LA PLACE DE L'EXPERIENCE DANS LA CONSTRUCTION DE MATHEMATIQUES EN CLASSE

Joël Briand

▶ To cite this version:

Joël Briand. LA PLACE DE L'EXPERIENCE DANS LA CONSTRUCTION DE MATHEMATIQUES EN CLASSE. Petit x, 2007, 1 (75), pp.7-33. halshs-00494928

HAL Id: halshs-00494928

https://shs.hal.science/halshs-00494928

Submitted on 24 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LA PLACE DE L'EXPERIENCE DANS LA CONSTRUCTION DE MATHEMATIQUES EN CLASSE*

Joël Briand
IUFM d'Aquitaine
Laboratoire DAESL** Université Bordeaux 2

Résumé :. Dans cet article, nous reprenons l'observation d'élèves dans une situation expérimentale en statistique afin de réinterroger le rôle de l'expérience dans des domaines plus familiers tels la construction de fonctions, des premiers nombres, etc. et de s'interroger sur des modes de raisonnements. Nous nous attardons sur le rôle, déterminant selon nous, du professeur dans l'accompagnement de l'élève à s'aventurer ailleurs que dans le milieu matériel. Les outils mis à notre disposition en didactique des mathématiques nous permettent de construire des expérimentations tout en prenant en compte la spécificité des mathématiques. Nous ferons un bref parallèle avec les sciences expérimentales.

Mots clés : situations, milieux, expérience, expérimentation, modèle, inférence, rétroactions.

1. Introduction

Notre réflexion va sembler bien naïve. Elle découle d'un constat effectué depuis de nombreuses années à propos de l'enseignement des mathématiques, de l'idée que s'en font les acteurs principaux (les professeurs) et ce qui est dit en formation des enseignants.

Dans l'organisation de l'enseignement, du côté des sciences, il y a les mathématiques d'une part, et les sciences expérimentales d'autre part. Nous ne nous intéresserons pas ici aux origines de cette séparation[1]. Nous pouvons toutefois noter que la réorganisation des savoirs et de leur présentation scolaire liée aux « mathématiques modernes » des années 60 a largement contribué à cette séparation. Elle signe plus ou moins consciemment l'impossibilité de faire apparaître les mathématiques comme outil d'intervention sur le réel. « *En quelques décennies, l'idée a été expulsée de la mathématique scolaire qu'elle est un outil pour penser le réel en ces trois grands*

*Je remercie très vivement F.CONNE qui, par des notes de lecture précises et riches et des remarques d'importance, a permis que cet article soit largement remanié.

** Equipe de Didactique et Anthropologie des Enseignement Scientifiques et Langagiers.

[1] Ce qui fait la spécificité de la didactique n'est pas l'encrage disciplinaire actuel. La question de la spécificité est d'ordre épistémologique : savoir ce qui s'exporte d'un domaine de savoirs vers un autre, quels sont les pontages ? Pour des raisons historiques la question est très ouverte. Il suffit, pour cela, de consulter la table de matières d'ouvrages de mathématiques du XVIII^{ème} siècle.

domaines (le spatial, le numérique, le variable) » [CHEVALLARD Y. 2004]. De plus, le domaine du variable qui génère les statistiques et les probabilités est traité « à part ».

L'étude de la question de la dimension expérimentale en mathématiques, si elle n'est pas nouvelle[2] a trop peu pris en compte ce domaine. Il nous paraît utile de réinterroger cette question en nous servant de ce que nous avons déjà pu observer dans le domaine particulier de la variabilité.

En formation de professeurs, que ce soit les professeurs des écoles comme les professeurs des lycées collèges, le modèle spontané d'enseignement n'est pas celui de la mise en place de milieux[3] propices à la construction par l'élève de nouveaux savoirs. *« On entretient un commerce purement théorique et non pas expérimental avec les constructions mathématiques les plus essentielles.* » [CHEVALLARD Y. 2004]. Or l'absence d'expérience affecte le sens de la théorie, fait obstacle à l'émergence de *« concepts authentiques »* [DESCAVES 1992] c'est à dire ceux issus de l'expérience.

Pour relancer l'intérêt de l'enseignement des mathématiques les enseignants sont invités à se rapprocher d'actions comme celle de la « main à la pâte », sans que les outils théoriques de la didactique des mathématiques soient convoqués, comme si cela allait à nouveau de soi que « faire des mathématiques », c'était « faire des expériences » au sens le plus commun du terme, un peu comme il existait autrefois des exercices de « physique amusante ». Certes, il faudrait explorer un peu plus ces tendances actuelles et faire des distinctions selon les actions envisagées. Par exemple, T. DIAS [DIAS & DURAND-GUERRIER 2004] note: *« on peut remarquer une différence notable entre l'expérience « Math-en-Jeans » qui va jusqu'à concevoir que les savoirs en jeu ne sont pas préexistants à la recherche, avec la position des savoirs scientifiques "déjà là" dans les séquences modulaires de la démarche "Main à la pâte".* ».

Quelle est donc la place de l'expérience dans l'activité mathématique ou plutôt qu'est ce qu'une expérience dans une activité mathématique ? Pour relancer l'intérêt des mathématiques, pour « faire des mathématiques », le recours à des expériences est une voie plutôt motivante.

Nous allons tenter de montrer, à l'aide de quelques exemples, que la théorie des situations permet d'étudier le statut de l'expérience en mathématiques. En mathématiques une conjecture est soumise habituellement au procès d'une démonstration. Mais il y a des formes de raisonnement qui pourraient sans doute avoir plus de place quelles en ont à l'heure actuelle, en particulier celles qui consistent à relier un certain nombre de faits constatés en une loi générale, permettant certaines formes de

[2] De nombreuses tentatives de rapprochement des mathématiques avec « l'expérience » avaient été faites antérieurement. En 1957, il fut en effet question d'une introduction généralisée de Travaux Pratiques dans les classes de Sixième et de Cinquième. Les extraits des Instructions officielles de l'époque témoignent d'une réponse positive à la question de la dimension expérimentale en mathématiques : "Observation et expérimentation : s'agit-il vraiment d'aligner les mathématiques sur les autres disciplines ? Il n'est pas douteux qu'au départ, dans l'élaboration de toutes les sciences, les démarches intellectuelles sont de même ordre ; une discrimination intervient après, lorsque le mathématicien ayant créé des êtres de raison, va s'efforcer d'en étudier les propriétés. Mais son travail n'a de valeur profonde que si sa construction, toute abstraite qu'elle soit, prend solidement appui sur le réel, si elle est capable de le rejoindre et de s'y adapter dans une large mesure." [ASSUDE, 2002] citée par T.DIAS.

[3] Pour une bonne compréhension du concept de milieu consulter le site http://www-leibniz.imag.fr/EEDDM11/Theme2/Texte3.html (Coulange L et Bessot A.)

présomptions, elles-mêmes à l'origine de déductions puis de démonstrations. Pour mieux se rendre compte des modèles implicites des élèves, souvent masqués par les savoirs trop élaborés ou naturalisés des enseignants, nous commencerons par une étude effectuée en lycée en statistiques qui est une reprise d'un travail effectué à l'école primaire. Les conclusions que nous en tirerons nous permettrons d'interpréter différemment d'autres situations.

Nous allons reprendre le rôle déterminant, et nous semble-t-il trop peu étudié, du professeur comme accompagnateur dans l'aventure des expériences, cette fois dans un milieu de référence fait aussi de signes : construire un milieu optimal pour que, dans un premier temps, les élèves tentent d'anticiper des faits expérimentaux ou de prévoir leur forte probabilité de non réalisation, d'étudier ces faits de façon empirique, passage obligé pour que le professeur organise un milieu propice à une autre activité, mathématique celle-là, celle de l'élaboration d'un langage ayant un fonctionnement progressivement plus autonome.

Nous aborderons en quoi la mobilisation actuelle sur les compétences peut constituer un frein à cette préoccupation de donner les moyens au professeur de construire des expériences en mathématiques.

Nous ferons aussi une comparaison rapide avec les sciences expérimentales afin de nous servir des préoccupations des disciplines voisines pour mieux visiter la notre.

Mathématiques et domaines d'expériences

La tradition est d'affirmer que l'expérience est la rencontre du réel par le sujet. Elle informe celui-ci aux deux sens du terme : elle l'informe sur le réel (" faire l'expérience ") et le forme au réel (" avoir de l'expérience "). Mais le sujet est-il passif ou actif dans l' « expérience » ? L'étymologie laisse un flou car le verbe latin *experir* signifie à la fois " éprouver " (avec un sens passif : éprouver une sensation de froid) et " essayer " (avec un sens actif cette fois : essayer un nouveau matériel). Mais, « éprouver » peut prendre aussi le sens d'essayer dans : « éprouver un nouveau matériel ». Si deux sens il y a, les mots pour les décrire se mêlent par le jeu des connotations.

Il semble donc que la dimension exploratoire, sensible, de l'expérimentation précède ou cohabite avec l'expérience provoquée en vue de valider un ou des résultats attendus ou à contester. Cette dimension exploratoire de l'expérimentation nous semble incontournable. Il y aurait donc toujours de l'expérience sensible, même si, à terme, le sujet, développe des bribes de conjectures qui, entre elles, commencent à acquérir de la consistance, indépendamment (ou presque) de l'expérience sensible[4]. *« Pour savoir si trois médiatrices d'un triangle sont concourantes, je peux procéder à une expérience graphique sur un triangle tracé sur une feuille de papier. Si j'ai bâti une théorie de l'espace dans laquelle je peux déduire que les médiatrices d'un triangle concourent, je n'ai plus besoin de le vérifier expérimentalement pour tous les triangles. Mais si on ne pratique pas la preuve expérimentale, on n'a pas une idée juste sur ce qu'est une preuve théorique par déduction à l'intérieur d'une théorie. Dans une mathématisation*

[4] Bachelard a longuement décrit les difficultés de compréhension en physique, les obstacles constitués, que l'on rencontre à chaque fois que l'on reste accroché à l'expérience sensible.

complète, on s'assure qu'un fait est vrai sur une base expérimentale puis on s'assure que, dans la théorie que l'on a bâtie par ailleurs, on peut déduire le fait en question. Cela mobilise toute une dialectique. » [CHEVALLARD 2004].

La méthode scientifique aboutie exige certes l'emploi de l'expérience afin de vérifier les hypothèses avancées. Mais les mathématiques vont ouvrir des milieux expérimentaux qui ne se limiteront pas aux milieux matériels. Doit on dire : « l'expérience est bien le juge de paix au verdict duquel doivent se soumettre une conjecture » ? [BRIAND 2005]. Une conjecture est un terme propre aux mathématiques, en sciences on dirait hypothèse ou théorie. Or en mathématiques une conjecture est finalement soumise au procès d'une démonstration. *« Elle n'est [donc] pas jugée par l'expérience à moins de considérer la démonstration elle-même comme une expérience.* » [CONNE F. 2007]. La remise en cause est d'abord une affaire de raisonnement. Le lien avec l'aspect opératoire de l'expérimentation – et pas de la simple expérience- est que la remise en cause suppose un raisonnement exploratoire théorique qui s'encre dans l'expérimental. En mathématiques, ce qui nécessite un raisonnement expérimental n'est pas nécessairement un travail de nature expérimental.

Lorsqu'une réponse à un problème n'apparaît pas immédiatement à un sujet dans un environnement donné et que celui-ci perçoit, qu'à terme, ce problème se reposera, alors il met en œuvre des connaissances en recherchant les données dont il imagine qu'elles ont un lien direct avec la question. Cette étape est donc soumise à ses a priori, à ses connaissances antérieures, à ses méthodes, et aux moyens dont il dispose. Le cheminement va le conduire à faire le tri entre les événements erratiques et des régularités naissantes. C'est là qu'interviennent des outils (signes, schémas, organisations), qui permettent ce filtrage dans l'action et une construction avec un minimum de subjectivité en un minimum de temps. Cette construction sémiotique peut s'interpréter comme un modèle naissant, mais il nous semble qu'à la différence de l'ingénieur qui travaille dans un domaine familier, un élève mis devant un problème pour lequel il ne dispose pas de solution experte, va avoir, le plus souvent, à construire simultanément les outils d'un modèle par homomorphisme (jeux réglés entre les objets et les signes) et le modèle lui-même en inter agissant avec le problème posé. Ce qu'en voit l'observateur n'en est alors qu'une partie bien ténue. Quel est le sens d'un signe produit par un élève sur une feuille de papier ? Les modèles ne sont pas des entités fixées une fois pour toutes. Ils se développent, voire se révisent au fur et à mesure des études, dans un rapport dialectique avec le réel ou une évocation de celui-ci. La substitution subite du modèle au réel au prétexte que les modèles seraient mieux saisissables et plus stables que le réel est une vue de celui qui sait.[5]

Il semble donc que ce soit bien cela qui nécessite toute une élaboration théorique sur la place de l'expérience dans la construction des mathématiques en classe. Nous allons tenter de montrer qu'au sein des mathématiques constituées comme elles le sont actuellement, des milieux d'apprentissages qui renvoient à la mesure, dans les domaines

[5] « Rien, nous l'avons reconnu, ne nous autorise à poser en règle qu'un schéma et l'horizon de sa signification extérieure ne puissent jamais s'édifier simultanément dans une interdépendance réciproque. Si nous voulons tenir compte objectivement des démarches dont l'esprit humain est capable, la prudence conseille d'admettre le contraire – et les confirmations ne nous manqueront pas. » GONSETH 1974.

de la statistique, du mesurage des masses, et du numérique, produisent des rapports à l'expérience, différents certes mais cependant pas totalement indépendants

Afin de mieux préciser le propos, nous étudierons d'abord la singularité de l'expérience statistique déjà relatée par ailleurs [BRIAND 2005], ce qui nous obligera à repenser l'expérimentation dans les autres domaines.

2. Des expériences en mathématique dans trois domaines

2.1 Une situation fondamentale de statistiques : l'expérience à l'aide d'une machine de hasard

L'activité conduite avec des élèves de classe de seconde de lycée consistait à leur proposer de trouver un moyen sûr de connaître la composition d'une bouteille opaque contenant 5 billes : des rouges et des vertes. Il était possible, par retournement de la bouteille de voir à chaque fois une bille et une seule (il s'agit du principe du tirage avec remise). La bouteille ne devait pas être ouverte. Les bouteilles avaient été constituées et scellées avec les élèves en « aveugle ».

Il s'agit là de construire un milieu d'apprentissage auquel les élèves qui y sont confrontés envisagent des actions-observations qui elles-mêmes génèrent des présomptions[6] qui généreront petit à petit des conjectures, validées ou invalidées par de nouvelles actions intentionnelles : des expérimentations ; ces expérimentations-observations engendrant de nouvelles présomptions. L'impossibilité d'ouvrir la bouteille place d'emblée l'élève dans la situation d'un observateur qui doit « noter » des phénomènes. Les objets de l'expérience sont, de fait, des objets mathématiques : un tirage, une série de tirages, une somme à l'intérieur d'une série de tirages, une somme de séries de tirages. Le milieu d'apprentissage est constitué de signes produits par l'expérience.

Nous nous intéressons alors aux rétro-actions de cette situation. A la différence des situations adidactiques relatives à des familles de savoirs mathématiques à caractère déterministe, les rétro-actions ne seront pas de même nature, puisqu'il s'agit maintenant d'un modèle stochastique.

- pour qu'un élève puisse passer d'un constat à une prévision en vue d'une expérience à faire, il est nécessaire qu'il construise le concept d'expérience identique, d'expérience reproductible. En particulier, la définition d'un échantillon va dépendre de l'idée que se fait un élève d'une expérience. Qu'est ce qu'un échantillon ? Dès le début de l'expérimentation, une élève signifie clairement qu'elle prend en compte, dans l'expérience qu'elle conduit, l'ordre d'apparition des billes : **« on trouvera deux fois le même ordre »**. L'élève est

[6] Nous empruntons à Pierce la signification de « présomption » : « La *présomption* (…) fournit à celui qui raisonne, la théorie problématique que l'induction vérifie. S'étant trouvé confronté par un phénomène différent de ce qu'il aurait pensé trouver étant donné les circonstances, il en examine les traits saillants, et y voit quelque caractère ou relation remarquable, qu'il reconnaît aussitôt comme étant caractéristique de quelques conception se trouvant déjà emmagasinée dans son esprit, de telle sorte qu'une théorie se présente qui *expliquerait* (c'est-à-dire, rendrait nécessaire) ce qu'il a trouvé d'étonnant dans ces phénomènes ».

conduite à passer des deux « échantillons « RVVRVRRVVRRRVRV » et « VVRRVVVRRVRRVRR » à l'« échantillon « 8R et 7V.

- l'invalidation ou la validation de présomptions ne sont pas systématiquement repérables tant que le sujet ne dispose justement pas encore du modèle statistique : un élève qui pense qu'il y a 3 vertes et 2 rouges dans la bouteilles et qui, pour s'en assurer effectue 5 tirages et obtient 2 vertes et 3 rouges pourra, selon le modèle implicite dont il dispose produire des conclusions différentes : « j'avais tort » ou « ça ne prouve pas ».

- L'expérience ne renvoie pas systématiquement à la réalité du contenu de la bouteille, ce que les élèves peuvent pourtant penser.

- Des régularités apparaissent vite : voici une présomption : « plus on fera de tirages, plus on pourra affirmer des compositions de bouteilles avec certitude ». - -

- D'autres présomptions à propos des intervalles de décision lorsque l'on a calculé une fréquence sont plus aisées à étudier : Il est sans doute plus facile de décider à risque égal, avec moins de tirages, de la composition de 4R,1V puisque l'intervalle [0,7 ; 1[est plus grand que l'intervalle [0,5 ; 0,7] qui permettrait de prendre le risque de décider de la composition 3R,2V. En effet les intervalles de décision sont les suivants :

Intervalle des fréquences des billes rouges	Décision à prendre
0	0 rouge et 5 vertes
]0 ;0,3]	1 rouge et 4 vertes
[0,3 ; 0,5]	2 rouges et 3 vertes
[0,5 ; 0,7]	3 rouges et 2 vertes
[0,7 ; 1[	4 rouges et 1 verte
1	5 rouges

Afin de mieux expliciter ces nouveaux savoirs d'expériences, le professeur peut organiser un milieu de référence enrichi à l'aide d'un programme effectué sur un tableur : l'élève entre une composition de bouteille et demande 15, 25, 100, 500 ou 1000 tirages. Le programme propose le résultat de ces tirages avec effectif et fréquence.

Pour mieux tester l'hypothèse : « plus on fera de tirages, plus on pourra affirmer des compositions de bouteilles avec certitude », le professeur propose de mettre sur un graphique en abscisse le nombre de tirages, en ordonnée le résultat d'un expérience (statistique) et ce qui constitue de leur point de vue la meilleure hypothèse à avancer. C'est ainsi que les élèves proposent de matérialiser par une droite parallèle à l'« axe des *x* » ce qui, pour l'observateur, constitue un début de travail probabiliste. Le sentiment de la probabilité porte sur la sûreté de la convergence.

À ce moment de l'expérimentation, les élèves ont donc compris l'existence de régularités malgré les aléas de l'expérience statistique. Mais effectuer un recueil de données statistiques ne constitue pas a priori une expérience construite. Nous pourrions parler tout au plus d'essais. Pour que, petit à petit s'installe l'idée d'une expérience, il va falloir que des régularités et de l'incertitude soient prises comme objet d'étude par les élèves, qu'ils conçoivent de nouvelles expériences et, qu'à terme, ils y reconnaissent une activité mathématique.

Cette confrontation à la singularité de l'expérience statistique nous permet de repenser l'expérimentation en mathématiques, en commençant à prendre les régularités comme objet d'étude.

a) Analyse

Nous avons repéré au moins trois familles de présomptions :

La première (découverte du lien entre fréquence et composition de la bouteille) apparaît très rapidement : « s'il y a plus de rouges [dans la bouteille], il y a plus de chances qu'elles viennent. »

La deuxième (prévisions moins risquées pour les compositions 4,1 et 1,4) apparaît plus tard : une élève affirme que si »**l'on a affaire à une bouteille de composition 4,1 alors la décision va être plus facile à prendre ».**

La troisième qui apparaît de façon plus diffuse d'abord : **« C'est bizarre comme truc, cela change à chaque fois, c'est pas prévisible, à moins qu'on le fasse 1000 fois … »**, puis plus précisément : la loi des grands nombres, en acte : »**il me semble que plus on fait de tirages, plus on aura un chiffre moyen qui sera donc plus des moyennes donc plus proche de la réalité…, plus on fait de tirages, plus on se rapproche de la réalité ».**

La mise à l'épreuve de ces trois présomptions s'effectue en classe de seconde à l'aide d'expérimentations qui ont affaire à des milieux de référence différents.

-La première vient d'expériences répétées assez spontanément dans le milieu fait de recueil de tirages et de la bouteille.

-La deuxième peut être traitée à l'aide de représentations graphiques. L'intervalle de décision pour la composition 4,1 est [0,7 ; 1[, soit une amplitude de 0,3 alors que l'intervalle de décision pour la composition 3,2 est [0,5 ; 0,7] soit une amplitude de 0,2.

-La troisième fait suite à une présomption qui va permettre l'organisation d'un dispositif organisé ou, du moins, d'envisager son organisation, comme si la certitude était déjà là. Mais dans chacun de ces cas, nous ne pourrons démontrer la consistance de ces conjectures naissantes.

b) La variabilité dans l'expérimentation

Admettre la non reproductibilité systématique d'un événement lors d'une expérience pourtant répétée dans les mêmes conditions, constitue une rupture fondamentale dans cette part du contrat déterminée par le rapport entretenu avec le milieu d'apprentissage. La situation doit donc permettre d'ébaucher un modèle prenant comme objet d'étude cette nouvelle incertitude : celle de la variabilité. L'expérience change de statut : une expérience sera une classe d'expériences élémentaires avec des théorèmes en acte qui apparaissent :

- l'ordre d'apparition des billes a-t-il de l'importance ?
- doit-on faire des séries de tirages de 5 ?

- peut-on ajouter des résultats de n tirages et m tirages effectués avec une même bouteille pour mieux pouvoir en tirer des conclusions comme si on avait effectué m+n tirages ?

D'où, par exemple, un travail de mesurage (effectif dans notre travail et non probabiliste) du « risque » lors d'une prise de décision en fonction du nombre de tirages.

En effectuant un « bon nombre » d'expériences, les élèves vont disposer d'un outil leur permettant de commencer à formuler des hypothèses prenant en compte le risque dans une prise de décision en fonction du nombre de tirages.

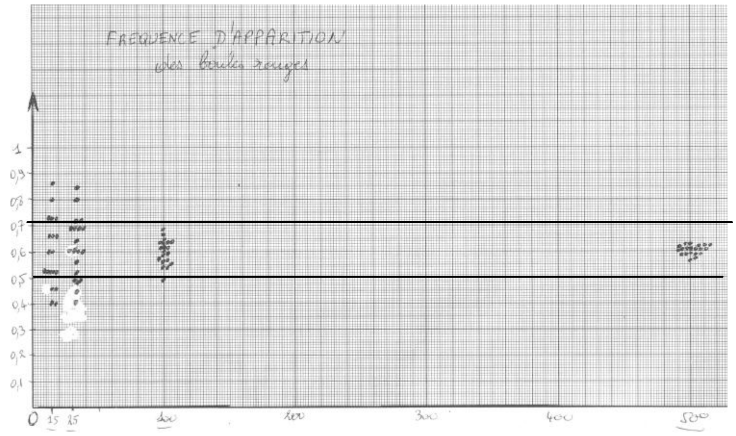


Tableau Travail d'élève sur la composition 3R 2V : séries de 20 expériences pour 15, 25, 100, 500 tirages.

Dans le travail ci-dessus, un groupe d'élève prend comme objet d'étude l'intervalle de confiance [0,5 ; 0,7]. Le dispositif expérimental permet de quantifier statistiquement l'évolution du risque en fonction du nombre de tirages : ici, 9 expériences sur 20 pour 15 tirages conduisent à une hypothèse fausse sur le contenu de la bouteille, 8 sur 20 conduisent à une hypothèse fausse pour 25 tirages, 1 sur 20 conduit à une hypothèse fausse pour 100 tirages, aucune pour 500.

C'est donc l'incertitude qui est aussi objet d'étude. Bien sûr, la modélisation est relativement primitive, mais les premières observations montrèrent qu'il y eu beaucoup d'obstacles à franchir avant que l'élève soit en mesure de considérer le milieu qui lui est proposé comme un milieu mathématique, c'est à dire dans lequel une organisation mathématique à construire allait lui permettra de mieux maîtriser les événements à venir. Cela bien sûr sans ouvrir la bouteille. Les rétro-actions attendues portant sur des classes de tirages.

c) Conclusion

Dans cette situation, il a fallu composer

- Avec la construction de la notion d'expérience. Qu'est ce qu'un sondage dans un ensemble que l'on ne conçoit pas encore ? Qu'est ce que répéter une expérience ? Quelle est la signification d'une expérimentation ? Comment vient l'idée d'ajouter des résultats d'expériences successives

- avec l'expérience en statistiques qui serait en fait l'élaboration d'une classe d'expériences ?

- Avec la pensée déterministe qui attribue au hasard l'imprévisibilité. La rationalité confondue avec le déterminisme mathématique peut, nous en faisons l'hypothèse, constituer un obstacle épistémologique, voire didactique, à la construction d'une pensée stochastique.

C'est cette confrontation à la singularité de l'expérience statistique qui nous oblige à sérieusement penser voire repenser l'expérimentation en mathématiques, ce que nous développons par la suite.

2.2 Une situation fondamentale de la fonction affine : l'expérience par mesurage prévisionnel et mesurage effectif de masses

Nous avons repris, en l'adaptant, la situation dite à l'origine du « poids du verre d'eau » [BROUSSEAU N. G. 1986]. L'origine de cette situation est la suivante : le professeur constate qu'à chaque fois qu'un problème met en scène le mesurage d'une grandeur qui ne peut être traitée indépendamment d'une autre grandeur (contenu et son contenant par exemple), les élèves commettent des erreurs alors qu'ils sembleraient disposer des connaissances pour les éviter.

La situation construite à partir de ce constat a pour objectif de permettre aux élèves d'être confrontés plusieurs fois à ce problème et de tirer profit des rétro-actions de la situation. Nous décrivons rapidement cette situation et relatons quelques résultats.

1- Première étape : le professeur a disposé sur le bureau, une balance (à affichage digital), un récipient en plastique de contenance d'environ 1 litre, et un verre. A côté du bureau est disposé un seau rempli d'eau. Le professeur prend le récipient, verse un verre d'eau dans ce récipient. Il demande alors aux élèves d'estimer ce que la balance indiquera lorsqu'il posera le récipient dessus. Chaque élève fait son estimation et l'écrit sur une feuille, puis le professeur inscrit lui-même les valeurs données par les enfants sur une droite numérique au tableau : prévisions dans un ordre croissant, ainsi que le nombre d'enfants qui ont prévu ces valeurs. Il demande alors à un élève de mettre le récipient sur la balance et de lire ce qu'elle indique. S'en suit une analyse des estimations écrites : l'enseignant ne fait aucun commentaire : ni approbation, ni désapprobation.

2- Deuxième étape : « Je verse un deuxième verre d'eau dans le récipient : quel poids prévoyez vous maintenant ? Ecrivez votre prévision sur votre cahier. ». Le déroulement est le même que celui de la première étape : prévision par les enfants, recueil des prévisions par l'enseignant sur la droite numérique puis vérification par la pesée.

3- Troisième étape : elle se déroule comme les deux premières : l'enseignant verse un troisième verre d'eau dans le récipient. Les enfants prévoient. Relevé des prévisions (et inscription sur la droite), puis vérification par la pesée.

Remarque : Au cours de ces trois étapes, l'enseignant ne fait aucun commentaire même sous la pression des enfants.

4- Quatrième étape : l'enseignant verse un quatrième verre d'eau.

a) Même consigne que dans les étapes précédentes.

b) Recueil de 2 ou 3 prévisions seulement et orales.

c) Avant de recueillir les autres prévisions, l'enseignant propose un débat aux enfants. Il leur quels sont ceux qui sont sûrs de leur prévision et pourquoi ils ont choisi ce nombre ? Il leur propose de discuter pour essayer de savoir qui a raison et d'exposer leur méthode avant la pesée. (Mais en aucun cas, il ne donne son opinion). Il leur propose également de changer leur prévision, après le débat, s'ils le désirent.

d) Rectification des prévisions : l'enseignant arrête la discussion au moment où il le juge utile. Les enfants qui le souhaitent rectifient le poids qu'ils avaient marqué sur leur cahier.

e) Vérification : comme lors des trois premières étapes.

5- Cinquième étape :

a) Consigne : « Je verse un cinquième verre pour ceux qui désirent utiliser la méthode énoncée par les camarades qui vous ont convaincus. Faites vos prévisions ».

b) Même déroulement que lors des étapes précédentes : prévision, relevé des prévisions, vérification par la pesée.

Fin de la séance. Une deuxième séance est prévue qui se déroulera le lendemain et qui servira à institutionnaliser les savoirs découverts lors de cette séance.

a) Etude théorique

Dans le cadre de cette expérience « du verre d'eau », le passage à ce qui sera une fonction affine de R+ sur R+ vient de la modélisation qui permet de rendre compte en généralisant.

La première étape de la modélisation après la mesure de 201 gr vient du fait que les écarts entre les différentes pesées : 402 gr, 401 gr, 380 gr, 350gr permettent de commencer à dénoncer le modèle de la linéarité.

La seconde étape permet, pour une majorité d'élèves de se saisir du résultat : un verre d'eau pèse 140 grammes (argument statistique lié aux approximations de mesures) pour commencer à agir ensuite selon : si on ajoute n alors la masse augmente de $n \times 140$. Cette proportionnalité implicite correspond aux expériences des élèves, elle peut être réintroduite explicitement par le professeur. Le poids du verre d'eau s'obtient ensuite facilement par 201 gr-140 gr.

Dans une démarche expérimentale, on peut donc généraliser par une fonction affine de R+ sur R+ $x \longrightarrow 61 + x \times 140$, généralisation qui pourrait être envisagée au collège.

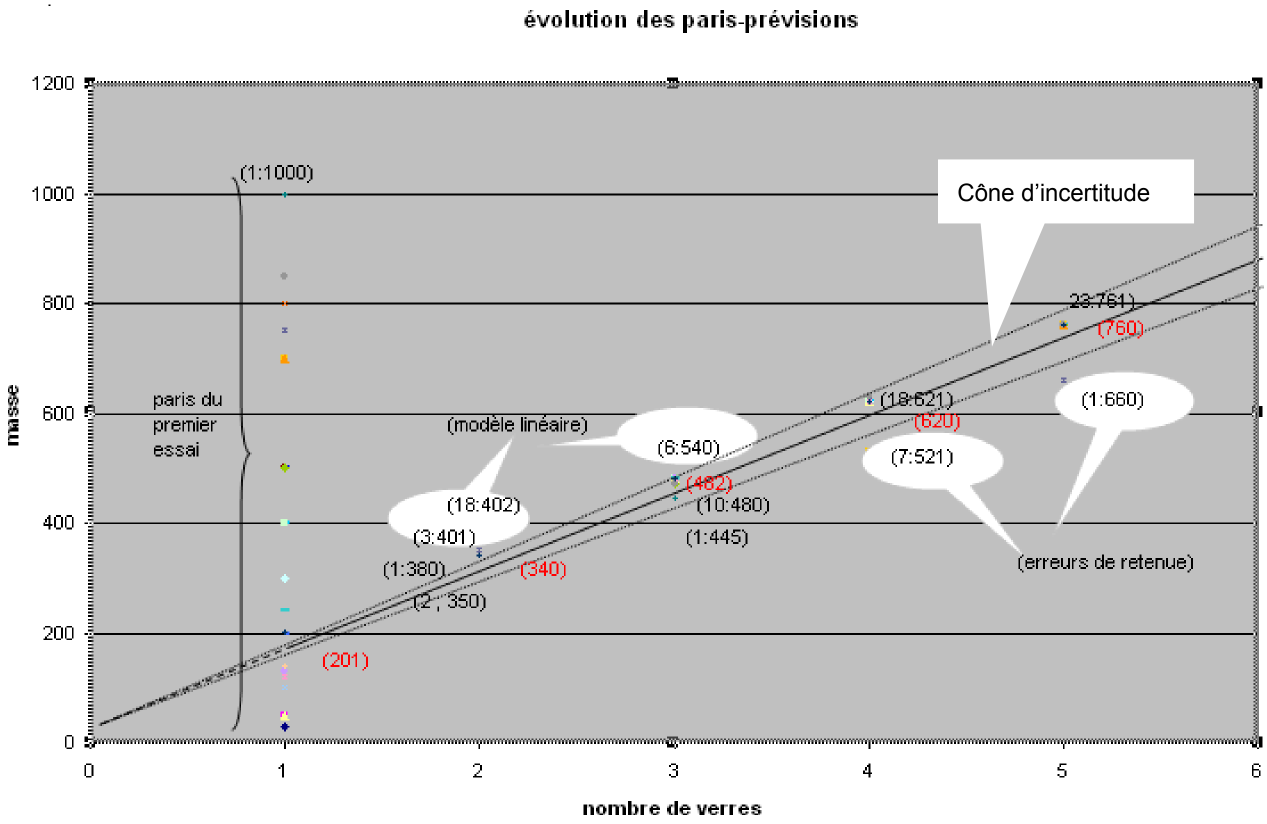
b) Relevé d'observation dans une classe de CM2

Dans ce tableau, la première colonne indique une stratégie gagnante lorsqu'elle est possible. Les deux premières n'en n'étant pas. La deuxième colonne constitue une analyse a priori des stratégies attendues. La troisième colonne est le résultat d'une observation conduite dans un CM2[7] en fin d'année scolaire. La quatrième colonne, qui sera reprise dans le tableau qui suit, résume les analyses qui suivirent l'observation.

	Stratégie gagnante	**Analyse a priori (S_i : stratégies attendues)**	**Propositions des élèves, interprétation possible , et résultats expérimentaux.**	**Observations**
1	? devinette	Prévision fondée sur l'expérience des objets pesants.	Les élèves ont prévu de 30gr à 1000gr. *Résultat expérimental : m1= 201gr.*	hasard
2	? devinette	S1 : 2m1 S2 : m1+m tel que m<m1.	18 élèves ont prévu 402gr. 3 élèves ont prévu 401 gr. Un élève a prévu 400gr. Deux élèves ont prévu 350 gr. Un élèves a prévu 380gr. *Résultat expérimental : m2 = 340gr.*	1- Rejet du hasard 2- Proportionnalité. 3- Approximation tenant compte de la première expérience..
3	m2+(m2-m1)	S1:m2+(m2- m1) S2 : m1+m2 S3 : 2m2	6 élèves ont prévu 540gr. (m1 + m2) Un élève a prévu 445 gr 10 ont prévu 480gr. Un a prévu 471 gr. Sans doute : (m1+m2/2) avec erreur de calcul (4 au lieu de 3). *Résultat expérimental : m3 = 482gr.*	1- Rejet de la proportionnalité. 2- Conservation de l'écart.
4	m3+m2-m1 m3+m3-m2	S1:m3+m2-m1 S2:m3+m3-m2 S3 : 2m3 S4 : m3+m2	Phase 1 : le P. demande à trois élèves : 622, 520, 580. puis, après discussion : ______________________________ Phase 2 : 14 élèves autour de 621 gr. 7 élèves autour de 521-540 gr. 4 élèves autour de 630 gr. *Résultat expérimental : m4 = 620gr.*	Contrôle des erreurs de retenue
5	m4+(m2-m1) ou toute stratégie identique.	S1:m4+(m2-m1) ou toute stratégie identique.	Tous les élèves autour de 759-770 gr. sauf une à 660 *Résultat expérimental : m5 = 760g.*	Encore des erreurs de retenue.

[7] Ecole Flornoy à Bordeaux, classe de D.Géron.

c) Analyse graphique



Légende :
(n) : résultat de l'expérience.
(e:n) : effectif d'élèves ayant prévu la valeur n.
(bulles) : origine des erreurs commises (qui font sortir du cône d'incertitude lié à l'expérimentation elle-même).

d) Conclusion

Tous les élèves parviennent lors de la sixième étape à produire un résultat reconnu plausible. Mais si la plupart a su formuler un raisonnement par induction[8] (justifiant les premières erreurs par la non prise en compte du poids du verre d'eau), d'autres ont continué à travaillé par présomption, ce qui conduit à des procédures de masquage :

[8] « L'*induction* a lieu quand celui qui raisonne soutient déjà une théorie d'une manière plus ou moins problématique (allant d'une appréhension interrogative pure à un penchant très fort, peu mélangée de doute) ; et ayant pensé que si cette théorie est vraie, alors dans certaines conditions certains phénomènes devraient se produire (des phénomènes inattendus et imprévus, de préférence), il passe à l'expérience, c'est-à-dire qu'il réalise ces conditions et guette les phénomènes prédits ».C. S, Peirce

l'élève qui déclare lors de la première expérience : « normalement ça doit être 200 » et qui déclare ensuite : « j'ai toujours ajouté 150 » n'est pas vraiment mis en défaut. Tel autre qui dit « j'ai toujours ajouté 140 », et donc qui réussi, a-t-il pour autant rejeté le modèle de la proportionnalité ?

Le milieu d'apprentissage est constitué de pesées qui produisent des nombres[9]. Les élèves construisent cette fois un modèle mécaniste[10] [LEGAY J.M. 1997] de prévision qui est sans cesse déstabilisé par des résultats du mesurage effectif. Ils doivent donc apprendre à « faire avec » les erreurs inévitables dues à l'action de mesurage. Ils produisent des prévisions en se fondant d'abord sur une présomption de linéarité, puis un modèle prédictif fondé sur cette présomption ayant été dénoncé par l'expérience, ils re-construisent un autre modèle qui devra résister aux aléas du mesurage effectif dans l'expérimentation. Il s'agit, certes, pour l'observateur, d'un autre type d'incertitude que dans le cas d'une expérience statistique, mais qu'en est-il pour l'élève ? L'élève, dépité qui déclare : « c'était 201 puis 340 alors j'ai ajouté 139 et ça a donné 482 ! c'est jamais pareil» fait-il la différence entre les rétro-actions comme celles vues dans un système statistique et celui-ci ? D'ailleurs, le modèle linéaire n'est pas abandonné par tous les élèves dès la première rétro-action.

2.3 Une situation fondamentale de l'addition

a) L'expérience avec tirelire et comptabilité

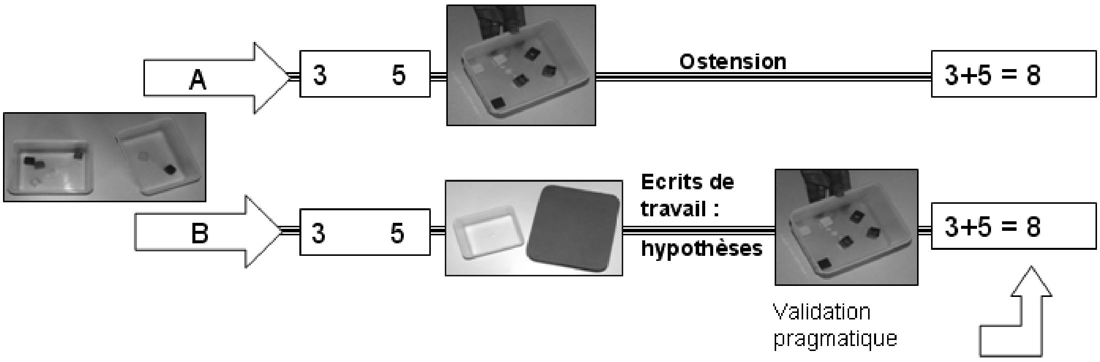
Etudions maintenant, à l'aide d'un exemple, vu en cours préparatoire cette fois, en quoi de nouvelles conditions vont générer un travail de modélisation qui peut être rapproché des deux autres. Pour cela, comparons deux moments de classe

Dans un premier temps, le professeur montre des cubes dans une boîte : les élèves comptent collectivement 3 cubes. Le professeur écrit alors 3 au tableau. Le professeur montre des cubes dans une autre boîte : les élèves comptent collectivement 5 cubes. Le professeur écrit alors 5 au tableau. Il réunit alors les deux contenus dans une seule boîte. Les élèves comptent collectivement 8. (Un professeur qui s'en tiendrait à cette séquences écrirait alors au tableau : 3 + 5 = 8.)

Dans un second temps, le professeur montre des cubes dans une boîte : les élèves comptent collectivement 3 cubes. Le professeur écrit alors 3 au tableau. Le professeur montre des cubes dans une autre boîte : les élèves comptent collectivement 5 cubes. Le professeur écrit alors 5 au tableau. Il réunit alors les deux contenus dans une seule boîte en cachant le contenu. Les élèves doivent prévoir, par des écrits de travail, le nombre de cubes qui sont cachés. Pour réussir dans cette activité, les élèves vont se servir de 3 et 5 et développer des stratégies écrites variées qui pourront permettre (ou non) d'obtenir 8 (sous une forme ou sous une autre : des bâtonnets dessinés, des cubes dessinés, la suite 1, 2, 3, etc., bref à l'aide de signes). L'ouverture ultérieure de la boîte permettra da valider ou d'invalider les hypothèses.

[9] L'expérimentation première conduite par N et G Brousseau utilisait des balances roberval, produisant un milieu différent.
[10] Page 41 l'auteur distingue trois types de modèles : les modèles d'hypothèse, les modèles de mécanismes, les modèles de décision et de prévision.

Les deux étapes (A et B) semblent se ressembler, mais, si le milieu matériel est le même, le milieu d'apprentissage est différent. (Les écrits qui auraient pu être produits dans un premier temps ne feraient que répéter ce qui a déjà été découvert). Les écrits produits dans un second temps permettent des interrogations, des présomptions, des conjectures.



Mais cette conclusion serait un peu simplificatrice. Pour produire l'anticipation de l'action dans la deuxième situation, il est nécessaire que les élèves se soient appropriés le milieu, sinon, il ne sera pas possible de « rentrer » dans la seconde situation[11].

Le professeur installe donc le premier milieu de référence afin que les élèves sachent ce qui se jouera lorsque la boîte sera recouverte. Certains anticiperont (ils entreront dans une dialectique : action formulation validation) et construiront les premiers théorèmes, répertoires additifs, mais d'autres n'auront peut-être rien fait.

Donc pointer la différence entre les deux moments devrait plutôt consister, d'une certaine façon à montrer la nécessité de la première dans un processus d'apprentissage adaptatif et son insuffisance pour s'assurer que des mathématiques s'y sont construites. En somme, la première situation dit la règle d'un jeu. La seconde permet de jouer et de comprendre ce qu'est gagner, ce qu'est perdre et d'en tirer la connaissance.

Autrement dit, dans cet exemple, si tout est visible, le sujet peut réussir sans intentionnalité. Le rituel du comptage suffira à maintenir un contrat acceptable dans la classe. Le fait que le milieu d'apprentissage devienne celui des signes fait que l'expérience va se déplacer d'un milieu matériel à un milieu fait de symboles (homomorphique plus que modèle). La réponse à « combien il y en a dans la boîte » ne se construit plus dans le milieu matériel, mais se génère dans un milieu formel de signes. Les connaissances ainsi construites (devenant formulables en savoirs) vont permettre de prévoir.

[11] Ce sont ces conditions qui, en sont temps, furent étudiées par J.PERES dans l'activité dite du « jeu du trésor » [PERES J.] lors de la phase de constitution de la collection de référence.

b) Contester la réalité

Mais allons plus loin : est-ce suffisant pour que l'on puisse parler de modèle installé? Imaginons le dispositif précédent de la deuxième partie de la séquence. Et trichons un peu : au moment d'ouvrir la boîte, il y a 9 cubes (le professeur a ajouté un cube à l'insu des élèves). Tout d'un coup, il y en avait 3 et 5 et maintenant 9. Les élèves qui ne savent rien ne vont pas contester, mais ceux qui avaient commencé à élaborer un modèle prédictif manifesteront-ils de la surprise ? Si nous nous plaçons du côté de l'observateur, nul doute que l'élève doit être étonné, ce qui signifierait un modèle bien installé qui résiste : cela n'est pas possible puisque « 3 et 5 ça fait 8 et pas 9 ». Mais la compréhension de l'addition suppose un principe de non contradiction (3 et 5 ne peuvent produire qu'un seul résultat dans une addition) qui fait partie de la construction du modèle. C'est alors un rôle différent du milieu et de l'expérience au sens classique du terme que le professeur assigne : celui de contester la réalité parce que le modèle devient consistant et affirme «8 ».

Convenons que cette démarche n'est pas fréquente en classe et qu'elle choquera peut-être en formation. Mais elle provoque un double questionnement :

- celui des modèles et de leur gestation, de leur vie autonome
- celle de la place, dans l'enseignement à cette autre fonction du savoir : être un instrument d'interrogation, de contestation, et pas seulement de prévision.

Nos conceptions déterministes des modèles enseignés nous font sans doute négliger des aspects de leur construction. On retrouve dans des domaines différents, des effets semblables. Après tout, du côté du sujet, la surprise devant un événement inattendu dans un phénomène déterministe est de même nature que celle ressentie devant un événement aléatoire. Qui peut conclure à la place de l'élève ?

2.4 Conclusions

- Dans ces trois situations, le milieu recèle une « machinerie » qui a une autonomie dans l'expérience. L'autonomie est à la fois inhérente aux propriétés de la machine (voire implémentée dans la machine) (milieu de référence) et relative à une règle du jeu que le professeur impose par convention, les interdits que l'on se donne[12] etc. (milieu d'apprentissage).

- Dans les trois situations c'est la fréquence des confrontations des présomptions à l'expérience qui modifie la nature même de l'expérience (parce que les attentes évolues), y compris dans la troisième où le milieu objectif est, du point de vue de l'observateur, plus simple. Nous avons au moins trois sortes de confrontations à l'expérience : celle de type statistique, celle du mesurage sur des grandeurs continues (masses d'eau), et celle du mesurage de grandeurs discrètes (les premiers nombres).

- Dans une première approche, nous affirmions [BRIAND 2005] que :

[12] Pour une étude proche et plus détaillée, voir [CONNE 2007].

-dans la situation de l’addition, le milieu des signes qui va générer un modèle prédictif est assez proche de la réalité. Le travail sur des petites quantités discrètes fait que l’incertitude est faible.
- dans la situation dite du « poids du verre d’eau », les élèves construisent cette fois un modèle de prévision qui, nous l’avons vu, est sans cesse déstabilisé par des résultats du mesurage effectif. D’emblée, le modèle en gestation doit « prendre ses distances » avec l’expérience. Cette incertitude ne peut être ignorée des élèves et du professeur, elle fait partie de l’objet d’étude.
- dans la situation mettant en jeu des phénomènes aléatoires l’élève est, cette fois, confronté à un nouveau type d’incertitude : la non reproductibilité d’une expérience pourtant construite à dessein. Le modèle en gestation doit s’émanciper bien au-delà des deux autres domaines que nous avons explorés dans cet article.

- Cette fois, en revenant sur la variabilité dans une expérience statistique nous avons cherché à étudier si les effets d’autres expériences dans des domaines a priori plus déterministes étaient si différents pour les élèves qu’il y paraît pour l’observateur.

L’étude que nous venons de conduire nous fait avancer l’hypothèse que les expérimentations en mathématiques en classe dans ces trois domaines, même si elles produisent des rétro-actions qui, du point de vue de l’observateur ne sont pas de même nature, produisent à peu de choses près, du côté du sujet, les mêmes effets. Pour ainsi dire, il n’y aurait pas de raison objective pour que ces rétro-actions soient de nature différente au moment de l’apprentissage.

3. Le rôle déterminant du professeur dans la structuration du milieu

3.1 Faire s’engager dans l’aventure des signes

Les mathématiques de l’école primaire et du début du collège sont tellement culturellement connues qu’il semble que leur construction paraisse aller de soi et que leur transmission puisse se réduire à leur exposé. Toutefois ces mécanismes apparemment déjà construits le sont pour les adultes et leur appropriation par les élèves passe par une mise en scène qui favorise une re-construction, une reprise, par une appropriation progressive d’ensemble de signes, de règles, de modes de raisonnement, qui est l’essence même de l’activité mathématique. La pratique des mathématiques n’est pas seulement la connaissance d’un ensemble de vérités instituées qu’il faut connaître et appliquer mais aussi la construction d’un langage ayant sa propre consistance et, le cas échéant, qui permette d’aider à contrôler une situation. (contre-rôle c'est-à-dire un ensemble de signes qui assure la tenue, en double, de la situation).

C’est ici, nous semble-t-il que, tout en maintenant l’a-didacticité d’une situation, le rôle du professeur auprès d’élèves jeunes est déterminant à la fois pour « tirer » ceux-ci vers des expérimentations qui « s’aventurent » dans le domaine des signes, y maintenir une curiosité et de l’intérêt, savoir prendre en compte, faire partager la genèse de vrais théorèmes qui pourraient n'être considérés que comme de simples remarques. Nous prendrons encore une fois un exemple :

Une enseignante fait lancer un dé par chaque élève. A chaque lancé, elle écrit le résultat au tableau et met, en même temps dans une tirelire, un nombre correspondant de jetons. Au bout de 9 jeux (par exemple), est écrit : 5+4+2+4+1+6+4+4+5. Elle pose alors la question suivante : « Quand j'ouvrirai la tirelire, à chaque fois qu'il y aura 10 jetons, on les échangera contre un bonbon. D'après vous, combien de bonbons on va pouvoir avoir ? ».

Dès cet instant, plusieurs élèves, en montrant le texte au tableau affirment « il n'y en aura pas dix, tu vois bien [en montrant ce qui est écrit], il n'y a que 6, maximum ».

Dans cette première phase, le professeur a constitué un premier milieu de référence (le dé, la tirelire, Une règle du jeu, des joueurs, une production écrite) à partir duquel il installe un milieu d'apprentissage en ajoutant la question relative aux bonbons. Il s'agit de tenter d'anticiper des faits expérimentaux (il y aura (ou non) possibilité d'avoir des bonbons), de les vérifier d'abord de façon empirique (« on n'a qu'à ouvrir la boîte »), passage obligé pour que s'installe un milieu propice à une autre activité : celle d'une construction théorique faite de langage essentiellement écrit qui permettra l'élaboration de processus de vérification d'une autre nature, devenant autonome, allant jusqu'à négliger l'ouverture de la tirelire.

Qui d'autre que le professeur peut organiser cette mise en scène qui va créer le désir « d'en savoir plus » sans ouvrir la boîte ? Qui fera comprendre aux élèves qu'au-delà de la règle du jeu, cet interdit de l'ouverture de la boîte est une invitation à d'autres découvertes ?

3.2 L'émergence de connaissances

La suite des séances, fondée sur une dialectique entre construction progressive d'un modèle (travail sur ce que nous appelons la suite additive, mais qui n'a pas du tout ce sens en début de lecture par les élèves) et mise à l'épreuve des faits, fera que les élèves déboutés de leurs affirmations premières par la vérification expérimentale matérielle (en fait, les rétro-actions construites par un milieu antagoniste), vont progressivement construire des règles elles-mêmes vérifiées expérimentalement, mais cette fois sans recours au matériel, par les seules premières déclarations signes de naissance d'un modèle en gestation.

Là encore, qui d'autre que le professeur saura organiser les déclarations orales ou les marques écrites, ne pas ignorer des découvertes apparemment anodines qui sont la marque d'une re-construction de l'expérience par le discours ou/et dans l'écriture naissante ? Comme par exemple :

- l'addition entre deux signes consécutifs permet de prévoir le nombre de jetons obtenu à la suite de deux lancés,
- Cette première règle permet de commencer à interroger l'affirmation première « il ne peut pas y avoir de 10 , puisque ce n'est pas écrit »

- L'addition entre deux signes, même non consécutifs permet de prévoir le nombre de jetons obtenus à la suite des lancés correspondants, indépendamment des autres lancés,
- Une fois que l'on a pris un signe, celui-ci ne peut-être repris
- le résultat d'une addition entre deux signes peut être lui-même combiné aux autres signes.

Le milieu s'enrichit donc progressivement, par l'action organisatrice du professeur. Ces règles d'action devenues théorèmes en acte ont pris naissance à partir des situations d'actions. Mais où est le réel ? Où commence le modèle ? La frontière n'est sans doute pas nette, ce qui veut dire qu'une part a été explicitée dans le modèle et une part reste implicite dans l'action qu'on porte sur lui. Mais toutes ces « briques » sont nécessaires pour comprendre ultérieurement ce que sera une suite additive.

Le professeur se sert de la première situation d'action puis de formulation en confrontation avec un milieu matériel pour construire progressivement une nouvelle situation d'action et de formulation, cette fois dans un milieu de signes, étape obligée pour l'élaboration d'un modèle.

A un moment, l'ouverture de la boîte sera considérée comme superflue. Le professeur a réussi lorsque les élèves manifestent fièrement leur désintérêt pour l'ouverture de la boîte. A ce stade, les écrits qui étaient d'abord descriptifs, constituent un système de preuves consistant. Dans cette nouvelle situation (de validation), les énoncés produits dans la situation de formulation entrent à leur tour dans le milieu. On a en fait un emboîtement, chaque situation constituant le milieu de la situation suivante.

3.3 Conclusion

Le rôle du professeur est plus souvent étudié dans les phases qui suivent : la connaissance produite dans une situation est une connaissance personnalisée et contextualisée. Le professeur aura à décontextualiser cette connaissance. La notion d'institutionnalisation boucle le processus par lequel, sous la responsabilité de l'enseignant, cette connaissance va être dépersonnalisée, décontextualisée, et explicitement rattachée aux formes officielles du savoir mathématique visées par l'institution. Les deux processus de dévolution et d'institutionnalisation peuvent alors être perçus comme des processus inverses reliant deux niveaux d'analyse : le niveau a-didactique et le niveau didactique.

Nous faisons l'hypothèse que cette même situation, dont le caractère d'a-didacticité est avéré, peut ne pas jouer son rôle si le professeur ne joue pas le sien. Nous avons vu qu'à plusieurs reprises, ses interventions sont déterminantes pour faire en sorte que son implication dans le respect de la règle du jeu ne soit pas uniquement perçue par les élèves comme un acte d'autorité mais comme une invitation à s'aventurer vers d'autres expérimentations, celles des mathématiques. Nous aurions pu reprendre l'exemple de l'expérience des statistiques comme celui du verre d'eau, deux situations au cours desquelles le rôle du professeur comme « complice » d'une aventure qui changera de milieu d'investigation est déterminant.

Il s'agit bien finalement de distinguer deux formes d'enseignement :
- celle permettant d'attribuer à l'expérience la recherche d'un nouveau modèle qui permet de se passer de l'ouverture de la boîte. L'enseignant doit donc faire en sorte que ce modèle implicite se manifeste.
- celle qui maintient le modèle dans l'implicite, comme naturalisé, sans être à l'écoute de ses manifestations même les plus infimes, c'est-à-dire en ne s'occupant que de l'expérience à laquelle il est associé.

Cette distinction nous permet de mieux appréhender ce que ce type de situation suppose et qui est habituellement appelé « dévolution » en le complétant : à savoir que l'élève oublie au moins momentanément l'intention didactique du professeur et accepte la responsabilité mathématique de la résolution du problème, le professeur engageant l'élève dans les changements nécessaires de milieux.

4. Une attente de l'institution : le listage des compétences

Nous venons d'étudier le rôle du professeur dans le déroulement d'une situation. Nous avons dit que ses interventions étaient déterminantes pour faire en sorte que ses rappels à la règle du jeu soient perçus comme une invitation à s'aventurer vers d'autres expérimentations. Or, le professeur est souvent bien seul face à l'émergence des premières déclarations des élèves lors des apprentissages, premiers signes de modèles implicites d'actions. Ces déclarations d'élèves, manifestations spontanées de connaissances, ne sont pas répertoriées dans les documents dont le professeur dispose couramment.

« L'irrésistible ascension » du terme de compétence[13] focalise actuellement le système enseignant sur le listage d'items le plus souvent calqués sur l'organisation des savoirs, ceci dans chaque discipline[14]. Mais les compétences ne sont pas actuelles, elles s'actualisent et se manifestent en performances à l'occasion d'accomplissement de tâches. Or, nous avons vu que c'est en observant de près les tâches à accomplir que nous pouvons commencer à repérer des assertions dont nous savons qu'elles sont nécessaires à la construction de compétences dans un domaine donné. Si ces modèles implicites d'action, ces « briques » élémentaires ne sont pas objet d'étude, il y a un risque à négliger toute cette part délicate du métier de professeur qui consiste à repérer, faire vivre les savoirs en devenir, ou encore pas très bien formulés, mais qui sont nécessaires à la construction des savoirs établis.

On ne commence pas à réfléchir à l'enseignement par un listage de compétences.

Reprenons la construction des « suites additives ». Les compétences à construire pour s'approprier une suite additive sont générées, pour partie, par un ensemble de règles d'action attendues, dont nous avons mis en évidence certaines par une analyse de

[13] Formule empruntée à Marc Romainville dans un article de 1996.
[14] Il est difficile de parler de compétence hors du couple compétence/performance, ou, mieux encore hors de la triade : tâche-compétence-performance.

la situation construite par le professeur. Ces règles se chevauchent, se construisent progressivement de façon dialectique par plusieurs fréquentations avec les situations et ces situations ne s'organisent pas comme s'organisent les savoirs.

Par exemple, dans une situation de comparaison de suites additives, d'autres règles d'action vont apparaître. En créant un milieu dont la comparaison de deux suites est la solution, de nouveaux théorèmes vont être construits :

Soit 5+3+2+6 jetons dans une boîte et 3+6+1+5 jetons dans une autre boîte : prévoir dans quelle boîte il y a le plus de jetons :

Nous pouvons repérer de nouvelles règles d'action qui sont, pour une part proches des précédentes, pour d'autres nouvelles :

- le signe effectif 5+3 de l'une et le signe imaginé 3+…+5 de l'autre signifient des quantités égales (règle d'action vue précédemment), ce qui veut dire que, dans les deux cas, il faut isoler des signes parmi d'autres
- dans les deux cas cet isolement ne se fait pas de la même manière et on peut éventuellement supposer une différence en disant que la seconde est recherchée par le lecteur (ne relate pas l'action vécue) alors que la première lui est donnée (proche de l'action vécue)
- la seule lecture de 2+6 et de 6+1 (on notera que les autres signes « + » ont disparus) permet de prévoir (nouvelle règle d'action).

En focalisant toute l'énergie des enseignants sur un listage de compétences directement issu de l'organisation des savoirs, au détriment de l'observation des manifestations contextualisées des connaissances des élèves, de règles d'actions, de ce qui est important d'observer, de ce qu'il faut faire vivre, il y a un risque non négligeable d'égarer les professeurs vers des formes officielles d'organisation naturalisée de savoirs qui ne correspondent pas aux émergences et aux organisations des connaissances des élèves dans une situation donnée.

5. Situations en collège : raisonnements et démonstrations.

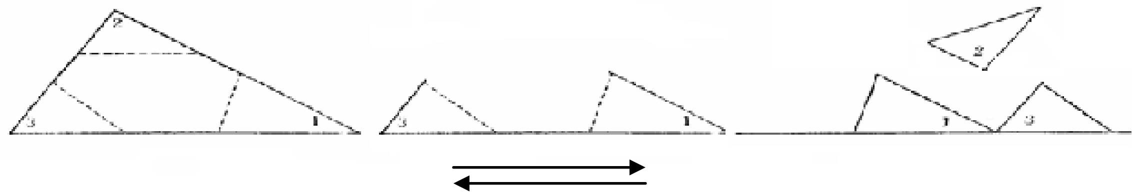
A l'école primaire, les théorèmes ne seront pas prouvés par la démonstration. La validation pragmatique puis syntaxique font souvent référence à la contingence matérielle ou arithmétique. D'ailleurs, certains de ces théorèmes sont des règles de lecture construites à partir du milieu objectif [BLOCH 2001] pour maintenir une cohérence syntaxique là où il y a déjà une cohérence sémantique. On a vu qu'en cours d'apprentissage, le professeur a comme projet de conduire les élèves à avoir suffisamment confiance en leurs théorèmes pour qu'ils s'émancipent progressivement du milieu matériel tout en y retournant pour l'étudier avec les nouveaux outils mathématiques.

Le passage au collège marque le passage à la démonstration. Quelles formes d'expériences peuvent susciter progressivement la nécessité de démontrer ? Nous allons simplement poser quelques jalons pour une réflexion.

5.1 L'inférence probable

Selon Pierce [BALDWIN J.M. 2007], est « inférence probable toute inférence qui ne considère pas sa propre conclusion comme étant nécessairement vraie (bien que les faits soient tels que les prémisses les assertent) ».

Voici une activité proposée pour l'organisation d'une séquence de classe au collège : 25 élèves ont dessiné 25 triangles (donc très probablement non superposables entre eux). Le professeur propose de découper les angles[15]



et demande s'il est possible de construire une figure où les angles de la base, en glissant, viennent encadrer l'angle au sommet. [CONNE 2007 in RDM à paraître].

25 triangles découpés vont faire que, 25 fois, il ne sera pas possible de réfuter l'alignement. L'activité ne fait donc qu'évaluer une probabilité objective. Sa validité ne dépend pas d'une uniformité de la nature, ni de quoi que ce soit de ce genre. L'uniformité constatée va tendre à donner à cette probabilité une valeur très grande, faire de cette inférence une inférence probable. Il s'agit d'un raisonnement par induction mené collectivement : relier un certain nombre de faits constatés en une loi générale. La vérité des conclusions est toujours tributaire de l'apparition d'un contre exemple. Pourtant l'induction garantit bel et bien la véracité de ses conclusions sur tous les cas qu'elle aura préalablement envisagés. « Par conséquent le raisonnement par induction est un raisonnement valide et relativement pertinent qui ne garantit pas la portée de ses conclusions ». Enfin, C.S.PIERCE ajoute « c'est par induction que l'expérience contribue à accroître nos connaissances. »..

Là encore, l'approche de la vérité est ici d'abord de nature statistique : « il est fort peu probable que l'angle ne soit pas plat ». « Il est fort probable que l'alignement recrée le même angle au milieu ». Seul à cet instant l'enseignant sait qu'il a à sa disposition une démonstration qui permettra d'attribuer à l'événement ²« la somme des angles d'un triangle est de 180° » la probabilité 1.

Certes, de telles expériences de découpage permettent de montrer[16] que *64 = 65*. Mais si 25 élèves qui dessinent 25 triangles différents aboutissent à 25 « angle plats » ou à 25 « troisièmes angles », peut-on considérer cela comme une simple

[15] Plus habituellement, cette situation consiste à faire une conjecture sur ce que pourrait être la somme de la mesure de ces trois angles. La conjecture consistant à penser que la somme des angles d'un triangle est un angle plat est alors ici tirée par induction, à supposer que l'angle plat ait au préalable été identifié comme un objet qui existe en tant qu'angle.

[16] Pour 64=65, nous faisons référence au célèbre paradoxe de Lewis Carroll. Voir annexe. Il existe de nombreux autres paradoxes liés à des découpages comme par exemple les triangles de Gardner.

coïncidence[17] ? Travailler sur l'inférence pourrait consister à demander aux élèves de chercher à construire un triangle de telle façon que le résultat reconnu lors de la première expérience vienne à être invalidé. Les élèves auraient approché ce qu'ils estimeraient être « toujours vrai ». Acquérir la forte conviction d'une vérité attendue par une expérimentation, mais mise à mal en discréditant le procédé expérimental, (le paradoxe de L Caroll), est un motif très fort pour vouloir « en avoir le cœur net ». La démonstration sera ultérieurement le juge de paix dont nous parlions plus haut.

5.2 L'inférence probable mise en scène dans un manuel scolaire :

1. Construis un triangle quelconque ABC. Place le milieu I du segment [AB]. et le milieu J du segment [AC]. Trace la droite (IJ).
   Que remarques-tu ?
2. Recommence la même construction avec deux autres triangles bien différents.
3. Formule une conjecture.
4. Sur l'une de tes figures, place le point K symétrique du point I par rapport au point J.
   a) Que peut-on dire du quadrilatère AICK ?
   b) Que peut-on en déduire pour les segments [AI] et [CK] ?
   c) Que peut-on en déduire pour les segments [BI] et [CK] ?
   d) Que peut-on dire du quadrilatère IBCK ?
   e) Que peut-on en conclure pour les droites (IJ) et (BC) ?

Complète la phrase suivante :
Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est ....
....

Cet exercice propose de faire un constat en question 1. La relance en question 2 va permettre de passer, on le souhaite, du constat à une expérimentation puis à une conjecture. Le changement de niveau de milieu nécessaire pour passer à la question 4 est grand. Les élèves ne peuvent construire seuls cette démonstration.

Reprenons la démarche des médiatrices vue en début de l'article, et l'injonction paradoxale du professeur qui demande de construire un petit triangle (celui que les trois médiatrices constituent lorsque l'on fait une construction sans connaître le résultat) qui soit plus grand en choisissant un autre triangle de départ. Le professeur sait que cette injonction n'est pas acceptable. Il attend que les élèves formulent la bonne hypothèse : « elles se coupent peut-être en un même point » qui est en fait l'inférence probable « on ne peut pas affirmer qu'elles ne se coupent pas en un même point », retournée.

Pour en revenir à l'exercice ci-dessus, il suffirait d'une modification légère du texte du manuel[18] pour que le milieu d'apprentissage soit plus efficace (rendu plus antagoniste) et permette la formulation d'une inférence probable : il suffirait de proposer : « Construis un triangle ABC. Place le milieu I du segment [AB] et le milieu J

---

[17] Le milieu d'apprentissage constitué par le professeur est naturellement différent de celui qui aurait été construit à partir de photocopies répliquant 25 fois le même triangle.
[18] Suggéré en formation PLC2 2007 par J.M. Digneau IUFM Bordeaux.

du segment [AC]. La droite (IJ) coupe-t-elle la droite (AC) ? » ; puis « Construis un autre triangle ABC afin que la droite (IJ) coupe la droite (BC) ». Il s'agit là encore d'une injonction paradoxale qui ne vise pas autre chose que de placer les élèves dans un milieu qui résiste et faire déclarer par ceux-ci : « elles sont sans doute parallèles », autre façon de dire « on ne peut pas réfuter le fait qu'elles ne se couperont pas ». Le changement de milieu de la question 4 serait alors une réponse à un questionnement collectif et pas seulement à une conjecture vague comme « il semble qu'elles sont parallèles ». Les élèves auraient eu à « prendre position. » La démonstration n'aurait pas été pour autant plus simple, mais peut-être mieux acceptée. La fonction d'une démonstration est la validation. Mais la démonstration seule ne contribue en rien à l'invention ni à la découverte.

On retrouve là ce qui a été abordé plus haut : rejeter une hypothèse avec une probabilité assez forte d'avoir raison d'effectuer ce rejet est aussi formateur. Dans cet exercice, bien sûr, le rejet de l'hypothèse s'accompagne non pas d'un risque, ou plutôt d'un risque qui sera rendu nul par une démonstration.

5.3 L'inférence probable et la démonstration

Prenons cette fois un exemple numérique : *« on prend trois entiers naturels consécutifs on soustrait au carré de celui du milieu le produit des deux autres. Quel résultat obtient-on ? ».*

Les élèves constatent sur un ou deux essais que le résultat est 1. Ils expérimentent alors sur d'autres exemples numériques et constatent que le résultat est toujours 1. Là encore peut-on trouver trois entiers consécutifs pour lesquels le résultat ne serait pas 1 ? Devant la résistance à ne pas trouver un exemple, les élèves peuvent avancer l'hypothèse que l'on ne peut pas rejeter le fait que cela doit faire toujours 1. Le « toujours » suppose un changement de milieu pour l'expérience afin de permettre de poser un autre problème sous une forme générale[19] : la façon dont les écritures littérales seront maniées influera sur la résolution certes, mais le changement de milieu expérimental (celui des écritures littérales) aura construit la démonstration. Nous sommes partis d'une expérience numérique. Si l'on dispose de l'algèbre avec laquelle on peut prouver que $n^2 - (n-1)(n+1)$ est égale à 1 on n'a pas besoin de vérifier pour tous les entiers[20], mais l'aller-retour entre le milieu numérique et le milieu des écritures littérales permet de s'assurer de ce qu'est une preuve théorique. Combien d'élèves assurent eux-mêmes ce pontage entre les résultats théoriques obtenus et les faits expérimentaux numériques que cela permet de prévoir ?

[19] On pourra consulter l'ouvrage suivant PRESSIAT A. et coll. 1996 « Les débuts de l'algèbre au collège » INRP pour d'autres exemples.

[20] Le passage aux écritures littérales permet en outre de « s'évader » du contexte du problème : la démonstration permet de s'affranchir de l'hypothèse « entier naturel » (en remplaçant le terme « consécutif » par « distants de 1 »). Le modèle issu de l'expérimentation a permis d'aller au delà de l'exercice initial.

5.4 Conclusion

Il y a donc des savoirs qui ne peuvent tout au plus être fréquentés qu'expérimentalement pour une classe d'âge donnée, et d'autres savoirs qui peuvent faire l'objet d'une construction à l'aide d'une situation d'apprentissage. Mais dans l'expérimentation, on rencontre des « degrés de validité des inférences » et des formes de raisonnements qui ne sont pas éloignés de formes de raisonnements attendues dans le domaine de la variabilité. Celles de réfuter l'hypothèse nulle (ne pas être un angle plat, ne pas être parallèles, ne pas être égal à 1) avec une probabilité forte fondée sur des expériences et donc de repasser à un mode de raisonnement plus classique qui consiste à prouver en démontrant, cette fois dans un autre milieu.

6. Mathématiques et sciences expérimentales

Dans l'impossibilité de travailler cette approche de façon générale ici, nous prendrons simplement l'exemple des sciences et vie de la terre et nous nous bornerons à ne faire qu'effleurer le sujet.

Historiquement[21], des exemples de débats nous éclairent sur les méthodes d'investigations expérimentales et l'opposition entre les empiristes qui valorisaient l 'expérience comme source de connaissances et les rationalistes qui insistaient sur le « pouvoir de l'esprit ». Par exemple, lorsque Harvey[22] accompli ce pas décisif théorique qui consista à passer de la circulation du sang au postulat de la *circularité* du mouvement du sang, il semble bien qu'il ne trouva pas de preuve expérimentale (les microscopes n'existaient pas et les vaisseaux capillaires ne faisaient pas partie du réel de l'époque). Le professeur Caspar Hotmann qui enseignait près de Nuremberg l'accusa de « quitter l'habit de l'anatomiste » pour se mettre subitement à jouer les mathématiciens : « En vérité, vous ne vous servez pas de vos yeux et vous ne leur commandez pas de voir, mais au lieu de cela, vous vous fiez à des raisonnements et à des calculs, vous supputez le nombre de pintes et, jusqu'à la plus petite unité près, la quantité de sang qui doit, à des moments soigneusement déterminés, passer dans les artères en l'espace d'une petite demi-heure. ». Harvey réfutait en fait l'hypothèse que le sang partait du cœur sans y repasser en se servant d'une « grammaire nouvelle » : celle de la mesure. Il consacra beaucoup de son temps à réfuter toutes les objections qu'il avait pu soulever lui-même contre sa propre hypothèse, sans pouvoir disposer des outils qui lui auraient permis de valider sa théorie.

A propos des Sciences et vie de la terre, cette fois dans le cadre de l'enseignement, voici ce qu'écrit ORANGE lors d'une observation de classe sur la nutrition [ORANGE C. 2005] : « dans notre cadre théorique, l'enjeu […] est de faire construire aux élèves des nécessités constitutives du savoir scientifique sur la nutrition :

---

[21] Voir [BOORSTIN 1983] Dans cet ouvrage, il est aussi question de la remise en cause de l'expérience de la tour de Pise de Galilée par A.Koyré. (Pour plus de détails, voir pour cela annales de l'Université de Paris, 1937 où Alexandre Koyré démontre l'inexistence de cette expérience.)

[22] Médecin anglais1578-1657.

ce sont, entre autres, les nécessités de transformation et de tri. Ces nécessités, qui correspondent à des concepts scientifiques au sens où nous les avons définis, ne doivent pas être confondues avec les idées correspondantes : évoquer que les aliments sont broyés, qu'ils sont séparés entre « bons et mauvais » aliments etc., est bien différent d'énoncer la nécessité de ces processus. D'une certaine façon on peut dire que ce débat a comme fonction didactique de faire passer les élèves des idées aux nécessités, ou encore des solutions qu'ils ont construites à la problématisation explicite. » Pour l'auteur, c'est l'absence de modèle et l'empirisme qui dominent l'enseignement de sa discipline.

A propos des mathématiques, En 2002, l'Inspection Générale écrivait à propos du collège : *« les programmes de mathématiques mettent l'accent, depuis de nombreuses années, sur le rô1e essentiel de la mise en activité de l'élève et du choix de situations de recherche et de découverte devant permettre une meilleure assimilation des notions. Pour être efficace, une activité devrait s'appuyer sur une mobilisation de connaissances antérieures et permettre la mise en place et la structuration de nouvelles connaissances ; elle devrait alterner les périodes de recherche et d'initiative individuelles et les mises en commun, préludes à l'institutionnalisation finale. ».* C'est dire si dans la pratique, l'enseignement des modèles restent assez souvent dominant.

Est-ce à dire que les mathématiques sont garanties contre l'empirisme ? Bien sûr que non : dans les exemples que nous avons étudiés (la bouteille, la boite tirelire), l'ouverture de ces contenants n'est pas le but. Nous avons voulu montrer le rôle déterminant de l'enseignant à ce propos.

Sans pouvoir faire une analyse très approfondie, nous pourrions dire qu'en mathématiques, les modèles sont le plus souvent enseignés. En SVT, ils sont le plus souvent ignorés. Ces deux chemins en sens inverse sont sans doute une première piste pour ouvrir un débat sur l'enseignement comparé de chacune de ces deux disciplines.

Conclusion

En début de l'article nous posions quelques questions : quelle est la place de l'expérience dans l'activité mathématique ou plutôt qu'est ce qu'une expérience dans une activité mathématique ? Nous nous sommes servis d'une situation d'apprentissage relative aux statistiques en ce qu'elle nous paraît être un révélateur de ce qui peut être observé plus difficilement dans d'autres situations plus habituelles. Nous avons voulu observer des formes de raisonnement qui pourraient sans doute avoir plus de place qu'elles en ont à l'heure actuelle, et montrer que l'approche statistique n'est pas si éloignée de certaines formes de présomptions, d'inductions, elles-mêmes à l'origine de déductions.

Dans cette aventure de la mathématisation, le professeur joue un rôle déterminant et, à notre avis, trop peu analysé. Ses marges de manœuvres sont grandes, y compris dans des situations d'apprentissage par adaptation, et nous semble-t-il peu balisées. L'organisation des situations suppose un guidage du professeur non pas de nature didactique mais généré par une très grande écoute des connaissances en construction chez les élèves, cela afin de les inviter à d’autres expériences, mathématiques celles-là.

Bibliographie

ASSUDE T. 2002, 'Travaux pratiques au collège ? Conditions et contraintes d'émergence et de vie d'un dispositif', in M. Bridenne (eds) *Nouveaux dispositifs d'enseignement en mathématiques dans les collèges et les lycées*, IREM de Dijon.

BALDWIN J.M. 2007 dictionnaire Extraits de : Les textes logiques de C.S. Peirce. Traduction : M. Balat, G. Deledalle et J. Deledalle-Rhodes. Nîmes, Champ social éditions, 2007.

BLOCH I. 2002, 'Différents niveaux de modèles de milieux dans la théorie des situations didactiques : recherche d'une dialectique scientifique entre analyse théorique et contingence.' Actes de la 11ème Ecole d'Eté de DDM, Corps 2001, pp. 125-140, Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOORSTIN 1983, *Les découvreurs* Collection bouquins R.Laffont ed.

BRIAND J. 2005, 'Une expérience statistique et une première approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple', *RDM* Vol. 25/2, pp 247-282.

BROUSSEAU G. 1975, 'Une expérience de premier enseignement des statistiques et probabilités', 26ème congrès CIAEM.

BROUSSEAU G. 1986, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. Recherches en didactique des mathématiques, vol.7/2. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble, pp.33-115.

BROUSSEAU G. 1988, 'Le contrat didactique : le milieu', *RDM*, Vol. 9.3

BROUSSEAU N. et G. 1992, 'Le poids d'un verre d’eau : problèmes de mesurage en CM1', *Grand N* n°50.

BRUN J. & CONNE F La notion de compétence, révélateur de phénomènes transpositifs dans l’enseignement des mathématiques, in *L'énigme de la compétence en éducation,* Dolz et Ollagnier, éds., Raisons Educatives n° 2, De Boeck Université, p. 95-114.

CHEVALLARD Y. 1989, Le passage de l’arithmétique à l’algèbre dans l’enseignements des mathématiques au collège, petit x IREM de Grenoble n° 19 PP. 43-72

CHEVALLARD Y. 2004, Pour une nouvelle épistémologie scolaire, *Cahiers pédagogiques* n° 427.

Y. CHEVALLARD Y., CONNE F. GUIET J. *Jalons à propos d'algèbre*. Cahier Interactions Didactiques, no 3 second tirage augmenté, 1991 (premier tirage 1984) Equipe de didactique des mathématiques de la F.P.S.E. et Séminaire de psychologie de l'université de Neuchâtel.

CONNE F. 1999, *'Faire des maths, faire faire des maths, regarder ce que ça donne'*, in *Le cognitif en didactique des mathématiques*, Les Presses de l'Université de Montréal

CONNE F. 2004, *« Problèmes de transposition didactique »* petit x n°64 P.64-65

CONNE F. 2007, *« Une vue sur l'enseignement des mathématiques au primaire et au secondaire en Suisse Romande »* Petit x n° 73

DESCAVES A. 1992, *'Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes'* Hachette.

DIAS T. & DURAND-GUERRIER V. 2003, 'Expérimenter pour apprendre en mathématiques', *Repère IREM,* n°60

GONSETH F. 1974, '*Les mathématiques et la réalité'*, Albert Blanchard

HACKING I. 1989, '*Concevoir et expérimenter*', Christian Bourgeois

HOUDEMENT C., COPPE S., 2002, « Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire » Grand N, n°69, p. 53-62

MERCIER A. & SENSEVY G., 1999, « Pourquoi faire encore des mathématiques à l'école ? », in *Le Télémaque*, n°15 - Enseigner les sciences

GRENIER D. & PAYAN Ch., 2002, 'Situations de recherches en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation', *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2002*, Paris : Université Paris7.

LEGAY J.-M. 1997, *'L'expérience et le modèle : un discours sur la méthode'*. Paris : INRA Éditions.

ORANGE C. 2005, 'Problématisation et conceptualisation en sciences et dans les apprentissages scientifiques' *Les Sciences de l'éducation, Pour l'ère nouvelle*, 2005-3, 69-93.

PERES J. 1984, *'Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle'* Thèse Bordeaux 2.

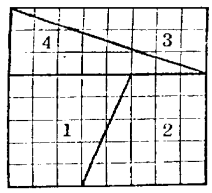
PRESSIAT A. et coll. 1996, *'Les débuts de l'algèbre au collège'* INRP

VERGNAUD, G. (1991) La théorie des champs conceptuels. Recherches en didactique des mathématiques, (pp.133-170), vol.10/2.3. La Pensée Sauvage Editions, Grenoble.

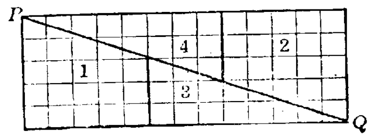
Annexe

Paradoxe de Lewis Carroll ou comment 64=65 Découpez les pièces 1, 2 3 et 4 de la première figure et replacez les comme dans la figure 2. On a 8x8 soit 64 cases en haut et 13x5 soit 65 cases en bas. Cherchez l'erreur[23]…

L'erreur, pratiquement impossible à déceler, vient de ce qu'en réalité il y a un léger jour le long de ce qui paraît être la diagonale [PQ]. Ce jour a la forme d'un parallélogramme très effilé et il a environ 1 mm de largeur dans sa partie médiane, son aire totale est 1 cm², c'est-à-dire la différence entre 65 et 64.



(a)



(b)

[23] Un site à visiter pour les paradoxes (entre autres) :
http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/paradoxe/textes/fibo1.htm