x)}{r!}$,

dove $u^{(r)}$ è ovviamente la derivata r-esima di $u(x)$, ossia considerando l'algoritmo $U_{p,m}(x) = \sum_p^m \frac{u^{(r)}(x)}{r!}$

ottiene la seguente regola di derivazione²³

$$(2.6)? \quad U'_{p,m} = (p+1)U_{p+1,m}(x) - mu'_{p,m-1}(x).$$

²¹ Quest'articolo fu apprezzato da Hermite (cfr. Ferraro [1996]). Lo stesso Cesàro riconoscerà, comunque, in [1888h] che i risultati in essi formulati erano in parte già noti. Gli algoritmi formali erano relativamente diffusi sul finire del secolo scorso. Cesàro per tali studi sarà in contatto con altri autori come d'Ocagne (i cui lavori gli sono segnalati da Catalan), Gomez-TeXiera, Oltramare.

²² Egli inventerà vari algoritmi formali più o meno derivati da quello isobarico, tra cui uno che chiama isodinamico che "servirà a fondamento di una Calcolo speciale, analogo al Calcolo isobarico, ma che ha più stretta relazione con la teoria dei numeri." [1885b, p.459]

²³ Una certa somiglianza nella forma con l'uguaglianza $A'(f)=A(xf)-xA(f)$ che esprime la definizione della derivata funzionale dell'operatore A data Pincherle nel 1897 deve essere stata notata da quest'ultimo che proprio il 14 marzo di quell'anno chiede a Cesàro "una indicazione completa dei di Lei lavori nel Calcolo simbolico da lei introdotto come *Calcul isobarique*" (Fondo Cesàro).

Cesàro non esita ad applicare i vari algoritmi a serie infinite. In particolare in [1885g] ricava (e generalizza) la formula di Lagrange $f(y) = f(x) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \frac{d^p}{dz^p} [f'(z)\varphi^{p+1}(z)]$ che esprime lo sviluppo di ogni funzione f di y , allorché y e la funzione assegnata φ soddisfano all'equazione $y=z+x\varphi(y)$. Egli ottiene la (2.7) mediante un'applicazione della (2.6) e fornendo alla dimostrazione un aspetto così fortemente combinatorio che avrebbe fatto felice Carl Friedrich Hinderburg e i suoi seguaci e che si può considerare la degna ma decisamente tardiva conclusione del formalismo algebrico a Napoli. Cesàro [1885g, p.511] termina l'articolo affermando che egli non ha tenuto conto della convergenza delle serie e che lo stabilire le condizioni di convergenza "constitue un important e délicat sujet d'études: il en est de même de la question de savoir quelle valeur de y doit être considérée comme représentée par la série ..." il che significa riproporre ancora la distinzione tra formale e numerico.

3. Le uguaglianze assurde

L'analisi delle uguaglianze simboliche è ampiamente sviluppata in [1883c], la quale contiene, alle pp.242-265, l'*Extraits d'une seconde Lettre à M.Catalan* in cui Cesàro, oltre ad utilizzare le serie indipendentemente dalla convergenza o meno delle stesse, manifesta l'intenzione di creare una teoria delle serie divergenti in contrasto con l'opinione di Catalan, attivo cultore della teoria delle serie²⁴ e fedele seguace della concezione del rigore di Cauchy. Catalan era stato sempre attento durante la sua attività a correggere false proposizioni (si veda ad esempio il suo [1887]) e usi impropri delle serie divergenti. In [1860, p.2] afferma che le serie convergenti sono le sole ad essere utili perché le altre non rappresentano alcuna quantità e, in nota, osserva: "Il y a plus les expression: limite d'une serie, somme d'une série n'ont évidemment aucun sens lorsque la série n'est pas convergente. On peut donc s'êtè?? que le savants géomètres avent énoncé les propositions suivantes:

$$1-1+1-1 + \dots = \frac{1}{2} \quad (\text{Lacroix } \textit{Calcul intégral} \text{ t.III p.346})$$

$$1-2+3-4+5-6+ \dots = \frac{1}{4} \quad (\text{Ibid.})$$

$$1-1.2+1.2.3-1.2.3.4+ \dots = 0,40362836 \quad (\text{Ibid. p.390})$$

²⁴ Mansion [1884] osserverà: "[Catalan] connaît le séries une à curve, comme nous connaissons le propositions élémentaires de la Géometrie". Catalan [1860] fu un classico.

$$\cos\varphi - \cos 2\varphi + \cos 3\varphi - \cos 4\varphi + \dots = \frac{1}{2} \quad (\text{Poisson, } \textit{Journal de l'école polytechnique}, \text{ t.XI p.313})$$

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{3}{2} \quad (\text{Prehn, } \textit{J. de Crelle}, \text{ t.XLI})$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots = 0 \quad (\text{Simonof, } \textit{Mémoires sur des séries des nombres aux puissances harmoniques})."$$

E' proprio verso le relazioni contenute in quest'elenco, da Catalan volentieri definite assurde²⁵ che Cesàro²⁶ rivolge la sua attenzione formulando un vero e proprio programma di ricerca con l'intenzione di renderle utilizzabili in Analisi. Nel 1882, in una lettera a Catalan pubblicata [1883c, p.242-248], Cesàro considera l'identità simbolica,

$$(3.1) \quad AP = (1-A)P,$$

la quale si può generalizzare in

$$(3.2) \quad f(A) = f(1-A),$$

dove $f(x)$ è una funzione (analitica). La (3.1) definisce un'infinità di successioni A_p ,²⁷ tra le quale Cesàro ricerca quelle riassumibili nella formula simbolica $\text{sen}(Ax) = A_1 x$, ossia del tipo:

$$(3.3) \quad A_3 = A_5 = A_7 = A_9 = \dots = 0$$

Applicando la (3.2), con semplici passaggi, si ha $A_1 \cot \frac{x}{2} = \cos(Ax)$ e, sapendo che

$$x \cot x = 1 - \frac{B_2 (2x)^2}{2!} + \frac{B_4 (2x)^4}{4!} + \dots$$

si ottiene che le successioni cercate sono del tipo $A_p = \alpha B_p$, dove B_p è il p-esimo numero di Bernoulli e $\alpha = 2A_1 = A_0$ è un numero arbitrario.

Analogamente le successioni che soddisfano la (3.1) e la condizione

$$(3.4) \quad A_2 = A_4 = A_6 = A_8 = \dots = 0$$

hanno la forma

²⁵ Cfr. Catalan [1870, cap.IV] a proposito della relazione $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ erroneamente attribuita a Lacroix e [1885, p.282-285] a proposito della serie geometrica con ragione maggiore di 1.

²⁶ Il brano precedentemente citato si trova anche in Catalan [1870] una copia del quale abbondantemente chiosata da Cesàro nelle parte riguardante le serie è tuttora conservata nel fondo Cesàro.

²⁷ Ad esempio l'armonica, la geometrica con ragione $\frac{1}{2}$, le medie aritmetiche A_p delle potenze p-esime di tutte le frazioni irriducibili, inferiori all'unità, con denominatore fissato.

$$(3.5) \quad A_p = \alpha \left(\frac{E+1}{2} \right)^p$$

dove con E si rappresentano i numeri di Eulero e $\alpha=A_0$ è un numero arbitrario. Nel caso $\alpha=1$, tali numeri sono collegati a quelli di Bernoulli dalla relazione²⁸

$$(3.7) \quad A_p = \frac{2(2^{p+1} - 1)}{p+1} B_{p+1}$$

Sui numeri A_p Cesàro osserva:

"J'ai attache de l'importance aux nombres A, définis en dernier lieu [ossia i numeri definiti dalla (3.8)], à cause de la formule *conventionnelle*

$$[(3.8)] \quad 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \dots = \frac{1}{2} A_p$$

qui comprend, comme cas particuliers, les célèbres égalités *absurdes*:

$$1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2} \quad (\text{Lacroix})$$

$$1-2+3-4+\dots = \frac{1}{4} \quad (\text{Id.})$$

$$1-4+9-16+\dots = 0 \quad (\text{Simonof})$$

etc., etc." [1883c, p.248].

La (3.8) è esattamente quella che sarà poi detta la somma (C, p+1) di $1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \dots$ e l'obiettivo di Cesàro negli otto anni successivi fino alla pubblicazione di *Sur la multiplication des séries* è di darle un significato rigoroso. Per il momento Cesàro formula le sue idee ancora con ambiguità e con qualche prudenza, dovuta probabilmente alla necessità di evitare l'accusa (facile soprattutto nei confronti di uno studente ventitrenne) di utilizzare tecniche che la maggior parte dei matematici riteneva definitivamente escluse dal mondo dell'Analisi infinitesimale in quanto prive di rigore. Non a caso chiama *assurdità* le uguaglianze del tipo (3.8) perché:

"1° Pour qu'on ne méconnaisse pas mes idées;

²⁸ La (3.7) si ricava tenuto conto della relazione simbolica $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{sen}(Ax)$, e dall'uguaglianza simbolica

$$(3.6) \quad (A-1)^n + A^n = 0$$

a sua volta con la condizione iniziale $A_0=1$ conseguenza della (2.2).

2° Pour que les personnes qui se serviront de ces relations soient averties, et ne leur attribuent pas une signification qu'elles n'ont pas, qu'elles ne peuvent avoir." [1883c, p.251].

E rivolgendosi a Catalan afferma:

"Vous ne voudrez plus reconnaître, en moi, un de vos élèves, si je soutenais de pareilles absurdités; et vous auriez raison." [1883c, p.248].²⁹

Per Cesàro la (3.8) "n'est qu'une *formule de convention*: c'est un pur algorithme, elle n'est qu'un outil, dont je me sers, avec assez de succès, dans l'étude de certains séries." Essa e le altre formule analoghe possono essere usate a condizione di essere bene interpretate ("avec circonspection, et respectant certaines règles, préalablement établies"). Inoltre: "ces formules, dis-je, quoique fausses, peuvent servir de la base à une théorie, qui ne serait pas plus absurde que la théorie des Imaginaires."

Cesàro insiste sull'aspetto convenzionale delle *uguaglianza assurde*, strumento tecnico atte a facilitare il pensiero,³⁰ con evidente collegamento alla tradizione dell'analisi come linguaggio di scoperta,³¹ e ripropone, di fatto, la vecchia distinzione bernoulliana tra somme false *in concreto* e somme vere *in astratto*.³² Proprio per questo egli è ancora lontano dalla moderna concezione e vicino al vecchio formalismo: le uguaglianze assurde opportunamente interpretate rinviano ad uguaglianze esatte, cioè numeriche, le quali hanno una diversità sostanziale dalle prime; in altri termini, per Cesàro in questo fase

²⁹ In effetti il nome scelto sembra essere una concessione (l'unica) a Catalan.

³⁰ Catalan [1886b, p.5] riferisce di un colloquio con Cesàro, in cui questi afferma: "les symboles ont été inventés, précisément, dans le but d'abrèger le discours, et de condenser, dans une ligne visible, l'Œuvre de la pensée."

³¹ Il est bien remarquable que les théories les plus fécondes sont précisément celles où, pour abrèger le chemin de la pensée, on fait usage de ces idées de convention, en ayant soin d'écartier, dans le cours des recherches, tout ce qui peut donner lieu à une fausse interprétation des mêmes idées. Il en est ainsi de la théorie des imaginaires et du calcul symbolique, lesquels mal interprétés, peuvent conduire à des résultats faux, et, quelquefois, aux paradoxes les plus étonnants; tandis que, si l'on a soin de tenir toujours présent le caractère purement conventionnel du point de départ, en ne faisant point un pas de plus, qui ne soit consenti par les plus inattendus, par des moyens admirables de simplicité et d'élégance." [1883c, pp.248-249].

³² "J'espère pouvoir bientôt soumettre, à votre appréciation [di Catalan], quelques formules exactes, obtenues au moyen d'égalité absurde (3.8)" [1883c, p.249].

del suo pensiero, $1-1+1-1+\dots$ è uguale a $\frac{1}{2}$ per una convenzione, mentre $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ è intrinsecamente uguale a 2.

Egli formula però chiaramente il suo programma di ricerca:

"Mais ce que je me propose surtout de faire, c'est réunir, en un corps de théorie, les conditions moyennat lesquelles on peut se servir, en toute rigueur, de l'égalité (3.8), et des autres égalités conventionnelles qui s'en déduisent" [1883c, p.249].

Tra le assurdità che Cesàro vuole studiare e di cui vuole fornire una teoria vi sono le seguenti:

$$(3.9) \quad f(x)-f(2x)+f(3x)-f(4x)+\dots=\frac{1}{2} f(Ax).$$

che comprende la relazione da Catalan attribuita a Poisson $\cos\varphi-\cos2\varphi+\cos3\varphi-\cos4\varphi+\dots=\frac{1}{2}$, le (3.8) e varie altre.³³

Cesàro non spiega la derivazione della (3.9)³⁴ ma è probabile che la consideri un'estensione infinitaria delle identità fondamentali del Calcolo simbolico relative ai numeri A_p ed E_p . Infatti dalla (3.6) si ricava operando come per la (2.4) e la (2.5) (come per ricavare la formule sui numeri Eulero nei "pricipi di calcolo simbolico):

$$(3.12) \quad f(x)-f(2x)+f(3x)-\dots\pm f(nx)=\frac{1}{2} [f(Ax)\pm f((A+n)x)]$$

³³ Un'altra "source d'absurdités" è la relazione simbolica:

$$(3.10) \quad f(x)-f(3x)+f(5x)-f(7x)+\dots=\frac{1}{2} f(Ex)$$

dalla quale derivano, tra l'altro, altre uguaglianze assurde, di notevole importanza nelle successive

ricerche di Cesàro $\cos x-\cos 3x+\cos 5x-\cos 7x+\dots=0$, $\sin x-\sin 3x+\sin 5x-\sin 7x+\dots=\frac{1}{2} \sec x$,

$$(3.11) \quad 1^p-3^p+5^p-7^p+\dots=\frac{1}{2} E_p.$$

³⁴ Solo in apparenza più generale della (3.8). Infatti, per ogni n, si consideri lo sviluppo in serie di Taylor di punto iniziale a delle funzioni $f(nx)$; si sommi opportunamente si ha la serie di termine generale $(1^p-2^p+3^p-4^p+\dots)$

$\frac{f^{(n)}(a)x^n}{n!}$. Tale espressione è uguale a $\frac{1}{2} A_p \frac{f^{(n)}(a)x^n}{n!}$ che è appunto il termine generale dello sviluppo

(simbolico) in serie di Taylor di punto iniziale a di $f(Ax)$.

se si continua la procedura all'infinito si ottiene la (3.9).³⁵

Comunque finché Cesàro si limita al calcolo simbolico il programma di ricerca annunciato nella lettera a Catalan non compie passi avanti ed egli non può fare altro che rivendicare in linea di principio la correttezza del proprio modo di operare, senza produrre alcun sostegno ad esso se non il suo successo (come faceva nel secolo precedente Euler). Nel più maturo degli scritti di calcolo simbolico [1886e], ove fonde la lezione di Catalan con quella di Trudi, Cesàro rinvia alle ricerche di predecessori più o meno illustri sull'argomento. In particolare ricorda le parole di Malmstén [1847, p.55]:

"Aujourd'hui bien s'en faut qu'on approuve l'usage des séries non convergentes; au contraire, on veut qu'elles soient complètement bannies de l'Analyse. Mais cette rigueur, juste et raisonnable en elle-même, a été mise à une bien dure épreuve par la série de Stirling. D'une part divergente, comme elle l'est, elle *devient*, en effet, être rejetée; d'autre part, parce qu'elle est presque indispensable, elle ne *peut point l'être...*"

La citazione non è, però, particolarmente calzante. Malmstén, come la maggior parte dei matematici invocati da Cesàro a sostegno delle proprie tesi, intende riferirsi alla possibilità di usare alcune serie divergenti per approssimare funzioni. Questo punto di vista, però, conduce alle posizioni di Stieltjes e di Poincaré,³⁶ circa la rappresentazione e il calcolo delle funzioni mediante serie divergenti.³⁷ Invece l'obiettivo di Cesàro è quello di attribuire una somma alle serie divergenti e il suo interesse per le approssimazioni è molto limitato, come emerge proprio da [1886e] ove ottiene (o riottiene) con brillanti e veloci metodi simbolici varie formule concernenti i numeri di Bernoulli e di Eulero, una loro generalizzazione (che seguendo Trudi [1865] egli chiama ultra-bernoulliani³⁸ e ultra-euleriani), e varie applicazioni³⁹ alle serie e agli integrali definiti. Il richiamare l'utilità delle serie nelle approssimazioni è il segno che il calcolo simbolico e gli algoritmi formali legati alla vecchia mentalità settecentesca non sono in grado di portare a compimento il programma di Cesàro volto a fornire una valida giustificazione all'uso

³⁵ Cfr. [1886e, p.174]. Tale procedimento corrisponde di fatto ad una media aritmetica formale.

³⁶ Non a caso entrambi erano spinti all'uso delle serie divergenti dalla constatazione della loro utilità in astronomia.

³⁷ Proprio nel 1886 Stieltjes e Poincaré pubblicano importanti articoli intorno alle serie che il primo chiama semiconvergenti e il secondo asintotiche e che Cesàro [1905a] denomina pseudoconvergenti.

³⁸ Essi in un caso particolare restituiscono i numeri A_p .

³⁹ Tra l'altro ottiene, implicitamente, la (3.8).

delle serie divergenti.⁴⁰ Tale programma nato nell'ambito del calcolo simbolico si sviluppa dapprima grazie gli studi di aritmetica asintotica, che Cesàro coltiva sin dall'inizio della sua attività, anche se ha la sua svolta in senso moderno dopo l'impatto di Cesàro con le nuove concezioni dell'analisi.⁴¹

4. Una definizione asintotica di somma di serie divergente.

Le ricerche di Cesàro in teoria dei numeri furono rivolte principalmente all'analisi del comportamento asintotico e del valor medio di sequenze numeriche concernenti la divisibilità e la primalità. Si trattava, in genere, di questione poste o riprese nell'ambiente che ruotava intorno a Nouvelle Correspondance Mathématique e Mathesis.⁴² Fu proprio leggendo Nouvelle Correspondance Mathématique che Cesàro notò gli enunciati di cinque teoremi di Berger [1880] e che Catalan aveva segnalato con grande risalto (li chiama teoremi *extraordinaries*).⁴³ Cesàro, senza poter consultare la memoria originale, riuscì a

⁴⁰ E' significativo al riguardo, che perfino nel suo trattato di calcolo infinitesimale, molti anni dopo aver formulato la C-sommabilità, Cesàro giustifichi, *a posteriori*, l'uso delle serie divergenti scaturenti dal calcolo simbolico ma con la loro utilità nell'approssimazione [1905a, p.114], senza richiamare la sua definizione di somma, estranea alle procedure del calcolo simbolico. All'interno del calcolo simbolico Cesàro non si riesce a superare la vecchia concezione formalista, opposta e subordinata alla concezione numerica della serie.

⁴¹ Dopo il 1886 gli studi di Cesàro sul calcolo simbolico diventano sporadici e si ha l'impressione che, anche senza mai rinnegarli (sono esposti anche nel suo trattato di analisi del 1905), l'importanza di tale tecnica venga ridimensionata a puro metodo euristico che deve rimandare ad altro per una corretta giustificazione dei risultati ottenuti.

⁴² Ciò spiega perché l'interesse di Cesàro verso l'asintoticità non riguardi mai la ricerca delle approssimazioni. Quando Cesàro [1905a, pp.94-96] definisce la rappresentazione asintotica di una funzione, egli non fa uso di tale rappresentazione ai fini dell'approssimazione delle funzioni, ma principalmente per studiare il comportamento all'infinito delle successione numeriche, "un caso importante ... rispetto al caso generale". Si veda, al proposito, il suo uso della formula di Stirling [1905].

⁴³ 1) La somma degli inversi dei divisori di un numero intero è uguale in media a $\frac{1}{2}$. 2) La somma dei divisori di un numero intero N è in media uguale a $\frac{1}{2} N$. 3) Se a, b, c, \dots sono tutti i divisori di un numero intero, la somma $+ + + \dots$ è in media uguale a $\frac{1}{2}$. 4) I numeri interi di 5 cifre hanno in media ciascuno $5 \log_{10} + \log 10 +$

ridimostrarli in modo elementare (laddove Berger aveva fatto ricorso alla funzione gamma) e a generalizzarli. Egli applicò considerazioni infinitarie alla formula combinatoria,

$$(4.1) \quad \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right] f(i),$$

ove $[x]$ è la parte intera di x , $f(x)$ è una funzione generica e si è posto $F(n)=f(a)+f(b)+f(c)+\dots$ con a, b, c, \dots che rappresentano tutti i divisori di un numero intero n .⁴⁴ Dalla (4.1) tenuto conto che $x-1 < [x] \leq x$ si ottiene

$$(4.2) \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} f(i) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i) < \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(i) < \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} f(i)$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$ nell'ipotesi che $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} f(i)$ sia convergente e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i) = 0$, si ha che il

valore medio $F(n)$ ⁴⁵ è $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} f(i)$, ossia

$$(4.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} f(i).$$

Specializzando la funzione $f(x)$ Cesàro ottiene un gran numero di risultati.⁴⁶

2C-1 divisori (C è la costante di Eulero). 5) Gli interi vicini a N hanno in media tanti divisori quanti gli interi compresi tra 1 e Ne.

⁴⁴ Questa formula è sostanzialmente alla base delle numerose identità aritmetiche analizzate nella prima parte di [1883c] e anticipate in [1882a].

⁴⁵ Il valor medio di una funzione $\varphi(n)$ è $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n} = l$ sempre che l esiste ed è finito.

⁴⁶ Ad esempio, per $f(x) = \frac{1}{x^p}$ si ottiene in media:

$$\frac{1}{a^p} + \frac{1}{b^p} + \frac{1}{c^p} + \dots = 1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \dots$$

che come caso particolare fornisce il primo dei risultati di Berger.

Essendo poi i numeri a, b, c, \dots , sono uguali, a parte l'ordine, ai numeri $\frac{n}{a}, \frac{n}{b}, \frac{n}{c}, \dots$ per cui $f(a)+f(b)+f(c)+\dots =$

$f\left(\frac{n}{a}\right) + f\left(\frac{n}{b}\right) + f\left(\frac{n}{c}\right) + \dots$, se si prende $f(x)=x^p$ si ha, in media:

La (4.3) fu dimostrata la prima volta in [1881] ed è riprodotta in [1883c, pp.124-125] in modo sostanzialmente identico. La stessa dimostrazione viene riproposta in [1888d]⁴⁷ ove però Cesàro modifica le ipotesi assumendo che $f(i)$ sia assolutamente convergente e mostrando che in tale caso si ha

$$\text{necessariamente } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(i) = 0. \quad ^{48}$$

La (4.3) è di particolare importanza nell'evoluzione di Cesàro perchè, sia in [1881] sia in [1883c] sia in [1888d], essa si connette con il problema di una corretta definizione di valore medio sviluppando la quale Cesàro giunge alla C-sommabilità.

Cesàro [1881, p.100], dopo aver definito il valor medio mediante la (4.4), generalizza tale nozione chiamando valore medio di una funzione $\psi(n)$ un'altra funzione $\psi'(n)$ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |(\psi(1) + \dots + \psi(n)) - (\psi'(1) + \dots + \psi'(n))| = 0$$

Cesàro [1883c, p.123], invece, definisce la funzione $\psi(N)$ uguale in media alla funzione $\psi'(N)$ ⁴⁹ se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi(1) + \psi(2) + \dots + \psi(n)}{\Phi(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi'(1) + \psi'(2) + \dots + \psi'(n)}{\Phi(n)}$$

sempre che tali limiti siano finiti per qualche funzione $\Phi(n)$ (che in seguito chiamerò funzione di riferimento).⁵⁰

Un'ulteriore generalizzazione si trova nel manoscritto *Calcul Asymptotique et Calcul Moyen*,⁵¹ risalente al 1883, riprodotto, con modifiche, in *Medie ed assintotiche espressioni in aritmetica*, pubblicato nel 1887. In tali scritti, considerate le funzioni $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, ... $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, $\Phi_3(x)$,..., se accade che:

$$a^p + b^p + c^p \dots = \left(\frac{n}{a}\right)^p + \left(\frac{n}{b}\right)^p + \left(\frac{n}{c}\right)^p + \dots = n^p \left(1 + \frac{1}{2^{p+1}} + \frac{1}{3^{p+1}} + \dots\right)$$

e particularizzando si ricava il secondo risultato di Berger.

⁴⁷Un'altra dimostrazione completamente diversa, in quanto derivata dal calcolo integrale, è in [1887c].

⁴⁸ Cesàro complica inutilmente la dimostrazione scrivendo la (4.2) in una forma più complessa e che richiede varie altre considerazioni per poter effettuare il passaggio al limite.

⁴⁹ A volte Cesàro utilizza il simbolo $\psi(N) \equiv \psi'(N)$.

⁵⁰ Correggo, qui, un banale errore di stampa presente nell'edizione originale e riportato (come quasi tutti gli errori tipografici) nella distratta edizione delle *Opere scelte* curata da Carlo Miranda.

$-g_1(x)$ è l'espressione media di $f(x)$ rispetto alla funzione di riferimento $\Phi_1(x)$;

$-g_2(x)$ è l'espressione media di $f(x)-g_1(x)$ rispetto a $\Phi_2(x)$;

$-g_3(x)$ è l'espressione media di $f(x)-g_1(x)-g_2(x)$ rispetto a $\Phi_3(x)$; ecc.

Cesàro chiama l'uguaglianza,

$$(4.5) \quad f(x)=g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+\dots,$$

uguaglianza media completa di $f(x)$ rispetto alla scala di riferimento $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \Phi_3(x), \dots$

In *Calcul Asymptotique et Calcul Moyen*, Cesàro distingue nettamente tra calcolo medio e calcolo asintotico. Egli osserva che una "funzione ha sempre [sic] un'espressione media mentre può mancare un'espressione assintotica" e che il calcolo dell'espressione asintotica può differire dal calcolo dell'espressione media. Tale distinzione gli permette di esaminare la questione delle serie divergenti in quanto, egli afferma, che la questione delle espressioni medie non differisce, in fondo, da quelle delle serie indeterminate. Infatti, per somma d'una serie s'intende l'espressione asintotica, supposta costante, della somma dei primi n termini: tale espressione non può esistere per una serie indeterminata. Ciò nonostante, è "sempre lecito" [sic] considerare l'espressione media della medesima somma. Pertanto, chiama "somma d'una serie l'espressione media della somma dei primi x termini, essendo x la funzione di riferimento," ossia la somma di $\sum a_i$ è

$$(4.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_1(i)$$

ove $A_1(i)$ rappresenta la i -esima somma parziale di $\sum a_i$. Qualora il limite della (4.6) non esista, per trovare l'espressione media voluta "spesso sono necessari parecchi calcoli successivi". Cesàro mostra come procedere in tali casi mediante due esempi,

$$(4.7) \quad 1-2+3-4+\dots$$

e

$$(4.8) \quad 1-4+9-16+\dots,$$

⁵¹ Cfr. Appendice I. In seguito (cfr. appendice I) Cesàro sottolineerà la diversità tra calcolo delle medie e calcolo asintotico, anche se in qualche occasione si avranno fraintendimenti.

Indicata con $A_1(n)$ la somma parziale della (4.7) è $A_2(n) = \sum_{i=1}^n A_1(i) = \frac{1 - (-1)^n}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right]$. Poiché $\frac{1}{n} A_2(n)$ non

è convergente, si calcola $A_3(n) = \sum_{i=1}^n A_2(i) = \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right]$ la cui espressione media (Cesàro usa

la definizione generalizzata di valore medio) è $\frac{n^2}{8}$.

Cesàro ritiene di poter assegnare ad $A_2(n)$ e $A_1(n)$ le espressioni medie di $\frac{n}{4}$ e $\frac{1}{4}$. La logica di questi

passaggi a ritroso è la seguente: viene attribuito a $A_1(n)$ la somma $\frac{n}{4}$, in quanto $\frac{n}{4}$ ha esattamente

l'espressione media $\frac{n^2}{8}$ di $A_3(n)$.

Per determinare la somma (4.8) Cesàro deve spingersi fino al calcolo di $A_5(n)$, ottenendo le seguenti uguaglianze medie

$$A_5(n) = \frac{n^3}{48}, A_4(n) = \frac{n^2}{16}, A_3(n) = \frac{n}{8}, A_2(n) = \frac{1}{8}, A_1(n) = 0$$

(l'ultimo passaggio, da $A_2(n)$ a $A_1(n)$, è in realtà disomogeneo rispetto agli altri).

La definizione di Cesàro consiste quindi nel determinare una $A_k(n) = \sum_{i=1}^n A_{k-1}(i)$ che sia asintotica a rn^s ,

con $s < k$, e nel porre la somma della serie uguale a $rs!$, se $s = k-1$, e uguale a 0 negli altri casi. Se si formalizza tale procedimento avendosi

$$(4.9) \quad A_{k+1}(n) = a_n + \binom{k+1}{1} a_{n-1} + \binom{k+2}{2} a_{n-2} + \dots + \binom{k+n+1}{n-1} a_1$$

e, posto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{k+1}(n)}{n^k} = h$,? la somma risultata essere kh . Si tratta quindi esattamente della C-

sommabilità. In apparenza Cesàro deve solo formalizzare la definizione data per giungere alla moderna definizione di somma secondo Cesàro di una serie. Ad un'attento esame, però, tale concezione si rivela sostanzialmente arretrata. L'aver data una definizione di somma non è di per sè, infatti, una garanzia di modernità di pensiero: anche Euler aveva data una famosa definizione di somma di serie divergente. Ad

esempio Cesàro sostiene sì che alla relazione $1-1+1-1+\dots = \frac{1}{2}$ si può attribuire un significato, ma ritiene

pure che "non sarà permesso" assegnare alla serie $1-1+1-1+\dots$ altre somme. Egli sottintende che sia possibile una sola procedura di somma di una serie divergente, la quale garantisce l'unicità del risultato: è

ben lontano dal considerare convenzionale la stessa definizione di somma di una serie convergente, come farà invece in [1890b].

In effetti Cesàro si muove ancora nell'ambito di concezioni ormai obsolete ed egli raggiungerà una modernità di pensiero molto lentamente e solo dopo l'assimilazione della nuova concezione dell'analisi di Weierstrass. Almeno fino alla metà degli anni 80 Cesàro non fa uso del metodo ε - δ , poco gradito al suo maestro Catalan, il quale si atteneva a una interpretazione progressivamente più riduttiva della lezione di Cauchy (cfr. pf.6). Cesàro usa la nozione di limite in modo intuitivo, naturalistico e non affronta mai *a priori* il problema dell'esistenza del limite in quanto mostra di ritenere che l'esistenza sia garantita dall'esibizione di un risultato. Così, ad esempio, detta $\varphi(n)$ la (totient function) funzione che conta i numeri primi con n e inferiori a n stesso, per dimostrare

$$(4.10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}$$

Cesàro [1883c, p.161] chiama λ sia il limite *inconnue* di $\frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n)}{n^2}$ e opera su λ senza averne

preliminarmente dimostrato l'esistenza e trova che $\lambda = \frac{3}{\pi^2}$. In quest'ordine di idee rientra anche

l'affermazione di Cesàro secondo cui l'espressione media, a differenza dell'espressione asintotica, esiste sempre, la quale sembra sottintendere l'ingenua convizione che ripetendo il ragionamento prima o poi si arriverà a un risultato.

Va anche notato che nella definizione e nella prassi di Cesàro, nonostante le affermazioni di principio, si mescolano calcolo medio e calcolo asintotico (in effetti egli trasforma il calcolo di un'espressione media nel calcolo di un'espressione asintotica) che, unitamente all'inosservanza delle condizioni di esistenza dei valori limiti, genera, a volte, confusioni che saranno definitivamente risolte solo nel 1888 a seguito di una polemica con Jensen (cfr. pf.8). Già in quegli anni Cesàro dovette, comunque, rendersi conto del pericolo insito nelle sue tecniche e sente la necessità di un calcolo rigoroso. Infatti egli manifesta il progetto di stabilire una teoria delle uguaglianze medie che permetta di servirsi con sicurezza di essa:

"Nous sommes convaincu? que les égalités moyennes sont appelées à rendre de véritables services à la Science des Nombres. Il y aurait à établir une Théorie des égalités moyennes, en réunissant les règles qui permettent, dans certains cas, de se servir de ces égalités comme on se sert des égalités véritables" ([1883c, p.163]).

Proprio alcune pagine dopo queste osservazioni vi è un errore dovuto all'uso spericolato, "trop hardie" [1883c, p.362], delle uguaglianze medie che vale la pena di esaminare. Infatti considerata la funzione di

Mobius $\mu(n)$ uguale a +1 o -1 a seconda che n è composto d'un numero pari o d'un numero dispari di fattori primi diseguali e 0 negli altri casi, e la sua funzione sommatoria, oggi detta di Mertens, $\psi(x)=\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\dots+\mu(n)$, Cesàro [1883c, p.167] ottiene che $\psi(q_1)+2\psi(q_2)+\dots+n\psi(q_n)$ è asintotico a

$\frac{3}{\pi^2} n^2$. Assume quindi che la forma della funzione $\psi(x)$ sia (asintoticamente) uguale a kx ,⁵² con un'ipotesi

di regolarità che è assolutamente ingiustificata (equivalente all'esistenza di

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(1) + \mu(2) + \dots + \mu(n)}{n} = k$) ma è del tutto conforme alla logica che sottende la sua definizione di

somma. Cesàro suppone implicitamente anche che $k \neq 0$ e quindi ricava

$\psi(q_1)+2\psi(q_2)+\dots+n\psi(q_n)=k(q_1+2q_2+\dots+nq_n)$ e, tenuto conto che $q_1+2q_2+\dots+nq_n$ è asintotico a $\frac{\pi^2}{12} n^2$,

giunge alla conclusione che

$$(4.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(1) + \mu(2) + \dots + \mu(n)}{n} = \frac{36}{\pi^4}.$$

Dalla (4.11) Cesàro [1883a, pp.317-324] ricava

$$(4.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(n)}{n} = \frac{6}{\pi^2}$$

ove $\lambda(n)$ è la funzione di Liouville che vale +1 o -1 a seconda che n è composto di un numero pari o di un numero dispari di fattori primi, eguali o diseguali. Dalla (4.12), detto H il numero dei naturali $n \leq N$ tali che $\lambda(n)=1$, si ottiene poi facilmente che la frequenza

$$(4.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{H}{N} = \frac{1}{2} + \frac{6}{\pi^2}.$$

I tre ultimi risultati sono errati:⁵³ già nell'*Additions et rectifications* a [1883c] Cesàro ammette che la (4.11) è in generale errata. Successivamente ([1887c] e [1890a]) darà i valori corretti (cfr. pf.7).

⁵² Cesàro assume qui, come in altre più fortunate occasioni, la forma (media) della funzione allo stesso modo che gli analisti settecenteschi assumevano la forma di un sviluppo in serie.

⁵³ I limiti a primo membro delle (4.11), (4.12) e (4.13) valgono rispettivamente 0, 0, 1/2.

5. Hölder e la H-sommabilità

Una tradizione storiografica vede la prima formulazione della H-sommabilità⁵⁴ in un articolo di Otto Hölder, *Grenzwerte von Reihen an der Convergenggrenze*, apparso nel 1882. È opportuno chiarire, a questo punto, che Hölder [1882] *non contiene* alcuna definizione di somma di serie divergente, ma si limita a generalizzare un risultato di Frobenius [1880], a sua volta generalizzazione di un noto teorema di Abel.⁵⁵

Frobenius [1880] aveva dimostrato che dette S_n le ridotte n-esime di $\sum a_n$, se la serie $\sum a_n x^n$ converge tra -1 e +1 e se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i = M$, allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n x^n = M$. Tale teorema viene notato da Hölder

che lo estende al caso in cui $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i$ non esiste, introducendo le somme $S_n^k = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i^k$ e facendo

vedere che se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^k$ allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum a_n x^n = C$.

Frobenius e Hölder non vanno oltre tali teoremi.⁵⁶ Manca ad essi la coscienza che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^k$ può essere assunto come più ampia definizione di somma di una serie. Non viene, pertanto, compiuto quell'importante passo in avanti verso la matematica moderna costituito dalla possibilità di creare

⁵⁴ Siano S_i le somme parziali della serie divergente $\sum a_i$, posto $S_n^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$, $S_n^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^{k-1}$, ...,

se, per qualche k , $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_n^k$ esiste, allora la serie è detta H-sommabile e la sua somma è $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n S_n^r = S$,

con r il più piccolo valore di k per cui il limite esiste.

⁵⁵ Detta $F(x)$ la somma di una serie di potenze $a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots$ se la serie converge per $x \leq b$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = F(b).$$

⁵⁶ Per quanto Frobenius esplicitamente cita un famosissimo brano di Leibniz sulla somma di $1-1+1\dots$, egli *non* dà una definizione di somma di serie divergente.

mediante una definizione un oggetto di studio. Il teorema di Hölder può suggerire questa possibilità, ma Hölder di fatto non raccoglie il suggerimento.⁵⁷

Naturalmente, *a posteriori*, il teorema di Hölder può essere considerato come teorema della moderna teoria delle serie divergenti: è probabile che questo fatto abbia dato luogo ad interpretazioni non precise come in Hardy [1949] o errate come nel poco felice Tucciarone [1973].

È poco noto in letteratura che il teorema di Frobenius (il quale si può esprimere nella maniera seguente:

se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i = M$, allora $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_0^{\infty} S_n x^n = M$) venne notato e generalizzato oltre che Hölder anche

da Stieltjes. Questi dimostrò [1882] che per $u > 0$ si ha:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \left[S_0 + \frac{u}{1} S_1 x + \frac{u(u+1)}{2!} S_2 x^2 + \frac{u(u+1)(u+2)}{3!} S_3 x^3 + \dots \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \log \frac{1}{1-x} \left[S_0 + \frac{1}{2} S_1 x + \frac{1}{3} S_2 x^2 + \frac{1}{4} S_3 x^3 + \dots \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} S_i$$

3) se $p_n \geq 0$, $\sum_0^{\infty} p_n x^n$ convergente per $0 < x < 1$ e divergente per $x=1$, e $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = M$,

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_0^{\infty} p_n S_n x^n}{\sum_0^{\infty} p_n S_n} = M.$$

Pure questo teorema suggerisce un moderno metodo di sommazione,⁵⁸ anche Stieltjes, però, non intende definire la somma di serie convergenti ma solo sviluppare alcune conseguenze della classica teoria delle serie convergenti.

⁵⁷ Cesàro [1890b] in una situazione analoga (generalizzazione di un teorema di Cauchy) si comporterà in modo diverso, cogliendo il suggerimento che il nuovo teorema forniva.

⁵⁸ Si tratta di una variante del più noto metodo in cui $\sum_0^{\infty} p_n x^n$ è una funzione intera, la somma della serie

$$\sum_0^{\infty} a_n \text{ è per definizione } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sum_0^{\infty} p_n S_n x^n}{\sum_0^{\infty} p_n S_n}, \text{ se esiste.}$$

Se da una parte, Frobenius, Hölder, Stieltjes in questi primi anni 80, sembrano lontani dal compiere il salto concettuale necessario per una definizione di somma di una serie divergente, mentre per Cesàro⁵⁹ tale possibilità sembra già del tutto chiara; d'altra parte le tecniche usate da tali matematici sono molto più aggiornate rispetto a quelle di Cesàro, ancora legato all'interpretazione di Cauchy data da Catalan.

6. Catalan e l'insegnamento di Cauchy

Le concezioni matematiche di Catalan erano state assai progredite nella prima fase della sua attività. Egli aveva cercato di migliorare lo standard di rigore della matematica, basandosi su una nozione di limite derivata da Cauchy che per altro seppe usare in modo innovativo per definire le lunghezze delle curve, per le aree delle superfici, per i volumi.⁶⁰ E così il 5 febbraio 1892, scrivendo a Peano può rivendicare: "j'ai si bien compris, il y a cinquante ans (pour le moins), la nécessité de définir, que, dans mes *Éléments de Géométrie* (1843), j'ai défini les mots: longueur, aire, volume, rapport de deux grandeurs incommensurable, etc." [1893].

Comunque Catalan usa una nozione intuitiva di limite ben lontana dalla concezione ε - δ , per cui le sue idee, innovative negli anni quaranta e cinquanta, sono decisamente superate negli anni ottanta. La lezione che trasmette a Cesàro appare pertanto ambigua: egli è lo strenuo difensore di un rigore che ormai appartiene al passato ed che è messo in crisi da quelle che egli considerava, con una punta di ironia, sottigliezze "metafisiche" dei matematici d'ispirazione tedesca. Di conseguenza, quando, nel 1886, i doveri dell'insegnamento chiameranno Cesàro a riflettere sui fondamenti dell'analisi, egli affronterà le problematiche relative ai limiti e alla continuità non attraverso i nuovi concetti (punti di accumulazione, massimo e minimo limite) elaborati da Cantor, Du Bois-Reymond, ecc., attraverso un'analisi probabilistica, sicuramente originale ma non idonea allo scopo, la quale fu il suo modo di avvicinarsi alla topologia, la grande assente nei metodi simbolici e formali di cui era appassionato cultore.

⁵⁹ E' improbabile una conoscenza diretta da parte di Cesàro dei lavori di Frobenius, di Hölder e di Stieltjes (tra l'altro scritti in lingue sconosciute a Cesàro) i quali sono chiaramente originati in un contesto di ricerca diverso da quello in cui si muoveva il giovane Cesàro.

⁶⁰ Ad esempio, egli definisce: "l'aire d'une figure plane terminée par une courbe est la limite des aires que l'on obtient en inscrivant a cette courbe une série de polygones convexes dont les cotés diminuent indéfiniment, de maniere a ?dernier moindres que toute grandeur donnée" [1843].

La differenza di mentalità che vi è tra la vecchia concezione di Catalan e quella nuova che si andava elaborando, e quindi l'ampiezza del salto concettuale che fu essenziale per Cesàro compiere per giungere alla C-sommabilità, può essere chiarita da due brevi note di Catalan riguardanti due teoremi notevoli sulle serie: il criterio di convergenza di Cauchy e la teorema di Abel.

In *De quelques propositions inexactes, relatives aux séries* (cfr. [1885, pp.282-293]) dopo aver criticato l'uso di serie divergenti in Lagrange, Catalan analizza il criterio di Cauchy per le serie, considerandolo falso o banale a seconda delle interpretazioni che si possono dare alla formulazione di Cauchy.⁶¹ In notazione moderna esse si esprimono nella forma seguente:

$$(1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall m \quad \exists n(\varepsilon, m): \quad \forall n \geq n(\varepsilon, m) \quad |s_{n+m} - s_n| < \varepsilon,$$

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon): \quad \forall n \geq n(\varepsilon, m) \quad \forall m \quad |s_{n+m} - s_n| < \varepsilon,$$

La prima interpretazione è evidentemente falsa,⁶² come Catalan osserva ricordando che la serie armonica, pur divergente, soddisfa ad essa. Questa sarebbe "le sens le plus natural" del criterio di Cauchy: in effetti è, forse, l'interpretazione più vicina alla lettera di Cauchy. Ed è anche l'interpretazione data matematici illustri (cfr. Laugwitz [1989, p.210]).

Non era questa, però, l'interpretazione di Cauchy, infatti questi applica il criterio alla serie armonica effettuata in [1821, cap.VI], il che rende impossibile l'interpretazione (6.1). Alle parole di Cauchy va attribuito il significato (6.2), ossia l'espressione "quel que soit le nombre entier m" deve intesa, per esprimersi con Catalan, nel senso che "m peut être infini ou plutôt indéfiniment grande". Ma in questo

⁶¹ Attenendomi alle *Mémoire sur la convergence des séries*, testo cui fa riferimento Catalan, Cauchy, indicata con $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$ le somme parziali della serie u , afferma: "pour que la série (1) [cioè u_n , n.d.r.] soit convergente, il est nécessaire, et il suffit que les valeurs des sommes

$$s_n, s_{n+1}, s_{n+2}$$

correspondantes à de très-grandes valeurs de n , différent très-peu les unes des autres, en d'autres termes, il est nécessaire, et il suffit que la différence

$$s_{n+m} - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+m-1}$$

divienne infiniment petite, quand on attribue au nombre n une valeur infiniment grande, quel que soit d'ailleurs le nombre entier représenté par m ..." ([1827, II, p.221]).

⁶² Catalan [1885, p.286] esprime con le parole: "Une série est convergente si la somme d'un nombre quelconque (mais déterminé) de termes consécutifs tend vers zéro, lorsque le rang du premier d'entre eux croit indéfiniment".

modo, a parere di Catalan, il criterio diviene banale, riducendosi all'affermazione: "une série est convergente ... quand elle est convergente!"

"En effet -egli commenta- pour le quantité $s_{n+m}-s_n$ tende vers zéro quand y fait croître indefiniment et successivement d'abord m, ensuite n, il faut et il suffit que cette quantité tende vers une limite finie et déterminée quand on y fait d'abord croître m; c'est-à-dire il faut e il suffit que la série soit convergente" [1885, p.286].

Il criterio di Cauchy tradotto nel linguaggio ε - δ presenta una riduzione della verifica della sommabilità a indici finiti e le osservazioni di Catalan sono infondate. Ma la formulazione ε - δ non era ovviamente disponibile a Cauchy e non fu mai accolta da Catalan. In un linguaggio più vicino a quello di Cauchy il

criterio suona: affinché la serie u_n sia convergente è necessario e sufficiente che $\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}$ sia *infinitement*

*petite*⁶³ quando m e n sono *infinitement grandes*, ossia $\left(\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i} \right)_{m=\infty, n=\infty} \cong 0$ o, se si vuole,

$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i} = 0$ in quanto prima della concezione degli ε - δ risulta tutt'altro che facile da distinguere il

limite dal puro e semplice operare con numeri infiniti. In questa formulazione il criterio di Cauchy è

effettivamente autoevidente in quanto $\left(\sum_{k=0}^{m-1} u_k \right)_{m=\infty} \cong \left(\sum_{k=0}^{n-1} u_k \right)_{n=\infty} + \left(\sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i} \right)_{m=\infty, n=\infty}$

o anche

$$(3) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{m-1} u_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} u_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{m-1} u_{n+i}$$

E' probabile che Catalan, nel brano sopra riportato, pensi proprio alla (3).

Si deve, però, notare che anche Cauchy aveva ritenuto del tutto ovvio il criterio (cfr. in particolare [1829, pp.379-380]) e non si era posto minimamente il problema di dimostrare una proposizione tanto evidente che quasi un secolo prima Euler [1734] aveva considerato un principio che si poteva utilizzare senza alcuna spiegazione particolare. La critica di Catalan più che nei confronti di Cauchy sembra rivolta verso i moderni autori che non solo negavano l'evidenza di tale criterio ma anche quella di molte altre

⁶³ Sugli infinitesimi in Cauchy cf. Laugwitz [1989].

proposizioni matematiche, come la completezza dei numeri reali, l'esistenza del limite di una successione di numeri decrescenti, l'esistenza di un punto comune a una successione di intervalli contenenti l'uno nell'altro e di ampiezze tendenti a zero (cfr. ad esempio Catalan [1860]) che nello spirito della matematica di Cauchy erano considerate evidenti e quindi non richiedevano una dimostrazione.⁶⁴ L'attacco polemico contro Cauchy, in realtà, finisce con il mostrarci proprio la vicinanza tra la concezione di Catalan e quelle di Cauchy.

In *Sur un théorème de Abel* Catalan [1885, pp.294-297] considera autoevidente il teorema di Abel. Se

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k x^k$ converge per $0 < x < b$ a $F(x)$ si porre in dubbio, si chiede Catalan, la correttezza dell'equazione

$\sum_{k=0}^{\infty} u_k b^k = F(b)$? "Autrement dit peut-on contester celle-ci: $\lim F(x) = F(\lim x) = F(b)$?" Pur non essendo

persuaso della necessità di una dimostrazione ne fornisce una consistente nel considerare $F(x) = f_n(x) + \psi_n(x)$, ove $f_n(x)$ è la somma parziale e $\psi_n(x)$ il resto della serie. Catalan fa tendere x a b e, *sic et simpliciter*, scrive $F(b) = f_n(b) + \psi_n(b)$, poi per n tendente ad infinito ottiene la tesi.

Aggiunge, poi, che effettuando la dimostrazione "je m'aperçois qu'il n'ajoute rien à l'évidence que je crois reconnaître dans le Théorème en question; et, malgré moi, je pense aux gens difficiles qui voudraient démontrer ce *postulatum*, moins célèbre que celui d'Euclide:

Deux points C, D, étant situés de part et d'autre d'une droite indéfinie AB; la droite qui joint ces deux points coupe nécessairement AB."⁶⁵

Il paragone con un assioma geometrico concernente la continuità chiarisce che la difficoltà maggiore sta proprio in tale nozione. Catalan (come Cauchy, le cui idee, forse, egli porta alle estreme conseguenze) è legato a una concezione intuitivamente geometrica della continuità: si può essere sicuri

⁶⁴ E' singolare che l'unica concessione alla nuova mentalità è nell'osservazione quasi incidentale, ma contraddittoria rispetto al contenuto della nota, secondo cui Cauchy ha enunciato il criterio ma non lo ha dimostrato. Ciò è perfettamente vero: ma non è chiaro perché Cauchy avrebbe dovuto dimostrare ciò che per lui era ovvio.

⁶⁵ Catalan concede che in casi molto rari posto $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $\psi_n(x) = F(x) - f_n(x)$ possa accadere che $f_n(b)$ risulti indipendente da n sia cioè una costante sicché anche $\psi_n(b)$ si riduca a una costante. In tal caso si ha l'identità $F(b) = B + C$ e il suo ragionamento non è più applicabile.

che guardava con sospetto alla concezione secondo cui la funzione $y(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionale} \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionale} \end{cases}$ è continua in

0. Non poteva quindi essere in grado di distinguere tra continuità e uniforme continuità.

La questione della continuità si riconnette con un problema nel quale interviene Catalan e che è probabile abbia direttamente influenzato alcune ricerche di Cesàro: le funzioni continue senza derivate. Il 4 maggio 1872 Philippe Gilbert presentò all'Accademia di Belgio una *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues* [1872a] in cui si attaccava l'esempio di Henkel [1870] di funzione non

derivabile $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{g(\sin \pi n x)}{n^s}$ ricavato dalla funzione $g(x) = x \sin(1/x)$. Gilbert, inoltre, riprendeva e, a suo dire,

migliorava una dimostrazione di Lamarle [1855], presentata il 1 luglio 1854, all'Accademia di Belgio, del cosiddetto teorema di Ampere: ossia una funzione (continua) ha sempre derivata non nulla salvo valori eccezionali e isolati della variabile. Catalan nel suo rapporto [1872a] avanzò dubbi sulle argomentazioni di Gilbert che replicò in [1872b]. Neanche un successivo intervento di Catalan [1872b] lo convinse, ma alla fine Gilbert si arrese in [1873] al seguente esempio di Schwarz [1873]:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g(2^{-k} x)}{2^{-2k}} \quad \text{con } g(x) = [x] + \sqrt{x + [x]}$$

Nel 1881 ricordando l'episodio in una lettera, pubblicata nel 1893, Catalan [1893, p.5] afferma: nominato primo Commissario redasse à *grand' peine* un lungo rapporto, ma poi aggiunge che su tale questione "la difficulté reste entière". In realtà pur contestando la dimostrazione di Gilbert, Catalan e il suo ambiente sono lontani dal comprendere i rapporti tra continuità e derivabilità. Invero Mansion [1877] ancora ritiene la dimostrazione di Lamarle emendabile fino al punto di poter offrire le condizioni di derivabilità di una funzione.

I problemi della continuità e della derivabilità saranno affrontati da Cesàro con l'aiuto del calcolo delle probabilità.

7. Definizione probabilistica di somma

A partire dal 1886 Cesàro abbandona definitivamente le vecchie nozioni naturalistiche di continuità e di limite. Il suo avvicinamento al metodo ε - δ si compie secondo un percorso molto originale in cui fa ricorso a concetti di natura probabilistica, con i quali aveva notevole familiarità sia perché trattati nell'ambiente di Catalan, sia perché applicati in numerosi studi sugli eventi aritmetici.

Stimolato da Lerch [1886a] dove si mostrava una serie convergente $\sum u_n$ ma avente il rapporto $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

non limitato (ossia $\max \lim u_n = \infty$), Cesàro analizza le condizioni di convergenza delle serie facendo ricorso al seguente teorema. Data una successione a_n , se si possono estrarre da essa successioni $a_{n_k}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, r$, convergenti a dei limiti l_i , per $i=1, \dots, r$, in modo tale che gli insiemi $\{a_{n_k}^{(i)}\}$ costituiscono una partizione dell'insieme $\{a_n\}$ e se, inoltre

$$(7.1) \quad \omega_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_i(n)}{n}$$

ove $t_i(n)$ rappresenta il numero dei termini della i -esima estratta non superiori ad n , allora si ha⁶⁶

$$(7.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_1^n a_n = \sum_1^r \omega_i l_i$$

Dalla (7.2), per la cui dimostrazione Cesàro utilizza per la prima volta esplicitamente il metodo ε - δ ,

discende per $a_n = \log \frac{u_n}{u_{n-1}}$ e $a_0 = 1$, che se tende verso limiti differenti l_1, l_2, \dots, l_r , allora $\sqrt[n]{u_n}$ tende verso un

limite determinato l , con⁶⁷

$$(7.3) \quad l = l_1^{\omega_1} l_2^{\omega_2} \dots l_r^{\omega_r}$$

L'uso del calcolo delle probabilità permette a Cesàro di raffinare la nozione di limite, aggirando le più idonee nozioni di punto di accumulazione, di massimo e minimo limite del tutto estranee alla sua formazione culturale.⁶⁸ Al loro posto Cesàro usa la nozione di probabilità di un numero preso a caso di appartenere ad un sistema di numeri; di fatto, però, egli usa ipotesi di regolarità. Così le $a_{n_k}^{(i)}$ non sono successioni estratte qualsiasi ma determinate dalla "forma di n ", ossia Cesàro non pensa a successione estratte secondo una legge qualsiasi ma a successioni $n_k = g(k)$ ove $g(k)$ è una funzione esprimibile da una formula analitica. Di conseguenza i sistemi di numeri considerati non sono insiemi qualsiasi, ma insiemi che si formano secondo leggi che hanno una certa "regolarità", in assenza della quale non avrebbe

⁶⁶Cesàro [1887b, p.273] osserva che "secondo i principii del Calcolo delle probabilità, si può *matematicamente sperare* che il valore" di a_n "sia, per n infinito, il suo *medio valore*."

⁶⁷ La (7.3) si trova enunciata senza dimostrazione già in [1886-87].

⁶⁸ Per alcuni (modesti) sviluppi delle idee di Cesàro cfr. Giudice [1891].

senso considerare i limiti (7.1).⁶⁹ Cesàro è perciò lontano dalla portata generale delle nozioni topologiche o insiemistiche. Egli, poi, rimane legato ad una mentalità "positivista" per cui l'oggetto del calcolo va esibito effettivamente: si osservi che, di fronte ad una questione squisitamente di esistenza, egli incentra la sua attenzione sulla (7.3), formula che esibisce un legame tra enti matematici.

Nel caso che $r=1$, ossia se a_n converge a un limite a_∞ , Cesàro ricava dalla (7.2) un risultato noto

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = a_\infty$ e applicandolo alle somme parziali di una successione convergente $\sum u_n$, ottiene⁷⁰

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k a_k = 0$ (sempre che il limite esista). Cesàro [1886-87, p.139-142] ha così l'occasione per

correggere, senza citarlo esplicitamente un teorema di Catalan [1870, p.12]. Questi sosteneva che per ogni serie convergente a termini positivi⁷¹ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. In realtà è $\min \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$. Cesàro

giustamente osserva che la condizione $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ non è necessaria, ma la mancanza della nozione di

minimo limite gli impedisce una formulazione più precisa. Si noti che ancora una volta la questione ruota intorno all'esistenza di un limite, che veniva lasciato sottintesa nella formulazione di Catalan. Ciò aveva una giustificazione in una matematica in cui i fenomeni patologici si presentavano come eccezionali. Ma ormai si va verso studi in cui il patologico è l'ambiente entro cui la regolarità va delimitata espressamente: Cesàro si rende conto che le questioni di esistenza non possono essere più sottintese.⁷²

Su tale tema l'evoluzione di Cesàro sembra avere la sua definitiva maturazione nel 1888, tra la stesura di *Sur la simple convergence* (cfr. Documento II) e quella di *Sur une distribution de signes* [1888f].

⁶⁹ E' di estremo interesse la lettera di Lerch a Cesàro del 22/12/1887 (cfr. Documento III) per la differente impostazione che, pur trattando lo stesso argomento, mostrano il matematico boemo che chiama Weierstrass "mon maître" ([1886b]) e l'allievo di Catalan che durante la sua formazione culturale non ha ricevuto conoscenze aggiornate e che deve creare da sé gli strumenti per raffinare l'analisi della nozione di limite.

⁷⁰ Cfr. [1887-88, p.139] e [1888h, p.314-315].

⁷¹ "Dans toute série convergente composé de termes positifs les produit du terme général par le rang de ce terme a pour limite zéro."

⁷² Nella stessa definizione di somma di una serie del 1883, Cesàro assumeva comunque l'esistenza del valore medio, supponendo comunque una regolarità, sia pure in forma più debole: di fatto egli sembra supporre che ripetendo il calcolo dell'espressione media necessariamente si regolarizza la serie.

La prima nota contiene un teorema che, in un certo senso, inverte il criterio di Leibniz sulle serie alternate. La dimostrazione è effettuata però nell'ipotesi che la probabilità ω di incontrare un termine positivo esista, ossia che esista il limite della frequenza relativa dei termini positivi. Tale nota fu inviata da Cesàro ad Hermite affinché la presentasse ai *Comptes Rendus* ma la pubblicazione fu negata da Joseph Bertrand, segretario perpetuo dell'Accademia delle Scienze di Francia, per motivi che probabilmente non hanno niente a che vedere con il suo contenuto. Hermite comunicò allora a Cesàro che Darboux era pronto ad accoglierla nel *Bulletin des Sciences Mathématiques* (cfr. Ferraro [1996]). Cesàro però preferì ritirare la nota e pubblicare il teorema in *Sur une distribution de signes*, con una diversa dimostrazione, facendolo discendere da un risultato più generale, espresso dalla formula la (8.3), di cui discuterò nel paragrafo seguente. Anche in [1888f] per applicare la (8.3) suppone che ω esista, ma in questo caso Cesàro riconosce di aver "tacitement" ammesso l'esistenza del limite della frequenza ed inizia ad esaminare il caso che ω non esista. Egli riesce a dimostrare che ω esiste se $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \infty$, essendo a_n il termine generale della serie e mostra come costruire infinite serie semplicemente convergenti per le quali la frequenza dei termini positivi e negativi oscilla.

Cesàro ha lo stesso atteggiamento nei confronti dei risultati ottenuti nella sua giovinezza nell'ambito della teoria asintotica dei numeri. Egli ritorna più volte sulle formule errate (4.11), (4.12) e (4.13). In [1887c] le corregge (esplicitamente la (4.13), implicitamente le altre due) e attribuisce l'errore a "uso illegittimo di alcune eguaglianze assintotiche". Per quanto Cesàro [1887c] giunga a risultati numericamente corretti, l'articolo ha ancora lo stesso spirito positivista di [1883c]: mancano le dimostrazioni di esistenza⁷³ e la verifica della liceità di certi passaggi.

Solo in [1890a], articolo strettamente collegato alle ricerche iniziate con l'esame di Lerch [1886a], Cesàro ammette la scarsa rigosità *in generale* dei suoi metodi di aritmetica asintotica, dando così, a titolo di esempio, una corretta formulazione e dimostrazione del suo risultato relativo al valore medio di $\lambda(n)$.⁷⁴

⁷³ Forse per questo motivo Dikson [1919] non attribuisce tali risultati a Cesàro. L'assenza di dimostrazione di esistenza passa del tutto inosservata nei matematici illustri con cui Cesàro è in corrispondenza, come Hermite e Cremona, e che presentano spesso i suoi articoli. Solo in una lettera di Halphen del giugno 1883 sembra esservi una critica al riguardo. Un'inadempnienza del genere gli verrà poi segnalata molto dopo (nel 1903) da Landau.

⁷⁴ Egli cioè ha dimostrato solo che se esiste $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(1) + \lambda(2) + \dots + \lambda(n)}{n}$ allora esso è uguale a 0.

L'analisi dei criteri di convergenza convince Cesàro che la nozione di limite (non solo quella di somma di una serie, come aveva fatto in precedenza nel 1883) va generalizzata e con essa altre fondamentali nozioni dipendenti dal concetto di limite: continuità, derivabilità, integrabilità.

La strada scelta è sempre quella tutt'altra ben fondata, all'epoca, del calcolo delle probabilità e che in realtà presuppone tali nozioni.

Cesàro [1888k] analizza la discontinuità delle funzioni e mostra di essere ormai lontano dalla concezione di Catalan. Data una funzione $f(x)$ egli suppone calcolata, in un intervallo $(x, x+h)$,⁷⁵ la probabilità che l'incremento assoluto della funzione $\Delta f=f(x+h)-f(x)$, superi un ε positivo assegnato, che qui indico con

$$pr_h \{|\Delta f| > \varepsilon\} \text{ e pone: } \lim_{h \rightarrow 0} pr_h \{|\Delta f| > \varepsilon\} = \omega_\varepsilon(x) \text{ e } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_\varepsilon(x) = \omega(x)$$

Definisce $\omega(x)$ il grado di discontinuità di una funzione $f(x)$ e afferma che $1-\omega(x)$ misura l'aspirazione di $f(x)$ alla continuità. È evidente che se $f(x)$ è continua allora $\omega_\varepsilon(x)=0$, per ogni ε , e quindi $\omega(x)=0$; inoltre se la $f(x)$ ha in x una discontinuità di 1^a specie allora $\omega_\varepsilon(x)=1$ per ε sufficientemente piccolo. Ma la condizione $\omega(x)=0$ non basta a caratterizzare le funzioni continue, come si osserva per la funzione

$$(7.4) \quad y(x) = \begin{cases} \text{sen } \frac{1}{x} & \text{per } x \text{ razionale} \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionale e per } x = 0 \end{cases}$$

la quale è chiamata da Cesàro quasi continua avendosi nel punto zero "per così dire, una discontinuità nascente" [1888k, p.281]. Cesàro costruisce anche esempi di funzioni che abbiano un determinato grado θ di probabilità⁷⁶ e non esita a confrontare il grado di discontinuità di funzioni "ugualmente discontinue", studiando il modo in cui $\omega(x)$ varia al tendere di ε a zero.

⁷⁵ Cesàro per semplicità considera solo ciò che accade a destra di x .

⁷⁶ Egli considera la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\theta, \theta)$, ossia

$$(7.5) \quad \phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (-\theta, \theta) \\ 0 & \text{per } x \notin (-\theta, \theta) \end{cases}$$

Allora la funzione

$$(7.6) \quad y(x) = \begin{cases} \phi(\text{sen } \frac{1}{x}) & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Ad esempio per le funzioni $\sin\left(\sin\frac{1}{x}\right)$ e $\sin\left(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{x}\right)$, $\omega_\varepsilon(x)$ è espresso rispettivamente da $1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}$ e da

$1 - \frac{2\varepsilon n}{\pi}$. Quindi il grado di discontinuità $\omega(x)$ è uguale ad 1, in entrambi i casi. Ma "si può dire che

l'aspirazione della seconda alla continuità è n volte più energica dell'aspirazione della prima" [1888k, p.282]. Di conseguenza egli introduce un nuovo concetto: l'*intensità d'aspirazione* al grado di

discontinuità, che viene ad essere misurata dal valore assoluto di $\frac{d\omega_\varepsilon}{d\varepsilon}$.

L'analisi di Cesàro verte su esempi forniti dalle funzioni del tipo $\sin\frac{1}{x}$ e $[x]$, ossia le classiche funzioni

utilizzate come base per la costruzione di funzioni continue senza derivate.⁷⁷ Inoltre le sue considerazioni

coivolgono situazioni di estrema irregolarità come la funzione caratteristica dell'insieme dei razionali (che egli chiama funzione di Hankel) per le quali la nozione di limite è insufficiente. Si pone allora il problema di una sua estensione, è ancora una volta la scelta ricade sul valore medio con cui pensa di sostituire anche la derivata quando manca.⁷⁸

Cesàro procede nel seguente modo. Considera la probabilità $p_{\varepsilon,h}(x,a,h)$ che in un intervallo $(x, x+h)$ la funzione $f(x)$ soddisfi la condizione $|f(x)-a|<\varepsilon$ e pone

$$\lim_{h \rightarrow 0} p_{\varepsilon,h}(x, a, h) = p_\varepsilon(x, a) \text{ e } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x, a) = p(x, a)$$

$p(x,a)$ è l'aspirazione di x al valore a , infatti se $f(x)$ è continua in x_0 si ha: $p(x_0,a)=1$, per $a=f(x_0)$, e

$p(x_0,a)=0$, per $a \neq f(x_0)$. Egli pensa di definire come medio limite di $f(x)$ in x la somma:

ha grado di probabilità θ .

⁷⁷ Mancano prove dirette al riguardo, ma è probabile che vi sia in Cesàro una qualche reminiscenza della polemica tra Catalan e Gilbert. Il ricordo era ancora vivo negli anni 80 (cfr. Catalan [1893]).

⁷⁸ Riferendosi a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\omega - \omega_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{d\omega_\varepsilon}{d\varepsilon}$ afferma: "quando tale limite non esiste, si è obbligati a ricorrere a criteri

di probabilità per formarsi un convincimento morale circa la maggiore o minore aspirazione della funzione considerata. Occorre dunque estendere il concetto di limite" [1888k, p.283].

$$(7.10) \quad l = \sum ap(x, a)$$

estesa a tutti i valori di a . Ad esempio per la funzione $f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]$, per $x \neq 0$ e nulla nell'origine, il medio

limite per $x=0$ è $\frac{1}{2}$.

Benché Cesàro prometta di tornare sull'argomento quando si occuperà dell'integrazione con criteri di probabilità, egli si mostra pessimista circa l'uso della nozione di medio limite nell'Analisi classica in quanto non è sempre possibile estendere ad essa tutte le proprietà dei limiti ordinari e quindi non sembra esservi la pratica possibilità di sottoporlo al calcolo.⁷⁹ La strada scelta da Cesàro è infatti del tutto inidonea allo studio della derivabilità e della integrabilità, ma di certo l'analisi condotta deve aver influito sulle sue ricerche intorno all'esprimibilità analitica delle funzioni continue senza derivate, che Cesàro compie alcuni anni più tardi, dopo aver letto Peano [1890] e von Koch [1904] e che sembrano l'ultima manifestazione dei suoi interessi giovanili.

Cesàro [1888k, p.286], comunque, ritiene che la nozione di medio limite importante "quando se ne circoscrive l'uso alle teorie che l'hanno generata, cioè allo studio degli eventi matematici e delle mutue distribuzioni numeriche". Nel caso di una successione a_n , Cesàro, dato un numero x qualsiasi, chiama $p_\varepsilon(x)$ la probabilità che $|x - a_n| < \varepsilon$ e pone $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} p_\varepsilon(x) = p(x)$, e quindi il *medio limite* è $l = \sum xp(x)$ il quale, in

ipotesi particolari, avendosi $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$, si riduce alla (7.2).

Ciò induce Cesàro [1888k, pp.283-284] "a definire altrimenti il limite di una successione." Se non esiste

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, si assume come limite della successione $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$; se anche la seconda successione

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$ non ha limite "se ne deduca una terza, e così via".

⁷⁹Egli osserva: "Quanto alla discontinuità delle funzioni non è facile scorgere fin dove potrebbe farsi sentire l'utilità di misurarla esattamente o in media; ma è certo che la questione acquisterebbe alta importanza se il contegno della funzione specifica ω da noi introdotta avesse qualche influenza su taluni essenziali fatti concernenti le funzioni, come la derivabilità, l'integrabilità e l'esprimibilità analitica." [1888k, pp.286].

Cesàro osserva che, benché queste successioni "derivate" tendano a divenire progressivamente $a_1, a_1, a_1, a_1, \dots$, possono esistere alcune di "specie trascendente" nel senso che fra le sue "derivate" non se ne trova alcuna che abbia un limite determinato.⁸⁰

Se si applica tale nozione alle somme parziali di una serie,⁸¹ si nota che un'interpretazione letterale del testo molto secco di Cesàro ci fornisce la H-sommabilità. Questa definizione è quindi diversa da quelle del 1883, la cui idea base sarà ripresa nel 1890. Ma è soprattutto diverso il linguaggio in cui Cesàro formula la definizione che non ha più la vaghezza dei riferimenti al comportamento asintotico e non mostra più l'ingenua illusione che la ripetizione della procedura regolarizzi, prima o poi, la successione.

8. La ricerca dei principi fondamentali della teoria asintotica dei numeri e i teoremi sulle medie delle successioni

Gli ultimi passi verso la C-sommabilità vengono compiuti da Cesàro nel tentativo di "établir les principes fondamentaux d'une théorie asymptotique des nombre".

In [1888d] Cesàro dimostra che se una funzione $F(n)$ è in media uguale a σ allora

$$(8.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^r F(1) + 2^r F(2) + \dots + n^r F(n)}{n^{r+1}} = \frac{\sigma}{r+1}$$

Dalla (8.1) posto $r=1$, $F(n)=\varphi(n)/n$, poiché $\varphi(n)/n$ è uguale in media⁸² a $\frac{6}{\pi^2}$, si deduce immediatamente e rigorosamente la (4.10).

Cesàro dà, però, un'interpretazione non corretta della (8.1), che enuncia affermando che $n^r F(x)$ è "asintotico" a σn^r , per cui, applicandola a $\varphi(n)/n$, ritiene di aver provato che $\varphi(n)$ è asintotico a $n \frac{6}{\pi^2}$. In

⁸⁰ Le successioni convergenti sono dette da Cesàro di genere 0, quelle che hanno una prima successione "derivata" convergente di genere 1, ecc.

⁸¹ Come Cesàro fa per la (7.2) in [1887b, p.274], dove egli osserva che tale formula permette "di dare un senso preciso alla parola *somma* d'una serie indeterminata", nel senso che il valore medio dei limiti della successione delle somme parziali si può assumere come somma della serie. Ad esempio che per la serie $1-1+1-1+\dots$ le cui somme parziali di indice pari convergono a 0 e quelle di indice dispari a 1, "ha per somma $\frac{1}{2}$ ".

⁸² Risultato che egli deduce dalla (4.3) ridimostrata in [1888d].

effetti ha mostrato solo che $\sum_{i=1}^n \varphi(i)$ è asintotica a $\frac{3}{\pi^2} n^2$, ma probabilmente pensa che si possa da ciò

dudurre che $\varphi(n)$ è asintotico a $\frac{6}{\pi^2} n$, con un ragionamento analogo a quello effettuato in *Calcul moyenne*

per calcolare la somma della (4.7), dove da $A_3(n) = \sum_{i=1}^n A_2(i) = \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{n+1}{2} \right]$ uguale (in media?) a

$\frac{n^2}{8}$ era risalito a $A_2(n) = \frac{n}{4}$.

L'articolo è oggetto di una critica da parte di Jensen [1888d], alla quale Cesàro ([1888m] e [1889a]) risponde sostenendo che come si hanno eguaglianze propriamente dette e eguaglianze medie, così si ha l'asintotismo propriamente detto e l'asintotismo medio. Egli intendeva riferirsi a quest'ultimo anche se ammette di aver omesso l'aggettivo "moyennement". Ritene, però, che tale omissione possa essere giustificata dalla definizione limite proposta in [1888k].

La risposta non è, evidentemente, del tutto veritiera: in realtà egli aveva usato i vecchi concetti del suo periodo giovanile (d'altra parte *Medie e assintotiche espressioni* era stato pubblicato, con molto ritardo rispetto alla stesura, solo l'anno prima, senza che Cesàro sentisse il bisogno di modificarlo). È probabile che costretto da Jensen, con cui la polemica era già aspra per altri motivi (cfr. Ferraro [1996]), egli reinterpreti la questione alla luce della definizione di limite esaminata nel paragrafo precedente e, soprattutto, sia costretto a chiarire definitivamente la differenza tra calcolo medio e asintotico.⁸³

Nello steso [1888d] Cesàro generalizza la (8.1): se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$ esiste e $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right) \neq 0$ allora

$$(8.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n c_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_i$$

In questo modo la (8.1) viene inserita armonicamente nell'ambito del suo vasto lavoro sulle medie, che si

può considerare un progressivo ampliamento di un noto teorema di Cauchy: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f(n) - f(n-1)]$.

Cesàro [1888f, p.307] dimostra che se A_i è una serie crescente all'infinito e v_i una serie divergente a termini positivi, si ha

⁸³ La stessa confusione si trova in [1888a, p.293].

$$(8.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n A_i u_i}{\sum_{i=1}^n A_i v_i}$$

sempre che esista il secondo membro.⁸⁴

Cesàro [1888h, pp.317-318] fa vedere che se $\sum v_n$ è una serie divergente a termini positivi allora

$$(8.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n A_i v_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} A_i$$

La (8.4) mostra come si possa generalizzare la nozione di somma di una serie tramite un'opportuna scelta di un successione divergente $\sum v_n$. Letta *a posteriori* essa fornisce l'idea base delle medie di Nörlund, come, *a posteriori*, Hölder [1882] fornisce suggerisce la H-sommabilità. Di fatto vari risultati che Cesàro ottiene intorno al 1888 si possono interpretare, *a posteriori*, come teoremi sulle medie di Nörlund, ad esempio (8.3) assicura sotto certe ipotesi un legame tra la somma (N, u_n) e (N, v_n) di una serie $\sum a_n$, avente somme parziali A_n . La strada che Cesàro sceglie è, comunque, di portata meno generale: egli infatti si limiterà a considerare il caso $v_n = \binom{r+n-1}{n-1}$, con r intero positivo.

Nel corso delle sue ricerche sulle serie Cesàro ha modo di fornire nuove giustificazioni alle sue vecchie idee sulle serie sostenendo la labilità del confine tra convergenza e divergenza. Egli [1888g] osserva che se una serie $\sum v_n$ è divergente, si può costruire a partire da essa una serie meno divergente⁸⁵ considerando una qualsiasi funzione $f(x)$ crescente al crescere di x e avente derivata prima tendente a

⁸⁴ Per $u_n = c_n v_n$ e $A_n v_n = 1$, si ottiene in ipotesi diverse la (8.2) (esistenza del secondo membro, la serie v_n è divergente e i suoi termini decrescono e tendono a zero).

⁸⁵ Date le serie divergenti di termine generale u_n e v_n , la prima è meno divergente della seconda se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n u_i}{\sum_{i=1}^n v_i} = 0$.

=0.

zero per x tendente all'infinito e ponendo $u_n = f\left(\sum_{i=1}^n v_i\right) - f\left(\sum_{i=1}^{n-1} v_i\right)$. Ne conclude: "Il est donc impossible de séparer nettement la classe des séries convergentes de celle des séries divergentes. C'est à cette impossibilité que nous devons l'imperfection nécessaire de tous les caractères spéciaux de convergence" [1888g, p.288].⁸⁶

9. C-sommabilità

Le lunghe ricerche compiute da Cesàro trovano una conclusione nel citato *Sur la multiplication des séries*, ove in modo apparentemente occasionale è data la definizione di C-sommabilità. In tale articolo, Cesàro si pone il problema di generalizzare il teorema di Cauchy sul prodotto delle serie le cui ipotesi erano state già ridotte da Mertens [1875]. Cesàro si basa sul seguente lemma:

Se, per n tendente all'infinito, a_n e b_n tendono, rispettivamente, ad a e b , allora:

$$(9.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n} = ab$$

Date le serie $\sum u_n$ e $\sum v_n$ convergenti a U e V , sia $\sum w_n$ il loro prodotto, indicate con U_n, V_n e W_n le rispettive somme parziali, Cesàro ottiene

$$(9.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{W_1 + W_2 + \dots + W_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_1 V_n + U_2 V_{n-1} + \dots + U_n V_1}{n} = UV .$$

per cui se $\sum w_n$ non converge, il suo valore medio è proprio uguale a UV .

⁸⁶ Un'osservazione analoga si trova in [1888n], ove Cesàro, data una serie convergente $\sum u_n$ ne costruisce

altre meno convergenti, ponendo $v_n = f\left(\sum_{i=n}^{\infty} v_i\right) - f\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} v_i\right)$ ove $f(x)$ è una funzione tendente a zero per x

crescente all'infinito e avente derivata prima crescente all'infinito. La serie $\sum v_n$ è detta meno convergente di

$\sum u_n$ se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{\alpha_n} = \infty$, ove α_n è il resto di $\sum u_n$ e β_n è il resto di $\sum v_n$.

Il risultato si può generalizzare. Infatti se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^{r-1}} = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^n}{n^{s-1}} = b$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1}{n^{s-1}}$
 $= \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}$ e, quindi, se le tre serie w_n, u_n, v_n ammettono valori medi W, U, V , si ha $W=UV$.

Prima di procedere ad ulteriori generalizzazioni Cesàro, finalmente, dà la definizione di somma di serie indeterminata. Egli chiama *serie semplicemente indeterminate* quelle serie $\sum u_n$ la cui successione delle somme parziali U_n ammette un valore medio U , che per definizione è definito quale *somma della serie*. Nel caso che U_n non ammette valore medio, Cesàro propone di sostituire la ricerca del limite della successione U_n , con quelle delle $U_n^{(r)}$ definite dalle uguaglianze:

$$(9.3) \quad C_{r+n-1, n-1} U_n^{(r)} = u_n + C_{r+1, 1} u_{n-1} + C_{r+2, 1} u_{n-2} + \dots + C_{r+n-1, n-1} u_1$$

ove $C_{r, n} = \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!}$. Considerate allora le successioni

$$(9.4) \quad U_n, U_n^{(1)}, U_n^{(2)}, U_n^{(3)}, \dots$$

Cesàro chiama u_n *r volte indeterminata* se $U_n^{(r)}$ è la prima delle (9.4) ad ammettere un limite U , che, per definizione, è la *somma* di u_n .

Questa definizione dà gli stessi risultati di quella del 1883: è cambiato il linguaggio in cui Cesàro la esprime, ma è un cambiamento che presuppone il passaggio a una concezione moderna della matematica.

Cesàro subito mostra che la definizione è ben posta perché se $U_n^{(r)}$ converge allora anche $U_n^{(r+1)}$ converge allo stesso limite. Infatti vale la relazione

$$C_{r+n, n-1} U_n^{(r+1)} = U_1^{(r)} + C_{r+1, 1} U_2^{(r)} + C_{r+2, 2} U_3^{(r)} + \dots + C_{r+n-1, n-1} U_n^{(r)}$$

e quindi, tenuto conto che $\sum_{i=1}^n C_{r+i-i, i-1} = C_{r+n, n-1}$ ed applicando la (8.3) si ha: $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n^{(r+1)} = U_n^{(r)}$.

Quasi a voler rimarcare che la definizione porta a compimento il suo programma di ricerca volto a fornire una giustificazione rigorosa alle uguaglianze assurde, Cesàro fornisce i seguenti due "interessanti" esempi di serie r volte indeterminate:

$$1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - 4^{r-1} + \dots = \frac{2^r - 1}{r} B_r$$

$$1^{r-1} - 2^{r-1} + 3^{r-1} - 4^{r-1} + \dots = \frac{1}{2} E_{r-1}$$

Egli affronta il problema centrale della possibilità di assoggettare le serie indeterminate al calcolo, spiegando il senso della classificazione delle serie da lui introdotta "qui est sans doute incomplète et pas assez naturelle, mais qui nous suffit, pour le moment, pour montrer qu'on peut parfaitement bien se servir des séries indéterminées dans les calculs, quoi qu'en pensent la plupart des géomètres." [1890b, p.360].

Egli nota ancora: "Il est téméraire d'affirmer que les séries non convergentes n'auront jamais d'utilité." Questa idea era stata già espressa da Cesàro molti anni prima, ma egli ora supera la sua concezione originaria, alla cui radice vi è una distinzione, per esprimersi con le parole di Pincherle, tra l'espressione simboliche, prive di un contenuto effettivo, reale, e le espressioni effettive.⁸⁷ In [1890b], invece, Cesàro lucidamente sostiene l'aspetto *convenzionale* della definizione di somma di Cauchy, la quale quindi, almeno da un punto di vista concettuale, non ha quel carattere necessario che gli attribuiscono i contemporanei: forse è più semplice e più utile di altre convezioni, ma è pur sempre una convenzione.⁸⁸

Si noti la differenza con Stieltjes [1886] il quale nell'introdurre le serie semiconvergenti afferma che allo

sviluppo $F(x) = \sum_{i=1}^n m_n \frac{1}{x^n}$ si può riguardare come un modo *simbolico* per esprimere

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = m_0; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x[F(x) - m_0] = m_1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2[F(x) - m_0 - m_1 \frac{1}{x}] = m_2; \dots$$

⁸⁷ In una lettera non datata a Cesàro, tutt'ora conservata nel Fondo Cesàro, Pincherle parla di una distinzione essenziale "fra le proprietà *formali* ed *effettive*. *Formalmente*, si può sempre dire che l'equazione

$$\varphi(x) = \int_{(c)} e^{-xz} f(z) dz$$

si risolve mediante

$$F(x) = \int_{(c')} e^{+xz} f(z) dz$$

la difficoltà sta nel dare i limiti entro i quali tale soluzione ha un significato e nella determinazione delle linee d'interpretazione." Cfr. anche Pincherle [1887].

⁸⁸ Si noti come Hölder [1882] e Stieltjes [1882] come Cesàro [1890b] sono sostanzialmente dedicati alla generalizzazione di noti teoremi della teoria delle serie: ma solo per Cesàro la generalizzazione è lo spunto per nuova definizione di somma.

ossia la serie asintotica esiste in quanto rinvia ad altro che ha una vera esistenza. Ancora 18 anni dopo, Bromwich [1908, p.266], in un testo che pure dedica spazio alle serie divergenti, afferma: "It is to be carefully borne in mind that the legitimate use of non-convergent series is always symbolic; the operations being merely convenient abbreviations of more transformations in the background." Per

Cesàro, invece, anche la definizione usuale di somma di una serie $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è un modo simbolico per

esprimere $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, ossia anche la somma secondo Cauchy della serie esiste in quanto rinvia ad

altro. L'esistenza di un oggetto matematico dipende comunque dalla convenzione stabilita da un'opportuna definizione. Con un linguaggio posteriore di qualche anno si può sostenere che per Cesàro la teoria delle serie nel suo complesso è una struttura formale.

Questa concezione, probabilmente, deriva a Cesàro dai suoi studi geometrici. Infatti in un articolo sui poliedri negli spazi ad n dimensioni, probabilmente scritto tra il 1878 e il 1881⁸⁹ ma pubblicato solo nel 1886, con l'aggiunta di una breve annotazione, Cesàro afferma: "Le ricerche precedenti sono state redatte, or son più di otto anni, in una completa ignoranza di ciò che si era fatto prima di noi [...] ma avendo avuto occasione di parlare di queste ricerche al ch. prof. Gabriele Torelli, ne abbiamo ricevuto la gentilissima comunicazione di un lavoro curioso ed interessante, dovuto a W.I.Stringham,⁹⁰ ed intitolato: «Regular figures in n-dimensional space» (American Journal of mathematics, vol. III, p.1). Questo lavoro, che differisce alquanto dal nostro, i quali ci fanno sapere che l'autore, credendo di aver in opera metodi estremamente soggetti ad errore, *non sarebbe sorpreso se l'edificio innalzato cadesse*.

Noi, invece, abbiamo avuto cura di mettere in evidenza quello che i nostri metodi, -che coincidono, in fondo, con quelli di Stringham-, contengono di puramente ipotetico. Poste certe definizioni, le conclusioni alle quali siamo giunti non possono essere che rigorosamente esatte, e saremmo sorpresi solamente nel caso che tali non fossero" [1886i, p.73].

Le parole di Cesàro contengono l'idea fondamentale di quello che è il moderno metodo assiomatico: [1890b] contiene, a quanto mi risulta, la prima chiara e cosciente applicazione di tale idea all'analisi.

La definizione di somma è di fatto l'atto conclusivo delle ricerche di Cesàro sulle serie. In [1890b] egli si limita a fornire in termini di C-sommabilità la generalizzazione del teorema sul prodotto delle serie: la

⁸⁹ La versione originaria fu presentata all'accademia di Belgio ma poi ritirata [1886i, p.16].

⁹⁰ Washington Irving Stringham (1847-1909).

serie ottenuta moltiplicando una serie r volte indeterminata per una serie s volte indeterminata è, al più, $r+s+1$ volte indeterminata. Questo permette di inserire organicamente e suggestivamente la nuova nozione in una successione di generalizzazioni progressive di un noto ed elementare teorema sulle serie che più di ogni ulteriore commento mostrava l'utilità e l'operatività effettiva della sommabilità (C,r) .

Molto rari sono in seguito i riferimenti alla nuova nozione di somma che egli ha elaborato: i suoi interessi infatti si vanno concentrando verso altri rami della matematica.⁹¹ Egli ne accenna in uno scritto sulla nozione di probabilità ove afferma che le serie aventi somma variabile a seconda dell'ordine in cui scritti i termini "vengono oggidì sottoposte con tutto rigore al calcolo, ed altrettanto avverrà per le stesse serie indeterminate. Già qualcuno scrive

$$(1-1+1-1+\dots)^2=1-2+3-4+\dots,$$

asserendo che ciascun membro è uguale a $1/4$ " [1891, p.4]. Un altro breve riferimento alla definizione viene fatto in [1894d, p.432-433], un articolo che per altro bene si prestava ad un uso massiccio della nozione.

Anche nella corrispondenza di Cesàro sono pochi gli accenni alle somma di serie divergente. Probabilmente ne discute con Peano⁹² e rivendica la sua priorità con Pincherle.⁹³

⁹¹ Non si può escludere in tale scelta il rendersi conto che l'analisi e la teoria analitica dei numeri andavano ormai condotte con tecniche diverse da quella che egli amava: ad esempio egli deve, prima di esibire un risultato, dimostrarne l'esistenza. Le sue ricerche giovanili e la sua abilità a costruire effettivamente risultati produrranno come tardivo frutto, innestandosi su Peano [1890] e su von Koch [1904], alcuni notevoli studi sulle curve senza tangenti ([1897], [1905b] e [1906]), generalmente citati nelle ricostruzioni storiche della nascita dei frattali.

⁹² Peano [1891] interpreta la serie di Taylor come serie asintotiche (nel senso di Poincaré) e pensa di giustificare in questo modo i risultati dei matematici del settecento. Il 14/1/1892 egli scrive a Cesàro: "Riguardo al punto di vista *liberale* da cui considero la formula di Taylor (cfr. Peano [1891]), esso è vecchio; ed è implicito in tanti passi p.e. di Eulero [...] Quello che io ritenevo nuovo, si è l'enunciazione dei passaggi leciti, e di quelli non leciti. Esaminerò la nota del sig. Stieltjes (si riferisce a [1886]) che Ella mi indica." La lettera è stata pubblicata in Palladino [1992] con un commento non felice. Inoltre Peano [1894] riprende i teoremi sulle medie di Cesàro inserendoli nella teoria dei massimi e minimi limiti.

⁹³ Cfr. Documento III.

In effetti il primo vero utilizzatore dello strumento faticosamente ideato da Cesàro è Borel. Non so in che momento il secondo conosce le idee del primo, comunque nello stesso tomo del Bulletin di Darboux in cui esce *Sur la multiplication des séries*, appena una quindicina di pagina prima dell'articolo di Cesàro, vi è una nota *Sur le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente* di Émile Borel, élève de l'école Normale supérieure: un caso che mi piace immaginare come il passaggio del testimone tra i due.

Bibliografia

[Ann, 1876]

Annuario dell'università degli studi di Napoli, a.a. 1865-1866.

AA.VV.

[1894] *Funérailles de Monsieur Eugène Catalan. Articles nécrologique publiés par les journaux à l'occasion de la mort du savant professeur de l'Université de Liège*, Liège, imprimerie H.Vaillant-B.Carmagne, 1894.

Bachmann (P.)

[1894] *Lehrbuch der analytischen Zahlentheorie*, Leipzig, Teubner, 1894.

Bagnera, G.

[1888] Sur une propriété des séries simplement convergentes, *Bulletin des Sciences Mathématiques*, (2) 12 (1888).

Berger (A.),

[1880] Sur quelques applications de la fonction gamma à la théorie des nombres, présenté à la Société Royale des Sciences d'Upsal le 23 Avril 1880, Upsal, Berling, 1880.

Bertrand (J.)

[1846] *Journal de l'École polytechnique*, 130 (1846), p.133.

[1864] *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*, Paris, Gauthiers-Villars, 1864.

Brezinski (C.)

[1990] *Charles Hermite (1821-1901)*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, (2) 32 (1990).

Bromwich, T.J.

[1908] *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan and Co., London, 1908.,

Bierens de Haan, D.

[1883] *Een aanhangsel tot de tafels van onbepaalde integralen*, Amsterdam, Müller, 1883.,

Bonola (R.)

[1906] *La Geometria non-euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1906.

Bouniakowski,

[1883] Démonstration de quelques Propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$, *Mélanges Mathématiques et Astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie impériale des des Science de St.Pétersbourg*, 7 (1883).

Bromwich, T.J.

[1908] *An introduction to the theory of infinite series*, Macmillan and Co. London, 1908.

Boys-Reymond du (P.)

[1888] Sur les caractères de convergence et de divergence des séries à termes positif, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Académie des Science* 107 (1888), pp.941-944.

Brezinski (C.)

[1990] *Charles Hermite (1821-1901)*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, (2) 32 (1990).

Brigaglia (A.)- Masotto (G.)

[1982] *Il circolo matematico di Palermo*, Bari, Dedalo, 1982.

Butzer (P.L.)-Jongmans (F.)

[1991] Eugène Catalan and the rise of Russian Science, *Bulletin de la Classe de Science de l'Académie Royale de Belgique*, (6) 1991 2, pp.59-90.

Carbone (L.)-Cardone (G.)-Palladino (F.)

[1994] La corrispondenza epistolare tra Ernesto Cesàro e Roberto Marcolongo, *Rendiconto dell'Accademia di Scienze Fisiche e Matematiche* (Napoli), (4) 61, pp.123-188.

Carbone (L.), Nastasi (P.), Palladino (F.)

[1996] I carteggi Torelli-Cesàro, Landau-Cesàro, Cipolla-Cesàro e alcune questione connesse, *Nuncius*, 1996.

Catalan (E.)

[1843] *Éléments de Géométrie*, Paris, 1843, (2 ed. Liège, 1865).

[1860] *Traité élémentaire des séries*, Paris, Librairie centrale des Sciences, 1860.

[1867] *Mélanges Mathématiques*, Mémoires de la Société royale des Science de Liège, (2) 2 (1867).

[1870] *Cours d'Analyse de l'Université de Liège*, Bruxelles, ??? 1870.

[1872a] *Rapport de M.Catalan*, Bulletins (2) 33 (1872), pp.360-368.

[1872b] *Response de M.Eugène Catalan*, Bulletins (2) 33 (1872), p.502.

[1875] Sur la constante d'Euler et la fonction de Binet, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (3) 1 (1875) pp.209-240.

[1880] Théorème de Staudt et Clausen, *Bulletin des Sciences* (2) 4 (1880), pp.77-82 ,

[1882] *Mathesis*, 2 (1882) pp.158-159.

[1884] Note sur un théorème de Lambert, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 3, (1884).

[1884b] Problèmes et Théorèmes de Probabilités, *Mémoires de l'Academia Royale de Belgique*, XLVI (1884), 1-16.

[1885] Mélanges Mathématiques, tomo I, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, (2) 12 (1885).

[1886a] Mélanges Mathématiques, tomo II, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, (2) 13 (1886).

[1886b] Sur l'étude des événements arithmétique par M.E.Cesàro. Rapport de M.E.Catalan, *Bulletin de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Belgique* (3) 9 (1886).

[1887a] Sur les nombres de Segner, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1 (1887), pp.190-201.

[1887b] Sur un tableau numérique et sur son application a certains transcendentes, *Mémoires de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-arts de Belgique*, 47 (1887).

[1888] Mélanges Mathématiques, tomo III, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, (2) 15 (1888).

[1892] *Publications de E.Catalan 1836-1892*, Liège, imprimerie H.Vaillant-Carmanne, 1892.

[1893] Lettres à quelques mathématiciens, *Mémoires de la Société royale des sciences de Liège*, (2) 18 (1893).

Cauchy, A.

[1821] *Cours d'analyse de l'école royale polytechnique* (I. Partie *Analyse algébrique*), Paris, de l'imprimerie Royale, 1821, in *Œuvres de Augustin Cauchy*, (2), 3.

[1821b] Sur le développement des fonctions en séries et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles, in *Œuvres de Augustin Cauchy*, (2), 2, pp.267-275.

[1827] *Exercices de Mathématiques del 1827*, tomo II, p.221.

[1829] *Leçons sur le calcul différentiel*; *Œuvres* (2) 4 pp.263-615.

[1847] ? 3 Sur un emploi légitime des séries divergentes, in *Œuvres*, (I) VIII, pp.18-25.,

Cesàro (E.)

[*Opere*] *Opere scelte* di E.Cesàro, edited by U.M.I, Roma, Cremonese, 1964-1968, 2 voll. in tre tomi.

- [1880a] Sur la la série harmonique, *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 6 (1880) pp.312-314.
- [1880b] Une démonstration de la formule di Stirling, *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 6 (1880) pp.354-347.
- [1880c] Extraits de lettre de M. Ernest Cesàro, *Nouvelle Correspondance Mathématique*, 6 (1880), p.415.
- [1880d] Extraits d'une lettre de M.Cesaro, *Nouvelle correspondance mathématique*, 6 (1880), pp.461-462.
- [1880e] Quelques formules, *Nouvelle correspondance mathématique*, 6 (1880), pp.450-452.
- [1881a] Sur la série harmonique, *Mathesis*, 1 (1881), pp.143-144.
- [1881b] Démonstration élémentaire et généralisation de quelques théorèmes de M.Berger, *Mathesis*, 1 (1881), pp.99-102.
- [1882a] Formule d'arithmétique, *Mathesis*, 2 (1882), pp.97-101.
- [1882b] Sur une nouvelle formule d'arithmétique, *Mathesis*, 2 (1882), pp.148-149.
- [1883a] Principes du calcul symbolique, *Mathesis*, 13 (1883), pp.10-17.
- [1883b] Sur un théorème de M.Stieltjes, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Academie des Science*, 96 (1883), pp.1029-1031.
- [1883c] Sur diverses questions d'arithmetique, Bruxelles, F.Hayez, imprimeur de l'Académie royale de Belgique, 1883; *Opere*, I₁, pp.10-362.
- [1884a] Sur les fonctions holomorphes de genre quelconque, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Académie des Sciences (Paris)* 99 (1884); *Opere*, II, p.381-382.,
- [1884b] Remarques sur le fonctions holomorphes, *Giornale di Matematiche* (1), 22 (1884); *Opere scelte*, II, pp.381-382.
- [1884c] Alcune elementari proprietà dei gruppi più volte transitivi, *Giornale di Matematiche*, 22 (1884), pp.47-49; traduzione francese in *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3), 3 (1884), pp.434-436.
- [1884d] Intorno ad alcune funzioni isobariche-omogenee, *Giornale di Matematiche*, 22 (1884); *Opere*, I , pp.362-374.
- [1884e] Algorithme isobarique, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 3, (1884); *Opere*, I₁, pp.381-397.
- [1885a] Sull'inversione delle identità aritmetiche, *Giornale di Matematiche*, 23 (1885); *Opere*, I₁, pp.448-480.
- [1885b] Gli algoritmi delle funzioni aritmetiche, *Giornale di Matematiche*, 23 (1885), *Opere*, I₁, pp.448-480.

- [1885c] Determinanti in aritmetica, *Giornale di Matematiche*, 23 (1885); *Opere*, I₁, pp.448-480.
- [1885d] Considérations nouvelles sur le déterminant de Smith et Mainson, *Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure*, Paris, (3), 2 (1885); *Opere*, I₁, pp.485-495.
- [1885e] Dérivées des fonction de fonction, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 4, (1885); *Opere*, I₁, pp.416-429.
- [1885f] Notes sur le calcul isobarique, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 4, (1885); *Opere*, I₁, pp.431-447.
- [1885g] Généralisation de la série de Lagrange, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 4, (1885); *Opere*, I₁, pp.506-511.
- [1885h] Généralisation de l'identité de MM. Tchèbycew et de Polignac, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 4, (1885); *Opere*, I₁, pp.512-516.
- [1885i] Le plus grand diviseur carré, *Annali di Matematica Pura e Applicata*, (2), 13 (1885); *Opere*, I₂, pp.19-39.
- [1885k] Études moyenne du plus grand diviseur de deux nombres, *Annali di Matematica Pura e Applicata*, (2), 13 (1885); *Opere*, I₂, pp.2-18.
- [1885j] Éventualités de la division arithmétique, *Annali di Matematica Pura e Applicata*, (2), 13 (1885); *Opere*, I₂, pp.40-65.
- [1885l] Sur la distribution des quantités commensurables, *Annali di Matematica Pura e Applicata*, (2), 13 (1885); *Opere*, I₂, pp.70-92.
- [1885m] Remarques arithmétiques, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (Coimbra), 7 (1886); *Opere*, I₁, pp.398-410.
- [1886a] Formes algébriques à liens arithmétiques, *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (4) 2 (1886); *Opere*, I₂, pp.245-251.
- [1886b] Sur l'étude des événements arithmétique, *Mémoires couronnées et mémoires des savants étrangers* (Bruxelles) 47 (1886), n.13; *Opere* I₂, pp.199-209.
- [1886c] Sulla rottura del diamante, *Giornale di Matematiche*, 24 (1886), pp.124-127.
- [1886d] Alcune misure negli iperspazi, *Giornale di Matematiche*, 124 (1886), pp.19-25.
- [1886e] Sur le nombre de Bernoulli et de d'Euler, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3), 5 (1886), *Opere*, I₂, pp.166-187.
- [1886f] Sur théorème de M.Lipschitz et sur la partie fractionnaire des nombre de Bernoulli, *Annali di Matematica Pura e Applicata*, (2), 14 (1886); *Opere*, I₂, pp.231-237.

- [1886g] Sur la série de Lambert, *Nouvelles annales de Mathématiques*, (3), 5 (1886), pp.106-119.
- [1886h] Transformations algébriques par le calcul des différences, *Nouvelles annales de Mathématiques*, (3), 5 (1886), *Opere*, I₂, pp.195-198.
- [1886i] *Forme poliedriche regolari e semi-regolari in tutti gli spazi*, Milano, Hoepli, 1886; *Opere*, II, pp.3-75.
- [1886-87] Remarques sur la Théorie des Séries (Extraits de deux lettres adressées a F.Gomes Teixeira), *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (Coimbra), 7 (1886) e 8 (1887); *Opere*, I₂, pp.135-142.
- [1887a] Intorno a una questione di probabilità, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1 (1887), pp.209-303.
- [1887b] Intorno a una ricerca di limite, *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 1 (1887); *Opere*, I₂, pp.272-274.
- [1887c] Sull'uso dell'integrazione in alcune questioni di aritmetica, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1 (1887); *Opere*, I₂, pp.274-279.
- [1887d] Medie ed assintotiche espressioni, in aritmetica, *Giornale di Matematiche* 25 (1887); *Opere*, I₂, pp.252-253.
- [1888a] Sur les systèmes des nombres entiers, *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei* (4) 4 (1888); *Opere*, I₂, p.300-306.
- [1888b] Sur une fonction arithmétique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 106 (1888); *Opere*, I₂, pp. 336-339.
- [1888c] Sur deux récentes communications de M. Jensen, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Science*, 106 (1888), p.1142-1143.
- [1888d] Sur les fondaments du calcul asymptotique, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Science*, 106 (1888), pp.1651-1654; *Opere*, I₂, pp. 340-343.
- [1888f] Sur une distribution de signes, *Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei*, (4) 4 (1888, 2 sem.), pp.133-138; *Opere*, I₂, pp.307-313.
- [1888g] Sur la comparaison des series divergentes, *Rendiconti Accademia dei Lincei*, 1888; *Opere*, I₂, pp.287-291.
- [1888h] Sur la convergence des series, *Nouvelles Annales de Mathematiques*, (3) 7 (1888); *Opere*, I₂, pp.314-322.
- [1888k] Sui concetti di limite e di continuità, *Rendiconti dell'Accademia dei Lincei*, (4) 4 (1888, 1° sem.); *Opere*, I₂, pp.280-286.

- [1888j] Sur un théorème de Kummer, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, 106 (1888), pp.1791-1794.
- [1888i] Remarques sur divers articles concernant la théorie des séries, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3) 7 (1888); *Opere*, I₂, pp.330-335.
- [1888m] Nota redazionale apparsa su *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 1107 (1888), pp.426-427.
- [1888n] Sur la convergence des séries, *Nouvelles Annales de Mathématique*, (3) 7 (1888); *Opere scelte*, I₂, pp.314-322.
- [1889a] Sur une proposition de la théorie asymptotique des nombres, *Annali di matematica pura ed applicata*, (2) 16 (1889); *Opere*, I₂, pp.343-346.
- [1889b] Contribution a la théorie des limites, *Bulletin des sciences mathématiques*; (2) 12 (1889); *Opere scelte*, I₂, pp.347-350.
- [1890] Sur la multiplication des séries, *Bulletin des sciences mathématiques*; *Opere*, I₂, pp.355-361.
- [1891a] Considerazioni sul concetto di probabilità, *Periodico di Matematica*, 6 (1891), pp.1-26.
- [1893a] Démonstration d'un théorème de M.Appel, *Mathesis* (2) 3 1893, pp.241-243; *Opere*, I₂, pp.394-396.
- [1893b] Théorème d'Analyse, *Bulletin des Science mathématiques*, (2), 17 (1893), pp.321-324.
- [1893c] Sulla determinazione asintotica della serie di potenze, *Rendiconti dell'Accademia delle Scienze*, (Napoli), (2) 7 (1893); *Opere*, I₂, pp.397-406.
- [1893e] *Appunti del corso di calcolo infinitesimale*, 1892-93, s.n.e.,
- [1894a] *Corso di Analisi algebrica con introduzione al Calcolo infinitesimale*, Torino, Bocca, 1894.
- [1894b] *Introduzione alla teoria matematica dell'elasticità*, Torino, Bocca, 1894.
- [1894c] Extrait d'une lettre, *Bulletin des Science mathématiques*, (2), 18 (1894), pp.66-68.,
- [1894d] Nuova contribuzione ai principi fondamentali dell'aritmetica assintotica, *Atti dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Napoli), (2) 6 (1894), n.17; *Opere*, I₂, pp.419-448.
- [1894e] Sur une formule empirique de M.Pervouchine, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences* 119 (1894); *Opere*, I₂, pp.417-418.
- [1894f] Sulla Geometria intrinseca delle congruenze, *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche* (Napoli), (2) 8 (1894), pp.141-148.
- [1895] Sulla distribuzione dei numeri primi, *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, (Napoli), (3), 2 (1895), pp.257-266; *Opere*, I₂, pp.449-458.

- [1896] *Lezioni di geometria intrinseca*, Napoli, presso l'Autore, 1896.
- [1897] Sur la représentation analytique des régions, et des courbes qui les remplissent, *Bulletin des sciences mathématiques* (2) 21 (1887); *Opere* II, pp.434-431.
- [1899] *Elementi di calcolo infinitesimale*, Napoli, Alvano, 1899.
- [1905a] *Elementi di calcolo infinitesimale*, Seconda edizione, Napoli, Alvano, 1905.
- [1905b] Remarque sur la curbe de von Koch, *Atti della R.Accademia di scienze fisiche e matematiche* (Napoli), (2) 15 (1905); *Opere*, II, pp.464-479.
- [1906] Fonctions continues sans dérivées, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) 10 (1996); *Opere* II, pp.480-488.
- Cremona (L.)
- [1992] *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830-1903)*, a c. di AA.VV., Roma, Quaderni della Rivista di Storia della Scienza, 1992, vol.I
- Condillac, E.B.
- [1797] *La langue des calculs*, Paris, Houel, 1797.
- Dickson (L.E.),
- [1919] *History of the theory of numbers*, Washington, Carnegie Institution of Washington, 1919-1923.
- Dhombres, J.
- [1882-83] La langue des calculs de Condillac (ou comment propager les lumières?), *Sciences et Techniques en Perspective*, II (1982-83), pp.197-230.
- Dini, U.
- [1867] *Annali delle Università toscane* p.43.
- Dirichlet,
- [1838] *Journal für Mathematik* 18 (1838), 273; Bericht Berlin Akademie, 1838, 13-15; *Werke*, 1, p.373, pp.351-6.
- [1849] *Abhandlungen du Akademie der Wissenschaften* (Berlin) 1849, Math., 69-83, *Werke* 2, 49-66.
- [1856] Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* (2), 1 (1856), pp.353-370.
- [DSB] *Dictionary of Scientific Biography*, C.Coulston Gillispie edit., New York, C.Scribner's Sons, 1970-1976.
- [*Encycl*] *Encyclopédie des Sciences Mathématiques*, édition française, Leipzig e Paris, Teubner e Gauthiers-Villars, 1910.

Euler (L.)

[1754-55] De seriebus divergentibus, Novi Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, V (1754-1755), Petropoli, typis Academiae Scientiarum, 1760, pp.205-237.

[1755] *Institutiones calculi differentialis*, Petropoli, Impensis Academiae Imperialis Scientiarum, 1755; *Leonhardi Euleri opera omnia. Series I: Opera mathematica*, Bern, 1911-1975, vol.10.

Fergola, E.

[1856] Sopra lo sviluppo di $\frac{1}{e^x - 1}$ e i numeri di Bernoulli, *Memorie della R.Accademia delle Scienze*

fisiche e matematiche, I (1856).??

[1862] Sopra alcune proprietà delle soluzioni intere positive dell'equazione $x_1+2x_2+3x_3+\dots+nx_n=n$, *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche*, (Napoli) 1 (1862), pp.262-268.

Ferraro, G.

Ferraro [2008] The rise and development of the theory of series up to the early 1820s, New York, Springer, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 2008.

Ferraro [2008b] Bernardino Baldi e il recupero del pensiero tecnico-scientifico dell'antichità, Alessandria, Edizioni dell'Orso, 2008.

Ferraro [2007] L'evoluzione della matematica. Alcuni momenti critici. Napoli, Ernesto Ummarino Editore, 2007.

Ferraro- Palladino 2005, *Il Calcolo sublime di Eulero e Lagrange esposto col metodo sintetico nel progetto di Nicolò Fergola*, Napoli, Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, Seminari di Scienze, Edizioni La Città del Sole, 1995.

Ferraro [2010] Euler's analytical program, Quaderns d'història de l'enginyeria, c.d.s.

Ferraro [2008c] The integral as an anti-differential. An aspect of Euler's attempt to transform the calculus into an algebraic calculus, Quaderns d'història de l'enginyeria, 9 (2008), 25-58.

Ferraro [2008d] Manuali di geometria elementare nella Napoli preunitaria (1806-1860), History of Education & Children's Literature, 3 (2008), 103-139.

Ferraro [2008e] D'Alembert visto da Eulero, Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche, 28 (2008), 257-275.

Ferraro [2007b] Convergence and formal manipulation in the theory of series from 1730 to 1815, Historia Mathematica, 34 (2007), 62-88.

Ferraro [2007c] The foundational aspects of Gauss's work on the hypergeometric, factorial and digamma functions, Archive for History of Exact Sciences 61 (2007), 457-518.

Ferraro [2004] Differentials and differential coefficients in the Eulerian foundations of the calculus, Historia Mathematica, 31 (2004), 34-61.

Ferraro [2002] Convergence and formal manipulation of series in the first decades of the eighteenth century, Annals of Science, 59 (2002), 179-199.

Ferraro [2001] Analytical symbols and geometrical figures in Eighteenth Century Calculus, Studies in History and Philosophy of Science Part A, 32 (2001), 535-555.

Ferraro [2000a] Functions, Functional Relations and the Laws of Continuity in Euler, Historia mathematica, 27 (2000), 107-132.

Ferraro [2000b] The value of an infinite sum. Some Observations on the Eulerian Theory of Series, Sciences et Techniques en Perspective, 4 (2000), 73-113.

Ferraro [2000c] True and Fictitious Quantities in Leibniz's Theory of Series, Studia Leibnitiana, 32 (2000), 43-67.

Ferraro [1999] The first modern definition of the sum of a divergent series. An aspect of the rise of the 20th century mathematics, Archive for History of Exact Sciences, 54 (1999), 101-135.

Ferraro [1999b] Rigore e dimostrazione in Matematica alla metà del Settecento, Physis, (2) 36 (1999), 137-163.

Ferraro [1998] Some Aspects of Euler's Theory of series. Inexplicable functions and the Euler-Maclaurin summation formula, Historia mathematica, 25 (1998), 290-317.

Ferraro [Mn] Mathematics and Natural Philosophy in Euler's Investigation of Saturn's Perturbations, in *First International Meeting on Cultural Astronomy*, Roma, Aracne edizioni, 2010.

Ferraro [pm] Pure and Mixed Mathematics in the Work of Leonhard Euler in *Computational Mathematics: Theory, Methods and Applications*, a c. di Peter G. Chareton, Nova Science Publishers, Hauppauge, New York, 2010.

Ferraro [b1] Baldi, *le matematiche, l'architettura* in *Saggi di Letteratura architettonica da Vitruvio a Winckelmann*, a c. di F.P. Di Teodoro, vol. I, Firenze, Olschki 2009, 207-220.

Ferraro [b2] Tra filosofia naturale e matematica: il paradosso della rota Aristotelis in Cardano, de Guevara e Galileo, in *Saggi di Letteratura architettonica da Vitruvio a Winckelmann*, a cura di L. Bertolini, vol. II, Firenze, Olschki, 2009, 121-138.

Ferraro [B3] Dimostrazioni matematiche e conoscenza scientifica in Alessandro Piccolomini, in *Saggi di Letteratura architettonica da Vitruvio a Winckelmann*, a c. di H. Burns, vol. III, Firenze, Olschki, 2009, 197-215.

Ferraro [k] Euler's treatises on infinitesimal analysis: *Introductio in analysin infinitorum, Institutiones calculi differentialis, Institutionum calculi integralis*, in *Euler Reconsidered. Tercentenary Essays*, a c. di R. Baker, Heber City, UT, Kendrick Press, 2007, 39-101.

Gauss (K.F.)

[1801] *Disquisitiones arithmeticae*, Lipsiae, In commissis apud Gerh. Fleischer, Jun., 1801.

Gilbert (P.)

[1872a] *Mémoire sur l'existence de la dérivée dans le fonctions continues*, Mémoires couronnées et autres mémoires publiés par l'Academie Royale de Belgique, 23 (1873), pp.339-375.

[1872b] Sur une objection proposée par M.Catalan, Bulletins de l'Academie Royale de Belgique (2) 33 (1872) pp.498-502.

[1873] Rectification au sujet d'une mémoire précédent, Bulletins de l'Academie Royale de Belgique (2) 35 (1873) pp.709-717.

Giudice, F.

[1891] Sulle successioni, *Rendiconti del Circolo matematico*, 5 (1891).

Gutzmer A.

[1887] Sur une séries considérée par M.Lerch (Extraits de deux lettres adressées a F.Gomez Teixeira), *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (Coimbra), 8 (1887) pp.33-36.

Halphen, G.H.

[1883] Sur l'approximation des sommes de fonctions numériques, Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Academie des Science, 96 (1883), p.634; *Œuvres*, IV, pp.95-96.

Hankel, H.

[1870] *Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und un stetigen functionen. Ein Beitrag zur Feststellung des des Begriffs der Function überhaupt*, Tübingen, Drunck von L.F.Fues, 1870.

Hermite (C.)

[*Œuvres*] *Œuvres de Charles Hermite*, Paris, Gauthiers-Villars, 1905-1917.

[1862] *Note sur la théorie des fonctions élliptiques*, in Lacroix [1862], pp.165-484; *Œuvres*, II, pp.125-238.

[1866] Sur l'observation en Mathématiques. Note insérée dans un mémoire de Chevreul, *Mémoires de l'Académie des Science*, (2) 35 (1866), pp.528-529; Œuvres1, IV, pp.586-587.

[1873] *Cours d'Analyse de l'école Polytechnique*, Paris, Gauthiers-Villars, 1873.,

[1878] Sur l'intégrale $\int_0^1 dx$, *Atti della Reale Accademia delle Scienze* (Torino), 14 (17 Novembre 1878); Œuvres1, III, pp.454-474.

[1882] *Cours de M.Hermite professé pendant le 2 semestre 1881-82*, rédigé par M.Andoyer, Libraire Scientifique A.Hermann, Paris, 1882.

[1884a] Extrait d'une lettre a M.Sylvester, *American Journal of Mathematics*, 16 (1884) pp.173-175; Œuvres1, IV, pp.136-137.

[1884b] Sur quelques conséquence arithmétiques des formules de la théorie des fonction elliptiques, *Bulletin de l'Académie des Science de Saint-Pétersbourg*, 29 (1884), pp.325-352; Œuvres, IV, pp.138-168.

[1885] Extrait d'une lettre adressée a M.Fuchs sur les valeurs asymptotiques de quelques fonctions numérique, *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 96 (1885), pp. 324-324; Œuvres, IV, pp.324-328.

[1887] Remarques arithmétiques sur quelques formules de la théorie des fonctions elliptiques, *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 100 (1887), p.51-57; Œuvres, IV, pp.223-239.,

[1886] Remarques sur les formes quadratiques de determinant négatif, *Bulletin des Sciences mathématiques* 1(2) X, 1886, p.23-30; Œuvres, 1IV, p.215-222.,

[1888a] Remarques sur la décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques, *Annales de la Faculté des Science de Toulouse*, 2 (1888), pp. C.1-12; Œuvres1, IV, pp.262-273.

[1888b] Sur la transformation de l'intégrale elliptique de seconde espèce (Extrait d'une lettre adressée a M. Matyas Lerch), *Annales de la Faculté des Science de Toulouse*, 2 (1888), pp. G.1-6; Œuvres, IV, pp.274-279.

[1896] Extrait d'une lettre de M.Hermite a M.Sonin a Saint Petersburg sur les Polynomes de Bernoulli, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 116 (1896); Œuvres, IV, pp.431-447.

Hermite (C.)- Lipschitz (R.)

[1883] Sur quelques points de la théorie des nombres, *Acta Mathematica*, 2 (1883), p.299-304.

Hermite (C.)-Stieltjes (T.J.),

[1905] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, a cura di B.Bailland e H.Bourget, Paris, Gauthiers-Villars, 1905, 2 vol.

[1983] Partie inédite de la correspondance d'Hermite avec Stieltjes, *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, 14 (1983), pp.75-87.

Hölder, O.

[1882] Grenzwerte von Reihen an der Convergengzgrenze, *Mathematische Annalen*, 20 (1882), pp.535-549.

Kronecker, L.

[1883] über die Anzahl der verschiedenen classen quadratischer formen von negativer determinante, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 57 (1883), pp.248-255; Leopold Kronecker's werke, Verlag

Kummer,

[1835] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13 (1835), pp.174-175.

Jensen, J.L.W.V.

[1884a] Sur la convergence de le serie, *Tidsskrift for Mathematik* (5) 2, pp.63-72.

[1888b] Sur un théorème de Cauchy, *Tidsskrift for Mathematik* (5) 2, pp.81-84.,

[1888a] Sur un théorème général de convergence, *Comptes rendus hebdomadaires des sé3ance de l'Académie des Science*, 106 (1888), pp.729-731.

[1888b] Sur une généralization d'un théorème de Cauchy, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Académie des Science*, 106 (1888), pp.833-836.,

[1888c] Sur un théorème général de convergence, Réponse aux remarques de M.Cesàro, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Académie des Science*, 106 (1888), pp.1520-1521.

[1888d] Sur une Communication récente de M.Cesàro, *Comptes rendus hebdomadaires des séance de l'Académie des Science*, 107 (1888).

Jongmans, F.

[1981] Quelques pièce choisies dans la correspondance d'Eugène Catalan, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 150 (1981), pp.287-309.

[1986] Une election orageuse a l'institut, *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 160 (1986), pp.581-603.

Lacroix, S.F.

[1862] *Traité élémentaire de Calcul différentiel et integral*, VI ed., a cura di J.A.Serret e C.Hermite, Vol. II, Paris, Mallet-Bachelier, 1862.

Lamarle, M.E.

[1855] Étude approfondie sur les deux équations fondamentales $\lim (f(x+h)-f(x))/h=f'(x)$ et $dy=f'(x)\Delta x$, Mémoires de l'Académie Royale de Belgique, 29 (1855).

Laplace, P.S.

[1812] *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris, 1812.

La Maestra (A.)

[1890] Généralisation d'un théorème d'Abel, 3Comptes Rendus de l'Académie des Sciences¹, 101, 1890.

Laurent, M.P.H.

[1873] *Traité du calcul des probabilités*, Paris, Gauthier-Villars, 1873.

Lerch, M.

[1886a] Remarque sur la théorie des séries, *Jornal de Sciencias Mathematicas e Astronomicas* (Coimbra), 7 (1886), pp.79-80.

[1886b]

[1887a]

[1887b]

Lipschitz, R.

[1865] Ueber die asymptotischen Gesetze von gewissen Gattungen zahlentheoretischer Functionen, *Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1865, p.164.

Lucas, E.

[1891] *Théorie des Nombre*, Paris, Gauthiers-Villars, 1991.

Mertens,

[1875] *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 79 (1875), pp.182-184.

Mansion, P.

[1884] Discours sur les travaux mathématiques de M.Eugène-Charles Catalan (Discours prononcé le 7 décembre 1894 a la salle académique de l'Université de Liège a l'occasion de la promotion de M.E. Catalan a l'éméritat, *Mémoires de la Société royale des Sciences de Liège*, (2), 12.

[1877] Les mathématiques, *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze Matematiche e fisiche*, 10 (1877), pp.471-542.

[1903] Sur la partée objective du calcul des probabilités, *Bulletin de l'Academie Royale de Belgique*, 1903, pp.1235-1294.

Palladino (F.)

[1993] Le lettere di Giuseppe Peano nella corrispondenza di Ernesto Cesàro, *Nuncius*, 7 (1993), pp.249-285.

Palladino (F.)-Tazzioli (R.),

[1995] Le lettere di Eugenio Beltrami nella corrispondenza di Ernesto Cesàro, 3*Archive for History of Exact Science*

Panza, M.

[1982] *La forma della quantità*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, 38-39 (1982).

Peano

[1890] Sur une courbe qui remplit toute une aire plaine, *Mathematische Annalen*, 36 (1890), pp.157-160.

[1894] Estensione di alcuni teoremi di Cauchy sui limiti, *Atti della R.Accademia delle Scienze* (Torino), 30 (1894).

Perna, A.

[1907] Ernesto Cesàro, *Giornale di matematiche di Battaglini*, (2) 14 (1907), pp.299-330. Riportato con qualche lieve taglio e modificazione in [*Opere*, I , pp.VI-XXXVIII].

Pincherle, S.

[1887] Sulla risoluzione dell'equazione $\sum h_v \varphi(x + \alpha_v) = f(x)$ a coefficienti, *Rendiconto della R.Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna* (1887-1888), pp.53-57.

Poincaré, J.H.

[1913] *Dernières pensées*, Paris, Flammarion, 1913.

Riemann

[1876] *Mathematische Werke*, Leipzig, 1876.

Rebière, P.

[1893] *Mathematiques et Mathématiciens. Pensées et Curiosités*, Paris, Nony, 1893.,

Serret, J.A.

[1880] Cours de Calcul différential e intégral, Deuxième édition, Paris, Gauthiers-Villars, 1880.

Sonin, N.Y.

[1894] Sur les polynomes de Bernoulli, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 116 (1894).

Stieltjes, T.J.

[1883] Sur le nombre des diviseurs d'un nombre entier, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences de Paris*, 96 (1883), pp.764-766; *Œuvres complètes de Thomas Jan Stieltjes*, Gronigen, P. Noordhoff, 1914, I, pp.311-313.

[1886] *Recherches sur quelques séries semi-convergentes*, Paris, Gauthier-Villars, 1886.

Schwarz, H.A.

[1873] Communication sur un nouvel exemple d'une fonction continue qui n'admet pas de dérivée, *Archives des sciences physiques et naturelles nouvelle période*, 48, pp.33-38.

Tchebychef,

[1853] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 18 (1853) p.381.

Torelli, G.

[1867] Sulla funzioni simmetriche complete e semplici, 1867.

Trudi, N.

[1862] Intorno ad alcune formule di sviluppo, *Rendiconto della Accademia di Napoli*, 1862, pp.135-

[1865] Sulla partizione de' numeri, *Atti della R.Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, (Napoli) II (1865), n.23

[1867] Memoria sullo sviluppo di alcune funzioni trascendenti e sui numeri ultra-bernoulliani, *Atti del R. Istituto d'Incoraggiamento alle scienze naturali economiche e tecnologiche*, (2) 4 (1867), pp.105-131.

[1879] Intorno ad alcuni punti di analisi dipendenti dalla partizione dei numeri, *Atti della R.Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, (Napoli) VIII (1879), n.1.

Tucciarone, J.

[1973] The development of the theory of summable divergent series from 1880 to 1925, *Archive for History of Exact Sciences*, 10 (1973), pp.1-40.