G. Th. Guilbaud et la théorie du choix social

Bernard Monjardet

Documents de Travail du
Centre d'Economie de la Sorbonne

CES Working Papers

G. Th. Guilbaud et la théorie du choix social

Bernard MONJARDET

2011.47

Maison des Sciences Économiques, 106-112 boulevard de L'Hôpital, 75647 Paris Cedex 13
http://centredeconomiesorbonne.univ-paris1.fr/bandeau-haut/documents-de-travail/
ISSN : 1955-611X

G.Th. Guilbaud et la théorie du choix social

Bernard Monjardet*

En 1952, un an après la parution du livre d'Arrow *Social Choice and Individual Values*, G.Th. Guilbaud (1912-2006) publiait dans la revue *Économie Appliquée* un article de 50 pages intitulé *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation.* Dans ce texte -malheureusement trop peu connu- Guilbaud, outre qu'il sortait de l'oubli l'*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* de Condorcet dont il dévoilait l'intérêt, apportait de remarquables contributions qui en font le précurseur de plusieurs développements ultérieurs de la théorie du choix social. J'examine ici ces différentes contributions et leurs caractères précurseurs.

One year after the publication of Arrow's 1951 book *Social Choice and Individual Values*, Guilbaud (1912-2006) published in *Économie Appliquée* a 50 page's paper entitled *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation.* In this paper –unfortunately too little known- first he dragged from a deep oblivion Condorcet's *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* and showed its interest. Then, he brought significant contributions doing of him a precursor of several futher developments of social choice theory. I present here these contributions and how they have been precursory.

*CES, Université ParisI-Panthéon-Sorbonne, MSE, 106-112 bd de l'Hôpital 75647 Paris Cedex 13, & CAMS-EHESS, Bernard.Monjardet@univ-paris1.fr

INTRODUCTION

Un an après la parution du livre de Kenneth Arrow *Social Choice and Individual Values* (1951) Georges Théodule Guilbaud (1912-2006) publiait dans la revue *Économie Appliquée* un article de 50 pages intitulé *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation*. Dans ce texte -malheureusement trop peu connu- Guilbaud, outre qu'il sortait de l'oubli des travaux de Condorcet dont il dévoilait l'intérêt, apportait de remarquables contributions qui en font le précurseur de plusieurs développements ultérieurs de la théorie du choix social. Avant d'examiner en détail ces contributions et de les situer dans ces développements, je rappelle dans cette introduction qui était Guilbaud et la genèse de son texte.

Après sa sortie de l'École Normale Supérieure et son agrégation de mathématiques en 1935, Guilbaud est rapidement nommé professeur de mathématiques spéciales à Metz, Brest puis Dijon de 1941 à 1947. Dans cette dernière ville, il donne aussi un cours de philosophie des sciences à la Faculté des Lettres et Sciences Humaines. En effet, Guilbaud s'est très tôt intéressé aux relations entre mathématiques et sciences humaines et sociales. Il lit donc les auteurs qui comme Condorcet, Cournot ou Pareto cherchent à utiliser des mathématiques dans ces sciences. De plus en 1943, Gilles-Gaston Granger (1920-) est nommé professeur de philosophie à Dijon et lui et Guilbaud commencent une amitié où ils parlent en particulier de la « Mathématique Sociale »[1] de Condorcet. En 1947, Guilbaud entre à l'Institut des Sciences Économiques Appliquées (ISEA) créé trois ans auparavant par François Perroux (1903-1987) et il y travaillera comme mathématicien, statisticien et économiste jusqu'en 1955[2]. Cette année là, à l'instigation de Claude Levi-Strauss (1908-2009) et Charles Morazé (1913-2003), il est élu directeur d'études à la 6$^{\text{ème}}$ section de l'École Pratique des Hautes Études (devenue depuis l'EHESS). C'est à Lucien Febvre (1878-1956) qui préside alors la la 6$^{\text{ème}}$ section qu'il présente son projet de faire de la « mathématique sociale à la Condorcet ». Il y créera le « Groupe de Mathématique Sociale et de Statistique »[3], qui croîtra régulièrement et deviendra le Centre de Mathématique Sociale (maintenant le Centre d'Analyse et de Mathématique Sociale). Que ce soit à l'ISEA ou à l'EHESS, Guilbaud a toujours eu une intense activité d'animation, de recherche et d'enseignement, d'abord plus orientée vers l'économie et la recherche opérationnelle[4],

[1] Granger écrit dans l'introduction de son livre *La mathématique sociale du marquis de Condorcet* publié en 1956 et qui était sa Thèse complémentaire pour le doctorat ès lettres, « je dois à mon ami G.Th. Guilbaud outre ses suggestions fécondes, l'idée même d'étudier Condorcet ».

[2] Entré à l'ISEA comme chargé de recherches, il en devient directeur-adjoint en 1951.

[3] Le terme Statistique fut ajouté à la demande de Fernand Braudel (1902-1985) alors secrétaire de la section, et un peu inquiet de ce que pouvait apporter la « mathématique sociale ».

[4] Il sera par exemple le premier président de la Société Française de Recherche Opérationnelle créée en 1956, et en 1959, il définira et donnera les premiers cours de mathématiques pour la licence de sciences économiques à la Faculté de Droit et des Sciences Économiques de Paris (il était déjà depuis 1953 professeur associé à la Faculté de Droit de Paris où il donnait un cours de mathématiques optionnel dans le DEA de Sciences Économiques).

puis vers les sciences humaines de l'ethnologie à la linguistique en passant par la praxéologie, la psychologie, l'histoire -dont celle des mathématiques- ou la géographie[5].

Je reviens maintenant à 1952 année où Perroux invite Arrow[6] (1921-) à présenter son travail à un colloque sur *L'avantage collectif* qui se tient en juin à l'ISEA. Auparavant, Arrow avait envoyé à Guilbaud des épreuves de son livre *Social Choice and Individual Values*. Arrow parlait dans son livre du « well-known voting paradox » et Guilbaud fut surpris de voir qu'il ignorait qu'il était dû à Condorcet. Il est certain que la venue d'Arrow fut une motivation importante pour Guilbaud d'écrire son texte *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation*. Il sera publié avec la contribution d'Arrow (*Le principe de rationalité dans les décisions collectives*[7]) et celle des autres intervenants au colloque dans un numéro spécial de la revue de l'ISEA *Économie appliquée*.[8]

Dans les sections suivantes, sans suivre nécessairement l'ordre du texte de Guilbaud, j'analyse différentes contributions qu'il apporte et en quoi elles ont été souvent précurstrices de travaux ultérieurs. Dans la deuxième section, j'examine ce que Guilbaud a fait redécouvrir ou découvrir dans sa lecture de l'*Essai* de Condorcet. Les deux sections suivantes sont consacrées à *l'effet Condorcet* (terme du à Guilbaud), d'abord celui découvert par Condorcet, puis celui beaucoup plus général défini par Guilbaud. La cinquième section porte sur le résultat d'impossibilité obtenu (sous certaines hypothèses) par Guilbaud pour l'agrégation de propositions logiquement liées. Dans les deux sections suivantes, j'examine deux voies considérées par Guilbaud pour pallier l'effet Condorcet dans le cas de l'agrégation de préférences : d'abord celle empruntée –plus ou moins clairement- par Condorcet mais qui correspond à la procédure maintenant bien connue, dite de Kemeny ou de la *médiane* ; ensuite celle des *domaines restreints* devenue classique après les contributions de Donald Black mais sur lesquelles Guilbaud apporte un éclairage qui préfigure des travaux très récents. Dans la dernière section, je reviens sur l'explication de la cause de l'effet Condorcet par Guilbaud . En conclusion, je résume les principales contributions novatrices de son texte et j'examine si elles ou non été suivies de développements ultérieurs. Enfin je situe son texte dans le combat qu'il a mené pour la « mathématique sociale ».

Avant de commencer, il faut toutefois faire une remarque sur le style de Guilbaud dans ses textes et dans celui de 1952 en particulier. Alors que le style bourbakiste rigoureux mais excessivement abstrait allait s'imposer pour longtemps dans les

---

[5] Pour une biographie et les publications de Guilbaud voir le numéro spécial de *Mathématiques et Sciences humaines* (n°.183, 2008) (URL:http://www.ehess.fr/revue-msh/recherche.php?numero=183).

[6] Arrow fit un séjour en Europe de décembre 1951 à Août 1952 financé par le « Social Science Research Council ».

[7]Ce texte qui est en français ne contient pas l'erreur sur son « théorème de possibilité » qu'on trouve dans la première édition en 1951 de *Social Choice and Individual Value* . Arrow [1983] en a donné la version en anglais.

[8]*Économie appliquée* 5(4): 501-584 (Octobre-Décembre 1952). Les autres contributions de ce numéro sont de B. de Jouvenel, P. Streeten, I.M.D. Little, G. Nyblen, L. Buquet, G. Bernacer, P. Massé et J. Akerman. Pour des réimpressions et des traductions en anglais du texte de Guilbaud, voir Guilbaud [1966], [1968] et [2008].

mathématiques françaises, Guilbaud s'en écarte résolument en mêlant discours *littéraire* imprégné d'*histoire* et raisonnement *mathématiqu*e à base d'*exemples*. De plus, l'article de 1952 est publié dans une revue économique. Or, si à l'époque il ne manque pas d'économistes doté d'un bon niveau de connaissances mathématiques, celles ci ne portent pas généralement sur les « nouvelles » mathématiques, telles que l'algèbre dite « abstraite » ou les « mathématiques discrètes » qui sont en plein essor. Guilbaud considère donc qu'il doit aussi faire œuvre de pédagogie, ce qui explique le ton didactique de certains passages.

L'*ESSAI* DE CONDORCET

Si l'importance du Condorcet (1743-1794) comme philosophe et homme politique a toujours été reconnue, son importance comme mathématicien a été très discutée[9]. En particulier, l'*Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* était tombé dans un profond oubli. Certes, il avait été (plus ou moins) lu par quelques contemporains dont ceux qui comme Daunou (1760-1840), L'Huilier (1750-1840)[10], Lacroix (1765-1843) ou Poisson (1781-1840) avaient poursuivi des recherches dans des directions semblables. Mais le mathématicien Joseph Bertrand (1822-1900) le critique vertement dans le dernier chapitre de son *Calcul des probabilités* (1889), écrivant par exemple : « Aucun de ses principes n'est acceptable, aucune de ses conclusions n'approche de la vérité ». Plus tôt, Isaac Todhunter (1820-1884) avait consacré un chapitre à une analyse détaillée de l'*Ess*ai dans son *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lagrange* (1865), mais pour arriver aux mêmes conclusions que Bertrand. Un des premiers mérites de Guilbaud est donc d'avoir dans sa lecture de l'*Essai* fait découvrir ce qui était auparavant resté ignoré.

Il est vrai que l'*Essai* n'est pas exempt de défauts. Comme le dit son titre, Condorcet veut appliquer le calcul des probabilités aux problèmes de jugement. Il suit d'ailleurs en cela une longue tradition de l'application du *c*alcul des probabilités aux décisions humaines, tradition qu'on peut faire remonter au moins à Pascal et illustrée alors par Daniel Bernoulli (1700-1782) ou Buffon (1707-1788) et son « Arithmétique morale »**.** Condorcet part de la conviction qu'il y a une vérité : dans une élection, il y a un candidat meilleur que tous les autres, dans un tribunal un accusé est ou non coupable. Mais les électeurs ou les juges peuvent faire des erreurs dans la reconnaissance de la vérité. Sachant que chacun a une certaine probabilité d'erreur, Condorcet se demande alors quelle est la probabilité qu'ils prennent collectivement la bonne décision et quelle est la procédure de décision collective qui permettra de

[9] Voir la présentation par Crepel et Gilain de la première partie du colloque édité par eux (Crepel et Gilain [1989]).

[10] Daunou et surtout Lhuillier ont travaillé sur les procédures de votes et ils citent tous les deux l'*Essai* (voir McLean [1995] ou McLean et Urken [1994]).

maximiser cette probabilité. Mais peut-on assimiler le mécanisme de production de ces erreurs à des tirages au sort dans une urne de Bernoulli, comme le fait Condorcet? et obtenir des conclusions sur la probabilité de l'erreur -ou de la justesse- de la décision collective ? C'est très téméraire et peut justifier la vindicte de Bertrand.

Cependant, derrière ce que Stuart Mill traitait de « scandale mathématique », Guilbaud dévoile une question préliminaire abordée par Condorcet et approfondie par ses successeurs : « au lieu de se demander si le choix qui résulte d'une procédure donnée est bon ou mauvais, on peut se demander dans quelle mesure ce choix représente bien le vœu de la collectivité ». Il décrit alors le cheminement de Condorcet[11] : celui-ci rappelle d'abord le paradoxe montré par le Chevalier de Borda (1733-1799) auquel peut conduire l'application de la règle de *pluralité* (qui retient le candidat majoritairement classé en tête par les électeurs) : le candidat ainsi choisi peut être battu majoritairement par chacun des autres candidats. Condorcet montre ensuite que la méthode proposée par Borda de *somme des rangs* (obtenus par chaque candidat dans les ordres de préférence de chaque électeur) ne permet pas d'éviter ce paradoxe. Et poursuit Guilbaud, Condorcet introduit alors une méthode fondamentale d'analyse des opinions (préférences, jugements…) individuelles : la décomposition en propositions simples de type binaire (oui/non, plus grand/plus petit), sur chacune desquelles on pourra appliquer la *règle majoritaire*[12] sans crainte de problèmes. Et ceci va amener Condorcet à une analyse très pertinente de ces systèmes de propositions et de leurs possibles contradictions (cette analyse que Todhunter avait estimé « of too little value to detain us any longer » [1865] p. 375). Ainsi, il observe que des propositions peuvent être liées comme dans l'exemple suivant où elles sont incompatibles (*Essai, Discours préliminaire*, p. 50-51) : la première proposition est p = « il est prouvé que l'accusé est coupable » et la seconde est q = « il est prouvé que l'accusé est innocent ». Condorcet suppose alors qu'il y a 11 avis pour *p et nonq*, 7 avis pour *nonp et q* et 6 avis pour *nonp et nonq*. Dans ce cas l'avis majoritaire est *p et nonq,* tandis que l'avis obtenu en appliquant la règle majoritaire sur chacune des deux propositions est *nonp* et *nonq*.

On verra à la section 5 les problèmes posés par l'agrégation de propositions liées et le résultat que Guilbaud obtient à ce sujet. Après Guilbaud (et grâce à lui), Granger [1956] d'abord puis Rashed [1974] vont s'intéresser à la *mathématique sociale* de Condorcet (pour un exposé récent sur icelle, voir Crepel et Rieucau [2005]). D'autre part, à partir des années 70, on constate un regain d'intérêt porté à toutes les facettes de Condorcet avec notamment les livres de Baker [1975] ou des Badinter [1988] et

---

[11] En se référant aussi à d'autre textes de Condorcet, comme son *Essai sur la constitution et les fonctions des assemblées provinciales* (1788) et son texte *Sur la forme des élections* (1789).

[12]Lorsque cela sera nécessaire, je préciserai s'il s'agit de la règle majoritaire *stricte* nécessitant d'obtenir plus de la moitié des suffrages au lieu de celle dite parfois *large* où l'obtention de la moitié des suffrages est suffisante (ces deux règles coincidant si le nombre de suffrages est impair). La règle majoritaire a été proposée dès le 13ème siècle par Ramon Llull (voir McLean et London [1990]).

avec le colloque *Condorcet : mathématicien, économiste, philosophe, homme politique* tenu à Paris en 1988 (Crépel et Gilain [1989]). A la faveur de ce mouvement, on va découvrir ou redécouvrir et étudier ses nombreux autres travaux sur les problèmes liés aux élections et à l'agrégation de jugements (voir particulièrement Crepel [1990]).

L'*EFFET CONDORCET* DANS L'*ESSAI*

On sait bien maintenant que Condorcet préconisant sa méthode de vote de règle majoritaire sur les propositions binaires obtenues par décomposition d'opinions complexes découvre qu'elle a un inconvénient non négligeable : lorsque l'on recompose les propositions simples majoritaires rien n'assure que le résultat sera une opinion cohérente. Dans l'*Essai,* Condorcet présente plusieurs exemples de cette situation, mais non le plus simple, celui obtenu lorsque les préférences de trois votants sur trois candidats sont $a>b>c$, $b>c>a$ et $c>a>b$[13], puisque alors la méthode de Condorcet donne les trois préférences *incompatibles* $a>b$, $b>c$ et $c> a$. Guilbaud (p.519)[14] appelle ce phénomène l'*effet Condorcet* (en fait, comme on le verra plus loin, un cas particulier de cet effet), alors qu'Arrow, qui le redécouvre[15], le nomme «the voting paradox ». Guilbaud pose alors une question naturelle. Pour savoir la gène causée par cet effet il faut se demander s'il est fréquent. Il s'agit en supposant (dans le cas le plus simple) l'équifréquence des préférences (exprimées par des ordres totaux) possibles de calculer la fréquence de l'effet Condorcet. Pour le cas de trois candidats, Guilbaud donne quelques valeurs de ces fréquences suivant le nombre de votants : 5,6% pour 3 votants, 7% pour 4, 7,8% pour 9, et 8,4% pour 25. Puis, il ajoute « Pour un nombre très grand on calcule, au moyen des procédés habituels, une valeur limite un peu inférieure à 9% », avec en note en bas de page « valeur donnée par le calcul : $1-3/\pi \text{Arccos}(1/\sqrt{3}) = 0{,}08774$ ». Cette formule obtenue par les « procédés habituels » ne manqua pas d'intriguer les lecteurs contemporains de Guilbaud[16]. D'autre part, dans ce cas particulier de trois candidats et de *répartition uniforme* des préférences (hypothèse dite parfois de *culture impartiale*), cette fréquence n'est pas très grande.

Évidemment, depuis ce premier résultat, il y a eu une quantité considérable de travaux étudiant la fréquence de l'effet Condorcet, ou celle -plus faible- de ne pas

[13] Ces préférences sont des exemples *d'ordre total*, c'est à dire d'une relation totale, antisymétrique et transitive. Dans la suite, une telle préférence sera aussi appelée un *rangement* ou parfois simplement un *ordre*.
[14] Les numéros de pages sont ceux de la publication dans *Économie appliquée* [1952].
[15] Le «paradoxe» découvert par Condorcet était bien connu d'auteurs comme Nanson ou Dodgson qui ont travaillé sur les procédures d'élection (voir Black [1958], qui l'avait aussi redécouvert dans les années 40 et l'appelle le phénomène des « cyclical majorities ») . Arrow [1991] a raconté l'histoire de sa propre redécouverte du «voting paradox» et la genèse de son théorème (voir aussi Suppes [2005]).
[16] Pour des méthodes d'obtention de ce résultat (et de résultats plus généraux) voir Garman et Kamian [2006] et le chapitre 3 de Gehrlein [2006].

avoir de *vainqueur Condorcet*[17] (i.e. de candidat battant tous les autres à la majorité), avec des hypothèses variées sur la répartition des préférences (voir Gehrlein [2005]). Les calculs deviennent rapidement difficiles et l'on ne trouve souvent que des estimations ou des conjectures. On peut toutefois tirer une conclusion générale de ces recherches : l'effet Condorcet peut devenir fréquent et même très fréquent lorsque les nombres de candidats comparés ou/et de votants deviennent grands. Par exemple, dans l'hypothèse de culture impartiale, pour 9 candidats et 25 votants (une configuration tout à fait plausible dans des élections universitaires), la fréquence des cas où il n'y a pas de vainqueur Condorcet est de 44%. Donc, si l'on veut utiliser la règle majoritaire autant que possible, il faut, comme Condorcet l'a fait, chercher des moyens de pallier cet effet indésirable. Mais avant d'étudier ces moyens aux sections 6 et 7, nous allons voir que Guilbaud reconnaît dans cet effet un phénomène beaucoup plus général.

L'*EFFET CONDORCET* GÉNÉRALISÉ

Guilbaud va d'abord se faire historien des sciences en rapprochant l'effet Condorcet d'autres phénomènes analogues, puis, en mathématicien, il va en donner une formulation générale. Un premier phénomène très analogue est celui relatif à l'« homme moyen » du mathématicien, statisticien, astronome et naturaliste Quetelet (1796-1894). On sait que pour définir son « homme moyen », Quetelet proposait de prendre les moyennes (arithmétiques) de différentes caractéristiques (taille, poids, aptitudes quantifiées…). Les objections rapidement faites à cet homme moyen sont qu'il peut être un homme impossible, ce qu'explique parfaitement Cournot (1801-1877). dans un texte cité par Guilbaud : « Lorsqu'on applique la détermination des moyennes aux diverses parties d'un système compliqué, il faut bien prendre garde que ces valeurs moyennes peuvent ne pas se convenir : en sorte que l'état du système dans lequel tous les éléments prendraient à la fois les valeurs moyennes déterminées séparément pour chacun d'eux, serait un état impossible » (p.213 dans *Exposition de la théorie des chances et des probabilités,* Paris, 1843). Cournot cite le cas de triangles rectangles dont on fait les moyennes des longueurs des côtés obtenant ainsi un triangle qui n'est plus nécessairement rectangle, ce que Guilbaud illustre par un exemple numérique. Un autre phénomène d'un type semblable cité par Guilbaud concerne la reconstitution du texte original d'un ouvrage ancien (par exemple, un Évangile) à partir des variantes de différents manuscrits. Au 19ème et début du 20ème siècle des philologues comme Karl Lachmann (1793-1851) et Dom Henri Quentin (1872-1935) entendent substituer aux méthodes traditionnelles des méthodes plus scientifiques. En particulier, Dom Quentin s'appuie sur des « statistiques rigoureuses » portant sur les

---

[17] Black[1958] donne quelques fréquences pour l'existence d'un vainqueur Condorcet.

variantes d'un même texte et en déduit « une règle de fer » pour l'obtention de la version originale. Cette méthodologie de critique externe sera fortement critiquée notamment parce que, là aussi, appliquer la même règle de reconstitution à tous les fragments d'un texte ne garantit pas la cohérence (vocabulaire, style, syntaxe, pensée…) du texte final.

Dans les trois situations évoquées, « il s'agit toujours de combiner en une seule des représentations individuelles et d'examiner si le résultat satisfait ou non à certaines exigences internes de cohérence » (p.526). Guilbaud entend alors poser un « problème logique préalable en sa plus grande généralité ». Pour ce faire, il commence par définir la notion de *loi de composition* (ou *opération*) de l'algèbre dite « moderne ». Il rappelle ensuite plusieurs opérations usuelles par lesquelles en statistique on résume un ensemble de nombres (une *série statistique*) en un nombre : la *moyenne* usuelle et ses généralisations, la *médiane*[18] (dans le cas ou seul l'ordre entre les valeurs numériques est signifiant) et le *mode*. A propos de la médiane, il note un point qui sera développée dans la section 7, à savoir qu'on peut la définir dans des structures *partiellement ordonnées*.

Il décrit alors le cadre général dans lequel on peut situer les problèmes d'agrégation et les paradoxes précédents. Les objets à agréger sont des objets complexes formés par la réunion d'objets élémentaires (préférences par paires, valeurs numériques ou rangs sur différentes dimensions, fragments de textes). Pour agréger de tels objets en un objet de même espèce, on définit une opération d'agrégation en utilisant sur chaque composante une opération de « moyenne généralisée » (règle majoritaire, moyenne usuelle, médiane..). Et un paradoxe se produit dès que l'ensemble des objets à agréger n'est pas *fermé* pour cette opération d'agrégation, c'est à dire dès qu'elle produit des objets n'appartenant pas à l'ensemble des objets à agréger. Guilbaud (p.537) passe alors à une formulation logique du problème apparaissant dès que l'on considère que les objets à agréger se présentent sous la forme de réponses *oui* ou *non* (+, -) à une série de questions. C'est typiquement le cas des relations de préférences avec les questions *a* est–il meilleur que *b* ? mais, plus généralement, c'est le cas lorsque les composantes des objets sont des propositions déclarées *vraies* ou *fausses*. Pour obtenir les réponses correspondant à l'objet collectif, on peut donc appliquer (par exemple) la règle majoritaire pour déterminer la réponse collective à chaque question. Mais, au niveau individuel, les réponses aux questions peuvent être liées. Par exemple, l'hypothèse de transitivité des préférences implique que les réponses *oui* aux questions $a > b$? et $b > c$? impliquent la réponse *oui* à la question $a > c$? Guilbaud propose alors d'appeler *effet Condorcet* en en sens beaucoup plus général la situation où, lorsque les réponses individuelles aux questions sont liées, une telle règle d'agrégation produit un objet (une suite de réponses) qui ne respecte pas ces liaisons.

[18] terme dû à Cournot, Laplace l'appelant le *milieu de probabilité* ou la *valeur probable*.

Un exemple de tel effet s'obtient en prenant trois opinions formées des réponses *vrai* ou *faux* à deux propositions p et q et à leur conjonction $p \wedge q$. Si la première opinion donne *vrai* comme réponse à p et à q, elle doit répondre *vrai* à $p \wedge q$. Si la seconde (respectivement, troisième) répond *vrai* (respectivement, *faux*) à p et *faux* (respectivement, *vrai*) à q, ces deux opinions doivent répondre *faux* à $p \wedge q$. Les réponses majoritaires sont alors respectivement pour chacune des trois questions *vrai*, *vrai* et *faux*, ce qui est une opinion contradictoire. On reconnaît là un exemple de ce qui a été appelé le *paradoxe doctrinal* ou *dilemme discursif* (« doctrinal paradox » ou « discursive dilemma »), qui rentre donc dans le cadre de l'effet Condorcet à la Guilbaud. On sait que l'étude de ce paradoxe a conduit au développement d'une « agrégation des jugements » en plein essor (voir, par exemple, Nehring et Puppe [2009]).

LE RÉSULTAT D'IMPOSSIBILITÉ DE GUILBAUD

L'exemple précédent montre que, lorsque des opinions sont formées de réponses à des questions liées, l'application de la règle majoritaire question par question peut conduire à des effets Condorcet (généralisés). Guilbaud pose alors la question : est-il possible de trouver une autre procédure d'agrégation qui les éviterait et ceci quelque soit les liaisons logiques entre les propositions ? Il conserve toutefois le fait que la règle doit déterminer les réponses collectives, proposition par proposition, ce qui revient à imposer la condition d'*indépendance* d'Arrow. Il y ajoute une condition de *neutralité* (la règle doit être la même pour chaque proposition), dont il donnera une justification plus loin dans son texte. Enfin, il note qu'on peut commencer par considérer le cas de deux propositions liées puisqu'une telle règle devrait respecter leur liaison. Les réponses (*vrai* ou *faux*, + ou -) données à chacune des deux propositions par les n « individus » pouvant se représenter par des n–uplets de 1 et 0, les hypothèses d'indépendance et de neutralité font que la fonction d'agrégation est complètement déterminée par une fonction booléenne $2^n \rightarrow \{0,1\}$. Une telle fonction est elle même équivalente à la donnée des n–uplets dont l'image est 1, ou encore de la famille correspondante de parties de $\{1,2\ldots..n\}$. Ces parties que nous appellerons les *coalitions gagnantes*[19] jouent le même rôle que les *ensembles décisifs* d'Arrow. Guilbaud étudie ensuite les contraintes induites sur cette famille de coalitions gagnantes du fait que la règle doit respecter les (16) liaisons binaires possibles entre deux propositions.

Je ne rentrerai pas dans le détail de son raisonnement et de ses preuves, puisque ils ont fait l'objet d'un texte récent (Eckert et Monjardet [2010]) auquel on pourra se reporter. Pour résumer, il montre d'abord que la famille de coalitions gagnantes doit être ce qu'il appelle une *famille de majorités au sens large*[20], c'est à dire qu'elle doit

[19] En fait, Guilbaud après avoir montré qu'une coalition gagnante pour *vrai* l'est aussi pour *faux*, les appelle *efficaces*.

[20] A propos de ces familles, Guilbaud fait explicitement référence aux « simple games » qu'on trouve dans l'ouvrage de von Neumann et Morgenstern (*Theory of Games and Economic Behavior*). Il est malheureux que beaucoup d'auteurs

vérifier deux conditions. Celle d'*ipsodualité* : une coalition est gagnante si et seulement si la coalition complémentaire ne l'est pas ; et celle de *monotonie* : si une coalition est gagnante toute partie la contenant l'est aussi. Ces familles de majorités au sens large (dont Guilbaud donne quelques exemples) définissent toutes les règles d'agrégation utilisables sans risque de contradictions pour l'agrégation des réponses à deux propositions liées. Mais il faut aussi que ces règles d'agrégation puissent permettre d'agréger des réponses à plus de deux propositions. Et ceci nécessite que trois coalitions gagnantes aient toujours une intersection non vide (sinon, il est facile de construire un profil de réponses individuelles à trois propositions pour lequel la réponse collective n'appartiendra pas à l'ensemble des réponses individuelles possibles). Un petit raisonnement combinatoire[21] montre alors que la famille des coalitions gagnantes doit être un *ultrafiltre*, et puisqu'on est dans le cas fini, qu'elle doit être *dictatoriale* : les coalitions gagnantes sont toutes les parties contenant un individu particulier. En fait, Guilbaud n'utilise pas le terme ultrafiltre pour une raison qu'il a explicité plus tard[22] : « J'aurais pu signaler les filtres de Henri Cartan. Mais, d'abord j'aurais trouvé trop pompeux cette allusion et ensuite, pour Cartan les filtres étaient un moyen de se débarrasser du « fléau du dénombrable » ; il s'agit donc essentiellement de l'infini, hors de sujet ici ». Mais il suffit de lire la preuve de Guilbaud pour voir que « the followers of Bourbaki will notice an ultrafilter in the background » comme aurait dit Blau[23] et comme je l'avais observé [Monjardet [1969] p.180) : « Il est alors immédiat que dans l'algèbre de Boole des parties de N, $\mathcal{F}$ [la famille des coalitions gagnantes] doit être un filtre maximal ». On constate ainsi que Guilbaud a été le précurseur de l'usage des ultrafiltres en théorie du choix social, avant que Hanssonn [1976], dans un papier écrit en 1971, et Kirman et Sondermann [1972] les utilisent pour une preuve du théorème d'Arrow dans le cas d'un nombre infini de votants[24].

Évidemment, la *méthode de preuve* de Guilbaud s'applique à l'agrégation des préférences. Il est facile de voir qu'une fonction d'agrégation d'ordres totaux indépendante et respectant l'unanimité est aussi neutre et l'on obtient ainsi le théorème d'Arrow dans sa version ordres totaux: les seules règles d'agrégation transformant n'importe quel profil d'ordres totaux en un ordre total et vérifiant ces deux conditions sont les projections (dites « dictatoriales absolues »)[25]. Autrement dit, dès que l'on

---

anglophones ou francophones aient repris le terme de *simple game* ou de *jeu simple* pour désigner une famille de parties vérifiant certaines conditions dans des contextes autres que la théorie des jeux et, notamment, en théorie du choix social. Outre le terme *famille de majorités généralisées*, malheureusement un peu long, on trouve aussi le terme *fédération*.

[21] Valable dans un cas plus général (voir, Monjardet [1983]).

[22] Notes adressées à B. Monjardet en 2003 à propos d'une première version de "Social choice theory and the "Centre de Mathématique Sociale". Some historical notes",

[23] Voir Blau [979] « Semiorders and collective choice », *Journal of Economic Theory* 29,195-206.

24 Kirman et Sondermann, comme semble-t-il Hansonn, exploitaient une observation de Fishburn montrant que le théorème d'Arrow n'est plus vrai pour un nombre infini de votants.

[25] On sait qu'Arrow impose ces deux conditions dans le cas des préordres totaux et que dans ce cas le dictateur ne l'est que pour les préférences strictes.

utilise une autre règle on viole l'une des hypothèses du théorème et en, en particulier, on peut obtenir des effets Condorcet. On doit alors se demander ce qui peut être fait pour pallier cet effet.

PALLIER L'EFFET CONDORCET : CE QUE PROPOSE CONDORCET

Condorcet a fait dans l'*Essai* des propositions -citées par Guilbaud- dans le cas où sa règle de majorité (appliquée à des ordres totaux) conduit à une préférence non transitive[26]. Il écrit : « on écartera de l'avis impossible successivement les propositions qui ont une moindre pluralité et l'on adoptera l'avis résultant de celles qui restent »[27]. Cependant, cette phrase de Condorcet est ambiguë (au moins dès qu'il y a plus de trois candidats) et est susceptible d'interprétations différentes (voir Black, [1958]). Guilbaud en donne une interprétation dont on verra plus loin qu'elle sera plus tard retrouvée -de façon différente- par Young [1988]. Guilbaud écrit (p.514) : « Condorcet ne peut se résigner à conclure qu'on ne peut attribuer aucune opinion cohérente (*ordre total*) au corps électoral…Il cherche un moindre mal, c'est-à-dire parmi toutes les *opinions cohérentes*, celle qui est appuyée par le plus grand nombre de suffrages ». Quel est le *support* donné par les votants à un rangement pouvant représenter la préférence collective ? C'est clairement la somme des supports des préférences binaires contenues dans ce rangement. Par exemple, soit le profil suivant de préférences de 7 votants sur 4 candidats *a*, *b, c* et *d*, (dans ce tableau, l'ordre se lit de haut en bas ; par exemple, le votant 1 a l'ordre *c>b>a>d)* :

1	2	3	4	5	6	7
c	*c*	*c*	*b*	*b*	*a*	*a*
b	*b*	*b*	*a*	*a*	*d*	*d*
a	*a*	*a*	*d*	*d*	*c*	*c*
d	*d*	*d*	*c*	*c*	*b*	*b*

un profil de sept ordres totaux

On en déduit le tableau suivant de *comparaisons par paires*. Dans ce tableau, les nombres dans les cases de ce tableau dénombrent les préférences binaires entre les candidats (par exemple 2 votants ont préféré *a* à *b).* Les nombres en gras sont ceux supérieurs ou égaux à la majorité, qui est ici de 4. On constate donc que la règle majoritaire ne conduit pas à un ordre, puisque, par exemple, on a le circuit *b>a>d>c>b*. Il y a donc effet Condorcet.

[26] Exactement à une relation totale et antisymétrique, appelée *tournoi*, mais non transitif (un tournoi transitif est un ordre total).

[27] Dans cette phrase, le terme *avis* signifie la préférence collective obtenue par la règle majoritaire, tandis que celui de *proposition* signifie une préférence entre deux candidats (*a>b* ou *b>a*).

x>y	*a*	*b*	*c*	*d*
a		2	**4**	**7**
b	**5**		2	**5**
c	3	**5**		3
d	0	2	**4**	

Tableau des comparaisons par paires du profil

Le support de l'ordre *a>b>*c*>d* est 2+4+7+2+5+3 = 23 tandis que celui de l'ordre *c>b>a>d* est 5+3+3+5+5+7 = 28. On peut vérifier que cet ordre *c>b>a>d* a le plus fort support parmi les 24[28] rangements possible sur 4 candidats[29]. Donc, selon Guilbaud, c'est la solution de Condorcet au problème soulevé par la présence d'un effet Condorcet pour ce profil.

Avant d'expliquer comment Young arrive au même résultat, on peut faire deux observations. D'abord, il est facile de voir que si le profil de préférences ne présente pas d'effet Condorcet, c'est à dire si la règle majoritaire conduit à un rangement, alors celui-ci a le plus fort support[30]. Ensuite, il peut exister plusieurs rangements ayant un plus fort support.

Dans son analyse de la procédure proposée par Condorcet, Young commence par rappeler la démarche probabiliste de Condorcet. Le but de la procédure de vote est de trouver le *vrai* ordre de mérite des candidats sachant que les ordres donnés par les votants sont entachés d'erreurs. Le modèle probabiliste introduit par Condorcet pour la recherche de ce vrai ordre est que chaque votant a une probabilité constante $p > 1/2$ de préférer le candidat le meilleur dans une comparaison de 2 candidats. Condorcet cherche alors le rangement ayant la combinaison de préférences binaires la plus probable dans ce modèle, c'est à dire ce qui est maintenant appelé l'*estimation du maximum de vraisemblance* de ce rangement. Sous des hypothèses d'indépendence, un calcul simple montre que ce rangement est « the set of propositions that contain no cycles and is supported by the largest number of pairwise votes », c'est à dire exactement le même que celui donné par Guilbaud[31]. Dans la suite, j'appellerai ce rangement le rangement ou la solution de Condorcet.

Or, il se trouve que ce rangement est aussi celui proposé sous différentes formes par différents auteurs (Kemeny 1959, Hays 1960, Brunk 1960) autour des années 1960 et qui est connu sous le nom de *rangement de Kemeny*[32] ou de *rangement médian*. Il est nécessaire d'expliquer en quoi un tel rangement est médian, car ceci nous

[28] Le nombre de rangements différents de m candidats est $m! = m(m-1)\ldots 2.1$.

[29] Dans cet exemple, l'ordre ayant le plus fort support est un ordre présent dans le profil -c'est celui du votant 1- mais, en général, il peut fort bien ne pas y figurer.

[30] Au moins quand le nombre de votants est impair. S'il est pair, la règle majoritaire (stricte) fournit un ordre partiel et les ordres totaux ayant un plus fort support sont ceux contenant cet ordre partiel (ses *extensions linéaires*).

[31] Voir aussi Crépel [1970] qui, dans son analyse déjà citée de textes de Condorcet sur les élections, écrit qu'ils « confirment plutôt » l'interprétation de Guilbaud et Young.

[32] Le fait que la procédure de vote correspondante soit appelée *régle de Kemeny* ne provient pas de l'antériorité toute relative du texte de Kemeny. Elle résulte de ce que son approche a été reprise 3 ans plus tard dans un livre qui a eu un grand succès à l'époque : *Mathematical Models in the Social Sciences* par Kemeny et Snell. Par contre, les papiers de Brunk et Hays, bien que publiés dans un journal renommé, n'ont guère eu d'échos.

servira dans la section prochaine où nous verrons Guilbaud utiliser cette notion de médiane à propos de l'autre façon de pallier l'effet Condorcet. Soit P_1, $P_2 \ldots P_n$ n points d'un *espace métrique*, c'est à dire d'un ensemble muni d'une *distance*[33]. Un point M est une *médiane* (*métrique*) de ces n points si M est un point de l'espace minimisant la somme $d(M, P_1) + d(M, P_2) + \ldots + d(M, P_n)$ de ses distances aux n points. Je n'aborderai pas ici les multiples apparitions de cette notion de médiane dans des espaces métriques variés (voir à cet égard Monjardet [1991]), sinon pour signaler que la médiane d'une distribution statistique est une médiane métrique[34]. Noter aussi que rien n'empêche qu'un n-uplet de points ait plusieurs médianes.

Afin de montrer que les rangements de Condorcet sont des médianes (métriques), il faut introduire un espace métrique dans l'ensemble de tous les rangements possibles. Il existe une distance très naturelle entre deux rangements, celle donnée par le nombre de leurs désaccords. Il y a un *désaccord* entre deux rangements sur une paire de candidats s'ils ont des préférences opposées sur eux (l'un préfère le premier au second, l'autre le second au premier). Par exemple, la distance entre les deux rangements $a>b>d>c$ et $d>b>c>a$ est 4 puisqu'ils sont en désaccord sur les paires $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$ et $\{b,d\}$. Il est facile de voir que le nombre de désaccords entre deux rangements définit bien une distance (en fait, ce nombre est la moitié de la classique distance de la *différence symétrique* entre deux ensembles). Dans le cas où $n = 3$ ou 4, et donc où il y a 6 ou 24 rangements, il est agréable de représenter cet espace métrique par un graphe (non orienté) le *graphe permutoèdre* où la distance entre deux rangements est égale à la longueur d'un plus court chemin entre les deux sommets représentant ces rangements.

Les figures 1 et 2 ci dessous montrent ces deux graphes permutoèdre. Dans ces figures, un rangement est représenté par une *permutation* (*abcd* représente le rangement $a>b>c>d$.) On peut vérifier facilement sur la Figure 2 que la distance entre *abdc* et *dbca* est bien 4.

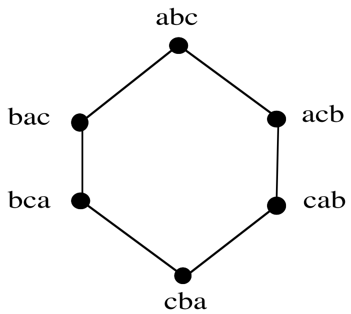

Figure 1: le graphe permutoèdre pour 3 candidats.

[33] Rappelons qu'une distance associe à toute *paire* $\{P,Q\}$ de points une valeur numérique non-négative $d(P,Q)$ telle que $d(P,Q) = 0$ si et seulement si $P = Q$ et $d(P,Q) \leq d(P,R) + d(R,Q)$ pour tout triplet de points P, Q et R.

[34] C'est un résultat dans Laplace [1774]. Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire (absolument continue) ; la médiane est classiquement définie comme la valeur μ telle que $F(\mu) = 0.5$. Laplace prouve que μ est aussi la valeur minimisant la somme des déviations, où la *déviation* entre deux valeurs est leur L_1 (aussi appelée *Manhattan*) distance, c'est à dire la valeur absolue de leur différence.

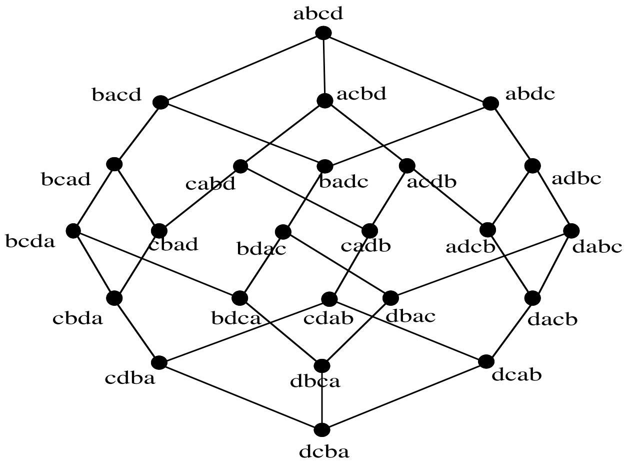

Figure 2: le graphe permutoèdre pour 4 candidats.

L'ensemble de tous les rangements de n candidats muni de la distance des désaccords étant un espace métrique, on peut y parler de médianes. Un rangement M est un *rangement médian* (une médiane) de n rangements L_1, $L_2 \ldots L_n$ si M minimise parmi tous les rangements possibles la somme de ses distances aux n rangements. Et en fait, c'est un tel rangement médian que Kemeny (1959) proposait pour agréger des préférences. Maintenant, on a le résultat suivant (Barbut, [1966]) : un rangement M est un rangement médian du profil (L_1, $L_2 \ldots$. L_n) de rangements si et seulement si M est un rangement de Condorcet (c'est à dire si M a un support maximum parmi tous les rangements possibles). Autrement dit, la réponse de Kemeny au problème d'agrégation de rangements est la même que celle de Condorcet. On a donc ici deux formulations différentes de cette méthode d'agrégation ; mais il en existe en fait de nombreuses autres, dont celles de Brunk et Hays cités précédemment (dans Monjardet [1990] on trouve 22 formulations équivalentes de cette méthode). D'autre part, cette procédure médiane de Condorcet-Kemeny & co a fait l'objet d'une remarquable caractérisation axiomatique due à Young et Levenglick [1978].

Il reste que cette procédure médiane pose plusieurs problèmes. D'abord, pour un profil donné, il existe en général plusieurs solutions, qui d'une part peuvent être assez éloignées les unes des autres, et d'autre part être plus nombreuses que les rangements initiaux. Quelle solution choisir ? ou faut-il recommencer la procédure sur les solutions obtenues ? Mais il n'est pas exclu d'obtenir un ensemble de solutions stable par itération de la procédure. Il existe un autre problème au moins aussi redoutable. Comment calculer effectivement ces rangements médians ? Le cas de 3 candidats est facile, car alors la méthode proposée par Condorcet et citée au début de cette section est sans ambiguïté et donne les ordres médians. Mais, en général, on a à résoudre un problème *d'optimisation combinatoire* dont on sait maintenant qu'il est très difficile (le terme exact est *NP-difficile*)[35]. Ceci permet de comprendre que Condorcet n'ait pu trouver un algorithme permettant d'implémenter sa solution et rend à postériori assez savoureuse l'assertion de Hays écrivant -certes en 1960, donc excusable- que trouver une solution « may be done quite simply by putting the rank-order data into a table

[35] Pour en savoir plus sur la procédure médiane et les méthodes utilisées pour trouver un ordre médian (au moins pour un nombre non trop grand de candidats), on consultera Hudry, Leclerc, Monjardet et Barthélemy [2006]

showing the number of cases in which the row object is ranked above the column object and permuting rows and columns (simultaneously, so that rows and columns show the same order) until the sum of the entries above the diagonal is maximal ».

Je ne quitterai pas la procédure médiane pour pallier l'effet Condorcet sans mentionner qu'elle a été aussi utilisée dans bien d'autres problèmes d'agrégation (voir Barthélemy et Monjardet [1981]) et notamment comme solution au problème de l'« homme moyen » de Quetelet. Guilbaud cite un texte de 1949 du mathématicien prolifique Maurice Fréchet (1878-1973) « Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen » [1949]. Fréchet avait fait de nombreuses contributions pour définir ce que sont les *valeurs typique*s d'« éléments aléatoires abstraits dans des espaces abstraits ». Il raconte qu'ayant entendu parler du problème posé par l'homme moyen, il eut l'idée d'appliquer certaines de ces contributions à ce problème. Dans son texte, il propose plusieurs solutions dont la principale consiste à prendre une médiane dans la partie d'un espace euclidien (multidimensionnel) constituée des *n*-uplets numériques correspondants aux hommes « réels »). Mais en fait, cette solution de la médiane multidimensionelle avait déjà été proposée plus de quarante ans auparavant par le statisticien, démographe, ethnologue et sociologue italien Corrado Gini (1884-1965) dans un texte précisément intitulé « L'uomo medio ».

PALLIER L'EFFET CONDORCET : LES DOMAINES RESTREINTS ET LA MÉDIANE

Une autre voie suivie pour pallier l'effet Condorcet est celle initiée par les travaux de l'économiste Duncan Black (1908-1991) dans les années cinquante ([1948], [1958]). Il montre en effet que la procédure majoritaire peut s'utiliser sans craindre d'effet Condorcet, si les préférences des individus satisfont une condition dite d'*unimodalité*[36]. Dans la suite, j'appellerai *domaine Condorcéen*[37] un ensemble d'ordres totaux où la règle majoritaire ne produit jamais d'effet Condorcet. Après le domaine Condorcéen des ordres unimodaux de Black, bien d'autres ont été introduits et nous en reparlerons plus bas. Guilbaud consacre plusieurs pages à l'étude des ordres unimodaux et il en montre une propriété fondamentale, celle de former un *treillis distributif*. Avant d'expliciter cette propriété et ses conséquences, il convient d'abord de le citer (p.532) : « …on peut définir une médiane dans des structures partiellement ordonnées de type variés. Dès maintenant, notons que la loi de majorité peut s'apparenter à une médiane ». Et plus loin (p.548) à propos des domaines Condorcéens : « Or, il est intéressant de constater que l'analyse d'une opinion comme réponses par oui ou non à une série de questions, suivie de l'adoption de l'opinion reconstruite au moyen

---

[36] suivant l'appellation que j'utiliserai. Black, lui, parle de « single-peakdness » condition. Elle consiste à supposer que les alternatives sur lesquelles se prononcent les votants sont rangés dans un ordre total *objectif* de référence et que si *p* est l'alternative préférée par un votant, il préférera l'alternative *x* à l'alternative *y* si *x* est plus proche de *p* que *y* dans l'ordre de référence.

[37] D'autres appellations sont *domaine restreint*, *domaine acyclique*, *domaine consistent* ou *domaine à valeurs restreintes* (value restricted domain).

des réponses majoritaires, conduit précisément à définir cette structure comme *partiellement* ordonnée et à reconnaître que l'opinion collective finalement adoptée occupe une situation qui généralise la situation de la médiane dans un ensemble linéaire *complètement* ordonné ». Guilbaud n'a pas trop détaillé la signification de ces passages ; pour le faire, je vais devoir donner les quelques notions nécessaires sur les treillis et les médianes latticielles[38].

Un *treillis* est un ensemble ordonné où tout couple x,y d'éléments admet un plus grand minorant commun appelé leur *infimum* et noté $x \wedge y$, et un plus petit majorant commun appelé leur *supremum*[39] et noté $x \vee y$. On montre facilement que toute partie A d'un treillis (fini) admet un infimum (noté $\bigwedge A$) et un supremum (noté $\bigvee A$). Tout ensemble totalement ordonné est un treillis, l'infimum (respectivement, le supremum) de deux éléments étant le plus petit (respectivement, le plus grand) d'entre eux. Mais, en général, les treillis sont des *ensembles partiellement ordonnés*, ce qui signifie qu'il y existe des éléments *incomparables*. Il en est par exemple ainsi du treillis formé par l'ensemble des parties d'un ensemble, l'ordre étant l'inclusion entre parties. Notons qu'au lieu de parties, on peut parler de n-uplets composés de 0 et 1 et pouvant coder des réponses *oui* ou *non* à une série de questions, ce qui est le cas considéré plus haut par Guilbaud. Dans ce treillis de parties, l'opération d'infimum est l'intersection et celle de supremum l'union.

Considérons alors l'ensemble de toutes les relations binaires définies sur un ensemble E. Une relation binaire étant une partie de l'ensemble des couples (x,y) d'éléments de E, l'ensemble de ces relations binaires est un treillis de parties. Prenons maintenant un profil arbitraire de relations binaires $\Pi = (R_1, R_2, \ldots, R_n)$ et considérons sa relation majoritaire (stricte) $M(\Pi)$, c'est à dire la relation formée par l'ensemble des couples présents dans plus de la moitié de ces relations. On voit sans peine que dans le treillis des relations binaires et en posant $N = \{1,2...n\}$, cette relation majoritaire s'écrit sous la forme d'un *polynôme latticiel* : $M(\Pi) = \cup\{\cap\{R_i, i \in C\} : C \subseteq N, |C| > n/2\}$, dite *médiane algébrique (stricte)* du profil Π. En remplaçant dans l'expression précédente $> n/2$ par $\geq n/2$, on obtient la *médiane algébrique (large)* du profil Π. D'autre part, il existe une distance naturelle entre parties R et S d'un ensemble, celle déjà évoquée de la *différence symétrique* (entre parties d'un ensemble) $d(R,S) = |R \backslash S| + |S \backslash R|$ $(= |R \cup S| - |R \cap S|)$. On peut donc parler de médiane (métrique) du profil Π par rapport à cette distance. Maintenant, on a le résultat suivant : l'ensemble des médianes métriques du profil Π est l'ensemble des relations contenues entre les deux médianes algébriques de Π (i.e. entre les deux relations majoritaires).

Ce résultat admet une généralisation aux *treillis distributifs*, c'est à dire aux treillis où pour trois éléments quelconques x, y, z, on a toujours $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ et $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributivité de chacune des opérations par rapport à l'autre,

[38] En 1952, il existait très peu d'ouvrages sur les treillis et Guilbaud cite le seul ouvrage en français existant, à savoir celui de Glivenko, *Théorie générale des structures* paru en 1938 chez Hermann, Pour les notions sur les treillis, ainsi que pour celles plus générales sur les ordres partiels, on peut consulter Caspard, Leclerc et Monjardet [2007].

[39] On trouve aussi, mais plutôt en analyse mathématique, les appellations de borne inférieure et borne supérieure.

propriété évidemment vérifiée par les parties d'un ensemble). Dans un tel treillis, il existe une distance, généralisation de la distance de la différence symétrique. On montre (Barbut [1961], Leclerc [1990]) que les médianes métriques d'un n-uplet (x_1, $x_2 \dots x_n$) d'un treillis distributif sont tous les éléments d'un *intervalle médian* dont les bornes sont les 2 éléments obtenus au moyen d'expressions généralisant les 2 règles majoritaires (stricte et large). De façon précise, un élément m d'un treillis distributif est une médiane métrique du n-uplet (x_1, $x_2 \dots x_n$) d'éléments de ce treillis si et seulement si on a $c_1 \leq m \leq c_2$ avec pour $N = \{1,2...n\}$,
$c_1 = \vee\{\wedge\{x_i : i \in C\} : C \subseteq N, |C| > n/2\} \leq c_2 = \vee\{\wedge\{x_i : i \in C\} : C \subseteq N, |C| \geq n/2\}$..
En particulier, si n est impair, $c_1 = c_2$ est l'unique médiane.

On peut maintenant revenir sur les résultats de Guilbaud concernant le domaine restreint d'ordres défini par Black. On va pour cela considérer le *treillis permutoèdre*, c'est à dire la structure de treillis qu'on peut mettre sur l'ensemble des ordres totaux. Il n'est pas nécessaire de la définir formellement (ce qui est fait dans Guilbaud et Rosenstiehl, [1963]). Il suffit de considérer les Figures 1 et 2 représentant les deux graphes permutoèdres, figures qu'on peut aussi voir comme une représentation des deux treillis permutoèdres. Par exemple, dans la Figure 2 le plus petit rangement est *dcba* (en bas de la figure) et le plus grand *abcd* (en haut de la figure). Un rangement est inférieur à un autre si l'on passe du premier au second par un chemin ascendant du graphe. Ainsi *cbda* est inférieur à, par exemple *cdab* et *cabd*, mais il est incomparable à *bdac*. On vérifie sur la figure que cet ordre est bien un treillis. Par exemple, $cbda \wedge acdb = cdba$ et $cbda \vee acdb = cdba$. Ce treillis n'est pas distributif, mais il contient des sous-treillis (c'est à dire des parties *stables* pour les opérations d'infimum et de supremum) distributifs sur lesquels nous reviendrons plus loin. D'autre part, le treillis permutoèdre est un espace métrique pour la distance de la différence symétrique entre deux rangements (ou, divisée par 2, celle -déjà évoquée- de leurs désaccords). Guilbaud fait alors plusieurs observations.

D'abord, les ordres définis par la condition de Black forment un sous-treillis distributif du treillis permutoèdre. D'autre part, c'est un sous-treillis *couvrant*, terme qu'il faut expliciter. On dit qu'un rangement en *couvre* un autre dans l'ordre du treillis permutoèdre s'il lui est juste supérieur, c'est à dire s'il n'existe pas d'autre rangement intermédiaire entre eux dans cet ordre. Par exemple, Figure 2, *dcba* est couvert par *cdba*, *dbca* et *dcab*, et *cabd* couvre c*bad* et c*adb*. Une partie d'un treillis est *couvrante* si elle conserve la *relation de couverture* du treillis : un élément couvre un autre élément dans cette partie si et seulement si elle le couvre dans le treillis. Un sous-treillis d'un treillis peut être ou non couvrant.

Dans le cas du treillis permutoèdre, il résulte de la définition des opérations d'infimum et de supremum de deux rangements dans ce treillis (cf. Guilbaud et Rosenstiehl, [1963]) que, dans un sous-treillis distributif couvrant, ces opérations reviennent à faire des intersections ou des unions de certains ensembles de couples contenus dans les deux rangements. Il s'en suit que, lorsqu'on considère un n-uplet d'ordres pris dans un tel sous-treillis, les relations majoritaires (qui rappelons le sont définies par des réunions d'intersections ensemblistes) sont des médianes (latticielles). Ce sont donc des éléments de ce sous-treillis et ce sont donc bien des ordres. En conséquence, un tel sous-treillis est un domaine Condorcéen (stable pour la règle majoritaire). Si de plus, ce sous-treillis est *étendu*, c'est à dire s'il contient le plus petit et le plus grand élément du treillis permutoèdre, c'est un domaine Condorcéen *maximal* (il n'est plus Condorcéen si on lui ajoute un autre ordre). Ce résultat général, qui m'avait été suggéré par les observations de Guilbaud, a été montré par Chameni-Nembua [1989] à qui j'avais demandé de le prouver pour la thèse qu'il avait entrepris sous ma direction. Les Figures 3 et 4 suivantes illustrent le cas particulier des ordres unimodaux de Black étudié par Guilbaud. La Figure 3 montre le sous-treillis (distributif, couvrant et étendu) de ces 8 ordres dans le treillis permutoèdre pour $n = 4$ (carrés noirs). La Figure 4 reproduit une figure du texte de Guilbaud montrant le (sous-) treillis (distributif couvrant et étendu) des 16 ordres unimodaux pour $n = 5$ (*ABCDE* représente l'ordre $A>B>C>D>E$ et est ici l'ordre de référence évoqué à la note 36).

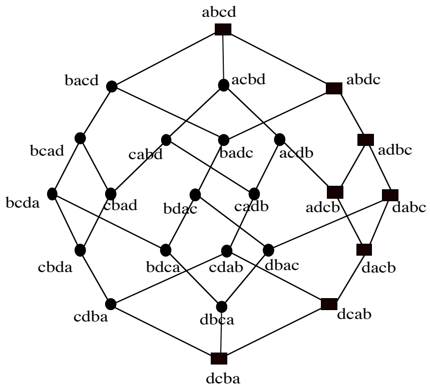

Figure 3

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & BACDE & \rightarrow & ABCDE \\
 & & & & & & \uparrow & & \\
 & & & & CBADE & \rightarrow & BCADE & & \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & DCBAE & \rightarrow & CDBAE & \rightarrow & CBDAE & \rightarrow & BCDAE & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & DCBEA & \rightarrow & CDBEA & \rightarrow & CBDEA & \rightarrow & BCDEA & \\
 & \uparrow & & \uparrow & & & & & \\
 & DCEBA & \rightarrow & CDEBA & & & & & \\
 & \uparrow & & & & & & & \\
EDCBA \rightarrow & DECBA & & & & & & &
\end{array}
$$

Figure 4

Mais Guilbaud ne remarque pas simplement que les ordres unimodaux forment un treillis distributif. Il donne aussi une explication de ce fait illustrée par la figure 5 variante de celle de son texte.

$$
\begin{array}{ccccccc}
(A<B) & \leftarrow & (A<C) & \leftarrow & (A<D) & \leftarrow & (A<E) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & (B<C) & \leftarrow & (B<D) & \leftarrow & (B<E) \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & (C<D) & \leftarrow & (C<E) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & (D<E)
\end{array}
$$

Figure 5

Dans cette figure, on trouve les 10 couples (dans l'ordre alphabétique) formés avec les 5 éléments *A*,*B*,*C*,*D*,*E*. Ces 10 couples sont munis d'une relation d'ordre partiel dont la relation de couverture associée est représentée par les flèches qui les lient. Ainsi, le couple ($A < B$) est couvert par le couple ($A <$ C), lui même couvert par le couple ($A < D$) etc. ; par contre les couples ($C < D$) et, par exemple, ($A < E$) sont incomparables. On peut s'assurer que cet ordre entre les couples est celui induit par la condition d'unimodalité de Black (avec *ABCDE* comme ordre de référence[40]). Et les 16 ordres unimodaux de la figure 4 sont exactement les ordres qui respectent cet ordre entre les couples : si par exemple un ordre vérifie ($B < D$) alors il doit aussi vérifier tous les couples qui lui sont supérieurs, soit les couples ($A < B$), ($A <$ C), ($A < D$) et ($B <$ C) et seulement ceux ci. Il en résulte que l'ordre correspondant est C>D>B>A>E, qu'on trouve bien dans les ordres de la Figure 4.

Là aussi l'observation de Guilbaud se généralise. Dans un ensemble ordonné ($X,>$) on appelle *filtre* toute partie F de X telle que si $x \in F$ et $y>x$, alors $y \in F$. Il résulte d'un très célèbre théorème de *représentation* des treillis distributifs dû au grand mathématicien Garett Birkhoff (1911-1996) que l'ensemble des filtres d'un ensemble ordonné quelconque est un treillis distributif[41]. Les 16 ordres totaux de la Figure 4 correspondent exactement aux 16 filtres de l'ensemble ordonné de la Figure 5, et le treillis distributif qu'ils forment est isomorphe au treillis de ces filtres.

De manière plus générale dès qu'on a un ordre sur l'ensemble des $n(n\text{-}1)/2$ couples[42] d'un ensemble à n éléments, l'ensemble des ordres totaux correspondant aux filtres de cet ensemble ordonné peut être muni d'une structure de treillis distributif et constitue un domaine Condorcéen pour la règle majoritaire. Et il a été montré récemment (Galambos et Reiner [2008]) que les domaines Condorcéens (maximaux et *connexes*[43]) obtenus par différents auteurs (comme Abello, Craven, ou Fishburn) à partir de constructions ou/et caractérisations diverses sont tous de ce type. On trouvera une vue d'ensemble sur la recherche des « grands » domaines Condorcéens (d'ordres totaux) et sur ces résultats récents dans Monjardet [2009].

POURQUOI L'EFFET CONDORCET ?

Guilbaud, ayant montré l'existence d'effets Condorcet dans des situations variées d'agrégation, en propose une explication générale. Dans les situations étudiées, les objets qu'il s'agit d'agréger sont des *objets complexes* formés d'*objets élémentaires*. La méthode d'agrégation de ces objets complexes consiste à les décomposer en leurs éléments simples, puis à appliquer *séparément* à chaque série de ces éléments

---

[40] Si, par exemple, on a ($B < D$) on doit aussi avoir ($A < D$) , puisque alors l'élément préféré dans un ordre unimodal par rapport à l'ordre de référence *ABCDE* est inférieur ou égal à D et que A est plus loin que B de cet élément.

[41] et, qu'inversement, tout treillis distributif est le treillis des filtres d'un ensemble ordonné.

[42] On considère ici que l'ensemble est totalement ordonné et que les couples sont ceux formés d'éléments distincts pris dans cet ordre.

[43] Un domaine d'ordres est connexe quand il est connexe au sens de la théorie des graphes sur le graphe permutoèdre (deux ordres quelconques de ce domaine peuvent toujours être joints par un chemin dans le domaine).

simples une procédure de *moyenne généralisée,* et enfin de reconstituer un objet complexe agrégé au moyen des objets simples agrégés obtenus. Par définition, une propriété essentielle de cette méthode est sa propriété d'*indépendence* : chaque série d'éléments simple est agrégé (par la même ou par des opérations différentes de moyenne) indépendamment des autres séries. Maintenant, dès que dans les objets complexes considérés, il existe des liaisons entre leurs éléments, l'objet complexe obtenu peut ne plus satisfaire ces liaisons. Dans le cas le plus simple, mais où l'on peut souvent se ramener, les objets sont susceptibles d'être *codés* comme des vecteurs booléens où 1 (respectivement, 0) code la présence (respectivement, l'absence) d'un objet élémentaire[44]. C'est, par exemple le cas, lorsque les objets complexes sont des relations binaires. Une telle relation R sur un ensemble $E = \{x_1, ... x_m\}$ est codé par un vecteur booléen b_{ij}, où $b_{ij} = 1$ (respectivement, 0) si $(x_i,x_j) \in R$ (respectivement, $(x_i,x_j) \notin R$)[45]. Si l'on doit agréger un profil de relations quelconques en une relation quelconque, il n'y a aucun inconvénient -et même que des avantages compte tenu de ses excellentes propriétés- à utiliser une procédure majoritaire sur chaque couple pour obtenir la relation agrégée ; d'après ce qui a été dit plus haut, elle sera aussi une médiane métrique du profil. Dans le cas où il y a un nombre pair de relations à agréger avec des « candidats » *ex-aequo*, et donc deux relations majoritaires distinctes, on a vu plus haut que toute relation de l'*intervalle médian*, c'est à dire toute relation contenue entre ces deux relations majoritaires est aussi une médiane métrique du profil, donc une solution possible. Supposons maintenant que les relations à agréger ne soient pas quelconques, mais soient par exemple des tournois (ce qui se traduit -voir note 26- par la propriété $b_{ij} + b_{ij} = 1$) que l'on veuille agréger en un tournoi. Alors, dans le cas où il y a un nombre pair de tournois à agréger et des « candidats » *ex-aequo*, aucune des deux relations majoritaires n'est un tournoi, ce qui constitue un premier « paradoxe » de l'usage des règles majoritaires. Toutefois, dans ce cas, en départageant arbitrairement les candidats ex-aequo, on obtient un tournoi qui est aussi une médiane métrique du profil (s'il y a p paires de candidats ex-aequo, il y a 2^p telles médianes constituant l'intersection de l'intervalle médian et de l'ensemble des relations de tournois). Par contre, supposons maintenant que de plus, ces tournois soient transitifs, c'est à dire des ordres totaux (ce qui se traduit par la propriété $b_{ij} + b_{jk} + b_{ki} \leq 2$), alors (et pour un nombre quelconque de votants) il peut n'exister aucun ordre total compris entre les relations majoritaires ((ou égal à l'une d'elle), ce qui est précisément l'effet Condorcet.

On voit donc que la présence de « paradoxes » liés à l'utilisation de règles majoritaires pour l'agrégation de relations revient à des questions de *stabilité* (ou peut dire aussi de *fermeture*) d'un ensemble structuré de relations par rapport aux opérations

44 Un tel codage suppose que les objets élémentaires ont été listés (totalement ordonnés).

45 Comme plus haut, il faut ici se donner un ordre total sur l'ensembles de tous les couples (x_i,x_j).

définies par ces règles[46]. Lorsque cet ensemble est le treillis distributif de toutes les relations binaires ou celui restreint, par exemple, aux ordres unimodaux, les règles majoritaires qui y sont des opérations de médianes (pour les opérations d'union et d'intersection) dans ces treillis fonctionnent bien. Mais dans un cas intermédiaire comme celui où l'on prend l'ensemble de tous les ordres totaux, celui ci n'étant plus fermé par rapport à ces mêmes opérations, l'effet Condorcet peut se manifester[47].

On peut généraliser le cas précédent des relations binaires. Les objets à agréger sont des k-uplets pris dans un ensemble X d'objets élémentaires (où X peut être un produit direct ΠX_i). L'ensemble de tous les objets possibles est X^k. Si tous ces objets sont admissibles la méthode d'agrégation par une opération de « moyenne » sur chaque composante ne pose aucun problème. Mais, si l'ensemble S des objets admissibles est une partie de X^k définie par un ensemble Φ de formules reliant les composantes de ces objets, alors l'utilisation de cette méthode d'agrégation nécessite des propriétés de fermeture de l'opérateur d'agrégation m vis à vis de Φ : $x_1, ...x_n \in S$ (c'est à dire satisfait Φ) doit impliquer $m(x_1, ... x_n) \in S$ (c'est à dire satisfait Φ). Sinon, les contradictions (les « paradoxes ») sont inévitables.

CONCLUSION

Je ne prétends pas avoir considéré toutes les contributions à la théorie du choix social qu'apporte le texte de Guilbaud. En particulier, je n'ai pas abordé sa dernière section « Irréductibilité de l'intérêt général ». Guilbaud y traite d'un point de vue historique et mathématique des théories ordinales et cardinales de l'utilité et des problèmes rencontrés par Bergson, Samuelson ou d'autres dans la construction d'une *fonction d'utilité sociale*. Il termine en évoquant la théorie des jeux comme modèle très différent d'obtention de décisions à partir d'intérêts divergents[48].

Je résume les contributions que j'ai présentées. Elles concernent d'abord le cas de l'agrégation des préférences (exprimées par des ordres totaux) : premiers résultats sur la probabilité de l'effet Condorcet dans ce cas ; lien établi entre la procédure majoritaire de Condorcet et la notion générale de médiane dans des structures algébriques (treillis distributifs) ou/et métriques, ce lien rendant compte de la présence ou de la disparition de l'effet Condorcet[49] ; dévoilement de la méthode de Condorcet (égale à la « Kemeny's rule » ou procédure médiane) pour pallier cet effet. Elles portent ensuite sur des situations plus générales d'agrégation : notion générale d'effet Condor-

[46] Ce point de vue de la stabilité d'un domaine par rapport à des opérations est très développé dans les travaux de l'« école russe » de théorie du choix social. Voir, par exemple Aizerman et Aleskerov *Theory of choice* North Holland (1995).

[47] Dans tout treillis et en particulier dans le treillis permutoèdre, on peut définir des médianes algébriques, mais qui contrairement au cas du treillis distributif ne sont pas en général des médianes métriques (voir Leclerc [1990]).

[48] Guilbaud dans plusieurs textes s'est penché sur cette théorie (voir Guilbaud [1954],[1968])

[49] Les travaux cités (sections 6 et 7) de Barbut ([1961], [1966]) Monjardet ([1980]) ou Chameni-Nembua ([1989]) ainsi que plusieurs dûs à Leclerc (tel que ([1990]), tous membres du Centre de Mathématique Sociale, se sont inscrits dans le développement de ces liens.

cet et causes de cet effet ; première émergence d'un théorie « abstraite » de l'agrégation qui, menée dans un cadre logique, conduit à un théorème d'impossibilité de type arrowien ; preuve de ce résultat faisant (implicitement) appel à la notion d'ultrafiltre. Il faut évidemment aussi y ajouter l'approche *histoire des idées* qu'apporte Guilbaud et qui lui permet de découvrir dans l'*Essai* de Condorcet ce que personne n'y avait vu avant lui.

Ces apports novateurs ont eu des fortunes diverses. On sait que de nombreux travaux ont été menés sur la probabilité de l'effet Condorcet dont, au moins un certain nombre reconnaissaient la paternité de Guilbaud. Les liens entre médianes algébriques, métriques, règle majoritaire et règle médiane ont été aussi très développés, que ce soit d'un point de vue mathématiques « pures » (dans les treillis, les demi-treillis ou les graphes) ou « appliquées » (pour des problèmes d'agrégation dans des domaines variés tels que l'analyse des données), notamment par des chercheurs du Centre de Mathématique Sociale (on trouvera des exposés de synthèses et des références dans Barthélemy et Monjardet [1981], Day et McMorris [2003] et Hudry, Leclerc, Monjardet et Barthélemy [2009]). Par contre, ce n'est que récemment (Eckert et Monjardet [2010] que l'on s'est penché sur le résultat d'impossibilité de Guilbaud pour l'agrégation de propositions logiquement liées qui préfigure à la fois les approches *abstraites* en théorie de l'agrégation et les travaux sur l'*agrégation des jugements*. Il faut aussi noter que -à l'exception du résultat sur la fréquence de l'effet Condorcet- le texte de Guilbaud, écrit en français dans une revue d'audience internationale modique, a été largement ignoré par les auteurs de langue anglaise. Et ceci, malgré les deux éléments qui auraient du éveiller leur curiosité et en permettre sa lecture. D'une part, l'appréciation portée par Arrow dans la deuxième édition (1963) de *Social Choice and Individual Values* : « a remarkable exposition of the theory of collective choice and the general problem of aggregation » suivie de plusieurs commentaires ; d'autre part, en 1966 la traduction (partielle[50]) de son texte dans le livre *Readings in Mathematical Social Sciences*, édité par Lazarsfeld et Henry.

Pour terminer, je reviens sur l'expression *mathématique sociale*. Ce n'est évidemment pas par hasard, qu'une fois entré à l'École des Hautes Études, Guilbaud va utiliser ce terme dû à Condorcet pour son centre de recherches. Mêlant histoire des idées scientifiques et analyse mathématique des problèmes d'*agrégation,* son texte présente en effet une défense et une illustration de ce peut que apporter un usage raisonné de la « mathématisation de problèmes humains ». Et écrit Guilbaud (p.504) « cette ligne de pensée [que Condorcet, après plusieurs autres, s'était efforcé de promouvoir] interrompue quant aux travaux mathématiques et logiques se trouve restituée - sans rien détruire ni répéter» par « les profondes études de K.J. Arrow » (ou de von Neumann et Morgenstern) et, peut-on ajouter, celles menés par lui même.

[50] En outre, cette traduction ne se borne pas à résumer très sommairement les pages non traduites dans des « editor's notes ». Elle supprime ou même modifie, sans le moindre avertissement, des passages des pages traduites, par exemple celui où Guilbaud donne une définition générale de l'*effet Condorcet*. On trouvera une traduction complète en anglais du texte de Guilbaud dans Guilbaud [2008].

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARROW K.J. [1951], *Social Choice and Individual Values*, New-York, Wiley. (2ème éd. révisée, 1963).

ARROW K.J. [1952], « Le principe de rationalité dans les décisions collectives », *Économie appliquée*, 5, p. 469-484.

ARROW K.J. [1983], *Social Choice and Justice*, vol 1. of Collected papers of Kenneth J. Arrow,Harvard University Press, Cambridge, Mass., Belknap Press.

ARROW K.J. [1991], « The Origins of the Impossibility Theorem», dans LENSTRA J.K., RINOY KAN A.H.G. et SCHRIJVER A. (eds) *History of Mathematical Programming*, Amsterdam, North-Holland, p.1-4.

BADINTER E. et BADINTER R. [1988], *Condorcet : un intellectuel en politique*, Paris, Fayard.

BAKER K. M. [1975], *Condorcet : from Natural Philosophy to Social Mathematics*, Chicago, University of Chicago Press. (traduction française : *Condorcet : raison et politique*, Paris, Hermann, 1988).

BARBUT M. [1961], « Médianes, distributivité, éloignements », Note CAMS, Paris, (repris dans *Mathématiques et Sciences Humaines* 70, p. 5-31, 1980).

BARBUT M. [1966], « Médianes, Condorcet et Kendall », Note SEMA, Paris. (repris dans *Mathématiques et Sciences Humaines*, 69, p. 5-13, 1980).

BARTHÉLEMY J.P. et MONJARDET B. [1981], « The Median Procedure in Cluster Analysis and Social Choice Theory», *Mathematical Social Science*, 1, 235-268.

BLACK D. [1948], «On the rationale of group decision-making», *Journal of Political Economy,* 56, p. 23-34.

BLACK D. [1958], *The Theory of Committees and Elections*, Cambridge University-Press, London (rééd. dans [1988] McLEAN I.S., McMILLAN A. et MONROE B.L. eds.) *The Theory of Committees and Elections* par Duncan Black, and *Committee Decisions with Complementary Valuation* par Duncan Black et R.A. Newing, 2ème édition révisée).

CHAMENI-NEMBUA C. [1989], « Règle majoritaire et distributivité dans le permutoèdre», *Mathématiques et Sciences Humaines*, 108, 5-22.

CONDORCET M.J.A.N. [1785], *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*, Paris.

COURNOT A. [1843], *Exposition de la Théorie des chances et des probabilités,* (p. 63 et 120), Paris, Hachette, dans Tome I de *Oeuvres complètes* de A.A. Cournot, Paris,Vrin, 1975.

CREPEL P. et GILAIN C. [1989], *Condorcet : mathématicien, économiste, philosophe, homme politique*, (sous la direction de P. Crépel et C. Gilain), Paris, Minerve.

CREPEL P. [1990], «Le dernier mot de Condorcet sur les élections», *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, 111, p. 7-43.

CREPEL P. et RIEUCAU J.N. [2005], « Condorcet's Social Mathematics, A Few Tables», *Social Choice and Welfare*, 25(2-3), p. 243-285.

DAY W.H.E. et MCMORRIS F.R. *Axiomatic Consensus Theory in Group Choice and*

Biomathematics, Philadelphia, SIAM, 2003.

ECKERT D. et MONJARDET B. [2010], «Guilbaud's theorem: An early contribution to judgment aggregation», *Mathématiques et Sciences Humaines*, 189, p.5–21.

FRÉCHET M. [1949], « Réhabilitation de la notion statistique de l'homme moyen », Paris, Les Conférences du Palais de la Découverte.

GALAMBOS A. et REINER V. [2008], « Acyclic Sets of Linear Orders via the Bruhat Order», *Social Choice and Welfare*, 30(2), p. 245-264.

GEHRLEIN W. V. [2006], *Condorcet's Paradox,* Series: Theory and Decision Library C:, Vol. 40, Berlin, Heidelberg, Springer.

GINI C. [1914], « L'uomo medio », *Giornali degli economiste e revista de statistica*, 48, p. 1-24.

GRANGER G.[1956], *La mathématique sociale du marquis de Condorcet*, Paris, PUF, (rééd. Paris, Odile Jacob [1989]).

GUILBAUD G.Th. [1952], « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Économie appliquée*, 5(4), p. 501-584. (repris dans G.Th. GUILBAUD [1968])

GUILBAUD G.Th. [1954], *Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux*, Paris, Éditions du CNRS.

GUILBAUD G.Th. [1966], « Theories of the general interest and the logical problem of aggregation », dans LAZARSFELD P.F. et HENRY N.W. (eds) *Readings in Mathematical Social Sciences*, Science Research Association, Inc., Chicago, p.262-307 (Traduction partielle de G.Th. GUILBAUD [1952]).

GUILBAUD G.Th. [1968], *Éléments de la théorie des jeux*, Paris, Dunod.

GUILBAUD G.Th. [2008], « Theories of the general interest and the logical problem of aggregation », *Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics*, 4(1) (traduction complète de G.Th. GUILBAUD [1952]).

GUILBAUD G.Th. et ROSENSTIEHL P.[1963], « Analyse algébrique d'un scrutin », *Mathématiques et Sciences Humaines*, 4, p. 9-33.

HAYS W. L. [1960], « A note on average t as measure of concordance », *Journal of the American Statistical Association*, 55, p. 331-341.

HUDRY O., LECLERC B., MONJARDET B. et BARTHÉLEMY J.P. [2009], «Metric and latticial medians », dans BOUYSSOU D., DUBOIS D., PIRLOT M. et PRADE H. (eds) *Concepts and Methods of Decision Making*, Wiley, 2009, p. 811-856.

KEMENY J.G. [1959], «Mathematics without numbers», *Daedalus*, 88, p. 577-591.

KEMENY J.G. et SNELL J. [1962], *Mathematical Models in the Social Sciences*, New York, Blaisdell.

LAPLACE [1774], *Mémoire sur la probabilité des causes par les évènements*, n°5 in Oeuvres Complètes, Tome VIII, (pp.141-153).

LECLERC B. [1990] « Medians and majorities in semimodular lattices », *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, 3, p. 266-276.

LIST C. et PUPPE C. [2009], « Judgment aggregation : A survey », dans ANAND P., PATTANAIK P. et PUPPE C. (eds.), *The Handbook of Rational and Social Choice*, Oxford, Oxford University Press.

MCLEAN I. [1995], « The first golden age of social choice 1784-1803 » dans BARNETT W., MOULIN H., SALLES M. et SCHOFIELD N. (eds) *Social choice,* *Welfare and Ethics,* Cambridge, University Press, p. 13-33.

McLEAN I. et LONDON J. [1990], « The Borda and Condorcet principles: three medieval applications», *Social Choice and Welfare*, 7, p. 99-108.

McLEAN I. et URKEN [1994], *Classics of Social Choice*, Ann Arbor, University of Michigan Press.

MONJARDET B. [1969], « Remarques sur une classe de procédures de votes et les théorèmes de possibilités » dans *La Décision, Agrégation et Dynamique des ordres de préférences*, Paris, CNRS p. 177-185.

MONJARDET B. [1990], «Sur diverses formes de la "règle de Condorcet" d'agrégation des préférences », *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, 111, p. 61-71.

MONJARDET B. [1991], «Éléments pour une histoire de la médiane métrique», dans FELDMAN J., LAGNEAU G., MATALON B.(eds), *Moyenne, Milieu et Centre : Histoires et usages,* Paris, Éditions de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales, p. 45-62.

MONJARDET B. [2006], «Social choice theory and the "Centre de Mathématique Sociale". Some historical notes», *Social Choice and Welfare,* 25, p. 433-456.

MONJARDET B.[2009], « Acyclic domains of linear orders: a survey », dans BRAMS S., GEHRLEIN W. V. et ROBERTS F. S.(eds), *The Mathematics of Preference, Choice and Order,* Essays in honor of Peter C. Fishburn, Springer, 2009, 139-160.

SUPPES P. [2005], «The prehistory of Arrow's social choice and individual values», *Social Choice and Welfare*, 25 (2), p. 319-326.

RASHED R. [1974], *Condorcet. Mathématique et société*, Paris, Hermann.

TODHUNTER I. [1865], *History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Lagrange,* Cambridge et Londres, MacMillan & co.

YOUNG H.P. et LEVENGLICK A. [1978], «A Consistent Extension of Condorcet's Election Principle», *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 35, p. 285-300.

YOUNG H.P. [1988], «Condorcet Theory of Voting», *American Political Science Review*, 82, 1231-1244 (repris dans *Mathématiques Informatique et Sciences Humaines*, p.45-59, 1990).