



**HAL**  
open science

# Un cadre général pour le calcul des élasticités inégalités de la pauvreté

Florent Bresson

► **To cite this version:**

Florent Bresson. Un cadre général pour le calcul des élasticités inégalités de la pauvreté. 2011.  
halshs-00557128

**HAL Id: halshs-00557128**

**<https://shs.hal.science/halshs-00557128>**

Preprint submitted on 18 Jan 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE D'ÉTUDES  
ET DE RECHERCHES  
SUR LE DÉVELOPPEMENT  
INTERNATIONAL

Document de travail de la série  
*Études et Documents*  
2007.4

# Un cadre général pour le calcul des élasticités inégalités de la pauvreté

Florent Bresson <sup>1</sup>  
CERDI, CNRS - Université d'Auvergne

12 juin 2007  
30 pages

1. florent.bresson@u-clermont1.fr. Remerciements : Jean-Louis Arcand, Jean-Louis Combes, Patrick Guillaumont, Paul Gyselink.

## Résumé

Depuis quelques années, nombre d'auteurs plaident pour la reconnaissance de l'importance d'une diminution des inégalités pour lutter efficacement la pauvreté. Toutefois, les effets d'une réduction du degré d'inégalité en termes de pauvreté sont encore mal connus. La littérature n'offre ainsi aucun outil satisfaisant pour prédire l'effet d'une variation du coefficient de Gini sur l'incidence de pauvreté pour une distribution de revenus donnée. L'objet de cet article est la définition d'une famille générale de transformations directement interprétables en termes de variations de mesures d'inégalités connues, puis l'extension de la méthode développée par Kakwani (1993) pour le calcul d'une élasticité inégalités de la pauvreté. Les avancées sont de trois ordres. Premièrement, les formules proposées ne se limitent pas au seul coefficient de Gini. Deuxièmement, elles permettent d'appréhender l'incertitude et la complexité caractérisant la relation entre inégalités et pauvreté. Troisièmement, elles permettent une estimation précise des élasticités inégalités de la pauvreté correspondant aux variations observées des distributions de revenus. Enfin, nous définissons un indicateur permettant d'apprécier le caractère « pro-pauvre » d'une variation du degré d'inégalités par comparaison des élasticités observées avec l'ensemble des valeurs théoriquement admissibles au regard de la distribution initiale des revenus.

**Mots clés :** inégalités, pauvreté, courbe de Lorenz, élasticités.

**Classification JEL :** I32, C65, C13.

## 1 Introduction

À partir des années 90, les questions de pauvreté ont connu un vif regain d'intérêt et, depuis la fin de la décennie, sont devenues centrales dans les politiques d'aides au développement comme en témoignent les Cadre Stratégiques de Lutte contre la Pauvreté. Ces derniers ont fait ressurgir l'idée, relativement ancienne (Chenery *et al.* 1974), que l'objectif principal de réduction de la pauvreté peut être atteint en favorisant des politiques combinant redistribution et croissance. La question est alors posée de savoir de quelle manière doivent être associées croissance et redistribution. Une partie de la réponse peut être apportée grâce aux outils statistiques utilisés pour estimer la contribution respective de ces deux leviers de réduction de la pauvreté (Datt & Ravallion 1992). Dans un grand nombre de cas (voir par ex. Baye 2006), il est apparu que la croissance avait été le principal vecteur de réduction de la pauvreté. Ce constat a donné lieu à de nombreux travaux destinés mettre en lumière la relation entre variations du revenu moyen et variations de la pauvreté (Squire 1993, Ravallion 1995, Sala-i Martin 2006) et dont la conclusion se résumait généralement au fameux « *growth is good for the poor* » de Dollar & Kraay (2002). Toutefois, l'observation d'une faible contribution de la réduction des inégalités à baisse de la pauvreté ne signifie pas nécessairement que la redistribution des revenus est inefficace. Ce phénomène peut tout aussi bien s'expliquer par une utilisation limitée de ce levier dans la plupart des pays, intuition en partie confirmée par l'étude de Li *et al.* (1998) qui relèvent dans la plupart des éco-

nomies une grande stabilité des distributions de revenus dans le temps. Le rôle des inégalités dans la détermination du niveau de pauvreté a néanmoins été peu à peu remis à l'honneur. Dans un premier temps, cette « réhabilitation » se fit au travers de la croissance. Ravallion (1997) et Heltberg (2002) ont ainsi mis en évidence le fait que la croissance permet une réduction d'autant plus forte du niveau de pauvreté que le degré d'inégalités est faible. D'autres études (Ravallion 2005, Kalwij & Verschoor 2007) ont plus récemment souligné que la réduction des inégalités peut contribuer directement à la baisse du niveau de pauvreté. La mise en évidence de ce « double dividende », selon l'expression de Bourguignon (2003), conduit donc à ne plus négliger la diminution des inégalités comme levier de réduction de la pauvreté.

Cette nécessité de combiner efficacement croissance et redistribution pour atteindre des objectifs de réduction de la pauvreté se traduit logiquement par la fixation d'objectifs intermédiaires précis en termes de performance économique et de diminution des inégalités par les décideurs politiques. Tout l'enjeu est alors d'anticiper les résultats en termes de pauvreté associés à la réalisation de ces objectifs intermédiaires. Cette estimation est grandement facilitée par le fait que les relations entre inégalités, croissance et pauvreté sont, par la définition même des mesures de pauvreté utilisées, essentiellement mécaniques. Kakwani (1993) et, plus récemment, Bourguignon (2003) ont développé une approche analytique afin de pouvoir exprimer ces relations sous forme d'élasticités et traduire l'importance des conditions initiales sur ces élasticités. Ce dernier point mérite d'être souligné car il traduit le fait que croissance et redistribution exercent des effets différents selon le niveau de développement et le degré d'inégalités des économies considérées. Autrement dit, la manière de combiner le plus efficacement croissance et redistribution dans le cadre d'un objectif de réduction de la pauvreté varie d'un pays à l'autre et nécessite donc la connaissance de l'efficacité relative de ces deux leviers.

Les travaux de Kakwani (1993) et Bourguignon (2003) permettent une connaissance précise de la manière dont un accroissement du revenu moyen permet de réduire la pauvreté pour un degré d'inégalités donné. Toutefois, les formules d'élasticités inégalités de la pauvreté proposées par ces auteurs semblent peu opérationnelles du fait des restrictions importantes imposées dans leurs calculs. Ainsi en faisant l'hypothèse que les distributions de revenus peuvent être approchées par une distribution log-normale, Bourguignon (2003) réduit à la fois l'hétérogénéité des distributions rencontrées<sup>1</sup> et l'éventail des modifications de celles-ci. Même si elle ne fait appel à aucune hypothèse distributive particulière, la méthode employée par Kakwani (1993) n'est pas exempte de reproches puisqu'elle ne permet pas non plus de prendre en compte la diversité des modifications possibles d'une distribution relative des revenus pour une variation donnée du degré d'inégalités. Il faut donc se prévenir d'une utilisation aveugle de ces formules car elles laissent entendre que l'on est capable de prédire très précisément comment une diminution du

---

1. Bresson (2006) a récemment montré qu'un recours systématique à la loi log-normale donne fréquemment lieu à une surestimation de l'amplitude des élasticités ainsi qu'à une mauvaise appréciation de l'efficacité relative de la croissance et de la réduction des inégalités en termes de pauvreté.

degré d'inégalités se traduit en variation de la pauvreté. Or il est évident qu'en l'absence d'une information complète sur la structure de l'économie considérée et les politiques pratiquées, notre capacité à effectuer ce genre de prévisions est faible. Dès lors, la nécessité de définir des politiques efficaces de réduction de la pauvreté fait apparaître le besoin d'une prise en compte de cette incertitude et justifie le développement d'outils permettant de l'appréhender.

Le présent article définit et présente de tels outils. Plus précisément, l'objectif est de mettre en évidence l'importance de la transformation considérée de la courbe de Lorenz pour le calcul d'une élasticité inégalités de la pauvreté au travers d'un relâchement des hypothèses retenues par Kakwani (1993). L'intérêt des développements effectués est à la fois analytique, économétrique et opérationnel. Il s'agit dans un premier temps de mieux cerner l'influence des conditions initiales sur le niveau de cette élasticité. Les formules présentées dans l'article doivent aussi permettre l'estimation précise de la valeur d'une élasticité inégalités de la pauvreté correspondant à la transformation observée de la distribution des revenus et, pour une distribution initiale donnée, l'estimation d'intervalles de valeurs théoriques pour cette élasticité. Dans la mesure où ces intervalles dépendent entièrement des caractéristiques des distributions considérées, la comparaison directe des valeurs des élasticités inégalités observées entre des économies différentes ne permet pas d'apprécier comment chaque économie a utilisé le levier de la réduction des inégalités pour diminuer son niveau de pauvreté. Afin d'évaluer *ex post* cette capacité à associer changements distributifs et réduction de la pauvreté, nous proposons un indice simple de performance basé sur la comparaison des élasticités observées avec l'intervalle de valeurs admissibles correspondant.

L'article est organisé de la manière suivante. La section 2 rappelle l'expression d'un certain nombre de mesures standard de pauvreté et d'inégalités, et présente la plupart des notations utilisées pour les développements théoriques effectués dans la section 3. Cette dernière présente les transformations de la courbe de Lorenz utilisées pour le calcul des élasticités inégalités de la pauvreté et les formules qui en découlent. La section 4 illustre les résultats précédents à l'aide de la courbe de Lorenz bêta proposée par Kakwani (1980) et suggère son utilisation pour obtenir une estimation des élasticités inégalités de la pauvreté correspondant aux variations observées de la distribution relative des revenus. Dans la section 5 est présenté un indice de performance relative des variations observées du degré d'inégalités en termes de réduction de la pauvreté. Enfin, la section 6 conclut cet article.

## 2 Préliminaires

À partir de la correspondance existant entre la courbe de Lorenz  $L(p)$  et une fonction de distribution, Aaberge (2000) observe qu'il est possible de définir une distribution relative de revenus grâce à l'ensemble des moments de la courbe de Lorenz. Ces moments  $\tilde{D}_k$ ,  $k$  désignant l'ordre

du moment, sont définis de la manière suivante :

$$\tilde{D}_k = \int_0^1 p^k L(p) dp, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Pour obtenir des mesures comprises dans l'intervalle unitaire, Aaberge (2000) normalise les moments définis par (2.1). Il en résulte une famille de mesures d'inégalités  $D_k$  que l'on peut exprimer de la manière suivante :

$$D_k = (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p)) dp. \quad (2.2)$$

où  $p$  désigne la part de la population la plus pauvre. Cette famille de mesure présente l'avantage d'inclure le traditionnel coefficient de Gini que l'on obtient en posant  $k = 1$ . Sachant qu'une distribution définie sur un intervalle borné peut être définie à partir de l'ensemble de ses moments, on peut définir intégralement une courbe de Lorenz au travers de  $\mathbf{D}$ , vecteur de l'ensemble des mesures  $D_k$  correspondantes et sous ensemble du domaine  $\mathfrak{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$  où  $I$  est l'intervalle unitaire. Une courbe de Lorenz quelconque peut donc être définie à partir de la formulation générale  $L(p, \mathbf{D})$ . Si l'on note  $\mu$  le revenu moyen de la population, le vecteur  $(\mathbf{D}, \mu)$  permet une description intégrale de la distribution des revenus  $y$ . Pour toute distribution caractérisée par le couple  $(\mathbf{D}, \mu)$ , on peut de même définir  $f(y, \mathbf{D}, \mu)$  et  $F(y, \mathbf{D}, \mu)$  les fonctions de densité et de distribution des revenus correspondants.

Aaberge (2000) met en évidence l'existence d'une relation très étroite entre ces mesures  $D_k$  et la famille de mesures S-Gini (Donaldson & Weymark 1980, Kakwani 1980) définie par :

$$G_k = 1 - k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p) dp. \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

et qui comprend aussi le coefficient de Gini ( $k = 1$ ). On peut donc de manière alternative définir la courbe de Lorenz à partir de l'ensemble  $\mathbf{G}$  de ses mesures  $G_k$  incluses dans  $\mathfrak{D}$ , soit  $L(p) = L(p, \mathbf{G})$ . De même, on peut noter  $f(y, \mathbf{G}, \mu)$  et  $F(y, \mathbf{G}, \mu)$  les fonctions de densité et de distribution<sup>2</sup>. Afin de simplifier notre propos, nous limiterons toutefois nos développements aux mesures  $D_k$ , mais l'ensemble des résultats présentés dans le reste de l'article s'applique aux mesures  $G_k$ .

La pauvreté peut être mesurée de différentes manières. L'indice le plus simple et le plus populaire est l'incidence de pauvreté  $h$  défini par :

$$h = F(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^z f(z, \mathbf{D}, \mu) dy, \quad (2.4)$$

$z$  désignant la ligne de pauvreté. Cette mesure étant en général insensible aux transferts entre pauvres ou entres pauvres et non-pauvres, de nouvelles mesures ont été développées afin de prendre en compte la situation des individus pauvres relativement à la ligne de pauvreté. Les

2. Pour une caractérisation des distributions de revenus à partir des mesures  $G_k$ , voir aussi Kleiber & Kotz (2002).

travaux de Sen (1976) et Kakwani (1980) ont conduit à la définition et à l'utilisation de mesures issues d'une classe de mesures de pauvreté additivement séparables définie par :

$$P(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^z W(z, y) f(y, \mathbf{D}, \mu) dy, \quad (2.5)$$

où  $W$  est une fonction de pondération telle que  $\frac{\partial W}{\partial y} < 0$ ,  $\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \geq 0 \forall y < z$ ,  $W(z, z) = 0$  et qui est homogène de degré 0 en  $(z, y)$ . Les membres<sup>3</sup> les plus connus de cette classe sont la famille  $P_\alpha$  de Foster *et al.* (1984) :

$$P_\alpha(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^z \left(\frac{z-y}{z}\right)^\alpha f(y, \mathbf{D}, \mu) dy \quad \alpha \geq 1. \quad (2.6)$$

La mesure de Watts, que l'on retrouve aussi dans de nombreuses études, se présente sous la forme :

$$P_W(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^z \ln\left(\frac{z}{y}\right) f(y, \mathbf{D}, \mu) dy \quad \forall y > 0. \quad (2.7)$$

### 3 Généralisations de la transformation de Kakwani et des élasticités inégalités correspondantes

#### 3.1 Transformations de la courbe de Lorenz

Le problème qui se pose pour calculer l'élasticité d'une mesure de pauvreté au degré d'inégalités est que cette élasticité n'est pas unique puisqu'une variation donnée de la mesure du degré d'inégalités peut être produite à partir d'une infinité de transformations de la courbe de Lorenz initiale  $L(p, \mathbf{D})$ .

Pour calculer une élasticité de la pauvreté aux inégalités, Kakwani (1993) propose la transformation suivante de la courbe de Lorenz :

$$L(p, \mathbf{D}^*) = L(p, \mathbf{D}) - \lambda(p - L(p, \mathbf{D})), \quad (3.1)$$

où  $\lambda$  correspond à une variation en pourcentage du coefficient de Gini<sup>4</sup>. On démontre aisément que  $\lambda$  correspond aussi à une variation proportionnelle de l'ensemble des mesures  $D_k$ . Dans l'optique du calcul d'une élasticité par rapport à la mesures  $D_k$ , le principe consiste donc à soustraire à la courbe de Lorenz actuelle et dans une proportion  $\lambda$  la différence entre la courbe de parfaite égalité et une courbe de Lorenz de forme fonctionnelle connue et présentant la même valeur  $\theta$  de  $D_k$  que la distribution initiale. Pour cette courbe de Lorenz, Kakwani (1993) choisit naturelle-

---

3. Afin que la famille de mesures  $P_\alpha$  soit parfaitement incluse dans la classe de mesures additivement séparables  $P$ , nous ne considérons pas le cas  $\alpha = 0$  correspondant à l'incidence de pauvreté.

4. Duclos (2002) parle de « bipolarisation » dans la mesure où cette transformation de la courbe de Lorenz correspond à l'addition pour chaque revenu  $F^{-1}(p, \mathbf{D})$  de la quantité  $\lambda(F^{-1}(p, \mathbf{D}) - \mu)$ . On peut aussi parler d'étalement à moyenne constante, ce qui implique une dominance stochastique de second ordre de la distribution initiale.

ment  $L(p, \mathbf{D})$ , mais on peut envisager d'opter pour d'autres courbes de Lorenz caractérisées par la même valeur  $\theta$  du coefficient de  $D_k$ . Une famille d'élasticités de la pauvreté au coefficient de Gini peut donc être obtenue au travers d'une généralisation de la transformation définie par (3.1). Nous proposons donc de recourir à la famille de transformation suivante :

$$L(p, \mathbf{D}^*) = L(p, \mathbf{D}) - \lambda(p - L(p, \mathbf{D}')). \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{D}'$  est un vecteur de mesures  $D_k$  tel que  $D'_k = \theta$ . À nouveau,  $\lambda$  correspond toujours à une variation proportionnelle de la mesure  $D_k$  considérée (voir annexe A). De plus, comme  $p - L(p, \mathbf{D}') \geq 0$ , toute valeur de  $\lambda \neq 0$  implique une relation de dominance au sens de Lorenz entre  $L(p, \mathbf{D}^*)$  et  $L(p, \mathbf{D})$ <sup>5</sup>.

La famille de transformation correspondant à l'équation (3.2) ne permet d'obtenir que des courbes caractérisées par une relation de dominance au sens de Lorenz. Or il est fréquent que les distributions de revenus évoluent de telle manière que la dominance de Lorenz ne puisse être utilisée (voir par exemple Shorrocks 1983). Afin d'obtenir ce résultat, il est nécessaire de modifier l'équation (3.2) en manipulant dans un premier temps la courbe de Lorenz tout en préservant la valeur initiale de la mesure  $D_k$ . Pour cela il suffit d'utiliser le fait que la moyenne pondérée de deux courbes de Lorenz est une courbe de Lorenz (Ogwang & Rao 2000) et que :

$$(k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - ((1-\lambda)L(p, \mathbf{D}) + \lambda L(p, \mathbf{D}'))) dp = \theta \quad (3.3)$$

avec  $\mathbf{D}''$  caractérisé par  $D''_k = \theta$ . On en déduit la famille générale de transformation :

$$L(p, \mathbf{D}^{**}) = (1-\lambda)L(p, \mathbf{D}) + \lambda L(p, \mathbf{D}'') - \lambda(p - L(p, \mathbf{D}')) \quad (3.4)$$

où  $\lambda$  correspond toujours à une variation proportionnelle du coefficient de Gini (cf. annexe A). On retrouve la transformation simple définie par l'équation (3.2) pour  $L(p, \mathbf{D}'') = L(p, \mathbf{D})$  ou  $L(p, \mathbf{D}') = L(p, \mathbf{D})$ .

Dans les sections suivantes, nous montrerons qu'il est possible d'interpréter ces transformations en termes de transferts de revenus et comment elles peuvent être utilisées pour obtenir des formules générales de calcul des élasticités inégalités de la pauvreté.

---

5. Il faut toutefois relever que la transformation (3.2) ne permet d'obtenir que des courbes de Lorenz dont la différence avec la courbe initiale présente une dérivée seconde par rapport à  $p$  de signe constant sur l'intervalle unitaire. Toute courbe de Lorenz présentant une relation de dominance au sens de Lorenz ne peut donc être obtenue au travers de l'équation (3.2).



### 3.2 Élasticités inégalités de l'incidence de pauvreté

Pour faciliter le calcul de l'élasticité inégalités, il est nécessaire d'utiliser la propriété suivante :

$$\left. \frac{\partial L(p, \mathbf{D}^{**})}{\partial p} \right|_{p=h^{**}} = \frac{z}{\mu}. \quad (3.5)$$

L'équation (3.5) permet de voir que l'on peut obtenir le même niveau  $h^{**}$  de pauvreté en substituant une variation de la ligne de pauvreté à la modification de la distribution relative des revenus. En procédant de même pour la courbe de Lorenz initiale et les courbes auxiliaires, on obtient donc :

$$\left. \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right|_{p=h^{**}} = \frac{z^{**}}{\mu}, \quad (3.6)$$

$$\left. \frac{\partial L(p, \mathbf{D}')}{\partial p} \right|_{p=h^{**}} = \frac{z'}{\mu}. \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial L(p, \mathbf{D}'')}{\partial p} \right|_{p=h^{**}} = \frac{z''}{\mu}, \quad (3.8)$$

Fréquemment, le calcul de  $z'$ ,  $z''$  et donc de  $z^{**}$ , nécessite la connaissance de  $h^{**}$ , ce qui implique la résolution préalable — en général une résolution numérique est nécessaire — de l'équation (3.5). En différenciant par rapport à  $p$  l'expression de la famille de transformation définie par l'équation (3.4), on peut observer la relation suivante entre les quatre lignes de pauvreté :

$$z^{**} = \frac{z - \lambda z'' + \lambda(\mu - z')}{1 - \lambda}. \quad (3.9)$$

L'équation (3.9) est particulièrement importante car elle permet d'interpréter directement la transformation de la courbe de Lorenz en transformation du niveau de revenus de chaque agent. On peut donc associer par une évaluation de  $\frac{\partial L(p, \mathbf{D}^{**})}{\partial p}$  en  $F(y, \mathbf{D}^{**}, \mu) = p$  un revenu  $y^{**}$  (ou  $y^*$ ) à chaque niveau de revenu initial<sup>6</sup>  $y$ . En général, cette évaluation fait intervenir directement  $p$  dans la relation, ce qui signifie que la transformation du revenu d'un membre quelconque de la distribution dépend de son rang au sein de celle-ci. Ce n'est toutefois pas le cas avec la transformation utilisée dans Kakwani (1993) puisque  $y^* = y + \lambda(y - \mu)$ .

L'élasticité de l'incidence de pauvreté par rapport à la mesure  $D_k$  est :

$$\eta_{D_k,0}^{**} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(z^{**}, \mathbf{D}, \mu) - F(z, \mathbf{D}, \mu)}{\lambda F(z, \mathbf{D}, \mu)}. \quad (3.10)$$

---

6. Attention,  $z^{**}$  n'est pas l'évaluation de  $y^{**}$  pour  $y = z$ , mais celle de  $y$  pour  $y^{**} = z$ . Il s'agit de la transformation de la ligne de pauvreté qui permet de préserver le niveau de l'incidence de pauvreté une fois effectuée la transformation de chaque revenus.

Pour calculer cette limite, on utilise le théorème des accroissements finis selon lequel :

$$F(z^{**}, \mathbf{D}, \mu) - F(z, \mathbf{D}, \mu) = (z^{**} - z)f(z + \delta(z^{**} - z), \mathbf{D}, \mu), \quad (3.11)$$

avec  $0 < \delta < 1$ . L'équation (3.10) se simplifie alors en :

$$\eta_{D_k,0}^{**} = \left( z + \mu - \lim_{\lambda \rightarrow 0} (z' + z'') \right) \frac{f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h}, \quad (3.12)$$

dont l'évaluation est facilitée par le fait que  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} h^* = h$ . L'équation (3.12) montre que l'élasticité est nulle pour un ensemble de courbes de Lorenz auxiliaires  $L(p, \mathbf{D}')$  et  $L(p, \mathbf{D}'')$  telles que la pente de la courbe de Lorenz en  $h$  ne soit pas modifiée. Tel est le cas lorsque  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} (z' + z'') = z + \mu$ .

Dans le cadre de la transformation définie par (3.2), on obtient la ligne de pauvreté équivalente  $z^* = z + \lambda(\mu - z')$  et donc l'élasticité :

$$\eta_{D_k,0}^* = (\mu - \lim_{\lambda \rightarrow 0} z') \frac{f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h}, \quad (3.13)$$

qui s'annule lorsque la ligne de pauvreté équivalente  $z'$  tend vers le revenu moyen. Autrement dit, il est nécessaire que  $z = \mu$  et que la pente de la courbe auxiliaire  $L(p, \mathbf{D}')$  soit être identique à celle de la courbe initiale en  $h$  pour que l'incidence de pauvreté ne soit pas affectée par une variation du degré d'inégalités.

Dans le cas spécifique de la transformation proposée par Kakwani (1993),  $z' = z^*$  et donc  $z^* = \frac{z + \lambda\mu}{1 + \lambda}$ . Comme  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} z^* = z$ , on obtient :

$$\eta_{D_k,0}^K = (\mu - z) \frac{f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h} \quad \forall k. \quad (3.14)$$

À partir de cette expression de  $\eta_{D_k,0}^K$ , il est possible de formuler  $\eta_{D_k,0}^{**}$  et  $\eta_{D_k,0}^*$  de la manière suivante :

$$\eta_{D_k,0}^{**} = \eta_{D_k,0}^K + \frac{\mu f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h} \frac{\partial (2L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}') - L(p, \mathbf{D}''))}{\partial p} \Big|_{p=h}, \quad (3.15)$$

$$\eta_{D_k,0}^* = \eta_{D_k,0}^K + \frac{\mu f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h} \frac{\partial (L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}'))}{\partial p} \Big|_{p=h}. \quad (3.16)$$

Le signe de la différence entre ces élasticités générales et  $\eta_{D_k,0}^K$  ne dépend donc que de la différence entre les dérivées premières de la courbe de Lorenz initiale et des courbes auxiliaires  $L(p, \mathbf{D}')$  et  $L(p, \mathbf{D}'')$  évaluées au niveau de l'incidence de pauvreté. Les équations (3.15) et (3.16) permettent aussi d'apprécier le fait que l'équation (3.14) est valide pour toutes courbes de Lorenz  $L(p, \mathbf{D}')$  et  $L(p, \mathbf{D}'')$  telles que  $\frac{\partial (L(p, \mathbf{D}') + L(p, \mathbf{D}''))}{\partial p} \Big|_{p=h} = 2 \frac{z}{\mu}$ . Dans le cadre de la transformation définie par (3.2), l'égalité n'est respectée que lorsque la pente de la courbe auxiliaire  $L(p, \mathbf{D}')$  en  $h$  est

égale à celle de la courbe originale au même point.

Enfin, on peut aussi simplifier l'expression générale de  $\eta_{D_k,0}^{**}$  à partir des équations (3.13) et (3.14), soit :

$$\eta_{D_k,0}^{**} = \eta_{D_k,0}^*(\mathbf{D}'') + \eta_{D_k,0}^*(\mathbf{D}') - \eta_{D_k,0}^K. \quad (3.17)$$

où  $\eta_{D_k,0}^*(\mathbf{D}')$  et  $\eta_{D_k,0}^*(\mathbf{D}'')$  sont les élasticité  $\eta_{D_k,0}^*$  obtenues respectivement à partir des courbes auxiliaires  $L(h, \mathbf{D}')$  et  $L(h, \mathbf{D}'')$ . Lorsque les courbes auxiliaires présentent des dérivées premières identiques en  $h$ ,  $\eta_{D_k,0}^{**}$  se simplifie en :

$$\eta_{D_k,0}^{**} = 2\eta_{D_k,0}^* - \eta_{D_k,0}^K. \quad (3.18)$$

Dans ce cas, on en déduit que  $\eta_{D_k,0}^{**}$  est comprise entre  $\eta_{D_k,0}^{**}$  et  $\eta_{D_k,0}^K$ . En toute logique, le domaine de définition de  $\eta_{D_k,0}^{**}$  est alors plus large que celui de  $\eta_{D_k,0}^*$  pour une distribution initiale donnée.

### 3.3 Extension à la classe de mesures additivement séparables

Afin de faciliter le calcul des élasticités, il peut être utile de reformuler l'expression générale de l'équation (2.5) à l'aide de (3.5). On obtient alors :

$$P(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^h W\left(z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p}\right) dp. \quad (3.19)$$

L'élasticité de la mesure  $P$  par rapport à  $D_k$  est définie par :

$$\eta_{D_k,P}^{**} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P(z, \mathbf{D}^{**}, \mu) - P(z, \mathbf{D}, \mu)}{\lambda P(z, \mathbf{D}, \mu)}. \quad (3.20)$$

En utilisant une expansion de Taylor de premier ordre, soit :

$$P(z, \mathbf{D}^{**}, \mu) - P(z, \mathbf{D}, \mu) \approx \lambda \frac{\partial P(z, \mathbf{D}^{**}, \mu)}{\partial \lambda}, \quad (3.21)$$

on obtient :

$$\eta_{D_k,P}^{**} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{P(z, \mathbf{D}, \mu)} \int_0^{h^{**}} \frac{\partial}{\partial \lambda} W\left(z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D}^{**})}{\partial p}\right) dp, \quad (3.22)$$

qui se simplifie<sup>7</sup> en :

$$\eta_{D_k,P}^{**} = -\frac{1}{P} \int_0^h \left(1 + \frac{\partial (L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}') - L(p, \mathbf{D}''))}{\partial p}\right) \frac{\partial W\left(z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p}\right)}{\partial \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p}} dp. \quad (3.23)$$

---

<sup>7</sup> Afin de faciliter la lecture des formules dans les paragraphes suivants nous noterons  $P = P(z, \mathbf{D}, \mu)$  lorsque cette notation ne prête pas à confusion. Il en sera de même pour les mesures  $P_\alpha(z, \mathbf{D}, \mu)$  et  $P_W(z, \mathbf{D}, \mu)$ .

Dans le cadre de la famille de transformation (3.2), on obtient l'élasticité :

$$\eta_{D_k, P}^* = -\frac{1}{P} \int_0^h \left( 1 - \frac{\partial L(p, \mathbf{D}')}{\partial p} \right) \frac{\partial W \left( z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)}{\frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p}} dp \quad (3.24)$$

et :

$$\eta_{D_k, P}^K = -\frac{1}{P} \int_0^h \left( 1 - \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right) \frac{\partial W \left( z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)}{\frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p}} dp \quad (3.25)$$

dans le cas particulier de la transformation (3.1). On en déduit :

$$\eta_{D_k, P}^{**}(\mathbf{D}', \mathbf{D}'') = \eta_{D_k, P}^*(\mathbf{D}') + \eta_{D_k, P}^*(\mathbf{D}'') - \eta_{D_k, P}^K. \quad (3.26)$$

Lorsque  $L(p, \mathbf{D}'') = L(p, \mathbf{D}')$ , on observe à nouveau que  $\eta_{D_k, P}^{**}$  est compris entre  $\eta_{D_k, P}^*$  et  $\eta_{D_k, P}^K$ . Le domaine de définition de  $\eta_{D_k}^*$  est alors inclus dans celui de  $\eta_{D_k}^{**}$ . De plus les élasticités obtenues au travers de l'équations (3.23) sont identiques à celles présentées par Kakwani (1993) lorsque la pente de la courbe de Lorenz moyenne définie par  $L(p, \mathbf{D}')$  et  $L(p, \mathbf{D}'')$  est égale à celle de la courbe initiale sur l'intervalle  $[0, h]$ . Dans le cas de (3.24), il faut par contre que  $L(p, \mathbf{D}')$  soit strictement identique à la courbe de Lorenz initiale sur ce même intervalle pour retrouver l'égalité avec  $\eta_{D_k, P}^K$ .

Pour la famille de mesures  $P_\alpha$ ,  $W \left( z, \mu \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right) = \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^\alpha$ . Lorsque  $\alpha \geq 1$ , on en déduit l'élasticité :

$$\eta_{D_k, \alpha}^* = \frac{\alpha \mu}{z P_\alpha} \int_0^h \left( 1 - \frac{\partial L(p, \mathbf{D}')}{\partial p} \right) \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^{\alpha-1} dp. \quad (3.27)$$

Dans le cas particulier de la transformation suggérée par Kakwani (1993), on peut utiliser la propriété  $\int_0^h \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^{\alpha-1} dp = -(P_\alpha - P_{\alpha-1})$  pour obtenir la formule suivante :

$$\eta_{D_k, \alpha}^K = \alpha + \frac{\alpha(\mu - z)}{z} \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha} \quad \forall k. \quad (3.28)$$

On remarquera que le paramètre  $\alpha$  peut alors être interprété comme l'élasticité inégalités de la mesure  $P_\alpha$  par rapport à  $D_k$  lorsque la ligne de pauvreté est égale au revenu moyen. Dans le cadre des élasticités  $\eta_{D_k, \alpha}^*$ , on observe la même propriété pour  $\mu = z$  et  $L(p, \mathbf{D}') = L(p, \mathbf{D})$  sur l'intervalle  $[0, h]$ . Avec la famille d'élasticité  $\eta_{D_k, \alpha}^{**}$ , la relation se vérifie à nouveau en remplaçant cette dernière condition par  $\frac{\partial L(p, \mathbf{D}') + L(p, \mathbf{D}'')}{\partial p} = \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \quad \forall p \in [0, h]$ .

À partir de l'expression de  $\eta_{D_k, \alpha}^K$ , on peut reformuler celles de  $\eta_{D_k, \alpha}^*$  et  $\eta_{D_k, \alpha}^{**}$ , soit :

$$\eta_{D_k, \alpha}^* = \eta_{D_k, \alpha}^K + \frac{\alpha \mu}{z P_\alpha} \int_0^h \frac{\partial (L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}'))}{\partial p} \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^{\alpha-1} dp. \quad (3.29)$$

$$\eta_{D_k, \alpha}^{**} = \eta_{D_k, \alpha}^K + \frac{\alpha \mu}{z P_\alpha} \int_0^h \frac{\partial (2L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}') - L(p, \mathbf{D}''))}{\partial p} \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^{\alpha-1} dp. \quad (3.30)$$

Si l'on s'intéresse maintenant à la mesure de Watts, on peut à nouveau exprimer celle-ci à partir de la courbe de Lorenz, soit :

$$P_W(z, \mathbf{D}, \mu) = \int_0^h \ln \frac{z}{\mu} - \ln \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} dp. \quad (3.31)$$

On en déduit l'expression suivante de l'élasticité correspondant à l'équation (3.2) :

$$\eta_{D_k, W}^* = \frac{1}{P_W} \left( \frac{h\mu}{\rho} - \int_0^h \frac{\partial L(p, \mathbf{D}')}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial L(p\mathbf{D})} dp \right). \quad (3.32)$$

en utilisant  $\int_0^h \frac{\partial p}{\partial L(p)} dp = \frac{h\mu}{\rho}$ ,  $\rho$  désignant la moyenne harmonique des revenus inférieurs à  $z$ . Dans le cas de la transformation de Kakwani (1993), cette élasticité devient :

$$\eta_{D_k, W}^K = \frac{h(\mu - \rho)}{P_W \rho}. \quad (3.33)$$

Ceci nous permet d'exprimer  $\eta_{D_k, W}^*$  et  $\eta_{D_k, W}^{**}$  sous la forme :

$$\eta_{D_k, W}^* = \eta_{D_k, W}^K + \frac{1}{P_W} \int_0^h \frac{\partial (L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}'))}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial L(p\mathbf{D})} dp, \quad (3.34)$$

$$\eta_{D_k, W}^{**} = \eta_{D_k, W}^K + \frac{1}{P_W} \int_0^h \frac{\partial (2L(p, \mathbf{D}) - L(p, \mathbf{D}') - L(p, \mathbf{D}''))}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial L(p\mathbf{D})} dp. \quad (3.35)$$

## 4 Les transformations bêta

### 4.1 Présentation et formules

Les formules développées dans la section 3 permettent d'apprécier la relation théorique liant différentes mesures d'inégalités à différentes mesures de pauvreté. Elles ne peuvent toutefois être utilisées directement pour apprécier l'ensemble des valeurs que peuvent prendre les élasticités inégalités de la pauvreté pour une distribution initiale donnée. Afin de réaliser un tel exercice de simulation, il est nécessaire de donner une forme fonctionnelle précise aux courbes<sup>8</sup>  $L(p, \mathbf{D}')$  et  $L(p, \mathbf{D}'')$ . Pour cela, il est possible d'utiliser la courbe de Lorenz correspondant à une loi de distribution connue (pour une revue détaillée, voir McDonald & Xu (1995) ou Kleiber & Kotz (2003)). On peut aussi recourir à des formes fonctionnelles « ad hoc » plus souples comme celles développées par Kakwani & Podder (1973, 1976), Maddala & Singh (1977), Arnold & Villaseñor (1989), Basmann *et al.* (1990) ou encore Castillo *et al.* (1999). Dans le cadre de cet article, nous allons

8. Pour la courbe de Lorenz initiale, il n'est par contre pas nécessaire de recourir à une forme fonctionnelle particulière pour estimer la courbe de Lorenz si l'on dispose de données micro-économiques complètes.

utiliser la courbe de Lorenz bêta définie par Kakwani (1980), et qui se présente sous la forme<sup>9</sup> :

$$L(p, \mathbf{D}_B) = p - \tau p^\gamma (1-p)^\beta \quad \tau > 0, 0 > \{\gamma, \beta\} \geq 1. \quad (4.1)$$

En recourant à la courbe bêta et en imposant  $L(p, \mathbf{D}') = L(p, \mathbf{D}'')$ , on obtient les transformations suivantes de la courbe de Lorenz correspondant respectivement aux transformations définies par les équations (3.2) et (3.4) :

$$L(p, \mathbf{D}^*) = L(p, \mathbf{D}) - \lambda \tau p^\gamma (1-p)^\beta, \quad (4.2)$$

$$L(p, \mathbf{D}^{**}) = (1-\lambda)L(p, \mathbf{D}) + \lambda \left( p - 2\tau p^\gamma (1-p)^\beta \right) \quad (4.3)$$

On démontre aisément (cf. annexe B) que  $L(p, \mathbf{D}^*)$  et  $L(p, \mathbf{D}^{**})$  présentent une valeur de la mesure  $D_k$  égale à  $(1+\lambda)\theta$  pour  $\tau = \frac{\theta}{(k+1)B(\gamma+k, \beta+1)}$  (dans le cas des mesures  $G_k$ , on obtient  $\tau = \frac{\theta}{k(k+1)B(\gamma+1, \beta+k)}$ ). Lorsque cette égalité est respectée, nous utiliserons la notation  $\tilde{\tau}$ . Ces transformations bêta sont particulièrement intéressantes dans la mesure où elles permettent de combiner la courbe de Lorenz initiale à des courbes de Lorenz correspondant à deux cas limites. En effet, lorsque la mesure d'inégalités considérée est le coefficient de Gini, on observe :

$$\lim_{\substack{\gamma \rightarrow 0 \\ \beta = 1}} p - \frac{\theta p^\gamma (1-p)^\beta}{2B(\gamma+1, \beta+1)} = (1+\theta)p - \theta \quad (4.4)$$

$$\lim_{\substack{\gamma = 1 \\ \beta \rightarrow 0}} p - \frac{\theta p^\gamma (1-p)^\beta}{2B(\gamma+1, \beta+1)} = (1-\theta)p \quad (4.5)$$

La courbe décrite au travers de l'équation (4.4) et associée à la condition  $L(0) = 0$  correspond à une situation où, pour un degré d'inégalités  $\theta$  et une population de  $N$  individus, le membre le plus pauvre dispose de revenus égaux à  $-N\theta\mu$  et tous les autres des mêmes revenus  $\frac{N\mu(1+\theta)}{N-1}$ . En utilisant cette courbe pour la transformation correspondant à l'équation (3.2),  $\lambda > 0$  implique que l'on retire un montant  $-N\lambda\theta\mu$  au plus pauvre pour le répartir de manière strictement égale entre les autres membres de la population. Inversement, la courbe définie par l'équation (4.5) à laquelle il faut ajouter  $L(1) = 1$ , indique une distribution symétriquement opposée à la précédente. Pour un degré d'inégalités  $\theta$  l'individu le plus riche dispose de  $N\theta\mu$  et tous les autres de  $\frac{N\mu(1-\theta)}{N-1}$ . Dans le cadre de la transformation correspondant à l'équation (3.2), l'utilisation de ce cas limite correspond, pour  $\lambda > 0$ , à un transfert de  $\lambda\mu\theta$  par chaque individu au profit de l'individu le plus riche. L'équation (4.5) peut être directement utilisée dans les formules obtenues

9. Il convient d'insister sur le fait que, dans le cadre de cet article, nous n'utilisons pas de manière traditionnelle la courbe de Lorenz bêta. Cette dernière n'est pas employée de manière à estimer la courbe de Lorenz initiale, mais pour simuler ou estimer la différence entre courbes de Lorenz initiales et finales. Elle ne sert donc qu'à opérer des transferts de revenus entre membres de la population.

précédemment<sup>10</sup> lorsque  $h < 1$ . Par contre, la courbe de Lorenz équation (4.4) n'est pas utilisable directement car elle n'est pas continue sur l'intervalle  $[0, h]$ . Il est donc préférable d'utiliser une approximation avec  $(\gamma, \beta) = (0^+; 1)$ .

La présence de ces deux cas limites semble justifier l'utilisation de la forme bêta puisqu'elle se révèle suffisamment souple pour appréhender la diversité des transformations de la courbe de Lorenz et donc la diversité des élasticités potentielles. En utilisant les transformations bêta, on obtient les élasticités correspondantes :

$$\eta_{D_k,0}^* = \mu \tilde{\tau} h^{\gamma-1} (1-h)^\beta \left( \frac{\gamma}{h} - \frac{\beta}{1-h} \right) f(z, \mathbf{D}, \mu), \quad (4.6)$$

$$\eta_{D_k,\alpha}^* = \frac{\alpha \mu \tilde{\tau}}{z P_\alpha} \int_0^h p^\gamma (1-p)^\beta \left( \frac{\gamma}{p} - \frac{\beta}{1-p} \right) \left( 1 - \frac{\mu}{z} \frac{\partial L(p, \mathbf{D})}{\partial p} \right)^{\alpha-1} dp \quad \forall \alpha \geq 1. \quad (4.7)$$

$$\eta_{D_k,W}^* = \frac{\tilde{\tau}}{P_W} \int_0^h p^\gamma (1-p)^\beta \left( \frac{\gamma}{p} - \frac{\beta}{1-p} \right) \frac{\partial p}{\partial L(p, \mathbf{D})} dp \quad (4.8)$$

pour la famille de transformations définie par (3.2). On notera que pour l'incidence de pauvreté, le signe de l'élasticité  $\eta_{D_k}$  ne dépend que de son niveau initial et des valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ . De même, on peut aisément changer de mesure d'inégalités parmi les familles  $D_k$  et  $G_k$  pour l'élasticité d'une mesure de pauvreté donnée puisque la valeur de cette élasticité ne varie que d'un facteur  $\tilde{\tau}$  une fois le couple  $(\gamma, \beta)$  choisi.

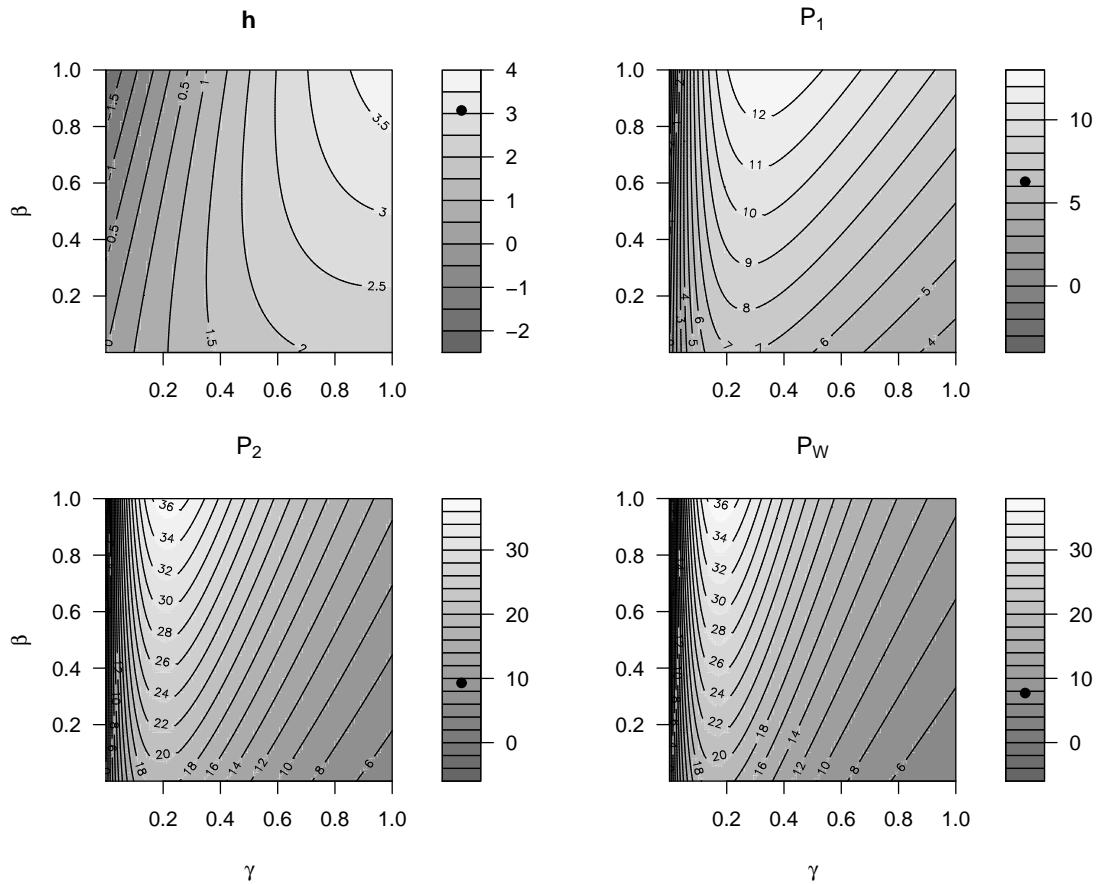
La figure 1 illustre l'importance des paramètres des équations auxiliaires pour le calcul de  $\eta_{D_k}^*$  et la différence entre celle-ci et  $\eta_{D_k}^K$  dans le cadre d'une distribution initiale suivant une loi log-normale pour un revenu moyen de 2 000 \$ et un coefficient de Gini de 0,4. La ligne de pauvreté est fixée à 2 \$ par jour. La figure 1 permet d'apprécier pour chaque élasticité l'étendue particulièrement importante des valeurs obtenues. Ainsi dans le cas de l'incidence de la pauvreté, une variation de 1% du coefficient de Gini peut donner lieu à des variations de la pauvreté comprises entre -2,5% et 4%. Sachant que dans le cadre de notre exemple, l'incidence de pauvreté est d'en-

10. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \eta_{D_k,0}^* &= \mu \theta \frac{f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h}, \\ \eta_{D_k,\alpha}^* &= \frac{\alpha \mu \theta P_{\alpha-1}}{z P_\alpha}, \\ \eta_{D_k,W}^* &= \frac{\theta h \mu}{\rho P_W}, \\ \eta_{D_k,0}^{**} &= (z + \mu(2\theta - 1)) \frac{f(z, \mathbf{D}, \mu)}{h}, \\ \eta_{D_k,\alpha}^{**} &= \alpha \left( \frac{(z + \mu(2\theta - 1)) P_{\alpha-1}}{z P_\alpha} - 1 \right), \\ \eta_{D_k,W}^{**} &= \frac{h(\rho + (2\theta - 1)\mu)}{\rho P_W}. \end{aligned}$$

On note que les élasticités  $\eta_{D_k,0}^*$ ,  $\eta_{D_k,\alpha}^*$  et  $\eta_{D_k,W}^*$  sont strictement positives tandis que le signe de  $\eta_{D_k,0}^{**}$ ,  $\eta_{D_k,\alpha}^{**}$  et  $\eta_{D_k,W}^{**}$  dépend notamment du degré d'inégalités initial  $\theta$ .

viron 18%, cette hétérogénéité peut être considérée comme non-négligeable<sup>11</sup>.



Note : le point gras représente la valeur de l'élasticité correspondant à la formule de Kakwani (1993). Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_W$  désigne la mesure de Watts.

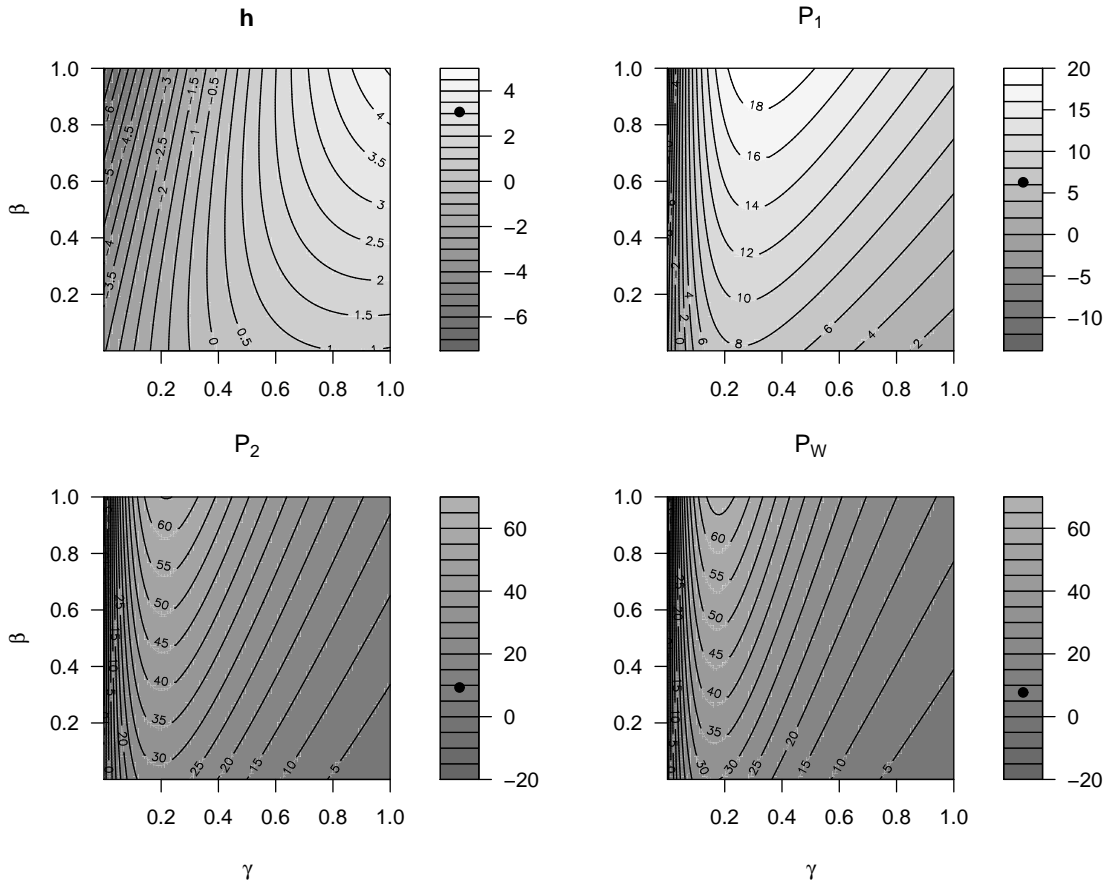
**FIGURE 1** – Hétérogénéité des élasticités  $\eta_{D_k}^*$  dans le cadre de la transformation bêta pour différentes mesures de pauvreté et différence avec Kakwani (1993).

Une fois les élasticités  $\eta_{D_k}^*$  obtenues, l'expression des élasticités  $\eta_{D_k}^{**}$  à partir des équations (3.17) et (3.26) devient évidente. La figure 2 reprend l'exemple précédent de distribution log-normale dans le cadre des élasticités  $\eta_{D_k}^{**}$ . La comparaison avec la figure 1 montre combien il est important de prendre en considération les situations où les distributions initiales et finales ne peuvent être classées à l'aide des courbes de Lorenz. En effet, dans le cas de l'incidence de pauvreté, l'intervalle de valeurs admissibles pour l'élasticité passe de  $[-2, 5; 4]$  à  $[-7, 5; 5]$ .

Les figures 3 et 4 permettent d'apprécier l'évolution de ces élasticités bêta respectivement lorsque le niveau de revenu et le degré d'inégalités varie. On relève dans un premier temps que l'intervalle de valeurs prises par l'élasticité s'élargit avec l'augmentation du niveau moyen

11. À titre de comparaison, l'élasticité croissance de l'incidence de pauvreté, calculée à partir de la formule présentée par Kakwani (1993) est d'environ  $-1,9$ .





Note : le point gras représente la valeur de l'élasticité correspondant à la formule de Kakwani (1993). Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_w$  désigne la mesure de Watts.

**FIGURE 2** – Hétérogénéité des élasticités  $\eta_{D_k}^{**}$  dans le cadre de la transformation bêta pour différentes mesures de pauvreté et différence avec Kakwani (1993).

de revenus. Sachant que les mesures de pauvreté considérées sont des fonctions décroissantes du niveau moyen de revenus, toute variation du niveau pauvreté se traduit naturellement par une variation relative importante lorsque le ratio du revenu moyen sur la ligne de pauvreté est élevé. Un phénomène inverse peut être observé lorsque le degré initial d'inégalités augmente, élasticité de la mesure de Watts mise à part. Dans ce dernier cas (dernier quadrant de la figure 4), l'intervalle se resserre dans un premier temps avant de s'élargir pour des valeurs élevées du coefficient de Gini. Sur chaque figure sont aussi représentées les valeurs moyennes des élasticités  $\eta_{D_k}^*$  et  $\eta_{D_k}^{**}$  obtenues au travers de la recherche par grille des valeurs extrêmes<sup>12</sup>. On peut alors noter l'écart généralement important entre ces valeurs moyennes et l'élasticité correspondant à la transformation de Kakwani (1993).

## 4.2 Estimation de l'élasticité inégalités

Pour obtenir une estimation locale de l'élasticité inégalités correspondant à la variation de la mesure  $P$  entre  $t$  et  $s$ , il est possible d'utiliser les équations (4.2) et (4.3) pour lesquelles il est relativement aisé d'estimer les valeurs des paramètres. Lorsque les deux distributions de revenus considérées présentent une relation de dominance au sens de Lorenz, on peut effectuer l'estimation du modèle suivant :

$$\ln \frac{L(p, \mathbf{D}^t) - L(p, \mathbf{D}^s)}{\lambda_{k,t,s}} = \ln \tau_1 + \gamma_1 \ln p + \beta_1 \ln(1-p) \quad \forall p \neq \{0; 1\}, \quad (4.9)$$

où  $\lambda_{k,t,s} = \frac{D_{k,s} - D_{k,t}}{D_{k,t}}$ . Lorsque les courbes de Lorenz correspondant aux deux distributions se croisent, il est nécessaire de recourir à l'équation (4.3) que l'on peut simplifier de la manière suivante :

$$\frac{(1 - \lambda_{k,t,s})L(p, \mathbf{D}^t) - L(p, \mathbf{D}^s)}{\lambda_{k,t,s}} + p = \tau_1 p^{\gamma_1} (1-p)^{\beta_1} + \tau_2 p^{\gamma_2} (1-p)^{\beta_2}. \quad (4.10)$$

L'équation (4.10) ne peut être estimée qu'aux prix d'une réduction du nombre de coefficients à estimer. En émettant l'hypothèse d'égalité des courbes  $L(p, \mathbf{D}^t)$  et  $L(p, \mathbf{D}^s)$ , nous imposons les restrictions suivantes :  $\tau_1 = \tau_2$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2$  et  $\beta_1 = \beta_2$ . Le modèle à estimer est alors :

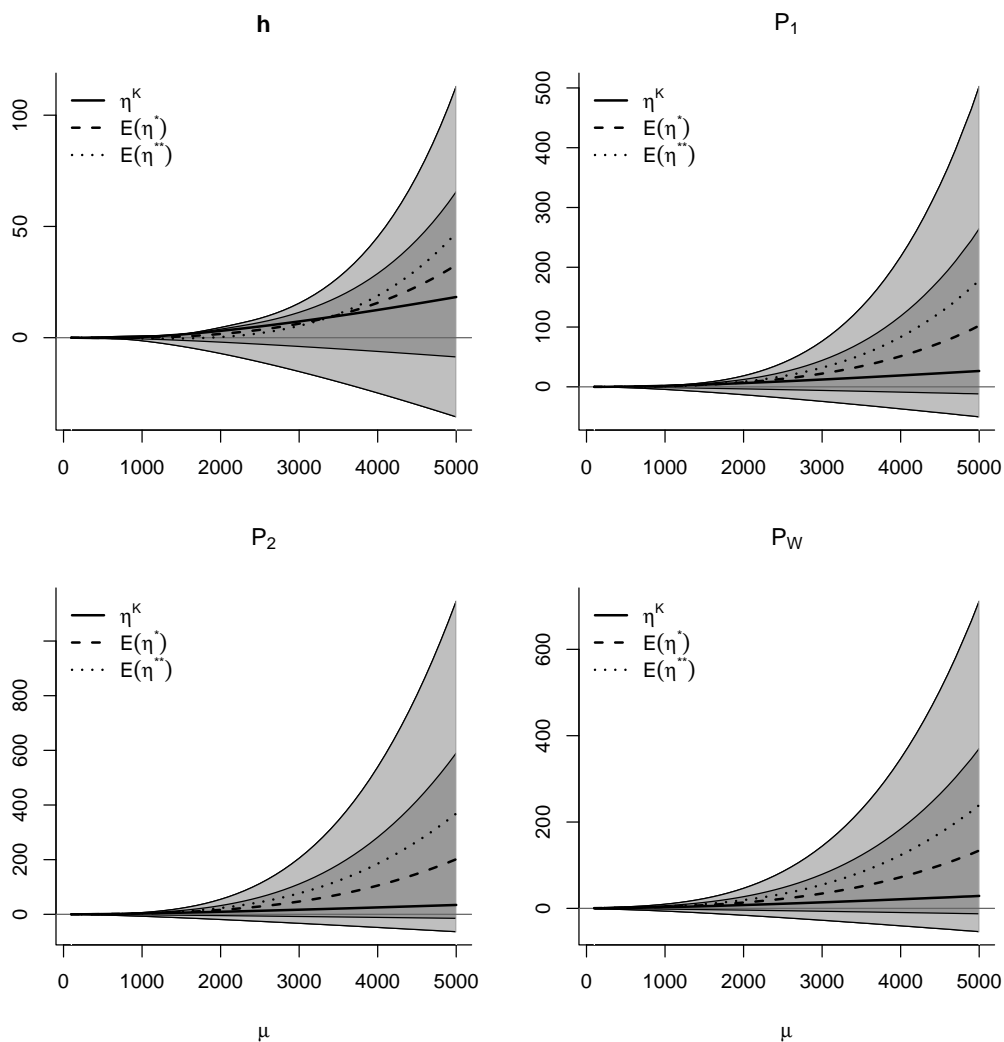
$$\ln \left( \frac{(1 - \lambda_{k,t,s})L(p, \mathbf{D}^t) - L(p, \mathbf{D}^s)}{2\lambda_{k,t,s}} + \frac{p}{2} \right) = \ln \tau_1 + \gamma_1 \ln p + \beta_1 \ln(1-p) \quad \forall p \neq \{0; 1\}, \quad (4.11)$$

que l'on peut estimer par les moindres carrés ordinaires<sup>13</sup>.

Toutefois, que l'on utilise les équations (4.9) ou (4.11) pour obtenir les valeurs des paramètres

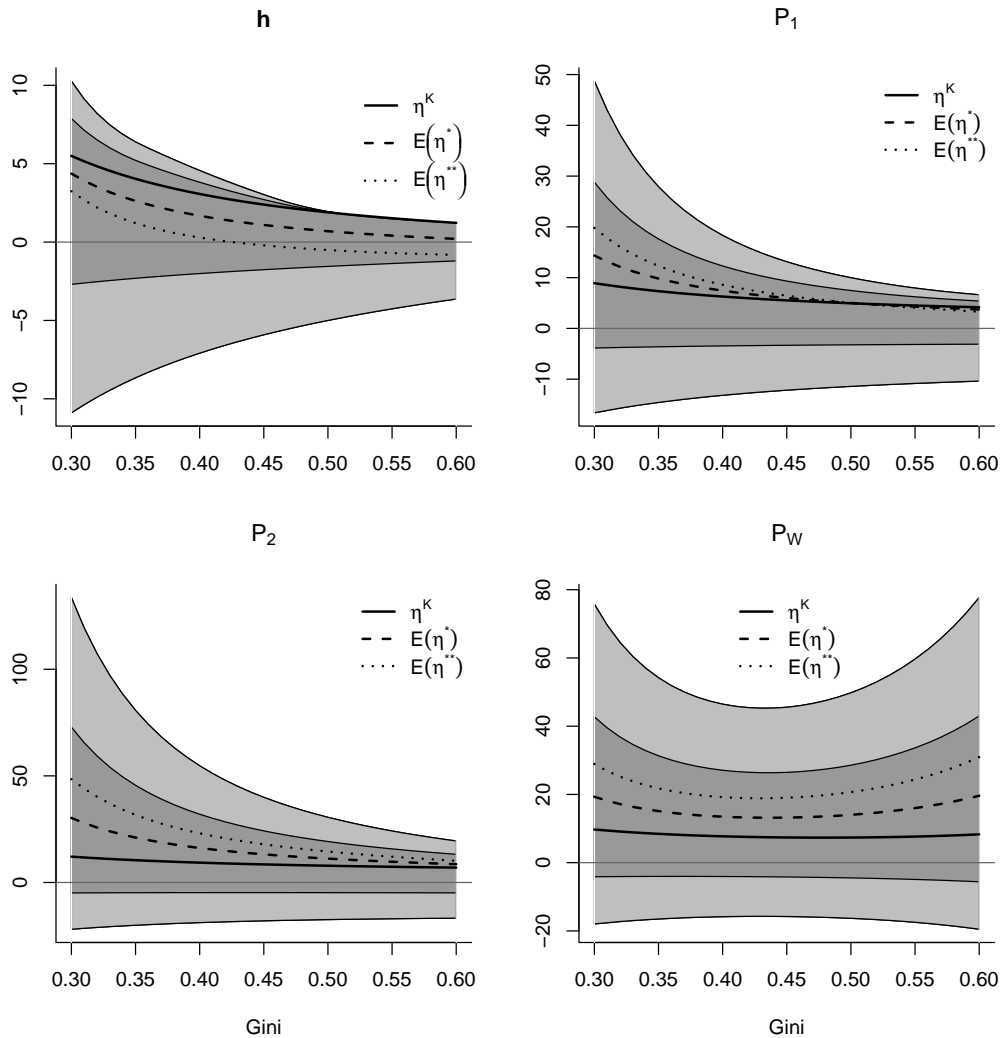
12. La procédure est équivalente au calcul de la moyenne des élasticités obtenues en effectuant des tirages aléatoires successifs valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$  sur des lois uniformes.

13. Pour relâcher la restriction  $L(p, \mathbf{D}^t) = L(p, \mathbf{D}^s)$ , il est nécessaire d'utiliser des formes fonctionnelles différentes pour chaque courbe de Lorenz auxiliaire. De ce point de vue, la littérature est suffisamment riche pour que l'on puisse trouver des formes fonctionnelles adéquates.



Note : La zone gris foncé correspond à l'ensemble des valeurs admissibles pour  $\eta^*_{D_k}$ . La zone gris clair s'ajoute à la précédente pour matérialiser l'intervalle de valeurs de  $\eta^{**}_{D_k}$ . Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_w$  désigne la mesure de Watts.

**FIGURE 3** – Évolution des élasticités  $\eta^*_{D_k}$  dans le cadre de la transformation bêta pour différentes mesures de pauvreté selon le niveau moyen de revenus.



Note : La zone gris foncé correspond à l'ensemble des valeurs admissibles pour  $\eta_{D_k}^*$ . La zone gris clair s'ajoute à la précédente pour matérialiser l'intervalle de valeurs de  $\eta_{D_k}^{**}$ . Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_W$  désigne la mesure de Watts.

**FIGURE 4** – Évolution des élasticités  $\eta_{D_k}^*$  dans le cadre de la transformation bêta pour différentes mesures de pauvreté selon le degré initial d'inégalités.

correspondant aux changements observés de la courbe de Lorenz, il est probable que l'estimation de l'élasticité correspondante soit de mauvaise qualité en recourant à l'estimateur des MCO. En effet ce dernier accorde un poids identique à toutes les observations. Or le respect du *focus axiom* selon lequel le revenu des non-pauvres ne doit pas être pris en considération pour mesurer la pauvreté, impose de privilégier une minimisation des erreurs pour les seuls quantiles de population situés sous l'incidence de pauvreté. Il convient donc recourir aux estimateurs des MCP en utilisant le système de pondération  $W\left(z, \mu \frac{\partial L}{\partial p}\right)$  propre à la mesure de pauvreté utilisée et donc de n'utiliser que les observations situées sous la ligne de pauvreté finale. Dans le cas de l'élasticité de l'incidence de pauvreté, seules comptent les erreurs au voisinage de l'incidence de pauvreté. Afin de bénéficier d'un nombre de degrés de liberté suffisants, on peut utiliser un système de pondération décroissant avec la distance par rapport à l'incidence de pauvreté.

Afin d'illustrer les performances de la forme bêta pour l'estimation des élasticités correspondant aux variations observées du degré d'inégalités, on peut comparer les valeurs estimées avec des valeurs théoriques connues. Pour ces dernières, nous avons supposé que les distributions de revenus initiales et finales observées suivent des lois de distributions log-normales et ne diffèrent qu'à la marge du point de vue du degré d'inégalités. Les valeurs réelles des élasticités de différentes mesures de pauvreté peuvent alors aisément être calculées (Bourguignon 2003, Lopez & Servèn 2006)<sup>14</sup> et opposées aux valeurs obtenues en estimant l'équation (4.9) puisque les courbes initiales et finales respectent la dominance au sens de Lorenz<sup>15</sup>. La figure 5 présente les résultats de cette comparaison pour une ligne de pauvreté de 2 \$ par jour, des niveaux de revenu initiaux compris entre 400 et 5 000 \$, et un coefficient de Gini compris entre 0,3 et 0,6<sup>16</sup>. Les lignes pleines correspondent aux valeurs réelles des élasticités Gini de différentes mesures de

14. Sous l'hypothèse de log-normalité (*i.e.* les distributions initiales et finales suivent une loi log-normale), les élasticités Gini des mesures  $h$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_W$  sont les suivantes :

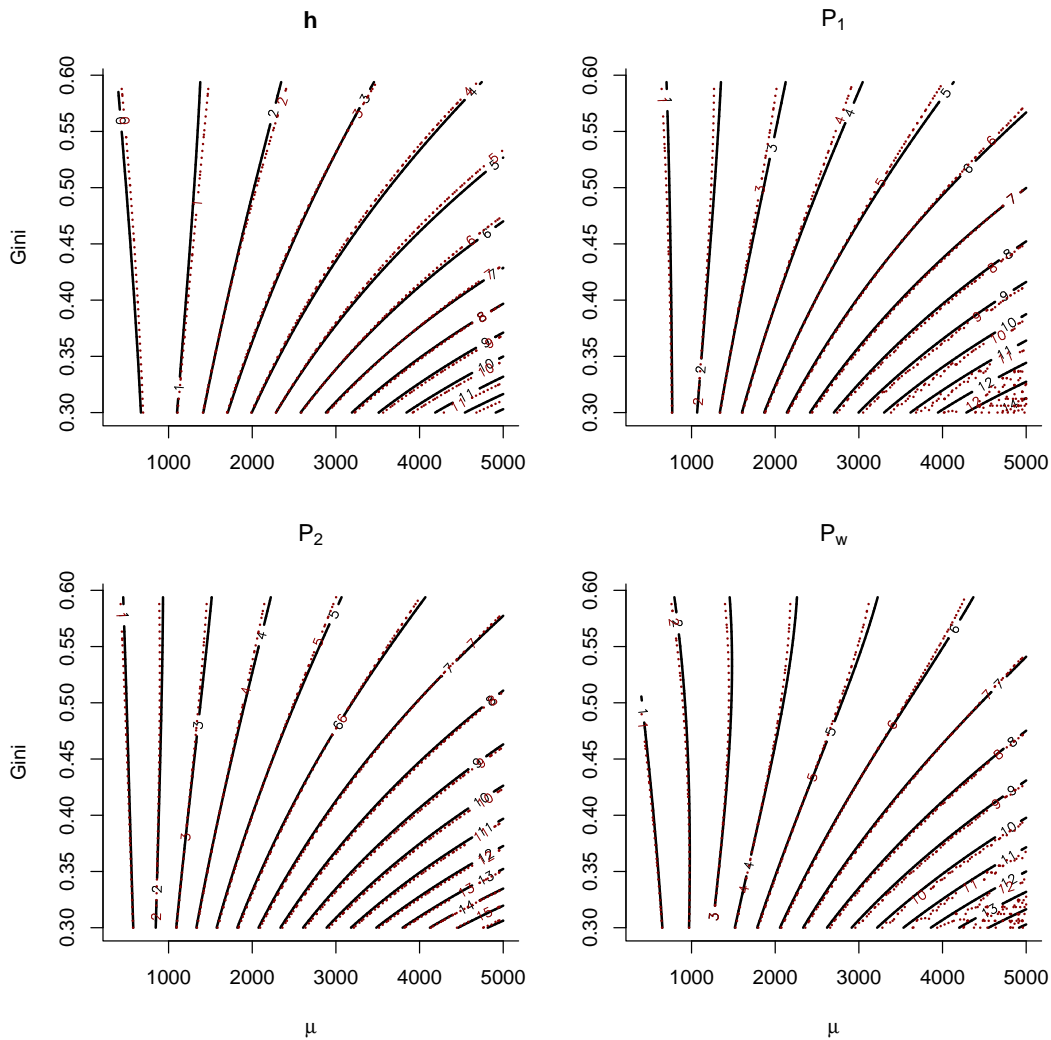
$$\begin{aligned}\eta_{D_1,0} &= -\frac{b\phi(a)}{\Phi(a) \frac{\sigma\sqrt{2}}{\theta} \phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)}, \\ \eta_{D_1,1} &= -\frac{b\phi(a) - \frac{a\mu}{z}\phi(b)}{\left(\Phi(a) - \frac{\mu}{z}\Phi(b)\right) \frac{\sigma\sqrt{2}}{\theta} \phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)}, \\ \eta_{D_1,2} &= -\frac{b\phi(a) - \frac{2a\mu}{z}\phi(b) - \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 e^{\sigma^2} (2\sigma^2\Phi(d) - c\phi(d))}{\left(\Phi(a) - \frac{2\mu}{z}\Phi(b) + \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 e^{\sigma^2} \Phi(d)\right) \frac{\sigma\sqrt{2}}{\theta} \phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)}, \\ \eta_{D_1,W} &= \frac{\sigma\Phi(a) + \phi(a)}{(a\Phi(a) + \phi(a)) \frac{\sigma\sqrt{2}}{\theta} \phi\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\right)},\end{aligned}$$

avec  $a = \frac{\ln(z/\mu)}{\sigma} + \frac{\sigma}{2}$ ,  $b = \frac{\ln(z/\mu)}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ ,  $c = \frac{\ln(z/\mu)}{\sigma} + \frac{3\sigma}{2}$  et  $d = \frac{\ln(z/\mu)}{\sigma} - \frac{3\sigma}{2}$ . Le paramètre  $\sigma$  désigne l'écart-type des logarithmes des revenus. Les fonctions  $\phi$  et  $\Phi$  correspondent respectivement aux fonctions de densité et de distribution de la loi normale standard. Plus de détails pour le calcul de  $\eta_{D_1,0}$ ,  $\eta_{D_1,1}$  et  $\eta_{D_1,2}$  dans Lopez & Servèn (2006).

15. Les résultats obtenus en utilisant l'équation (4.11) donnent des résultats peu différents.

16. Avec une centaine de valeurs prises à intervalle régulier dans chaque intervalle pour les paramètres  $\mu$  et  $D_1$ , ce sont donc 10 000 observations qui ont été utilisées pour cet exercice de simulation.

pauvreté sous l'hypothèse de log-normalité et celles en lignes pointillées aux valeurs estimées en moindres carrés pondérés<sup>17</sup> à l'aide de la forme bêta. Les estimations se révèlent globalement très satisfaisantes et donnent en général lieu à des erreurs particulièrement peu importantes au regard de celles obtenues en recourant aux formules de Kakwani (*confer* figure 6 en annexe)<sup>18</sup>.



Note : les lignes pleines et pointillées correspondent respectivement aux valeurs des élasticités sous l'hypothèse de log-normalité et à celles estimées à l'aide de la forme bêta. Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_w$  désigne la mesure de Watts.

**FIGURE 5** – Comparaisons des élasticités correspondant à l'hypothèse de log-normalité avec celles estimées à l'aide de la courbe de Lorenz bêta.

17. Dans le cas de l'élasticité de l'incidence de pauvreté, les estimations ont été réalisées en utilisant le vecteur de pondération  $(1 - |p - h|)^2$ .

18. On peut aussi inverser le raisonnement et remarquer que les élasticités issues de l'hypothèse de log-normalité ont une capacité prédictive faible lorsque la distribution de revenus évolue conformément à l'équation (3.1).

## 5 Mesurer la performance relative de la redistribution en termes de réduction de la pauvreté

Ainsi que nous l'avons montré précédemment il est relativement aisé d'obtenir une estimation de l'élasticité inégalités de la pauvreté correspondant aux variations observées du degré d'inégalité d'une économie entre deux dates. La comparaison directe des élasticités relevées pour des périodes ou des économies différentes est évidemment utile puisqu'elle permet d'apprécier la contribution de la redistribution à la variation du niveau de pauvreté. Comme les formules présentées dans les sections précédentes permettent d'obtenir des élasticités correspondant à des variations marginales du degré d'inégalités, les valeurs obtenues ne tiennent pas compte de l'ampleur de la redistribution<sup>19</sup> mais permettent d'apprécier l'intensité de celle-ci en termes de réduction de la pauvreté<sup>20</sup>. Ces mêmes formules révèlent toutefois que les valeurs des élasticités dépendent tout autant des caractéristiques de la distribution initiales que de la manière d'opérer des transferts de revenus au sein de la population. Elles ne peuvent donc être utilisées pour apprécier l'efficacité du processus redistributif observé du point de vue de la lutte contre la pauvreté. En effet, une valeur plus élevée de l'élasticité inégalités peut aussi bien découler de conditions initiales plus favorables (notamment un niveau initial de pauvreté plus faible) que d'un processus redistributif bénéficiant davantage aux pauvres.

L'utilisation de formes fonctionnelles précises nous permet toutefois de définir un intervalle  $[\eta_{D_k}^-, \eta_{D_k}^+]$ , voire une distribution, de valeur admissibles pour des conditions initiales données. Cet intervalle peut être utilisé pour apprécier l'efficacité des processus redistributifs observés puisqu'il traduit l'effet des conditions initiales. La comparaison entre l'élasticité estimée et l'ensemble des valeurs admissibles nous offre l'opportunité de juger comment une économie a traduit une évolution du degré d'inégalités en variation de la pauvreté au regard des variations qu'elle aurait pu connaître. Afin de comparer dans le temps ou dans l'espace cette capacité à obtenir d'une variation de la distribution relative des revenus une réduction de la pauvreté, nous suggérons l'emploi de l'indice suivant<sup>21</sup> :

$$\pi_{D_k} = \frac{\hat{\eta}_{D_k} - \eta_{D_k}^-}{\eta_{D_k}^+ - \eta_{D_k}^-} \quad (5.1)$$

---

19. Une évaluation globale de cette contribution statistique de la réduction des inégalités est obtenue au travers de la méthode de décomposition proposée par Datt & Ravallion (1992). Les méthodes d'estimation d'élasticités développées dans le présent article peuvent être appréhendées comme une version marginale et relative de l'effet inégalités calculé par ces auteurs.

20. Dans le présent article, la réduction des inégalités n'est qu'un objectif intermédiaire de politique économique. Les considérations développées dans cette section ne sont évidemment plus aussi pertinentes lorsque le degré d'inégalité devient un déterminant direct de la fonction d'évaluation sociale des décideurs politiques.

21. Pour peu que la forme fonctionnelle utilisée puisse traduire correctement la diversité des processus redistributifs possibles, il peut sembler plus naturel d'utiliser comme indice de performance la valeur de la fonction de distribution des élasticités possibles évaluée en  $\hat{\eta}_{D_k}$ . En l'absence de certitude sur la capacité de la forme bêta à donner une estimation valide de la distribution réelle des valeurs admissibles des élasticités, il semble plus prudent de recourir à l'indice  $\pi_{D_k}$  présenté dans l'équation (5.1).

dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1. Pour une diminution du degré d'inégalités, une valeur de  $\pi_{D_k}$  proche de 1 implique que la réduction des inégalités est particulièrement « pro-pauvres » puisque le processus redistributif s'est essentiellement fait à leur profit. Lorsque le coefficient est proche de 0, les transferts de revenus observés ont peu concerné les individus pauvres ou se sont effectués en leur défaveur. La baisse du degré d'inégalités peut alors être caractérisée d'« anti-pauvres ».

Il convient toutefois de rester prudent quant à l'utilisation de  $\pi_{D_k}$ . En effet, en l'absence de technique non-paramétrique pour générer les courbes de Lorenz auxiliaires utilisées dans la transformation (3.4), son calcul nécessite l'emploi de formes fonctionnelles qui ne garantissent pas avec certitude l'obtention des valeurs maximales et minimales réelles des élasticités. Une utilisation cardinale de  $\pi_{D_k}$  semble donc exclue. Par contre, si l'on fait l'hypothèse que l'importance de cette sous-estimation potentielle de la largeur de l'intervalle ne dépend pas des caractéristiques initiales de la distribution de revenus,  $\pi_{D_k}$  peut alors être utilisé de manière ordinale<sup>22</sup>. Cet indice permet donc de classer les processus redistributifs observés selon leur capacité à réduire la pauvreté, indépendamment de la « facilité » avec laquelle cette réduction peut être obtenue et de l'ampleur des transferts effectués.

## 6 Conclusions

La définition de politiques de réduction de la pauvreté optimales nécessite un dosage subtil entre croissance et redistribution, notamment dans le cadre de ce qu'il est convenu d'appeler la croissance « pro-pauvres ». Il existe toutefois une grande incertitude quant à l'effet d'une réduction des inégalités sur la pauvreté, même sous l'hypothèse d'un taux de croissance nul. Cette incertitude s'explique par la complexité du phénomène d'inégalités et par la grande diversité des transferts que l'on peut associer à une même variation d'une mesure d'inégalités.

Au cours de cet article, nous avons développé sensiblement la démarche adoptée par Kakwani (1993) afin d'estimer les effets propres des variations du degré d'inégalités sur celles du niveau de pauvreté. En relâchant les contraintes imposées précédemment aux transformations de la courbe de Lorenz utilisées pour le calcul d'une élasticité inégalités de la pauvreté, nous permettons le calcul de valeurs multiples pour cette dernière. On peut donc à la fois obtenir des intervalles de valeurs théoriquement admissibles pour ces élasticités, même lorsque la dominance au sens de Lorenz ne peut être utilisée, et estimer la valeur de l'élasticité correspondant aux évolutions de la distribution relative des revenus entre deux dates. Ce dernier point nous permet de réconci-

22. Ce problème de sous-estimation doit toutefois être relativisé car, en l'absence d'information supplémentaire sur la structure des économies considérées, les simulations effectuées ne permettent d'obtenir que des valeurs mathématiquement admissibles. Il est ainsi probable que les intervalles estimés ne correspondent pas à la réalité économique et politique, notamment en matière de politique fiscale, des transformations possibles de la distribution relative des revenus. Autrement dit les intervalles estimés de valeurs admissibles peuvent sur-estimer la largeur des intervalles de valeurs économiquement et politiquement envisageables.



lier une approche analytique de la décomposition des variations de la pauvreté avec l'approche « comptable » proposée par Datt & Ravallion (1992).

Enfin, nous présentons un indice permettant d'apprécier la manière dont une économie traduit une variation du degré d'inégalités en variations du niveau de pauvreté au regard de celles théoriquement envisageables pour la distribution initiale de revenus considérée. Cet indice peut être particulièrement utile dans le cadre de l'évaluation des performances d'une économie en termes de réduction de la pauvreté puisqu'il permet de juger si le levier redistributif a été utilisé ou non de manière efficace. Alors qu'il semble acquis qu'un certain nombre de pays, notamment en Afrique, ne parviendront pas à répondre aux Objectifs de Développement du Millénaire en 2015, il serait pertinent de recourir à une telle mesure afin de vérifier si les politiques mises en places au cours des dernières années ont permis une gestion satisfaisante des variations du degré d'inégalités en termes de réduction de la pauvreté. S'il s'avère que la redistribution n'a pas été efficace, il convient alors d'expliquer pourquoi les transferts observés n'ont pas ou peu été effectués au profit des individus défavorisés.

Plus largement, les formules d'élasticités et l'indice de performance proposés dans cet article sont aussi appréciables dans le contexte de la justice sociale. Ces outils permettent en effet d'apprécier dans quelle mesure et sous quelles conditions des objectifs de réduction des inégalités et de lutte contre la pauvreté sont conciliables et, lorsque les conditions initiales donnent au contraire lieu à un antagonisme, de savoir en quels termes la poursuite de l'un de ces objectifs nécessite de renoncer à l'autre.

## Annexes

### A Interprétation du paramètre $\lambda$

Dans le cadre de la transformation générale correspondant à l'équation (3.4), la valeur de la mesure  $D_k$  de la nouvelle distribution est :

$$D_k^{**} = (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}^*)) dp, \quad (\text{A.1})$$

$$= (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - ((1-\lambda)L(p, \mathbf{D}) + \lambda L(p, \mathbf{D}'' | D_k'' = \theta) - \lambda (p - L(p, \mathbf{D}' | D_k' = \theta)))) dp, \quad (\text{A.2})$$

$$= (1-\lambda)(k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D})) dp + \lambda(k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}'' | D_k'' = \theta)) dp$$

$$+ \lambda(k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}' | D_k' = \theta)) dp, \quad (\text{A.3})$$

$$= (1+\lambda)\theta \quad (\text{A.4})$$

De même pour la famille de mesures S-Gini, on retrouve la relation suivante entre  $G_k$  et  $G_k^{**}$

lorsque  $L(p) = L(p, \mathbf{G} | G_k = \theta)$  :

$$G_k^{**} = 1 - k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{G}^*) dp, \quad (\text{A.5})$$

$$= 1 - k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} ((1-\lambda)L(p, \mathbf{G}) + \lambda L(p, \mathbf{G}'' | G_k'' = \theta) - \lambda(p - L(p, \mathbf{G}' | G_k' = \theta))) dp, \quad (\text{A.6})$$

$$= 1 - (1-\lambda)k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{G}) dp - \lambda k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{G}'' | G_k'' = \theta) dp \\ - \lambda k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{G}' | G_k' = \theta) dp + \lambda k(k+1) \int_0^1 p(1-p)^{k-1} dp, \quad (\text{A.7})$$

$$= (1-\lambda)\theta + \lambda\theta - \lambda k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{G}' | G_k' = \theta) dp + \lambda \left[ -(1-p)^{k+1} \right]_0^1, \quad (\text{A.8})$$

$$= (1+\lambda)\theta. \quad (\text{A.9})$$

Le paramètre  $\lambda$  peut donc être interprété comme la variation relative de la mesure d'inégalités considérée lorsque cette dernière est membre des familles  $D_k$  ou  $G_k$ .

## B Valeur du paramètre $\tau$ de la transformation bêta

La valeur de la mesure  $D_k$  correspondant à la courbe de Lorenz obtenue au travers de la transformation (3.2) avec la courbe de Lorenz bêta est :

$$D_k^* = (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}^*)) dp, \quad (\text{B.1})$$

$$= (k+1) \int_0^1 p^{k-1} \left( p - \left( L(p, \mathbf{D} | D_k = \theta) - \lambda \tau p^\gamma (1-p)^\beta \right) \right) dp, \quad (\text{B.2})$$

$$= (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D} | D_k = \theta)) dp + \lambda \tau (k+1) \int_0^1 p^{\gamma+k-1} (1-p)^\beta dp, \quad (\text{B.3})$$

$$= \theta + \lambda \tau (k+1) \int_0^1 p^{\gamma+k-1} (1-p)^\beta dp. \quad (\text{B.4})$$

Pour que  $\lambda$  corresponde à une variation proportionnelle de  $D_k = \theta$ , il est donc nécessaire que :

$$\tau (k+1) \int_0^1 p^{\gamma+k-1} (1-p)^\beta dp = \theta. \quad (\text{B.5})$$

Comme  $\int_0^1 p^{k-1} p^\gamma (1-p)^\beta dp = B(\gamma+k, \beta+1)$ , on en déduit :

$$\tilde{\tau} = \frac{\theta}{(k+1)B(\gamma+k, \beta+1)}. \quad (\text{B.6})$$

Avec la transformation (3.4), on aura :

$$D_k^{**} = (k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}^{**})) dp, \quad (\text{B.7})$$

$$= (k+1) \int_0^1 p^{k-1} \left( p - (1-\lambda)L(p, \mathbf{D}|D_k = \theta) - \lambda \left( p - 2\tau p^\gamma (1-p)^\beta \right) \right) dp, \quad (\text{B.8})$$

$$= (1-\lambda)(k+1) \int_0^1 p^{k-1} (p - L(p, \mathbf{D}|D_k = \theta)) dp + 2\lambda\tau(k+1) \int_0^1 p^{k-1} p^\gamma (1-p)^\beta dp, \quad (\text{B.9})$$

$$= (1-\lambda)\theta + 2\lambda(k+1) \int_0^1 p^{k-1} \tau p^\gamma (1-p)^\beta dp. \quad (\text{B.10})$$

qui aboutit à la même valeur de  $\tilde{\tau}$  que (B.6). Si l'on substitue les mesures  $G_k$  aux mesures  $D_k$ , l'équation à résoudre devient :

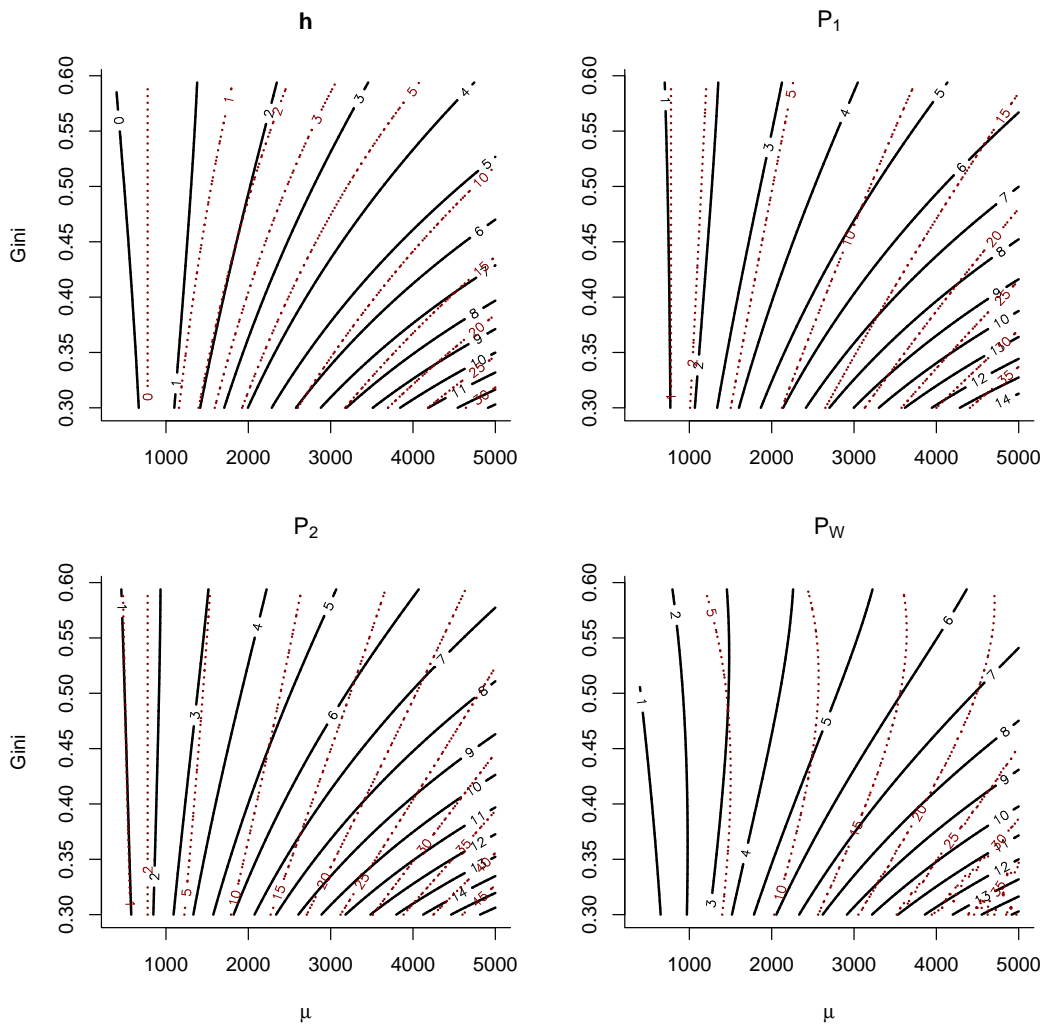
$$G_k^* = 1 - k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} L(p, \mathbf{D}^*) dp, \quad (\text{B.11})$$

$$= 1 - k(k+1) \int_0^1 (1-p)^{k-1} \left( L(p, \mathbf{D}|D_k = \theta) - \lambda\tau p^\gamma (1-p)^\beta \right) dp, \quad (\text{B.12})$$

$$= \theta + \lambda\tau k(k+1) \int_0^1 p^\gamma (1-p)^{\beta+k-1} dp. \quad (\text{B.13})$$

qui a pour solution  $G_k^* = (1+\lambda)\theta$  lorsque  $\tilde{\tau} = \frac{\theta}{k(k+1)B(\gamma+1, \beta+k)}$ . La même valeur est obtenue dans le cas de la transformation (3.4).

## C Figures annexes



Note : les lignes pleines et pointillées correspondent respectivement aux valeurs des élasticités sous l'hypothèse de log-normalité et au travers des formules de Kakwani (1993). Les mesures  $h$ ,  $P_1$  et  $P_2$  correspondent respectivement à l'incidence, la profondeur et la sévérité de la pauvreté.  $P_W$  désigne la mesure de Watts.

**FIGURE 6** – Comparaisons des élasticités correspondant à l'hypothèse de log-normalité avec celles correspondant aux formules de Kakwani.

## Références

- AABERGE, R. (2000) : « Characterizations of Lorenz Curves and Income Distributions ». *Social Choice and Welfare*, **17**, 639–653.
- ARNOLD, A. & VILLASEÑOR, J. (1989) : « Elliptical Lorenz Curves ». *Journal of Econometrics*, **40**(2), 327–338.
- BASMANN, R., HAYES, K., JOHNSON, J. & SLOTTJE, D. (1990) : « A General Functional Form for Approximating the Lorenz Curve ». *Journal of Econometrics*, **43**, 77–90.
- BAYE, F.M. (2006) : « Growth, Redistribution and Poverty Changes in Cameroon : A Shapley Decomposition Analysis ». *Journal of African Economies*, **15**(4), 543–570.
- BOURGUIGNON, F. (2003) : « The Growth Elasticity of Poverty Reduction : Explaining Heterogeneity across Countries and Time Periods ». Dans T. EICHER & S. TURNOVSKY (rédacteurs), « Inequality and growth : Theory and policy implications », 3–26. MIT Press.
- BRESSON, F. (2006) : « Poverty : Looking for the Real Elasticities ». Etudes & Documents 2006.18, CERDI, CNRS - Université d'Auvergne.
- CASTILLO, E., SARABIA, J.M. & SLOTTJE, D. (1999) : « An Ordered Family of Lorenz Curves ». *Journal of Econometrics*, **91**(1), 43–60.
- CHENERY, H., AHLUWALIA, M.S., BELL, C.L.G., DULOY, J.H. & JOLLY, R. (1974) : *Redistribution with Growth : Policies to Improve Income Distribution in Developing Countries in the Context of Economic Growth*. Oxford University Press.
- DATT, G. & RAVALLION, M. (1992) : « Growth and Redistribution Components of Changes in Poverty Measures : A Decomposition with Applications to Brazil and India in the 1980s ». *Journal of Development Economics*, **38**, 275–295.
- DOLLAR, D. & KRAAY, A. (2002) : « Growth is good for the poor ». *Journal of Economic Growth*, **7**(3), 195–225.
- DONALDSON, D. & WEYMARK, J. (1980) : « A Single Parameter Generalization of the Gini Indices of Inequality ». *Journal of Economic Theory*, **22**, 67–86.
- DUCLOS, J.Y. (2002) : « Poverty and Equity : Theory and Estimation ». Working paper, Université de Laval.
- FOSTER, J., GREER, J. & THORBECKE, E. (1984) : « A Class of Decomposable Poverty Measures ». *Econometrica*, **52**(3), 761–766.

- HELTBERG, R. (2002) : « The Growth Elasticity of Poverty ». *UNU WIDER*, **21**, 15 p.
- KAKWANI, N. (1980) : « On a class of poverty measures ». *Econometrica*, **48**(2), 437–446.
- (1993) : « Poverty and Economic Growth with Application to Côte d'Ivoire ». *Review of Income and Wealth*, **39**(2), 121–139.
- KAKWANI, N. & PODDER, N. (1973) : « On the Estimation of Lorenz Curves from Grouped Observations ». *International Economic Review*, **14**(2), 278–292.
- (1976) : « Efficient Estimation of the Lorenz Curve and Associated Inequality Measures from Grouped Observations ». *Econometrica*, **44**(1), 137–148.
- KALWIJ, A. & VERSCHOOR, A. (2007) : « Not by Growth Alone : The Role of the Distribution of Income in Regional Diversity in Poverty Reduction ». *European Economic Review*, **51**(4), 805–829.
- KLEIBER, C. & KOTZ, S. (2002) : « A Characterization of Income Distributions in Terms of Generalized Gini coefficients ». *Social Choice and Welfare*, **19**, 789–794.
- (2003) : *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*. Wiley. 332 p.
- LI, H., SQUIRE, L. & ZOU, H. (1998) : « Explaining International and Intertemporal Variations in Income Inequality ». *The Economic Journal*, **108**, 26–43.
- LOPEZ, H. & SERVÈN, L. (2006) : « A Normal Relationship? Poverty, Growth and Inequality ». *World Bank Policy Research Working Paper*, **3814**, 30 p.
- MADDALA, G. & SINGH, S. (1977) : « A Flexible Functional Form for Lorenz Curves ». *Économie Appliquée*, **30**, 481–486.
- MCDONALD, J. & XU, Y. (1995) : « A Generalisation of the Beta Distribution with Applications ». *Journal of Econometrics*, **66**, 133–152. Erratum : *Journal of Econometrics*, 69, 427–428.
- OGWANG, T. & RAO, U. (2000) : « Hybrid Models of the Lorenz Curve ». *Economic Letters*, **69**, 39–44.
- RAVALLION, M. (1995) : « Growth and Poverty : Evidence for developing countries in the 1980s ». *Economic Letters*, **48**(3-4), 411–417.
- (1997) : « Can High-Inequality Developing Countries Escape Absolute Poverty? » *Economic Letters*, **56**, 51–57.
- (2005) : « Inequality is Bad for the Poor ». *World Bank Policy Research Working Paper*, **3677**, 50 p.

- SALA-I MARTIN, X. (2006) : « The World Distribution of Income : Falling Poverty and... Convergence, Period ». *Quarterly Journal of Economics*, **121**(2), 351–397.
- SEN, A. (1976) : « Poverty : An Ordinal Approach to Measurement ». *Econometrica*, **44**(2), 219–231.
- SHORROCKS, A. (1983) : « Ranking Income Distributions ». *Economica*, **50**(197), 3–17.
- SQUIRE, L. (1993) : « Fighting Poverty ». *American Economic Review*, **83**(2), 377–382.