De la lemniscate au damier analytique. Legendre et le primat de l'analyse

Ivahn Smadja

De la lemniscate au damier analytique
Legendre et le primat de l'analyse*

Ivahn Smadja
Université Paris Diderot - Paris 7 - UMR 7219

Dans le contexte du renouveau géométrique engagé au XIXème siècle par Monge, Poncelet et Chasles, les remarques de Legendre portant sur la lemniscate et plus généralement sur la représentation géométrique des transcendantes elliptiques, ont été envisagées dans une perspective neuve et intégrées à un courant de recherches qui s'y référaient comme à leur source commune. Cette interprétation supposait toutefois une lecture quelque peu biaisée par l'imputation rétrospective faite à l'auteur du *Traité des fonctions elliptiques* de préoccupations géométriques qui lui étaient étrangères. Nous nous proposons dans le présent article de montrer que ces remarques s'inscrivaient initialement dans un projet d'ensemble visant au contraire à consacrer le primat de la fonction sur la courbe, en subordonnant par là-même la représentation géométrique des transcendantes elliptiques à leur représentation analytique.

1 Une lecture géométrique de Legendre

Dans ses *Exercices de Calcul Intégral* (1811), Legendre montre, à la faveur d'une paramétrisation ingénieuse, que les arcs de lemniscate représentent exactement les fonctions elliptiques de la première espèce dans le cas où l'angle du module est égal à $\frac{\pi}{4}$, puis note incidemment qu'il serait "assez curieux"[1] de rechercher s'il y aurait quelque autre courbe algébrique dont les arcs représentent la fonction F pour une autre valeur du module. Il souligne à cette occasion que la difficulté de cette recherche tient essentiellement à la restriction aux seules courbes algébriques, car si l'on admettait les transcendantes les plus simples, les arcs de cercle et les logarithmes, dans l'expression des coordonnées du point générique de la courbe, le problème perdrait beaucoup de son attrait puisqu'il serait alors facile de trouver la courbe répondant à la condition posée. Dans le tome premier du *Traité des fonctions elliptiques* (1825) dont l'édition reprend et enrichit les *Exercices* antérieurs, Legendre interpole à cet endroit précis de son exposition, de nouveaux développements qui répondent à cette préoccupation formulée plus d'une décennie auparavant. Il établit ainsi qu'on peut toujours trouver une courbe algébrique du sixième degré dont l'équation peut être déterminée par un procédé analytique uniforme et dont les arcs représentent une fonction elliptique de première espèce de module et d'amplitude quelconques. Enfin dans la section traitant "Des quadratures" de l'appendice au deuxième tome du *Traité* (1826), Legendre élabore une formule nouvelle permettant d'exprimer une intégrale quelconque par un arc de courbe, dont il montre qu'elle peut être utilisée dans un sens ou dans l'autre, pour rapporter une quadrature à un arc ou le contraire, selon la voie qui est privilégiée pour faciliter le calcul d'une valeur approchée des transcendantes. En appliquant cette formule à la fonction elliptique

*****Classification mathématiques par sujets (2000)** : 01A50, 33E05. Une partie de ce texte a été présentée dans le Séminaire d'Histoire des Mathématiques du Centre d'histoire des sciences et des philosophies arabes et médiévales du CNRS (22 mai 2008). Je remercie Philippe Abgrall et les responsables de la revue *Oriens-Occidens* de me donner l'occasion de publier ce travail.

[1] [40, p. 39].

de première espèce, Legendre retrouve ainsi la courbe du sixième degré qu'il avait obtenue précédemment par une méthode entièrement différente et conclut qu'"il est très remarquable que notre nouvelle formule conduise si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé comme fort difficile, et qui paraît n'admettre aucune autre solution ; celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction elliptique de première espèce $F(c, \phi)$"[2].

Entre 1843 et 1846, paraissent concurremment dans les journaux de Liouville et de Crelle, une série de mémoires qui récapitulent cet enchaînement de résultats de Legendre en en infléchissant le sens de façon à permettre la définition d'un programme de travail géométrique. Bien qu'ils s'insèrent dans des contextes nationaux différents, Joseph-Alfred Serret (1819-1885), à Paris, William Roberts, à Dublin, et Barnaba Tortolini (1808-1874), à Rome, appartiennent à une nouvelle génération de géomètres qui regardent les liens étroits entre fonctions elliptiques et familles de courbes comme des relations non plus d'"application" mais d'"interprétation"[3], pour autant qu'ils s'attachent à promouvoir l'indépendance de la géométrie pure par rapport à l'analyse. Selon des approches différentes, ces trois géomètres abordent ainsi un même ensemble de questions et reconnaissent assez rapidement la parenté de leurs recherches respectives[4].

Dans son *Cours de calcul différentiel et intégral* de 1868, J.-A. Serret présente l'ensemble de sa démarche dans les termes suivants.

> §568. La détermination de toutes les courbes algébriques dont les arcs peuvent représenter les fonctions elliptiques de première espèce offre de très-grandes difficultés, et Legendre, qui s'est beaucoup occupé de cette recherche, n'a pu trouver aucune courbe possédant la propriété de la lemniscate. J'ai donné, il y a plusieurs années, la solution complète du problème, en me bornant toutefois au cas des courbes dont les coordonnées rectilignes peuvent s'exprimer par des fonctions rationnelles d'une même variable. J'ai été conduit ainsi à une infinité de classes distinctes renfermant chacune un nombre illimité de courbes individuelles dont les arcs représentent des intégrales elliptiques de modules différents. La discussion ultérieure des résultats obtenus a mis en évidence deux propriétés remarquables communes à toutes les courbes de la première classe, et qui peuvent servir à les définir ; la théorie de ces courbes devient dès lors indépendante des considérations analytiques qui m'ont servi à les découvrir.[5]

Toutefois le problème général qui consiste à rechercher une représentation géométrique "parfaite"[6] des fonctions elliptiques de première espèce pour une valeur arbitraire du module n'émerge que progressivement dans le travail de Serret grâce à l'articulation de plusieurs motifs dont certains sont complètement étrangers au type de questions que Legendre se posait. Dans une note

[2] [42, p. 591].

[3] Cf. [2, p. 198] pour une analyse d'ensemble des rapports entre algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des courbes dans le cadre des recherches portant sur les ovales cartésiennes au XIXème siècle.

[4] Dès 1845, J.-A. Serret se réfère explicitement aux travaux de W. Roberts et de B. Tortolini dans l'article qu'il consacre à la représentation géométrique des fonctions elliptiques. "Depuis la publication de mes premières recherches, [*écrit-il*] deux géomètres étrangers, M. William Roberts, de Dublin, et M. Tortolini, de Rome, se sont occupés à diverses reprises de questions analogues ; la lecture de leurs intéressants Mémoires m'a conduit à examiner de nouveau le problème de la représentation de la première transcendante, que j'avais abandonné depuis longtemps, et dont la solution générale, si elle était possible, ne me semblait pouvoir être due qu'au hasard" [56, p. 258]. W. Roberts remarque de son côté "une frappante analogie" entre les résultats qu'il obtient dans la géométrie de la sphère et "le beau théorème de M. Alfred Serret, sur la rectification de l'ellipse de Cassini, qu'il a publié dans le tome VIII de ce Journal [*il s'agit de la* Note sur les fonctions elliptiques de première espèce [54]]" [51, p. 304]. B. Tortolini enfin, dans son mémoire de 1846 sur la courbe de Talbot, mentionne aussi bien les résultats de Serret sur les courbes algébriques dont les arcs représentent les fonctions elliptiques de première espèce que ceux de Roberts sur les courbes dérivées négatives et positives. Plus tard en tant que fondateur et responsable de la publication des *Annali di scienze matematiche e fisiche* de 1850 à 1857, puis en tant que co-éditeur avec E. Betti, F. Brioschi et A. Genocchi des *Annali di matematica pura ad applicata* qui prirent la suite à partir de 1858 du journal précédent qu'il avait fondé seul, Barnaba Tortolini entretint des relations suivies avec W. Roberts qui devait publier assez régulièrement dans ces deux revues italiennes.

[5] [58, p. 268-269]

[6] Cf. [56, p. 257] et [45, p. 292].

de 1843 [54], Serret commence en effet par étudier une famille de courbes nommées ellipses de Cassini, dont la lemniscate n'est qu'un cas particulier, et qui se définissent géométriquement par cette propriété que le produit des distances d'un point quelconque de la courbe à deux points fixes est constant. Ces courbes dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r^4 - 2a^2r^2 \cos 2t + (a^4 - b^4) = 0$$

où $2a$ est la distance entre les deux points fixes, et b^2 le produit constant des distances d'un point de la courbe à ces deux points, peuvent prendre trois formes qualitativement différentes selon que le rapport $\frac{b}{a}$ est inférieur, égal ou supérieur à l'unité. Si $\frac{b}{a} < 1$, la courbe est formée de deux boucles fermées égales entre elles disposées de part et d'autre de l'origine. Si $\frac{b}{a} = 1$, on retrouve la lemniscate. Enfin si $\frac{b}{a} > 1$, la courbe est composée d'une seule branche plus ou moins resserrée en son milieu selon les cas. Serret montre que toute fonction elliptique de première espèce, quel que soit son module, est exactement représentée par la somme ou la différence de deux arcs de l'ellipse de Cassini, et que réciproquement, tout arc de cette courbe est exprimable au moyen de la somme ou de la différence de deux fonctions elliptiques de première espèce dont les modules sont complémentaires. Cependant dans un autre mémoire publié dans le même numéro du Journal de Liouville, Serret concède qu'"à la vérité, ce théorème ne satisfait pas complètement, en ce sens qu'il faut deux arcs pour représenter une fonction elliptique", mais reconnaît aussi que ce même théorème présente en revanche, à la lumière de travaux antérieurs sur les intégrales eulériennes, l'avantage notable d'établir "un lien géométrique remarquable entre les fonctions elliptiques de première espèce et les transcendantes eulériennes de seconde espèce"[7]. Dans un article de 1842 [53], Serret avait en effet montré que ces dernières intégrales peuvent dans certains cas être représentées au moyen des périmètres des courbes qui sont définies par la propriété que le produit des distances d'un point de la courbe à m points fixes est constant, et correspondent à l'équation générale en coordonnées polaires

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2} \cos mt.$$

Dans le cas où le paramètre a est égal à l'unité, la courbe affecte m boucles fermées toutes égales entre elles qui se réunissent en un point, comme la lemniscate est constituée de deux boucles dans le cas particulier où $m = 2$. En notant π_m le périmètre total de ces m boucles, Serret établit la relation remarquable suivante

$$\pi_m = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

où $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ est l'intégrale eulérienne de seconde espèce. Dans le cas particulier de la lemniscate, le résultat de Serret permet de jeter un pont entre les fonctions elliptiques complètes de première espèce[8] et les intégrales eulériennes $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$. Sachant que l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est égale à la racine carrée de la circonférence d'un cercle de diamètre égal à 1, l'intégrale eulérienne $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ s'exprime donc plus directement en fonction de la fonction elliptique de première espèce, car $\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi}.F(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2})$.

En première approche, la généralisation s'opère ainsi dans deux directions différentes, de la lemniscate aux ovales de Cassini d'une part, et de la lemniscate aux courbes dont les arcs sont représentables par des fonctions eulériennes de seconde espèce, d'autre part. L'étape suivante consiste alors à chercher une généralisation plus compréhensive encore en considérant les courbes qui sont renfermées dans l'équation

$$r^{2m} - 2a^m r^m \cos mt + a^{2m} = b^{2m},$$

[7][55, p. 496].

[8]L'intégrale complète associée à la fonction elliptique de première espèce de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$ représente en effet la longueur d'arc d'un quart de lemniscate.

et qui correspondent au lieu géométrique du point dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier de m côtés et de rayon a, est constant et égal à b^m, les sommets du polygone tenant lieu de foyers relativement à la courbe. La forme qu'affecte la courbe varie alors selon que le rapport $\frac{b}{a}$ est inférieur, égal ou supérieur à l'unité. Si $\frac{b}{a}$ est compris entre 0 et 1, la courbe est formée de m boucles fermées symétriques relativement aux rayons du polygone régulier dont les sommets sont les m points fixes donnés, et tangentes à deux cercles concentriques d'équations respectives $r^m = a^m + b^m$ et $r^m = a^m - b^m$. Si $\frac{b}{a} = 1$, le second cercle se concentre en un point où les m boucles se réunissent. Enfin si $\frac{b}{a} > 1$, la courbe se compose d'une seule branche fermée. En formant l'équation différentielle des trajectoires orthogonales des courbes homofocales représentées par l'équation générale lorsque b varie de 0 à ∞, Serret est amené à étudier les relations entre deux systèmes de courbes conjuguées et orthogonales, à savoir les courbes homofocales d'une part et des courbes composées de m branches de forme hyperbolique passant par les foyers communs de leurs conjuguées et présentant elles-mêmes m sommets dont le lieu géométrique est une courbe semblable à celle du premier système qui correspond à la condition $b = a$. Dans le cas où $m = 2$, les deux systèmes de courbes conjuguées et orthogonales sont formés respectivement de cassinoïdes homofocales et d'hyperboles équilatères dont les sommets décrivent une lemniscate. En substituant aux hyperboles équilatères, un système arbitraire de coniques semblables, Serret obtient des trajectoires orthogonales plus générales que les cassinoïdes dont il escompte qu'elles présentent des propriétés analogues. Envisagée dans cette perspective élargie, la lemniscate qu'on retrouve en prenant des hyperboles équilatères comme coniques conjuguées, promettait en effet de révéler de nouvelles propriétés. "Il était naturel [*souligne Serret*] de rechercher si les arcs de cette courbe sont susceptibles de représenter généralement les fonctions elliptiques de première espèce, mais l'extrême complication des calculs ne m'a pas permis de m'en assurer ; toutefois l'analogie[9] qui existe entre le module de la fonction elliptique représentée par l'arc de lemniscate et celui des hyperboles que cette courbe coupe orthogonalement, ... m'avait longtemps fait espérer de résoudre enfin complètement le problème que je m'étais proposé."[10]

De cette propriété de la lemniscate dont la généralisation conduit aux courbes homofocales à m foyers, Serret reconnaît qu'elle "n'est sans doute pas la seule qui puisse mettre sur la voie d'une représentation géométrique convenable des transcendantes elliptiques à amplitude et à module quelconques ; [*mais précise qu'*] une pareille recherche ne saurait être entreprise qu'après une étude approfondie de la lemniscate "[11]. Car en effet, comme il devait l'expliquer un peu plus tard, à ce stade "la question était loin d'être résolue, [*pour autant que*] la lemniscate restait toujours la seule courbe algébrique connue dont les coordonnées rectangulaires x et y satisfissent à une équation de la forme $dx^2 + dy^2 = \frac{dz^2}{\sqrt{\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+\epsilon z^4}}$"[12], où l'arc de la courbe est représenté par une unique transcendante elliptique. La publication encouragée par Chasles des résultats relatifs aux courbes homofocales n'avait donc d'autre but dans l'esprit de Serret que de préparer à une telle étude à venir de la lemniscate en fournissant des théorèmes "dont on pourra, ce me semble, un jour tirer parti"[13]. Comme il le dit lui-même dans le passage cité plus haut [Cf. note 4], c'est la lecture des travaux concomitants de W. Roberts et de B. Tortolini qui devait conduire Serret

[9] En appelant "module d'une section conique", le rapport constant des distances d'un point de la courbe au foyer et à la directrice, Serret montre que dans le cas où $m = 2$, les équations des courbes conjuguées et orthogonales aux cassinoïdes homofocales correspondent à deux systèmes d'hyperboles équilatères distincts de modules respectifs k et k', tels que $\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k'^2} = 1$, qui coïncident lorsque l'on prend $k = k' = \sqrt{2}$, et que la cassinoïde associée est alors une lemniscate dont les arcs représentent la fonction de première espèce de module $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ainsi que sa complémentaire.

[10] [55, p. 499].

[11] [55, p. 496].

[12] [56, p. 258].

[13] [55, p. 496].

à reprendre le fil des recherches sur la représentation géométrique de la fonction elliptique de première espèce, qu'il avait délaissées après ces premières explorations.

Dans la même veine que Gudermann avant lui, W. Roberts étudie en effet dans ces années-là la rectification des courbes produites par l'intersection d'un cône du second ordre avec une sphère. Dans une note publiée en 1843 dans le journal de Liouville [49], il donne ainsi une courbe sphérique dont la forme est semblable à celle de la lemniscate et dont les arcs fournissent une représentation géométrique de la fonction elliptique de première espèce pour un module arbitraire[14]. Puis dans un mémoire publié deux ans plus tard [51], il généralise les résultats de Gudermann en prenant l'intersection d'une sphère et d'un cône du second ordre dont l'un des axes principaux passe par le centre de la sphère, quelle que soit la position du sommet du cône et plus seulement en le situant au centre de la sphère. Par ailleurs, Roberts explore simultanément une autre piste dans un second mémoire [50] publié la même année dans le même tome du journal de Liouville. En utilisant la méthode dite des podaires qui permet de déterminer une courbe dérivée à partir d'une courbe donnée en prenant le lieu géométrique des points où les perpendiculaires abaissées d'un point fixe rencontrent les tangentes à la courbe initiale, Roberts détermine l'équation différentielle qui lie les coordonnées polaires des deux courbes ainsi corrélées. Par itération, il forme alors une série de courbes successivement engendrées l'une à partir de l'autre, qu'il nomme courbes *positives*, par opposition aux courbes *négatives* successivement obtenues par la méthode de construction inverse consistant à chaque étape à prendre la courbe enveloppée par les perpendiculaires menées aux extrémités des rayons vecteurs de la courbe précédente. Il obtient alors des formules pour les éléments d'arcs pour ces deux séries de courbes et étudie le moyen de les rectifier les unes par les autres. L'application de cette méthode de rectification des courbes positives et négatives à l'ellipse d'abord, puis à l'hyperbole équilatère ensuite, lui permet de retrouver certains des résultats de Legendre mais en leur conférant désormais une interprétation résolument géométrique. Il démontre ainsi qu'en partant de l'ellipse comme courbe primitive, on retrouve comme première courbe négative la courbe dite de Talbot[15] et dont Legendre, apparemment de manière indépendante, avait aussi montré que les arcs pouvaient servir à représenter généralement la fonction elliptique de première espèce à une quantité algébrique près ; tandis que, dans le sens des courbes négatives, "les arcs de toutes les courbes négatives s'exprimeront à l'aide des fonctions elliptiques de la première et de la seconde espèce seulement, et par conséquent à l'aide des arcs d'ellipse et de la première dérivée négative"[16]. De manière analogue, Roberts démontre que la rectification de toutes les courbes positives d'ordre impair à partir de l'hyperbole équilatère ne dépend que de la première de la série qui est une lemniscate. L'orientation de la démarche se démarque ainsi de celle qui prévalait chez Legendre, pour autant que le recours aux fonctions elliptiques n'est qu'un moyen analytique au service de la rectification des courbes dérivées les unes par les autres.

B. Tortolini enfin s'attache de son côté aux applications géométriques de la méthode inverse des tangentes et pose ce qu'il nomme le "problème réciproque" de la rectification, qui consiste, "supposant que l'arc d'une courbe plane soit une fonction déterminée de l'abscisse, [*à*] trouver l'équation de la courbe entre les coordonnées rectangulaires x et y"[17]. Comme il le souligne lui-

[14] Cf. [2, p. 168] sur la note de 1843, et[2, p. 173-174] sur les travaux ultérieurs de Roberts relatifs aux arcs d'ovales et aux arcs d'ellipses.

[15] W.H. Talbot, membre de la société philosophique de Cambridge, fait paraître une courte note [59], dans le journal de Gergonne de l'année 1823-1824, dans laquelle il donne, au moyen d'une intégrale elliptique de première espèce, la rectification d'une courbe proposée dans le même numéro du journal. M. Roche, capitaine d'artillerie de la marine, avait en effet soumis au lecteur le problème suivant : "Quelle est la courbe enveloppe de l'espace parcouru par l'un des côtés d'un angle droit, dont le sommet décrit une ellipse donnée, tandis que son autre côté passe constamment par le centre de l'ellipse ? Ou, en d'autres termes, Quelle est la courbe à laquelle sont tangentes les perpendiculaires aux extrémités de tous les diamètres d'une ellipse donnée ?" [52, p.207].

[16] [50, p. 184].

[17] [60, p. 288].

même ces recherches n'ont "rien de remarquable du côté de l'analyse"[18] mais ne seront peut-être pas tout à fait dénuées d'utilité si on les regarde du côté de la géométrie, et plus précisément de la théorie des courbes. Dans une note des *Raccolta scientifica di Roma* de 1846 publiée ensuite dans le journal de Crelle [61], Tortolini donne en particulier l'équation en coordonnées rectangulaires de la courbe algébrique du sixième degré qu'il attribue tantôt à Talbot[19], tantôt à Legendre[20], en effectuant complètement le calcul d'élimination, jusqu'alors seulement esquissé[21], de façon à exprimer les coefficients de l'équation en fonction des paramètres de l'ellipse dont la courbe est dérivée.

Encouragé à reprendre ses recherches sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques, par la lecture des mémoires de Roberts et de Tortolini, Serret suit désormais une nouvelle piste en tirant parti d'une propriété analytique, jusque là négligée, de la lemniscate, qui ouvre la voie à une caractérisation générale des courbes algébriques dont les arcs représentent les transcendantes elliptiques de première espèce. "La première idée des recherches nouvelles auxquelles je me suis livré, et que je publie aujourd'hui, [*écrit-il dans le mémoire de 1845*] m'a été suggérée par une propriété de la lemniscate, à laquelle je n'avais pas d'abord attaché une grande importance, et qui pourtant paraît la seule susceptible d'une généralisation favorable. Cette propriété de la lemniscate consiste en ce que ses coordonnées rectangulaires sont exprimables en fonction rationnelle de l'amplitude de la fonction elliptique qui représente l'arc."[22] De même que la lemniscate d'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

peut être paramétrisée en posant

$$x = a\sqrt{2}\frac{z + z^3}{1 + z^4}, \qquad y = a\sqrt{2}\frac{z - z^3}{1 + z^4},$$

de sorte que l'on obtienne pour l'élément d'arc, la formule $\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2a\frac{dz}{\sqrt{1+z^4}}$, de même, dans le cas général, Serret cherche les différentes solutions que peut admettre l'équation indéterminée

$$dx^2 + dy^2 = Zdz^2$$

où x, y, Z sont des fonctions rationnelles de z. En donnant une solution générale de ce problème, il montre ainsi qu'il existe un nombre illimité de courbes algébriques qu'il nomme "courbes *elliptiques*" dont les arcs peuvent être multipliés et divisés algébriquement, comme l'est la fonction elliptique de première espèce[23], et dont il propose une caractérisation purement analytique. Dans un compte-rendu publié à la suite de ce mémoire de 1845, Liouville met ainsi en lumière la spécificité de la démarche de Serret.

> On peut distinguer les courbes dont nous parlons [*les "courbes elliptiques" de Serret*], en classes, d'après le degré de l'équation à laquelle satisfait le carré du module. L'exemple déjà connu de la lemniscate, dont les arcs s'expriment par la fonction elliptique de première espèce au module $\sqrt{\frac{1}{2}}$, se trouve bien élégamment généralisé dans la première classe où l'on rencontre tous les modules de la forme $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. L'analyse de M. Serret suppose essentiellement

[18] [60, p. 289].

[19] Cf. [62, p. 180] : "La nuova curva è del sesto ordine, ed è cognita sotto il nome di curva di *Talbot* : fin dal 1846 nella *Raccolta scientifica di Roma*, determinai per il primo l'equazione algebrica di questa curva".

[20] cf. [61, p. 90] : "Questa curva che nella sua figura ovale poco differisce dall'ellise è stata in particolar modo considerata da *Legendre* (*Traité des fonctions elliptiques*, tom. I, p. 36)."

[21] Ni Legendre, ni Talbot n'avaient en effet donné l'équation de cette courbe en effectuant le calcul dont Roche avait dès le début signalé la difficulté, cf. [52, p. 210] : "Si l'on ne veut que construire la courbe par points, cette élimination, qui conduirait à une équation du sixième degré assez compliquée, ne sera point nécessaire".

[22] [56, p. 258].

[23] Cf. [56, p. 278-279].

n entier ; mais nous nous sommes assurés que les formules auxquelles elle conduit finalement conservent leurs principales propriétés, lorsqu'on prend n fractionnaire. Ainsi les carrés des modules peuvent être des fractions proprement dites quelconques, sans que les courbes correspondantes cessent d'être algébriques, et d'offrir par leurs arcs une représentation des intégrales ; seulement les valeurs de x et y ne sont plus rationnelles en z.[24]

La restriction imposée par cette dernière condition devait par la suite être levée par la définition géométrique de ces mêmes "courbes elliptiques". En approfondissant ce qu'il nomme la théorie géométrique de la lemniscate, Serret est en effet "conduit à deux propriétés remarquables, communes à toutes les courbes elliptiques de la première classe, et qui fournissent pour ces courbes, un mode uniforme de génération d'une extrême élégance"[25], lequel permet par suite de les définir indépendamment des considérations analytiques qui les ont fait découvrir. Dans le cas

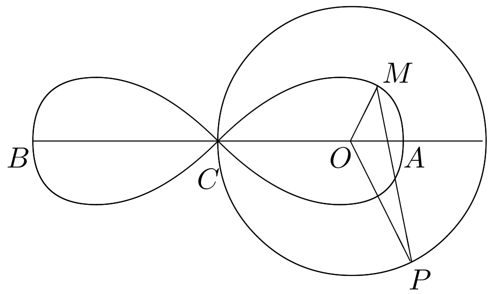

Fig. 1 – Le triangle mobile de Serret

d'une lemniscate de demi-distance focale $CO = 1$ et de demi-axe $CA = \sqrt{2}$, on peut toujours construire un triangle OMP de sommet fixe en O et de côtés mobiles

$$OP = 1, \qquad MP = \sqrt{2}$$

car le rayon vecteur $r = OM$ varie entre $\sqrt{2}-1$ et $\sqrt{2}+1$. Lorsque le point M décrit d'un mouvement continu la lemniscate entière, le point P décrit deux fois le cercle de rayon unité ayant son centre en O. En remarquant que le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur OM avec une droite fixe est constamment égal au cosinus de l'angle $MOP - 2OMP$, Serret a alors l'idée d'inverser les rôles que jouent les points M et P et d'utiliser cette propriété du triangle OMP pour en tirer la génération de la lemniscate. D'où suit d'elle-même la généralisation annoncée. Si l'on considère en effet un triangle OMP tel que

$$OP = \sqrt{n}, \qquad MP = \sqrt{n+1}$$

où "n est un nombre entier, ou fractionnaire, ou même incommensurable"[26], et tel que le cosinus de l'angle formé par le rayon vecteur OM avec une droite fixe soit désormais constamment égal au cosinus de l'angle $n.MOP - (n+1)OMP$, "le point M engendrera une courbe (algébrique si n est commensurable) dont l'arc sera une fonction elliptique du rayon vecteur, réductible au module $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$, et les courbes ainsi engendrées ne sont autres que celles que j'ai désignées sous le nom de courbes elliptiques de la première classe"[27]. Serret parvient ainsi à une définition

[24] [45, p. 292]
[25] [57, p. 89]
[26] [57, p. 91].
[27] [57, p. 91-92]. Serret tire de l'égalité des cosinus dans laquelle entrent les angles du triangle OMP, la formule de l'élément d'arc pour la courbe, à savoir $ds = \sqrt{n}\frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$, où $\alpha = MOP$ et $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$. La courbe ainsi définie est donc bien une "courbe elliptique" de la première classe.

pleinement géométrique des courbes algébriques qui généralisent la lemniscate et résout ainsi le problème de la représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce.

Envisagés à la lumière de ces recherches ultérieures, les travaux de Legendre ont paru rétrospectivement pouvoir être annexés à ce programme géométrique. En commentant les résultats de Serret dans son *Rapport sur les progrès de la géométrie* (1870), Chasles par exemple souligne ainsi explicitement ce qu'il présente comme une continuité profonde de Legendre à Serret. Après avoir à juste titre rappelé, comme Serret, Roberts et Tortolini avant lui, que Legendre avait été conduit de la lemniscate à la courbe de degré six dont les arcs s'expriment par des fonctions elliptiques de première espèce de module et d'amplitude quelconques, quoiqu'augmentées d'une quantité algébrique, Chasles ajoute toutefois que, ce faisant,"il désirait, sans oser l'espérer, que l'on découvrît d'autres courbes algébriques qui représentassent aussi les mêmes fonctions de première espèce"[28]. Il note en outre, à propos du mémoire *Sur la théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe*, qu'en donnant des définitions géométriques des "courbes elliptiques", Serret "complète ainsi le vœu que formait Legendre en créant la théorie des fonctions elliptiques"[29]. Or non seulement aucun élément documentaire ne permet d'étayer cette interprétation, mais un faisceau d'arguments qui s'appuient aussi bien sur l'historiographie que sur la critique interne des textes semble au contraire devoir l'invalider.

1. En premier lieu, comme le montre un examen détaillé de sa démarche d'ensemble, Legendre s'attache bien davantage à la représentation analytique des transcendantes elliptiques ainsi ramenées à des formes normales, qu'à leur représentation géométrique, laquelle est toujours secondaire et n'a qu'une valeur d'illustration.

2. En second lieu, si, comme le suggère Chasles, la caractérisation générale et exhaustive des courbes algébriques dont les arcs s'expriment par tel ou tel type de transcendantes était la préoccupation principale de Legendre dans ses recherches sur les fonctions elliptiques, on serait légitimement en droit de se demander pourquoi dans le tableau général qu'il brosse des contributions marquantes de ses prédécesseurs[30], Legendre ne mentionne Euler que pour ceux de ses travaux qui s'inscrivent dans la filiation des mémoires de Fagnano sur la mesure de la lemniscate, c'est-à-dire ceux qui sont publiés dans les tomes 6 et 7 de l'Académie de Saint-Petersbourg ([10], [11], [12]). Chasles remarque en effet que "le succès de M. Serret dans ses recherches sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques l'a engagé à revenir en quelque sorte en arrière pour chercher aussi quelles sont les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle, question dont Euler s'était longtemps occupé"[31]. Dans l'article auquel il est fait allusion, Serret se réfère en effet explicitement aux mémoires d'Euler contenus dans le tome 11 de l'Académie de Saint-Petersbourg, et en particulier à celui [19] dans lequel Euler montre qu'il y a une infinité de courbes algébriques, différentes du cercle, qui sont rectifiables par des arcs de cercle. Serret note alors que les courbes découvertes par Euler ne représentent qu'une partie de celles auxquelles le conduit l'application de la méthode analytique générale mentionnée plus haut, en sorte qu'il y a en effet, en l'occurrence, continuité dans le questionnement. Par ailleurs ce mémoire d'Euler s'inscrit dans une série de mémoires qui visent à déterminer toutes les courbes algébriques dont les arcs peuvent être exprimés au moyen d'arcs d'ellipse, de parabole, ou plus généralement d'une autre courbe algébrique ([16] [17] [18]). Pendant les années de rédaction du *Traité des fonctions elliptiques*, Legendre ne pouvait pas avoir pris connaissance de ces mémoires d'Euler dont la publication ne date que de 1830. Cependant, comme le souligne Krazer [33, p.

[28] [9, p. 174].

[29] [9, p. 175]. L'interprétation de Chasles est reprise par E. Barbin et R. Guitart dans leur étude d'ensemble sur les ovales cartésiennes, cf. [2, p. 166] : "Legendre exhibe une courbe du sixième degré dont les arcs s'expriment par des fonctions de première espèce et souhaite que l'on découvre d'autres courbes répondant au problème".

[30] Cf. les présentations historiques dans les *Exercices de calcul intégral* (1811) et dans le *Traité des fonctions elliptiques* (1825), [40, p. 1-3], [41, p. 1-2].

[31] [9, p. 175].

IX] dans la préface à son édition des tomes 20 et 21 des *Opera Omnia*, les mémoires de 1830 reprennent en les prolongeant et en les corrigeant des recherches publiées dès 1789 dans les tomes 4 et 5 des Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg ([13], [14],[15]). Le fait que Legendre n'en fasse pas mention est donc un élément significatif qui invite à envisager avec prudence la lecture de Chasles.

3. Reste enfin la question de l'appréciation exacte des méthodes de Legendre, et en particulier du statut, dans l'usage qui est fait de la courbe du sixième degré, de cette quantité algébrique complémentaire qui complique la représentation par un arc de courbe de la fonction de première espèce. Serret reconnaît qu'on peut certes faire disparaître cette quantité en prenant convenablement les extrémités de l'arc, mais ne cache cependant pas que "n'étant pas nulle en général, [*elle*] empêche la courbe d'offrir une représentation parfaite de la première transcendante elliptique"[32]. Liouville précise à cet égard qu'"à cause des deux extrémités variables [*de l'arc de la courbe de sixième degré*], il y a, en quelque sorte, deux arcs employés, et ce n'est pas par un élément $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, mais par la différence de deux éléments, que la différentielle de la fonction elliptique se trouve exprimée. Sous un certain point de vue, une telle représentation doit être regardée comme imparfaite. Nous avons, au contraire, un mode parfait de représentation dans la lemniscate ; aussi les géomètres ont-ils étudié cette courbe avec beaucoup de soin."[33]. L'interprétation de Chasles suggérerait que Legendre lui-même aurait dû avoir conscience de l'imperfection de la solution qu'il donne au moyen de sa courbe de sixième degré, or, comme nous le verrons, le fait qu'il la regarde comme "absolument générale"[34] laisse penser qu'il la jugeait suffisamment satisfaisante relativement aux fins qu'il se proposait, lesquelles concernent bien davantage l'analyse que la géométrie.

2 Représentation analytique et classification des transcendantes

Dans la perspective de Legendre, la représentation analytique prime en effet sur la représentation géométrique, pour autant que la classification des transcendantes elliptiques répond principalement à des considérations de type algorithmique. Dans les *Exercices de calcul intégral* comme ensuite dans le *Traité des fonctions elliptiques*, Legendre procède à une comparaison systématique de toutes les transcendantes contenues dans la formule $\int \frac{Pdx}{R}$, où P est une fonction rationnelle de x, et R la racine carrée d'un polynôme en x du quatrième degré. La classification en trois grandes espèces est le résultat de la réduction de ces expressions à la forme la plus simple dont elles sont susceptibles. L'intégrale de la forme $\int \frac{Pdx}{R}$ se décompose en une partie algébrique qu'on peut isoler par intégrations partielles, « plus un certain nombre de transcendantes, qui sont toujours de la même forme et de la même nature »[35], de telle sorte qu'on obtient ainsi une première forme normalisée.

> [...] la formule $\int \frac{Pdx}{R}$ sera transformée en une autre $\int \frac{Qd\phi}{\sqrt{1-c^2 sin^2\phi}}$, dans laquelle c sera plus petit que l'unité, et Q sera une fonction rationnelle paire de $\sin\phi$, laquelle contiendra $\sin\phi$ au même degré que P contient x.[36]

Il importe toutefois ici de retracer comment Legendre parvient à cette première forme normalisée en mettant notamment en lumière les raisons pour lesquelles il en vient à reconnaître comme nécessaire cette condition imposant au module c de ne prendre que des valeurs réelles comprises entre zéro et l'unité. Guidé par l'analogie avec le calcul des arcs d'ellipse présenté dans les deux mémoires de 1786 sur les intégrations par arcs d'ellipse ([37], [38]), il s'appuie,

[32][56, p. 257].
[33][45, p. 292].
[34][41, p. 40].
[35][41, chap. I, §1. p. 4].
[36][41, chap. III. §7. p. 11].

dans le *Mémoire sur les transcendantes elliptiques* (1793), sur les méthodes de réduction de d'Alembert et de Lagrange pour élaborer un théorème de représentation qui puisse valoir pour une classe plus étendue de transcendantes, dont il reconnaît de ce fait l'homogénéité et qu'il nomme transcendantes elliptiques.

Partant de l'intégrale $\int \frac{Pdx}{R}$, Legendre commence par extraire la partie entière de la fonction rationnelle P en posant $P = M + \frac{N}{B}$, de manière à ne plus avoir affaire qu'à des fonctions entières M, N, B de x. En premier lieu, l'intégrale formée à partir de la partie entière M peut de manière évidente s'exprimer comme une somme d'intégrales de la forme $\Pi^k = \int \frac{x^k dx}{R}$. Legendre recourt à une méthode de réduction qu'il emprunte pour l'essentiel à d'Alembert[37] et qui se fonde sur l'usage de formules de récurrence du type de celles qu'on obtient entre les intégrales Π^k à partir du produit $x^{m-3}R$, par différentiation puis intégration. De cette manière, on montre en effet par itération que l'intégrale Π^m se ramène à une combinaison linéaire des intégrales Π^0, Π^1 et Π^2, d'où l'on tire la forme réduite $\int \frac{(A+Bx+Cx^2)dx}{R}$ augmentée d'une partie algébrique. Reste alors à considérer l'intégrale formée à partir de la fonction rationnelle $\frac{N}{B}$ qu'on peut décomposer en plusieurs fractions partielles selon le nombre de facteurs du dénominateur, de sorte que les termes de l'intégrale totale pourront être représentés par des expressions générales du type $\int \frac{dx}{(1+nx)^k R}$, qui se ramènent enfin, grâce à des formules de récurrence appropriées, à l'intégrale de la forme $\int \frac{dx}{(1+nx)R}$. Legendre en conclut donc que l'intégrale $\int \frac{Pdx}{R}$, peut se décomposer en trois parties principales, la première algébrique, la seconde de la forme $\int \frac{(A+Bx+Cx^2)dx}{R}$, et la troisième renfermant une ou plusieurs intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(1+nx)R}$, où le coefficient n peut être réel ou imaginaire.

Après avoir ainsi dégagé cette première classification, Legendre opère ensuite une sorte de changement de pied destiné à permettre “une connaissance plus précise des mêmes transcendantes”[38]. Il reprend alors l'idée directrice que Lagrange avait suivie dans son mémoire *Sur une nouvelle méthode de calcul intégral* et qui consiste à faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical dans la différentielle $\frac{Pdx}{R}$. La première méthode que propose Legendre part de l'hypothèse que l'on peut décomposer le polynôme du quatrième degré sous le radical R en deux facteurs quadratiques réels

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \epsilon x^4 = \left(\zeta + 2\eta x + \theta x^2\right)\left(\lambda + 2\mu x + \nu x^2\right),$$

lesquels doivent nécessairement être de même signe pour que le radical soit réel, par conséquent tels que

$$\zeta + 2\eta x + \theta x^2 = \left(\lambda + 2\mu x + \nu x^2\right).y^2,$$

d'où, en posant $Y = \sqrt{(\mu y^2 - \eta)^2 + (\lambda y^2 - \zeta)(\theta - \nu y^2)}$, l'on tire la substitution suivante

$$x = \frac{\mu y^2 - \eta + Y}{\theta - \nu y^2},$$

dont Legendre montre qu'elle permet d'obtenir la transformation souhaitée

$$\frac{dx}{R} = \frac{dy}{Y}$$

où Y ne comporte que des puissances paires de y. Quoique parfaitement satisfaisante d'un point de vue théorique, cette première méthode rend toutefois difficile le calcul des valeurs approchées des transcendantes. Or cette exigence était centrale dans la perspective de Legendre. Le projet d'ensemble qui sous-tend sa théorie des fonctions elliptiques visait en effet à étendre

[37]Cf. [27, p. XLIV].

[38][39, p. 8].

l'analyse grâce à de nouvelles procédures de calcul rendues possibles par l'adoption de notations appropriées pour les transcendantes plus composées, comme on l'avait fait auparavant pour les plus simples telles les arcs de cercle et les logarithmes. Il s'agissait donc d'élaborer ce calcul élargi en vue de construire des tables d'intégrales elliptiques. À cet égard, la facilité des calculs devenait un enjeu essentiel. Aussi Legendre ne s'en tient-il pas à cette première méthode et envisage-t-il une piste nouvelle.

> Cette méthode [*i.e. celle qu'il expose en premier*] est générale ; cependant, comme la valeur de x, qui doit être substituée dans P, est un peu compliquée, il ne sera pas inutile de faire voir qu'on peut parvenir au même but par une substitution beaucoup plus simple, qui consiste à faire $x = \frac{p+qy}{1+y}$, p et q étant deux constantes indéterminées.[39]

Cette substitution avait été suggérée par Lagrange qui ne l'avait toutefois pas retenue parce qu'elle ne permettait pas de garantir la réalité des variables qu'impose le calcul des valeurs approchées des intégrales.

> Cette condition de la réalité des variables introduites par des substitutions n'est pas nécessaire lorsqu'il s'agit d'intégrales exactes et absolues, parce qu'on a des moyens de faire disparaître ensuite les imaginaires ; mais elle devient indispensable dans les intégrations approchées, car on ne peut bien juger de la convergence d'une série, à moins que tous ses termes ne soient réels et évalués en nombres. Sans cette considération j'aurais pu résoudre le Problème précédent [*i.e. le problème consistant à faire disparaître les puissances impaires de l'intégrale elliptique générique* $\int \frac{Ndx}{R}$] d'une manière plus simple, en substituant immédiatement $\frac{p+qy}{1+y}$ à la place de x, et égalant ensuite à zéro les coefficients de y et de y^3 dans le quinôme sous le signe radical ; on trouve de cette manière que p et q sont les racines d'une équation du second degré dont les deux coefficients dépendent eux-mêmes d'une équation du troisième ; mais quoique celle-ci ait toujours une racine réelle, on n'est pas assuré que celle-là ait les siennes réelles aussi, ce qui est néanmoins nécessaire pour que la nouvelle variable y ne soit point imaginaire.[40]

Legendre reprend donc exactement la substitution de Lagrange, mais il surmonte l'obstacle signalé par son prédécesseur en montrant qu'on peut s'assurer que les paramètres p et q prennent des valeurs réelles et que par conséquent la substitution proposée préserve la réalité des variables. En opérant la substitution $x = \frac{p+qy}{1+y}$ dans les deux facteurs $\zeta + 2\eta x + \theta x^2$ et $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$ du polynôme sous le radical, puis en annulant les coefficients des puissances impaires de y, Legendre obtient les deux équations suivantes

$$\zeta + \eta(p+q) + \theta pq = 0$$
$$\lambda + \mu(p+q) + \nu pq = 0$$

dont on tire les valeurs rationnelles de $p+q$ et de pq. En formant alors à partir de ces valeurs l'équation quadratique dont p et q sont les racines supposées, il apparaît qu'en imposant au discriminant la condition suivante $(p+q)^2 - 4pq = (p-q)^2 > 0$, on s'assure de la réalité des racines. Legendre cherche donc à montrer que cette condition est vérifiée dans tous les cas, que le polynôme du quatrième degré sous le radical ait ou n'ait pas toutes ses racines réelles. Si l'un des deux facteurs quadratiques, par exemple $\lambda + 2\mu x + \nu x^2$, comporte des racines imaginaires, Legendre parvient à tirer l'inégalité souhaitée $(p-q)^2 > 0$ des relations entre les paramètres λ, μ, ν. Si au contraire le polynôme sous le radical a tous ses facteurs réels, et qu'on suppose alors que cette décomposition ne conduit pas à des valeurs réelles de p et de q, Legendre fait voir qu'on peut toujours apparier autrement les facteurs réels de sorte que les deux nouvelles combinaisons pour les facteurs quadratiques donnent des valeurs réelles pour p et q. Mais en résolvant le problème relatif à la réalité des variables, Legendre parvient du même coup à faire apparaître deux facteurs quadratiques réels sans terme de puissance impaire.

[39] [39, p. 9].
[40] [34, p. 258].

> Donc par la substitution de $x = \frac{p+qy}{1+y}$, il est toujours possible de faire disparaître les puissances impaires de la variable sous le radical, et en même temps on obtient ce nouvel avantage, que les deux facteurs, sous le nouveau radical, seront réels et de la forme $f + gy^2$, ce qui est un point essentiel, et qu'on n'obtiendrait pas toujours par la première méthode.[41]

Le passage aux facteurs quadratiques réels de la forme $f + gy^2$ constitue une étape décisive parce qu'il permet à Legendre de parvenir à une représentation analytique générale des transcendantes elliptiques qui s'accorde parfaitement, en le prolongeant, avec le calcul des arcs d'ellipse élaboré antérieurement et pour lequel il s'était limité à la considération des seuls arcs $\int_0^\phi \sqrt{1-c^2\sin^2\phi}.d\phi$ d'une famille continue d'ellipses de semi-axes 1 et $b = \sqrt{1-c^2}$, où b et c varient entre zéro et l'unité. Pour faire apparaître l'emboîtement du particulier dans le général, il ne restait plus alors qu'à passer à la forme trigonométrique, par un changement de variable approprié, de sorte que l'intégrale $\int \frac{Pdx}{R}$ se ramène à la formule $\int \frac{Qd\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}}$ dans laquelle c est une quantité réelle comprise entre zéro et l'unité et Q une fonction rationnelle paire de $\sin\phi$ qui contient $\sin\phi$ au même degré que P contient x. Puis par application des formules de récurrence de d'Alembert à la formule $\int \frac{Qd\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}}$, Legendre montre qu'elle se réduit à (1) une partie algébrique, (2) une intégrale de la forme $\int (A + B\sin^2\phi)\frac{d\phi}{\Delta}$ où $\Delta = \sqrt{1-c^2\sin^2\phi}$, et (3) une ou plusieurs parties de la forme $\int \frac{Nd\phi}{(1+n\sin^2\phi)\Delta}$, où les coefficients N et n ont des valeurs quelconques, réelles ou imaginaires. Enfin, dans une dernière étape, Legendre montre que ces deux formes principales sont comprises dans une formule générale[42]

$$H = \int \frac{A + B\sin^2\phi}{1+n\sin^2\phi}.\frac{d\phi}{\Delta},$$

dont les propriétés de périodicité la rendent propre à fournir la représentation analytique unifiée générale qui permet de circonscrire la classe entière des transcendantes elliptiques. La quantité H varie avec l'amplitude ϕ au sens où elle commence et s'évanouit lorsque $\phi = 0$, et il suffit de connaître toutes les valeurs de H de $\phi = 0$ à $\frac{\pi}{2}$, pour connaître la valeur de cette transcendante pour une valeur quelconque de son amplitude.

> Il en est à cet égard de la fonction H comme des arcs d'ellipse, et en général des arcs de toutes les courbes ovales composées de quatre parties égales et semblables : un arc, quelque grand qu'il soit et renfermant, si l'on veut, plusieurs circonférences, s'exprime toujours sans difficulté, par le quart de la courbe et une portion de ce quart. La fonction déterminée $H(\frac{\pi}{2})$ est en quelque sorte l'unité des fonctions H, nous la désignerons par H_1.[43]

Dans le *Traité* de 1825, Legendre distingue finalement trois formes fondamentales que sont susceptibles de prendre les transcendantes H, et justifie cette classification par des considérations de type algorithmique :

> Puisque toute intégrale désignée par $\int \frac{Pdx}{R}$ se réduit à une partie algébrique, plus un certain nombre de termes qui peuvent chacun être assimilés à la fonction H, il s'ensuit qu'on pourrait n'admettre, pour les intégrales dont il s'agit, qu'une seule espèce de transcendantes, représentée par la fonction H, et dans laquelle les coefficients A, B, n seraient à volonté réels ou imaginaires. Mais pour bien pénétrer la nature de ces intégrales, et pouvoir établir entre elles les comparaisons et les réductions dont elles sont susceptibles, il est nécessaire de diviser la fonction H en plusieurs espèces distinctes, dont les propriétés deviendront plus sensibles, lorsqu'on les considérera chacune isolément.[44]

[41] [39, p. 10].
[42] Il suffit de prendre $n = 0$ dans H pour obtenir la première, et de prendre $B = 0$ pour obtenir la seconde.
[43] [39, p. 18].
[44] [41, chap. V. §13. p. 15].

La fonction F est ainsi choisie comme première espèce en raison de sa simplicité analytique. Non seulement la fonction F peut s'exprimer au moyen de deux arcs d'ellipse, c'est-à-dire par deux fonctions E, et non l'inverse, "ce qui indique que la fonction E est d'une nature plus composée que la fonction F"[45], mais elle se signale en outre par le fait qu'elle permet les formules d'addition les plus simples, puisqu'elle vérifie $F(x) + F(y) = F(z)$ où z est une fonction algébrique explicite[46] de x et de y.

> La propriété la plus remarquable des fonctions F est qu'on peut déterminer, par des opérations purement algébriques, une fonction égale à la somme ou à la différence de deux autres fonctions ; d'où il suit qu'on peut déterminer algébriquement une fonction multiple, sous-multiple ou en général qui soit dans un rapport rationnel avec une fonction donnée ; propriété que les fonctions F partagent avec les arcs de cercle et les logarithmes, et qui a lieu quand même ces fonctions, considérées comme des intégrales ou des arcs de courbe, n'auraient pas l'origine commune $\phi = 0$, et commenceraient à des points quelconques.[47]

Quoique les propriétés algébriques de la fonction F généralisent celles que Fagnano [23] [24] et Euler [10] [11] [12] avaient mises en évidence dans le cas des arcs de lemniscate, c'est une caractéristique de l'approche de Legendre que de subordonner les secondes aux premières comme le particulier au général. Mais plus encore, si la perspective adoptée vise, comme il le dit lui-même, à "pénétrer la nature de ces intégrales" tant grâce à une notation appropriée qui en révèle les propriétés de périodicité que grâce à une mise en ordre systématique des transcendantes qui permet d'en calculer une valeur approchée, le passage de la courbe à la fonction elliptique se présente aux yeux de Legendre comme un approfondissement.

3 Quelle représentation géométrique pour les fonctions elliptiques ?

3.1 La lemniscate

Dans les *Exercices*, Legendre montre qu'on peut représenter géométriquement la fonction elliptique de première espèce de module $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ par des arcs de lemniscate. Les brèves indications qu'il donne alors et qui disparaîtront dans l'édition ultérieure du *Traité des fonctions elliptiques*, permettent de reconstituer le sens de sa démarche.

> La Lemniscate est, comme on sait, une courbe du quatrième ordre qui a pour équation $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. On suppose le demi-axe $CA = a$, l'abscisse $CP = x$, et l'ordonnée $PM = y$, si de plus on fait la corde $CM = z$, on aura en fonction de z, $x = \frac{z}{a}\sqrt{\frac{a^2+z^2}{2}}$, $y = \frac{z}{a}\sqrt{\frac{a^2-z^2}{2}}$, d'où résulte l'arc AM
>
> $$s = \int \frac{-a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}$$
>
> Soit encore $z = a\cos\phi$ et $c^2 = \frac{1}{2}$, on aura
>
> $$s = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2\phi}} = \frac{a}{\sqrt{2}} F(\phi)$$
>
> résultat auquel on serait parvenu directement en faisant
>
> $$x = a\Delta\cos\phi, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \sin\phi\cos\phi.$$

[45] [41, chap. V. §14. p. 17].

[46] cf. [27, p. xlv] sur la "hiérarchie de simplicité " entre les fonctions F et E s'exprimant dans les formules d'addition.

[47] *Ibid.*

Avec ces valeurs où Δ est toujours pris positivement, suivant notre usage, on suit la courbe dans tout son contour, de cette manière :

Dans le premier quart AMC, les valeurs de ϕ s'étendent, depuis $\phi = 0$ jusqu'à $\phi = \frac{\pi}{2}$; dans le second quart CNB, elles s'étendent depuis $\phi = \frac{\pi}{2}$ jusqu'à $\phi = \pi$; dans le troisième quart $BN'C$, depuis $\phi = \pi$ jusqu'à $\phi = \frac{3\pi}{2}$, et enfin dans le quatrième quart $CM'A$, depuis $\phi = \frac{3\pi}{2}$ jusqu'à $\phi = 2\pi$.

Cela posé, si l'on fait $\frac{a}{\sqrt{2}} = 1$, on aura $s = F(\phi)$; mais quelle que soit la ligne qu'on prend pour unité, on voit que les arcs de la Lemniscate jouissent de toutes les propriétés des fonctions elliptiques de première espèce, c'est-à-dire qu'ils peuvent être ajoutés, retranchés ou divisés algébriquement comme des arcs de cercle.[48]

Partant de l'équation de la lemniscate en coordonnées cartésiennes, Legendre considère d'abord une paramétrisation de la courbe en fonction de la corde, et obtient l'expression de l'arc AM mesuré à partir de l'extrémité A du grand axe lorsque la corde est prise entre les limites $CA = a$ et $CM = z$, comme dans les mémoires de Fagnano et Euler (cf. Fig. 2). Le changement de variables qu'il retient lui permet alors d'ajuster analytiquement la valeur de l'arc à la forme de la fonction elliptique de première espèce

$$\int \frac{-a^2 dz}{\sqrt{a^4 - z^4}} \overset{z = a\cos\phi}{=} \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\phi}},$$

de sorte que ce choix semble bien davantage dicté par une exigence analytique que par des considérations géométriques. Bien qu'il prenne soin de préciser ensuite que la courbe est bien parcourue “dans tout son contour” comme l'impose la périodicité de la fonction de première espèce, la signification géométrique de la paramétrisation retenue demeure implicite dans la présentation qu'en propose Legendre. Pour la mettre en lumière, il faut en effet suppléer ce qui manque au texte littéral et altérer de ce fait son organisation propre. L'équation de la lemniscate en coordonnées polaires[49]

$$z^2 = a^2 \cos 2\vartheta,$$

qui s'obtient immédiatement à partir de l'équation en coordonnées cartésiennes[50], livrerait en effet la teneur géométrique du changement de variable de Legendre en rendant explicite la relation qui lie la nouvelle variable d'intégration et l'angle des coordonnées polaires

$$\cos\phi = \sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

À partir de la paramétrisation de la lemniscate en coordonnées polaires

$$x = a\sqrt{\cos 2\vartheta}.\cos\vartheta, \qquad y = a\sqrt{\cos 2\vartheta}.\sin\vartheta,$$

on peut en effet obtenir la paramétrisation choisie par Legendre par une simple substitution

$$x = a\Delta\cos\phi, \qquad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\phi\cos\phi,$$

où $\Delta = \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\phi}$. Ce changement de variables permet du même coup de garantir la périodicité de la paramétrisation (cf. Fig. 2.). Lorsque l'angle $\angle ACM = \vartheta$ croît de 0 à $\frac{\pi}{4}$,

[48] [40, ch. VII, p. 37-8].

[49] Si l'on pose la corde $CM = z$ et l'angle $\angle ACM = \vartheta$, le point mobile M parcourt le quart de lemniscate AMC lorsque l'angle ϑ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$ (cf. Fig. 2). Pour pouvoir suivre le parcours de la lemniscate dans le sens que choisit Legendre, nous convenons que l'angle ϑ croît dans le sens inverse du sens trigonométrique.

[50] La lemniscate de demi-grand axe a et d'équation $z^2 = a^2\cos 2\vartheta$, et l'hyperbole équilatère d'équation $\xi^2 - \eta^2 = a^2$ s'obtiennent l'une à partir de l'autre par inversion par rapport au cercle de rayon a (cf. Fig. 2), en sorte que les points $M(x, y)$ et $Q(\xi, \eta)$ respectivement sur la lemniscate et l'hyperbole se correspondent si $CM.CQ = a^2$ c'est-à-dire en coordonnées polaires $x = z\cos\vartheta$, $y = z\sin\vartheta$ si et seulement si $\xi = \frac{a^2 x}{x^2+y^2} = \frac{a^2\cos\vartheta}{z}$, $\eta = \frac{a^2 y}{x^2+y^2} = \frac{a^2\sin\vartheta}{z}$.

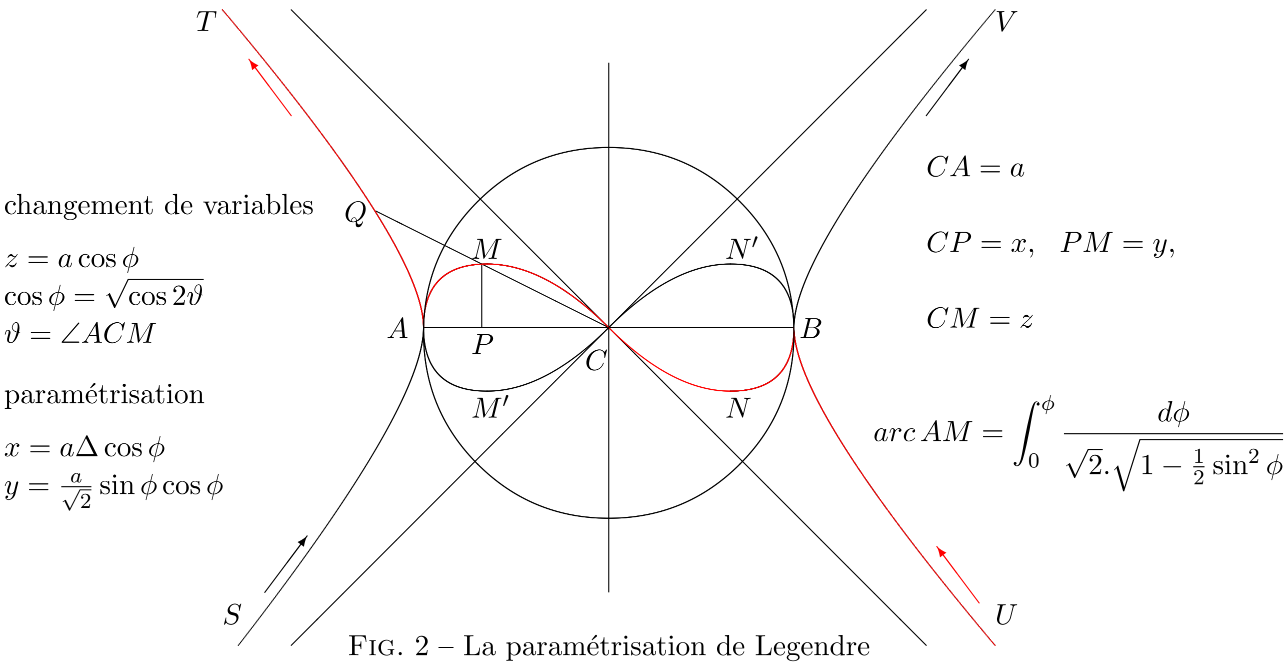

FIG. 2 – La paramétrisation de Legendre

le point Q parcourt la portion allant de A à T de la branche SAT de l'hyperbole et le point M parcourt le premier quart AMC de la lemniscate. Par ailleurs, lorsque l'angle ϑ décroît de $\frac{5\pi}{4}$ à π, le point Q parcourt la portion allant de U à B de l'autre branche UBV de l'hyperbole et le point M parcourt le second quart CNB de la lemniscate. Le point Q passe à l'infini d'une branche de l'hyperbole à l'autre, en sorte que les deux branches AT et UB se rejoignent à l'infini en un point qui correspond par inversion au point double de la lemniscate. Du point de vue géométrique, la variation de l'angle ϑ est discontinue puisqu'on passe ainsi sans transition de $\frac{\pi}{4}$ à $\frac{5\pi}{4}$ et de $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{-\pi}{4}$ et les deux domaines de variation s'aboutent l'un à l'autre avec une torsion (cf. Fig. 3). Ce défaut de continuité justifie le changement de variables dont le sens géométrique

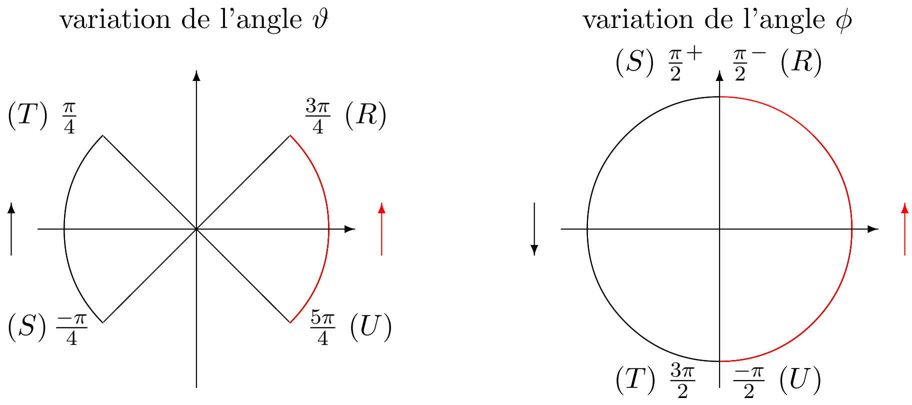

FIG. 3 – La teneur géométrique du changement de variables $z = a\cos\phi$

consiste précisément à ressouder les deux parties de la lemniscate en unifiant les deux intervalles de variations de l'angle polaire[51] en un seul domaine de variation parcouru uniformément dans un seul sens[52]. Pour mieux cerner le sens du choix opéré par Legendre, la comparaison avec les autres voies qui s'offraient à lui peut être éclairante. Dans son premier mémoire sur les méthodes d'intégration par arcs d'ellipse (1786), Legendre avait en effet proposé une rectification de l'hyperbole qui se fondait sur la construction cissoïdale de l'hyperbole équilatère[53]. En tirant parti de cette possibilité, Legendre serait parvenu à une paramétrisation alternative (cf. Fig. 4). Traçons le cercle de centre B et de rayon a puis un rayon BR faisant un angle $\omega = \angle DBR$ avec

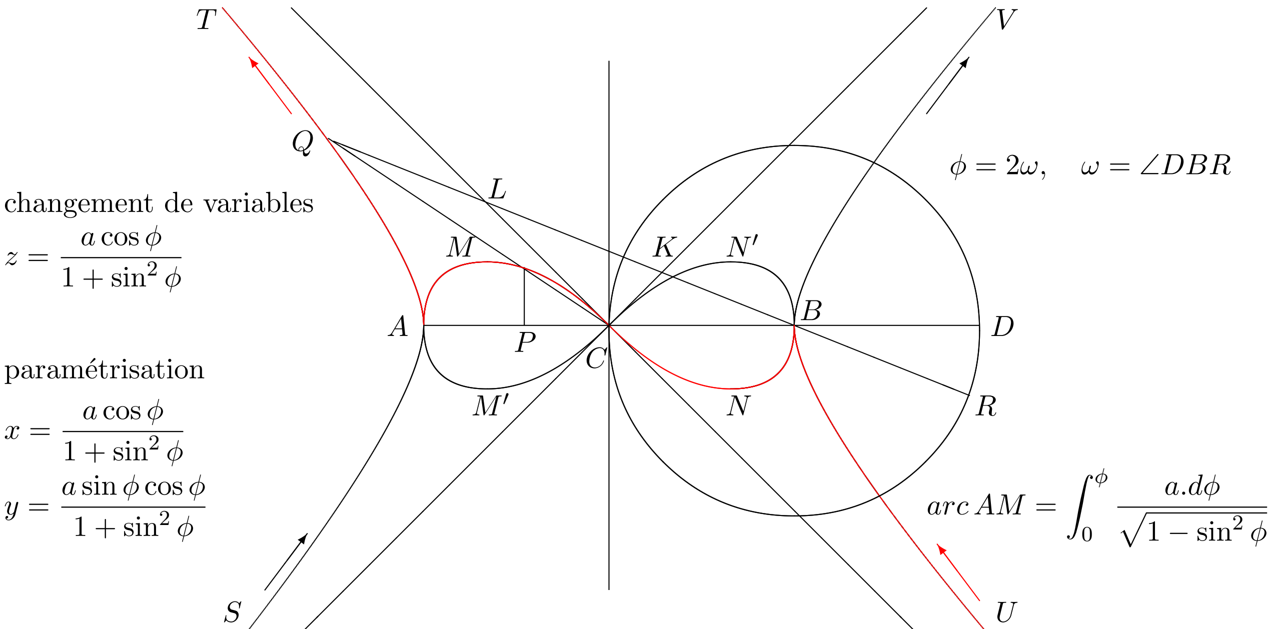

FIG. 4 – Une paramétrisation alternative

le grand axe de la lemniscate. Prolongée la droite BR coupe la première asymptote de l'hyperbole équilatère en un point K et la seconde en un point L. L'hyperbole équilatère étant le lieu géométrique des points Q tels que $BK = LQ$, les coordonnées du point $Q(\xi, \eta)$ sur l'hyperbole peuvent être exprimées[54] en fonction de l'angle ω,

$$\xi = \frac{a}{\cos 2\omega}, \qquad \eta = a\tan 2\omega.$$

[51] Lorsque ϕ traverse la valeur $\frac{\pi}{2}$ (respectivement $\frac{3\pi}{2}$) dans le sens trigonométrique direct, ϑ passe de la valeur $\frac{\pi}{4}$ à $\pi + \frac{\pi}{4}$ (respectivement de la valeur $\frac{3\pi}{4}$ à $\frac{-\pi}{4}$), tandis que le signe change et par suite aussi le sens de la variation. Les deux intervalles $[\frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ et $[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ sont donc ressoudés en un seul domaine de variation grâce au changement de variables $\cos\phi = \sqrt{\cos 2\vartheta}$.

[52] Dans la Fig. 3, on convient de représenter l'angle ϑ de telle sorte qu'il croît dans le sens inverse du sens trigonométrique en accord avec l'orientation de la figure choisie par Legendre, mais pour l'angle ϕ qui n'a pas de signification géométrique immédiate dans la figure de Legendre, nous adoptons le sens trigonométrique traditionnel.

[53] Cf. [37, p. 634]. Nous renvoyons à un autre article pour l'analyse de ces méthodes de Legendre en relation avec la relecture qu'il propose des résultats de Landen.

[54] En premier lieu, on détermine les coordonnées des points K et L en fonction de l'angle ω en prenant l'intersection de la droite BR passant par le point $B(a, 0)$ et de pente $-\tan\omega$ avec les deux asymptotes. On obtient ainsi $L(\frac{a\sin\omega}{\cos\omega+\sin\omega}, \frac{-a\sin\omega}{\cos\omega+\sin\omega})$ et $K(\frac{a\sin\omega}{\cos\omega-\sin\omega}, \frac{a\sin\omega}{\cos\omega-\sin\omega})$ et la condition $BK = LQ$ permet de trouver l'expression des coordonnées (ξ, η) de Q.

Les coordonnées du point $M(x, y)$ s'obtiennent alors à partir de celles du point $Q(\xi, \eta)$ qui lui correspond par inversion par rapport au cercle de rayon a,

$$x = \frac{a^2\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a\cos 2\omega}{1 + \sin^2 2\omega}, \qquad y = \frac{a^2\eta}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{a\sin 2\omega \cos 2\omega}{1 + \sin^2 2\omega}.$$

Lorsque ω varie de 0 à π, le point M parcourt ainsi la lemniscate entière (cf. *Fig. 4*). Pour des valeurs de ω comprises entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, le point Q parcourt la portion de A vers T de la branche SAT de l'hyperbole, tandis que le point M décrit le premier quart AMC de la lemniscate. Pour des valeurs de ω comprises entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, le point Q parcourt la portion de U à B de la branche UBV de l'hyperbole et le point M décrit le second quart CNB de la lemniscate, etc. Si l'on pose à présent $\phi = 2\omega$, on trouve l'expression de l'élément d'arc[55]

$$ds = d\phi.\sqrt{\left(\frac{dx}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2} = \frac{a.d\phi}{\sqrt{1 + \sin^2\phi}}$$

qui correspond à une intégrale elliptique de module $\sqrt{-1}$. Quoique plus transparente d'un point de vue géométrique, dans la mesure où l'amplitude présente immédiatement un sens géométrique, cette seconde paramétrisation conduirait toutefois à une intégrale qui ne correspondrait pas à la forme des fonctions de première espèce, laquelle impose que le module soit réel et compris entre zéro et l'unité. Cette comparaison fait donc apparaître que, selon toute vraisemblance, Legendre est parti de la forme analytique de la fonction de première espèce pour y adapter ensuite la représentation géométrique, reléguant ainsi la géométrie des courbes à l'arrière-plan.

Le problème qui consiste à rechercher, pour les fonctions elliptiques de première espèce de module quelconque, une représentation géométrique par arcs adéquate, ne se précise que par étapes d'un traité à l'autre. Dans les *Exercices* (1811), la question n'est soulevée qu'en passant et Legendre ne dispose encore d'aucune solution.

> Les arcs de la Lemniscate représentent les fonctions elliptiques de la première espèce dans le cas où le module $c = \sqrt{\frac{1}{2}} = b$. Il serait assez curieux de rechercher s'il y a quelque autre courbe algébrique dont les arcs représentent la fonction F pour une autre valeur de c ; mais cette recherche ne laisse pas d'être difficile.
>
> Elle ne présenterait aucune difficulté si on admettait les arcs de cercle et les logarithmes dans l'expression des coordonnées.[56]

Legendre donne alors la paramétrisation suivante

$$x = \frac{1}{2c}\log\left(\frac{1 + c\sin\phi}{1 - c\sin\phi}\right), \qquad y = \frac{1}{c}\arctan\left(\frac{c\cos\phi}{b}\right),$$

qu'il façonne à partir de la forme de l'élément d'arc souhaité, de telle sorte qu'un arc s compté depuis $\phi = 0$ de la courbe transcendante ainsi décrite représenterait généralement la fonction $F(c, \phi)$. Dans la hiérarchisation analytique des transcendantes établie par Legendre, les fonctions elliptiques de première espèce viennent immédiatement après les logarithmes et arcs de cercle. Par conséquent, la représentation par arcs qu'il propose comme un pis-aller pour les fonctions F de module quelconque permettrait au moins de les exprimer en fonction de transcendantes moins composées, quoique la question de savoir s'il est possible de les exprimer en fonction des seules quantités algébriques demeure encore en suspens.

[55] Partant de $x = \frac{a\cos\phi}{1+\sin^2\phi}$, $y = \frac{a\sin\phi\cos\phi}{1+\sin^2\phi}$, le calcul donne $\frac{dx}{d\phi} = \frac{-a\sin\phi(3-\sin^2\phi)}{(1+\sin^2\phi)^2}$ et $\frac{dy}{d\phi} = \frac{a(1-3\sin^2\phi)}{(1+\sin^2\phi)^2}$, d'où l'on tire $(\frac{dx}{d\phi})^2 + (\frac{dy}{d\phi})^2 = \frac{a^2(1+\sin^2\phi)^3}{(1+\sin^2\phi)^4}$.

[56] [40, p. 39].

3.2 La courbe algébrique du sixième degré

Dans le premier tome du *Traité des fonctions elliptiques* (1825), Legendre détermine une courbe algébrique satisfaisant aux conditions du problème posé en recourant à une méthode purement calculatoire exempte de toute considération géométrique. La paramétrisation de la courbe en fonction de l'amplitude ϕ est ainsi obtenue régressivement à partir de relations connues entre les fonctions E et F, de sorte que par ajustement des quantités auxiliaires [h et b], on puisse ensuite faire disparaître les arcs d'ellipse qui compliquaient d'abord l'expression analytique, pour obtenir enfin une relation plus simple entre la fonction elliptique F de module quelconque et l'arc s de la courbe algébrique envisagée.

> Considérons maintenant la courbe formée d'après les équations
>
> $$x = h \sin\phi \left(1 + \frac{1}{3} m \sin^2\phi\right),$$
> $$y = bh \cos\phi \left(1 + m - \frac{1}{3} m \cos^2\phi\right),$$
>
> on trouvera, en éliminant $\sin\phi$, que l'équation de cette courbe est du sixième degré, et qu'elle ne contient que des puissances paires de x et de y, ce qui prouve qu'elle est partagée en quatre parties égales, et semblables par les axes des coordonnées.
>
> Des équations supposées, on tire par la différentiation
>
> $$dx = hd\phi \cos\phi(1 + m\sin^2\phi),$$
> $$dy = -bhd\phi \sin\phi(1 + m\sin^2\phi);$$
>
> donc l'élément de la courbe $ds = h\Delta d\phi(1 + m\sin^2\phi)$, et en intégrant
>
> $$s = hE + \frac{mh}{3c^2}\left((2c^2-1)E + b^2F - c^2\Delta\sin\phi\cos\phi\right)$$
>
> Pour faire disparaître l'arc d'ellipse E, soit $m = \frac{3c^2}{1-2c^2}$, et ensuite $h = \frac{3c^2}{b^2m} = \frac{1-2c^2}{b^2}$, on aura
>
> $$s = F - \frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\phi\cos\phi$$
> $$\text{ou} \qquad F(c,\phi) = s + \frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\phi\cos\phi.$$
>
> Ainsi, on voit que la fonction F, dont le module c est à volonté, pourvu qu'il soit plus petit que $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ou $\sin 45^\circ$, s'exprime par l'arc de courbe s augmenté de la quantité algébrique $\frac{c^2}{b^2}\Delta\sin\phi\cos\phi$.[57]

Legendre donne ici un échantillon des méthodes par lesquelles il se propose d'étendre les ressources de l'analyse en y adjoignant de nouvelles transcendantes, ici E et F, lesquelles "désignées chacune par un caractère particulier et soumises à un algorithme convenable, pourraient être employées dans l'analyse à peu près comme le sont les arcs de cercle et les logarithmes"[58]. Pour obtenir la courbe algébrique de degré six, il s'appuie en effet sur des résultats obtenus antérieurement dans son premier mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse (1786) dans lequel il avait esquissé un tel calcul des quantités $E = \int \Delta d\phi$ et $F = \int \frac{d\phi}{\Delta}$, en s'attachant en particulier à exprimer les intégrales du type $\int \Delta^n d\phi$ et $\int \frac{d\phi}{\Delta^n}$ en fonction de E et F, comme par exemple dans les cas suivants[59]

$$\int \frac{d\phi}{\Delta} = E - c\frac{dE}{dc}$$

[57] [41, p. 36].
[58] [41, p. 1].
[59] Cf. [37, p. 628-629].

$$\int \Delta^3\phi = \left(1 - \frac{1}{3}c^2\right) E + \frac{c(1-c^2)}{3}\frac{dE}{dc} + \frac{c^2}{3}\Delta \sin\phi \cos\phi$$

En 1825, partant de la formule supposée pour l'élément d'arc, $ds = h\Delta d\phi(1+m\sin^2\phi)$, Legendre obtient par intégration

$$\int h\Delta d\phi(1 + m\sin^2\phi) = hE + \frac{hm}{c^2}\int(\Delta - \Delta^3)d\phi$$

qu'il transforme en combinant les formules de 1786 pour $\int \frac{d\phi}{\Delta}$ et $\int \Delta^3 d\phi$ de manière à faire disparaître la coefficient aux différences partielles $\frac{dE}{dc}$. La géométrie n'a donc aucune part dans la démarche qui conduit à l'invention de la courbe algébrique du sixième degré dont les arcs représentent généralement les fonctions elliptiques de première espèce pour un module quelconque. Legendre n'étudie en effet les propriétés géométriques de cette courbe que dans un second temps pour chercher à faire disparaître la quantité algébrique $\Delta\sin\phi\cos\phi$ dans l'expression de la fonction $F(c,\phi)$. Il montre alors en premier lieu par une comparaison des rayons de courbure que chacun de ses quarts est enveloppé dans le quart correspondant de l'ellipse décrite sur les mêmes demi-axes $CA = 1$ et $CB = \frac{1}{b}$, avec $b = \sqrt{1-c^2}$ (cf. Fig. 5). Il établit

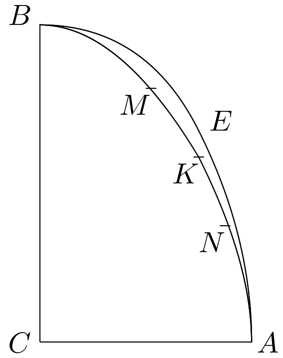

FIG. 5 – La courbe algébrique de degré six de Legendre

ensuite que pour une valeur de l'amplitude $\phi < \frac{\pi}{2}$, on peut toujours trouver sur le quart de courbe BKA deux points M et N tel que l'arc intercepté MN sera égal à la fonction $F(c,\phi)$. Il remarque en effet que la quantité $\Delta\sin\phi\cos\phi$ étant nulle pour les valeurs $\phi = 0$ et $\phi = \frac{\pi}{2}$, il y aura une valeur de ϕ pour laquelle cette quantité est un maximum. Soit K le point sur la courbe correspondant à cette valeur $\phi = \mu$. Par définition, à compter du point K, la quantité $\Delta\sin\phi\cos\phi$ diminuera continûment, dans le sens KMB comme dans le sens KNA depuis son maximum en K jusqu'à la valeur zéro aux points B et A. Par conséquent, si T est la valeur de $\Delta\sin\phi\cos\phi$ au point M de l'arc BMK correspondant par exemple à $\phi = \psi$, il y aura sur l'autre arc KNA un point correspondant N où $\Delta\sin\phi\cos\phi$ prendra la même valeur T. Soit ω l'amplitude associée à ce point N. Les arcs BM et BN seront donc respectivement représentés par les valeurs $F\psi + \frac{c^2}{b^2}\Delta\psi\sin\psi\cos\psi$ et $F\omega + \frac{c^2}{b^2}\Delta\omega\sin\omega\cos\omega$, de sorte que "leur différence MN aura pour valeur $F\omega - F\psi$, sans addition d'aucune quantité algébrique"[60]. Il ne reste plus alors qu'à utiliser les propriétés algébriques des fonctions F pour substituer à cette différence une unique fonction $F\phi = F\omega - F\psi$ qui puisse être représentée par le même arc MN. Cette méthode ne s'applique qu'aux modules $c < \sqrt{\frac{1}{2}}$. Dans le cas de modules $c > \sqrt{\frac{1}{2}}$, Legendre indique qu'on peut toujours se ramener au cas précédent en utilisant les échelles de modules

[60] [41, p. 38].

auxquelles il renvoie par anticipation. La représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce à laquelle on parvient ainsi n'est donc générale que dans l'exacte mesure où elle se subordonne à la représentation analytique des mêmes transcendantes dont les techniques calculatoires de Legendre permettent de moduler l'expression à l'infini selon des règles précises.

> Avec cette modification, la solution que nous avons donnée doit être regardée comme absolument générale. Ainsi l'on pourra toujours trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent toute fonction $F(c, \phi)$ dans laquelle le module et l'amplitude sont pris à volonté. Cette courbe est du sixième degré et sa figure est composée de quatre parties égales et semblables, concaves vers un même centre, se rapproche beaucoup de celle de l'ellipse.[61]

L'hybridation des représentations géométrique et analytique induite par la méthode de Legendre ne semble donc pas poser problème à ses yeux, ni a fortiori altérer une prétendue "perfection géométrique" (*selon l'expression de Serret et Liouville*) de la représentation recherchée pour les fonctions elliptiques de module quelconque.

3.3 La méthode générale de Legendre

Dans le tome second du *Traité des fonctions elliptiques* (1826), Legendre retrouve en suivant un chemin entièrement différent cette même courbe du sixième degré dont les arcs représentent la fonction elliptique de première espèce pour un module quelconque. Il obtient en effet d'abord une formule générale qui permet d'exprimer toute intégrale proposée par un arc de courbe et cherche ensuite naturellement à l'appliquer successivement aux trois espèces d'intégrales elliptiques, de manière à ramener, dans chaque cas de figure, les quadratures à des rectifications. Dans le contexte des lectures géométriques de Legendre du dernier tiers du XIXème siècle, Allégret ([1]) considère que la méthode que Legendre lui-même présente comme nouvelle dans la seconde section de l'appendice "Des quadratures" au tome II du *Traité*, n'est rien d'autre que celle qu'avait donnée avant lui Jakob Hermann dans un mémoire publié dans les *Acta Eruditorum* de 1723 ([28]). Si l'on sait exprimer l'arc d'une courbe par une quadrature, le problème inverse qui consiste à déterminer la courbe algébrique dont l'arc équivaut à une quadrature donnée présentait en effet davantage de difficultés. Après avoir exposé la solution de Hermann, Allégret envisage celle que Johann Bernoulli propose du même problème dans les *Acta Eruditorum* de l'année suivante ([5]), et il montre non seulement qu'on peut la déduire de l'analyse de Hermann mais aussi qu'elle conduit à des formules qui coïncident avec celles établies par Legendre dans le tome premier du *Traité* et déterminent ainsi la même courbe du sixième degré. Allégret suppose pourtant, sur la foi de certains passages que nous commenterons plus loin, que Legendre n'a vraisemblablement pas eu connaissance des travaux de ses prédécesseurs sur la rectification des quadratures[62]. À défaut de mentionner le mémoire de Bernoulli de 1724, Legendre se réfère pourtant dans ce même appendice à un autre mémoire de Johann Bernoulli inséré dans le tome I des *Opera Omnia* du mathématicien suisse parus en 1742. Il est alors probable que Legendre ait eu sous les yeux l'ensemble de cette édition des œuvres en quatre volumes dont le tome II contient précisément le mémoire de 1724 auquel Allégret confère un rôle déterminant dans la reconstruction qu'il propose. Comment alors comprendre que l'auteur du *Traité des fonctions elliptiques* ait pu présenter comme nouvelle la formule générale à laquelle il parvient ? L'un des éléments de réponse tient sans doute au fait que Legendre envisageait la réduction des quadratures aux rectifications moins comme un problème relatif la géométrie des courbes que comme un problème d'analyse visant à obtenir les meilleures approximations possibles des transcendantes considérées, et sans doute l'originalité de cette approche suffisait-elle à ses yeux à conférer à la

[61] [41, p. 40].
[62] [1, note 1, p. 151].

méthode qu'il retrouve à partir de Bernoulli, un caractère de nouveauté. En outre, comme nous allons le voir, Legendre prolongeait des recherches de Bernoulli qui appartiennent à une autre veine que celle à laquelle Allégret se réfère pour étayer son interprétation. Legendre parvient en effet à sa formule générale en cherchant à généraliser les résultats de Bernoulli relatifs au *motus reptorius*[63], qu'il utilise dans la perspective d'un calcul des transcendantes, alors qu'Allégret met l'accent sur les méthodes qui permettent de ramener les quadratures transcendantes à des arcs de courbes algébriques en retraçant la filiation de Hermann à Bernoulli. Comme le note Prouhet ([48]) dans son *Étude géométrique sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des œuvres de Jean Bernoulli* (1854), Bernoulli considérait manifestement ces deux courants de recherche comme indépendants l'un de l'autre. "Les Œuvres de J. Bernoulli renferment plusieurs théorèmes d'une rare beauté [*ceux qui se rapportent au mouvement de reptation*], qui excitèrent dans le temps l'admiration de Leibnitz, mais qui, négligés, à ce qu'il paraît, par leur propre inventeur, ne tardèrent pas à tomber dans un oubli presque complet"[64]. Bien que Bernoulli ait consacré plusieurs mémoires à ce sujet (les art. 26, 72, 74, 77 à 83 du tome I des *Opera Omnia*), "son dernier article sur le mouvement de reptation (*motus reptorius*) est de 1709 (Lettre à Leibnitz). Cette lettre se termine par ces mots : *Alia mirabiliora in aliam occasionem refero.* Mais il n'a rien paru de ces choses plus admirables dans les Œuvres publiées du vivant de l'auteur."[65] Prouhet qui, à l'instigation de Terquem, reprend par la suite, pour les compléter, ces recherches de Bernoulli soutient, en renvoyant à l'Appendice au tome II du *Traité des fonctions elliptiques*, que "Legendre est, à notre connaissance, le seul auteur qui ait démontré les théorèmes de Bernoulli"[66]. Il semble donc qu'étant parvenu à sa formule générale par une autre voie que celle que suggère Allégret, Legendre ait été parfaitement fondé à la revendiquer comme nouvelle.

Le mathématicien français part d'un problème très général qu'il formule dans les termes suivants.

> Après avoir traité d'un grand nombre de transcendantes que l'on peut évaluer avec plus ou moins de facilité par les méthodes qui leur sont propres, nous allons donner les moyens de trouver la valeur aussi approchée qu'on voudra d'une intégrale quelconque $\int y dx$ prise entre deux limites données, ce qui est l'objet du problème général des quadratures.[67]

Il considère alors le cas simple, auquel les cas plus composés peuvent toujours se ramener, où l'intégrale $Z = \int y dx$ prise entre les limites $x = 0$ et $x = a$ peut être regardée comme une aire située tout entière du même côté de la ligne des abscisses. Il décompose alors cette aire en une somme de trapèzes en divisant la base a de l'aire en n parties égales, puis en proposant deux manières différentes d'exprimer les aires des trapèzes constituants en fonction des ordonnées successives $y = F(x)$ attachées aux points de la subdivision, il obtient deux valeurs approchées différentes de cette même aire, à savoir $Z = aM$ et $Z = aN$. Mais pour faire connaître le degré d'approximation dont sont susceptibles ces valeurs approchées, Legendre fait voir ensuite "quels sont les termes qu'il faut ajouter aux quantités aM et aN pour avoir la vraie valeur de l'intégrale $\int F dx$ "[68], de manière à obtenir des formules exactes qui comprennent des suites

[63]Dans l'étude qu'il consacre aux courbes engendrées par un tel "mouvement de reptation", Prouhet (1854) donne les définitions suivantes : "*Définitions.* 1. Lorsqu'une courbe B se meut parallélement à elle-même et de manière toujours tangente à une courbe fixe A, on dit que B rampe sur A. 2. Le lieu décrit par un point quelconque du plan de la courbe B est appelé *reptoire* (reptoria). . . .4. L'angle formé par les normales menées aux extrémités d'un arc de courbe est nommé l'*amplitude* de cet arc. . . .5. Dans un mouvement de reptation, les divers points d'un arc de la courbe rampante sont amenés successivement au contact en divers points d'un arc d'égale amplitude de la courbe fixe. Ces deux arcs sont appelés *arcs générateurs* de l'arc correspondant de la reptoire" [48, p. 275-276].

[64][48, p. 274].

[65][48, p. 275].

[66]*Ibid.*

[67][42, p. 572].

[68][42, p. 576].

infinies de termes formés des coefficients différentiels de la fonction F. On obtiendra ainsi le degré d'approximation qu'on voudra, en prenant une subdivision suffisamment fine de la base, "ce qui permettra de réduire à un ou deux termes au plus, la correction qui doit être ajoutée à la valeur calculée de aM ou de aN"[69]. En appliquant cette technique de calcul aux intégrales complètes $E^1(c)$ et $F^1(c)$, Legendre montre alors que "l'effet de la correction est non seulement de déterminer le nombre de décimales exactes qui se trouvent dans la valeur de M ou dans celle de N, mais encore d'en ajouter cinq ou six de plus, ce qui donnera un résultat aussi exact qu'on voudra, en prenant une valeur convenable de n"[70]. Parvenu à ce stade, Legendre jette un pont entre sa méthode d'approximation et l'un des théorèmes que Bernoulli avait obtenus dans ses recherches sur le *motus reptorius*.

> §74. On trouve dans les Œuvres de Bernoulli [*il s'agit d'un extrait de lettre datée du 15 avril 1709*, *i.e.* [4]] un théorème pour calculer par approximation le rayon du cercle égal en circonférence à une ellipse donnée. Ce théorème fort remarquable conduit aux mêmes valeurs de M et N que donnent les précédentes formules, en prenant pour n un terme de la progression $2, 4, 8, 16, etc.$, ce qui permet de déterminer géométriquement toutes les quantités $\sqrt{1 - c^2 \sin^2 x}$ dont se composent les valeurs de M et de N.
>
> Jean Bernoulli n'a point donné la démonstration de son théorème ; il a indiqué seulement la construction géométrique qui en est la base et par laquelle on peut obtenir la valeur très approchée de la circonférence de toute courbe ovale, partagée comme l'ellipse, en quatre parties égales et semblables par deux axes rectangulaires. Cette construction s'exécute au moyen d'un mouvement continu que l'auteur appelle *motus reptorius*, et dont il détaille les propriétés.
>
> Nous avions pensé d'abord à donner ici l'analyse du théorème de Jean Bernoulli, considéré dans sa plus grande généralité ; mais nous avons bientôt reconnu que cette analyse deviendrait inutile, parce que le résultat auquel elle conduit n'est qu'un cas particulier d'une proposition générale qui sera démontrée ci-après d'une manière beaucoup plus simple.[71]

La géométrie est donc clairement subordonnée chez Legendre à la recherche de meilleures formules d'approximation, tant dans l'usage qu'il fait du théorème de Bernoulli que dans la proposition générale qu'il en tire. L'idée directrice qui conduit alors à la nouvelle formule d'approximation consiste à exploiter les ressources d'une méthode alternative de rectification de façon à exprimer d'abord la longueur d'arc AM d'une courbe arbitraire en fonction d'une certaine intégrale, pour ensuite renverser la perspective et obtenir un moyen d'exprimer toute intégrale proposée par un arc de courbe. Legendre commence ainsi par exprimer la longueur d'arc AM de la courbe en fonction de coordonnées polaires et non plus de coordonnées rectangulaires. "Cet arc [*écrit-il*], dont l'expression ordinaire est $\int dx\sqrt{1 - \frac{dy^2}{dx^2}}$, peut être exprimé par une autre formule qui jouit de quelques avantages particuliers et que nous allons faire connaître."[72] Si du point C, centre des coordonnées, on mène une perpendiculaire CZ à la tangente en M à la courbe AM, on peut en effet introduire de nouvelles variables $p = CZ$ et $\mu = \angle PCZ$, à la place des coordonnées rectangulaires $CP = x$ et $PM = y$ (cf. Fig. 6). À partir de l'expression $p = CZ = CM \cos(\mu - \angle MCP)$, on obtient par application des formules d'addition,

$$p = x \cos \mu + y \sin \mu,$$

[69] [42, p. 576].
[70] [42, p. 587].
[71] [42, p. 587-8].
[72] [42, p. 588].

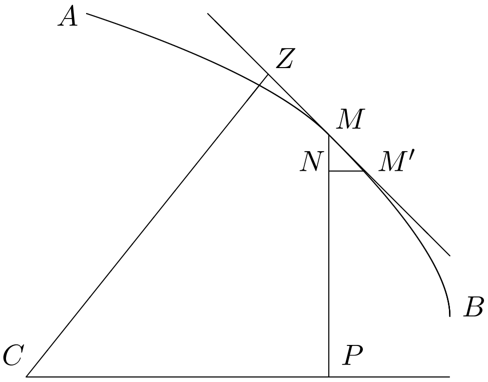

FIG. 6 – La rectification de Legendre

d'où l'on tire par différentiation et simplification[73]

$$\frac{dp}{d\mu} = y\cos\mu - x\sin\mu.$$

En rapprochant ces deux dernières équations, on obtient un système qui permet d'exprimer les coordonnées rectangulaires en fonction des coordonnées polaires, à savoir

$$x = p\cos\mu - \frac{dp}{d\mu}\sin\mu \tag{1}$$

$$y = p\sin\mu + \frac{dp}{d\mu}\cos\mu \tag{2}$$

dont on tire aisément une expression alternative de l'élément d'arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\mu.\left(p + \frac{d^2p}{d\mu^2}\right)$, puis par intégration, une expression nouvelle de la longueur d'arc

$$\operatorname{arc} AM = \int pd\mu + \frac{dp}{d\mu} - \frac{dp_0}{d\mu},$$

en supposant que $\frac{dp_0}{d\mu}$ est la valeur de $\frac{dp}{d\mu}$ au point A à partir duquel on mesure l'arc AM. On peut donc inversement exprimer l'intégrale en fonction de la longueur d'arc.

> Cette même formule servira à exprimer toute intégrale proposée par un arc de courbe. En effet, on peut supposer que cette intégrale est mise sous la forme $\int pd\mu$, dans laquelle μ représente un arc de cercle indéfini dont le rayon = 1, et p une fonction de l'arc μ, ou seulement des lignes trigonométriques $\sin\mu$ et $\cos\mu$. On aura donc l'intégrale cherchée
>
> $$\int pd\mu = s - \frac{dp}{d\mu} + \frac{dp_0}{d\mu}$$
>
> Quant à la courbe AMB qui correspond à cette équation, elle est facile à décrire au moyen des équations [*(1) et (2) ci-dessus*] dont les seconds membres sont des fonctions connues de l'angle μ ou des lignes trigonométriques qui dépendent de cet angle ; et si on élimine μ de ces deux équations, on aura, sous la forme ordinaire, l'équation entre les coordonnées x et y de la courbe dont un arc compris entre des limites données, servira à exprimer l'intégrale $\int pd\mu$.[74]

[73] L'expression obtenue par différentiation de $p = x\cos\mu + y\sin\mu$ se simplifie grâce aux relations $dx = -ds\sin\mu$ et $dy = ds\cos\mu$, lesquelles s'obtiennent à partir de la considération du triangle infinitésimal $MM'N$ ayant l'élément d'arc MM' pour hypoténuse (cf. Fig. 6). L'angle μ se retrouve dans ce triangle, de sorte qu'on ait $\sin\mu = \frac{NM'}{MM'} = \frac{dx}{ds}$ et $\cos\mu = \frac{MN}{MM'} = \frac{-dy}{ds}$.

[74] [42, p. 589]

Legendre applique alors successivement cette méthode générale aux trois espèces d'intégrales elliptiques. Dans le cas (1) où l'intégrale $Z = \int d\mu\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \mu}$, il retrouve le théorème de Fagnano sur les arcs d'ellipse dont la différence est rectifiable ([22]). Dans le cas (2) où l'intégrale $Z = \int \frac{d\mu}{\sqrt{1-c^2 \sin^2 \mu}}$, il retrouve la représentation de la fonction de première espèce de module quelconque au moyen d'un arc de la courbe du sixième degré augmenté d'un terme algébrique. Enfin (3), il conclut en appliquant cette même méthode à la fonction elliptique de troisième espèce $\Pi(n, c, \mu)$. La démarche de Legendre est donc parfaitement cohérente et conduit à retrouver des résultats particuliers à partir d'une même méthode générale permettant de traiter toutes les transcendantes elliptiques de manière uniforme. C'est dans ce contexte que Legendre mesure la fécondité de sa méthode générale en la rapportant au problème anciennement posé de la représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce de module quelconque par des arcs de courbes algébriques.

> §80. Il est très remarquable que notre nouvelle formule conduise si facilement à la solution d'un problème que nous avons regardé comme fort difficile, et qui paraît n'admettre aucune autre solution ; celui de trouver une courbe algébrique dont les arcs représentent généralement la fonction elliptique de première espèce $F(c, \mu)$.
>
> En général, on voit que toutes les fois que p sera une fonction algébrique de $\sin \mu$ et $\cos \mu$, la courbe dont les arcs servent à exprimer l'intégrale $\int p d\mu$, sera aussi une courbe algébrique. Ainsi la quadrature d'une courbe algébrique peut toujours se réduire à la rectification d'une autre courbe algébrique, proposition dont l'inverse seulement était connue.[75]

Quoiqu'il propose incidemment une interprétation géométrique de sa méthode générale en étudiant les relations entre les courbes rectifiables dont les arcs servent à exprimer l'intégrale proposée et les courbes algébriques dont elles sont les développées (§84), la préoccupation principale de Legendre demeure calculatoire, qu'il s'agisse de rapporter le calcul approché des quadratures à celui des longueurs d'arcs, ou le contraire, selon les besoins du calcul.

> §85. On voit, par ce qui précède, que toute quadrature proposée se réduit à la rectification d'un arc de courbe compris entre deux points donnés, ce qui peut contribuer à simplifier la construction géométrique d'un grand nombre de problèmes ; car en général on peut obtenir plus facilement une première valeur approchée d'un arc de courbe dont on a l'équation que celle d'une quadrature. Mais s'il s'agit de calculer avec beaucoup de précision la longueur d'un arc de courbe proposé, il conviendra de revenir aux formules du § I [*i.e. les formules qui expriment la valeur des intégrales*], pour déterminer l'arc s par le moyen de l'intégrale $\int p d\mu$.[76]

Le calcul numérique des intégrales elliptiques demeure ainsi la finalité première de Legendre et les constructions géométriques se subordonnent à l'élaboration de méthodes d'approximation.

3.4 Le primat de l'analyse

D'une façon générale, dans la perspective du mathématicien français, l'interprétation géométrique des propriétés des fonctions elliptiques ne donne pas lieu à des recherches géométriques qui s'émanciperaient de cette tutelle de l'analyse. Lorsqu'il fait observer, par exemple, dans les *Exercices* (1811), qu'on peut, d'après Lagrange[77], interpréter le théorème d'addition des fonctions de première espèce au moyen d'une application de la trigonométrie sphérique, il souligne nettement le primat de l'analyse sur la construction géométrique. Si l'on construit un triangle sphérique dont les côtés AB, AC, BC soient respectivement égaux aux amplitudes μ, ϕ, ψ,

[75] [42, p. 591]
[76] [42, p. 593]
[77] [35, p. 135], cf. le commentaire de Christian Houzel dans [29, p. 90].

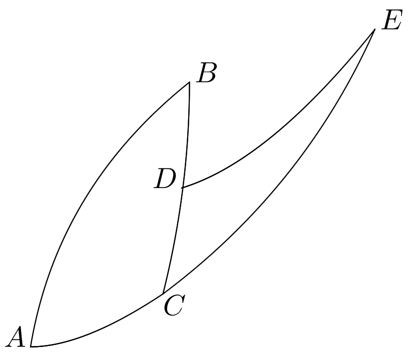

FIG. 7 – Les triangles sphériques

lesquelles satisfont l'équation transcendante $F(\phi)+F(\psi) = F(\mu)$ (cf. Fig. 7), alors le rapport du sinus de chaque angle au sinus du côté opposé, sera égal au module c de la fonction de première espèce considérée. En faisant ensuite $F(\mu) + F(\theta) = F(\nu)$, on envisage un nouveau triangle sphérique dont les propriétés suggèrent la construction suivante.

> Prolongez le côté AC vers E, faites $CD = \theta$; du point D et d'un intervalle $DE = \mu$, décrivez un arc qui rencontrera CE en E, et déterminera le second triangle CDE, dans lequel on aura $CE = \nu$, et le côté ν satisfera à l'équation $F(\nu) = F(\phi) + F(\psi) + F(\theta)$.
>
> Cette construction peut être continuée aussi loin que les limites des côtés des triangles sphériques peuvent le permettre, c'est-à-dire tant que le grand côté n'est pas plus grand qu'une demi-circonférence. Et il évident qu'on pourrait se servir de la même construction pour trouver successivement les angles ϕ_2, ϕ_3,ϕ_4, etc., tels qu'on eût $F(\phi_2) = 2F(\phi)$, $F(\phi_3) = 2F(\phi_2)$, etc. ce qui servirait à la multiplication de la fonction F. Mais, nous le répétons, ces constructions ne peuvent s'étendre que jusqu'aux limites des triangles sphériques, tandis que l'analyse ne connaît aucune borne.[78]

Pour pallier ce défaut des triangles sphériques, Jacobi devait par la suite proposer une construction géométrique plane de la multiplication des fonctions elliptiques de première espèce, qui s'appuie sur les propriétés des polygones inscrits et circonscrits à un cercle ([30],[31]). On peut en effet, à partir d'un point sur la circonférence d'un cercle donné, prolonger la tangente à un second cercle intérieur au premier, jusqu'au point où elle rencontre la circonférence extérieure, et répéter ainsi la construction de traverses successives de façon à obtenir un polygone inscrit dans le cercle extérieur et circonscrit au cercle intérieur. Jacobi montre qu'à une configuration donnée des deux cercles correspond une valeur du module c et une valeur de la fonction elliptique de première espèce correspondante $F(c, \phi)$. Puis, reprenant une proposition de Poncelet, il établit que si le polygone se ferme, le dernier sommet correspond à une amplitude de la fonction égale à un multiple de la valeur de départ. Dans la lettre à Legendre du 23 mai 1829 où il lui fait part de cette nouvelle construction, Jacobi souligne explicitement l'avantage qu'elle présente par rapport à celle de Lagrange.

> Les arcs de cercle peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point de limites, comme celle de Lagrange. On voit ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des fonctions elliptiques, comme celle des polygones réguliers des fonctions circulaires.[79]

Dans la réponse qu'il lui fait le 4 juin 1829, Legendre reconnaît que la construction de Jacobi est "fort ingénieuse"[80] et promet d'en faire mention dans un éventuel supplément au

[78] [40, p. 22]
[79] [44, p. 444]
[80] [44, p. 445].

Traité des fonctions elliptiques. Parmi ces suppléments réunis en un troisième tome, qui donnent l'occasion à l'auteur d'enrichir son ouvrage de certaines des découvertes récentes d'Abel et de Jacobi, le second est consacré à la construction géométrique de la multiplication. S'il reconnaît, après l'avoir exposée, qu'"on résout ainsi géométriquement un problème d'analyse qui présente d'assez grandes difficultés"[81], Legendre utilise toutefois cette construction géométrique pour élaborer une nouvelle méthode d'approximation qui ramène la valeur de la fonction aux tables des fonctions complètes.

> Nous remarquerons encore que la construction géométrique que nous avons donnée d'après M. Jacobi, qui en est l'inventeur, pourrait servir à trouver la valeur approchée de toute fonction $F(c, \phi)$, dont l'amplitude est donnée, en faisant connaître son rapport avec la fonction complète F^1c. En effet, si l'on continue la construction des différents côtés du polygone jusqu'à ce qu'on trouve dans la suite des sommets M_2, M_3, M_4, etc., un point M_n qui soit très près de l'une des extrémités du diamètre AB, il est visible qu'en comptant les circonvolutions du polygone, on saura combien il y a de demi-circonférences dans l'arc $2\phi_n$, terminé au point M_n. Soit m le nombre de ces demi-circonférences, on aura donc à très peu près $2\phi_n = m\pi$; par conséquent, $F(c, \phi_n)$ ou $nF(c, \phi) = mF^1c$ et $F(c, \phi) = \frac{m}{n}F^1c$, valeur plus facile à évaluer numériquement au moyen de notre table des fonctions complètes.[82]

Ainsi Legendre se conformait-il, dans ce cas comme dans d'autres, à l'intention annoncée, dès les premières pages du volume, de ne présenter les résultats obtenus par d'autres que "sous le point de vue le plus simple et le mieux coordonné à ses propres idées"[83]. À la différence de Chasles qui devait proposer par la suite ([8]), pour l'addition et la soustraction des fonctions elliptiques de première espèce, une construction analogue à celle que Jacobi avait donnée pour la multiplication, mais exempte toutefois des limitations qui affectaient celle de Lagrange, grâce à l'utilisation ingénieuse des propriétés des arcs de sections coniques dont la différence est rectifiable ([7]), Legendre se montre dans ces matières davantage préoccupé de tables numériques et de méthodes de calcul que de géométrie. Poncelet le reconnaît, fût-ce pour le déplorer, lorsqu'il fait allusion à cet égard à ce qu'il appelle "le silence de M. Legendre", pour autant que, dans le supplément consacré à la construction géométrique de Jacobi, "l'illustre et vénérable fondateur de cette nouvelle branche du calcul intégral, soucieux, avant tout, des progrès de la science qu'il cultivait avec une prédilection toute particulière, ne jugea pas à propos de mentionner la faible part de mérite qui pouvait revenir aux théories géométriques du *Traité des propriétés projectives des figures*"[84].

4 La fonction de première espèce et le damier analytique

Si les remarques qui précèdent témoignent du souci constant chez Legendre de subordonner la représentation géométrique des transcendantes elliptiques à leur caractérisation analytique, le projet d'ensemble guidant l'élaboration de la théorie des fonctions elliptiques consacre, plus explicitement encore, le primat de la fonction sur la courbe. L'une des idées directrices de Legendre le conduisait à ranger les diverses transcendantes dans un "ordre méthodique" en les soumettant à un algorithme spécifique fondé sur un système de transformations distinguées qui permette de passer des unes aux autres selon des rapports déterminés, de façon à en calculer les valeurs approchées. Le point de départ de la théorie consistait alors, comme il l'explique lui-même, à apercevoir tout le parti qu'on pouvait tirer à cette fin de la transformation de Landen.

[81] [43, p. 174].
[82] [43, p. 177]
[83] [43, p. vii].
[84] [47, p. 480].

Nous allons faire voir qu'on peut, par une loi très simple, former une infinité de fonctions elliptiques de première espèce, qui diffèrent les unes des autres tant par le module que par l'amplitude, mais qui ont la propriété fort remarquable d'être entre elles dans des rapports constants.[85]

Legendre considère les deux fonctions elliptiques de modules respectifs c et c'

$$F(c,\phi) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{1-c^2\sin^2\phi}} \quad \text{et} \quad F(c',\phi') = \int \frac{d\phi'}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\phi'}},$$

et montre que si modules et amplitudes sont liés par certaines relations déterminées, alors les intégrales elliptiques se correspondent par transformation, en sorte que si les deux premières conditions ci-dessous sont vérifiées, la troisième l'est aussi

$$c' = \tfrac{2\sqrt{c}}{1+c}, \quad \sin(2\phi'-\phi) = c\sin\phi$$

$$F(c',\phi') = \tfrac{1+c}{2}F(c,\phi).$$

Legendre remarque qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter une constante pour égaliser les intégrales et que le rapport est donc constant, quelle que soit la valeur variable qu'elles prennent conjointement, ce qui fait tout le prix de la transformation de Landen.

Nous n'ajoutons point de constante, parce que les amplitudes s'évanouissent en même temps. On voit donc par ce résultat que les fonctions $F(c',\phi')$ et $F(c,\phi)$ seront entre elles dans un rapport constant, quelles que soient les amplitudes ϕ et ϕ' pourvu qu'elles soient liées entre elles par l'équation $\sin(2\phi'-\phi) = c\sin\phi$.[86]

Legendre montre alors qu'on peut construire une échelle de modules par itération de transformations de ce type :

Concevons maintenant qu'à partir du terme donné c, on forme une suite infinie de modules c, c', c'', c''', etc. d'après la loi

$$c' = \frac{2\sqrt{c}}{1+c},\ c'' = \frac{2\sqrt{c'}}{1+c'},\ c''' = \frac{2\sqrt{c''}}{1+c''},\ etc.$$

Cette suite de modules qui est continuellement croissante, aura pour limite l'unité, et atteindra sensiblement cette limite au bout d'un assez petit nombre de termes. (...)

Soit ensuite ϕ, ϕ', ϕ'', ϕ''', etc. la série des amplitudes qui se déduisent chacune de la précédente par les formules

$$\begin{aligned} \sin(2\phi'-\phi) &= c\sin\phi, \\ \sin(2\phi''-\phi') &= c'\sin\phi', \\ \sin(2\phi'''-\phi'') &= c''\sin\phi'', \\ & etc. \end{aligned}$$

on formera de cette manière une suite infinie de fonctions de première espèce $F(c,\phi)$, $F(c',\phi')$, $F(c'',\phi'')$, $F(c''',\phi''')$, etc. entre lesquelles on aura les équations

$$\begin{aligned} F(c',\phi') &= \frac{1+c}{2}F(c,\phi), \\ F(c'',\phi'') = \frac{1+c'}{2}F(c',\phi') &= \frac{1+c}{2}\frac{1+c'}{2}F(c,\phi), \\ F(c''',\phi''') = \frac{1+c''}{2}F(c'',\phi'') &= \frac{1+c}{2}\frac{1+c'}{2}\frac{1+c''}{2}F(c,\phi), \\ & etc. \end{aligned}$$

[85] [40, §58, p. 81], [41, chap. XVII, §. 61. p. 79].
[86] [40, §58, p. 82], [41, chap. XVII, §. 61. p. 80].

d'où il suit que deux quelconques de ces fonctions sont toujours entre elles dans un rapport constant pour toutes les valeurs des amplitudes correspondantes.[87]

La transformation de Landen permet ainsi de constituer une première échelle de modules grâce à laquelle n'importe quelle fonction de première espèce peut être ramenée à une autre de module arbitrairement petit ou arbitrairement grand, dans les limites de l'intervalle compris entre zéro et l'unité. La série infinie des modules c, comme celle des compléments de modules $b = 1 - c$, prolongée dans un sens comme dans l'autre, tend en effet d'un côté vers la valeur 1 de l'autre vers la valeur 0. Les échelles de modules peuvent alors être mises à profit pour l'élaboration de méthodes d'approximation perfectionnées.

Entre l'édition des *Exercices de calcul intégral* et celle du *Traité des Fonctions Elliptiques*, Legendre découvre une autre transformation remarquable qui permet d'élaborer une seconde échelle de modules[88], laquelle complète la première de manière à former un système à deux dimensions que Legendre représente sous la forme d'une table ou d'un damier.

> En vertu de la première échelle de modules toute fonction de première espèce $F(c, \phi)$, dont le module et l'amplitude sont donnés, peut être transformée en une autre dont le module sera pris à volonté dans la suite infinie $\ldots, c^{oo}c^{o}, c, c', c'', \ldots$, formée suivant une loi connue d'après le module primitif c. En vertu de la seconde échelle des modules, la même fonction peut être transformée semblablement, de sorte que son module soit un terme quelconque de la suite $\ldots, c_{oo}, c_{o}, c, c_{,}, c_{,,}, \ldots$ formée suivant une autre loi d'après le même module primitif c ; et nous avons remarqué que ces deux suites ne peuvent avoir aucun autre terme commun.
>
> Imaginons que ces deux lignes de modules soient disposées à angles droits, leur point d'intersection étant le lieu du module primitif c ; et supposons que les différents termes de chaque suite soient placés à des intervalles égaux sur leur ligne respective. Si l'on considère un terme quelconque de la première ligne (que nous supposerons horizontale) par exemple c'', on pourra par le point correspondant faire passer une ligne verticale, dans laquelle on placera, toujours à des intervalles égaux, les différents termes de la série calculée suivant la loi de la seconde échelle, d'après le module primitif c''. De cette construction répétée pour chaque terme de la suite horizontale, résulte le tableau suivant [*cf. Fig. 8*], formant une sorte de damier dont les dimensions sont indéfinies et qui contient dans ses cases tous les modules déduits du module primitif c.[89]

On montre effet que les transformations opérées successivement selon la première et la seconde des échelles de modules conduisent au même résultat, quel que soit l'ordre dans lequel elles sont effectuées. En partant d'un module déterminé c, il équivalent de passer au module c''' par les formules de la première échelle puis au module c'''_{oo} par celles de la seconde échelle, ou bien de passer d'abord au module c_{oo}, puis au module c'''_{oo}.

> (...) cette seconde échelle combinée avec la première donne lieu à la formation d'une sorte de damier analytique, dont les cases correspondent aux transformations infiniment multipliées que peut subir la plus simple des fonctions elliptiques, sans cesser d'être semblable à elle-même.[90]

Dans un autre passage du *Traité* où il envisage les propriétés de la lemniscate à la lumière de celles de la fonction de première espèce, Legendre recourt à des formulations analogues pour caractériser l'identité de la fonction sous-jacente aux diverses transcendantes en lesquelles elle est supposée s'exprimer.

> [*Fagnano*] démontra en même temps que la courbe nommée *lemniscate* jouit de cette singulière propriété, que ses arcs peuvent être multipliés ou divisés algébriquement, comme

[87] [40, §59, p. 82-83], [41, chap. XVII, §. 62. p. 80].

[88] [41, chap. XXXI]. C. G. Jacobi devait par la suite montrer, à partir de principes différents, qu'on peut associer une échelle de modules à chaque nombre premier, et que les deux échelles de modules de Legendre correspondent respectivement aux nombres 2 et 3.

[89] [41, Addition au chap. XXXI, §261, p. 325-326].

[90] [41, Avertissement, p. v-vi].

les arcs de cercle, quoique chacun d'eux soit une transcendante d'un ordre supérieur ; c'est le premier exemple où l'on ait montré l'usage de la plus simple des fonctions elliptiques, qui est en quelque sorte la régulatrice de toutes les autres et qui peut se transformer d'une infinité de manières sans cesser d'être semblable à elle-même.[91]

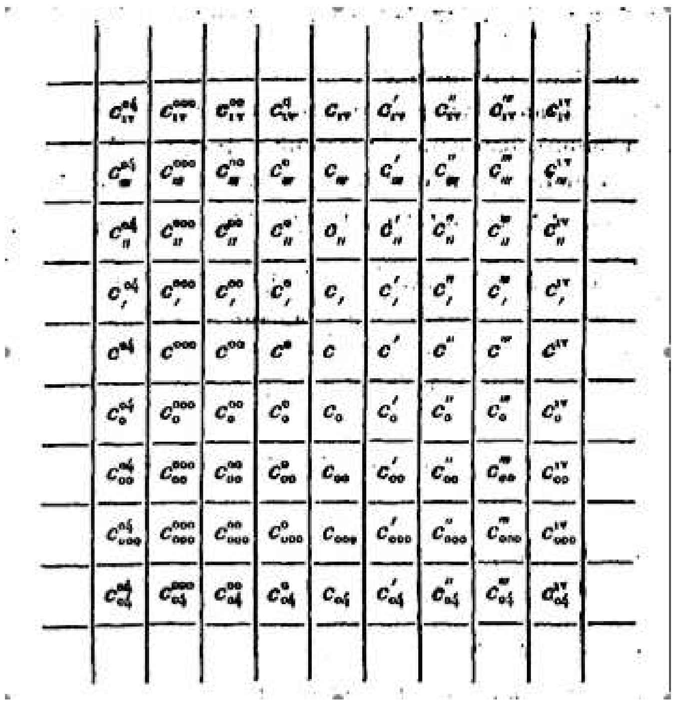

FIG. 8 – Le damier analytique de Legendre

Dans la perspective du mathématicien français, les transcendantes elliptiques prennent donc le pas sur les arcs de courbes comme les entités propres dont traite l'analyse et dont les courbes fournissent seulement une représentation par ajustement des paramètres. Les formulations que Legendre choisit d'employer dans ce contexte et qu'il reprend en plusieurs occurrences, témoignent d'une volonté explicite de reconnaître l'émergence d'un nouvel objet, la fonction de première espèce, laquelle reparaît de case en case dans l'ensemble du damier analytique, toujours semblable à elle-même à travers ses multiples avatars. Il est à cet égard caractéristique qu'ainsi soucieux de faire droit à la fonction, Legendre se réfère à la formule même à laquelle Jakob Bernoulli avait eu recours, dans un autre contexte, à propos de la spirale logarithmique.

> C'est sans doute un résultat très remarquable que cette multitude infinie de transformations qu'on peut faire subir à la même fonction $F(c, \phi)$, sans changer sa nature et en conservant le même rapport entre la fonction et sa transformée pour toutes les valeurs de l'amplitude ; on chercherait vainement dans la variété infinie des transcendantes un second exemple d'une fonction qui se reproduirait sous tant de formes différentes et à laquelle on pourrait appliquer plus justement qu'à la spirale logarithmique, la devise que lui avait donnée Jacques Bernoulli : *Mutata eadem resurgit*.[92]

Bernoulli avait en effet remarqué que la développée de la spirale logarithmique, ainsi que ses caustiques par réflexion et par réfraction, si l'on place une source lumineuse dans l'œil de la spirale, sont elles aussi des spirales logarithmiques[93]. Cette propriété "aussi singulière qu'étonnante"

[91] [41, p. 2].
[92] [41, Addition au chap. XXXI, §261, p. 326-327].
[93] Cf. [46, p. 454].

[*tam singularem tamque admirabilem*] l'incite, dans le dernier paragraphe de son mémoire de 1692, à souhaiter, à l'instar d'Archimède, faire de la devise *Eadem numero mutata resurget* son épitaphe[94], exprimant ainsi "son espoir en la résurrection de la chair"[95]. Ces relations de similitude et d'identité dont la lemniscate devient l'emblème aux yeux de Bernoulli, renvoient explicitement sous sa plume au mystère de la Trinité. Ainsi André Weil souligne-t-il les fortes connotations théologiques que comporte la formule de Bernoulli, comme en témoigne, dans le passage mentionné, l'usage du mot grec ὁμοούσιος "[*à savoir*] "de même essence" (consubstantialis), [*qui est*] le mot qui désigne dans le Credo, la relation entre les trois personnes de la Trinité, par opposition au mot (déclaré hérétique) ὁμοιούσιος, "d'essence semblable"."[96] On remarquera que cette filiation textuelle qui n'est pas sans évoquer la loi des trois états d'Auguste Comte, fait succéder la métaphysique à la théologie et la science à la métaphysique, par un processus de laïcisation progressive. Si à l'évidence, dans l'usage que Legendre fait de la citation de Bernoulli, toute signification théologique a disparu, la référence à une "nature" de la fonction qui serait comme telle distincte des transcendantes particulières issues de la considération des courbes, marque toutefois de manière significative le primat de l'analyse sur la géométrie.

Références

[1] A. Allégret – « Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbes », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* **II (2)** (1873), p. 149–200.

[2] E. Barbin et R. Guitart – « Algèbre des fonctions elliptiques et géométrie des ovales cartésiennes », *Revue d'histoire des mathématiques* **7** (2001), p. 161–205.

[3] J. Bernoulli – « Lineae cycloidales, evolutae, antevolutae, causticae, anticausticae, pericausticae. earum usus et simplex relatio ad se invicem. spira mirabilis », *Acta Eruditorum* (1692), pRepris dans *Die Werke von Jakob Bernoulli*, éd. par David Speiser, et commentée par André Weil et Martin Mattmüller, Basel, Birkhäuser, 1999, tome 5, Op. XLIX, p. 62-74.

[4] J. Bernoulli – « Excerptum ex epistola bernoulliana data basilea 15. april. 1709 », (1709), Repris dans [6, t. I, p. 447-448].

[5] — , « Methodus commoda naturalis reducendi quadraturas transcendentes cujusvis gradus ad longitudines curvarum algebraicarum », *Acta Eruditorum* (1724), no. IV, p. 356–366, Repris dans [6, t. II, p. 582-592].

[6] — , *Opera omnia*, vol. I-IV, Lausanne, 1742.

[7] M. Chasles – « Propriétés générales des arcs d'une section conique, dont la différence est rectifiable », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris* **17** (1843), p. 838–844.

[94] Cf. [3, p. 69] : "Cum autem ob proprietatem tam singularem tamque admirabilem mire mihi placeat spira haec mirabilis, sic ut ejus contemplatione satiari vix queam ; cogitavi, illam ad varias res symbolice repraesentandas non inconcinne adhiberi posse. Quniam enim semper sibi similem & eandem spiram gignit, utcunque volvatur, evolvatur, radiet ; hinc poterit esse vel sobolis parentibus per omnia similis Emblema : *Simillima Filia Matri :* vel (si rem aeternae generationis Filii, qui Patris veluti Imago, & ab illo ut Lumen a Lumine emanans, eidem ὁμοούσιος existit, qualiscunque adumbratio. Aut, si mavis, quia Curva nostra mirabilis in ipsa mutatione semper sibi constantissime manet similis & numero eadem, poterit esse vel fortitudinis & constantiae in adversitatibus ; vel etiam Carnis nostrae post varias alterationes, & tandem ipsam quoque mortem, ejusdem numero resurrecturae symbolum ; adeo quidem, ut si *Archimedem* imitandi hodenium consuetudo obtineret, libenter Spiram hanc tumulo meo juberem incidi cum Epigraphe : *Eadem numero mutata resurget.*"

[95] Cf. le commentaire de Martin Mattmüller, [3, Note I, p. 339].

[96] Note d'André Weil, cf. [3, note 13, p. 69].

[8] — , « Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques - propriétés nouvelles des sections coniques », *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences de Paris* **19** (1844), p. 1239–1261.

[9] — , *Rapport sur les progrès de la géométrie*, Imprimerie nationale, Paris, 1870.

[10] L. Euler – « De integratione æquationis differentialis $\frac{mdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{ndy}{\sqrt{1-y^4}}$ », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **6** ((1756/7) 1761), p. 37–57, repris dans [20, E 251. p. 58-79].

[11] — , « Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **6** ((1756/7) 1761), p. 58–84, repris dans [20, E 252. p. 80-107].

[12] — , « Specimen novæmethodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **7** ((1758/9) 1761), p. 83–127, repris dans [20, E 263. p. 108-152].

[13] — , « De binis curvis algebraicis inveniendis, quarum arcus indefinite inter se aequales », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **4** ((1786) 1789a), p. 96–103, repris dans [21, E 633. p. 142-150].

[14] — , « De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **5** ((1787) 1789b), p. 59–70, repris dans [21, E 638. p. 151-162].

[15] — , « De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **5** ((1787) 1789c), p. 71–85, repris dans [21, E 639. p. 163-179].

[16] — , « De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudino indefinita arcui elliptico aequatur », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **11** ((1830a), p. 95–99, repris dans [21, E 780. p. 241-245].

[17] — , « De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudino arcui parabolico aequatur », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **11** ((1830b), p. 100–101, repris dans [21, E 781. p. 246-247].

[18] — , « De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **11** ((1830c), p. 102–113, repris dans [21, E 782. p. 248-261].

[19] — , « De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat », *Novi comm. acad. sci. Petrop.* **11** ((1830d), p. 114–124, repris dans [21, E 783. p. 262-273].

[20] — , *Opera omnia.* ser. i, vol. 20. C*ommentationes analyticæ ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes*, vol. 1, Teubner, Leipzig, 1912, édition établie par A. Krazer.

[21] — , *Opera omnia.* ser. i, vol. 21. C*ommentationes analyticæ ad theoriam integralium ellipticorum pertinentes*, vol. 2, Teubner, Leipzig, 1913, édition établie par A. Krazer.

[22] G. C. Fagnano – « Teorema da cui si deduce una nuova misura degli archi elittici, iperbolici e cicloidali », *Giornale de' Letterati d'Italia* **26** (1716), p. 266 et suivantes, repris dans [25, II, pp. 336-342].

[23] — , « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma I », *Giornale de' Letterati d'Italia* **29** (1718), p. 258 et suivantes, repris dans [25, II, pp. 343-348].

[24] — , « Metodo per misurare la lemniscata. Schediasma II », *Giornale de' Letterati d'Italia* **30** (1718), p. 87 et suivantes, repris dans [25, II, pp. 356-368].

[25] — , *Produzioni matematiche*, Pesaro, 1750, 2 vols, réédition dans [26, vol. I & II].

[26] — , *Opere matematiche del marchese* Giulio Carlo *de'* T*oschi e* S*ant'*O*nofreo di* F*agnano*, Milan-Rome-Naples, 1911-1912, Volterra, V., Loria, G. et Gambioli, D. (éds). 3 vol.

[27] C. Gilain – « Introduction générale », (2007), dans *Œuvres complètes.* Série I. Traités et mémoires mathématiques, 1736-1756. Vol. 4a. Textes de mathématiques pures (1745-1752), édition établie par C. Gilain, pp. xiii-cvii.

[28] J. Hermann – « Solutio propria duorum problematum geometricorum », *Acta Eruditorum* (1723), no. IV, p. 171–179.

[29] C. Houzel – *La géométrie algébrique. Recherches historiques*, Blanchard, Paris, 2002.

[30] C. G. J. Jacobi – « Ueber die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementargeometrie », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **3** (1828), p. 376–389, repris dans [32, I, p. 279-293].

[31] — , « Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la géométrie élémentaire : trouver la relation entre la distance des centres de deux cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier et dont l'autre est inscrit à ce même polygone », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **X** (1845), p. 435–44, Traduit de l'allemand par M. Terquem.

[32] — , *Gesammelte Werke*, Reimer, Berlin, 1881-1891, éd. C. W. Borchardt.

[33] A. Krazer – « Vorwort des Herausgebers », (1912), dans [20, p. vii-x].

[34] J.-L. Lagrange – « Sur une nouvelle méthode de calcul intégral, pour les différentielles affectées d'un radical carré sous lequel la variable ne passe pas le quatrième degré », *Mémoires de l'Académie royale des sciences de Turin* **II** (1784-1785/1786), *Œuvres*, II, pp. 253-312.

[35] — , *Théorie des fonctions analytiques*, 1797, dans [36, t. IX, p. 13-413].

[36] — , *Œuvres de Lagrange*, vol. I-XIV, Gauthier-Villars, Paris, 1867-1892, publiées par les soins de J.-A. Serret et G. Darboux.

[37] A.-M. Legendre – « Mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (1786a), p. 616–643.

[38] — , « Second mémoire sur les intégrations par arcs d'ellipse, et sur la comparaison de ces arcs », *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* (1786b), p. 644–683.

[39] — , *Mémoire sur les transcendantes elliptiques*, Du Pont & Firmin Didot, Paris, 1793.

[40] A. M. Legendre – *Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures*, vol. 1, Courcier, Paris, 1811.

[41] — , *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, vol. I, Huzard-Courcier, Paris, 1825.

[42] — , *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, vol. II, Huzard-Courcier, Paris, 1826.

[43] — , *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes avec des tables pour en faciliter le calcul numérique*, vol. III, Huzard-Courcier, Paris, 1828.

[44] A. M. Legendre et C. G. J. Jacobi – « Correspondance mathématique », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **80** (1875), p. 205–279, Reproduite dans [32, I, p. 390-461].

[45] J. Liouville – « Rapport sur le mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques de J.-A. Serret », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **X** (1845), p. 290–293.

[46] G. Loria – *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte*, Teubner, Leipzig, 1902.

[47] J.-V. Poncelet – *Applications d'analyse et de géométrie*, Mallet-Bachelet, Paris, 1862.

[48] Prouhet – « Étude géométrique sur les courbes engendrées par le mouvement de reptation, pour servir d'éclaircissement à plusieurs passages des œuvres de jean bernoulli », *Nouvelles annales de mathématiques* **I (13)** (1854), p. 274–282.

[49] W. Roberts – « Sur une représentation géométrique des fonctions elliptiques de première espèce », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **VIII** (1843), p. 263–264.

[50] — , « Application de la théorie des transcendantes elliptiques à la rectification d'une classe étendue de courbes planes », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **X** (1845a), p. 177–193.

[51] — , « Mémoire sur quelques propriétés géométriques relatives aux fonctions elliptiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **X** (1845b), p. 297–315.

[52] M. Roche – « Questions résolues », *Annales de mathématiques pures et appliquées* **14** (1823-1824), p. 207–215.

[53] J. A. Serret – « Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **VII** (1842), p. 114–119.

[54] — , « Note sur les fonctions elliptiques de première espèce », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **VIII** (1843a), p. 145–154.

[55] — , « Propriétés géométriques relatives à la théorie des fonctions elliptiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **VIII** (1843b), p. 495–501.

[56] — , « Mémoire sur la représentation géométrique des fonctions elliptiques et ultra-elliptiques », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **X** (1845), p. 257–285.

[57] — , « Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de première classe », *Journal de mathématiques pures et appliquées* **XI** (1846), p. 89–95.

[58] — , *Cours de calcul différentiel et intégral*, vol. II, Gauthier-Villars, Paris, 1868.

[59] W. H. Talbot – « Questions résolues. Addition à l'article de la page 207 du présent volume », *Annales de mathématiques pures et appliquées* **14** (1823-1824), p. 380–381.

[60] B. Tortolini – « Mémoire sur quelques applications de la méthode inverse des tangentes », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **26** (1843), p. 288–310.

[61] — , « Nota sopra l'equazione di una curva del sesto ordine, che s'incontra in un probleme riguardante l'ellissi », *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **33** (1846), p. 90–94.

[62] — , « Ricerche geometriche sulle funzioni ellittiche », *Annali di matematica pura ed applicata* **3** (1860), p. 179–182.